



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ELISAMA DE ARAÚJO SILVA OLIVEIRA

O problema de corte de estoque com data de entrega

Campinas-SP

2016

Elisama de Araújo Silva Oliveira

O problema de corte de estoque com data de entrega

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos básicos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada.

Orientadora: Kelly Cristina Poldi

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA ELISAMA
DE ARAÚJO SILVA OLIVEIRA, E ORIENTADA PELA
PROFA. DRA. KELLY CRISTINA POLDI.

Campinas-SP

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): FAPESP, 2014/22570-6

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

OL4p Oliveira, Elisama de Araújo Silva, 1989-
O problema de corte de estoque com data de entrega / Elisama de Araújo Silva Oliveira. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Kelly Cristina Poldi.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Problema de corte de estoque. 2. Simplex (Matemática). 3. Programação linear. 4. Programação inteira. I. Poldi, Kelly Cristina, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The cutting stock problem with due date

Palavras-chave em inglês:

Cutting stock problem

Simplexes (Mathematics)

Linear programming

Integer programming

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Kelly Cristina Poldi [Orientador]

Carla Taviane Lucke da Silva Ghidini

Silvio Alexandre de Araujo

Data de defesa: 14-12-2016

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 14 de dezembro de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). KELLY CRISTINA POLDI

Prof.(a). Dr(a). CARLA TAVIANE LUCKE DA SILVA GHIDINI

Prof.(a). Dr(a). SILVIO ALEXANDRE DE ARAUJO

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Ao meu esposo e meus pais
Jônathas Douglas, Walter Carlos e Sheila.

Agradecimentos

Ao meu Deus, pois sem Ele eu não seria ninguém e se cheguei até aqui e por ajuda Dele.

Ao meu amado esposo Jônathas Douglas, por todo amor, carinho e dedicação por esses 10 anos ao meu lado. E quem me incentivou a vim para Campinas para fazer o mestrado no IMECC. E quem sempre foi um professor para mim, me ajudando em todos os momentos difíceis.

Aos meu pais, Walter e Sheila, por sempre me apoiarem, investirem e possibilitarem os meus estudos.

À minha orientadora Kelly Cristina Poldi pela orientação, pelos conhecimentos compartilhados que elevaram a qualidade do trabalho e enriqueceram meus conhecimentos.

Aos Professores da FCA, *campus* Limeira, Washington Alves de Oliveira e Carla Tavianne Lucke da Silva Ghidini pelas sugestões no Exame de Qualificação.

Às minhas amigas Ariquele, Tiemi e Petra e aos colegas que fizeram parte do percurso pelas conversas, apoio e estudos em grupo.

Agradeço à FAPESP pelo auxílio financeiro.

Resumo

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste em cortar um conjunto de objetos disponíveis em estoque para produzir um conjunto de itens em quantidades e comprimentos especificados, de modo a otimizar uma função objetivo. Tal problema tem inúmeras aplicações industriais e tem sido bastante estudado na literatura. Nesta dissertação tratamos do PCE unidimensional com data de entrega, ou seja, além do planejamento dos padrões de corte e suas respectivas frequências (quantas vezes um padrão de corte deve ser cortado) estamos também interessados em atender a demanda respeitando a data de entrega dos pedidos. Nesta pesquisa, propomos dois modelos de programação linear inteira para o PCE com data de entrega; o primeiro modelo proposto considera o PCE com data de entrega com um único tipo de objeto em estoque em uma quantidade ilimitada e o segundo modelo considera o problema com diferentes tipos de objetos em estoque disponíveis em uma quantidade limitada. A abordagem mais utilizada na literatura para a solução do PCE é o método simplex com geração de colunas proposto por Gilmore e Gomory [6, 7]; assim, utilizamos essa abordagem de resolução para os modelos propostos. Os testes computacionais foram realizados no OPL/CPLEX para validação dos modelos propostos.

Palavras-chave: problema de corte de estoque, data de entrega, programação linear, programação inteira, geração de colunas, modelagem matemática.

Abstract

The Cutting Stock Problem (CSP) consists of cutting a set of objects available in stock to produce a set of items in specified amounts and lengths in order to optimize an objective function. Such problem has numerous industrial applications and it has been extensively studied in the literature. In this dissertation, we treat the CSP one-dimensional with due date, ie, beyond the planning of the cutting patterns and their frequencies (how many times a cutting pattern should be cut) we are also interested in meeting the demand respecting the date of receipt of releasing the requests. In this research, we present two integer linear programming formulation for the CSP with due dates; the first one considers a single type of stock object available in unlimited amount and the second one considers the problem with different types of stock objects available in limited amount. The mostly used approach for solving cutting stock problems in the literatura is the simplex method with column generation proposed by Gilmore e Gomory [6, 7]; so, we applied the column generation technique to solve our proposed models. Computational experiments were carried on OPL/CPLEX in order to validate the proposed models.

Keywords: cutting stock problem, due-date, linear programming, integer programming, column generation, mathematical modeling.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Exemplo de um PCE unidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados e c) exemplos de padrão de corte.	19
Figura 2 – Exemplo de um PCE bidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados e c) exemplos de padrões de corte.	20
Figura 3 – Exemplo de um PCE tridimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados e c) exemplos de empacotamentos.	20
Figura 4 – Exemplo de forma dos itens (a) regulares e (b) irregulares.	23
Figura 5 – Padrão de corte unidimensional.	25
Figura 6 – Horizonte de planejamento para o PCEDE.	28
Figura 7 – Grafo para gerar padrões de corte iniciais (Fonte: adaptado de Reinertsen e Vossen [15]).	32
Figura 8 – Grafo para o problema <i>pricing</i> (Fonte: adaptado de Reinertsen e Vossen [15]).	34
Figura 9 – Distribuição do tempo em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100	60
Figura 10 – Distribuição do desperdício de material em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100	61
Figura 11 – Distribuição do atraso em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100	61
Figura 12 – Distribuição do tempo em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100	65
Figura 13 – Distribuição do desperdício de material em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100	65
Figura 14 – Distribuição do atraso em cada classe de problemas para as penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100	66

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resumo da tipologia de Dyckhoff (Fonte: Dyckhoff [4]).	19
Tabela 2 – Data de entrega como uma capacidade de corte.	28
Tabela 3 – Padrões de corte gerados pelo grafo.	32
Tabela 4 – Dados para o Problema 1.	50
Tabela 5 – Solução do Problema 1.	53
Tabela 6 – Dados para o Problema 2.	54
Tabela 7 – Soluções relaxada e inteira do Problema 2 com $w_{it} = 1$. O valor da função objetivo do problema relaxado é 2303,89 e do problema inteiro é 2305,00.	54
Tabela 8 – Soluções relaxada e inteira do Problema 2 com $w_{it} = 10$. O valor da função objetivo do problema relaxado é 2631,28 e do problema inteiro é 2579,00.	54
Tabela 9 – Dados para o Problema 3.	55
Tabela 10 – Soluções relaxada e inteira do Problema 3 variando a penalidade por atraso.	56
Tabela 11 – Caracterização das 8 classes para o PCEDE com um tipo de objeto. . .	57
Tabela 12 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 1$	59
Tabela 13 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 10$	59
Tabela 14 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 100$	60
Tabela 15 – Caracterização das 8 classes para o PCEDE com diferentes tipos de objetos.	62
Tabela 16 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 1$	64
Tabela 17 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 10$	64
Tabela 18 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 100$	64
Tabela 19 – Solução dos 20 problemas da Classe 1 para penalidade $w_{it} = 1$	67

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Breve revisão da literatura	15
2	O PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE	17
2.1	Tipologias para problemas de corte e empacotamento (C&E)	17
2.1.1	Tipologia de Dyckhoff (1990)	18
2.1.2	Tipologia de Wäscher et al. (2007)	22
2.2	Descrição do problema de corte de estoque unidimensional	25
3	REVISÃO DO PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM DATA DE ENTREGA	27
3.1	Definição do PCEDE unidimensional	27
3.2	Revisão da literatura	28
3.2.1	Proposta de Reinertsen e Vossen (2010)	28
3.2.2	Proposta de Arbib e Marinelli (2014)	35
4	PROBLEMA DE CORTE DE ESTOQUE COM DATA DE ENTREGA	41
4.1	Modelagem para um tipo de objeto	41
4.2	Modelagem para diferentes tipos de objetos	43
5	ABORDAGEM DE RESOLUÇÃO	47
5.1	Geração de Colunas para o PCE	47
5.1.1	O problema <i>pricing</i>	48
5.2	Solução para o problema inteiro	49
5.3	Exemplos de aplicação do método de solução	50
5.3.1	Problema 1	50
5.3.2	Problema 2	53
5.3.3	Problema 3	55
6	EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	57
6.1	Testes para um tipo de objeto	57
6.1.1	Análise dos resultados do primeiro conjunto de testes	60
6.2	Testes para diferentes tipos de objetos	62
6.2.1	Análise dos resultados do segundo conjunto de testes	64
6.3	Determinar uma solução inteira ótima	66
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PROPOSTAS FUTURAS	68

REFERÊNCIAS	70
------------------------------	-----------

Capítulo 1

Introdução

O Problema de Corte de Estoque (PCE) consiste em cortar itens a partir de um conjunto de objetos grandes que se tem em estoque, para atender a demanda. O objetivo pode ser, por exemplo, minimizar os desperdícios que têm um impacto direto nos custos de produção.

O PCE é essencial no planejamento da produção em várias indústrias, tais como indústrias de papel, vidro, móveis, plástico, chapas de madeira, aço, têxtil, etc. Os objetos podem ser bobinas de aço, bobinas de papel, placas de alumínio, chapas de metal, placas de madeira, entre outros.

Um PCE pode ser modelado como um Problema de Programação Linear Inteira (PPLI). Um PPLI é um problema de programação linear na qual as variáveis de decisão, ou pelo menos algumas delas, são inteiras. Para problemas pequenos é fácil identificar e enumerar os elementos do domínio e encontrar o elemento que minimiza (problema de minimização) ou maximiza (problema de maximização) o valor da função objetivo mas, em problemas muito grandes, isso pode tornar-se muito caro computacionalmente. Assim, é necessário desenvolver métodos de resolução eficientes para a resolução dos problemas.

De acordo com Dyckhoff [4], um PCE pode ser classificado de acordo com a dimensão do objeto a ser cortado, ou seja, unidimensional (1D), bidimensional (2D) ou tridimensional (3D), quando uma, duas ou três dimensões dos objetos, respectivamente, são relevantes no processo de corte. No caso de problemas tridimensionais, o problema mais comum, na prática, é o problema de empacotamento, uma vez que a ideia de empacotar itens em um objeto é similar a ideia de cortar itens de um objeto.

Por exemplo, no caso 2D, em indústrias de vidro, os itens devem ser cortados a partir de grandes placas de material. Nesses tipos de aplicações, os objetos padronizados em estoque são retângulos, e uma função objetivo comum é conseguir alocar todos os itens, que foram pedidos (demanda), em um número mínimo de objetos em estoque. Estes problemas de otimização são conhecidos na literatura como problemas de empacotamento

bidimensional em *bins* (*Two Dimensional Bin Packing Problem* (2DBPP)).

Em indústrias de papel, nas quais têm-se em estoque bobinas, o objetivo é obter os itens utilizando o comprimento mínimo de bobinas em estoque, tais problemas são conhecidos como problemas de empacotamento bidimensional em faixas (*Two Dimensional Strip Packing* (2SP)).

Os PCE's começaram a ser estudados por volta de 1940, embora as principais publicações tenham surgido apenas por volta dos anos 60. A primeira modelagem matemática para o problema de corte de estoque foi introduzida por Kantorovich [9] cujo trabalho foi publicado em 1960, embora tenha sido proposto em 1939.

Em problemas práticos de corte de estoque, o número de variáveis (colunas) é muito maior que o número de restrições (linhas) e tipicamente, cada coluna está associada a um padrão de corte. A cada iteração do método simplex temos de determinar uma nova coluna para entrar na base. Este problema torna-se impraticável devido ao grande número de colunas que devem ser investigadas. Para contornar este problema, Gilmore e Gomory [6], propuseram uma técnica de geração de colunas que é bastante eficiente para resolver o problema.

O foco desta dissertação é, inicialmente, o estudo de uma categoria de problemas pouco estudada, os PCEDE que deriva do PCE com a restrição de que os pedidos devem ser entregues em uma determinada data. O principal objetivo é propor um modelo matemático para o PCEDE. Baseado em modelos da literatura (Reinertsen e Vossen [15] e Arbib e Marinelli [1]), propomos, primeiramente, um modelo para o PCEDE com apenas um tipo de objeto em estoque disponível em quantidade ilimitada. Em seguida, estendemos esse modelo para o PCEDE com diferentes tipos de objetos em estoque disponíveis em quantidades ilimitadas. Ao final, realizamos testes computacionais para validar esses dois modelos propostos.

Este texto está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2, fazemos uma breve introdução sobre o problema de corte de estoque clássico, apresentamos também duas tipologias para os problemas de corte e empacotamento (C&E). No Capítulo 3, descrevemos a definição do problema de corte com data de entrega e expomos uma breve revisão de dois artigos da literatura que trata de tal problema. No Capítulo 4, expomos as modelagens propostas para o PCEDE com apenas um tipo de objeto em estoque em uma quantidade ilimitada e a extensão dessa modelagem para o problema com vários tipos de objetos em estoque disponíveis em uma quantidade limitada. No Capítulo 5, relatamos a abordagem de solução para o modelo proposto, utilizando o método simplex com geração de colunas, e exibimos também três problemas simples para exemplificar o método de solução. No Capítulo 6, apresentamos os testes computacionais realizados para validar os modelos propostos e fazemos uma análise dos resultados. No Capítulo 7, faremos as considerações finais e propostas futuras para este trabalho. E por fim, são apresentadas

as principais referências que serviram de base para o estudo desta dissertação. As figuras apresentadas nessa dissertação que não possuem fonte especificada foram produzidas pela autora.

1.1 Breve revisão da literatura

Em 1961, Gilmore e Gomory [6] apresentaram uma formulação matemática para o PCE unidimensional e propuseram o método simplex com geração de colunas para a solução da relaxação linear do problema que, pela primeira vez, resolveu problemas de grande porte para o caso unidimensional. Em 1963, Gilmore e Gomory [7] propuseram um novo método de solução para o problema da mochila e é apresentada uma formulação para o problema, realizando um estudo de caso no corte de papel. Neste trabalho, os autores também consideraram uma nova restrição, o número limite de lâminas de facas na máquina. Em 1965, Gilmore e Gomory [8] continuam o seu estudo e os métodos descritos nos trabalhos anteriores foram adaptados para o PCE bidimensional, acrescentando algumas restrições, a saber: o corte guilhotinado, estagiado e irrestrito.

Em 1999 e 2002, Valério de Carvalho [16, 17] propõe uma formulação alternativa para o PCE baseada em fluxos em arcos. Nesta formulação, uma solução válida para o PCE pode ser modelada como um conjunto de caminhos em um grafo acíclico de forma que os comprimentos dos arcos que constituem um caminho representam um padrão de corte.

Em 1996, Li [10] estuda o PCE bidimensional com data de entrega, e propõe três modelos de otimização. A pesquisa foi baseada no processo de produção em uma empresa que recebe pedidos diários e fabricam tampos de mesa de laboratórios médicos e químicos, em Austin, Texas. A produção dos tampos consiste em quatro etapas. Na primeira etapa, considerada a mais importante, peças retangulares são cortadas de placas em estoque, esse processo envolve muito tempo, pois há apenas uma máquina de corte. Na segunda fase, as peças são furadas. Na terceira fase, as peças são parafusadas umas às outras para formar os tampos. Na quarta fase, os tampos de bancadas de laboratório são lixados manualmente. Li [10] gerou dez problemas testes, que foram resolvidos utilizando três heurísticas e o limite inferior para o número mínimo de placas é obtido pelo modelo de corte de estoque de Li [10]. Os resultados computacionais mostram que as heurísticas desenvolvidas não exigem muito tempo computacional e podem ser facilmente implementadas.

De maneira geral, a solução de um PCE fornece um plano de corte que especifica tanto o conjunto de padrões de corte a serem utilizados quanto o número de vezes que tais padrões de corte devem ser utilizados. O plano de corte, no entanto, não aborda como a produção dos padrões resultantes é agendada e sim, quando o corte de um pedido é concluído. Sendo assim, em 2010, Reinertsen e Vossen [15] abordaram o PCE

unidimensional com Data de Entrega (PCEDE), no qual o plano de corte também especifica quando o item deve ser entregue. Os autores propuseram novos modelos de otimização combinatória e procedimentos de solução que resolvem o PCE quando são anexadas aos pedidos as suas datas de entrega.

Em 2013, Bennel et al. [2] abordaram o problema de *bin packing* bidimensional (2DBPP) com data de entrega. Nesse estudo, cada retângulo J tem uma data de entrega D_j , para $j = 1, \dots, m$, que define o tempo em que o corte do retângulo J deve estar completo. Além disso, o corte correspondente a qualquer *bin* leva um tempo constante P . Assim, cada retângulo j atribuído a um *bin* b tem um tempo de conclusão $T_j \leq bP$. O objetivo neste problema é minimizar o atraso máximo. Bennel et al. [2] propuseram um algoritmo genético que utiliza uma nova heurística de alocação para a decodificação do gene. Tal heurística foi baseada na heurística *best-fit* (BF) desenvolvida por Burke et al. [3]. Dessa forma, eles propuseram algumas adaptações e, desenvolveram a heurística *Best Fit Bin* (BFB) para o problema de *bin packing* bidimensional.

Em 2014, Arbib e Marinelli [1] estudaram o PCE unidimensional com Data de Entrega (PCEDE), propuseram uma formulação de programação linear inteira e desenvolveram heurísticas para cálculo de limitantes e um esquema de enumeração para determinar a solução do problema. Arbib e Marinelli [1] estudaram o modelo matemático proposto por Reinertsen e Vossen [15] e agregaram novas ideias a esse modelo, como por exemplo, levar em consideração os itens com comprimentos normalizados.

Capítulo 2

O problema de corte de estoque

Neste capítulo, comentamos o sistema de classificação dos PCE's elaborado por Dyckhoff [4] em 1990. A seguir, apresentamos uma nova tipologia elaborada por Wäscher et al. [19] em 2007, que estende a classificação dos PCE's inicialmente proposta por Dyckhoff [4] e faremos uma breve descrição do que chamamos de Problema de Corte de Estoque (PCE) clássico.

2.1 Tipologias para problemas de corte e empacotamento (C&E)

Uma tipologia é uma organização sistemática de problemas em categorias homogêneas com base em um conjunto de critérios e características. Um Problema de Corte e Empacotamento (C&E) consiste em alocar um conjunto de peças dentro de um objeto.

Uma tipologia para problemas de C&E busca caracterizar os problemas existentes, levando em conta algumas propriedades como, por exemplo, se temos somente um tipo de objeto em estoque, ou se temos diferentes tipos de objetos, se os itens possuem um determinado padrão, se os itens são retangulares. Um dos objetivos da tipologia é facilitar a busca de trabalhos já realizados, podendo os futuros pesquisadores da mesma classe de problemas realizarem aprimoramentos nos métodos ou comparações com novos métodos.

Uma tipologia fornece uma visão concisa de objetos relevantes e importantes. Além disso, ela ajuda a unificar definições e notações e, ao fazer isso, facilita a comunicação entre pesquisadores na área.

A estrutura dos problemas de C&E podem ser resumidos como se segue:

1. um conjunto de objetos (de entrada, estoque);
2. um conjunto de itens de tamanhos menores que do objeto (de saída, demanda).

Devemos selecionar alguns (ou todos) os itens, agrupá-los em um ou mais subconjuntos e atribuir a cada um dos subconjuntos um dos objetos em estoque de tal modo que a condição geométrica seja satisfeita, ou seja, os itens de cada subconjunto tem que ser colocado no objeto correspondente de tal forma que:

- todos os itens do subconjunto fiquem totalmente dentro do objeto;
- que os itens não fiquem sobrepostos.

Existe uma grande diversidade de problemas que podem ser definidos sob uma formulação geral de problemas de C&E e para que não haja problemas semelhantes com nomes diferentes, Dyckhoff [4] e Wäscher et al. [19] propuseram tipologias com o objetivo de padronizar e classificar essa diversidade.

2.1.1 Tipologia de Dyckhoff (1990)

Em 1990, Dyckhoff [4] percebeu a necessidade de uma tipologia para os problemas de C&E, pois notou que certos problemas que possuíam características semelhantes poderiam receber nomes diferentes na literatura. O autor apresenta, então, quatro critérios (características) segundo os quais os problemas são categorizados. Essas características são apresentadas na Tabela 1.

A seguir ilustramos nas Figuras 1, 2 e 3 alguns exemplos dessa classificação. Na Figura 1 está ilustrado o corte unidimensional, na Figura 2 está ilustrado o corte unidimensional, na Figura 3 está ilustrado o corte unidimensional.

A seguir, apresentamos as características de cada uma dessas quatro categorias:

Dimensionalidade

A característica mais importante é a dimensionalidade. A dimensionalidade é o número mínimo de dimensões de números reais necessários para descrever a geometria dos padrões. De acordo com a dimensionalidade, um PCE pode ser:

(1) unidimensional: quando apenas uma das dimensões (comprimento) do objeto é relevante no processo de corte. A Figura 1 exemplifica um PCE unidimensional.

(2) bidimensional: quando duas dimensões (comprimento e largura) do objeto são relevantes no processo de corte. Podemos encontrar este tipo de problema em indústrias de placas de vidro, placas de madeira, entre outras, nas quais placas retangulares precisam

Tabela 1 – Resumo da tipologia de Dyckhoff (Fonte: Dyckhoff [4]).

1.	Dimensionalidade
	(1) unidimensional;
	(2) bidimensional;
	(3) tridimensional;
	(N) N-dimensional com $N > 3$.
2.	Tipo de atribuição
	(B) usar todos os objetos e uma seleção dos itens;
	(V) usar uma seleção de objetos e todos os itens.
3.	Classificação dos objetos
	(O) um objeto;
	(I) vários objetos de um mesmo tipo;
	(D) vários objetos de tipos diferentes.
4.	Classificação dos itens
	(F) alguns itens de tipos diferentes;
	(M) muitos itens e muitos tipos;
	(R) muitos itens e alguns tipos (não congruentes);
	(C) congruentes.

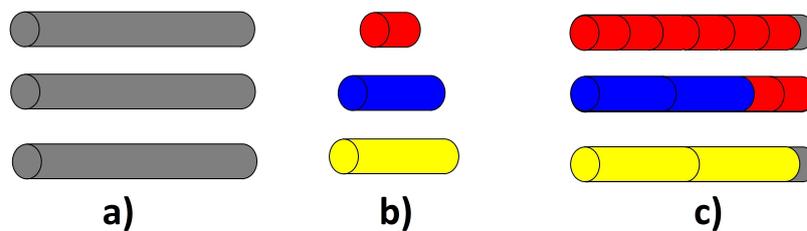


Figura 1 – Exemplo de um PCE unidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados e c) exemplos de padrão de corte.

ser cortadas em peças menores (itens) de forma a atender a uma certa demanda. A Figura 2 ilustra um PCE bidimensional.

(3) tridimensional: quando três dimensões (comprimento, largura e altura) do objeto são relevantes no processo de corte. Nesse tipo de problema, é necessário alocar itens tridimensionais dentro de objetos maiores. A Figura 3 ilustra um PCE tridimensional.

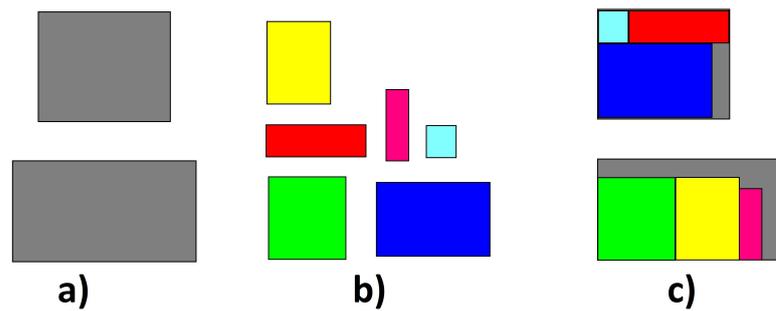


Figura 2 – Exemplo de um PCE bidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados e c) exemplos de padrões de corte.

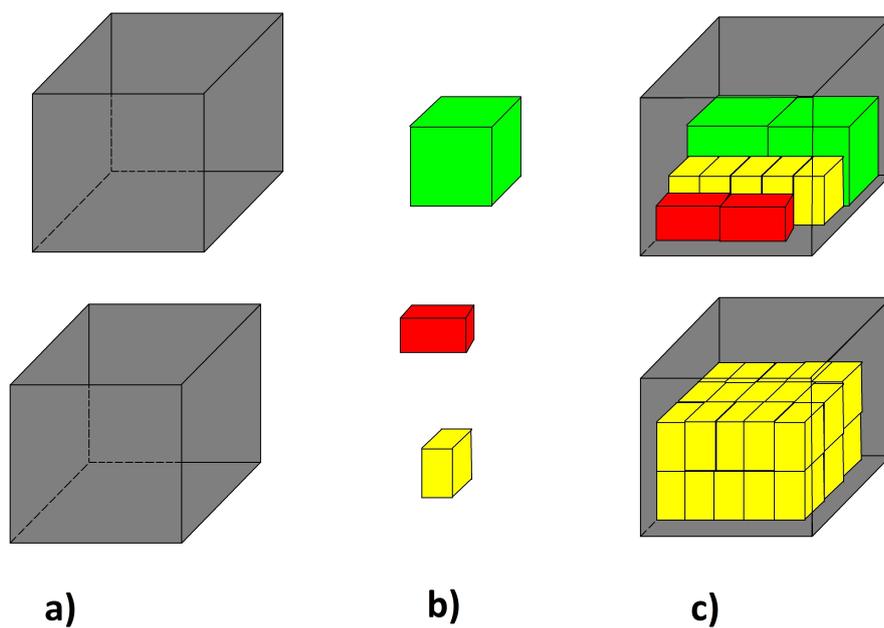


Figura 3 – Exemplo de um PCE tridimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados e c) exemplos de empacotamentos.

(N) n -dimensional com $n > 3$: problemas de dimensões maiores que três podem ser obtidos quando problemas tridimensionais de empacotamento no espaço têm o tempo como quarta dimensão, por exemplo, quando as caixas têm de ser armazenadas em um recipiente por períodos de tempo fixos, sem interrupções.

Tipo de atribuição

Os itens que deverão ser produzidos são combinados de acordo com as restrições impostas pelo problema. Dentre elas, as possíveis combinações podem ser:

- (B) todos os objetos e uma seleção de itens;
- (V) uma seleção de objetos e de todos os itens.

Variedade de objetos

Caracteriza o corte quanto à diversificação dos objetos. Pode-se efetuar o corte a partir de:

- (O) um único objeto;
- (I) todos os objetos iguais (figura idêntica);
- (D) todos os objetos diferentes.

Variedade de itens

Consideramos quatro tipos principais de cortes em relação à diversidade dos itens:

- (F) alguns itens (normalmente de figuras diferentes);
- (M) muitos itens e bastante heterogêneos;
- (R) muitos itens, porém pouco heterogêneos;
- (C) itens idênticos.

Sendo assim, com base nesses quatro critérios, Dyckhoff [4] afirma que podemos obter 96 tipos diferentes problemas de C&E ($4 \times 2 \times 3 \times 4 = 96$).

Para exemplificar esta tipologia, consideramos um problema conhecido como *strip packing* bidimensional, que é o problema de empacotamento de itens de comprimentos diferentes em um único retângulo de largura fixa e comprimento variável. Este problema de acordo com essa tipologia é denotado por 2/V/D/M, indicando que o problema possui: (2) duas dimensões relevantes, (V) que um conjunto de objetos é selecionado para atender toda a demanda de itens, (D) todos os objetos são diferentes e (M) existem muitos itens, os quais são bastante heterogêneos.

Inicialmente, esta tipologia era considerada uma forma excelente para se organizar e classificar os PCE. No entanto, ao passar do tempo, tornou-se limitada para caracterizar os novos problemas que foram aparecendo ao longo do tempo, o que motivou a pesquisa por uma nova tipologia. De acordo com Wäscher et al. [19] esta tipologia é parcialmente inconsistente e sua aplicação pode ter resultados confusos. De acordo com estes autores, uma das desvantagens da tipologia de Dyckhoff [4] é, por exemplo, a codificação para o problema *strip packing* bidimensional, pois muito provavelmente este problema seria codificado por diversos pesquisadores como 2/V/O/M e não como 2/V/D/M como visto anteriormente.

Além disso, para Wäscher et al. [19], a notação torna-se ainda mais defeituosa quando se está trabalhando com problemas bidimensionais onde o comprimento e a largura são variáveis. Sendo assim, em Wäscher et al. [19] sugerem modificações na tipologia proposta por Dyckhoff [4].

2.1.2 Tipologia de Wäscher et al. (2007)

A tipologia proposta por Dyckhoff [4] foi um excelente instrumento para a organização e caracterização da literatura. Contudo, ao longo dos anos surgiram algumas deficiências, pois poderiam haver problemas idênticos que receberiam nomes diferentes, o que criou problemas em lidar com os desenvolvimentos recentes. Em 2007, Wäscher et al. [19] apresentam uma tipologia melhorada da proposta inicial de Dyckhoff [4], porém é parcialmente baseada em suas ideias originais, mas introduz novos critérios de categorização, que definem categorias de problemas diferentes das de Dyckhoff [4].

Esta nova tipologia classifica os problemas de C&E de acordo com cinco critérios:

Dimensionalidade

De maneira análoga à de Dyckhoff [4].

Tipo de atribuição

Como em Dyckhoff [4]:

- maximização da saída: no qual a quantidade de objetos disponíveis é limitada e, dessa forma, não é suficiente para acomodar todos os itens. Deste modo, é necessário selecionar os itens de modo a maximizar a utilização dos objetos.
- minimização da entrada: um determinado conjunto de itens deve ser alocado em um conjunto de objetos disponíveis em quantidade suficiente para alocar todos os itens, sendo necessário alocar os itens buscando minimizar a quantidade de objetos utilizada.

Variedade dos itens

Podemos distinguir os problemas em três casos:

- *pequenos itens idênticos*: existe um único tipo de item, ou seja, todos os itens possuem as mesmas dimensões e aparência.
- *variedade fracamente heterogênea*: a classificação dos itens é dita fracamente heterogênea quando há muitos itens iguais, ou seja, é possível agrupar os itens em poucos grupos e em cada grupo há vários itens idênticos;
- *variedade fortemente heterogênea*: a classificação dos itens é dita fortemente heterogênea quando poucos itens são iguais, ou seja, há vários grupos de itens com poucos itens em cada grupo.

Variedade dos objetos

Com respeito aos objetos temos as seguintes classificações:

- *um objeto*, ou seja, um único tipo de objeto está disponível para a alocação de itens;
- *vários objetos*, isto é, há vários tipos de objetos disponíveis. Porém, para determinarmos se todos os objetos são de dimensões iguais ou diferentes, usamos as sub-classificações apresentadas para os itens, portanto temos os casos: *objetos pequenos idênticos*, *variedade fracamente heterogênea* e *variedade fortemente heterogênea*, que têm os mesmos significados apresentados anteriormente.

Forma dos itens

Podemos classificar os problemas que possuem duas ou três dimensões de acordo com a forma de seus itens:

- regulares: retângulos, círculos, caixas, cilindros, esferas, etc;
- irregulares.

A Figura 4 ilustra um exemplo de forma dos itens: a) regulares e b) irregulares. A grande maioria dos problemas da literatura trata de formas regulares, especialmente formas retangulares.

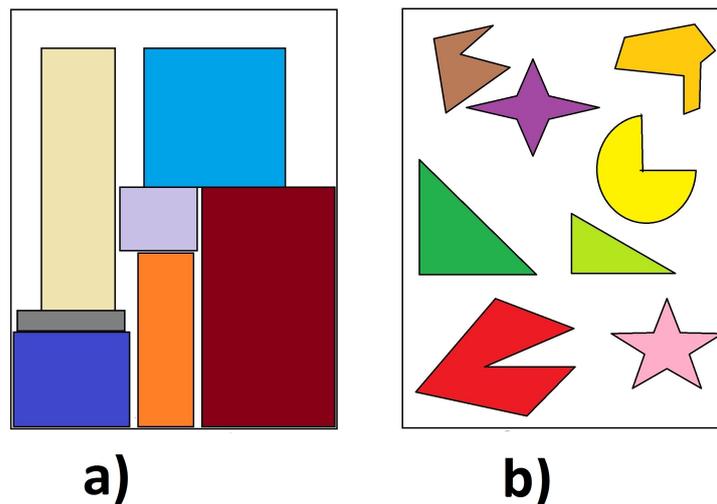


Figura 4 – Exemplo de forma dos itens (a) regulares e (b) irregulares.

Problemas que permitem *layouts* não ortogonais e/ou misturas de itens regulares e irregulares são encarados como problemas variantes.

Com base no objetivo do problema e nos critérios descritos anteriormente, a estrutura da classe dos problemas de C&E proposta por Wäscher et al. [19] é definida em três etapas:

1. Tipo básico: os critérios tipo de atribuição e variedade dos itens são combinados para definir a estrutura básica dos problemas de corte e empacotamento. Esta etapa inicial é subdividida em duas categorias:
 - maximização da saída: Problema de Empacotamento de Itens Idênticos (IIPP - *Identical Item Packing Problem*), Problema de Alocação (PP - *Placement Problem*), Problema da Mochila (KP - *Knapsack Problem*);
 - minimização da entreda: Problema de Dimensão Aberta (ODP - *Open Dimension Problem*), Problema de Corte de Estoque (CSP - *Cutting Stock Problem*), Problema de Empacotamento em Bins (BPP - *Bin Packing Problem*).
2. Tipo intermediário: o critério tipo de objetos é combinado com problemas do tipo básico.
3. Tipo refinado: os critérios de dimensionalidade e forma dos itens são acrescentados a estrutura intermediária do problema, sendo definida, assim, a classe do mesmo.

Portanto, o resultado final da estrutura proposta por Wäscher et al. [19] é obtido pela seguinte regra:

$$\{1,2,3\}\text{-D } \{\text{retangular, circular,},\dots,\text{irregular}\} \{\text{classificação intermediária}\}.$$

De acordo com esta classificação, o presente trabalho aborda uma extensão dos seguintes problemas:

- 1D - *Single Stock Size Cutting Stock Problem* - SSSCSP: Problema de Corte de Estoque com um único tipo (comprimento) de objeto;
- 1D - *Multiple Stock Size Cutting Stock Problem* - MSSCSP: Problema de Corte de Estoque com vários tipos (comprimentos) de objetos,

pois estamos considerando a data de entrega dos itens cortados.

2.2 Descrição do problema de corte de estoque unidimensional

Considere que temos disponível em estoque um número suficientemente grande de objetos (barras, bobinas etc) de comprimento L e um conjunto de m tipos de itens, $i = 1, \dots, m$, de tamanho ℓ_i , com demanda conhecida b_i , (os comprimentos dos itens são tais que: $\ell_i < L, \forall i = 1, \dots, m$). O problema consiste em produzir os itens demandados a partir do corte dos objetos em estoque, atendendo a demanda e de modo que o número de objetos em estoque necessários para satisfazer a demanda seja minimizado.

Modelo clássico do problema de corte de estoque unidimensional

Considere, inicialmente, que tenhamos apenas um único tipo de objeto em estoque, e que tenhamos que fazer cortes em apenas uma das dimensões do objeto.

Definição 2.1. *Padrão de corte é a maneira como um objeto em estoque é cortado para a produção dos itens demandados. A um padrão de corte associamos um vetor m -dimensional que contabiliza os itens produzidos:*

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^t,$$

em que α_i é o número de vezes que o item tipo i está presente no padrão de corte.

Definição 2.2. *Um padrão de corte homogêneo produz um único tipo de item:*

$$a = (0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0)^t, \text{ com } \alpha_i \neq 0.$$

Em particular, para o PCE unidimensional, podemos escrever um padrão de corte homogêneo da seguinte forma:

$$a = (0, \dots, 0, \lfloor \frac{L}{\ell_i} \rfloor, 0, \dots, 0)^t.$$

Para o PCE unidimensional, ilustramos, na Figura 5, dois padrões de corte. Observe que o segundo padrão de corte, é um padrão de corte homogêneo, ou seja, fornece apenas um tipo de item demandado.

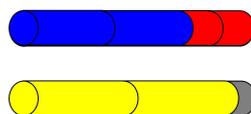


Figura 5 – Padrão de corte unidimensional.

O PCE tem como objetivo minimizar um custo total. Comumente, consideramos o custo a ser minimizado como a perda total gerada com os padrões de corte. Assim, o problema pode ser modelado como o seguinte problema de programação linear inteiro:

$$\text{minimizar} \quad c^t x \quad (2.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad Ax \geq b \quad (2.2)$$

$$x \geq 0 \text{ e inteiro,} \quad (2.3)$$

onde c é um vetor custo, cada coluna da matriz A é um vetor associado a um padrão de corte, b é o vetor de demanda de itens e x é a variável de decisão que determina quantos objetos devem ser cortados de acordo com um determinado padrão de corte.

Considerando o custo do padrão de corte como a perda, temos $c_j = L - \sum_{i=1}^m \ell_i \alpha_{ij}$, $\forall j$. Assim, a função objetivo (2.1) tem como objetivo minimizar o número a perda total. O conjunto de restrições (2.2) garante que a demanda de itens seja atendida. O conjunto de restrições (2.3) são as restrições de não-negatividade e integralidade das variáveis.

Observe que quando temos o PCE com apenas um tipo de objeto em estoque e com restrições de igualdade, minimizar o número de objetos cortados é equivalente a minimizar a perda total (Poldi [12]). Nesta dissertação, vamos estudar ambos os problemas, primeiro o PCE com apenas um tipo de objeto em estoque e, em seguida, o PCE com diferentes tipos de objetos em estoque. Assim, para padronizar a análise dos resultados, que serão apresentados no Capítulo 6, vamos considerar o mesmo custo na função objetivo, ou seja, a perda total.

Capítulo 3

Revisão do problema de corte de estoque com data de entrega

Neste capítulo, apresentamos dois artigos que serviram de base para as modelagens que foram propostas. São eles: Reinertsen e Vossen [15] de 2010 e o de Arbib e Marinelli [1] de 2014. Além disso, apresentamos uma breve descrição do método de solução que os autores utilizaram e alguns comentários sobre os resultados que foram obtidos.

3.1 Definição do PCEDE unidimensional

O PCEDE é uma extensão do PCE clássico, pois além do planejamento dos padrões de corte e suas respectivas frequências (quantas vezes o padrão de corte deve ser cortado) estamos também interessados em atender a demanda dos pedidos respeitando uma data de entrega dos itens.

Consideramos, inicialmente, que a data de entrega se organiza em ordem crescente e, com isso, faz-se a divisão do horizonte de planejamento em períodos de acordo com as demandas, ou seja, $[d_0, d_1], [d_1, d_2], [d_2, d_3], \dots, [d_{m-1}, d_m]$, com $d_0 = 0$ e $d_m = \max d_i$, para m pedidos e cada intervalo representa um período para que o item seja entregue (data de entrega). Consideramos também que cortar qualquer tipo de item no objeto em estoque consome o mesmo tempo.

Suponha que uma empresa tenha uma máquina com capacidade de corte de 30 objetos por dia e que essa empresa receba pedidos como apresentado na Tabela 2. Considere um horizonte de planejamento de 30 dias, e, considere também, a sua divisão em quatro períodos:

Primeiro organizamos as datas de entrega de forma crescente: $[d_1, d_0] = 8 - 0$, $[d_2, d_1] = 12 - 8$, $[d_3, d_2] = 30 - 12$, $[d_4, d_3] = 45 - 30$.

Período 1: $(8 - 0) \times 30 = 240$ objetos = C_1 ;

Tabela 2 – Data de entrega como uma capacidade de corte.

Comprimento dos itens	demanda	data de entrega
10	100	30 dias
22	50	8 dias
35	80	12 dias
55	60	45 dias

Período 2: $(12 - 8) \times 30 = 120$ objetos = C_2 ;

Período 3: $(30 - 12) \times 30 = 540$ objetos = C_3 ;

Período 4: $(45 - 30) \times 30 = 450$ objetos = C_4 ;

ou seja, esse problema com data de entrega é um problema de corte de estoque na qual a data de entrega representa o número de objetos podem ser cortados em um determinado período. A Figura 6 ilustra a divisão desses períodos com suas respectivas capacidades.

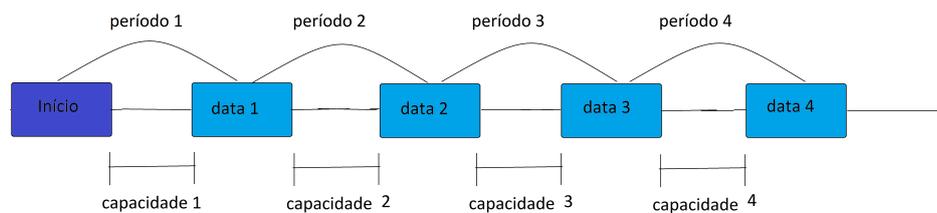


Figura 6 – Horizonte de planejamento para o PCEDE.

O objetivo do problema é determinar um plano de corte que seja capaz de minimizar o número de objetos cortados e caso não seja possível atender toda a demanda de determinado item, minimizar também o atraso na entrega desse item.

3.2 Revisão da literatura

3.2.1 Proposta de Reinertsen e Vossen (2010)

Em 2010, Reinertsen e Vossen [15] estudam, inicialmente, o PCE com data de entrega com apenas um tipo de objeto em estoque em quantidade ilimitada, ou seja, há uma quantidade suficiente em estoque para atender toda a demanda. Os autores formulam uma modelagem para o PCEDE, adaptando o PCE clássico acrescentando a data de entrega. Os autores também propuseram e apresentaram outros modelos de otimização (com agregação de pedidos e data de entrega, diferentes tipos de objetos em estoque e com diferentes diâmetros dos objetos em estoque) e procedimentos de solução que resolvem o PCEDE.

Os autores consideram que d_i representa uma data que o pedido deve ser entregue, porém, ela é determinada pela quantidade de itens do tipo i que podem ser cortados antes/até a sua data de entrega no período t , com $i = 1, \dots, m$. A data de entrega inclui uma consideração da capacidade da máquina. Com máquinas automáticas de corte, o tempo de configuração e tempo para troca de padrões de corte são mínimos e pode ser deixado de fora, sem afetar a aplicabilidade do plano de corte resultante.

Algumas operações de corte requerem tempo para mudar a configuração das facas. Considerar as trocas de facas aumenta a dificuldade dos problemas, e os autores não consideraram em seu trabalho. Os autores admitem que todos os pedidos que precisam ser produzidos dentro do horizonte de planejamento são conhecidos no momento em que um plano de corte é criado.

O horizonte de planejamento é o período de tempo ao qual um plano de corte específico relaciona-se. Ele é determinado pelo período de tempo que vai desde a data presente (início) até uma data futura (de entrega) em que os pedidos devem ser entregues. No horizonte de planejamento as datas de entrega d_i , são organizadas em ordem não-decrescente, e com isso, faz-se a divisão no planejamento da produção em períodos de acordo com quantos pedidos foram feitos, ou seja, $[d_0, d_1], [d_1, d_2], [d_2, d_3], \dots, [d_{m-1}, d_m]$, com $d_0 = 0$ e $d_m = \max d_i$ para m pedidos e cada intervalo representa um período para que o item seja entregue.

O objetivo é determinar um conjunto de padrões de corte e suas frequências correspondentes para cada período analisado, de tal forma que cada pedido deve ser concluído antes de sua data de entrega, ou um custo de atraso é minimizado.

De cada execução de um padrão de corte j , temos um número que indica a quantidade de itens i produzidos para cada pedido de acordo com esse padrão de corte, que denotamos por a_{ij} . Consequentemente, as variáveis de decisão que indicam o número de objetos a serem cortados no padrão de corte j no período t são representadas por x_{jt} . Ao considerarmos os problemas onde nem todas as datas de entrega podem ser atendidas, o objetivo é que o modelo consiga fornecer um plano de corte que minimiza o atraso na entrega dos itens.

Para cada pedido do item i , permite-se uma violação (atraso) da restrição sobre a data de entrega que denotamos por y_i , e esta violação será penalizada na função objetivo com uma constante w_i para cada pedido do item i em atraso. Considere:

Índices:

- i : tipo de item, $i = 1, \dots, m$;
- t : período, $t = 1, \dots, T$;
- j : padrão de corte, $j = 1, \dots, N$.

Parâmetros:

- L : comprimento do objeto em estoque;
- ℓ_i : comprimento do item tipo i ($L \geq \ell_i$);
- b_i : demanda do item tipo i ;
- C_i : número de objetos que podem ser cortados até/antes da data de entrega do item tipo i ;
- a_{ij} : quantidade de itens tipo i no padrão de corte j ;
- w_i : penalidade por atraso.

Variáveis de decisão:

- y_i : número de objetos cortados com atraso;
- x_{jt} : número de objetos a serem cortados no padrão de corte j no período t .

A seguir, apresentamos a modelagem matemática proposta por Reinertsen e Vossen [15].

Modelo RV:

$$\text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^m x_{jt} + \sum_{i=1}^m w_i y_i \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^i x_{jt} \leq C_i + y_i, \quad \forall i \quad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^i a_{ij} x_{jt} \geq b_i, \quad \forall i \quad (3.3)$$

$$x_{jt} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall j, \forall t \quad (3.4)$$

$$y_i \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall i. \quad (3.5)$$

A função objetivo (3.1) tem como objetivo minimizar tanto o número de objetos cortados, quanto o atraso na entrega dos pedidos. O conjunto de restrições (3.2) estão relacionados à data de entrega dos itens, o qual garante que a capacidade de corte da máquina não seja excedida. O segundo somatório garante que a demanda dos itens seja atendida, será permitido um atraso y_i na entrega. O conjunto de restrições (3.3) determina o número total de itens i produzidos antes da data de entrega, que é a quantidade mínima

que devemos ter para atender a demanda sem atraso. O conjunto de restrições (3.4) e (3.5) são restrições de integralidade e não-negatividade do problema.

O modelo (3.1)-(3.5) se reduz à formulação de Gilmore e Gomory [6, 7] se todas os pedidos compartilham da mesma data de entrega e as restrições de data de entrega não são violadas.

Como determinar padrões de corte iniciais

Para garantir um bom conjunto de padrões de corte iniciais, os autores criaram um grafo em níveis, onde cada caminho corresponde a um padrão de corte. É importante notar que o grafo apresentado pelos autores difere do proposto por Valério de Carvalho [16], pois eles usam diferentes níveis para representar um pedido que deve ser entregue. Como resultado, haverá uma correspondência uma-para-um entre os caminhos do grafo e os padrões de corte, o que permite gerar rapidamente mais de um padrão de corte usando um algoritmo de k -caminhos mais curto. Para instâncias de problemas pequenos pode até ser possível gerar todos os padrões de corte possíveis.

O grafo resultante dessa abordagem será dado por $G = (V, A)$ no qual tem um nível para cada um dos pedidos $t \in \{1, \dots, T\}$. Para construir o grafo primeiro discretiza-se o comprimento do objeto e cria-se um conjunto de comprimentos parciais de $\{0, 1, 2, \dots, L\}$, onde L representa o comprimento do objeto em estoque. Intuitivamente, um comprimento parcial $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, L\}$ representa quanto do objeto foi usado naquele padrão de corte. Dentro de cada nível cria-se um conjunto de nós para cada comprimento possível no qual o item pode ser cortado no objeto.

Assim, os nós no grafo G são definidos da seguinte maneira:

$$V = \{(t, \ell) | t \in \{1, \dots, T\} \text{ e } \ell \in \{0, \dots, L\}\}.$$

Os arcos resultantes no grafo podem ser organizados de acordo com as três seguintes classes:

- 1 Arcos dentro de níveis: que correspondem a incluir um comprimento para a ordem correspondente no padrão de corte:

$$A^1 = \{(t, \ell) \longrightarrow (t, \ell + \ell_t) | t \in \{1, \dots, T\}, \ell \in \{0, \dots, L - \ell_t\}\}.$$

- 2 Arcos entre níveis consecutivos: que significam mudar de item a ser cortado no objeto:

$$A^2 = \{(t, \ell) \longrightarrow (t + 1, \ell) | t \in \{1, \dots, T - 1\}, \ell \in \{0, \dots, L\}\}.$$

Tabela 3 – Padrões de corte gerados pelo grafo.

período	comprimento do item	padrão de corte	perda
t_1	5	$(1, 0, 0)^t$	4
t_2	4	$(0, 2, 0)^t$	1
t_2	4	$(0, 1, 0)^t$	0
t_3	7	$(0, 0, 1)^t$	2

3 Arcos terminais: que representam perdas, que podem até resultar em um padrão de corte, ou seja:

$$A^3 = \{(t, \ell) \longrightarrow (T, L) | \ell \in \{0, \dots, L - 1\}\},$$

e tem-se $A = A^1 \cup A^2 \cup A^3$.

No grafo resultante, haverá uma única correspondência entre um caminho no nó origem $(1, 0)$ para o nó terminal (T, L) e um padrão de corte. Assim, se o custo de cada arco terminal $(T, \ell) \rightarrow (T, L)$ é igual a $L - \ell$ (que representa a quantidade de perda), e sejam todos os outros custos iguais a zero, o caminho mais curto é um caminho equivalente ao padrão de corte com perda mínima. O algoritmo de caminho mais curto permite determinar de forma eficiente um conjunto de padrões únicos com baixos níveis de perda para cada produção.

Exemplo

A Figura 7 ilustra um grafo para um problema com três itens (pedidos) de comprimentos $\ell_1 = 5$, $\ell_2 = 4$ e $\ell_3 = 7$ para ser cortado de um objeto em estoque de comprimento $L = 9$.

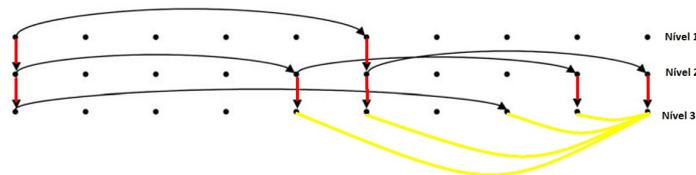


Figura 7 – Grafo para gerar padrões de corte iniciais (Fonte: adaptado de Reinertsen e Vossen [15]).

Observe que no nível 1 (primeiro período) o item $\ell_1 = 5$ foi cortado apenas uma vez deixando como perda 4. No Nível 2 (segundo período) cortou duas vezes o item $\ell_2 = 4$, deixando como perda 1. Porém, o que era perda no nível 1, no segundo período ela é utilizada para cortar um item $\ell_2 = 4$. No nível 3 (terceiro período) o item $\ell_3 = 7$ foi cortado apenas uma vez gerando perda 2 (estes resultados estão descritos na Tabela 3).

Problema *pricing*

Dada uma solução para o problema, podemos procurar padrões de corte que podem melhorar essa solução, resolvendo um problema chamado de problema *pricing* (ou subproblema):

$$\text{minimizar} \quad \sum_i b_i \mu_i - \sum_i C_i \lambda_i \quad (3.6)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=t}^m \alpha_{ij} \mu_i \leq 1 + \sum_{i=t}^m \lambda_i, \quad \forall j, t \quad (3.7)$$

$$\lambda_i, \mu_i \leq 0, \quad \forall i, \quad (3.8)$$

onde λ_i e μ_i representam as variáveis duais correspondentes ao conjunto de restrições da data de entrega (3.2) e de demanda (3.3), respectivamente.

Em um problema *pricing*, o objetivo é encontrar um padrão de corte j no período de produção t que viola a restrição no dual correspondente. Quando os pedidos são classificados com datas de entrega crescentes, o problema *pricing* para cada período t pode, então, ser indicado como um problema da mochila

$$\text{minimizar} \quad 1 + \sum_{i=t}^m \lambda_i - \sum_{i=t}^m \alpha_i \mu_i \quad (3.9)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_i \alpha_i \ell_i \leq L \quad (3.10)$$

$$\alpha_i \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall i. \quad (3.11)$$

onde α_i representa o número de vezes que o item i é usado no padrão de corte.

Para resolver o problema *pricing* para o PCEDE, Reinertsen e Vossen [15] optaram por formular o problema este problema como um problema de caminho mais curto em uma versão ligeiramente modificada do grafo $G = (V, A)$ e com esta abordagem resolver simultaneamente os problemas da mochila para todos os t períodos.

O grafo $G_j = (V_j, A_j)$ será um grafo modificado, no qual se adiciona um nó fictício (*) com arcos no primeiro nó de cada nível. Assim, temos:

- $V_j = V \cup \{*\}$

- $A_j = A \cup \{ * \rightarrow (t, 0) | t \in \{1, \dots, T\} \}$.

Precisamente um destes arcos deve ser usado em um caminho mais curto a partir do nó fictício para o nó final. Pois cada nível corresponde a um período de produção, e a inclusão de um arco do nó fictício para o nó $(t, 0)$ no caminho mais curto significa que o padrão correspondente é adicionado ao período de produção t . A Figura 8 ilustra esse problema.

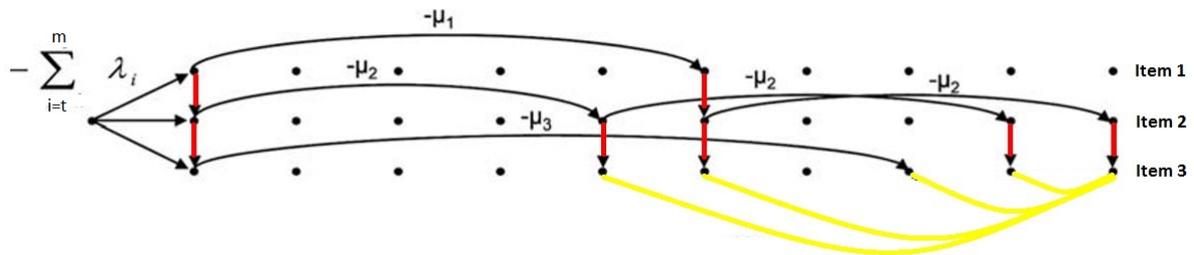


Figura 8 – Grafo para o problema *pricing* (Fonte: adaptado de Reinertsen e Vossen [15]).

Agora, seja o custo do arco $* \rightarrow (t, 0)$ igual a $-\sum_{i=t}^m \lambda_i$ e o custo do arco $(t, \ell) \rightarrow (t, \ell + \ell_t) \in A^1$ igual a $-\mu_t$, e sejam os custos dos outros arcos iguais a zero. Com esses custos, o algoritmo de caminho mais curto fornece para todos os períodos um padrão de corte que minimiza a função objetivo dos problemas da mochila para todos os períodos

Alguns resultados modelo RV

A fim de testar o modelo e o método de solução, os autores geraram casos aleatórios em que variam o número de itens, a demanda, o comprimento dos itens e as datas de entrega. Inicialmente, o comprimento do objeto era de 100 unidades em todos os experimentos, e a capacidade de corte da máquina de 700 cortes por dia.

Para avaliar o desempenho do modelo no corte industrial, os autores analisaram dados de produção de 245 dias em uma máquina de corte de um fabricante de aço. Cada dia de produção é considerado um único planejamento e foi criado um plano de corte para todos os pedidos conhecidos. Os exemplos de planejamento variam em tamanho, enquanto a maioria dos casos têm menos de 100 pedidos, o maior exemplo de planejamento é de 251 pedidos, as datas de entrega são dadas em dias em uma média de 5,4 dias.

Reinertsen e Vossen [15] comentam que o método termina em menos de 20 segundos para todos os casos com menos de 100 pedidos, para casos com até 251 pedidos, o método termina dentro de, no máximo, 3 minutos e 31 segundos.

Dos 245 problemas resolvidos, 207 apresentaram uma solução que atenderam as datas de entrega de todos os pedidos, 70% desses problemas tiveram uma solução inteira com diferença de apenas uma unidade da solução encontrada para o problema linear relaxado. A maior diferença entre a solução do PL relaxado e a solução inteira é 4,72 unidades. Além disso, todos os casos que tiveram uma solução do PL relaxado que satisfaz todas as datas de entrega também apresentaram uma solução inteira na qual a data de entrega foi respeitada.

3.2.2 Proposta de Arbib e Marinelli (2014)

Em 2014, Arbib e Marinelli [1] estudaram o modelo matemático proposto por Reinertsen e Vossen [15] e propuseram uma formulação. Além disso, desenvolveram heurísticas para determinar limitantes e um esquema de enumeração implícita para solução do modelo proposto.

Os autores consideram o problema descrito a seguir.

Problema 1.1: Dado um conjunto de itens I com n pedidos tais que:

- Cada $i \in I$ está associado com uma data de entrega $d_i \leq 0$, e uma penalidade w_i ;
- Cada $i \in I$ requer um corte unidimensional de objetos em estoque de comprimento igual a 1, com itens de comprimento normalizado $\ell_i < 1$;
- O corte de qualquer objeto em estoque requer o mesmo tempo independente do padrão de corte.

O objetivo do modelo matemático proposto pelos autores é determinar um plano de corte, que é um conjunto de padrões de corte e de acordo com eles, uma sequência que minimiza tanto o número de objetos utilizados quanto o atraso ponderado na entrega dos pedidos.

Arbib e Marinelli [1], baseados nas ideias de Reinertsen e Vossen [15] e Li [10], atribuem padrões de corte para a formulação de períodos, usando equações de equilíbrio para acionar o atraso na entrega dos pedidos. A abordagem dos autores era, inicialmente, para atribuir padrões de corte para controlar períodos. O modelo de Arbib e Marinelli [1], denominado [CF], combina restrições do problema de corte de estoque com o dimensionamento de lotes, e fornece um limite máximo para o atraso de algumas pedidos. Considere:

Índices:

- i : tipo de item, $i = 1, \dots, m$;
- t : período, $t = 1, \dots, m + 1$;

- j : padrão de corte, $j = 1, \dots, N$.

Parâmetros:

- L : comprimento do objeto em estoque;
- ℓ_i : comprimento item tipo i ($L \geq \ell_i$);
- b_{it} : demanda do item tipo i no período t ;
- C_t : número de objetos que podem ser cortados até/antes da data de entrega;
- a_{ij} : quantidade de itens tipo i produzidos no padrão de corte j ;
- w_i : penalidade por atraso do item tipo i ;
- w_0 : custo de cortar um objeto;
- u_{it} : limitante para o atraso do item tipo i , no período t .

Variáveis de decisão:

- s_{it} : nível de estoque do item tipo i no período t ;
onde, o item i está em atraso, se $s_{it} < 0$ para algum $t \leq i$.
- y_{it} : variável binária que indica se o item tipo i está em atraso no período t ;
- x_{jt} : número de objetos a serem cortados no padrão de corte j no período t .

Apresentamos, a seguir, o modelo proposto por Arbib e Marinelli [1].

Modelo CF:

$$\text{minimizar} \quad \left(w_0 \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{m+1} x_{jt} + \sum_{i=1}^m w_i \sum_{t>i} (C_t - C_{t-1}) y_{it} \right) \quad (3.12)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^N x_{jt} \leq C_t - C_{t-1}, \quad \forall t \quad (3.13)$$

$$s_{i,t-1} + \sum_{j=1}^N a_{ij} x_{jt} = s_{it} + b_{it}, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.14)$$

$$u_{it} y_{it} + s_{i,t-1} \geq 0, \quad \forall i, \quad \forall t \quad (3.15)$$

$$x_{jt} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall j, \quad \forall t \quad (3.16)$$

$$y_{it} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, \quad \forall t. \quad (3.17)$$

A função (3.12) tem como objetivo minimizar tanto o número de objetos cortados, quanto o atraso na entrega dos pedidos. O conjunto de restrições (3.13) são as restrições de capacidade de corte, ou seja, garantem que o número de objetos cortados em cada período não exceda a capacidade. O conjunto de restrições (3.14) são restrições de balanço de estoque, estabelece que a soma do estoque do item tipo i no período $t - 1$ com o plano de corte do período t deve ser o mesmo que a quantidade em estoque do item tipo i no período t com a demanda desse item no período t . O conjunto de restrições (3.15) são as restrições que indicam se houve atraso de algum item, pois quando um determinado item está em atraso o seu nível de estoque é negativo, ou seja, $s_i^t < 0$ para algum $t \geq i$. Assim, as datas de entrega são garantidas por $s_i^t \geq 0, \forall i$ e $t \geq i$. Os conjuntos de restrições (3.16) e (3.17) são as condições de não-negatividade e integralidade do problema.

Método de solução

Os autores separaram os problemas em quatro categorias, nas quais as datas de entrega foram definidas de quatro maneiras: tempo de conclusão $C[1, 20]$, datas de entrega uniformes $U[1, 20]$, requisito baseado na data de entrega $R[1, 20]$ e datas de entrega intermediárias $H[1, 20]$.

Em um PCE, o número de variáveis associadas aos padrões de corte é, em muitos casos, bem grande. Para resolver o modelo proposto, os autores recorrem ao método de geração de colunas de Gilmore e Gomory [6, 7]. Sejam $\rho^t \geq 0, \pi_i^t$ os valores das variáveis duais associadas às restrições de capacidade (3.13) e atendimento a demanda (3.14), respectivamente.

Uma iteração do processo de geração de colunas exige a solução de um problema *pricing* por período. Em um PCE unidimensional, o problema *pricing* associado com o período t pode ser determinado como um problema da mochila:

$$\text{minimizar} \quad w_0 + \rho^t - \sum_{i=1}^t \pi_{it} \alpha_i \quad (3.18)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^m \ell_i \alpha_i \leq 1 \quad (3.19)$$

$$0 \leq \alpha_i \leq \alpha_i^{max}, \forall i \quad (3.20)$$

$$\alpha_i, \text{ inteiro}, \forall i, \quad (3.21)$$

onde $\alpha_i^{max} = \min_i \{b_i, \lfloor \frac{1}{\ell_i} \rfloor\}$.

Processo de refinamento

Para tentar diminuir a fonte de erros no cálculo do tempo de conclusão, os autores resolveram refinar os períodos, em períodos mais curtos. Mais eficientemente, pode-se recorrer a uma resolução iterativa do modelo [CF] com períodos cada vez mais curtos. O procedimento proporciona uma formulação refinada [RF] na qual a função objetivo é reescrita.

Modelo RF:

$$\text{minimizar} \quad (w_0 \sum_{j \in N} \sum_{t=1}^{m+1} x_{jt} + \sum_{i=1}^m w_i \sum_{\theta \in \theta_i} (\theta_t - \theta_{t-1}) y_{it}) \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

onde θ_i contém os índices dos períodos depois de d_i , e as restrições de capacidade (3.13) são ajustadas:

$$\sum_{j=1}^N x_{jt} \leq \theta_t - \theta_{t-1}, \quad t = 1, \dots, m+1. \quad (3.24)$$

Considere agora que os períodos $\delta_t = [\bar{t}_{t-1}, \bar{t}_t]$ são inicializados com $\bar{t}_t = d_t$, para $t = 0, \dots, m$ e $\bar{t}_{m+1} = \bar{C}_{max} + 1$, de forma que \hat{C}_{max} e C_{max} são o *makespan* da solução que minimiza a necessidade de matéria-prima e a solução factível para o problema estudado pelos autores, respectivamente. Então um ótimo para o problema é tal que $C_{max} \leq \bar{C}_{max} = 2\hat{C}_{max} + 1$.

Dizemos que δ_t está atrasado se, para algum $i \in I$, i é produzido em δ_t e $\bar{t}_t > d_i$. Os períodos são então refinados, usando-se o seguinte procedimento:

Enquanto existir períodos com produção de itens em atraso, faça:

1. Divida o período, de δ_t , em $\delta_t^1 = [\bar{t}_{t-1}, [(\bar{t}_{t-1} + \bar{t}_t)/2]]$ e $\delta_t^2 = [[(\bar{t}_{t-1} + \bar{t}_t)/2], \bar{t}_t]$.
2. Atualize o modelo (3.12)-(3.17) e resolva-o.

Limitante Dual

Um limitante inferior para o modelo [RF] pode ser encontrado resolvendo as relaxações de PL por um procedimento de geração de colunas: o problema principal pode

ser inicializado com qualquer solução primal encontrada via heurística. Novas colunas são então encontradas pelo problema *pricing* até que nenhum custo reduzido negativo seja encontrado. Um problema *pricing* surge para cada período, e o número de problemas a serem resolvidos aumenta à medida que o procedimento evolui.

Entre as estratégias testadas, os melhores resultados que os autores encontraram foram obtidos por períodos em uma forma circular:

- inicialmente, faz-se a geração de possíveis colunas para o período 1; a seguir, gera-se colunas para o período 2, e assim sucessivamente, até o último período;
- quando forem encontradas soluções para todos os períodos, volta-se ao período 1 e ele é resolvido novamente;
- o procedimento é repetido até que uma busca não gere nenhuma coluna que melhore a solução.

Os autores propõem o seguinte esquema de enumeração parcial (que faz uso parcial de *branch-and-price*):

- Etapa 1. Inicialize o problema master com as soluções primais calculadas pelas heurísticas.
- Etapa 2. Calcule o limite inferior por arredondamento para o número inteiro mais próximo do valor da solução da relaxação linear de [RF] obtido por geração de colunas.
- Etapa 3. Use um *solver* para resolver o problema.
- Etapa 4. Faça enumeração parcial por *branch-and-price*.
- Etapa 5. Use um *solver* PLI para melhorar possivelmente a melhor solução primal encontrada até agora.

Os autores ramificam apenas as variáveis y_{it} , seguindo uma estratégia de variável mais fracionária. Se a variável fracionária estiver associada a um período unitário, então uma ramificação é realizada. Senão, o período é dividido e o problema relaxado é calculado no nó atual.

Alguns resultados para o modelo CF

Os autores compararam o modelo proposto por Reinertsen e Vossen [RF] com o modelo o proposto por eles [CF]. Cortar um padrão de corte unidimensional requer uma unidade de tempo, desprezando o setup; assim, o tempo de conclusão T_i de um item tipo i é determinado pelo número de cortes feitos do tempo 0 até o último corte produzido

daquele item tipo i . Assim, o atraso é calculado como: $y_i = \max\{T_i - d_i\}$. Uma vez que as extremidades dos intervalos de tempo correspondem as datas de entrega, o modelo [CF] superestima o tempo de conclusão T_i pelo menor $d_i \geq T_i$, introduzindo assim um erro, no cálculo de y_i . Sendo assim, os autores tentam minimizar cada vez mais esse erro, propondo um refinamento no modelo proposto [CF]. Esse refinamento acontece usando os períodos com intervalos mais curtos e resolvendo novamente o modelo [CF].

A contribuição feita pelos autores é dupla: por um lado, a formulação proporciona um limitante para o dual que pode ser utilizado para avaliar o desempenho de algoritmos heurísticos. Por outro lado, o algoritmo primal melhora o que foi proposto por Reinertsen e Vossen [15] com soluções que, em muitos casos, custam menos do que a relaxação linear do modelo deles.

O esquema de enumeração parcial é limitado por 3600 ou 15000 colunas. Foram estabelecidos tempos limite de 300s para a etapa 3 e de 1800s para o etapa 5 do esquema de enumeração parcial. Em todos os problemas resolvidos, a perda e atraso foram ponderados por $w_0 = 1$ e $w_i = 1$, $\forall i$. Para todos os problemas, foi determinada uma solução que minimize as necessidades de matérias-primas.

Os resultados computacionais mostraram que o modelo refinado melhora na maioria das instâncias o limitante inferior e a geração de coluna converge rapidamente para o limite inferior. O número médio de colunas geradas é 918 antes do refinamento e 170 após o refinamento e o tempo médio para resolver o problema é 21,38 s. Além disso, o esquema de enumeração parcial melhora o limitante inferior em quase todas as instâncias.

Arbib e Marinelli [1] resolveram 80 problemas, os quais podem ser encontrados em {Dresden Cutting and Packing Group (CaPad), <http://www.math.tu-dresden.de/ca-pad/>.}

Capítulo 4

Problema de corte de estoque com data de entrega

Nesse capítulo, apresentamos uma nova modelagem para o PCEDE com apenas um tipo de objeto em estoque em quantidade ilimitada, seguindo as mesmas ideias dos modelos descritos anteriormente para o PCE unidimensional com data de entrega. A seguir, estendemos essa modelagem para o problema com diferentes tipos de objetos em estoque, disponíveis em quantidades limitadas (para restrições de disponibilidade em estoque nos baseamos em Poldi e Arenales [14]).

4.1 Modelagem para um tipo de objeto

Considere o PCEDE com um único tipo de objeto em estoque em uma quantidade suficiente para atender a demanda. Considere um horizonte de planejamento dividido em t períodos, de forma que em cada um dos períodos a capacidade produtiva é restrita, ou seja, deve-se respeitar a capacidade de corte da máquina.

Para os itens que não são atendidos na sua determinada data de entrega, ou seja, aqueles que são atendidos com atraso, o atraso é penalizado na função objetivo por um parâmetro w_{it} para cada tipo de item i em cada período t . Como nos modelos anteriores, a data de entrega dos pedidos é considerada no modelo como a capacidade de corte da máquina.

Considere:

Índices:

- i : tipo de item, $i = 1, \dots, m$;
- t : período, $t = 1, \dots, T$;
- j : padrão de corte, $j = 1, \dots, N$.

Parâmetros:

- L : comprimento dos objetos em estoque;
- ℓ_i : comprimento do item tipo i ;
- b_{it} : demanda do item i no período t ;
- C_t : número de objetos que podem ser cortados até/antes da data de entrega no período t ;
- a_{ijt} : quantidade de itens tipo i produzidos pelo padrão de corte j no período t ;
- w_{it} : penalidade por atraso na entrega do item i no período t ;
- c_{jt} : custo de cortar um objeto segundo o padrão de corte j no período t .

Consideramos o custo c_{jt} como sendo o desperdício de material gerado pelo padrão de corte j no período t , que é dado por:

$$c_{jt} = L - \sum_{i=1}^m \ell_i \alpha_{ijt}, \forall j, t. \quad (4.1)$$

Variáveis de decisão:

- x_{jt} : número de objetos cortados segundo o padrão de corte j no período t ;
- y_{it} : número de itens do tipo i cortados com atraso no período t .

A seguir, apresentamos o modelo matemático proposto para o PCEDE unidimensional.

Modelo PCEDE

$$\text{minimizar} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N c_{jt} x_{jt} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m w_{it} y_{it} \quad (4.2)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{j=1}^N a_{ijt} x_{jt} + y_{it} = b_{it} + y_{i,t-1}, \quad \forall t, \forall i \quad (4.3)$$

$$\sum_{j=1}^N x_{jt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (4.4)$$

$$x_{jt} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall j, \forall t \quad (4.5)$$

$$y_{it} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall i \quad (4.6)$$

$$y_{0T} = 0 \quad (4.7)$$

$$y_{i0} = 0, \quad \forall i. \quad (4.8)$$

A função objetivo (4.2) tem por interesse minimizar o custo total da perda nos padrões de corte e do atraso na produção de itens, ou seja, o desperdício de material e o atraso total dos itens que não atenderam a data de entrega. O conjunto de restrições (4.3) garantem que a demanda seja atendida ao serem cortados os itens nos objetos em estoque. O conjunto de restrições (4.4) são de capacidade e garantem que o número de objetos que podem ser cortados em cada período não seja maior que a quantidade disponível. Elas asseguram que a capacidade de produção em cada período t não seja excedida. O conjunto de restrições (4.5) e (4.6) são as restrições de não-negatividade e integralidade das variáveis. O conjunto de restrições (4.7) e (4.8) garantem que não há itens em atraso no início do primeiro período do horizonte de planejamento e não é permitido atraso no final do último período.

4.2 Modelagem para diferentes tipos de objetos

Considere que temos em estoque K tipos de objetos de comprimentos L_k , $k = 1, \dots, K$, cada tipo de objeto tem uma limitação, ou seja, está disponível em uma quantidade limitada e_{kt} , para o objeto tipo k , no período t . Desejamos cortar esses objetos em itens menores de comprimentos específicos ℓ_i , $i = 1, \dots, m$, tais que: $\ell_i \leq \min_{k \in K} \{L_k\}$ de forma a atender a demanda de cada tipo de item i .

Considere N_k como o número de padrões de corte para o objeto do tipo k , $k = 1, \dots, K$. Seja α_{ijkt} o número de itens do tipo i no padrão de corte j cortados no objeto tipo k no período t .

Considere que temos um horizonte de planejamento dividido em t períodos, $t = 1, \dots, T$. Esses períodos podem significar turnos de trabalho (horas), dias, ou semanas. As demandas b_{it} dos itens ocorrem em períodos diversos do horizonte de planejamento finito. Considere também que x_{jkt} sejam as variáveis de decisão do problema, que indicam a quantidade de objetos a serem cortados no padrão de corte j , no objeto tipo k , no período t .

Admitindo o quadro de uma empresa que tem capacidade produtiva apertada, podendo até não conseguir atender todos os seus pedidos na sua respectiva data de entrega. Suponha que a empresa pretenda ao menos conseguir minimizar esse atraso. Para determinar esse atraso, caso haja, consideramos as variáveis de decisão y_{it} , ou seja, essa variável determinaria o número de itens cortados com atraso em um determinado período, e quando ocorrer atraso, penalizamos-o na função objetivo por uma penalidade w_{it} por atraso de cada tipo de item i em um dos períodos do horizonte de planejamento. O objetivo é produzir os itens a partir do corte dos objetos em estoque, atendendo a determinada demanda, de modo que minimize o desperdício de material utilizado e o atraso na entrega dos itens.

Considere os seguintes dados para o problema descrito:

Índices:

- i : tipo de item, $i = 1, \dots, m$;
- k : tipo de objeto, $k = 1, \dots, K$;
- j : padrão de corte, $j = 1, \dots, N_k$;
- t : período, $t = 1, \dots, T$.

Parâmetros:

- L_k : comprimento do objeto tipo k ;
- ℓ_i : comprimento do item tipo i ($L \geq \ell_i$);
- b_{it} : demanda do item tipo i no período t ;
- e_{kt} : disponibilidade do objeto tipo k , no período t ;
- C_t : número de objetos que podem ser cortados até/antes da data de entrega no período t ;
- w_{it} : penalidade por atraso do item i no período t ;
- a_{ijkt} : quantidade de itens tipo i produzidos no padrão de corte j , no objeto tipo k , no período t ,

- c_{jkt} : custo de cortar o padrão de corte j , no objeto tipo k , no período t .

Consideramos c_{jkt} como a perda no j -ésimo padrão de corte do objeto tipo k , no período t :

$$c_{jkt} = L_k - \sum_{i=1}^m \ell_i \alpha_{ijkt}, \forall j, k, t. \quad (4.9)$$

Variáveis de decisão:

- x_{jkt} : número de objetos a serem cortados no padrão de corte j no objeto k no período t ;
- y_{it} : número de itens tipo i cortados com atraso no período t .

A seguir, apresentamos um modelo para o PCE unidimensional com data de entrega para diferentes objetos em estoque com restrições de estoque (PCEDE-RE):

Modelo PCEDE-RE

$$\text{minimizar} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} c_{jkt} x_{jkt} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m w_{it} y_{it} \quad (4.10)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} a_{ijkt} x_{jkt} + y_{it} = b_{it} + y_{i,t-1}, \forall t, \forall i \quad (4.11)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} x_{jkt} \leq C_t, \quad \forall t \quad (4.12)$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} x_{jkt} \leq e_{kt}, \quad \forall k, \forall t \quad (4.13)$$

$$x_{jkt} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall j, \forall k, \forall t \quad (4.14)$$

$$y_{it} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall i, \forall t \quad (4.15)$$

$$y_{0T} = 0 \quad (4.16)$$

$$y_{i0} = 0, \quad \forall i. \quad (4.17)$$

A função objetivo (4.10) consiste em minimizar o desperdício de material e o atraso na entrega dos itens. O conjunto de restrições (4.11) garante que a demanda seja atendida ao serem cortados os itens nos objetos em estoque, admitindo-se atraso na entrega

de itens, caso a capacidade de corte não seja suficiente para atender a demanda do tipo do item. O conjunto de restrições (4.12) é referente a capacidade de corte em cada período. Essas restrições asseguram que a capacidade de produção não seja excedida. As restrições de disponibilidade de objetos em estoque aparecem em (4.13), assegurando que não será cortado mais objetos que os disponíveis em estoque. O conjunto de restrições (4.14) e (4.15) são as restrições de não-negatividade e integralidade das variáveis. Os conjuntos de restrições (4.16) e (4.17) garantem que não há itens em atraso no início do primeiro período do horizonte de planejamento e não é permitido atraso no final do último período do horizonte de planejamento, respectivamente.

Note que o modelo proposto para o PCEDE, com um único tipo de objeto em estoque, é apenas um caso particular deste PCEDE-RE com $K = 1$ e e_1 suficientemente grande.

Capítulo 5

Abordagem de resolução

Neste capítulo, descrevemos o método de resolução que usamos para resolver os modelos propostos [PCEDE] e [PCEDE-RE].

As modelagens propostas apresentam duas dificuldades: a primeira são as restrições de integralidade das variáveis x_{jt} e y_{it} no modelo [PCEDE] e x_{jkt} e y_{it} no modelo [PCEDE-RE], a segunda é o número muito grande de possíveis padrões de corte; em problemas de grande porte, podem chegar à ordem de centenas de milhares e até de milhões.

Para contornar estas dificuldades, Gilmore e Gomory [6, 7] propuseram relaxar a condição de integralidade e resolver o problema de otimização linear resultante pelo método simplex com geração de colunas. Ao final, técnicas podem ser utilizadas para determinar soluções inteiras para o problema de corte de estoque.

5.1 Geração de Colunas para o PCE

Considere que temos um problema inicial, chamado de problema mestre restrito, o qual deve ser otimizado (maximizado ou minimizado). Uma abordagem de geração de colunas utiliza inicialmente um conjunto de variáveis para o problema mestre.

Esta técnica de geração de colunas utiliza a informação do dual do problema mestre para construir um problema auxiliar de otimização, chamado de subproblema *pricing*. A solução do subproblema determina uma coluna (padrão de corte) mais atrativa que é inserida no problema mestre e este, por sua vez, é reotimizado. Este processo acontece de forma iterativa até que não haja mais nenhuma coluna atrativa a ser inserida no problema mestre.

Quando procura-se uma coluna que melhore a solução, ao invés de utilizar métodos do tipo enumeração explícita (os quais, na maioria dos casos, consideram um número muito grande de alternativas), procura-se uma alternativa resolvendo um problema

auxiliar. No método de geração de colunas, é possível ligar os dois problemas envolvidos, o problema mestre (principal) e o subproblema (*pricing*), porque se pode extrair o custo reduzido (para o problema mestre) de um ponto qualquer x do conjunto em termos das variáveis do modelo principal. Assim, o subproblema, pode determinar qual o vértice do conjunto que corresponde à variável mais atrativa, para poder inserir no problema mestre.

Em problemas de corte de estoque sempre podemos formar uma base inicial, considerando padrões de corte homogêneos (ou unitários), cujos vetores associados definem uma matriz diagonal. No caso em que temos diferentes tipos de objetos em estoque, devemos encontrar uma matriz como a seguinte:

$$B_{mm} = \begin{pmatrix} \lfloor \frac{L_k}{\ell_1} \rfloor & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lfloor \frac{L_k}{\ell_2} \rfloor & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lfloor \frac{L_k}{\ell_m} \rfloor \end{pmatrix}.$$

onde os elementos não-nulos correspondem ao número máximo de vezes que cada item tipo i pode ser cortado no objeto tipo k , para algum k .

5.1.1 O problema *pricing*

Esse é o subproblema utilizado para a obtenção de novos padrões de corte que serão inseridos no problema mestre. Existem várias formulações a respeito das variáveis de decisão desse modelo (contínuas, binárias etc), porém no caso estudado elas serão inteiras.

Originalmente, a modelagem foi formulada para resolver o problema de maximizar a utilidade de certos objetos que serão colocados em uma mochila, onde existe um grupo de candidatos dos quais deve ser escolhido um subgrupo cuja soma dos pesos de seus integrantes respeita a capacidade da mochila e que dá a solução ótima.

Um tipo de objeto

Os padrões de corte devem satisfazer a seguinte restrição:

$$\begin{aligned} \ell_1 \alpha_1 + \ell_2 \alpha_2 + \dots + \ell_m \alpha_m &\leq L \\ \alpha_i &\geq 0, \text{ inteiro}, \forall i. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim, o problema *pricing* para o problema PCEDE pode ser expresso como:

$$\text{minimizar} \quad c_j + \lambda_t - \sum_{i=1}^m \mu_{it} \alpha_i \quad (5.2)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^m \ell_i \alpha_i \leq L \quad (5.3)$$

$$\alpha_i \geq 0, \text{ inteiro}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.4)$$

onde c_j representa a perda no padrão de corte, μ_{it} e λ_t representam as variáveis duais correspondentes as restrições de demanda (4.3) e capacidade (4.4), respectivamente, e, α_i representa o número de vezes que o item do tipo i é usado no padrão de corte.

Diferentes tipos de objetos

O modelo matemático proposto em (4.10)-(4.17) é semelhante ao modelo apresentado em (4.2)-(4.8), ou seja, para cada objeto $k = 1, \dots, K$ devem ser satisfeitas:

$$\ell_1 \alpha_{1k} + \ell_2 \alpha_{2k} + \dots + \ell_m \alpha_{mk} \leq L_k \quad (5.5)$$

$$\alpha_{ik} \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall i.$$

Assim, para cada tipo de objeto k , temos de resolver um problema *pricing* que pode ser expresso como:

$$\text{minimizar} \quad c_{jk} + \lambda_t + \gamma_{kt} - \sum_{i=1}^m \mu_{it} \alpha_{ik} \quad (5.6)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^m \ell_i \alpha_{ik} \leq L_k \quad (5.7)$$

$$\alpha_i \geq 0, \text{ inteiro}, \quad \forall i, \quad (5.8)$$

onde c_{jk} representa a perda no padrão de corte j no objeto tipo k , μ_{it} , λ_t e γ_{kt} representam as variáveis duais correspondentes as restrições de demanda (4.11), capacidade (4.12) e estoque (4.13) respectivamente, e, α_{ik} representa o número de vezes que o item do tipo i cortado no objeto tipo k , é usado no padrão de corte.

5.2 Solução para o problema inteiro

Enquanto o método de solução descrito na Seção 5.1 produz uma solução ótima para o problema linear relaxado, a solução resultante não é necessariamente uma solução inteira. E na prática uma solução fracionada não seria útil. Sendo assim, é necessário usar

uma abordagem de resolução que seja capaz de encontrar uma solução inteira para esse problema.

Na literatura, podemos encontrar muitas técnicas de arredondamento (Pinto [11], Poldi [12], Poldi [13], Wäscher e Gau [18]). Optamos nesta dissertação utilizar a seguinte abordagem:

- 1: Ao resolver o problema linear relaxado, encontrando assim a solução relaxada ótima para o problema, iremos guardando todas as colunas (padrões de corte) que foram geradas em cada iteração inclusive as colunas iniciais dadas.
- 2: Resolvemos o problema com todas as colunas que foram geradas, sem relaxar as condições de integralidade, ou seja, admitimos que x_{jkt} e y_{it} são variáveis inteiras. Com isso, encontramos uma solução inteira.

5.3 Exemplos de aplicação do método de solução

Para exemplificar a abordagem de solução proposta nas Seções 5.1 e 5.2, apresentamos três exemplos: o primeiro exemplo (Problema 1) para o problema com apenas um tipo de objeto em estoque, o segundo exemplo (Problema 2) para analisarmos o número de colunas geradas em cada um dos períodos. Consideramos dois valores para a penalidade por atraso: 1 e 10, analisando também cada solução que foi encontrada para o problema relaxado e o inteiro. E o terceiro exemplo (Problema 3) no qual apresentamos suas soluções para três penalidades por atraso: 1, 10 e 100.

5.3.1 Problema 1

Considere que temos em estoque objetos de comprimento $L = 124$, disponíveis em uma quantidade ilimitada, suficiente para atender a demanda. Devemos cortar desses objetos três tipos de itens de comprimentos $\ell_1 = 39$, $\ell_2 = 17$ e $\ell_3 = 12$. Uma empresa recebe três pedidos para serem entregues em três datas diferentes: 5, 12 e 20 dias. Os demais dados como capacidade e demanda de itens estão listados na Tabela 4. Deseja-se minimizar o número de objetos cortados e o atraso na entrega dos itens.

Tabela 4 – Dados para o Problema 1.

Período	C_t : Capacidade	d_{it} : Demanda do item i
t_1	$C_1 = 70$	$d_{i1} = (189,100,165)$
t_2	$C_2 = 170$	$d_{i2} = (432,176,176)$
t_3	$C_3 = 300$	$d_{i3} = (165,102,139)$

A seguir, descrevemos a resolução do Problema 1, período a período. Apresentamos os padrões de corte que foram usados bem como quantas vezes devemos cortar esse

padrão de corte (número de objetos devem ser cortados). Apresentamos também o atraso na entrega dos itens, os quais penalizamos com $w_{it} = 1$ na função objetivo.

Solução para o problema relaxado

- **Primeiro período**

Perda total no período: 41,49

Atendimento a demanda:

$$3,58 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 50,00 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 16,43 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127,17 \\ 100,00 \\ 165,00 \end{bmatrix}$$

Atraso:

$$y_{i1} = \begin{bmatrix} 61,83 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

- **Segundo período**

Perda total no período: 498,59

Atendimento a demanda:

$$69,43 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 88,00 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 12,57 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 396,87 \\ 176,00 \\ 176,00 \end{bmatrix}$$

Atraso:

$$y_{i2} = \begin{bmatrix} 61,83 + 35,14 = 96,97 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

- **Terceiro período**

Perda total no período: 356,56

Atendimento a demanda:

$$49,13 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 51,00 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 12,58 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96,97 + 165,00 = 261,97 \\ 102,00 \\ 139,00 \end{bmatrix}$$

Atraso:

$$y_{i3} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Solução para o problema inteiro

- **Primeiro período**

Perda total no período: 47,00

Atendimento a demanda:

$$4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 50 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 15 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127,00 \\ 100,00 \\ 165,00 \end{bmatrix}$$

Atraso:

$$y_{i1} = \begin{bmatrix} 62,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

- **Segundo período**

Perda total no período: 505,00

Atendimento a demanda:

$$70 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 88 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 397,00 \\ 176,00 \\ 175,00 \end{bmatrix}$$

Atraso:

$$y_{i2} = \begin{bmatrix} 62,00 + 35,00 = 97,00 \\ 0,00 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

- **Terceiro período**

Perda total no período: 380,00

Atendimento a demanda:

$$51 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 51 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 + 165 = 262,00 \\ 176,00 \\ 140,00 \end{bmatrix}$$

Atraso:

$$y_{i3} = \begin{bmatrix} 0,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

Para a solução do primeiro período o modelo proposto para um tipo de objeto, atrasou 61,83 unidades na entrega do item tipo 1, e conseguiu atender sem atraso os outros itens.

No segundo período, a solução do modelo já apresentava um atraso de 61,83 e atrasou mais 35,14 unidades do item de tipo 1. A demanda dos demais itens foi atendida sem atrasos.

No terceiro período devido a capacidade ser maior o modelo conseguiu produzir os itens que ficaram em atraso nos períodos anteriores. A demanda do item 1 no terceiro período era de 165 e foi produzido 261,97, o qual representa $165 + 96,97$.

Observamos que as soluções encontradas para o problema relaxado estão bem próximas da solução encontrada para o problema inteiro.

Tabela 5 – Solução do Problema 1.

Penalidade	Solução	Relaxado	Inteiro
1	Perda total	896,64	932,00
	Atraso	158,79	160,00
	Função objetivo	1055,43	1092,00

5.3.2 Problema 2

Suponha que uma empresa receba três pedidos para cortar itens de três comprimentos: $\ell_1 = 284$, $\ell_2 = 238$ e $\ell_3 = 107$. A empresa tem em estoque três tipos de objetos com os seguintes comprimentos: $L_1 = 980$, $L_2 = 863$ e $L_3 = 529$. A empresa deseja minimizar o desperdício de material e o atraso na entrega dos itens. Os dados dos pedidos, capacidade por período e estoque de objetos por períodos, estão listados na Tabela 6:

Tabela 6 – Dados para o Problema 2.

T : Período	C_t : Capacidade	d_{it} : Demanda do item i	e_{kt} : Estoque
t_1	$C_1 = 100$	$d_{i1} = (200, 109, 44)$	$e_{k1} = (104, 102, 80)$
t_2	$C_2 = 150$	$d_{i2} = (160, 90, 144)$	$e_{k2} = (160, 160, 102)$
t_3	$C_3 = 800$	$d_{i3} = (135, 133, 122)$	$e_{k3} = (132, 102, 133)$

Tabela 7 – Soluções relaxada e inteira do Problema 2 com $w_{it} = 1$. O valor da função objetivo do problema relaxado é 2303,89 e do problema inteiro é 2305,00.

Período	w_{it}	Objeto	α_{ijkt}	$c_{jkt}x_{jkt}$	y_{it}	$\overline{c_{jkt}x_{jkt}}$	$\overline{y_{it}}$
1	1	1	$(1, 2, 2)^t$	132,00	$y_{11} = 0$	132	$y_{11} = 0$
		2	$(3, 0, 0)^t$	612,26	$y_{21} = 54$	616,00	$y_{21} = 55$
		3	$(1, 1, 0)^t$	77,00	$y_{31} = 0$	77,00	$y_{31} = 0$
2	1	1	$(1, 2, 2)^t$	432,00	$y_{12} = 0$	432,00	$y_{12} = 0$
		2	$(3, 0, 0)^t$	322,63	$y_{22} = 0$	319,00	$y_{22} = 0$
		3	$(1, 1, 0)^t$	-	$y_{32} = 0$	7,00	$y_{32} = 0$
3	1	1	$(1, 2, 2)^t$	366,00	$y_{13} = 0$	366,00	$y_{13} = 0$
		2	$(3, 0, 0)^t$	231,00	$y_{23} = 0$	231,00	$y_{23} = 0$
		3	$(1, 1, 0)^t$	77,00	$y_{33} = 0$	77,00	$y_{33} = 0$
				2249,89	54,00	2250,00	55,00

Tabela 8 – Soluções relaxada e inteira do Problema 2 com $w_{it} = 10$. O valor da função objetivo do problema relaxado é 2631,28 e do problema inteiro é 2579,00.

Período	w_{it}	Objeto	α_{ijkt}	x_{jkt}	y_{it}	$\overline{x_{jkt}}$	$\overline{y_{it}}$
1	10	1	$(0, 4, 0)^t$	414,40	$y_{11} = 0$	336,00	$y_{11} = 0$
		1	$(1, 2, 2)^t$	132,00	$y_{21} = 0$	132,00	$y_{21} = 7$
		2	$(3, 0, 0)^t$	631,40	$y_{31} = 0$	616,00	$y_{31} = 0$
		3	$(1, 1, 0)^t$	40,60	-	70,00	-
2	10	1	$(1, 2, 2)^t$	270,00	$y_{21} = 0$	288,00	$y_{12} = 0$
		2	$(3, 0, 0)^t$	421,63	$y_{22} = 0$	407,00	$y_{22} = 0$
		2	$(0, 0, 8)^t$	47,25	$y_{23} = 0$	42,00	$y_{23} = 0$
		3	$(1, 1, 0)^t$	-	-	7,00	-
3	10	1	$(1, 2, 2)^t$	366,00	$y_{13} = 0$	366,00	$y_{13} = 0$
		2	$(3, 0, 0)^t$	231,00	$y_{23} = 0$	231,00	$y_{23} = 0$
		3	$(1, 1, 0)^t$	77,00	$y_{33} = 0$	77,00	$y_{33} = 0$
				2631,28	0,00	2572,00	7,00

onde,

- a coluna x_{jkt} representa o número de objetos cortados para o problema relaxado, encontrado com a solução do problema linear relaxado, ou seja, representa uma solução ótima para o problema relaxado;
- a coluna α_{ijkt} representa os padrões de corte que foram gerados no problema *pricing* como solução para o problema mestre;

- a coluna $\overline{x_{jkt}}$ o número de objetos cortados para o problema inteiro, ou seja, representa uma solução inteira para o problema de programação linear inteira, a qual foi encontrada utilizando todas as colunas que foram geradas, quando resolvemos o problema de programação linear relaxado;
- a coluna y_{it} representa o número de itens que ficaram em atraso para o problema relaxado;
- a coluna $\overline{y_{it}}$ representa o número de itens que ficaram em atraso para o problema inteiro.

Das soluções encontradas, vemos que a demanda do segundo período foi entregue com atraso. Com o atraso de 55 itens, quando a penalidade pelo atraso era de 1 unidade, já quando a penalidade era de 10 unidades, esse atraso foi reduzido para 7, porém se chegou a uma perda maior no padrão de corte. Isso nos leva a crer que ponderar esses objetivos não é uma tarefa fácil, uma vez que penalizar o atraso fará com que a perda no padrão seja maior, ou caso a penalização seja menor, teremos um atraso maior.

5.3.3 Problema 3

Suponha que em uma empresa de bobinas de aço tenha em estoque três tipos de objetos: $L_1 = 674$, $L_2 = 578$ e $L_3 = 461$. Admitindo que há apenas uma máquina de corte para atender a produção dos seguintes itens $l_1 = 212$, $l_2 = 208$, $l_3 = 190$, $l_4 = 186$, $l_5 = 164$, $l_6 = 109$, $l_7 = 105$, $l_8 = 87$, $l_9 = 83$ e $l_{10} = 61$. Deseja-se minimizar a perda do material e o atraso na entrega dos itens. Os demais dados como capacidade e demanda de itens estão listados na Tabela 9:

Tabela 9 – Dados para o Problema 3.

T : Período	C_t : capacidade	e_{kt} : estoque	b_{it} : demanda do item tipo i
t_1	$C_1 = 100$	$e_{k1} = (58, 93, 71)$	$b_{i1} = (20,19,44,43,28,28,35,33,22,8)$
t_2	$C_1 = 170$	$e_{k2} = (58, 103, 91)$	$b_{i2} = (29,30,44,30,7,7,39,32,29,18)$
t_3	$C_3 = 370$	$e_{k3} = (48, 123, 171)$	$b_{i3} = (16,9,44,37,16,16,23,22,38,3)$

Apresentamos na Tabela 10 os resultados que foram obtidos resolvendo o problema 3, descrito na Tabela 9. Para resolução deste problema foram testadas três penalizações por atraso na entrega dos itens $w_{it} = 1$, $w_{it} = 10$ e $w_{it} = 100$.

Tabela 10 – Soluções relaxada e inteira do Problema 3 variando a penalidade por atraso.

Penalidade	Solução	Relaxado	Inteiro
1	Perda total	336,57	341,00
	Atraso	66,35	67,00
	Função objetivo	402,92	408,00
10	Perda total	371,29	376,00
	Atraso	63,20	65,00
	Função objetivo	1003,33	1026,00
100	Perda total	592,62	650,00
	Atraso	58,97	60,00
	Função objetivo	6489,77	6650,00

Os atrasos que foram gerados ao longo do horizonte de planejamento para os períodos de 1 e 2 foram supridos no último devido a capacidade ser maior, conseguindo o modelo entregar todos os itens demandados.

Capítulo 6

Experimentos computacionais

Neste capítulo, descrevemos os testes computacionais que foram realizados para as modelagens propostas. Testamos a validade do modelo com apenas um tipo de objeto para 8 classes de problemas, cada uma com 20 problemas. Testamos também para 8 classes de problemas, cada um com 20 problemas, para o modelo com diferentes tipos de objetos. A geração aleatória dos dados para os exemplos-teste foi baseada no CUTGEN1 proposto por Gau e Wäscher [5]. Os modelos foram implementados no OPL/CPLEX 12.6 e os testes foram feitos em um Notebook Inspiron 14 Intel Core 5 i5, 4GB disco rígido de 1TB.

6.1 Testes para um tipo de objeto

A Tabela 11 descreve as 8 classes, com 20 problemas em cada, que foram gerados para o PCEDE. Consideramos, na geração dos comprimentos dos itens, dois tipos, sendo eles: pouco heterogêneos (P) e muito heterogêneos (M) em relação ao comprimento do objeto em estoque a ser cortado.

Tabela 11 – Caracterização das 8 classes para o PCEDE com um tipo de objeto.

Classe	Número de itens (m)	Tamanho dos itens	Número de períodos (T)
1	10	P	3
2	10	M	3
3	20	P	3
4	20	M	3
5	10	P	5
6	10	M	5
7	20	P	5
8	20	M	5

Gerador aleatório 1

Para execução dos testes computacionais para o problema de corte de estoque unidimensional com data de entrega, fixamos alguns parâmetros, que estão listados a seguir:

- número de períodos $T = 3$ e 6 ;
- número de tipos de itens $m = 10$ e 20 ;
- comprimento do objeto $L = 1000$;

Outros parâmetros necessários para os testes foram gerados aleatoriamente da seguinte forma:

- comprimento do item: ℓ_i foram gerados aleatoriamente nos intervalos $[v_1L, v_2L]$. Utilizou-se $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,2$ e $0,8$. Combinando estes valores, foram geradas classes com itens pouco heterogêneos (P), ou seja, $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,2$ e classes com itens muito heterogêneos (M), ou seja, $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,8$;
- demanda: $d_{it} \in [1, 50]$;

A capacidade de corte para cada período foi considerada da seguinte maneira:

- capacidade C_t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \ell_i b_{it} \\ 0,1 \frac{\sum_{i=1}^m \ell_i b_{it}}{m}, \text{ se } t = 1, \dots, T-1 \\ \sum_{i=1}^m \ell_i b_{it} \\ 0,3 \frac{\sum_{i=1}^m \ell_i b_{it}}{m}, \text{ se } t = T. \end{array} \right.$$

A capacidade do último período foi gerada com uma folga maior para evitar gerar problemas infactíveis.

Testes 1

As Tabelas 12, 13 e 14 apresentam os resultados para o primeiro conjunto de testes realizados para as classes de problemas apresentadas na Tabela 11. A nomenclatura utilizada nas próximas tabelas deste capítulo são as seguintes:

- w_{it} : penalidade por atraso do item tipo i no período t ;
- Col: número de colunas geradas;

- OC: número de objetos cortados;
- PD: perda total;
- A: número de itens em atraso;
- FO: valor da função objetivo.

$$\text{minimizar} \quad \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^N c_{jt}x_{jt} + \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^m w_{it}y_{it} \quad (6.1)$$

Tabela 12 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 1$.

Classe	Relaxado					Inteiro			
	Col	Tempo	PD	A	FO	Tempo	PD	A	FO
C1	42,25	61,25	88,41	5,18	93,59	83,41	89,00	6,00	95,00
C2	40,12	60,42	120,43	7,16	127,59	75,43	123,00	10,00	133,00
C3	73,13	68,45	84,13	20,25	104,28	78,86	86,00	25,00	111,00
C4	69,42	52,43	120,48	10,41	130,89	71,45	124,00	13,00	137,00
C5	49,16	62,15	96,48	6,42	102,90	89,41	100,00	8,00	108,00
C6	45,13	60,45	130,61	31,16	161,77	78,53	133,00	55,00	168,00
C7	81,13	71,41	110,31	45,18	155,49	95,46	113,00	50,00	163,00
C8	73,41	67,45	150,41	18,45	168,56	83,46	155,00	21,00	176,00
Média	59,24	63,03	112,62	18,01	130,68	82,00	115,37	21,00	136,37

Tabela 13 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 10$.

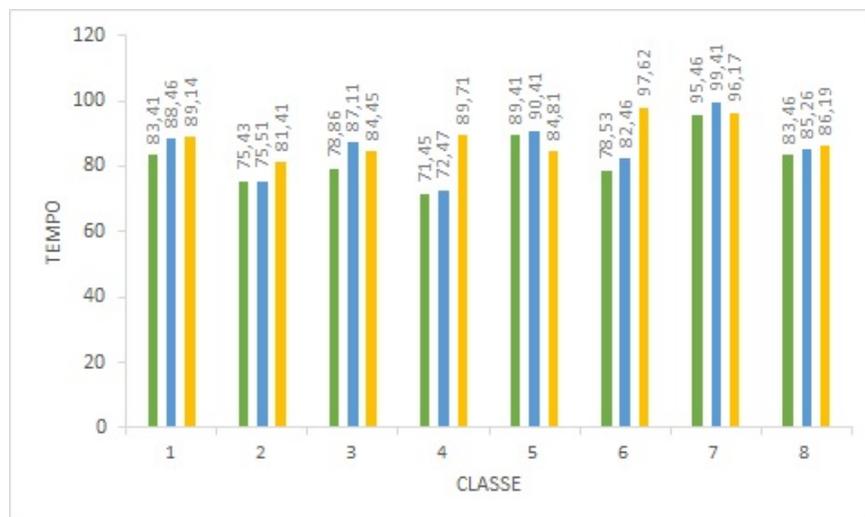
Classe	Relaxado					Inteiro			
	Col	Tempo	PD	A	FO	Tempo	PD	A	FO
C1	43,25	60,43	89,71	4,16	131,31	88,46	93,00	5,00	143,00
C2	41,25	59,73	130,16	5,41	184,26	79,51	132,00	7,00	202,00
C3	72,15	65,41	85,76	19,47	280,46	87,11	87,00	20,00	287,00
C4	68,45	50,41	135,46	8,36	209,06	72,47	127,00	100,00	227,00
C5	47,18	60,16	101,47	4,31	144,57	90,41	103,00	5,00	153,00
C6	46,51	58,17	136,41	25,41	390,51	82,46	140,00	27,00	410,00
C7	80,46	75,41	113,47	40,17	515,17	99,41	120,00	42,00	540,00
C8	74,42	68,41	156,81	15,68	313,61	85,26	158,00	18,00	338,00
Média	59,22	63,33	117,40	15,37	271,11	85,63	119,87	16,75	287,37

Tabela 14 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 100$.

Classe	Relaxado					Inteiro			
	Col	Tempo	PD	A	FO	Tempo	PD	A	FO
C1	42,41	63,45	99,43	1,31	230,43	89,14	103,00	2,00	303,00
C2	40,13	61,47	138,71	1,72	310,71	81,41	142,00	3,00	442,00
C3	70,18	63,43	93,46	10,41	1134,46	84,45	99,00	13,00	1399,00
C4	70,48	59,41	141,73	1,47	288,73	89,71	146,00	3,00	446,00
C5	45,15	70,56	105,46	2,48	353,46	84,81	107,00	4,00	507,00
C6	46,52	59,12	151,77	11,42	1293,77	97,62	152,00	13,00	1452,00
C7	78,49	76,12	133,49	25,26	2649,49	96,17	120,00	28,00	2936,00
C8	75,41	65,17	172,81	6,71	843,81	86,19	175,00	9,00	1075,00
Média	58,84	64,84	129,60	7,58	888,10	88,68	132,50	9,37	1070,00

6.1.1 Análise dos resultados do primeiro conjunto de testes

A seguir apresentamos uma análise de resultados que foram realizados, exemplificamos em alguns gráficos os resultados que foram obtidos com as classes de problemas que foram realizados. Em todas os gráficos a primeira coluna será para a penalidade por atraso de $w_{it} = 1$, a segunda coluna a penalidade por atraso de $w_{it} = 10$ e a terceira coluna a penalidade por atraso de $w_{it} = 100$.

Figura 9 – Distribuição do tempo em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1$, 10 e 100.

No gráfico da Figura 9 está ilustrado o tempo em segundos que levou em média para cada uma das classes com as três penalizações que foram testadas. Observando o gráfico 9 a classe que mais demorou foi a Classe 5 para a penalização por atraso de $w_{it} = 100$ e a classe mais rápida foi a Classe 4 para a penalização por atraso de $w_{it} = 1, 10$.



Figura 10 – Distribuição do desperdício de material em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100.

No gráfico da Figura 10 está ilustrado o desperdício de material em cada classe de problemas, percebemos que quando se aumenta a penalização por atraso o desperdício de material aumenta. E as classes que tiveram mais desperdícios foram as Classes 2,4,6 e 8.



Figura 11 – Distribuição do atraso em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1, 10$ e 100.

No gráfico da Figura 11 está ilustrado o atraso em cada classe de problemas, percebemos que quando se aumenta a penalização por atraso o atraso diminui.

Para todos os testes que foram analisados, o modelo conseguiu resolver todos os pedidos mesmo que com atraso em algum dos períodos, no último período foi capaz de produzir os itens que em algum período ficou em atraso. Com os testes computacionais que foram realizados, concluímos que o modelo proposto para o problema de corte de estoque com data de entrega para um tipo de objeto em estoque faz o desejado, ou seja, atende a demanda conseguindo minimizar o número de objetos cortados e o atraso na entrega dos itens.

6.2 Testes para diferentes tipos de objetos

A Tabela 15 descreve as 8 classes, com 20 problemas em cada, que foram gerados para o PCEDE-RE.

Tabela 15 – Caracterização das 8 classes para o PCEDE com diferentes tipos de objetos.

Classe	Número de períodos (T)	Número de objetos (K)	Número de itens (m)
C1	3	3	10
C2	3	3	20
C3	3	5	10
C4	3	5	20
C5	6	3	10
C6	6	3	20
C7	6	5	10
C8	6	5	20

Gerador aleatório 2

Para o segundo conjunto de testes computacionais, consideramos o problema de corte de estoque, com diferentes tipos de objetos em estoque, com data de entrega. Para gerar os dados aleatoriamente, consideramos os seguintes parâmetros:

- número de períodos $T = 3$ e 6 ;
- número de tipos de objetos $K = 3$ e 5 ;
- número de tipos de itens $m = 10$ e 20 .

Outros parâmetros necessários para os testes foram gerados aleatoriamente da seguinte forma:

- comprimento do objeto: $L_k \in [300, 1000]$;

- comprimento do item: ℓ_i foram gerados aleatoriamente nos intervalos $[v_1 L, v_2 L]$. Utilizou-se $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,2$ e $0,8$. Combinando estes valores, foram geradas classes com itens pouco heterogêneos (P), ou seja, $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,2$ e classes com itens muito heterogêneos (M), ou seja, $v_1 = 0,01$ e $v_2 = 0,8$;
- demanda: $d_{it} \in [1, 50]$;
- disponibilidade em estoque $e_{kt} \in [[\lambda_t], 2[\lambda_t]]$, onde,

$$\lambda_t = \frac{\sum_{m=1}^m \ell_i d_{it}}{\sum_{k=1}^K L_k}.$$

A capacidade foi gerada da seguinte maneira para cada um dos períodos:

- capacidade C_t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \ell_i b_{it} \\ 0,1 \frac{\quad}{m}, \text{ se } t = 1, \dots, T-1 \\ \sum_{i=1}^m \ell_i b_{it} \\ 0,3 \frac{\quad}{m}, \text{ se } t = T. \end{array} \right.$$

A capacidade do último período foi gerada com uma folga maior para evitar gerar problemas infactíveis.

Testes 2

Apresentamos nas Tabelas 16, 17 e 18 os resultados que foram obtidos para o segundo conjunto de testes que foram realizados. Estão dispostos nessas tabelas os valores para o a solução do problema de programação linear relaxado e para o problema de programação linear inteira.

Os testes foram analisados para três penalizações $w_{it} = 1$, $w_{it} = 10$ e $w_{it} = 100$, para analisar o que acontece com o atraso e com o desperdício de material utilizado.

Tabela 16 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 1$.

Classe	Relaxado					Inteiro			
	Col	Tempo	PD	A	FO	Tempo	PD	A	FO
C1	29	74,31	96,48	5,40	101,88	94,51	100,00	10,00	110,00
C2	66	93,41	17,63	344,18	361,81	114,46	19,00	349,00	368,00
C3	31	68,45	59,41	7,34	66,75	89,11	65,00	13,00	78,00
C4	64	101,11	9,17	101,61	110,78	125,31	12,00	107,00	119,00
C5	34	59,81	174,12	17,71	191,83	75,83	178,00	20,00	198,00
C6	72	106,45	60,47	123,51	183,98	110,43	65,00	128,00	193,00
C7	38	63,47	141,73	20,45	162,18	85,18	148,00	23,00	171,00
C8	63	104,15	132,31	63,19	195,50	120,48	139,00	66,00	205,00
Média	49,62	83,89	86,41	85,42	171,83	101,91	90,75	89,50	180,25

Tabela 17 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 10$.

Classe	Relaxado					Inteiro			
	Col	Tempo	PD	A	FO	Tempo	PD	A	FO
C1	31	75,18	120,41	0,46	125,01	98,11	220,00	5,00	270,00
C2	67	86,46	236,11	201,63	2252,41	125,13	238,00	203,00	2268,00
C3	33	74,14	80,47	2,31	103,57	93,41	86,00	6,00	146,00
C4	66	98,12	50,17	90,17	951,87	125,31	60,00	93,00	990,00
C5	36	58,61	205,76	1,05	216,26	85,83	208,00	5,00	258,00
C6	74	108,46	620,48	92,46	1545,08	117,43	625,00	96,00	1585,00
C7	39	65,41	196,74	1,31	209,84	85,18	201,00	2,00	221,00
C8	65	110,41	246,11	46,73	713,41	131,48	249,00	48,00	729,00
Média	51,37	84,59	219,65	54,51	764,68	107,73	235,87	57,25	808,37

Tabela 18 – Média para os 20 problemas-testes para cada uma das classes para penalidade $w_{it} = 100$.

Classe	Relaxado					Inteiro			
	Col	Tempo	PD	A	FO	Tempo	PD	A	FO
C1	37	76,18	180,45	0,00	180,45	99,31	196,00	3,00	496,00
C2	68	87,49	310,19	150,32	1534,19	134,21	318,00	151,00	15418,00
C3	31	72,18	100,45	0,00	100,45	99,00	103,00	2,00	303,00
C4	69	96,15	96,18	60,21	6117,18	141,66	100,00	64,00	6500,00
C5	33	59,71	246,91	0,00	246,91	96,49	251,00	1,00	351,00
C6	69	108,51	650,41	80,17	8667,41	141,47	670,00	83,00	8970,00
C7	42	66,43	206,12	0	206,12	85,18	210,00	1,00	310,00
C8	71	111,61	341,56	30,11	3352,56	143,46	350,00	32,00	3550,00
Média	52,50	84,78	266,53	40,10	4276,53	117,59	274,75	42,12	4487,25

6.2.1 Análise dos resultados do segundo conjunto de testes

A seguir apresentamos uma análise de resultados que foram realizados, exemplificamos em alguns gráficos os resultados que foram obtidos com as classes de problemas que foram realizados. Em todas os gráficos a primeira coluna será para a penalidade por atraso de $w_{it} = 1$, a segunda coluna a penalidade por atraso de $w_{it} = 10$ e a terceira coluna a penalidade por atraso de $w_{it} = 100$.



Figura 12 – Distribuição do tempo em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1$, 10 e 100.

No gráfico da Figura 12 está ilustrado o tempo em segundos que levou em média para cada uma das classes com as três penalizações que foram testadas. Observando o gráfico da Figura 12 as classes que mais demoraram foram as Classes 4 e 8 para a penalização por atraso de $w_{it} = 100$.

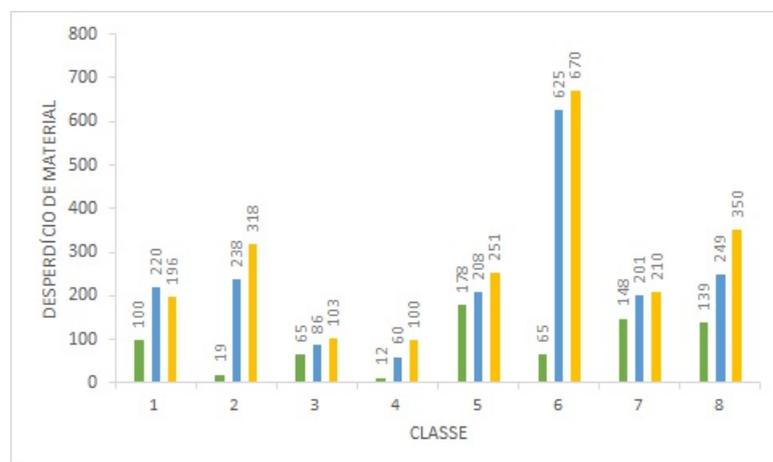


Figura 13 – Distribuição do desperdício de material em cada classe de problemas para penalidade $w_{it}=1$, 10 e 100.

No gráfico da Figura 13 está ilustrado o desperdício de material em cada classe de problemas, percebemos que quando se aumenta a penalização por atraso o desperdício de material aumenta. As classes que tiveram mais desperdícios foram as Classes 2, 6 e 8 e a que teve mais desperdício foi a Classe 8 para a penalização por atraso de $w_{it} = 100$.

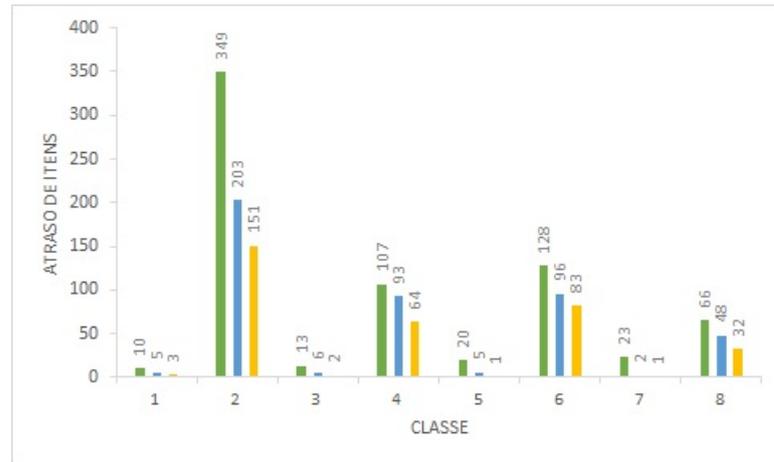


Figura 14 – Distribuição do atraso em cada classe de problemas para as penalidade $w_{it}=1$, 10 e 100.

No gráfico da Figura 14 está ilustrado o atraso em cada classe de problemas, percebemos que quando se aumenta a penalização por atraso o atraso diminui.

Para todos os testes que foram analisados, o modelo conseguiu resolver todos os pedidos mesmo que com atraso em algum dos períodos, no último período foi capaz de produzir os itens que em algum período ficou em atraso. Com os testes computacionais que foram realizados, concluímos que o modelo proposto para o problema de corte de estoque com data de entrega para um tipo de objeto em estoque faz o desejado, ou seja, atende a demanda conseguindo minimizar o desperdício de material utilizado e o atraso na entrega dos itens.

6.3 Determinar uma solução inteira ótima

Para conhecermos uma solução inteira ótima e compararmos com a solução do modelo relaxado e do modelo com as variáveis inteiras considerando apenas as colunas (padrões de corte) geradas no processo de geração de colunas, implementamos um procedimento que enumera todas as colunas possíveis para o problema e com essas colunas geradas foi resolvido o problema inteiro pelo CPLEX. Esse teste foi feito apenas para um problema da Classe 1 com apenas um tipo de objeto em estoque. A Tabela 19 mostra a comparação dessas soluções; chamamos de *inteira subótima* a solução encontrada para o problema inteiro com as colunas fornecidas pela geração de colunas e chamamos de *inteira ótima*, a solução encontrada, pelo CPLEX, para o problema com todas as possíveis colunas.

Tabela 19 – Solução dos 20 problemas da Classe 1 para penalidade $w_{it} = 1$.

Exemplo	Inteira Subótima					Inteira ótima				
	Colunas	Tempo(s)	Perda	Atraso	FO	Colunas	Tempo(s)	Perda	Atraso	FO
1	43	78,42	96,00	5,00	101,00	32178,00	1474,43	93,00	5,00	98,00
2	49	96,48	92,00	8,00	100,00	15146,00	781,53	91,00	7,00	98,00
3	45	69,39	80,00	3,00	83,00	6435,00	642,32	76,00	2,00	78,00
4	44	70,36	85,00	4,00	89,00	30142,00	1246,41	80,00	0,00	80,00
5	40	97,36	93,00	7,00	100,00	10668,00	721,42	90,00	3,00	93,00
6	42	96,43	76,00	9,00	85,00	9141,00	543,20	74,00	2,00	76,00
7	42	97,22	84,00	10,00	94,00	14279,00	593,12	81,00	5,00	86,00
8	45	68,42	92,00	4,00	96,00	18149,00	746,36	90,00	2,00	92,00
9	42	94,32	86,00	8,00	94,00	20516,00	521,49	83,00	4,00	87,00
10	41	76,50	88,00	6,00	92,00	8745,00	789,59	85,00	1,00	86,00
11	41	73,49	89,00	6,00	92,00	7420,00	615,45	84,00	1,00	85,00
12	41	94,28	91,00	8,00	99,00	10648,00	529,58	90,00	2,00	92,00
13	42	76,16	95,00	5,00	100,00	6529,00	647,32	92,00	0,00	92,00
14	42	95,59	82,00	9,00	91,00	19168,00	532,43	78,00	7,00	85,00
15	43	93,46	86,00	8,00	94,00	22420,00	863,28	81,00	5,00	86,00
16	46	65,17	94,00	3,00	97,00	18010,00	741,47	92,00	0,00	92,00
17	37	72,56	87,00	2,00	89,00	6873,00	596,18	85,00	1,00	86,00
18	39	87,59	89,00	5,00	94,00	20710,00	746,19	87,00	3,00	90,00
19	38	66,58	96,00	1,00	97,00	15121,00	543,58	94,00	0,00	94,00
20	43	98,32	98,00	10,00	108,00	7420,00	786,34	96,00	4,00	100,00
Média	42,25	83,41	89,00	6,00	95,00	14986,00	733,23	86,10	2,70	88,80

Capítulo 7

Considerações finais e propostas futuras

Neste trabalho, um problema de corte de estoque em que a demanda ocorre em um horizonte de planejamento foi considerado, tal problema foi chamado de problema de corte de estoque com data de entrega.

Realizamos um estudo de modelos matemáticos da literatura propostos para o PCE unidimensional com data de entrega. Como em Reinertssen e Vossen [15], atribuímos padrões de corte para os períodos, mas usamos equações de equilíbrio para calcular os atrasos assim como em Arbib e Marinelli [1].

Formulamos dois modelos para o problema de corte de estoque com data de entrega, para quando há apenas um tipo de objeto em estoque [PCEDE], em uma quantidade suficiente para que se consiga atender a demanda. E depois dessa análise, formulamos um modelo para quando há diferentes tipos de objetos em estoque com limitação para a disponibilidade de cada objeto [PCEDE-RE] que é uma extensão do modelo [PCEDE].

Os modelos matemáticos propostos foram implementados na linguagem de modelagem OPL e foi resolvido pelo CPLEX 12.6. Realizamos testes computacionais para 8 classes cada uma delas com 20 problemas, geradas aleatoriamente com base no CUTGEN1 proposto por Gau e Wäscher [5].

Uma vez que a capacidade de corte é apertada, faz com que ocorra atraso nos períodos. Em todas as instâncias que foram analisadas para ambos os modelos, o modelo foi capaz de atender a demanda, gerando em alguns casos atraso 0. Acontecendo esse atraso em algum período de $1, \dots, T - 1$. No último período, devido a capacidade ser maior, o modelo consegue cumprir a data de entrega dos pedidos.

Para as instâncias com apenas um tipo de objeto em estoque e para diferentes tipos de objetos em estoque foram testadas três penalizações, a saber, $w_{it} = 1, w_{it} = 10$ e

$w_{it} = 100$. Observamos que uma vez que se aumenta as penalizações para os atrasos, estes são diminuídos, fazendo com que o desperdício de material aumente.

Percebemos com a análise dos resultados nas tabelas que para os problemas com apenas um tipo de objeto em estoque, a solução do problema relaxado e do problema inteiro estão bem próximas.

Como trabalhos futuros, podemos propor novas restrições ao modelo, como por exemplo limitação ao número de facas, e uma abordagem multiobjetivo para o problema de corte de estoque com data de entrega pode ser abordada. Uma vez que esses objetivos são conflitantes, pois a medida que penalizamos um deles, esse diminui e o outro objetivo aumenta.

Em geral, a maioria dos trabalhos encontrados na literatura, trata esse problema estudado como um problema mono-objetivo. Isto significa que a função vetorial de avaliação multiobjetivo é transformada em uma função de avaliação mono-objetivo. Essa transformação, geralmente, é feita atribuindo diferentes pesos aos diferentes objetivos.

Na otimização multiobjetivo tem-se então um conjunto de soluções eficientes em que nenhuma das soluções é melhor em relação a todos os objetivos. Enquanto no problema de otimização com apenas uma função objetivo, a solução é um único ponto ótimo. A otimização multiobjetivo, busca um conjunto de soluções eficientes, o que torna o sistema mais flexível, uma vez que ele apresenta soluções diferentes.

Referências

- [1] Arbib, C.; Marinelli, F. (2014). *On cutting stock with due dates*. Omega, 46: 11-20.
- [2] Bennell, J. A.; Potts, C. N.; Soon L. L. (2013). *A genetic algorithm for two-dimensional bin packing with due dates*. International Journal of Production Economics, 145: 547-560.
- [3] Burke, E. K.; Kendall, G.; Whitwell, G. (2004). *A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem*. Operational Research, 52: 655-671.
- [4] Dyckhoff, H. (1990). *A typology of cutting and packing problems*. European Journal of Operational Research, 44(2), 145-159.
- [5] Gau, T., and G. Wäscher (1995). *CUTGEN1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem*. European Journal of Operational Research, 84.3: 572-579.
- [6] Gilmore, P. C.; Gomory, R. E. (1961). *A linear programming approach to the cutting-stock problem*. Operations Research, 9(6): 849-859.
- [7] Gilmore, P. C.; Gomory, R. E. (1963). *A linear programming approach to the cutting-stock problem - Part II*. Operations Research, 11(6): 863-888.
- [8] Gilmore, P. C.; Gomory, R. E. (1965). *Multistage cutting stock problems of two and more dimensions*. Operations Research, 13(1): 94-120.
- [9] Kantorovich, L. V. (1960). *Mathematical methods of organizing and planning production*. Management Science, 6: 366-422.
- [10] Li, S. (1996). *Multi-job cutting stock problem with due dates and release dates*. The Journal of the Operational Research Society, 47(4): 490-540.
- [11] Pinto, M. J. (1999). *O problema de corte de estoque inteiro*. Dissertação de Mestrado, ICMC - USP.
- [12] Poldi, K. C. (2003) *Algumas extensões do problema de corte de estoque*. Dissertação de Mestrado, ICMC - USP.

-
- [13] Poldi, K. C. (2007) *O problema de corte de estoque multiperíodo*. Tese de Doutorado, ICMC - USP.
- [14] Poldi, K. C. e Arenales, M. N. (2009) *Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths*. Computers & Operations Research. v.36, p.2074-2081.
- [15] Reinertsen, H; Vossen, T. W. M. (2010). *The one-dimensional cutting stock problem with due dates*. European Journal of Operation Research, 201: 701-711.
- [16] Valério de Carvalho, J. M. (1999). *Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound*. Annals of Operations Research, 86: 629-659.
- [17] Valério de Carvalho, J. M. (2002). *LP models for bin packing and cutting stock problems*. European Journal of Operational Research, 144: 253-273.
- [18] Wäscher, G. e Gau, T. (1996). *Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: a computational study*. OR Spektrum, 18: 131-144.
- [19] Wäscher, G.; Haussner, H.; Schumann, H. (2007). *An improved typology of cutting and packing problems*. European Journal of Operational Research, 183: 1109-1130.