UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

DANIEL AGUILAR GOMES

Dinâmica de Operadores Lineares e Medidas Invariantes

Campinas

2021

Daniel Aguilar Gomes

Dinâmica de Operadores Lineares e Medidas Invariantes

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Daniel Aguilar Gomes e orientada pelo Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

G585d Gomes, Daniel Aguilar, 1996-
Dinâmica de operadores lineares e medidas invariantes / Daniel Aguilar Gomes. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: José Régis Azevedo Varão Filho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos lineares. 2. Teoria ergódica. 3. Operadores hipercíclicos. 4. Medidas invariantes. I. Varão Filho, José Régis Azevedo, 1983-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Dynamics of linear operators and invariant measures
Palavras-chave em inglês:
Linear dynamical systems
Ergodic theory
Hypercyclic operators
Invariant measures
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
José Régis Azevedo Varão Filho [Orientador]
Sahibzada Waleed Noor
Ali Messaoudi
Data de defesa: 29-03-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-0023-4435
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/9086648407790921

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de março de 2021 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSÉ RÉGIS AZEVEDO VARÃO FILHO

Prof(a). Dr(a). SAHIBZADA WALEED NOOR

Prof(a). Dr(a). ALI MESSAOUDI

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Agradecimentos

Aos meus pais, Celina e Sergio, e minhas irmãs, Cecília e Carolina, por estarem ao meu lado desde o início, por terem incentivado minhas escolhas e apoiado cada passo meu em direção à carreira acadêmica. Obrigado por nunca terem deixado faltar livros em casa e por terem construído um lar repleto de amor.

À minha namorada, Natascha, por ter feito esta trajetória ser muito mais leve, ser minha companheira mesmo em momentos difíceis, estar sempre ao meu lado e me fazer muito feliz. Você me ajudou muito a gostar de estudar, serei eternamente grato por isso.

Ao meu orientador, Régis Varão, que aceitou me orientar na graduação e vem me guiando desde então.

Ao meu colega Gabriel Mantovani, que me ajudou a corrigir diversos erros e me deu várias dicas para a conclusão desta dissertação.

A todos os professores que tive ao longo da vida, que fizeram parte de minha formação e que me inspiraram a seguir pelo mesmo caminho.

Aos meus amigos, da vida e da universidade, que fizeram parte desta jornada, compartilhando angústias, incertezas e conquistas. Com vocês, o caminho foi menos solitário.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (processo 132320/2019-3) pela bolsa de mestrado.

We are very lucky to live in an age in which we are still making discoveries. It is like the discovery of America - you only discover it once.

—Richard Feynman, *The Character of Physical Law*

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar detalhadamente o artigo *Invariant measures for frequently hypercyclic operators* de S. Grivaux e É. Matheron [1]. Estudaremos condições para que operadores frequentemente hipercíclicos admitam algumas classes de medidas invariantes com suporte total, como por exemplo medidas ergódicas e contínuas.

Em particular, vamos ver que operadores frequentemente hipercíclicos em espaços de Banach separáveis admitem medidas invariantes com suporte total contínuas. Também estudaremos um exemplo de operador frequentemente hipercíclico que não admite medida ergódica com suporte total e duas famílias de probabilidades que nos darão exemplos de operadores frequentemente hipercíclicos que admitem medida ergódica com suporte total.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos lineares; teoria ergódica; operadores frequentemente hipercíclicos; medidas invariantes.

Abstract

The goal of this dissertation is to study the article *Invariant measures for frequently hypercyclic operators* by S. Grivaux and É. Matheron [1] in detail. We shall study conditions for frequently hypercyclic operators to admit some classes of invariant measures with full support, such as ergodic and continuous measures.

Particularly, we will see that frequently hypercyclic operators in separable Banach spaces admit invariant measures with full support. We will also study an example of a frequently hypercyclic operator which does not admit an ergodic measure with full support and two families of probabilities that will give us examples of frequently hypercyclic operators that admit ergodic measure with full support.

Keywords: linear dynamical systems; ergodic theory; frequently hypercyclic operators; invariant measures.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{N}_0$	Conjunto dos números inteiros não negativos
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto das probabilidades borelianas em X
$\mathcal{P}^c(X)$	Conjunto das probabilidades borelianas contínuas em X
$\mathcal{P}_T(X)$	Conjunto das probabilidades borelianas em X que são T-invariantes
$\mathcal{P}_{T,*}(X)$	Conjunto das probabilidades borelianas em X que são T-invariantes e têm suporte total
$FHC(T)$	Conjunto dos vetores frequentemente hipercíclicos de T
$HC(T)$	Conjunto dos vetores hipercíclicos de T

Sumário

1 Introdução

A teoria dos sistemas dinâmicos é muito rica e possui diversas ramificações. O principal objetivo desta teoria é estudar o comportamento de um sistema, seja ele um modelo discreto (que é o que estudaremos) ou contínuo. No caso discreto, o sistema é dado por uma função $T : X \to X$ em um certo espaço X, e estudamos os iterados $T^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in X$. Podemos interpretar os elementos de X como os estados de um certo sistema e T como uma lei de evolução deste sistema.

Já o caso contínuo pode ser formulado como uma família $T^t : X \to X$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $T^{t_1+t_2}(x) = T^{t_1} \circ T^{t_2}(x)$, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in X$, e T^0 é identidade. Neste caso o sistema evolui com um tempo contínuo, e está relacionado com o estudo de equações diferenciais.

Uma das ramificações da teoria dos sistemas dinâmicos, juntamente com a análise funcional, é a dos sistemas dinâmicos lineares que, como o próprio nome diz, tem o objetivo de estudar os iterados de uma transformação linear. No caso de dimensão finita, a forma de Jordan nos dá todas as informações sobre as transformações lineares. Em dimensão infinita, no entanto, existem diversos operadores com algumas propriedades interessantes que não são possíveis no caso de dimensão finita, como por exemplo ter órbita densa.

Na dinâmica linear, os operadores que possuem órbita densa são chamados *hipercíclicos*. Se a órbita de x é densa em X, dizemos que x é vetor hipercíclico para T. O uso deste termo, ao invés de transitivo como em outras áreas dos sistemas dinâmicos, vem do estudo feito há bastante tempo de operadores cíclicos. Um operador $T : X \to X$ é dito cíclico se existe um vetor $x \in X$ tal que o subespaço gerado pela órbita de x é denso em X (tal x é dito vetor cíclico para T).

Estas classes de operadores estão relacionadas com um dos problemas em aberto mais importantes da análise funcional: o *Problema do Subespaço Invariante*. Este problema questiona se todo operador $T : X \to X$ em um espaço de Hilbert possui um subespaço fechado não trivial invariante, ou seja, um subespaço fechado $E \subseteq X$, $E \neq \{0\}$ e $E \neq X$, tal que $T(E) \subseteq E$. O subespaço gerado pela órbita de um ponto x por T é o menor subespaço invariante por T que contém x, logo o fecho do subespaço gerado pela órbita de x é o menor subespaço fechado invariante de X que contém x. Assim, se x for um vetor não cíclico para T, conseguimos um subespaço fechado invariante para T. Portanto, T não admite subespaço não trivial fechado invariante se, e somente se, todo vetor não nulo de X é cíclico.

Analogamente, podemos perguntar se T admite *subconjunto* fechado não trivial invariante. Como o fecho da órbita de um vetor é invariante, T não admite subconjunto fechado não trivial invariante se, e somente se, todos os vetores não nulos de X são hipercíclicos.

No caso em que X é um espaço de Banach, P. Enflo deu em [24] um exemplo de um operador que não admite subespaço fechado próprio invariante e C. Read deu em [25] um exemplo de um operador tal que todo vetor não nulo é hipercíclico, ou seja, este operador não admite subconjunto fechado próprio invariante.

Existem diversos resultados que reafirmam a complexidade da dinâmica dos operadores lineares em dimensão infinita. Por exemplo, N. S. Feldman demonstrou o teorema enunciado abaixo (cuja demonstração pode ser encontrada em [3], Teorema 2.61), que nos diz que toda função contínua em um espaço métrico compacto é conjugado à restrição de um operador linear caótico (i.e. T é hipercíclico e possui um conjunto denso de pontos periódicos) em um conjunto invariante. Ou seja, em um certo sentido as órbitas dos operadores lineares podem ser tão complexas quanto de funções contínuas em espaços compactos.

Teorema 1.1. *Existe um operador caótico T em um espaço separável de Hilbert H com a seguinte propriedade: se K é um espaço métrico compacto, para toda função contínua $f : K \to K$ existe um subconjunto $L \subseteq H$ tal que f é conjugado à restrição $T|_L$ de T em L.*

A classe de operadores em que estudaremos mais profundamente é a dos *frequentemente hipercíclicos*. Tais operadores são caracterizados pela seguinte propriedade: se $T : X \to X$ é um operador linear, onde X é um espaço vetorial topológico, existe um ponto $x \in X$ tal que, para todo aberto não vazio $V \subseteq X$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{n \in [0, N] : T^n(x) \in V\} > 0.$$

Por mais que a definição de operador frequentemente hipercíclico seja topológica, estes operadores têm uma grande relação com a teoria da medida. Por exemplo, como veremos, se um operador $T : X \to X$ admite medida ergódica com *suporte total* (i.e. medida ergódica tal que $\mu(U) > 0$ para todo aberto $U \subseteq X$ não vazio), então T é frequentemente hipercíclico. Daremos ênfase ao estudo destes operadores do ponto de vista da teoria da medida.

Algumas perguntas naturais que surgem quando estudamos os operadores frequentemente hipercíclicos são: dado um operador linear $T : X \to X$ frequentemente hipercíclico,

1. Existem medidas invariantes com *suporte total*?

2. Existem medidas *ergódicas* com suporte total ?

Com relação à primeira pergunta, daremos uma resposta positiva sob algumas hipóteses sobre o espaço X, dada no teorema 4.1. Em particular, vamos mostrar no teorema 6.1 que se X é um espaço de Banach reflexivo, então T admite uma medida de probabilidade invariante *contínua* (i.e., $\mu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in X$) com suporte total e tal que o conjunto dos pontos periódicos de T tem medida nula.

Para a segunda vamos estudar um contra-exemplo de um operador construído em [17]. Vamos mostrar no teorema 5.11 que tal operador no espaço das sequências com índices em $\mathbb{Z}$ que convergem a zero (denotado por $c_0(\mathbb{Z})$) é frequentemente hipercíclico, mas não admite medida ergódica com suporte total.

Organização do texto

O trabalho que direcionará os estudos desta dissertação é o artigo [1] de S. Grivaux e É. Matheron. O objetivo é estudar detalhadamente as demonstrações e técnicas dadas neste artigo, bem como entender seus pré-requisitos, buscar exemplos, buscar resultados recentes relacionados e pensar em problemas em aberto.

Nas duas primeiras subseções da seção 2 vamos listar alguns dos principais resultados de topologia, análise funcional, teoria da medida e teoria ergódica que usaremos ao longo do texto. Uma técnica que será de suma importância para a demonstração de um dos principais teoremas que demonstraremos (o teorema 4.1) é a de um objeto chamado *invariant mean*, que expressa a ideia de uma média. Faremos uma construção detalhada das *invariant means* na subseção 2.3 baseada em resultados que tratam ultrafiltros.

Na seção 3 estudaremos alguns dos principais resultados de operadores hipercíclicos e frequentemente hipercíclicos. Em particular, demonstraremos o Critério de Hiperciclicidade Frequente (teorema 3.17) que nos dá um critério bastante útil para encontrar exemplos de operadores frequentemente hipercíclicos.

Nas seções seguintes estudaremos os resultados de [1] usando as ferramentas que introduzimos nas seções anteriores. A seção 4 trata condições para que um operador frequentemente hipercíclico admita medida invariante com suporte total. Primeiramente estudaremos o caso em que o operador esteja em um espaço compacto e, a seguir, vamos estudar um caso mais geral, motivado por espaços de Banach reflexivo. Por fim, estudaremos codições para que o operador admita medida invariante com suporte total contínua.

Na seção 5 vamos introduzir um parâmetro $c(T)$ que mede a máxima frequência com que a órbita de um vetor hipercíclico T pode visitar uma bola centrada na origem. Algumas aplicações que daremos deste parâmetro são mostrar que o conjunto dos pontos frequentemente hipercíclicos é magro em X e dar um exemplo de um operador frequentemente hipercíclico que não admite medida ergódica com suporte total. Terminamos esta seção dando uma ideia de como construir este contra-exemplo usando resultados de [17].

A seção 6 trata o estudo de medidas invariantes com suporte total contínuas para operadores frequentemente hipercíclicos tal que o conjunto pontos periódicos tem medida nula. O teorema que demonstraremos nesta seção nos diz que se T é um operador frequentemente hipercíclico em um espaço de Banach reflexivo, então T admite medida invariante contínua com suporte total tal que o conjunto dos pontos periódicos de T tem medida nula. A primeira parte seguirá dos estudos feitos na seção 4, mas demonstraremos alguns argumentos no sentido de categoria de Baire para mostrar a existência de uma medida que tal que o conjunto dos pontos periódicos de T tem medida nula.

Na seção 7 vamos estudar a existência de medidas ergódicas com suporte total. A ideia será usar o teorema da decomposição ergódica para mostrar que se T admite uma medida invariante m tal que o conjunto dos pontos hipercíclicos (que denotaremos por $HC(T)$) tem medida positiva, então T admite medida ergódica com suporte total. Vamos introduzir duas famílias de medidas que nos darão condições para encontrar medidas m invariantes tais que $m(HC(T)) > 0$.

2 Preliminares

Nesta seção vamos revisar e introduzir alguns conceitos elementares que usaremos ao longo do texto. Ela serve como referência para os principais resultados e definições que usaremos.

2.1 Topologia e Análise Funcional

Vamos listar apenas os principais resultados utilizados ao longo do texto, com ênfase nos espaços poloneses, que são os que mais aparecem no nosso contexto. Para uma leitura geral de topologia, recomenda-se [12], de espaços poloneses e teoria descritiva de conjuntos em geral, é recomendada a leitura de [15] e de análise funcional, recomendamos [21] . Estes dois livros são as principais referências desta subseção.

Definição 2.1. Seja X um espaço topológico. X é dito *espaço polonês* se é um espaço métrico, separável e completo.

Definição 2.2. Um espaço topológico X é dito *Lindelöf* se toda cobertura aberta de X possuir subcobertura enumerável.

Teorema 2.3 ([15]). *Seja X um espaço polonês não vazio e sem pontos isolados. Então existe um subconjunto de X homeomorfo ao conjunto de Cantor.*

Definição 2.4. Seja X um espaço separável. Diremos que $\widehat{X}$ é uma *compactificação* de X se $\widehat{X}$ é compacto, métrico e X pode ser mergulhado em $\widehat{X}$ como subconjunto denso.

Teorema 2.5 ([15]). *Se X é um espaço polonês, então existe $\widehat{X}$ uma compactificação de X.*

Teorema 2.6 (Lema de Urysohn, [12]). *Seja X um espaço normal, e sejam A e B fechados disjuntos de X. Então existe uma função contínua*

$$f : X \to [0, 1]$$

tal que $f(x) = 0 \; \forall x \in A$ e $f(x) = 1 \; \forall x \in B$.

Teorema 2.7 ([15], [11]). *Se $\mathcal{F} \subseteq C(X)$ é uma família enumerável que separa pontos de um compacto (X, τ), então X é metrizável.*

Teorema 2.8 (Categoria de Baire, [10]). *Se X é um espaço métrico completo, então toda interseção enumerável de abertos densos de X é densa em X.*

Corolário 2.9. *Em um espaço métrico completo, toda interseção enumerável de conjuntos G_δ densos é um conjunto G_δ denso.*

Teorema 2.10 ([21]). *Seja H um espaço de Hilbert e $T \subseteq H$ um subespaço fechado. Então $H = T \oplus T^\perp$.*

Corolário 2.11. *Seja M um subespaço de um espaço de Hilbert H tal que se $\langle f, g \rangle = 0$ para todo $g \in M$, então $f = 0$ em H. Então M é denso em H.*

Demonstração. Basta tomarmos $T = \overline{M}$ no teorema anterior. Pela continuidade do produto interno, $M^\perp = T^\perp$, assim $T = M \iff T^\perp = \{0\} \iff M^\perp = \{0\}$. □

Teorema 2.12 (Banach-Alaoglu, [21]). *Se E é um espaço de Banach, então a bola unitária fechada de E^* é compacta na topologia fraca*.*

Proposição 2.13 ([21]). *Se E é um espaço de Banach separável, então a bola unitária fechada em E^* é metrizável.*

2.2 Teoria da Medida e Teoria Ergódica

Nesta subseção vamos listar alguns resultados conhecidos da teoria da medida e da teoria ergódica, bem como definir uma topologia nos espaços de probabilidade.

Definição 2.14. Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de medida e $f : X \to X$ uma função mensurável. Dizemos que μ é *invariante* por f se

$$\mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \text{ para todo } A \subseteq X \text{ mensurável.}$$

Proposição 2.15 ([4]). *Sejam $f : X \to X$ uma transformação mensurável e μ uma medida em X. Temos que μ é invariante por f se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu$$

para toda $\phi : X \to \mathbb{R}$ integrável.

Vamos agora definir uma topologia no conjunto das probabilidades em X. Seja X um espaço polonês e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto das medidas de probabilidade borelianas. Dados $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ um conjunto de funções $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ contínuas e limitadas e $\varepsilon > 0$, sejam

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{P}(X) : \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \varepsilon \text{ para } 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Estes conjuntos formam uma base para uma topologia, conhecida como topologia fraca* ou topologia de Prohorov. É possível mostrar que $\mathcal{P}(X)$ com esta topologia é um espaço *métrico*, *completo* e *separável* (ou seja, $\mathcal{P}(X)$ é um espaço polonês com esta topologia quando X o é).

Para construir uma métrica que gera esta topologia, seja $\{\phi_n\}$ um subconjunto enumerável denso na bola unitária do conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$. É possível mostrar que

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) &\to \mathbb{R} \\ (\mu, \nu) &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int \phi_n d\mu - \int \phi_n d\nu \right| \end{aligned}$$

é uma métrica e que a topologia gerada por ela é a de Prohorov.

Quando queremos mostrar que uma sequência de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para μ nesta topologia, o seguinte teorema é bastante útil:

Teorema 2.16 (Portmanteau, [4], [14])**.** *Seja X um espaço polonês e ρ a métrica que gera a topologia de Prokhorov. São equivalentes:*

1. $\rho(\mu_n, \mu) \to 0$,
2. $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ *para toda* $f : X \to \mathbb{R}$ *contínua e limitada,*
3. $\liminf \mu_n(G) \geq \mu(G)$ *para todo* $G \subseteq X$ *aberto,*
4. $\limsup \mu_n(F) \leq \mu(F)$ *para todo* $F \subseteq X$ *fechado.*

Ao longo do texto, sempre que considerarmos o conjunto $\mathcal{P}(X)$, ele estará munido da topologia de Prohorov.

Um conhecido teorema da teoria da medida que usaremos é o teorema de Riesz. Usaremos a seguinte forma:

Teorema 2.17 (Teorema de Riesz, [10])**.** *Seja K um espaço métrico compacto. Considere $\Phi : C^0(K) \to \mathbb{C}$ funcional linear positivo. Então existe uma única medida boreliana finita μ em K tal que*

$$\Phi(\varphi) = \int \varphi d\mu \text{ para toda } \varphi \in C^0(K).$$

Uma consequência do teorema de Riesz e do teorema de Banach-Alaoglu é o seguinte:

Teorema 2.18 ([4]). *Se X é um espaço métrico compacto, então $\mathcal{P}(X)$ é compacto.*

Uma medida é dita *ergódica* para T se satisfaz alguma (e portanto todas) das equivalências do seguinte teorema:

Teorema 2.19 ([5]). *Seja $T : X \to X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade T-invariante em X. São equivalentes:*

1. *Para todo A mensurável tal que $T^{-1}(A) \subseteq A$, temos $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$,*

2. *Para todo A mensurável tal que $\mu(T^{-1}(A)\Delta A)$, temos $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$,*

3. *Para todo A mensurável com medida positiva, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)) = 1$,*

4. *Para quaisquer A, B mensuráveis, ambos com medida positiva, existe $n > 0$ tal que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.*

Outro teorema que usaremos é o de Birkhoff, que pode ser enunciado como:

Teorema 2.20 (Ergódico de Birkhoff, [5]). *Sejam $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (X, \mathcal{B}, \mu)$ uma transformação ergódica que preserva medida. Então, para toda $f \in L^1(X, \mu)$, temos*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) \to \int_X f d\mu \ \mu\text{−qtp.}$$

Um dos principais teoremas da teoria ergódica que usaremos bastante é o da Decomposição Ergódica. Fixemos a seguinte notação, que será usada em seu enunciado:

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{P}$ uma partição de X em conjuntos mensuráveis. $\pi : X \to \mathcal{P}$ será a projeção natural, ou seja, ela leva $x \in X$ no elemento da partição a qual contém x. Diremos que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ é mensurável se $\pi^{-1}(\mathcal{Q})$ = união dos elementos de $\mathcal{P}$ que estão em $\mathcal{Q}$ é mensurável em X. Definimos então uma medida em $\mathcal{P}$ dada por

$$\widehat{\mu}(\mathcal{Q}) = \mu(\pi^{-1}(\mathcal{Q}))$$

para cada $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ mensurável.

Teorema 2.21 (Decomposição Ergódica, [4]). *Sejam X um espaço métrico separável e completo, $f : X \to X$ uma função mensurável e μ uma probabilidade invariante. Então existe um conjunto mensurável $A \subseteq X$ com $\mu(A) = 1$, uma partição $\mathcal{P}$ de A em subconjuntos mensuráveis e uma família de probabilidades $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ tal que*

1. *$\mu_P(P) = 1$ para $\widehat{\mu}$-quase todo $P \in \mathcal{P}$,*

2. $P \mapsto \mu_P(E)$ *é mensurável para todo* $E \subseteq X$ *mensurável,*

3. μ_P *é invariante e ergódica para* $\widehat{\mu}$*-quase todo* $P \in \mathcal{P}$*,*

4. $\mu(E) = \int \mu_P(E) d\widehat{\mu}(P)$*, para todo* $E \subseteq X$ *mensurável.*

O resultado 4) deste teorema nos diz que a medida μ pode ser escrita como uma combinação convexa (possivelmente não enumerável) de medidas ergódicas. Em particular, este teorema nos garante a *existência* de uma medida ergódica para f.

2.3 Ultrafiltros

Nesta subseção vamos apresentar alguns dos principais fatos sobre ultrafiltros e introduzir o conceito de *média invariante*, ferramenta que será fundamental na demonstração do teorema 4.1. As demonstrações podem ser consultadas em [6], [7], [8] e [9].

Definição 2.22. Seja X um conjunto não vazio. Um *filtro* em X é um subconjunto ω de 2^X satisfazendo:

1. $X \in \omega$ e $\varnothing \notin \omega$

2. Se $A \in \omega$ e $A \subset B$, então $B \in \omega$

3. Se $A, B \in \omega$, então $A \cap B \in \omega$.

Intuivitamente, um filtro é um subconjunto das partes de um conjunto que não contém o vazio, é "fechado por continência"e fechado por interseção.

Definição 2.23. Um filtro ω é dito *ultrafiltro* se é maximal, i.e., se $\tilde{\omega}$ for ultrafiltro com $\omega \subset \tilde{\omega}$, então $\tilde{\omega} = \omega$.

Proposição 2.24. *São equivalentes:*

1. ω *é ultrafiltro*

2. Se $A, B \subset X$ *com* $A \cup B \in \omega$*, então* $A \in \omega$ *ou* $B \in \omega$

3. Para todo $A \subset X$*, temos* $A \in \omega$ *ou* $X \setminus A \in \omega$*.*

Teorema 2.25. *Todo filtro está contido em algum ultrafiltro.*

Definição 2.26. Sejam X um espaço topológico, S um conjunto não vazio, $(x_s)_{s \in S}$ uma sequência de pontos em X, ω um filtro em S e $x \in X$. Diremos que x é um ω-limite de $(x_s)_{s \in S}$ se para toda vizinhança U de x existir $F \in \omega$ tal que $\{x_s : s \in F\} \subset U$.

Assim, x será um limite da sequência $(x_s)_{s\in S}$ se para cada vizinhança do x existir F do filtro tal que a sequência indexada pelos elementos de F pertençam à vizinhança.

Teorema 2.27. *Seja $(x_s)_{s\in S}$ sequência em X e ω filtro em S.*

1. *Se $F \in \omega$, então todo ω-limite de $(x_s)_{s\in S}$ está contido em $\overline{\{x_s : s \in F\}}$*
2. *Se ω é ultrafiltro, então todo ponto de $\bigcap_{F\in\omega} \overline{\{x_s : s \in F\}}$ é ω-limite de $(x_s)_{s\in S}$*
3. *Se X é Hausdorff, então $(x_s)_{s\in S}$ tem no máximo um ω-limite.*
4. *Se X é compacto e ω é ultrafiltro, então $(x_s)_{s\in S}$ tem pelo menos um ω-limite.*

Exemplo 2.28. Consideremos a sequência $0, 1, 0, 1, \cdots$ e ω um ultrafiltro em $\mathbb{N}$. Pela proposição 2.24 o conjunto dos números pares ou dos ímpares está em ω e, portanto, a sequência tem ω-limite.

Definição 2.29. Um ultrafiltro em $\mathbb{N}$ é dito *não principal* se não contiver um conjunto finito.

Observação. 1. Se ω é ultrafiltro não principal, x é ω-limite da sequência (x_n) se, $\forall \varepsilon > 0$

$$\{n : |x_n - x| \leq \varepsilon\} \in \omega,$$

2. não conseguimos escrever os ultrafiltros não principais explicitamente, mas a existência destes ultrafiltros é garantida pelo lema de Zorn.

Proposição 2.30. *Se (x_n) é uma sequência de números reais que converge à x no sentido usual, então*

$$\lim_{\omega} x_n = x$$

quando ω for ultrafiltro não principal.

Seja agora $\phi \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Vamos olhar para a sequência de números reais

$$(x_n)_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(i)\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Note que (x_n) é limitada, pois ϕ é limitada. Assim, se ω é ultrafiltro, o limite $\lim_\omega x_n$ existe e é único, pois $\mathbb{R}$ é Hausdorff e a sequência está contida em um compacto.

Fixemos agora ω um ultrafiltro não principal, e seja $x_0 = \lim_\omega x_n$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, sabemos que

$$\{n : |x_n - x_0| \leq \varepsilon\} \in \omega$$

ou seja, $\{n : |x_n - x_0| \leq \varepsilon\}$ é um conjunto infinito. Isso é equivalente a dizer que x_0 é ponto de acumulação da sequência (x_n).

Com o ultrafiltro não principal ω fixo, seja

$$\mathfrak{m}(\phi) = \lim_{\omega} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(i).$$

$\mathfrak{m} : \ell^{\infty}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ está bem definido, pelo que acabamos de provar.

Definição 2.31. Dizemos que $\overline{\mathfrak{m}} : \ell^{\infty}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ é uma *média invariante* se é um funcional linear positivo satisfazendo:

- $\overline{\mathfrak{m}}(\mathbf{1}) = 1$
- $\overline{\mathfrak{m}}(\phi(\cdot + a)) = \overline{\mathfrak{m}}(\phi)\ \forall a \in \mathbb{N}$

onde $\mathbf{1}(i) = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$ e $\phi(\cdot + a)$ é a sequência $(\phi(i + a))_{i\in\mathbb{N}}$.

Mostremos que $\mathfrak{m}$ é média invariante. Se $\phi(i) = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$, então a sequência $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(i))_n$ converge à 1, logo $\mathfrak{m}(\phi) = 1$.

Para ver que $\mathfrak{m}$ é invariante, mostremos que é invariante com $a = 1$, os outros casos serão análogos. Denotemos $\phi(i) = a_i$ e $x_0 = \lim_{\omega} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$. Seja $\varepsilon > 0$ dado e n tal que

$$\left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - x_0 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \left| \frac{a_{n+1} - a_1}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Tal n existe, pois a_i é limitada e $x_0 = \lim_{\omega} a_n$. Assim,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) + \frac{a_{n+1} - a_1}{n} - x_0 \right| &\leq \left| \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) - x_0 \right| + \left| \frac{a_{n+1} - a_1}{n} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Assim, $\mathfrak{m}(\phi(\cdot + 1)) = \mathfrak{m}(\phi)$.

Para mostrar que $\mathfrak{m}$ é funcional linear é análogo. Com efeito, sejam $\phi, \psi \in \ell^{\infty}(\mathbb{N})$. Denote $a_i = \phi(i)$, $b_i = \psi(i)$, $x_0 = \lim_{\omega} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ e $y_0 = \lim_{\omega} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$. Seja $\varepsilon > 0$ dado, e considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \left\{ n : \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i - x_0 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in \omega \\ B &= \left\{ n : \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i - y_0 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \in \omega \\ C &= \left\{ n : \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) - (x_0 + y_0) \right| \leq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

Como ω é filtro, $A \cap B \in \omega$. Se $n \in A \cap B$, pela desigualdade triangular temos que $n \in C$. Assim, $A \cap B \subseteq C$. Pela definição de filtro, $C \in \omega$. Logo,

$$\mathfrak{m}(\phi + \psi) = \mathfrak{m}(\phi) + \mathfrak{m}(\psi).$$

Temos também que

$$\mathfrak{m}(\phi) \geq \liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(i),$$

pois $\liminf_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(i)$ é o menor ponto de acumulação da sequência $(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(i))_n$, e $\mathfrak{m}(\phi)$ é ponto de acumulação desta sequência.

3 Operadores Lineares

Nesta seção vamos introduzir algumas classes de operadores lineares, bem como listar seus principais resultados e dar exemplos. As principais referências para esta seção são os livros [2] e [3].

3.1 Operadores Hipercíclicos

Definição 3.1. Um operador $T : X \to X$ é dito *topologicamente transitivo* se para qualquer par de abertos não vazios U, V, existe $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Proposição 3.2. *Seja T um mapa contínuo em um espaço métrico sem pontos isolados. Então:*

1. *Se $x \in X$ tem órbita densa por T, então $T^n(x)$ também tem, para todo $n \geq 0$.*

2. *Se T tem órbita densa, então é topologicamente transitiva.*

Demonstração.

1. A órbita de $T^n(x)$ será a órbita de x removendo os pontos $x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)$. Como X não tem ponto isolado e estamos removendo uma quantidade finita de um subconjunto denso, a órbita de $T^n(x)$ também é densa.

2. Suponha que $x \in X$ tem órbita densa por T. Sejam U, V abertos não vazios de X. Por hipótese, existe $n \geq 0$ tal que $T^n(x) \in U$. Pelo item 1), $T^n(x)$ também tem órbita densa, logo existe um $m \geq n$ tal que $T^m(x) \in V$. Assim, $T^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

$\square$

Teorema 3.3 (Transitividade de Birkhoff)**.** *Seja T um mapa contínuo em um espaço métrico completo e separável X sem pontos isolados. Então são equivalentes:*

1. *T é topologicamente transitiva;*

2. *Existe $x \in X$ que possui órbita densa em X*

Além disso, se alguma das condições anteriores é satisfeita, o conjunto de pontos de X com órbita densa é um conjunto G_δ.

Demonstração. Pela proposição 3.2 temos que 2) $\implies$ 1). Mostremos então que 1) $\implies$ 2).

Seja T topologicamente transitiva e $\mathcal{D}(T)$ o conjunto de pontos em X que têm órbita densa por T. Como X tem subconjunto denso enumerável $\{y_i : i \in \mathbb{N}\}$, as bolas de raio $1/m$ com centros y_i, para $i, m \in \mathbb{N}$, formam uma base enumerável $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para a topologia de X. Assim, $x \in \mathcal{D}(T)$ se, e somente se, para cada $k \in \mathbb{N}$ existir um n tal que $T^n(x) \in U_k$. Logo,

$$\mathcal{D}(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$$

Como T é contínua, temos que $\cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ é denso e aberto em X, para cada k. O Teorema da Categoria de Baire nos diz que $\mathcal{D}(T)$ é um conjunto G_δ e, portanto, não vazio. □

Definição 3.4. Um operador $T : X \to X$ é dito *hipercíclico* se possuir órbita densa.

O teorema de transitividade de Birkhoff nos diz então que, em espaços métricos separáveis e completos sem pontos isolados, os operadores hipercíclicos são exatamente os topologicamente transitivos.

Exemplo 3.5. Seja $B_\omega : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ um operador do tipo *weighted shift*, ou seja, B_ω é um operador linear contínuo da forma $B_\omega(x_1, x_2, \ldots) = (\omega_1 x_2, \omega_2 x_3 \ldots)$, onde $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Vamos provar que B_ω é hipercíclico se, e somente se,

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \omega_i \right)^{-1} = 0.$$

Seja $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^p$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \ell^\infty$. Comecemos encontrando uma fórmula geral para $B_\omega^n(x)$.

$$\begin{aligned}
B_\omega(x_1, x_2, \ldots) &= (\omega_2 x_2, \omega_3 x_3, \ldots) \\
B_\omega^2(x_1, x_2, \ldots) &= (\omega_2 \omega_3 x_3, \omega_3 \omega_4 x_4, \ldots) \\
&\vdots \\
B_\omega^n(x_1, x_2, \ldots) &= \left(\left(\prod_{i=2}^{n+1} \omega_i \right) x_{n+1}, \left(\prod_{i=3}^{n+2} \omega_i \right) x_{n+2}, \ldots \right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Suponha que existe x tal que o cojunto $\{B_\omega^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em ℓ^p. Queremos mostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \omega_i \right)^{-1} = 0$$

Seja $y \in \ell^p$. Para cada $l \in \mathbb{N}$, consideramos a bola $B(y, 1/l)$ e $n_l \in \mathbb{N}$ uma subsequência ($n_1 < n_2 < \cdots$) tal que $B_\omega^{n_l}(x) \in B(y, 1/l)$. Assim, $B_\omega^{n_l}(x) \to y$ quando $l \to \infty$. Portanto,

$$\left(\prod_{i=2}^{n_l+1} \omega_i\right) x_{n_l+1} \to y_1$$

Como $x_{n_l+1} \to 0$ pois $x \in l^p$, devemos ter que

$$\prod_{i=2}^{n_l+1} \omega_i \to \infty \implies \left(\prod_{i=2}^{n_l+1} \omega_i\right)^{-1} \to 0$$

Suponha agora que

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} \omega_i\right)^{-1} = 0$$

Mostremos que B_ω é topologicamente transitivo (i.e. dados U, V abertos, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_\omega^n(U) \cap V \neq \emptyset$). Provemos para abertos básicos. Sejam $y = (y_1, y_2, \ldots), z = (z_1, z_2, \ldots) \in \ell^p$ e respectivas bolas $B(y, \varepsilon_1), B(z, \varepsilon_2)$ em torno desses pontos. Para deixar a prova mais limpa, seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Queremos construir uma sequência $x = (x_n)$ e encontrar um N_0 tal que $||x - y||^p < \varepsilon$ e $||B_\omega^{N_0}(x) - z||^p < \varepsilon$.

De (1), podemos considerar as primeiras coordenadas de x como sendo iguais as de y. Nosso x terá a seguinte forma:

$$x = (y_1, \ldots, y_l, 0, \cdots, 0, 0, \ldots, 0, M_1, M_2, \ldots, M_K, 0, \ldots)$$

onde a entrada de posição N_0 é o M_1. Precisamos então construir l, K, N_0 e $M_1, \ldots, M_K$. Primeiro, vamos construir K. Seja $K \in \mathbb{N}$ grande o suficiente tal que se $\tilde{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_K, 0, 0, \ldots)$ então

$$||z - \tilde{z}||^p < \varepsilon$$

Para construir N_0, vamos olhar para o N_0-ésimo iterado de x porB_ω:

$$B_\omega^{N_0}(x) = \left(\left(\prod_{i=2}^{N_0+1} \omega_i\right) M_1, \left(\prod_{i=3}^{N_0+2} \omega_i\right) M_2, \ldots\right)$$

Para ajudar na notação, seja

$$\alpha_{N_0} = \frac{1}{\prod_{i=2}^{N_0+1} \omega_i}$$

Queremos então que

$$M_1 = \alpha_{N_0} z_1, M_2 = \frac{\alpha_{N_0}\omega_2}{\omega_{N_0+2}} z_2, \cdots$$

Seja $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha_{N_0} < \varepsilon$$

que existe pela hipótese do lim inf. Note que nosso x já está perto o suficiente de z. Precisamos apenas verificar que x está na vizinhança de y. Seja

$$\gamma = \max\left\{||z_1||, \frac{\omega_2 \cdots \omega_n}{\omega_{N_0} \cdots \omega_{N_0+i}}||z_i|| : 2 \leq i \leq K\right\}$$

Se considerarmos l grande o suficiente, teremos que

$$|x_i - y_i| < \gamma\varepsilon \implies ||x-y||^p < \tilde{C}\varepsilon$$

onde $\tilde{C}$ é uma constante que depende de K, N_0 e l. Assim, obtemos o resultado.

Proposição 3.6. *Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Banach separável. Assuma que exista uma probabilidade invariante μ em X, com suporte total, tal que T é ergódica. Então T é hipercíclico e o conjunto dos vetores hipercíclicos para T tem medida total. Mais precisamente, quase todo ponto $x \in X$ satisfaz o seguinte: para todo aberto não vazio $V \subseteq X$, temos*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in [0,N) : T^n(x) \in V\}}{N} > 0.$$

Demonstração. Seja $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável de abertos para X. Aplicando o teorema ergódico de Birkhoff para cada $\mathbf{1}_{V_j}$, conseguimos uma sequência de conjuntos (A_j) tal que $\mu(A_j) = 1$ e

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{V_j}(T^n(x)) \to \mu(V_j)$$

para todo $x \in A_j$ quando $N \to \infty$. Como a interseção enumerável de conjuntos de medida total tem medida total, $A := \cap_j A_j$ tem medida total.

Como

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{V_j}(T^n(x)) = \frac{\#\{n \in [0,N) : T^n(x) \in V\}}{N}$$

temos que cada $x \in A$ é hipercíclico e satisfaz a condição que queríamos. □

3.2 Operadores Frequentemente Hipercíclicos

Em 2005, Bayart e Grivaux introduziram em [20] a noção de operadores frequentemente hipercíclicos:

Definição 3.7. Seja X um espaço vetorial topológico e T um operador linear contínuo em X. Dizemos que T é *frequentemente hipercíclico* se existe $x \in X$ tal que para todo aberto não vazio $U \subseteq X$,

$$\underline{\text{dens}}(\{n \in \mathbb{N}_0 : T^n(x) \in U\}) > 0.$$

A densidade inferior de um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}_0$ é definida por

$$\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\#\{A \cap [0,N]\}}{N+1}.$$

Suponha que A é um subconjunto de $\mathbb{N}_0$. Escrevemos os elementos de A como uma sequência estritamente crescente dada por $(n_k)_{k\geq 1}$. Se $n_k \leq N < n_{k+1}$, temos que

$$\frac{k}{n_{k+1}} \leq \frac{\#\{A \cap [0,N]\}}{N+1} \leq \frac{k}{n_k},$$

pois $A \cap [0,N] = \{n_1, \ldots, n_k\}$, ou seja, $\#\{A \cap [0,N]\} = k$. Tomando o $\liminf$, temos que

$$\underline{\mathrm{dens}}(A) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}.$$

O $\liminf \frac{k}{n_k}$ é positivo se, e somente se, existe $M > 0$ tal que $\frac{k}{n_k} \geq M$. Ou seja, A tem densidade inferior positiva se, e somente se, existe $C > 0$ tal que $n_k \leq Ck$.

É claro que todo operador frequentemente hipercíclico é hipercíclico. No entanto, ao introduzir essa classe de operadores, surgem duas perguntas naturais: existem operadores frequentemente hipercíclicos? Existem operadores hipercíclicos que não são frequentemente hipercíclicos? Daremos a seguir um exemplo de operador que é hipercíclico mas não é frequentemente hipercíclico e um critério que nos dará alguns exemplos de operadores frequentemente hipercíclicos.

Exemplo 3.8. Vamos considerar novamente um operador do tipo *weighted shift*. Seja B_ω um operador deste tipo em $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Sejam V a bola aberta de centro $2e_0$ e raio 1 em $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ e $x = (x_n)$ um vetor em $\ell^2(\mathbb{N}_0)$. Se $n \in \mathcal{N}(x,V) := \{n \in \mathbb{N} : B_\omega^n(x) \in V\}$, então

$$|\omega_1 \cdots \omega_n x_n| \geq 1,$$

pelas contas que fizemos no exemplo em que damos a condição para B_ω ser hipercíclico. Assim, por estarmos em $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, devemos ter que $\sum |x_n|^2 < \infty$. Em particular, temos

$$\sum_{n\in\mathcal{N}(x,V)} \frac{1}{(\omega_1\cdots\omega_n)^2} < \infty.$$

Consideremos então $\omega_n = \sqrt{(n+1)/n}$. B_ω é hipercíclico, pelo exemplo 3.5 ($\omega_1 \cdots \omega_n = \sqrt{n+1}$). No entanto, se $\mathcal{N}(x,V)$ tivesse densidade inferior positiva, a série

$$\sum_{n\in\mathcal{N}(x,V)} \frac{1}{(\omega_1\cdots\omega_n)^2} = \sum_{n\in\mathcal{N}(x,V)} \frac{1}{n+1}$$

não iria convergir. Logo, B_ω não pode ser frequentemente hipercíclico.

Para mostrar um critério que nos diz se um operador é frequentemente hipercíclico, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.9. *Existem conjuntos dois a dois disjuntos $A(l,\nu)$, $l,\nu \geq 1$, de $\mathbb{N}_0$ com densidade inferior positiva tal que para todo $n \in A(l,\nu)$, $m \in A(k,\mu)$ temos $n \geq \nu$ e*

$$|n-m| \geq \mu + \nu \text{ se } n \neq m.$$

Demonstração. Vamos usar a representação diádica:

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j =: (a_0, a_1, \ldots),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a_j \in \{0,1\}$. Seja $I(l,\nu)$, $l,\nu \geq 1$, o conjunto dos $n \in \mathbb{N}$ que têm a representação diádica da forma

$$n = (\underbrace{0,\ldots,0}_{l-1}, \underbrace{1,\ldots 1}_{\nu}, 0, *),$$

onde o primeiro bloco tem $l-1$ 0's, o segundo tem ν 1's, seguido de um 0, e $*$ pode ser qualquer sequência.

Note que estes conjuntos particionam $\mathbb{N}$, mas não satisfazem a propriedade de separação que queremos. Para isto, vamos obter novos conjuntos a partir destes $I(l,\nu)$.

Seja $\delta_k = \nu$ se $k \in I(l,\nu)$ para algum $l \geq 1$. O δ_k está bem definido pois estes conjuntos formam uma partição. Defina

$$n_k = 2\sum_{i=1}^{k-1} \delta_i + \delta_k, \; k \geq 1,$$

que é uma sequência estritamente crescente. A ideia será mostrar que os conjuntos

$$A(l,\nu) = \{n_k : k \in I(l,\nu)\},$$

$l,\nu \geq 1$, satisfazem o que queremos.

Primeiramente, note que estes conjuntos são disjuntos dois a dois, por $I(l,\nu)$ ser partição e a sequência n_k ser estritamente crescente.

Além disso, se $n_k \in A(l,\nu)$, então $n_k \geq \delta_k = \nu$. Se $n_j \in A(l,\nu)$ e $n_m \in A(k,\mu)$, com $n_j \neq n_m$, suponha s.p.g. que $j > m$. Temos

$$\begin{aligned} n_j - n_m &= 2\sum_{i=1}^{j-1} \delta_i + \delta_j - 2\sum_{i=1}^{m-1} \delta_i - \delta_m \\ &= (\delta_j - \delta_m) + 2\sum_{i=m-1}^{j-1} \delta_i \\ &\geq \delta_j - \delta_m = \nu - \mu. \end{aligned}$$

Resta mostrarmos que $A(l,\nu)$ tem densidade inferior positiva. Comecemos mostrando que existe $M > 0$ tal que

$$n_k \leq Mk \;\text{ para todo } k \geq 1.$$

Basta mostrar esta propriedade para k da forma $k = 2^N$, pois teríamos que se $2^{N-1} \leq k < 2^N$, então

$$n_k \leq n_{2^N} \leq M2^N = 2M2^{N-1} \leq 2Mk.$$

Seja então $k = 2^N$. Olhando para os elementos de $I(l,\nu)$ novamente como da forma

$$n = (0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1, 0, *),$$

segue (por combinatória) que se $l + \nu \leq N + 2$, a quantidade de elementos em $I(l,\nu)$ que são menores ou iguais a 2^N é $2^{N+2-l-\nu}$ e é 0 caso $l + \nu > N + 2$. Assim,

$$\begin{aligned} n_{2^N} \leq 2\sum_{i=1}^{2^N} \delta_i &\leq 2 \sum_{l+\nu\leq N+2} 2^{N+2-l-\nu}\nu \\ &\leq \left(8 \sum_{l,\nu} \frac{\nu}{2^l + \nu} \right) 2^N. \end{aligned}$$

Sejam agora $l, \nu \geq 1$ e $(k_j)_j$ os elementos de $I(l,\nu)$ em ordem crescente. Como este conjunto tem densidade inferior positiva, segue que existe $K < 0$ tal que

$$k_j \leq Kj \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Assim, escrevendo $A(l,\nu) = \{n_{k_j} : j \geq 1\}$ como uma sequência crescente, temos que

$$n_{k_j} \leq Mk_j \leq (MK)j \quad \text{para todo } j \geq 1,$$

e segue que $A(l,\nu)$ tem densidade inferior positiva. □

Usaremos este lema para dar nosso primeiro exemplo de um operador frequentemente hipercíclico. Além dele, precisaremos do seguinte teorema da análise complexa:

Teorema 3.10 (Runge)**.** *Seja $K \subseteq \mathbb{C}$ um compacto e A um conjunto que contém pelo menos um ponto de cada componente conexa de $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus K$. Sejam f uma função holomorfa em alguma vizinhança de K e $\varepsilon > 0$. Então existe uma função racional h com polos em A tal que*

$$\sup_{z\in K} |f(z) - h(z)| < \varepsilon.$$

Exemplo 3.11 (Operador de Birkhoff)**.** Mostremos que o operador $T_1 : f \mapsto f(\cdot + 1)$ no espaço $H(\mathbb{C})$ das funções holomorfas é frequentemente hipercíclico.

Sejam $A(l,\nu)$, $l, \nu \geq 1$, conjuntos de $\mathbb{N}_0$ dados pelo lema 3.9 e $(P_l)_l$ uma sequência densa de polinômios.

Seja n_k a sequência crescente de números em $\bigcup_{l,\nu\geq 1} A(l,\nu)$ dada na demonstração do lema 3.9. Se $n_k \in A(l,\nu)$, seja B_k a bola fechada de centro n_k e raio $r_k = \nu/2$. Pelo lema 3.9, estas bolas são disjuntas. Além disso, para facilitar a notação, defina a função $g_k(z) = P_l(z - n_k)$ na bola B_k.

A ideia agora será aplicar o teorema de Runge recursivamente. Seja $f_1 = g_1$. Se as funções inteiras $f_1, \ldots, f_k$ já foram construídas, consideremos as funções definidas como f_k em $|z| \leq n_k + r_k$ e g_{k+1} em B_{k+1}. Sejam $\varepsilon_k > 0$. Pelo teorema de Runge, conseguimos uma função inteira tal que

$$\sup_{|z| \leq n_k + r_k} |f_{k+1}(z) - f_k(z)| < \varepsilon_k \text{ e } \sup_{z \in B_k} |f_{k+1}(z) - g_{k+1}(z)| < \varepsilon_k.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, pela primeira desigualdade e por $n_k \to \infty$ temos que a função

$$f(z) := f_1(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{k+1}(z) - f_k(z)) = \lim_{k \to \infty} f_k(z)$$

é inteira. Além disso, escrevendo $f(z) = f_k(z) + \sum_{j=k}^{\infty} (f_{j+1}(z) - f_j(z))$, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{z \in B_k} |f(z) - g_k(z)| &\leq \sup_{z \in B_k} |f_k(z) - g_k(z)| + \sum_{j=k}^{\infty} \sup_{z \in B_k} |f_{j+1}(z) - f_j(z)| \\ &\leq \sum_{j=k-1}^{\infty} \varepsilon_j, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_0 = 0$. Por definição de B_k e g_k, obtemos

$$\sup_{|z - n_k| \leq \frac{\nu}{2}} |f(z) - P_l(z - n_k)| \leq \sum_{j=k-1}^{\infty} \varepsilon_j$$

para $n_k \in A(l, \nu)$. Tomando os ε_j de tal forma que $\sum_{j=k-1}^{\infty} \varepsilon_j < 1/\nu$ para $n_k \in A(l, \nu)$, trocando $z - n_k$ por z, segue que

$$\sup_{|z| \leq \frac{\nu}{2}} |f(z + n_k) - P_l(z)| < \frac{1}{\nu}$$

se $n_k \in A(l, \nu)$. Mas $f(z + n_k) = T_1^{n_k}(f)(z)$. Como $(P_l)_l$ é denso, os conjuntos $\{g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{|z| \leq \nu/2} |g(z) - P_l(z)| < \frac{1}{\nu}\}$, $l, \nu \geq 1$, formam uma base para a topologia de $H(\mathbb{C})$ e os $A(l, \nu)$ têm densidade inferior positiva, segue que T_1 é frequentemente hipercíclico.

Para o próximo teorema, precisaremos das noções de F-espaços, espaços de Fréchet e convergência incondicional.

Definição 3.12. Um espaço X é dito *F-espaço* se for um espaço vetorial topológico metrizável e completo.

Definição 3.13. Um espaço X é dito *espaço de Fréchet* se for um F-espaço localmente convexo.

Definição 3.14. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente* se para toda bijeção $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge.

Usaremos as seguintes proposições. Suas demonstrações e uma abordagem mais aprofundada de F-espaços, espaços de Fréchet e séries incondicionalmente convergentes podem ser encontradas em [22] e [23].

Proposição 3.15. *Seja X um espaço de Fréchet. São equivalentes:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *converge incondicionalmente,*

2. *para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo conjunto finito $F \subseteq \{N, N+1, \ldots\}$ temos que*
$$\left|\left|\sum_{n \in F} x_n\right|\right| < \varepsilon.$$

Proposição 3.16. *Seja X um F-espaço. Então X é um espaço de Fréchet se, e somente se, toda sequência absolutamente convergente em X é incondicionalmente convergente.*

Teorema 3.17 (Critério de Hiperciclicidade Frequente)**.** *Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador linear contínuo em X. Suponha que existe um subconjunto denso $X_0 \subseteq X$ e um mapa $S : X_0 \to X_0$ tal que, para todo $x \in X_0$,*

1. $\sum T^n(x)$ *converge incondicionalmente,*

2. $\sum S^n(x)$ *converge incondicionalmente,*

3. $(T \circ S)(x) = x$.

Então T é frequentemente hipercíclico.

Demonstração. Como X é separável, conseguimos uma sequência $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em X_0 densa em X. Seja $||\cdot||$ a norma que define a topologia em X.

As condições 1) e 2) implicam que existem N_l, $l \geq 1$, tais que para todo $j \leq l$ e conjunto finito $F \subseteq \{N_l, N_l + 1, \ldots\}$, temos que
$$\left|\left|\sum_{n \in F} T^n(y_j)\right|\right| < \frac{1}{l2^l} \quad \text{e} \quad \left|\left|\sum_{n \in F} S^n(y_j)\right|\right| < \frac{1}{l2^l}. \tag{2}$$

Sejam $A(l, \nu)$, $l, \nu \geq 1$, os conjuntos dados pelo lema 3.9. Definimos
$$A = \bigcup_{l, \nu \geq 1} A(l, \nu),$$
e $z_n = y_l$ se $n \in A(l, N_l)$. Vamos agora considerar
$$x = \sum_{n \in A} S^n(z_n).$$

A ideia será mostrar que x é um ponto frequentemente hipercíclico para T. Comecemos mostrando que a série converge incondicionalmente. Seja $l \geq 1$ e considere $F \subseteq \mathbb{N}_0$ finito. Temos que, por definição de A e dividindo a soma até l e depois de $l+1$ até infinito,

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n \in A \\ n \in F}} S^n(z_n) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in A(j,N_j) \\ n \in F}} S^n(y_j) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{n \in A(j,N_j) \\ n \in F}} S^n(y_j) + \sum_{j=l+1}^{\infty} \sum_{\substack{n \in A(j,N_j) \\ n \in F}} S^n(y_j).\end{aligned}$$

Como para todo $j \leq l$ e $F \subseteq \{N_l, N_l+1, \ldots\}$ finito temos a segunda desigualdade de (2), pelo lema 3.9 temos que $n \geq N_j$ para todo $n \in A(j, N_j)$. Assim, para todo $j \geq 1$ e $F \subseteq \mathbb{N}_0$ finito,

$$\left\| \sum_{\substack{n \in A(j,N_j) \\ n \in F}} S^n(y_j) \right\| < \frac{1}{j2^j} \leq \frac{1}{2^j}.$$

Portanto, para todo $F \subseteq \{N_l, N_l+1, \ldots\}$, temos que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{\substack{n \in A \\ n \in F}} S^n(y_j) \right\| &< \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{l2^l} + \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2^l} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^l}\frac{1}{2^j} = \frac{2}{2^l}.\end{aligned}$$

Como l é arbitrário, a série converge incondicionalmente.

Mostremos agora que x é um ponto frequentemente hipercíclico para T. Seja $l \geq 1$. Para todo $n \in A(l, N_l)$, temos que

$$T^n(x) - y_l = \sum_{\substack{k \in A \\ k < n}} T^n(S^k(z_k)) + \sum_{\substack{k \in A \\ k > n}} T^n(S^k(z_k)) + T^n(S^n(z_n) - y_l.$$

Usaremos a mesma ideia de antes. Seja $m \geq n$. Temos que a segunda soma acima será

$$\sum_{\substack{k \in A \\ k > n}} T^n(S^k(z_k)) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{\substack{k \in A(j,N_j) \\ n < k \leq m}} T^n(S^k(z_k)) + \sum_{j=l+1}^{\infty} \sum_{\substack{k \in A(j,N_j) \\ n < k \leq m}} T^n(S^k(z_k)).$$

Novamente usando o lema 3.9, temos que $k-n \geq N_l$ na primeira destas somas e $k-n \geq N_j$ na segunda. Assim como anteriormente, segue que

$$\left\| \sum_{\substack{k \in A \\ k > n}} T^n(S^k(z_k)) \right\| \leq \frac{2}{2^l}.$$

Se usarmos a primeira desigualdade de (2) ao invés da segunda, obtemos de maneira análoga que

$$\left|\left|\sum_{\substack{k\in A\\k<n}} T^n(S^k(z_k))\right|\right| \leq \frac{2}{2^l}.$$

Além disso, como $n \in A(l, N_l)$, temos que $T^n(S^n(z_n)) = z_n = y_l$. Pela desigualdade triangular, obtemos que, para todo $n \in A(l, N_l)$

$$||T^n(x) - y_l|| \leq \frac{4}{2^l}.$$

Como (y_l) é denso e $A(l, N_l)$ tem densidade inferior positiva, segue que x é ponto frequentemente hipercíclico para T. $\square$

Usaremos este teorema para os seguintes exemplos de operadores frequentemente hipercíclicos:

Exemplo 3.18 (Operador de MacLane)**.** Mostremos que o operador derivada D no espaço das funções holomorfas no plano complexo $H(\mathbb{C})$ (é possível mostrar que este espaço é de Fréchet) é frequentemente hipercíclico. Seja X_0 o conjunto dos polinômios e considere o operador S tal que

$$(S \circ f)(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta.$$

A condição 1) do teorema 3.17 é satisfeita, pois a soma é finita (se o grau de um polinômio P é n, $0 = D^{n+1}(P) = D^{n+2}(P) = \ldots$), logo converge incondicionalmente. A condição 3) é direta. Para verificar a condição 2), é suficiente mostrar para monômios (o caso geral é uma combinação linear deste). Assim, como

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n(z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{(n+k)!} z^{n+k} = k! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

converge absolutamente, logo incondicionalmente em $H(\mathbb{C})$, segue o resultado.

Exemplo 3.19. Consideremos o operador contínuo em $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ dado por

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (2x_1, 2x_2, \ldots).$$

Tomando X_0 como sendo o conjunto das sequências com suporte finito e $S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, 1/2x_0, 1/2x_1, \ldots)$, pelo Critério da Hiperciclicidade Frequente temos que T é frequentemente hipercíclico.

Mais geralmente, temos o seguinte:

Exemplo 3.20 (*Weighted shift*)**.** Seja B_ω o *weighted shift* associado à sequência de números reais positivos e limitados $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ em ℓ^p. Queremos encontrar uma condição suficiente para que B_ω seja um operador frequentemente hipercíclico. Tomando $\mathcal{D} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ como sendo o conjunto das sequências que têm suporte finito (ou seja, as sequências que possuem uma quantidade finita de termos não nulos), é fácil ver que $\mathcal{D}$ é um subconjunto denso.

Assumindo $\omega_i \neq 0$, podemos definir o operador linear S_ω em $\mathcal{D}$ como $S_\omega(e_i) = \omega_{i+1}^{-1} e_{i+1}$. Disso, temos que $B_\omega S_\omega = I$ em $\mathcal{D}$. Precisamos agora satisfazer a primeira hipótese do teorema 3.17. Como $B_\omega^n(x) = 0$ para n suficientemente grande, se $x \in \mathcal{D}$, $\sum B_\omega^n(x)$ converge incondicionalmente.

Notemos agora que

$$\begin{aligned} S_\omega(e_i) &= \omega_{i+1}^{-1} e_{i+1} \\ S_\omega^2(e_i) &= S_\omega(\omega_{i+1}^{-1} e_{i+1}) = \omega_{i+1}^{-1} \omega_{i+2}^{-1} e_{i+2}. \end{aligned}$$

Mais geralmente, temos

$$S_\omega^n(e_i) = \frac{1}{\omega_{i+1} \cdots \omega_{i+n}} e_{i+n}$$

Assim, se supusermos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega_1 \cdots \omega_n)^p} < \infty,$$

a série $\sum S_\omega^n(e_i)$ será incondicionalmente convergente, e segue que B_ω é frequentemente hipercíclico.

Os operadores frequentemente hipercíclicos possuem uma grande relação com os operadores caóticos (i.e. operadores hipercíclicos que possuem conjunto denso de pontos periódicos). Uma destas relações se dá pelo Critério da Caoticidade, usada para encontrar exemplos de operadores caóticos, que é o mesmo que o Critério da Hiperciclicidade Frequente.

Teorema 3.21 (Critério de Hiperciclicidade)**.** *Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador em X. Suponha que existam subconjuntos densos $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subseteq X$ e uma sequência de mapas $S_{n_k} : \mathcal{D}_2 \to X$ tais que*

1. *$T^{n_k}(x) \to 0$ para todo $x \in \mathcal{D}_1$,*

2. *$S_{n_k}(y) \to 0$ para todo $y \in \mathcal{D}_2$,*

3. *$T^{n_k} S_{n_k}(y) \to y$ para cada $y \in \mathcal{D}_2$,*

então T é hipercíclico.

Demonstração. Basta mostrarmos que T é topologicamente transitivo. Sejam U, V abertos não vazios de X. Considere $x \in \mathcal{D}_1 \cap U$ e $y \in \mathcal{D}_2 \cap V$. Então $x + S_{n_k}(y) \to x \in U$ e $T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(x) + T^{n_k}S_{n_k}(y) \to y \in V$ quando $k \to \infty$. Assim temos que $T^{n_k}(U) \cap V \neq \varnothing$ para k suficientemente grande. □

Teorema 3.22 (Critério de Caoticidade)**.** *Seja T um operador em X satisfazendo as hipóteses do teorema 3.17. Então T é caótico.*

Demonstração. Segue de 1) e 2) que $T^n(x) \to 0$ e $S^n(x) \to 0$ para todo $x \in X_0$. Assim, usando o Critério da Hiperciclicidade temos que T é hipercíclico.

Fixemos $x \in X_0$. Para cada $k \geq 1$, seja

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + x + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x).$$

Por 1) e 2) temos que $x_k \to x$ quando $k \to \infty$. Além disso, por 3) temos que $T^k(x_k) = x_k$. De fato,

$$\begin{aligned} T^k(x_k) &= \sum_{n=1}^{\infty} T^k S^{nk}(x) + T^k(x) + \sum_{n=1}^{\infty} T^{(n+1)k}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} S^{nk}(x) + x + \sum_{n=1}^{\infty} T^{nk}(x) \\ &= x_k, \end{aligned}$$

ou seja, todo ponto $x \in X_0$ pode ser aproximado por pontos periódicos de T, logo os pontos periódicos de T são um conjunto denso em X. □

4 Medidas Invariantes com Suporte Total

Nesta seção vamos estudar medidas invariantes que possuem suporte total, isto é, se $T : X \to X$ é um operador linear, vamos estudar condições para a existência de uma medida μ satisfazendo

1. μ é T-invariante: $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \subseteq X$ mensurável,
2. μ tem suporte total: $\mu(U) > 0$ para todo aberto $U \subseteq X$ não vazio.

Como vimos, se $T : X \to X$ admite uma medida ergódica com suporte total, T é frequentemente hipercíclico. Uma pergunta que surge naturalmente é: se $T : X \to X$ é frequentemente hipercíclico, T admite uma medida invariante com suporte total?

Se supusermos X compacto, é possível mostrar que T admite medida invariante com suporte total, como veremos na próxima subseção. O caso mais geral que provaremos é o seguinte:

Teorema 4.1. *Seja (X,T) um sistema dinâmico polonês, i.e., X é um espaço métrico, separável e completo e $T : X \to X$. Suponha que X tem uma topologia τ, que é Hausdorff, menos fina que a topologia original τ_X e que todo ponto de X tem base de vizinhança com respeito à τ_X de conjuntos τ-compactos. Suponha ainda que T é frequentemente hipercíclico com respeito à τ_X e contínuo com respeito à τ. Então T admite uma medida de probabilidade invariante com suporte total.*

A motivação para o enunciado geral deste teorema é o caso de espaços de Banach reflexivos. Se pensarmos em τ como a topologia fraca e τ_X como a topologia da norma, temos as propriedades do teorema anterior: as bolas fechadas formam uma base de vizinhanças para τ_X de conjuntos τ-compactos.

4.1 Caso Compacto

Mostremos nesta subseção que se X é um espaço compacto metrizável e $T : X \to X$ é frequentemente hipercíclico, então T admite medida invariante com suporte total.

Note que $\mathcal{P}(X)$ é compacto na topologia fraca* por 2.18 e metrizável por 2.13, pois $\mathcal{C}(X)$ é separável (pelo teorema de Riesz, conseguimos identificar o espaço das medidas em X por $\mathcal{C}(X)^*$, assim $\mathcal{P}(X)$ será um subespaço fechado da bola unitária, que é compacto e metrizável). Seja $x_0 \in FHC(T)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, defina a seguinte probabilidade em X

$$\mu_N := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \delta_{T^n(x_0)}.$$

Conseguimos uma subsequência μ_{N_k} convergente na topologia fraca*, digamos $\mu_{N_k} \to m \in \mathcal{P}(X)$. Ou seja, temos que

$$\int_X f d\mu_{N_k} = \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} f(T^n(x_0)) \to \int_X f dm$$

para toda $f \in \mathcal{C}(X)$.

Como $\int_X (f \circ T) d\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=2}^{N+1} f(T^n(x_0))$ para todo N, segue que

$$\int_X (f \circ T) d\mu_{N_k} - \int_X f d\mu_{N_k} \to 0$$

para toda $f \in \mathcal{C}(X)$. Assim, $\int_X (f \circ T) dm = \int_X f dm$, ou seja, m é T-invariante.

Mostremos agora que a m tem suporte total. Seja U um aberto não vazio e tome V um aberto não vazio cujo fecho está em U. Pelo teorema de Portmanteau, como o conjunto $\overline{V}$ é fechado, a aplicação $\mu \mapsto \mu(\overline{V})$ é semicontínua superiormente em $\mathcal{P}(X)$ (a demonstração deste fato é análoga à que daremos no lema 4.8). Temos então que

$$m(\overline{V}) \geq \limsup_{k \to \infty} \mu_{N_k}(\overline{V}).$$

Como

$$\mu_{N_k}(\overline{V}) = \frac{1}{N_k}\#\{n \in [1, N_k] : T^n(x_0) \in \overline{V}\},$$

segue que

$$\begin{aligned} m(U) \geq m(\overline{V}) &\geq \limsup_{k\to\infty} \mu_{N_k}(\overline{V}) \\ &\geq \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\{n \in [1, N] : T^n(x_0) \in V\} > 0, \end{aligned}$$

pela definição de frequentemente hipercíclico.

4.2 Demonstração do Teorema 4.1

Antes de demonstrarmos o teorema 4.1, observemos o seguinte:

Observação. As topologias τ e τ_X geram os mesmos borelianos.

De fato, como cada $x \in X$ tem base de vizinhança de conjuntos $\tau-$compactos e τ_X é Lindelöf (espaço métrico separável $\implies$ segundo contável $\implies$ Lindelöf), todo τ_X-aberto é união enumerável de conjuntos $\tau-$compactos, que são fechados, pois τ é Hausdorff, logo é $\tau-$Borel. Como τ_X é mais fina que τ, obtemos a igualdade entre as $\sigma-$álgebras. Assim, quando falamos de Borelianos em X, não precisamos dizer se são os gerados pela topologia τ ou τ_X.

Demonstração do Teorema 4.1. A demonstração será dividida em fatos. Vamos usar a seguinte notação: K_τ denotará o conjunto de $\tau-$compactos, x_0 o ponto frequentemente hipercíclico de T e para cada $\phi \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, vamos denotar

$$\mathfrak{m}(\phi) = \int_{\mathbb{N}} \phi(i)d\mathfrak{m}(i),$$

onde $\mathfrak{m}$ é a média invariante construída na subseção 2.3.

Fato 4.2. Todo subconjunto τ-compacto de X é τ-metrizável.

Demonstração. Seja $K \in K_\tau$ e $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável de abertos não vazios para K com respeito à topologia τ_X. Para cada j, denotaremos o τ-fecho de V_j por E_j. Note que E_j é τ-compacto, pois é τ-fechado e está contido em K, que é τ-compacto.

Denotemos por J a família dos pares (j_1, j_2) tais que $E_{j_1} \cap E_{j_2} = \varnothing$.

Afirmação. Todo par de pontos de K pode ser separado por um par (E_{j_1}, E_{j_2}) para algum $(j_1, j_2) \in J$.

De fato, sejam $x_1, x_2 \in K$. Como (X, τ) é Hausdorff, existem $U_1, U_2 \in \tau$ tal que $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Como $U_1, U_2 \in \tau$, temos $U_1, U_2 \in \tau_X$. Por hipótese, todo ponto de X possui base de vizinhança para a topologia τ_X de conjuntos τ-compactos, logo, existem K_1, K_2 conjuntos τ-compactos com $x_1 \in K_1 \subseteq U_1$, $x_2 \in K_2 \subseteq U_2$. Como (X, τ) é Hausdorff, K_1 e K_2 são τ-fechados. Como K_1 e K_2 são elementos das bases de vizinhanças de x_1 e x_2, conseguimos $V_{j_1} \subseteq K_1$ e $V_{j_2} \subseteq K_2$, com $x_1 \in V_{j_1}$ e $x_2 \in V_{j_2}$. Portanto, $E_{j_1} \subseteq K_1$ e $E_{j_2} \subseteq K_2$, e segue a demonstração da afirmação.

Usando o Lema de Urysohn, para cada $j \in J$ tomamos $f_j : K \to \mathbb{R}$ τ-contínua tal que $f_j \equiv 1$ em E_{j_1} e $f_j \equiv 0$ em E_{j_2}. Assim conseguimos uma família enumerável de funções τ-contínuas que separam os pontos de K. Como K é τ-compacto, é metrizável pelo teorema 2.7. $\square$

Fato 4.3. Para todo $K \in K_\tau$ existe uma única medida positiva de Borel μ_K em K tal que

$$\int_K f d\mu_K = \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_K f)(T^i(x_0)) d\mathfrak{m}(i) \text{ para toda } f \in \mathcal{C}(K, \tau).$$

Além disso, μ_K satisfaz $0 \leq \mu_K(K) \leq 1$ e se o τ_X-interior de K for não vazio, $\mu_K(K) > 0$.

Demonstração. O operador

$$L(f) = \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_K f)(T^i(x_0)) d\mathfrak{m}(i)$$

é um funcional linear positivo em $\mathcal{C}(K, \tau)$. De fato, para ver que L é linear, basta ver que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{1}_K(f+g))(T^i(x_0)) &= \begin{cases} (f+g)(T^i(x_0)) & T^i(x_0) \in K \\ 0 & T^i(x_0) \in X \setminus K \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(T^i(x_0)) + g(T^i(x_0)) & T^i(x_0) \in K \\ 0 & T^i(x_0) \in X \setminus K \end{cases} \\
&= (\mathbf{1}_K f)(T^i(x_0)) + (\mathbf{1}_K g)(T^i(x_0))
\end{aligned}$$

e como $\mathfrak{m}$ é média invariante, a primeira parte segue do teorema de Riesz.

Tomando $f \equiv 1$ em K, temos que

$$\begin{aligned}
\mu_K(K) = \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_K)(T^i(x_0)) d\mathfrak{m}(i) &= \lim_{\omega} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{1}_K)(T^i(x_0)) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Seja V o τ_X-interior de K em X e suponha $V \neq \varnothing$.

$$\mu_K(K) = \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_K)(T^i(x_0))d\mathfrak{m}(i) \geq \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{1}_K)(T^i(x_0))$$
$$\geq \liminf_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{1}_V)(T^i(x_0)) > 0$$

onde a última desigualdade vem do fato de que x_0 é ponto frequentemente hipercíclico de T. $\square$

Fato 4.4. Se $K, L \in K_\tau$, com $K \subseteq L$, então $\mu_K \leq \mu_L$, onde

$$\mu_K(A) := \mu_K(K \cap A) \text{ para todo A} \subseteq \text{X boreliano}$$

Demonstração. Como (X, τ_X) é espaço métrico e cada μ_K é finita, estas medidas são regulares. Assim, basta mostrar que $\mu_K(E) \leq \mu_L(E)$ para todo E τ_X-compacto. Faremos isso para os conjuntos τ-compactos, pois como τ_X é mais fina que τ, os subconjuntos τ_X-compactos são τ-compactos. Como $K \cap E$ é compacto, podemos supor $E \subseteq K$ e trocarmos $K \cap E$ por E.

Como E é τ-compacto e L é Hausdorff, E é fechado. Consequentemente, a função indicadora em E, $\mathbf{1}_E : L \to \mathbb{R}$, é semi-contínua superiormente com respeito à topologia τ, pois

$$\mathbf{1}_E^{-1}(-\infty, t) = \begin{cases} \varnothing & t \leq 0 \\ L \setminus E & 0 < t \leq 1 \\ L & t > 1. \end{cases}$$

Assim, $\mathbf{1}_E^{-1}(-\infty, t)$ é aberto em L, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Como (L, τ) é metrizável, conseguimos uma sequência decrescente $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções em $\mathcal{C}(L, \tau)$ tal que $f_j \to \mathbf{1}_E$ pontualmente (por exemplo podemos tomar $f_j(x) = \sup_{y \in L}\{\mathbf{1}_E(y) - jd(x, y)\}$). Temos também que a restrição de cada f_j a K é $\mathcal{C}(K, \tau)$.

Assim, temos que

$$\int_K f_j d\mu_K = \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_K f_j)(T^i(x_0))d\mathfrak{m}(i) \leq \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_L f_j)(T^i(x_0))d\mathfrak{m}(i) = \int_K f_j d\mu_L$$

onde a desigualdade vem do fato que se olharmos para

$$(\mathbf{1}_L f_j - \mathbf{1}_K f_j)(T^i(x_0)) \geq 0$$

e $\mathfrak{m}$ ser funcional linear positivo. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}(\mathbf{1}_L f_j - \mathbf{1}_K f_j)(T^\cdot(x_0)) &= \mathfrak{m}((\mathbf{1}_L f_j)(T^\cdot(x_0)) - (\mathbf{1}_K f_j)(T^\cdot(x_0))) \\
&= \mathfrak{m}(\mathbf{1}_L f_j)(T^\cdot(x_0)) - \mathfrak{m}(\mathbf{1}_K f_j)(T^\cdot(x_0)) \\
&= \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_L f_j)(T^i(x_0))d\mathfrak{m}(i) - \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_K f_j)(T^i(x_0))d\mathfrak{m}(i) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Tomando agora $j \to +\infty$, obtemos $\mu_K(E) \leq \mu_L(E)$. $\square$

Fato 4.5. Se tomarmos

$$\mu(A) := \sup_{K \in K_\tau} \mu_K(A) \text{ para todo } A \subseteq X \text{ boreliano,}$$

então μ é medida positiva de Borel em X com $\mu(X) \leq 1$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que se $K_1, K_2 \in K_\tau$, então conseguimos $L \in K_\tau$ tal que $\mu_L \geq \mu_{K_1}$ e $\mu_L \geq \mu_{K_2}$ (por exemplo, tome $L = K_1 \cup K_2$).

Temos que $0 \leq \mu(A) \leq 1$, para todo A boreliano, pois $0 \leq \mu_K(A) \leq 1$ para todo $K \in K_\tau$. Pelo fato 4.3, temos que $\mu(X) > 0$.

Seja (A_n) uma sequência crescente de borelianos. Temos que

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \sup_{K \in K_\tau} \mu_K\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_{K \in K_\tau}\left(\sup_n \mu_K\left(A_n\right)\right) = \sup_n\left(\sup_{K \in K_\tau} \mu_K\left(A_n\right)\right) \\ &= \sup_n \mu(A_n) = \lim_n \mu(A_n).\end{aligned}$$

Pois podemos "comutar"os supremos. Assim, se (B_n) for uma sequência de Borelianos, podemos tomar $A_n = \cup_{i=1}^n B_i$, e temos que $\mu(\cup B_n) = \mu(\cup A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \mu(\cup_{i=1}^n B_i)$.

Provemos então que μ é finitamente aditiva. Sejam A_1, A_2 disjuntos. $\mu_K(A_1 \cup A_2) = \mu_K(A_1) + \mu_K(A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$. Como vale para todo $K \in K_\tau$, tomando o limite obtemos

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Pelo fato 4.4,

$$\begin{aligned}\mu_{K_1}(A_1) + \mu_{K_2}(A_2) &\leq \mu_{K_1 \cup K_2}(A_1) + \mu_{K_1 \cup K_2}(A_2) \\ &= \mu_{K_1 \cup K_2}(A_1 \cup A_2) \\ &\leq \mu(A_1 \cup A_2)\end{aligned}$$

Como vale para quaisquer $K_1, K_2 \in K_\tau$, tomando o limite obtemos $\mu(A_1) + \mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup A_2)$. Portanto, $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$. $\square$

Fato 4.6. μ é T-invariante e tem suporte total.

Demonstração. Pelo fato 4.3, μ tem suporte total. De fato, se U é τ_X-aberto não vazio de X, U contém um conjunto $\tau-$compacto que é τ_X-vizinhança, e tem τ_X-interior não vazio. Assim, $\mu(U) \geq \mu(K) \geq \mu_K(K) > 0$.

Afirmação. $\mu(T^{-1}(E)) \leq \mu(E)$ para todo $E \in K_\tau$.

Seja $E \in K_\tau$ e mostremos que $\mu_K(T^{-1}(E)) \leq \mu_{T(K)}(E)$ para todo $K \in K_\tau$. Como $E \cap T(K)$ é fechado em $(T(K), \tau)$, $\mathbf{1}_{E\cap T(K)}$ é semicontínua superiormente, e então conseguimos uma sequência $(f_j)_{j\geq 1}$ de funções em $\mathcal{C}(T(K), \tau)$ que converge pontualmente a $\mathbf{1}_{E\cap T(K)}$. Assim,

$$\begin{aligned}\mu_{T(K)}(E) = \int_{T(K)} \mathbf{1}_{E\cap T(K)} d\mu_{T(K)} &= \lim_j \int_{T(K)} f_j d\mu_{T(K)} \\ &= \lim_j \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_{T(K)} f_j)(T^i(x_0)) d\mathfrak{m}(i) \\ &= \lim_j \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_{T(K)} f_j)(T^{i+1}(x_0)) d\mathfrak{m}(i)\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue da invariância por translação de uma média invariante. Note que

$$(\mathbf{1}_{T(K)} f_j)(T^{i+1}(x_0)) \geq (\mathbf{1}_K \cdot (f_j \circ T))(T^i(x_0)).$$

De fato, segue por f_j ser não negativa e

$$\begin{aligned}(\mathbf{1}_{T(K)} f_j)(T^{i+1}(x_0)) &= \begin{cases} f_j(T^{i+1}(x_0)) & T^{i+1}(x_0) \in T(K) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} f_j(T^{i+1}(x_0)) & T^{i}(x_0) \in K \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ &= (\mathbf{1}_K \cdot (f_j \circ T))(T^i(x_0)).\end{aligned}$$

Como $f_j \circ T$ é $\tau-$contínua em K, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_{T(K)} f_j)(T^{i+1}(x_0)) d\mathfrak{m}(i) &\geq \int_{\mathbb{N}} (\mathbf{1}_K \cdot (f_j \circ T))(T^i(x_0)) d\mathfrak{m}(i) \\ &= \int_K (f_j \circ T) d\mu_K.\end{aligned}$$

Obtemos então

$$\mu_{T(K)}(E) \geq \lim_j \int_K (f_j \circ T) d\mu_K = \int_K \mathbf{1}_{E\cap T(K)} \circ T d\mu_K.$$

Como $\mathbf{1}_{E\cap T(K)} \circ T \geq \mathbf{1}_{T^{-1}(E)\cap K}$, pois

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{E\cap T(K)} \circ T(x) &= \begin{cases} 1 & T(x) \in E \cap T(K) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} 1 & x \in T^{-1}(E) \cap K \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \\ &= \mathbf{1}_{T^{-1}(E)\cap K}(x)\end{aligned}$$

Portanto,
$$\mu_{T(K)}(E) \geq \int_K \mathbf{1}_{T^{-1}(E)\cap K} d\mu_K = \mu_K(T^{-1}(E)).$$
Como $T(K) \in K_\tau$, $\mu(E) \geq \mu_{T(K)}(E) \geq \mu_K(T^{-1}(E))$. Como vale para todo $K \in K_\tau$, tomando o limite obtemos $\mu(E) \geq \mu(T^{-1}(E))$. Isso conclui a demonstração da afirmação.

Agora, como μ e $\mu \circ T^{-1}$ são medidas regulares de Borel, temos que $\mu(T^{-1}(A)) \leq \mu(A)$ para todo $A \subseteq X$ boreliano. Aplicando esta desigualdade para o conjunto $X \setminus A$ (que também é boreliano), obtemos

$$\mu(X \setminus T^{-1}(A)) \leq \mu(X \setminus A).$$

Como μ é finita, temos $\mu(X) - \mu(T^{-1}(A)) \leq \mu(X) - \mu(A)$ e, assim, concluímos que $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$. $\square$

Basta então normalizarmos a medida μ. Assim, $\eta = \frac{1}{\mu(X)}\mu$ será medida de probabilidade invariante por T com suporte total.

$\square$

Para o próximo lema, usaremos a seguinte proposição, clássica da teoria da análise:

Proposição 4.7. *Sejam X um espaço métrico e $f : X \to \mathbb{R}$. Então f é semicontínua inferiormente se, e somente se, para todo $a \in X$ temos $f(a) \leq \liminf f(x_n)$ para toda sequência $(x_n) \to a$.*

Vimos no teorema 4.1 que operadores frequentemente hipercíclicos em certos espaços admitem medida invariante com suporte total. O seguinte lema nos diz que se T admite pelo menos uma medida invariante com suporte total, então admite uma quantidade "grande"(no sentido de categoria de Baire) de medidas invariantes com suporte total.

Lema 4.8. *Seja (X, T) um sistema dinâmico polonês e denote por $\mathcal{P}_{T,*}(X)$ o conjunto das medidas de probabilidade de Borel T-invariantes em X com suporte total. Se $\mathcal{P}_{T,*}(X) \neq \varnothing$, então $\mathcal{P}_{T,*}(X)$ é um subconjunto G_δ denso de $\mathcal{P}_T(X)$.*

Demonstração. Seja $(V_j)_{j\geq 1}$ uma base enumerável de abertos de X. Temos que $m \in \mathcal{P}(X)$ tem suporte total $\iff$ $m(V_j) > 0$ para todo $j \geq 1$. Defina, para cada $j \geq 1$, a seguinte função:

$$\begin{aligned} f_j : \mathcal{P}(X) &\to \mathbb{R} \\ \mu &\mapsto \mu(V_j). \end{aligned}$$

Note que cada f_j é semicontínua inferiormente. Com efeito, seja μ_n uma sequência de medidas que converge à μ na topologia de Prokhorov. Pelo teorema 2.16 $\liminf \mu_n(V_j) \geq$

$\mu(V_j) \implies \liminf f_j(\mu_n) \geq f_j(\mu)$. Pela proposição 4.7 segue que cada f_j é semicontínua inferiormente. Além disso, temos que

$$\mathcal{P}_{T,*}(X) = \bigcap_j f_j^{-1}(0,\infty).$$

Portanto, $\mathcal{P}_{T,*}(X)$ é G_δ em $\mathcal{P}_T(X)$.

Suponha agora que $\mathcal{P}_{T,*}(X) \neq \varnothing$, e seja $\mu_0 \in \mathcal{P}_{T,*}(X)$. Se $m \in \mathcal{P}_T(X)$,

$$m_\varepsilon := (1-\varepsilon)m + \varepsilon\mu_0$$

é T-invariante para qualquer $\varepsilon \in (0,1)$ e tem suporte total, pois μ_0 o tem. Logo, $m_\varepsilon \in \mathcal{P}_{T,*}(X)$. Como $m_\varepsilon \to m$ quando $\varepsilon \to 0$, e isso vale para qualquer $m \in \mathcal{P}_T(X)$, temos que $\mathcal{P}_{T,*}(X)$ é denso em $\mathcal{P}_T(X)$. □

4.3 Medidas Invariantes Contínuas com Suporte Total

Vamos agora estudar condições para que um operador $T : X \to X$ admita uma medida invariante com suporte total *contínua*, ou seja, que satisfaça $m(\{a\}) = 0$ para todo $a \in X$. Comecemos com o seguinte:

Lema 4.9. *Sejam X um espaço de Hausdorff, $T : X \to X$ uma aplicação contínua e m uma probabilidade de Borel T-invariante em X. Se a é tal que $m(\{a\}) > 0$, então a é um ponto periódico de T. Neste caso, $m(\{T^n(a)\}) = m(\{a\})$ para todo $n \geq 0$.*

Demonstração. Se a não for ponto periódico de T, então os conjuntos $T^{-n}(\{a\})$ são disjuntos dois a dois. Como m é T-invariante, todos estes conjuntos têm a mesma medida e m é probabilidade. Disso segue que $m(\{a\}) = 0$, o que contradiz a hipótese de que $m(\{a\}) > 0$.

Suponha agora que a é ponto periódico com período $N \geq 1$. Assim, $T^N(a) = a$, e $T^{N-1}(a) \in T^{-1}(\{a\})$. Com isso, temos $m(\{T^{N-1}(a)\}) \leq m(T^{-1}(\{a\})) = m(\{a\})$. Aplicando este processo indutivamente, obtemos

$$m(\{a\}) \leq m(\{T(a)\}) \leq \cdots \leq m(\{T^{N-1}(a)\}) \leq m(\{a\}).$$

Portanto, $m(\{T^n(a)\}) = m(\{a\})$ para todo $0 \leq n < N$. □

Observação. Segue diretamente deste lema que as medidas com suporte finito são exatamente as combinações convexas de medidas periódicas (definidas a seguir).

Uma classe de medidas que estudaremos é a das periódicas:

Definição 4.10. Dizemos que uma medida $\nu \in \mathcal{P}(X)$ é uma medida *periódica* para T se tem a forma

$$\nu = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{T^n(a)},$$

onde $a \in X$ é ponto periódico de T com $T^N(a) = a$.

Em particular, temos que as medidas periódicas são T-invariantes.

Proposição 4.11. *Seja (X, T) um sistema dinâmico polonês, onde X não possui pontos isolados. Assuma que existe um conjunto finito $F_0 \subset X$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x \in X : x \notin F_0 \text{ e } T^N(x) = x\}$ não possui pontos isolados. Então, se T admite uma medida invariante com suporte total, também admite uma que é contínua.*

Demonstração. Seja μ uma probabilidade invariante por T com suporte total. Sejam μ_c e μ_d as partes contínua e discreta de μ, respectivamente. Seja $D = \{a \in X : \mu(\{a\}) > 0\}$. D é enumerável, pois μ é probabilidade. Além disso, o suporte de μ_d está em D. Pelo lema 4.9, os pontos de D são T-periódicos. Podemos então escrever

$$\mu_d = \sum_{a \in D} c_a \nu_a,$$

onde $c_a > 0$ e ν_a é uma medida periódica cujo suporte está na órbita de a. Temos que a medida

$$\tilde{\mu} := \mu - \sum_{a \in D \cap F_0} c_a \nu_a$$

é T-invariante e tem suporte total, pois, se $A \neq \varnothing$ é aberto, $\tilde{\mu}(A) = \mu(A) - \sum_{a \in D \cap F_0} c_a \nu_a(A) \geq \mu(A \setminus F_0) > 0$, visto que $D \cap F_0$ é finito e X não tem pontos isolados. Podemos então trocar μ por $\tilde{\mu}$ e supor que $D \cap F_0 = \varnothing$.

Notemos que μ_d é soma de medidas periódicas, logo é T-invariante. Assim, podemos concluir que μ_c também é T-invariante. Para terminarmos a demonstração da proposição, basta mostrarmos que para cada $a \in D$ conseguimos uma medida m_a contínua e T-invariante cujo suporte contém a. Com efeito, caso este fosse o caso, poderíamos definir a medida

$$m := \mu_c + \sum_{a \in D} \varepsilon_a m_a,$$

onde ε_a são coeficientes suficientemente pequenos para que m seja finita, m será medida invariante com suporte total.

Fixemos então $a \in D$ e $N \geq 1$ tal que $T^N(a) = a$. Como $a \notin F_0$ e F_0 é fechado em X, podemos tomar uma base decrescente $(V_j)_{j \geq 1}$ de vizinhanças abertas de a tal que $V_j \cap F_0 = \varnothing$ para cada $j \geq 1$. Sejam $C_j = \{x \in V_j : T^N(x) = x\}$ conjuntos não vazios $(a \in C_j)$ e sem pontos isolados, por hipótese. Note que $C_j = V_j \cap \{x \in X : T^N(x) = x\}$,

V_j é aberto e $\{x \in X : T^N(x) = x\}$ é fechado, logo são espaços poloneses, assim C_j é polonês. Pelo teorema 2.3, existe um subconjunto $K_j \subset C_j$ homeomorfo ao conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Para cada $j \geq 1$, tome uma probabilidade contínua m_j em K_j cujo suporte é K_j (veja observação abaixo). Considere m_j como medida de Borel em X. Defina m_a por

$$m_a := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} m_j \circ T^{-n} \right).$$

Temos que m_a é probabilidade, pois

$$m_a(X) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} m_j \circ T^{-n}(X) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 \right) = 1$$

e é T-invariante, visto que

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} m_j \circ T^{-n}(T^{-1}(A)) &= \frac{1}{N} \left(m_j(T^{-1}(A)) + \cdots + m_j(T^{-N}(A)) \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(m_j(T^{-1}(A)) + \cdots + m_j(T^{-(N-1)}(A)) + m_j(A) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} m_j \circ T^{-n}(A), \end{aligned}$$

pois $T^n(x) = x$ para todo x em K_j, e assim $m_a(T^{-1}(A)) = m_a(A)$. Como o suporte de m_a contém todos os K_j e os conjuntos K_j se acumulam à $\{a\}$, segue que a está no suporte de m_a. □

Observação. Para construir uma probabilidade boreliana contínua em $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, podemos considerar, por exemplo, os cilindros

$$C_n(i) = \{x \in C : x_n = i\},$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $i \in \{0,1\}$. Defina $\mu(C_n(0)) = \mu(C_n(1)) = 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para estender para interseções finitas de cilindros, sejam $i_1, \cdots, i_k \in \{0,1\}$ e $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ distintos. Definimos

$$\mu(C_{n_1}(i_1) \cap \cdots \cap C_{n_k}(i_k)) = \frac{1}{2^k}.$$

Essas interseções formam uma base para a topologia produto em C. Para mostrar que um ponto tem medida nula, sejam $x = (x_k) \in C$ e $\varepsilon > 0$ dado. Tome N tal que $1/2^N < \varepsilon$ e considere $i_k = x_k$ para $1 \leq k \leq N$. Assim, $x \in C_1(i_1) \cap \cdots \cap C_N(i_N)$. Logo, $\mu(\{x\}) \leq \mu(C_1(i_1) \cap \cdots \cap C_N(i_N)) = 1/2^N < \varepsilon$, e temos que $\mu(\{x\}) = 0$.

A demonstração de que μ é de fato uma medida segue do teorema 38.B de [16], tomando a medida em $\{0,1\}$ como $m(\{0\}) = m(\{1\}) = 1/2$ e μ será a medida no espaço produto.

5 Quantificando a Frequência de um Operador

Nesta seção vamos introduzir um parâmetro, que denotaremos por $c(T)$, para operadores frequentemente hipercíclicos e o usaremos para mostrar diversas propriedades dos operadores frequentemente hipercíclicos. Por exemplo, vamos mostrar que o conjunto dos vetores frequentemente hipercíclicos é magro e vamos mostrar que um operador frequentemente hipercíclico do tipo *weighted shift* construído em [17] não admite medida ergódica com suporte total.

5.1 O parâmetro $c(T)$

Comecemos com as seguintes definições:

Definição 5.1. Seja T um operador frequentemente hipercíclico em um espaço de Banach X. Definimos o conjunto

$$\mathcal{N}_T(x, B) := \{n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in B\}.$$

Para cada $R > 0$, vamos denotar por B_R a bola fechada de centro 0 e raio R.

Definição 5.2. Seja T um operador frequentemente hipercíclico em um espaço de Banach X. Para cada $R > 0$, denotamos $c_R(T) := \sup_{x \in HC(T)} \overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, B_R)$. Definimos o parâmetro $c(T)$ por:

$$c(T) := \sup_{R>0} c_R(T).$$

Essencialmente, o parâmetro $c(T)$ mede a frequência máxima que a órbita de um vetor hipercíclico pode visitar uma bola centrada na origem. Note que se T é frequentemente hipercíclico, por definição temos $c(T) > 0$.

Comecemos agora a estudar o parâmetro $c(T)$. O seguinte lema nos diz que o sup na definição anterior é atingido em um conjunto comagro de vetores e que, na verdade, o parâmetro $c_R(T)$ não depende de R, conforme mostraremos.

Lema 5.3. *Para cada $\alpha > 0$, existe um conjunto comagro de vetores $x \in HC(T)$ tal que*

$$\overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, B_\alpha) = c(T).$$

Demonstração. Para demonstrar este lema, vamos precisar dos seguintes fatos:

Fato 5.4. Sejam $z \in HC(T)$ e $R > 0$ tal que $||T^m(z)|| \neq R\ \forall m \geq 0$. Então o conjunto

$$G_{z,R} = \{x \in HC(T) : \overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, B_R) \geq \overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(z, B_R)\}$$

é comagro em X.

Demonstração. Seja $d_{z,R} = \overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(z, B_R)$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, considere

$$U_{N,\varepsilon} = \Bigg\{ x \in X : \exists n \geq N \text{ tal que } T^i(x) \notin \partial B_R \text{ se } i = 1, \dots, n \text{ e} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{B_R}(T^i(x)) > d_{z,R} - \varepsilon \Bigg\}$$

Note que $U_{N,\varepsilon}$ é aberto, pois se $x \in U_{N,\varepsilon}$, conseguimos uma vizinhança de x tal que $T^i(y) \notin \partial B_R$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{B_R}(T^i(y)) > d_{z,R} - \varepsilon$ para todo y nesta vizinhança, dada a continuidade das funções T^i e $\mathbf{1}_{B_R} \circ T^i$.

Além disso, cada $U_{N,\varepsilon}$ é denso em X. Com efeito, mostremos que $U_{N,\varepsilon}$ contém a órbita de z por T: seja $k \geq 1$ fixo. Então $T^i(T^k(z)) \notin \partial B_R$, pois $||T^m(z)|| \neq R \; \forall m$, e

$$\mathcal{N}_T(T^k(z), B_R) = \mathcal{N}_T(z, B_R) - k.$$

Assim, $\overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(T^k(z), B_R) = \overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(z, B_R) = d_{z,R} \implies T^k(z) \in U_{N,\varepsilon}$. Por z ser ponto hipercíclico, $U_{N,\varepsilon}$ é denso em X.

Pelo teorema de Categorias de Baire, o conjunto

$$G = HC(T) \cap \left[\bigcap_{N,q \geq 1} U_{N,2^{-q}} \right]$$

é G_δ denso em X. Como $G \subseteq G_{z,R}$, segue o resultado. $\square$

Fato 5.5. $c_R(T)$ não depende de $R > 0$.

Demonstração. Da linearidade de T, temos que $\mathbf{1}_{B_R}(T^i(z)) = \mathbf{1}_{B_1}(R^{-1}T^i(z))$. Assim,

$$\mathcal{N}_T(z, B_R) = \mathcal{N}_T(R^{-1}z, B_1).$$

Mas $HC(T)$ é invariante por dilatação (z é ponto hipercíclico se, e somente se, $r \cdot z$ é hipercíclico para todo $r > 0$, pois T é linear). Logo, tomar o sup em z é equivalente à tomar o sup em $R^{-1}z$. Portanto, temos que $c_R(T) = c_1(T) \; \forall R > 0$. $\square$

Demonstremos agora o lema. Seja $\alpha > 0$. Pelo fato 5.5, conseguimos uma sequência $(z_p)_{p \geq 1} \in HC(T)$ tal que

$$\overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(z_p, B_{\alpha/2}) \to c(T)$$

quando $p \to \infty$. Tome $R \in (\alpha/2, \alpha)$ tal que $||T^m(z_p)|| \neq R$ para todo p e m. Pelo fato 5.4 e pelo teorema de categoria de Baire, conseguimos um conjunto comagro $G \subseteq HC(T)$ tal que

$$\overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(x, B_R) \geq \overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(z_p, B_R) \; \forall x \in G, \forall p,$$

pois conseguimos para cada p e basta tomar a interseção.

Agora, como $\overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(x, B_R) \leq \overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(x, B_\alpha) \leq c(T)$ e $\overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(z_p, B_R) \geq \overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(z_p, B_{\alpha/2}) \to c(T)$ quando $p \to \infty$, devemos ter $\overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(x, B_\alpha) = c(T)$.

□

Observação. Com o lema 5.3, temos os seguintes:

1. O parâmetro $c(T)$ pode ser tomado, qualquer que seja $\alpha > 0$, como

$$c(T) = \max\{c \in [0,1] : \overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(x, B_\alpha) \geq c \text{ para uma quantidade comagra de } x \in HC(T)\},$$

2. A família $(B_R)_{R>0}$ é monótona com respeito à R, assim, pelo lema 5.3 e pelo teorema de categoria de Baire, conseguimos um conjunto comagro de vetores $x \in HC(T)$ tal que $\overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(x, B_\alpha) = c(T)$ para todo $\alpha > 0$.

Como consequência, temos a seguinte:

Proposição 5.6. *Seja T um operador hipercíclico em um espaço de Banach X com $c(T) > 0$. Então existe um conjunto comagro de vetores $x \in X$ tal que $||T^i(x)|| \to 0$ quando $i \to \infty$ em um conjunto $D_x \subseteq \mathbb{N}$ com $\overline{\text{dens}}(D_x) \geq c(T)$.*

Demonstração. Pela observação, temos que o conjunto

$$G = \{x \in X : \overline{\text{dens}}\,\mathcal{N}_T(x, B_\alpha) \geq c(T)\ \forall \alpha > 0\}$$

é comagro em X. Mostremos então que os pontos deste conjunto satisfazem o que queremos.

Fixemos $x \in X$ e tome uma sequência de números positivos $(\varepsilon_r)_{r\geq 1}$ decrescente com $\varepsilon_r \to 0$. Pela definição de G, conseguimos uma sequência crescente de inteiros $(n_r)_{r\geq 0}$, com $n_0 = 1$, tal que

$$\frac{1}{n_r}\#\left\{i \in [1, n_r] : ||T^i(x)|| \leq \frac{1}{r}\right\} \geq c(T) - \varepsilon_r\ , \forall r \geq 1.$$

Podemos assumir que

$$\frac{n_{r-1}}{n_r} \leq \varepsilon_r\ , \forall r \geq 1$$

(caso seja necessário, conseguimos uma subsequência que satisfaça). Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n_r}\#\left\{i \in [1, n_r] : ||T^i(x)|| \leq \frac{1}{r}\right\} = \\
&= \frac{1}{n_r}\#\left\{i \in [1, n_{r-1}] : ||T^i(x)|| \leq \frac{1}{r}\right\} + \frac{1}{n_r}\#\left\{i \in (n_{r-1}, n_r] : ||T^i(x)|| \leq \frac{1}{r}\right\} \leq \\
&\leq \frac{n_{r-1}}{n_r} + \frac{1}{n_r}\#\left\{i \in (n_{r-1}, n_r] : ||T^i(x)|| \leq \frac{1}{r}\right\} \leq \\
&\leq \varepsilon_r + \frac{1}{n_r}\#\left\{i \in (n_{r-1}, n_r] : ||T^i(x)|| \leq \frac{1}{r}\right\}.
\end{aligned}$$

E, portanto, temos

$$\frac{1}{n_r}\#\left\{i\in(n_{r-1},n_r]:||T^i(x)||\leq\frac{1}{r}\right\}\geq c(T)-2\varepsilon_r,\ \forall r\geq 1.$$

Tomamos o conjunto D_x como sendo

$$D_x=\bigcup_{r\geq 1}\left\{i\in(n_{r-1},n_r]:||T^i(x)||\leq\frac{1}{r}\right\}.$$

Com isso, conseguimos

$$\frac{1}{n_r}\#([1,n_r]\cap D_x)\geq\frac{1}{n_r}\#((n_{r-1},n_r]\cap D_x)\geq c(T)-2\varepsilon_r.$$

Quando $r\to\infty$, obtemos $\overline{\text{dens}}(D_x)\geq c(T)$. Por termos que $||T^i(x)||\to 0$ quando $i\to\infty$ em D_x, segue o resultado. □

A seguinte proposição nos diz que não é possível trocar o 0 por algum ponto $a\in X$ qualquer na proposição 5.6, ou seja, dado $a\in X$ não necessariamente conseguimos uma quantidade comagra de vetores $x\in X$ tal que $T^i(x)\to a$ quando $i\to\infty$ em um conjunto com densidade superior positiva.

Proposição 5.7. *Sejam X um espaço topológico de Hausdorff, $T:X\to X$ contínuo e $a\in X$. Se existir $x\in X$ tal que $T^i(a)\to x$ quando $i\to\infty$ em um subconjunto $D\subseteq\mathbb{N}$ com $\overline{\text{dens}}(D)>0$, então a é ponto periódico de T.*

Demonstração. Primeiramente, mostremos que é possível encontrar $q\in\mathbb{N}$ tal que $D\cap(q+D)$ é infinito. Suponha, por absurdo, que não existe tal q, e considere os conjuntos

$$R_k=(k+D)\setminus\bigcup_{1\leq q<k}(q+D),$$

para $k\geq 2$. Estes conjuntos são disjuntos dois a dois. Além disso, como $D\cap(k+D)$ é finito $\forall k\in\mathbb{N}$, R_k é a translação de um subconjunto cofinito de D.

Note que isto contradiz o fato de que $\overline{\text{dens}}(D)=c>0$: tomamos uma média invariante $\mathfrak{m}$ em $\ell^\infty(\mathbb{N})$ tal que a sequência

$$\phi_D(i)=\begin{cases}1 & i\in D\\ 0 & i\in\mathbb{N}\setminus D\end{cases}$$

satisfaça $\mathfrak{m}(\phi_D)=c$ (é possível, pois c é ponto de acumulação da sequência $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\phi_D(i)$). Definindo ϕ_{R_k} de maneira análoga, teríamos $\mathfrak{m}(\phi_{R_k})=c$, pela invariância por translação da $\mathfrak{m}$ e por R_k ser a translação de um subconjunto cofinito de D. Assim, $\infty=\mathfrak{m}(\phi_{\cup R_k})\leq\mathfrak{m}(\mathbf{1})$, absurdo.

Seja então q tal que $D\cap(q+D)$ é infinito. Temos que $T^i(x)\to a$ e $T^i(x)\to T^q(a)$. Como X é Hausdorff, $T^q(a)=a$. □

Outra consequência do lema 5.3 é o seguinte:

Teorema 5.8. *Se T é um operador limitado em um espaço de Banach X, então $FHC(T)$ é magro em X.*

Demonstração. Podemos assumir T frequentemente hipercíclico. Pelo lema 5.3, conseguimos um conjunto comagro de vetores $G \subseteq HC(T)$ tal que

$$\overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, B_1) = c(T)\ \forall x \in G.$$

Basta mostrarmos então que nenhum $x \in G$ pode ser frequentemente hipercíclico.

Fixemos $x \in G$. Seja V um aberto não vazio tal que $V \cap B_1 = \varnothing$ e $V \subseteq B_2$. Temos que

$$\begin{aligned}\overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, B_2) &\geq \overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, B_1) + \underline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, V)\\ &= c(T) + \underline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, V),\end{aligned}$$

pois $\mathcal{N}_T(x, B_1) \dot{\cup} \mathcal{N}_T(x, V) \subseteq \mathcal{N}_T(x, B_2)$.

Como $\overline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, B_2) \leq c(T)$, temos que $\underline{\text{dens}}\, \mathcal{N}_T(x, V) = 0$, logo $x \notin FHC(T)$. □

Corolário 5.9. *Seja $T : X \to X$ um operador linear contínuo num espaço de Banach separável. Suponha que T admite uma probabilidade invariante com suporte total μ, a qual é ergódica com relação à T. Então o T é frequentemente hipercíclico e $FHC(T)$ tem medida total.*

Demonstração. Seja $(V_j)j \in \mathbb{N}$ uma base enumerável de abertos de X. Aplicando o teorema ergódico de Birkhoff para a função característica $\mathbf{1}_{V_j}$, para cada j, conseguimos conjuntos de medida total A_j tais que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{1}_{V_j}(T^n(x)) \to \mu(V_j) > 0\ \forall x \in A_j.$$

Ou seja, temos

$$\frac{1}{N} \#\{n \in [0, N-1] : T^n(x) \in V_j\} \to \mu(V_j) > 0\ \forall x \in A_j.$$

Assim, temos que T é frequentemente hipercíclico. Consideremos então o conjunto $A = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$, que tem medida total. Disso segue que $FHC(T)$ tem medida total. □

5.2 $c(T)$ e a Existência de Medida Ergódica com Suporte Total

O seguintes teoremas relacionam a existência de medida ergódica com suporte total com o parâmetro $c(T)$.

Teorema 5.10. *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Se T admite uma medida ergódica com suporte total, então $c(T)=1$.*

Demonstração. Suponha que T admite uma medida ergódica m com suporte total. Pelo teorema ergódico de Birkhoff, para cada $R>0$ conseguimos um Borel $\Omega_R \subseteq X$ com medida total tal que, para cada $x \in \Omega_R$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{B_R}(T^i(x)) \to m(B_R) \text{ quando } n \to \infty.$$

Fixemos $R>0$ tal que $m(\partial B_R)=0$. Consideremos novamente os conjuntos abertos

$$U_{N,\varepsilon} = \Bigg\{ x \in X : \exists n \geq N \text{ tal que } T^i(x) \notin \partial B_R \text{ se } i=1,\ldots,n \text{ e } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{B_R}(T^i(x)) > m(B_R)-\varepsilon \Bigg\}.$$

Note que $m(\bigcup_{i\geq 1} T^{-i}(\partial B_R))=0$ e $\Omega_R \setminus \bigcup_{i\geq 1} T^{-i}(\partial B_R) \subseteq U_{N,\varepsilon}$, pois se $x \in \Omega_R$, existe $n \geq N$ tal que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{B_R}(T^i(x)) > m(B_R)-\varepsilon$. Temos então que $m(U_{N,\varepsilon})=1$. Pelo fato de m ter suporte total, $U_{N,\varepsilon}$ é denso em X. Pelo teorema de categoria de Baire, o conjunto $\bigcap_{N,q\in\mathbb{N}} U_{N,2^{-q}}$ é G_δ denso em X. Além disso, para cada $x \in \bigcap_{N,q\in\mathbb{N}} U_{N,2^{-q}}$ temos $\overline{\operatorname{dens}}\, \mathcal{N}_T(x,B_R) \geq m(B_R)$ e, portanto, $\overline{\operatorname{dens}}\, \mathcal{N}_T(x,B_R) \geq m(B_R)$ para uma quantidade comagra de vetores $x \in X$. Pela observação que fizemos sobre o lema 5.3, $c(T) \geq m(B_R)$ para todo R tal que $m(\partial B_R)=0$. Como o conjunto dos $R>0$ tal que $m(\partial B_R)>0$ é no máximo enumerável, tomando o sup em R obtemos

$$c(T) \geq \sup_{R>0} m(B_R)$$

e, portanto, $c(T)=1$.

$\square$

Usando este teorema e a construção feita do operador no Teorema 7 de [17], conseguimos um exemplo de um operador frequentemente hipercíclico que não admite medida ergódica com suporte total. Daremos a ideia da construção deste operador na subseção a seguir. O que faremos para mostrar que este operador não admite medida ergódica com suporte total é mostrar que $c(T)<1$ e usar o teorema anterior.

Teorema 5.11. *Existe um operador frequentemente hipercíclico em $c_0(\mathbb{Z})$ que não admite medida ergódica com suporte total.*

Demonstração. Em [17], é construído um operador frequentemente hipercíclico $T=B_\omega$ (*weighted shift*) em $c_0(\mathbb{Z})$ que goza da seguinte propriedade: Existe um conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ com densidade inferior positiva tal que, para todo $x \in c_0(\mathbb{Z})$, temos

$$||T^i(x)|| \geq |\langle e_0^*, x\rangle| \;\forall i \in A,$$

onde e_0^* é o funcional linear em $c_0(\mathbb{Z})$ que leva $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ em x_0.

Notemos que $c(T) \leq 1 - \underline{\mathrm{dens}}(A) < 1$. De fato, suponha o contrário. Temos que $c(T) > 0$, logo podemos aplicar a proposição 5.6 e obter um conjunto comagro de vetores $x \in c_0(\mathbb{Z})$ tal que $T^i(x) \to 0$ quando $i \to \infty$ em um conjunto $D_x \subseteq \mathbb{N}$ com $\overline{\mathrm{dens}}(D_x) \geq c(T) > 1 - \underline{\mathrm{dens}}(A)$. Para cada um destes vetores x, o conjunto $D_x \cap A$ tem densidade superior positiva (pois $\overline{\mathrm{dens}}(A \cap D_x) = \overline{\mathrm{dens}}(D_x) + \overline{\mathrm{dens}}(A) - \overline{\mathrm{dens}}(A \cup D_x) \geq \overline{\mathrm{dens}}(D_x) + \underline{\mathrm{dens}}(A) - 1 > 0$) e, em particular, $D_x \cap A$ é infinito. Como $||T^i(x)|| \geq |\langle e_0^*, x\rangle|\ \forall i \in A$, tomando o limite com $i \to \infty$ em D_x, obtemos que $\langle e_0^*, x\rangle = 0$. Isto contradiz o fato que que tais vetores x são densos em $c_0(\mathbb{Z})$.

Pelo teorema 5.10, T não pode admitir medida ergódica com suporte total. $\square$

Como última aplicação do parâmetro $c(T)$, vamos estudar operadores que admitem a seguinte classe de vetores:

Definição 5.12. Sejam X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador. Um vetor $x \in X$ é dito *distribuidor irregular* para T se existem conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{N}$ com densidade superior 1, $||T^i(x)|| \to 0$ quando $i \to \infty$ em A e $||T^i(x)|| \to \infty$ quando $i \to \infty$ em B.

Temos a seguinte proposição, provada em [17]. A ideia será usar uma das equivalências de T admitir um conjunto comagro de vetores $x \in X$ tal que $||T^i(x)|| \to \infty$ quando $i \to \infty$ em um conjunto $E_x \subseteq \mathbb{N}$ com densidade superior 1 dada pela Proposição 8 de [19].

Proposição 5.13. *Sejam X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador linear limitado frequentemente hipercíclico. Então existe um conjunto comagro de vetores $x \in X$ tal que $||T^i(x)|| \to \infty$ quando $i \to \infty$ em um conjunto $E_x \subseteq \mathbb{N}$ com densidade superior 1.*

Demonstração. Por um resultado de [19], é suficiente encontrar $\varepsilon > 0$, uma sequência (y_k) em X e uma sequência crescente (N_k) em $\mathbb{N}$ tal que $\lim y_k = 0$ e

$$\#\{1 \leq n \leq N_k : ||T^n(y_k)|| > \varepsilon\} \geq \varepsilon N_k.$$

Seja $x \in FHC(T)$ e $1 > \eta > 0$ tal que

$$\underline{\mathrm{dens}}(\{n : ||T^n(x)|| > 1\}) > \eta, \tag{3}$$

cuja existência é garantida por x ser vetor frequentemente hipercíclico. Tomando $\varepsilon = \eta/2$, vamos construir as sequências (y_k) e (N_k). Para cada $k \geq 1$, tome um $p_k \geq 1$ tal que $||T^{p_k}(x)|| < 1/k$ (novamente usando que x é vetor frequentemente hipercíclico). Considere $y_k = T^{p_k}(x)$. Tomando N_k grande o suficiente, por (3) conseguimos que seja satisfeita a seguinte condição:

$$\begin{aligned}\#\{1 \leq n \leq N_k : ||T^n(y_k)|| > 1\} &= \#\{1 + p_k \leq n \leq N_k + p_k : ||T^n(x)|| > 1\} \\ &\geq \frac{\eta N_k}{2}\end{aligned}$$

Como $\#\{1 \leq n \leq N_k : ||T^n(y_k)|| > \varepsilon\} \geq \#\{1 \leq n \leq N_k : ||T^n(y_k)|| > 1\}$, segue o que queríamos. □

A partir desta proposição e da proposição 5.6 conseguimos o seguinte:

Teorema 5.14. *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear e suponha que T admite uma medida ergódica com suporte total. Então T admite um conjunto comagro de vetores distribuidores irregulares.*

Demonstração. Como T admite medida ergódica com suporte total, segue de 5.9 que T é frequentemente hipercíclico e $c(T) = 1$. De 5.13 segue que existe um conjunto comagro G tal que, para todo $x \in G$, $||T^i(x)|| \to \infty$ quando $x \to \infty$ em um conjunto $E_x \subseteq \mathbb{N}$ com $\overline{\text{dens}}(E_x) = 1$.

Pela proposição 5.6, conseguimos um conjunto G' comagro tal que, para todo $x \in G'$, $||T^i(x)|| \to 0$ quando $x \to \infty$ em um conjunto $D_x \subseteq \mathbb{N}$ com $\overline{\text{dens}}(D_x) = 1$.

Assim, todo vetor x no conjunto comagro $G \cap G'$ é distribuidor irregular. □

5.3 Construção do Operador do Teorema 5.11

Vamos aqui mostrar a ideia da construção usada em [17] para construir um operador $T : c_0(\mathbb{Z}) \to c_0(\mathbb{Z})$ satisfazendo, para todo $x \in c_0(\mathbb{Z})$,

$$||T^i(x)|| \geq |\langle e_0^*, x\rangle| \; \forall i \in A,$$

onde A é um subconjunto de $\mathbb{N}$ com densidade superior positiva. Na verdade, o que é mostrado em [17] é que existe um operador que é frequentemente hipercíclico, mas não admite um vetor distribuidor irregular. A propriedade que queremos está na demonstração do teorema 5.19. As demonstrações dos teoremas e lemas desta subseção estão todas em [17].

O operador T que vamos construir será do tipo *weighted shift*. Comecemos com o seguinte critério para um operador deste tipo ser frequentemente hipercíclico em $c_0(\mathbb{Z})$.

Teorema 5.15. *Seja $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência limitada por cima e por baixo de números inteiros. Então B_ω é frequentemente hipercíclico se, e somente se, existe uma sequência $M(p)$ de números reais tendendo a ∞ e uma sequência (E_p) de subconjuntos de $\mathbb{Z}_+$ tais que:*

1. *para todo $p \geq 1$, $\underline{\text{dens}}(E_p) > 0$,*
2. *para quaisquer $p \neq q$, $(E_p + [-p, p]) \cap (E_q + [-q, q]) = \varnothing$,*
3. *$\omega_1, \cdots, \omega_n \to \infty$ quando $n \to \infty$ em E_p,*

4. para quaisquer $p, q \geq 1$, $n \in E_p$, $m \in E_q$ com $n \neq m$,

$$\omega_1 \cdots \omega_{m-n} \geq M(p)M(q) \text{ se } m > n$$
$$\omega_{m-n+1} \cdots \omega_0 \leq \frac{1}{M(p)M(q)} \text{ se } m < n.$$

Antes de definirmos os pesos do nosso operador *weighted shift*, precisaremos de alguns resultados auxiliares. Comecemos fixando a seguinte notação: para cada $a > 1$, $\varepsilon > 0$ e $u \in \mathbb{N}$, seja

$$I_u^{a,\varepsilon} = [(1-\varepsilon)a^u, (1+\varepsilon)a^u].$$

Lema 5.16. *Existem $a > 1$ e $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\overline{\text{dens}}\left(\bigcup_{u \geq 1} I_u^{a,4\varepsilon}\right) < 1$$

e, para todo $1 \leq v < u$, temos $I_u^{a,2\varepsilon} \cap I_v^{a,2\varepsilon} = \varnothing$ e $I_u^{a,2\varepsilon} - I_v^{a,2\varepsilon} \subseteq I_u^{a,4\varepsilon}$.

A partir de agora, fixemos $a > 1$ e $\varepsilon > 0$ satisfazendo as condições do lema anterior. Vamos considerar uma sequência crescente de inteiros positivos (b_p) tal que

$$\sum_{p \geq 1} \overline{\text{dens}}(b_p\mathbb{N} + [-2p, 2p]) + \overline{\text{dens}}\left(\bigcup_{u \geq 1} I_u^{a,4\varepsilon}\right) < 1.$$

Segue em particular que $b_p \geq 4p$ para todo $p \geq 1$, pois caso contrário o primeiro termo seria maior ou igual a 1.

Tomemos uma partição de $\mathbb{N}$ em conjuntos sindéticos, por exemplo $A_p = 2^{p-1}\mathbb{N} \setminus 2^p\mathbb{N}$. Defina

$$E_p = \bigcup_{u \in A_p} I_u^{a,4\varepsilon} \cap b_p\mathbb{N}.$$

Lema 5.17. $\overline{\text{dens}}(E_p) > 0$ *para todo $p \geq 1$.*

Excluindo uma quantidade finita de elementos de A_p, caso necessário, podemos assumir que para todo $u \in A_p$,

$$I_u^{a,\varepsilon} + [-2p, 2p] \subseteq I_u^{a,2\varepsilon}.$$

Como $I_u^{a,2\varepsilon} \cap I_v^{a,2\varepsilon}$, temos o seguinte:

Lema 5.18. *Sejam $p, q \geq 1$, $n \in E_p$, $m \in E_q$ com $n \neq m$. Então*

$$|n - m| > 2\max\{p, q\}.$$

Em particular, se $p \neq q$, temos que

$$(E_p + [-p, p]) \cap (E_q + [-q, q]) = \varnothing.$$

Com estes resultados, conseguimos definir os pesos. A ideia será definir um ω^p tal que $\omega^p m - n + 1 \cdots \omega_0^p$ é pequeno quando $m < n$, com $m, n \in E_p$, e um $\omega^{u,v}$, com $u > v$, tal que $\omega^{u,v} m - n + 1 \cdots \omega_0^{u,v}$ é pequeno quando $m \in I_v^{a,\varepsilon}$ e $n \in I_u^{a,\varepsilon}$. Fora disso, eles serão grandes o suficiente para que B_ω não admita vetor distribuidor irregular.

Comecemos construindo o ω^p, $p \geq 1$. Consideramos uma sequência $\omega^p = (\omega_k^p)$ de números positivos tal que:

- $\omega_{-k+1}^p \cdots \omega_0^p = \begin{cases} 1 & \text{se } k \notin (b_p\mathbb{N} + [-p, p]) \\ \frac{1}{2^p} & \text{se } k \in (b_p\mathbb{N} + [-p, p]), \end{cases}$
- $1/2 \leq \omega_k^p \leq 2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$,
- $\omega_k^p = 2$ se $k \geq 1$.

Agora vamos definir $\omega^{u,v}$ para $u > v$. Sejam $p, q \geq 1$ tal que $u \in A_p$ e $v \in A_q$. Vamos considerar $\omega^{u,v} = (\omega_k^{u,v})$ tal que:

- $\omega_{-k+1}^{u,v} \cdots \omega_0^{u,v} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \notin I_u^{a,4\varepsilon} \\ \min\{\frac{1}{2^{2p}}, \frac{1}{2^{2q}}\} & \text{se } k \in I_u^{a,\varepsilon} - I_v^{a,\varepsilon}, \end{cases}$
- $1/2 \leq \omega_k^{u,v} \leq 2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$,
- $\omega_k^{u,v} = 2$ se $k \geq 1$.

É possível definir tal sequência, pois

$$I_u^{a,\varepsilon} - I_v^{a,\varepsilon} + [-2\max\{p, q\}, 2\max\{p, q\}] \subseteq I_u^{a,2\varepsilon} - I_v^{a,2\varepsilon} \subseteq I_u^{a,4\varepsilon}.$$

Com estas duas construções estamos prontos para definir nosso ω. Vamos definir ω_{-n}, $n > 0$, indutivamente pela relação

$$\omega_{-n+1} \cdots \omega_0 = \min_{p,u,v}\{\omega_{-n+1}^p \cdots \omega_0^p, \omega_{-n+1}^{u,v} \cdots \omega_0^{u,v}\}$$

e $\omega_k = 2$ para $k \geq 1$.

Notemos que ω está bem definido. Com efeito, fixado $n \geq 1$, se p e u são grandes o suficiente, temos que

$$\omega_{-n+1}^p \cdots \omega_0^p = 1$$
$$\omega_{-n+1}^{u,v} \cdots \omega_0^{u,v} = 1.$$

Além disso, $1/2 \leq \omega_k \leq 2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, logo B_ω é limitada e invertível em $c_0(\mathbb{Z})$.

Teorema 5.19. *B_ω não admite vetor distribuidor irregular e é frequentemente hipercíclico.*

Demonstração. Para ver que não admite vetor distribuidor irregular, vejamos que $\omega_{-n+1} \cdots \omega_0$ não é pequeno com muita frequência. Seja

$$A = \mathbb{N} \setminus \left(\bigcup_{p \geq 1} (b_p\mathbb{N} + [-2p, 2p]) \cup \bigcup_u I_u^{a,4\varepsilon} \right).$$

Pela maneira que tomamos a, ε e (b_p), seque que A tem densidade inferior positiva. Por construção, se $n \in A$ temos que $\omega_{-n+1} \cdots \omega_0 = 1$. Seja $x \in c_0(\mathbb{N})$, $x \neq 0$ e seja k tal que $x_k \neq 0$. Se $n - k \in A$, temos que

$$||B_\omega^{n-k}(x)||_\infty \geq |x_k| > 0,$$

e assim x não pode ser vetor distribuidor irregular para B_ω.

Para ver que B_ω é frequentemente hipercíclico, usamos o teorema 5.15. Falta apenas verificarmos o item 4). Sejam $m \in E_p$ e $n \in E_q$ com $m < n$. Se $p = q$, temos que $m - n \in b_p\mathbb{N}$, logo

$$\omega_{m-n+1} \cdots \omega_0 \leq \frac{1}{2^{2p}}.$$

Se $p \neq q$, existem u, v, com $u > v$, tal que $n \in_u^{a,\varepsilon}$ e $m \in_v^{a,\varepsilon}$. Assim,

$$\omega_{m-n+1} \cdots \omega_0 \leq \min \left\{ \frac{1}{2^{2p}}, \frac{1}{2^{2q}} \right\} \leq \frac{1}{2^{p+q}}$$

e basta tomarmos $M(p) = 2^p$. Se $m > n$, pelo fato de $m - n > p + q$, segue que

$$\omega_1 \cdots \omega_{m-n} \geq 2^{p+q} = M(p)M(q).$$

□

6 Medidas Invariantes que se Anulam em $\mathrm{Per}(T)$

No teorema 4.1 vimos que um operador $T : X \to X$ frequentemente hipercíclico, com algumas hipóteses sobre o espaço X, admite medida invariante com suporte total. Nesta seção, vamos ver algumas hipóteses para que T admita uma medida invariante com suporte total *contínua* e, mais ainda, para que *o conjunto dos pontos periódicos de T tenha medida nula.* Nosso objetivo será provar o seguinte:

Teorema 6.1. *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então todo operador frequentemente hipercíclico T em X admite uma medida de probabilidade invariante contínua m com suporte total. Podemos também pedir que m satisfaça $m(Per(T)) = 0$.*

A primeira parte segue do 4.1: Seja X um espaço de Banach separável reflexivo. Usando a notação deste teorema, tomamos τ_X como sendo a topologia da norma e τ a topologia fraca de X.

Por X ser reflexivo, as bolas fechadas são τ-compactas e, portanto, cada ponto de X tem base de vizinhanças na topologia τ_X de conjuntos τ-compactos. Se $T : X \to X$ é um operador linear limitado, T é contínuo com respeito à topologia fraca e vale a segunda hipótese do teorema 4.1.

Pela proposição 4.11 também conseguimos uma medida como acima que é contínua: tomamos $F_0 = \{0\}$ e para cada $N \geq 1$, o conjunto

$$A_N = \{x \in X : x \neq 0, T^N(x) = x\}$$

é vazio ou aberto não vazio do subespaço linear fechado $B_N = \{x \in X : T^N(x) = x\}$. De fato, dado $x \in A_N$, temos que $x \neq 0$ e então existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \cap B_N \subseteq A_N$.

Ou seja, mostramos que se X é um espaço de Banach reflexivo, T admite medida invariante contínua com suporte total. Mais ainda, temos a seguinte, que vale para o caso particular em que X é um espaço de Banach reflexivo e T é frequentemente hipercíclico:

Proposição 6.2. *Seja $T \in \mathfrak{L}(X)$, onde X é um espaço vetorial topológico polonês. Se T admite uma medida invariante com suporte total, então as medidas de probabilidade T-invariantes contínuas com suporte total formam um conjunto G_δ-denso em $\mathcal{P}_T(X)$.*

Denotaremos o conjunto das probabilidades contínuas em X por $\mathcal{P}^c(X)$. Para provar esta proposição usaremos os seguintes fatos:

Fato 6.3. Se X é polonês, então $\mathcal{P}^c(X)$ é G_δ em $\mathcal{P}(X)$.

Demonstração. Pelo teorema 2.5, conseguimos uma compactificação $\widehat{X}$ de X. Para cada $\mu \in \mathcal{P}(X)$ consideremos a medida $\widehat{\mu} \in \mathcal{P}(\widehat{X})$ definida por

$$\widehat{\mu}(A) := \mu(A \cap X) \; \forall A \in \widehat{X} \text{ Borel.}$$

Além disso, note que a função que leva $\mu \in \mathcal{P}(X)$ em $\widehat{\mu} \in \mathcal{P}(\widehat{X})$ é contínua. De fato, seja $\mu_n \to \mu$ e $U \subseteq \widehat{X}$ aberto. Temos que $U \cap X$ é aberto é aberto em X. Usando o teorema 2.16, temos que

$$\begin{aligned} &\liminf \mu_n(U \cap X) \geq \mu(U \cap X) \\ \Longrightarrow &\liminf \widehat{\mu_n}(U \cap X) \geq \widehat{\mu}(U \cap X) \end{aligned}$$

e segue que $\widehat{\mu_n} \to \widehat{\mu}$, logo $\mu \mapsto \widehat{\mu}$ é contínua.

Temos também que uma medida $\mu \in \mathcal{P}(X)$ é contínua se, e somente se, $\widehat{\mu} \in \mathcal{P}(\widehat{X})$ é contínua. Com efeito, suponha μ contínua e seja $a \in \widehat{X}$. Segue que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(\{a\}) = \mu(\{a\} \cap X) &= \begin{cases}\mu(\{a\}) & a \in X \\ \mu(\varnothing) & a \in \widehat{X} \setminus X\end{cases} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $\widehat{\mu}$ é contínua e $a \in X$, $\mu(\{a\}) = \mu(\{a\} \cap X) = \widehat{\mu}(\{a\}) = 0$.

Com isso, basta mostrarmos que $\mathcal{P}^c(\widehat{X})$ é G_δ em $\mathcal{P}(X)$, i.e., podemos assumir que X é compacto. Isto porque se $\mathcal{P}^c(\widehat{X})$ é escrito como interseção enumerável de abertos em $\mathcal{P}(\widehat{X})$, $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, segue que $\mathcal{P}^c(X) = f^{-1}(\cap A_i) = \cap f^{-1}(A_i)$, onde $f : \mu \in \mathcal{P}(X) \mapsto \widehat{\mu} \in \mathcal{P}(\widehat{X})$, pelo que acabamos de observar.

Fixada uma métrica em X, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos uma cobertura de X por conjuntos com diâmetro menor que $1/2^n$. Conseguimos então uma subcobertura finita $(V_{n,i})_{i\in I_n}$.

Afirmação. Seja $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Temos que $\mu \in \mathcal{P}^c(X) \iff$ para todo $k \in \mathbb{N}$ existir n tal que $\forall i \in I_n$, $\mu(\overline{V_{n,i}}) < 1/k$.

Suponha que primeiro que $\mu \in \mathcal{P}^c(X)$, ou seja, $\mu(\{a\}) = 0$ para todo $a \in X$. Vamos supor por absurdo que exista um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe um $i \in I_n$ com $\mu(\overline{V_{n,i}}) \geq 1/k$. Fixado este k, considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \overline{V_{n,i}}$ com $\mu(\overline{V_{n,i}}) \geq 1/k$. Por X ser compacto, a sequência (a_n) possui subsequência convergente $a_{n_j} \to a$. Como $\mu(\overline{V_{n_j,i}}) \geq 1/k$ e o diâmetro de $\overline{V_{n_j,i}}$ ser menor que $1/2^{n_j} \to 0$, tomando o limite teremos que $\mu(\{a\}) \geq 1/k$, absurdo, pois μ é contínua.

Suponha agora que para todo $k \in \mathbb{N}$ exista n tal que $\forall i \in I_n$, $\mu(\overline{V_{n,i}}) < 1/k$. Seja $a \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, tome $k \geq 1/\varepsilon$. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \in I_n$ $\mu(\overline{V_{n,i}}) < 1/k$. Se $a \in V_{n,i}$, temos $\mu(\overline{V_{n,i}}) < \varepsilon$ e, portanto, $\mu(\{a\}) < \varepsilon$. Como vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $\mu(\{a\}) = 0$, o que demonstra a afirmação.

Consideramos então, para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$A_k = \left\{\mu \in \mathcal{P}(X) : \exists n\ \forall\ i \in I_n\ \mu(\overline{V_{n,i}}) < \frac{1}{k}\right\}.$$

Temos que A_k é aberto pelo teorema de Portmanteau, logo $\mathcal{P}^c(X) = \bigcap_k A_k$ é G_δ. □

Suponhamos agora que T admite medida invariante com suporte total. Denotaremos por $\mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ o conjunto das medidas de probabilidade invariantes e contínuas com suporte total. Pelo 6.3 e por $\mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ ser G_δ em $\mathcal{P}_T(X)$ (pelo lema 4.8), segue que $\mathcal{P}^c_{T,*}(X) = \mathcal{P}_{T,*}(X) \cap \mathcal{P}^c_T(X)$ é G_δ em $\mathcal{P}_T(X)$. Basta então provarmos que $\mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ é denso em $\mathcal{P}_T(X)$.

Notemos também que $\mathcal{P}^c_{T,*}(X) \neq \varnothing$ pela proposição 4.11. Mostremos agora o seguinte:

Fato 6.4. A delta de Dirac δ_0 está no fecho de $\mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ em $\mathcal{P}_T(X)$.

Demonstração. Comecemos com a seguinte:

Afirmação. Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e toda vizinhança W de 0 em X, existe $\nu \in \mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ tal que $\nu(W) > 1 - \varepsilon$.

De fato, seja m uma medida de probabilidade contínua T-invariante com suporte total. Para cada $\alpha > 0$, consideremos a medida dilatada m^α dada por:

$$m^\alpha(A) := m\left(\frac{1}{\alpha} \cdot A\right) \ \forall A \subseteq X \text{ Borel},$$

que ainda é uma medida de probabilidade contínua, T-invariante (pois T é linear) e com suporte total. Seja agora $K \subseteq X$ compacto tal que $m(K) > 1 - \varepsilon$. Tome $\alpha > 0$ de modo que

$$K \subseteq \frac{1}{\alpha} \cdot W.$$

Assim, $m^\alpha(W) > 1 - \varepsilon$ e, portanto, $\nu = m^\alpha$ satisfaz o que queremos na afirmação.

Sejam $(W_k)_{k\geq 1}$ uma base enumerável decrescente de abertos de 0 em X e $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ uma sequência de números positivos com $\varepsilon_k \to 0$. Para cada k aplicamos a afirmação para obter uma $\nu_k \in \mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ de tal forma que

$$\nu_k(W_k) > 1 - \varepsilon_k.$$

Mostremos que a sequência (ν_k) converge para δ_0. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e limitada. Então,

$$\int_X f d\nu_k = \int_{W_k} f d\nu_k + \int_{X\setminus W_k} f d\nu_k$$

onde o segundo termo do lado esquerdo vai a zero, pois se $|f(x)| \leq M$, temos que $\int_{X\setminus W_k} f d\nu_k \leq M\nu_k(X \setminus W_k) = M(1 - \nu_k(W_k)) \leq M\varepsilon_k \to 0$.

Para o primeiro termo, temos

$$\frac{1}{\nu_k(W_k)} \int_{W_k} f d\nu_k - f(0) = \frac{1}{\nu_k(W_k)} \int_{W_k} (f - f(0))d\nu_k \to 0,$$

pois dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, tome k grande o suficiente de tal que $|f(x) - f(0)| < \tilde{\varepsilon} \ \ \forall x \in W_k \supseteq W_{k+1} \supseteq \cdots$. Disso, temos

$$\left|\frac{1}{\nu_k(W_k)} \int_{W_k} (f - f(0))d\nu_k\right| \leq \frac{1}{\nu_k(W_k)} \int_{W_k} |f - f(0)|d\nu_k \leq \tilde{\varepsilon}.$$

E, portanto,

$$\frac{1}{\nu_k(W_k)} \int_{W_k} (f - f(0))d\nu_k \to 0.$$

Como $\nu_k(W_k) \to 1$, temos que

$$\int_X f d\nu_k \to f(0) = \int_X f d\delta_0$$

para toda $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e limitada. Com isso, obtemos que $\nu_k \to \delta_0$, o que conclui a demonstração do fato. $\square$

Demonstração da proposição 6.2. A ideia será usar um argumento de convolução. Fixemos $m \in \mathcal{P}_T(X)$. Queremos mostrar que m está no fecho de $\mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ em $\mathcal{P}(X)$ (i.e. que $\mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ é denso em $\mathcal{P}_T(X)$).

Para isto, vamos mostrar que existe uma sequência $(\mu_k)_{k\geq 1}$ em $\mathcal{P}^c_{T,*}(X)$ tal que $\mu_k \to m$. Pelo fato 6.4, existe uma sequência $(\nu_k)_{k\geq 1}$ tal que $\nu_k \to \delta_0$. Defina

$$\mu_k = \nu_k * m$$

a convolução entre ν_k e m. Por definição, temos que, para toda função $f : X \to \mathbb{R}$ Borel limitada,

$$\int_X f d\mu_k = \int_{X\times X} f(x+y) d\nu_k(x) dm(y).$$

Mostremos agora que $\nu_k \to m$ em $\mathcal{P}(X)$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e limitada. Definimos $f * m$ por

$$(f * m)(x) = \int_X f(x+y) dm(y)$$

e assim $f * m$ é contínua e limitada. Pelo teorema de Fubini e usando que $\nu_k \to \delta_0$, temos

$$\int_X f d\mu_k = \int_X (f * m) d\nu_k \to (f * m)(0) = \int_X f dm.$$

Como vale para toda f, segue que $\mu_k \to m$.

Resta mostrarmos que $\mu_k \in \mathcal{P}^c_{T,*}(X)$.

Para ver que μ_k é T-invariante, seja $f : X \to \mathbb{R}$ Borel e limitada. Temos que, por Fubini e por T ser m-invariante e ν_k-invariante,

$$\begin{aligned}
\int_X (f \circ T) d\mu_k &= \int_{X\times X} (f\circ T)(x+y) d\nu_k(x) dm(y) \\
&= \int_{X\times X} f(T(x) + T(y)) d\nu_k(x) dm(y) \\
&= \int_{X\times X} f(T(x) + y) d\nu_k(x) dm(y) \\
&= \int_{X\times X} f(x+y) d\nu_k(x) dm(y) \\
&= \int_X f d\mu_k
\end{aligned}$$

Além disso, μ_k tem suporte total. De fato, seja $U \subseteq X$ aberto não vazio. Então $\nu_k(U - y) > 0$ para todo $y \in X$, pois ν_k tem suporte total. Logo,

$$\mu_k(U) = \int_{X\times X} \mathbf{1}_U(x+y)d\nu_k(x)dm(y) = \int_X \nu_k(U-y)dm(y) > 0.$$

Mostremos agora que μ_k é contínua: seja $a \in X$. Temos que

$$\mu_k(\{a\}) = \int_{X\times X} \mathbf{1}_{\{a\}}d\nu_k(x)dm(y) = \int_X \nu_k(\{a-y\})dm(y) = 0,$$

o que conclui a demonstração. □

Denotemos por $\mathcal{P}_{T,*}(A)$ a família das probabilidades m T-invariantes com suporte total tal que $m(A) = 1$, ou seja, $\mathcal{P}_{T,*}(A) = \mathcal{P}_{T,*}(X) \cap \mathcal{P}(A)$ para todo $A \subseteq X$ Borel.

A parte final do teorema 6.1 seguirá da seguinte proposição:

Proposição 6.5. *Se T é um operador linear contínuo em um espaço vetorial topológico polonês X tal que $\mathcal{P}_{T,*}(X) \neq \varnothing$ e $T^N \neq Id$ para todo $N \geq 1$, então $\mathcal{P}_{T,*}(X \setminus Per(T))$ é G_δ denso em $\mathcal{P}_T(X)$.*

Vamos usar as seguintes notações:

- $\ker^*(T) = \cup_{k\geq 1} \ker(T^k)$ é chamado o núcleo generalizado do operador T.
- $A \subseteq X$ é dito invariante por dilatação se $r \cdot A = A$ para todo $r > 0$.

O seguinte lema técnico (mais precisamente seu corolário) será usado para demonstrar a proposição 6.5 (e, portanto, o teorema 6.1).

Lema 6.6. *Seja T um operador linear contínuo em X tal que $\mathcal{P}_{T,*}(X) \neq \varnothing$ e seja $F \subseteq X$ fechado tal que*

1. *$F - F$ é invariante por dilatação e denso em lugar nenhum,*
2. *$T(F \setminus \ker^*(T)) \subseteq F$,*
3. *$T(\overline{F - F} \setminus ker^*(T)) \subseteq \overline{F - F}$.*

Então $\mathcal{P}_{T,*}(X \setminus F)$ é G_δ denso em $\mathcal{P}_T(X)$.

Corolário 6.7. *Se $\mathcal{P}_{T,*}(X) \neq \varnothing$ e $F \subseteq X$ é um subespaço linear próprio fechado tal que $T(F) \subseteq F$, então $\mathcal{P}_{T,*}(X \setminus F)$ é G_δ denso em $\mathcal{P}_T(X)$.*

Este corolário sai direto do lema, pois como F é subespaço linear próprio, F é denso em lugar nenhum. Mais ainda, por F ser linear $F - F = F$ e assim, por $T(F \setminus \ker^*(T)) \subseteq T(F) \subseteq F$, estamos nas hipóteses do lema.

Demonstração da Proposição 6.5 e do Teorema 6.1. Seja T tal que $\mathcal{P}_{T,*}(X) \neq \varnothing$ e $T^N \neq Id$ para todo $N \geq 1$. Escrevemos

$$\mathrm{Per}(T) = \bigcup_{N \geq 1} F_N$$

onde $F_N = \ker(T^N - I)$. Cada F_N é um subespaço linear (é núcleo de uma transformação), fechado ($F_N = (T^N - I)^{-1}(\{0\})$) e próprio ($T^N \neq Id$). Aplicando o corolário anterior para F_N, temos que $\mathcal{P}_{T,*}(X \setminus F_N)$ é G_δ denso em $\mathcal{P}_T(X)$ para todo $N \geq 1$.

Pelo teorema de Categoria de Baire,

$$\bigcap_{N \geq 1} \mathcal{P}_{T,*}(X \setminus F_N) \neq \varnothing.$$

Portanto existe $m \in \mathcal{P}_T(X)$ tal que $m(\mathrm{Per}(T)) = 0$. $\square$

Para demonstrar o lema 6.6, comecemos com alguns fatos:

Fato 6.8. Se O é um subconjunto aberto de um espaço polonês X, então $\mathcal{P}_T(O)$ é G_δ em $\mathcal{P}_T(X)$.

Demonstração. Seja $m \in \mathcal{P}(X)$. m tem suporte em O se, e somente se, $m(O) > 1 - 2^{-k}$ para todo $k \geq 1$. Aplicando um argumento análogo ao feito na demonstração do lema 4.8, temos que, por O ser aberto, $m \mapsto m(O)$ é semi-contínua inferiormente em $\mathcal{P}(X)$. Assim, $\mathcal{P}(O)$ é G_δ em $\mathcal{P}(X)$ e portanto $\mathcal{P}_T(O)$ é G_δ em $\mathcal{P}_T(X)$. $\square$

Fato 6.9. Sejam (X, T) um sistema dinâmico polonês e $m \in \mathcal{P}_T(X)$. Se $E \subseteq X$ é Borel tal que $T(E) \subseteq E$ ou $T^{-1}(E) \subseteq E$, então $\mathbf{1}_E m$ é T-invariante.

Demonstração. Seja $\mu = \mathbf{1}_E m$ e assuma que $T(E) \subseteq E \implies E \subseteq T^{-1}(E)$. Para todo Borel $A \subseteq X$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}(A)) &= \mathbf{1}_E m(T^{-1}(A)) \\
&\leq \mathbf{1}_{T^{-1}(E)} m(T^{-1}(A)) \\
&= (m \circ T^{-1})(E \cap A) \\
&= m(E \cap A) = \mathbf{1}_E m(A) = \mu(A)
\end{aligned}$$

pois, por definição, $\mathbf{1}_E m(A) = \int_A \mathbf{1}_E dm = m(E \cap A)$ e também $\mathbf{1}_{T^{-1}(E)} m(T^{-1}(A)) = \int_{T^{-1}(A)} \mathbf{1}_{T^{-1}(E)} dm = m(T^{-1}(E) \cap T^{-1}(A))$.

Portanto, $\mu(T^{-1}(A)) \leq \mu(A)$. Aplicando para $X \setminus A$, obtemos que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo A Borel e, portanto, μ é T-invariante.

O caso em que $T^{-1}(E) \subseteq E$ nos dá $\mu(T^{-1}(A)) \geq \mu(A)$ e é completamente análogo. $\square$

Fato 6.10. Seja T um operador linear contínuo em X tal que $\mathcal{P}_{T,*}(X) \neq \varnothing$. Se $O \subseteq X$ é aberto não vazio tal que $T^{-1}(O) \setminus \ker^*(T) \subseteq O$, então $\mathcal{P}_T(X) \neq \varnothing$.

Demonstração. Pelo que observamos no começo desta seção, T admite uma medida invariante com suporte total m que é contínua. Assim, temos que $m(O) > 0$. Multiplicando m por uma constante, podemos assumir que $m(O) = 1$.

Defina $\mu := \mathbf{1}_O m$. Como m é contínua e invariante, temos que, para todo $k \geq 1$, $m(T^{-k}(\{0\})) = m(\{0\}) = 0$. Com isso, $m(\ker^*(T)) = m(\bigcup_{k\geq 1} T^{-k}(\{0\})) = 0$. Assim, $\mu = \mathbf{1}_{O\setminus\ker^*(T)} m$.

Temos também que $T^{-1}(\ker^*(T)) = \ker^*(T)$, visto que se $x \in \ker^*(T)$, existe k tal que $T^k(x) = 0 \implies T^{k+1}(x) = 0 \implies T^k(x) \in \ker(T) \subseteq \ker^*(T)$. Por outro lado, se $x \in T^{-1}(\ker^*(T))$, existe k tal que $T^k(T(x)) = 0 \implies T^{k+1}(x) = 0 \implies x \in \ker(T^{k+1}) \subseteq \ker^*(T)$.

Desta maneira, $T^{-1}(O\setminus\ker^*(T)) = T^{-1}(O)\setminus\ker^*(T) \subseteq O\setminus\ker^*(T)$. Pelo fato anterior, μ é T-invariante e, portanto, $\mu \in \mathcal{P}_T(O)$. □

Demonstração do Lema 6.6. Pelo fato 6.8 e pelo lema 4.8, $\mathcal{P}_{T,*}(X \setminus F) = \mathcal{P}_T(X \setminus F) \cap \mathcal{P}_{T,*}(X)$ é G_δ em $\mathcal{P}(X)$.

Vamos então mostrar que se F satisfaz nossas hipóteses, $\mathcal{P}_{T,*}(X\setminus F)$ é denso em $\mathcal{P}_T(X)$. Ainda pelo lema 4.8, como $\mathcal{P}_{T,*}(X)$ é G_δ denso em $\mathcal{P}_T(X)$, então basta mostrarmos que $\mathcal{P}_{T,*}(X \setminus F)$ é denso em $\mathcal{P}_T(X)$.

A ideia geral da demonstração é análoga à da proposição 6.2.

Fato 6.11. δ_0 está no fecho de $\mathcal{P}_T(X \setminus \overline{F-F})$ em $\mathcal{P}_T(X)$.

Demonstração. Assim como no fato 6.4, este resultado segue da seguinte:

Afirmação. Para todo $\varepsilon \in (0,1)$ e toda vizinhança W de 0 em X, existe $\nu \in \mathcal{P}_T(X \setminus \overline{F-F})$ tal que $\nu(W) > 1-\varepsilon$.

De fato, seja $O := X \setminus \overline{F-F}$. O é aberto e denso, visto que $F-F$ é denso em lugar nenhum. Como $T(\overline{F-F} \setminus \ker^*(T)) \subseteq \overline{F-F}$, temos que $T^{-1}(O) \setminus \ker^*(T) \subseteq O$. Com efeito, seja $x \in T^{-1} \setminus \ker^*(T)$. Assim, $T(x) \in O$ e $x \in X \setminus \ker^*(T)$. Suponha que $x \in \overline{F-F}$. Como $x \in \overline{F-F} \setminus \ker^*(T)$ e $T(\overline{F-F} \setminus \ker^*(T)) \subseteq \overline{F-F}$, deveríamos ter que $T(x) \in \overline{F-F}$, o que gera um absurdo.

O também é invariante por dilatação, pois $\overline{F-F}$ o é: se $x \in O$, $r \cdot x \in O$ (caso contrário, teríamos que $x = r^{-1} \cdot (r \cdot x) \in \overline{F-F}$, absurdo). Pelo fato 6.10, existe uma probabilidade μ que é T-invariante e tal que $\mu(O) = 1$. Para todo $\alpha > 0$, a μ^α que definimos no fato 6.4 é T-invariante (T é linear) e satisfaz $\mu^\alpha(O) = 1$ (O é invariante por dilatação).

Aplicando então o mesmo argumento do fato 6.4, segue que, para α suficientemente pequeno, $\nu := \mu^\alpha$ satisfaz o que queremos, o que conclui a demonstração da afirmação e do fato. $\square$

Para concluir a demonstração, vamos aplicar um argumento de convolução assim como na demonstração da proposição 6.2. Por esta, basta mostrarmos que toda medida T-invariante contínua pertence ao fecho de $\mathcal{P}_T(X \setminus F)$ em $\mathcal{P}(X)$.

Fixemos uma medida contínua $m \in \mathcal{P}_T(X)$. Precisamos encontrar uma sequência (μ_k) em $\mathcal{P}_T(X \setminus F)$ tal que $\mu_k \to m$.

Note que, como $T(F \setminus \ker^*(T)) \subseteq F$ e $T^{-1}(\ker^*(T)) = \ker^*(T)$, temos

- $T(F \setminus \ker^*(T)) \subseteq F \setminus \ker^*(T)$,
- $T^{-1}((X \setminus F) \setminus \ker^*(T)) \subseteq (X \setminus F) \setminus \ker^*(T)$.

De fato, seja $y \in T(F \setminus \ker^*(T))$ e suponha que $y \in \ker^*(T)$. Temos que existe $x \in F \setminus \ker^*(T)$ tal que $T(x) = y$. Como $T^{-1}(\ker^*(T)) = \ker^*(T)$, $x \in T^{-1}(\ker^*(T)) = \ker^*(T)$, o que gera um absurdo. Logo, $T(F \setminus \ker^*(T)) \subseteq F \setminus \ker^*(T)$. O segundo caso é completamente análogo.

Novamente, por m ser contínua e T-invariante, temos $m(\ker^*(T)) = 0$.

Pelo fato 6.9, podemos escrever m como uma combinação convexa de medidas $m_1, m_2 \in \mathcal{P}_T(X)$ com $m_1(F) = 0 = m_2(X \setminus F)$:

$$
\begin{aligned}
m_1 &:= \frac{1}{m((X \setminus F) \setminus \ker^*(T))} \mathbf{1}_{(X \setminus F) \setminus \ker^*(T))} m \\
m_2 &:= \frac{1}{m(F \setminus \ker^*(T))} \mathbf{1}_{(F \setminus \ker^*(T))} m
\end{aligned}
$$

caso os denominadores não se anulem. Se se anularem, tome $m_1 = m$ caso $m(F) = 0$ ou $m_2 = m$ caso $m(X \setminus F) = 0$.

Como $\mathcal{P}_T(X \setminus F)$ é um subconjunto convexo de $\mathcal{P}(X)$ e $m_1 \in \mathcal{P}_T(X \setminus F)$, basta aproximarmos m_2 por elementos de $\mathcal{P}_T(X \setminus F)$. Ou seja, poderíamos ter suposto $m(X \setminus F) = 0$.

Pelo fato 6.11, existe uma sequência $(\nu_k)_{k \geq 1}$ de elementos em $\mathcal{P}_T(X \setminus \overline{F - F})$ tal que $\nu_k \to \delta_0$.

Assim como na proposição 6.2 tomamos $\mu_k := \nu_k * m$. Novamente temos que $\mu_k \to m$ em $\mathcal{P}(X)$, pois $\nu_k \to \delta_0$ e as ν_k são T-invariantes por m e ν_k serem e T ser linear.

Resta só mostrarmos que $\mu_k(F) = 0$. Como $m(X \setminus F) = 0$,

$$
\mu_k(F) = \int_X \nu_k(F - y) dm(y) = \int_F \nu_k(F - y) dm(y).
$$

Pelo suporte de ν_k estar em $X \setminus \overline{F-F}$, $\nu_k(F-y) = 0$ para todo $y \in F$ e, portanto, $\mu_k(F) = 0$. $\square$

7 Medidas Invariantes com Suporte em $HC(T)$

Nesta seção vamos estudar alguns casos onde um operador $T : X \to X$ possui medida ergódica com suporte total.

Um argumento que usaremos bastante é o seguinte: se $T : X \to X$ possui uma medida invariante m tal que $m(HC(T)) > 0$, então T admite uma medida *ergódica* μ com suporte total tal que $\mu(HC(T)) > 0$. Este fato segue diretamente do teorema da decomposição ergódica. Com efeito, aplicando este teorema à medida m, conseguimos m_p uma medida ergódica tal que $m_p(HC(T)) > 0$, pois

$$m(HC(T)) = \int m_p(HC(T)) d\widehat{m}(P) > 0,$$

onde as m_p são ergódicas. Fixada então esta m_p satisfazendo $m_p(HC(T)) > 0$, denotemos $\mu := m_p$. Para ver que μ tem suporte total, seja $U \subseteq X$ um aberto não vazio. Pelo teorema de transitividade de Birkhoff temos que $HC(T) \subseteq \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(U)$ (basta supor s.p.g. que U está na base) e, assim, se $\mu(U) = 0$ teríamos que $\mu(\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(U)) = 0$ por ser invariante, o que implicaria $\mu(HC(T)) = 0$, absurdo.

7.1 Famílias de Medidas Adequadas

Vamos agora introduzir duas famílias de probabilidades que nos darão probabilidades ergódicas com suporte total para T.

A primeira delas, que denotaremos por $\mathcal{F}_T(X)$, é a envoltória convexa das medidas periódicas de T. Notemos que pelo lema 4.9 este conjunto é exatamente o das medidas com suporte finito. Vamos denotar o fecho de $\mathcal{F}_T(X)$ em $\mathcal{P}_T(X)$ por $\overline{\mathcal{F}}_T(X)$ e, para todo $A \subseteq X$ Borel, $\overline{\mathcal{F}}_T(A) = \overline{\mathcal{F}}_T(X) \cap \mathcal{P}(A)$.

A segunda família de probabilidades que vamos estudar é a das *medidas de Steinhaus*, que denotaremos por $\mathcal{S}_T(X)$:

Definição 7.1. Seja $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Diremos que $\mu \in \mathcal{P}(X)$ é uma medida Steinhaus se é o *pushforward* de $\mathbb{P}$ por uma

$$\begin{aligned} \Phi : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) &\to X \\ \omega &\mapsto \sum_{j\in J} \chi_j(\omega) \cdot x_j \end{aligned}$$

mensurável tal que:

- x_j são autovetores unimodulares de T (ou seja, seus autovalores associados têm módulo 1),
- $(\chi_j)_{j\in J}$ é uma sequência finita de variáveis independentes com

$$\begin{aligned}\chi_j : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}) &\to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}\\ \omega &\mapsto \chi_j(\omega)\end{aligned}$$

mensuráveis e tal que ${\chi_j}_*\mathbb{P} = \lambda$, onde λ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{T}$.

Observação. Na linguagem da teoria da probabilidade μ é dita medida de Steinhaus se é a distribuição de uma variável aleatória Φ da forma

$$\Phi(\omega) = \sum_{j\in J} \chi_j(\omega) \cdot x_j$$

onde os x_j são autovetores unimodulares e as χ_j são uma sequência finita de variáveis independentes uniformemente distribuídas em $\mathbb{T}$.

Analogamente, vamos denotar o fecho de $\mathcal{S}_T(X)$ em $\mathcal{P}_T(X)$ por $\overline{\mathcal{S}}_T(X)$ e, para todo $A \subseteq X$ Borel, $\overline{\mathcal{S}}_T(A) = \overline{\mathcal{S}}_T(X) \cap \mathcal{P}(A)$.

Definição 7.2. Diremos que T possui um *conjunto perfeitamente gerado de autovetores unimodulares* se, para todo $D \subseteq \mathbb{T}$ enumerável, tivermos

$$\overline{\operatorname{span}}[\ker(T - \lambda I) : \lambda \in \mathbb{T} \setminus D] = X.$$

Exemplo 7.3. Seja $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $|\omega| > 1$ e considere o B_ω *weighted shift* em $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ dado por $B_\omega(e_n) = \omega e_{n-1}$ e $B_\omega(e_0) = 0$. Vamos mostrar que B_ω possui um conjunto perfeitamente gerado de autovetores unimodulares.

Temos que λ é autovalor de B_ω se, e somente se, $|\lambda| < |\omega|$. De fato, se λ é autovalor de B_ω, seja $v = (v_0, v_1, \ldots)$ o autovetor associado. Assim,

$$\begin{aligned}\omega v_1 &= \lambda v_0\\ \omega v_2 &= \lambda v_1\\ &\vdots\end{aligned}$$

Como $v \neq 0$, podemos supor s.p.g. $v_0 = 1$. Temos então $v_n = \lambda^n/\omega^n$. Para v estar em $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, devemos ter que $|\lambda| < |\omega|$.

Por outro lado, se $|\lambda| < |\omega|$, basta tomarmos o vetor com coordenadas $v_n = \lambda^n/\omega^n$ que será o autovetor associado ao autovalor λ.

Além disso, note que neste caso temos que $\ker(B_\omega - \lambda I)$ é o espaço gerado por

$$v_\lambda = \left(1, \frac{\lambda}{\omega}, \frac{\lambda^2}{\omega^2}, \ldots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^n e_n.$$

Seja σ a medida de Lebesgue em $\mathbb{T}$, ou seja, $d\sigma = \frac{1}{2\pi}d\theta$. Seja $A \subseteq \mathbb{T}$ um subconjunto com medida total. Suponha que x é tal que $\langle x, v_\lambda \rangle = 0$ para todo $\lambda \in A$. A função analítica Φ definida em $\overline{B(0, |\omega|)}$ por

$$\Phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^n$$

é igual a 0 em A. Pelo fato de A ser não enumerável (tem medida total), segue que A tem um ponto de acumulação de $\overline{B(0, |\omega|)}$. Por Φ ser analítica, Φ é identicamente nula, ou seja, devemos ter $\langle x, e_n \rangle = 0$ para todo $n \geq 0$, logo $x = 0$. Ou seja, mostramos que se x é tal que $\langle x, v_\lambda \rangle = 0$ para todo $x_\lambda \in \operatorname{span}\{B_\omega - \lambda I : \lambda \in A\}$, então $x = 0$. Como $\ell^2(\mathbb{N}_0)$ é um espaço de Hilbert, segue que $\operatorname{span}\{B_\omega - \lambda I : \lambda \in A\}$ é denso, pelo corolário 2.11.

O teorema que nos garantirá a existência de medidas ergódicas com suporte total para T, aplicando o argumento que comentamos no começo desta seção, é o seguinte:

Teorema 7.4. *Seja T um operador limitado em um espaço de Banach separável.*

1. *Assuma que T possui um conjunto de autovetores unimodulares perfeitamente gerado e que o conjunto de autovetores periódicos de T é denso no conjunto de autovetores unimodulares. Então $\overline{\mathcal{F}}_T(HC(T))$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{F}}_T(X)$.*

2. *Assuma apenas que T possui um conjunto perfeitamente gerado de autovetores unimodulares. Então $\overline{\mathcal{S}}_T(HC(T))$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{S}}_T(X)$.*

Para isto, começaremos mostrando que as duas famílias que definimos são *adequadas* (no sentido que definiremos a seguir), e algumas propriedades para este tipo de família de probabilidades.

Definição 7.5. Seja T um operador linear contínuo em um espaço topológico vetorial polonês. Diremos que uma família não vazia de medidas T-invariantes $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}_T(X)$ é *adequada* se:

- $\mathcal{M}$ é invariante por dilatação: para toda $\mu \in \mathcal{M}$ e todo $r > 0$, se $\mu^r(A) := \mu(r \cdot A)$ para todo $A \subseteq X$ Borel, então $\mu^r \in \mathcal{M}$,

- $\mathcal{M}$ é invariante por convolução: se $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$, então $\mu_1 * \mu_2 \in \mathcal{M}$,

- Cada $\mu \in \mathcal{M}$ tem suporte compacto.

Lema 7.6. *As seguintes famílias de medidas T-invariantes são adequadas:*

1. *$\mathcal{F}_T(X)$,*

2. *$\mathcal{S}_T(X)$,*

3. a família das medidas T-invariantes com suporte compacto.

Demonstração. Comecemos lembrando que $\mathcal{P}_T(X)$ é invariante por convolução (conforme demonstramos no fim da proposição 6.2).

1. Conforme observamos, o conjunto $\mathcal{F}_T(X)$ é o das medidas T-invariantes com suporte finito. Assim, cada $\mu \in \mathcal{F}_T(X)$ tem suporte compacto. Também temos que μ^r terá suporte finito para todo $r > 0$. Por fim, se μ e ν têm suporte finito, $\mu * \nu$ também o tem.

2. Seja $\mu \in \mathcal{S}_T(X)$. Temos que μ é o *pushforward* de uma $\Phi = \sum_{j\in J} \chi_j x_j$, i.e., $\mu = \Phi_* \mathbb{P}$, em que J é uma família finita de índices. Assim, é claro que o suporte da μ é compacto, pois é um conjunto fechado (suporte de medida é fechado) contido em um compacto (lembre que as imagens das χ_j estão em $\mathbb{T}$ e os x_j estão fixados).

   Mostremos agora que μ é T-invariante. Seja $A \subseteq X$ mensurável. Temos que

   $$\begin{aligned}\Phi^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in A\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : \sum_{j\in J} \chi_j(\omega) x_j \in A\right\}.\end{aligned}$$

   Ou seja,

   $$\Phi^{-1}(T^{-1}(A)) = \left\{\omega \in \Omega : \sum_{j\in J} \chi_j(\omega) x_j \in T^{-1}(A)\right\}.$$

   Além disso, por definição de medida de Steinhaus, temos que $\mathbb{P}(\chi_j^{-1}(B)) = \lambda(B)$. Como cada x_j é autovetor unimodular de T, existem $\alpha_j \in \mathbb{T}$ tais que $T(x_j) = \alpha_j x_j$. Mas $\sum_{j\in J} \chi_j(\omega) x_j \in T^{-1}(A) \iff T(\sum_{j\in J} \chi_j(\omega) x_j) \in A \iff (\sum_{j\in J} \alpha_j \chi_j)(\omega) x_j \in A$. Conseguimos então escrever

   $$\Phi^{-1}(T^{-1}(A)) = \left\{\omega \in \Omega : (\sum_{j\in J} \alpha_j \chi_j)(\omega) x_j \in A\right\}.$$

   Pelo fato de cada α_j ter módulo 1, $(\alpha_j \chi_j)_* \mathbb{P} = {\chi_j}_* \mathbb{P}$. Portanto,

   $$\mu(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\Phi^{-1}(T^{-1}(A))) = \mathbb{P}(\Phi^{-1}(A)) = \mu(A).$$

   Também temos que $\mathcal{S}_T(X)$ é invariante por dilatação, diretamente da definição: se μ é o *pushforward* de $\Phi = \sum_{j\in J} \chi_j x_j$, μ^r é o *pushforward* de $\Phi_r = r^{-1} \cdot \sum_{j\in J} \chi_j x_j$ (se $T(x_j) = \alpha_j x_j$, então $T(r^{-1} \cdot x_j) = \alpha_j (r^{-1} \cdot x_j)$), logo $\mu^r \in \mathcal{S}_T(X)$.

   Finalmente, para ver que $\mathcal{S}_T(X)$ é invariante por convolução, basta usar o seguinte resultado de probabilidade: se μ_1 e μ_2 são o *pushforward* de $\Phi_1 = \sum_{j\in J_1} \chi_j x_j$ e $\Phi_2 = \sum_{j\in J_2} \chi_j x_j$, respectivamente, onde J_1 e J_2 são disjuntos, então $\mu = \mu_1 * \mu_2$ é o *pushforward* de $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \sum_{j\in J_1 \cup J_2} \chi_j x_j$.

3. Segue direto do fato de $\mathcal{P}_T(X)$ ser invariante por convolução e de que a convolução de duas medidas com suporte compacto tem suporte compacto.

$\square$

Para qualquer família $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ vamos denotar por $\overline{\mathcal{M}}$ o fecho de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{P}(X)$. Denotaremos

$$\overline{\mathcal{M}}(A) := \overline{\mathcal{M}} \cap \mathcal{P}(A) = \{m \in \overline{\mathcal{M}} : m(A) = 1\}$$

para todo $A \subseteq X$ Borel.

Vamos denotar também por $\mathcal{O}_T$ a família de abertos não vazios A tais que $T^{-1}(A) \subseteq A$.

Temos o seguinte teorema:

Teorema 7.7. *Seja T um operador linear contínuo em um espaço topológico vetorial polonês X e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}_T(X)$ uma família adequada de medidas T-invariantes. Considere as seguintes afirmações:*

1. *T admite medida ergódica com suporte total m tal que $m \in \overline{\mathcal{M}}$,*
2. *T admite medida invariante m tal que $m \in \overline{\mathcal{M}}$ e $m(HC(T)) = 1$,*
3. *Para todo $\Omega \in \mathcal{O}_T$, δ_0 pertence ao fecho de $\overline{\mathcal{M}}(\Omega)$ em $\mathcal{P}(X)$,*
4. *Para todo $O \in \mathcal{O}_T$, $\overline{\mathcal{M}}(O)$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{M}}$,*
5. *$\overline{\mathcal{M}}(HC(T))$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{M}}$.*

Temos então que $1) \implies 2) \iff 3) \iff 4) \iff 5)$. *Além disso, se algumas das afirmações de 2 à 5 é satisfeita, T admite medida ergódica com suporte total.*

Demonstração. A parte mais interessante será $3) \implies 4)$. Comecemos com as outras.

$1) \implies 2)$: Vamos mostrar que se m é uma medida ergódica com suporte total, então $m(HC(T)) = 1$. Seja $(V_j)_{j\geq 1}$ uma base de abertos não vazios para X e seja

$$O_j := \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_j).$$

Pelo teorema de transitividade de Birkhoff, $HC(T) = \bigcap_{j\geq 1} O_j$. Além disso, por termos que $T^{-1}(O_j) \subseteq O_j$ e m ser T-invariante, $m(T^{-1}(O_j)\Delta O_j) = 0$. Por ergodicidade e como $m(O_j) \geq m(V_j) > 0$, segue que $m(O_j) = 1$ para todo $j \geq 1$ e, portanto, $m(HC(T)) = 1$.

$2) \implies 3)$: Seja m T-invariante com $m \in \overline{\mathcal{M}}$ e $m(HC(T)) = 1$. Para cada $n \geq 1$, consideremos $\mu_n := m^{2^n}$, ou seja, $\mu_n(A) = m(2^n \cdot A)$ para todo $A \subseteq X$ Borel. Como a aplicação $m \mapsto \mu_n$ é contínua e $\mathcal{M}$ é invariante por dilatação, temos que $\mu_n \in \overline{\mathcal{M}}$ para todo $n \geq 1$. Além disso, por $HC(T)$ ser invariante por dilatação, temos $\mu_n(HC(T)) = m(HC(T)) = 1$.

Se $\Omega \in \mathcal{O}_T$, temos que $HC(T) \subseteq \Omega$: $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega \implies T^{-2}(\Omega) \subseteq T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega \implies \cdots \implies T^{-n}(\Omega) \subseteq \Omega \implies HC(T) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(\Omega) \subseteq \Omega$. Assim, $\mu_n(\Omega) = 1$. Como

$$\int_X f d\mu_n = \int_X f(2^{-n}x) dm(x)$$

para toda $f : X \to \mathbb{R}$ contínua e limitada, segue que $\mu_n \to \delta_0$ quando $n \to \infty$, logo δ_0 está no fecho de $\overline{\mathcal{M}}(\Omega)$ em $\mathcal{P}(X)$.

4) $\implies$ 5) : Usando a mesma notação do começo, se $O_j \in \mathcal{O}_T$ e $\overline{\mathcal{M}}(O_j)$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{M}}$, basta notarmos que $\overline{\mathcal{M}}(HC(T)) = \overline{\mathcal{M}}(\cap O_j) = \cap \overline{\mathcal{M}}(O_j)$ (a última igualdade segue diretamente da definição, pois $m \in \overline{\mathcal{M}}(\cap O_j) \iff m \in \overline{\mathcal{M}}$ e $m(O_j) = 1$ para todo j $\iff m \in \cap \overline{\mathcal{M}}(O_j)$) é G_δ denso em $\overline{\mathcal{M}}$.

5) $\implies$ 2) : Basta tomarmos uma $m \in \overline{\mathcal{M}}(HC(T))$ para termos que $m(HC(T)) = 1$ e $m \in \overline{\mathcal{M}}$.

Mostremos agora a existência de uma medida ergódica com suporte total, assumindo as afirmações de 2 à 5.

Supondo 5), temos que $\overline{\mathcal{M}}(HC(T)) \neq \varnothing$. Aplicando o teorema da decomposição ergódica para $\mu \in \overline{\mathcal{M}}(HC(T))$, obtemos que existe uma medida ergódica m para T tal que $m(HC(T)) > 0$. Como m é T-invariante e $HC(T) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$, para todo $U \neq \varnothing$ aberto, m tem suporte total: se existisse $U \neq \varnothing$ aberto tal que $m(U) = 0$, teríamos que $m(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)) = 0$ e $m(HC(T)) = 0$, absurdo.

Para demonstrar a última implicação, vamos usar uma ideia parecida com a demonstração do teorema 6.1, usando convolução.

Fixemos $O \in \mathcal{O}_T$. Pelo fato 6.8, $\mathcal{P}(O)$ é G_δ em $\mathcal{P}(X)$ e, portanto $\overline{\mathcal{M}}(O) = \overline{\mathcal{M}} \cap \mathcal{P}(O)$ é G_δ em $\overline{\mathcal{M}}$. Precisamos então mostrar que $\overline{\mathcal{M}}(O)$ é denso em $\overline{\mathcal{M}}$. Para isto, mostraremos que toda $\nu \in \mathcal{M}$ pertence ao fecho de $\overline{\mathcal{M}}(O)$ em $\mathcal{P}(X)$. Com isso teremos que $\mathcal{M}$ estará contido no fecho de $\overline{\mathcal{M}}(O)$, logo $\overline{\mathcal{M}}$ estará contido no fecho de $\overline{\mathcal{M}}(O)$. A outra continência segue da definição de $\overline{\mathcal{M}}(O)$, e teremos a igualdade.

Vamos então fixar tal medida ν e denotar

$$K = \operatorname{supp}(\nu) = \{x \in X : \text{ para todo aberto } U \ni x,\ \nu(U) > 0\}.$$

Por $\mathcal{M}$ ser adequada, K é compacto. Temos os seguintes fatos:

Fato 7.8. O conjunto $\Omega := \bigcap_{y \in K}(O - y)$ está em $\mathcal{O}_T$.

Demonstração. Primeiramente, notemos que Ω é aberto. De fato, sejam $F = X \setminus O$ e

$$C = \{(x, y) \in X \times K : x + y \in F\}.$$

C é fechado em $X \times K$, dada a restrição $x + y \in F$. Com isso, temos que $\pi_X(C) = \{x \in X : \exists y \in K \text{ tal que } x + y \in F\}$ é fechado em X (usando o resultado de topologia que se

$\pi : A \times B \to A$ é a projeção na primeira coordenada, com B compacto, então π é uma aplicação fechada).

Notemos que $\pi_X(C) = X \setminus \Omega$: $x \in \pi_X(C) \iff \exists y \in K$ tal que $x + y \in F \iff \exists y \in K$ tal que $x + y \in X \setminus O \iff x \notin \bigcap_{y \in K}(O - y) \iff x \in X \setminus \Omega$. Logo Ω é aberto.

Mostremos agora que $T(K) = K$. Seja V aberto tal que $V \cap T(K) \neq \varnothing$. Então $T^{-1}(V)$ é aberto tal que $T^{-1}(V) \cap K \neq \varnothing$: suponha que existe $v \in V$ e $k \in K$ tal que $v = T(k)$, então $k \in T^{-1}(V) \cap K$. Pela definição de K (como sendo o suporte da ν), temos $\nu(T^{-1}(V)) > 0$. Como ν é T-invariante, $\nu(V) > 0$ para todo aberto V tal que $V \cap T(K) \neq \varnothing$. Usando a definição de suporte de uma medida, temos que $T(K) \subseteq K$.

Por outro lado, sendo $T(K)$ compacto e X Hausdorff, $V = X \setminus T(K)$ é aberto em X e temos que $\nu(V) = \nu(T^{-1}(V)) = 0$, pois $T^{-1}(V) \cap K = \varnothing$. Assim como no caso anterior (usando definição de suporte de medida), temos que $X \setminus T(K) \subseteq X \setminus K$, ou seja, $K \subseteq T(K)$.

Mostremos então que $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$. Como $T(K) = K$, podemos escrever

$$\Omega = \bigcap_{y \in K} (O - T(y)).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
T^{-1}(\Omega) &= \bigcap_{y \in K} T^{-1}(O - T(y)) \\
&= \bigcap_{y \in K} (T^{-1}(O) - y) \\
&\subseteq \bigcap_{y \in K} (O - y) = \Omega.
\end{aligned}$$

Para mostrar a segunda igualdade, usamos a linearidade de T: fixado $y \in K$, temos que

$$\begin{aligned}
T^{-1}(O - T(y)) &= \{x \in X : T(x) \in O - T(y)\} \\
&= \{x \in X : \exists w \in O \text{ tal que } T(x) = w - T(y)\} \\
&= \{x \in X : T(x + y) \in O\} \\
&= \{z - y : T(z) \in O\} \\
&= T^{-1}(O) - y
\end{aligned}$$

□

Fato 7.9. Se $m \in \mathcal{P}(\Omega)$, então $m * \nu \in \mathcal{P}(O)$.

Demonstração. Seja $F = X \setminus O$. Temos que $m(F - y) = 0$ para todo $y \in K$, pois $\Omega \cap (F - y) = \varnothing$ e $m \in \mathcal{P}(\Omega)$. Assim,

$$(m * \nu)(F) = \int_K m(F - y) d\nu(y) = 0.$$

Logo, $(m * \nu)(O) = 1$. □

Mostremos agora a implicação 3) $\implies$ 4). Pela afirmação 3) e pelo fato 7.8, conseguimos uma sequência (m_n) em $\overline{\mathcal{M}}(\Omega)$ tal que $m_n \to \delta_0$. Como $\overline{\mathcal{M}}$ é invariante por convolução, a função $(\mu_1, \mu_2) \mapsto \mu_1 * \mu_2$ é contínua em relação a cada uma das coordenadas e pelo fato 7.9, temos que $\nu_n = m_n * \nu \in \overline{\mathcal{M}}(O)$. Portanto, $\nu = \lim \nu_n$ está no fecho de $\overline{\mathcal{M}}(O)$ em $\mathcal{P}(X)$. $\square$

Teorema 7.10. *Sejam T um operador linear limitado em um espaço de Banach X e $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}_T(X)$ uma família adequada de medidas T-invariantes. Seja $p \in (0, \infty)$. Suponha que exista uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que vale o seguinte: para todo aberto $\Omega \neq \varnothing$ com $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$ existe $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\int_X ||x||^p d\mu(x) \leq C$. Então existe $m \in \overline{\mathcal{M}}(HC(T))$ tal que $\int_X ||x||^p dm(x) < \infty$. Em particular, T admite medida ergódica μ com suporte total tal que $\int_X ||x||^p d\mu(x) < \infty$.*

Demonstração. A demonstração será bem parecida com a do teorema 7.7 e do teorema 6.1. Comecemos com alguns fatos:

Fato 7.11. Para todo aberto $\Omega \neq \varnothing$ satisfazendo $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$ e $\varepsilon > 0$ existe $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $\int_X ||x||^p dm(x) < \varepsilon$.

Demonstração. Tomemos $\eta > 0$ grande o suficiente de modo que $C\eta^p < \varepsilon$. Consideremos o aberto $\Omega_\eta := \eta \cdot \Omega$ que também satisfaz $T^{-1}(\Omega_\eta) \subseteq \Omega_\eta$, dada a linearidade de T.

Por hipótese, existe $\mu_\eta \in \mathcal{M}(\Omega_\eta)$ tal que

$$\int_X ||x||^p d\mu_\eta(x) \leq C.$$

Seja agora μ dada por $\mu(A) = \mu_\eta(1/\eta \cdot A)$ para todo $A \subseteq X$ Borel. Temos que $\mu \in \mathcal{M}$, pois $\mathcal{M}$ é invariante por dilatação. Além disso, o suporte da μ está em Ω, pois o suporte da μ_η está em Ω_η. Como temos

$$\int_X ||x||^p d\mu(x) = \int_X ||\eta x||^p d\mu_\eta(x) \leq \eta^p C < \varepsilon,$$

segue o resultado. $\square$

Denotemos por

$$\mathcal{M}^1 := \left\{ \mu \in \mathcal{M} : \int_X ||x||^p d\mu < 1 \right\}$$

e por $\overline{\mathcal{M}^1}$ seu fecho em $\mathcal{P}(X)$. Note que este conjunto é não vazio pelo fato anterior.

A argumentação será igual a da demonstração do teorema 7.7. Por este, basta mostrarmos que $\overline{\mathcal{M}^1}(HC(T))$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{M}^1}$. Novamente, a parte de ser G_δ segue do fato 6.8.

Temos os seguintes:

Fato 7.12. Sejam W vizinhança de 0 em X e $\varepsilon > 0$. Então existe $\eta > 0$ tal que se $\mu \in \mathcal{P}(X)$ satisfaz $\int_X ||x||^p d\mu(x) < \eta$, então $\mu(W) > 1 - \varepsilon$.

Demonstração. Seja $\alpha > 0$ tal que $B(0;\alpha) \subseteq W$. Pela desigualdade de Markov temos que

$$\mu(X \setminus B(0;\alpha)) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_X ||x||^p d\mu(x).$$

Basta então tomarmos $\eta := \alpha^p \varepsilon$: se μ satisfaz a condição do enunciado, $\mu(X \setminus B(0;\alpha)) \leq \varepsilon$ e, portanto, $\mu(B(0;\alpha)) > 1 - \varepsilon$. $\square$

Por estes dois últimos fatos, assim como nas demonstrações dos teoremas 7.7 e 6.1, temos o seguinte:

Fato 7.13. Dados um aberto $\Omega \neq \varnothing$ satisfazendo $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$ e $\varepsilon > 0$, existe uma sequência (m_n) em $\mathcal{M}^1(\Omega)$ tal que $m_n \to \delta_0$ e $\int_X ||x||^p dm_n(x) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela demonstração da implicação (3) $\implies$ (4) do teorema 7.7, basta mostrarmos o seguinte:

Fato 7.14. Seja $\nu \in \mathcal{M}^1$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $m * \nu \in \mathcal{M}^1$ para toda $m \in \mathcal{M}^1$ satisfazendo $\int_X ||x||^p dm(x) < \varepsilon$.

Demonstração. Como $\mathcal{M}$ é invariante por convolução, basta encontrarmos $\varepsilon > 0$ tal que para toda $m \in \mathcal{P}(X)$ satisfazendo $\int_X ||x||^p dm(x) < \varepsilon$, tivermos que $\int_X ||x||^p d(m * \nu)(x) < \varepsilon$.

Sejam $\alpha := \int_X ||y||^p d\nu(y) < 1$ e $m \in \mathcal{P}(X)$. Vamos analisar os casos $p \geq 1$ e $p < 1$.

Suponhamos que $p \geq 1$. Temos que

$$\begin{aligned}
\int_X ||x||^p d(m * \nu)(x) &= \int_{X \times X} ||x + y||^p dm(x) d\nu(y) \\
&\leq \int_{X \times X} (||x||^p + ||y||^p) dm(x) d\nu(y) \\
&\leq \left[\left(\int_{X \times X} ||x||^p dm(x) d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X \times X} ||y||^p dm(x) d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
&< (\varepsilon^{\frac{1}{p}} + \alpha^{\frac{1}{p}})^p,
\end{aligned}$$

então basta tomarmos ε pequeno o suficiente tal que $\varepsilon^{\frac{1}{p}} + \alpha^{\frac{1}{p}} \leq 1$.

Suponhamos agora que $p < 1$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_X ||x||^p d(m * \nu)(x) &= \int_{X \times X} ||x + y||^p dm(x) d\nu(y) \\
&\leq \int_{X \times X} ||x||^p dm(x) d\nu(y) + \int_{X \times X} ||y||^p dm(x) d\nu(y) \\
&< \varepsilon^p + \alpha^p \\
&< \varepsilon + \alpha,
\end{aligned}$$

e tomamos $\varepsilon := 1 - \alpha$. $\square$

Para ver que $\overline{\mathcal{M}^1}(HC(T))$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{M}^1}$, é completamente análogo ao que fizemos na demonstração do teorema 7.7, mas agora usando os fatos 7.13 e 7.14. Em particular, temos que $\overline{\mathcal{M}^1}(HC(T)) \neq \varnothing$.

Além disso, notemos que o conjunto $\{\mu \in \mathcal{P}(X) : \int_X ||x||^p d\mu(x) \leq 1\}$ é fechado em $\mathcal{P}(X)$ e contém $\mathcal{M}^1$, logo contém $\overline{\mathcal{M}^1}$. Com isso, se $m \in \overline{\mathcal{M}^1}$, segue que $\int_X ||x||^p dm(x) \leq 1$. Aplicando o teorema da decomposição ergódica para $m \in \overline{\mathcal{M}^1}(HC(T))$, obtemos μ ergódica com suporte total tal que $\int_X ||x||^p d\mu(x) \leq 1$. $\square$

7.2 Demonstração do Teorema 7.4

Demonstração do teorema 7.4 (2). Aplicando o item 3) do teorema 7.7 em $\mathcal{S}_T(X)$, basta mostrarmos que todo aberto $\Omega \neq \varnothing$ satisfazendo $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$ e toda vizinhança W de 0, existe uma medida de Steinhaus μ para T com suporte em Ω tal que $\mu(W)$ é tão próximo de 1 quanto se queira.

Vamos usar os seguintes fatos:

Fato 7.15. Seja $\mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$ o conjunto dos autovetores unimodulares v de T satisfazendo o seguinte: para toda vizinhança V de v, existe uma quantidade não enumerável de $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $V \cap \ker(T - \lambda I) \neq \varnothing$. Então $\text{span}\{\mathcal{E}_{\text{cond}}(T)\}$ é denso em X.

Demonstração. Sejam

$$\mathbf{V} := \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{T} : x \neq 0 \text{ e } T(x) = \lambda x\}$$

e $\mathbf{O}$ a união dos abertos $O \subseteq \mathbf{V}$ tais que $\pi_{\mathbb{T}}(O)$ é enumerável ($\pi_{\mathbb{T}} : X \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ é a projeção natural na segunda coordenada). Pela propriedade de Lindelöf, $D := \pi_{\mathbb{T}}(\mathbf{O})$ é enumerável, pois D é uma união de abertos da forma $\pi_{\mathbb{T}}(O)$ e como $\mathbb{T}$ é Lindelöf, existe subcobertura enumerável. Como união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, D é enumerável.

Pela propriedade de ser perfeitamente gerado, temos que o span de

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}\setminus D} := \bigcup_{\lambda \in \mathbb{T}\setminus D} \ker(T - \lambda I) \setminus \{0\}$$

é denso em X. Como $\mathcal{E}_{\mathbb{T}\setminus D} \subseteq \mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$, segue o resultado. $\square$

Fato 7.16. Seja $(v_1, \ldots, v_N)$ uma família finita de vetores em $\mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$. Então existe uma família de autovetores unimodulares $(u_1, \ldots, u_N)$ tão perto de $(v_1, \ldots, v_N)$ quanto se queira tal que a família associada de autovalores $(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ é independente, ou seja, a única solução de

$${\lambda_1}^{m_1} \cdots {\lambda_N}^{m_N} = 1$$

com $m_i \in \mathbb{Z}$ é $m_1 = \cdots = m_N = 0$.

Demonstração. Como $v_1 \in \mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$, para toda vizinhança V de v_1 existe uma quantidade não enumerável de $\lambda \in \mathbb{T}$ tal que $V \cap \ker(T - \lambda I) \neq \varnothing$.

O conjunto das raízes da unidade é enumerável, portanto conseguimos u_1 autovetor unimodular tão próximo de v_1 quanto se queira, cujo autovalor λ_1 não é raiz da unidade, pois tomamos $v_1 \in V$ e $u_1 \in \ker(T - \lambda_1 I)$. Assim a família (λ_1) é independente.

Analogamente, como $v_2 \in \mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$ e o conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{T} : (\lambda_1, \lambda) \text{ não é independente}\}$$

é enumerável, existe u_2 autovetor unimodular, com autovalor λ_2, tão próximo de v_2 quanto se queira tal que (λ_1, λ_2) é independente.

Seguindo assim, obtemos o resultado. □

Fato 7.17. Sejam $\Omega \subseteq X$ um conjunto satisfazendo $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$ e $(u_k)_{k \in K}$ uma família finita de autovetores unimodulares de T. Assuma que a família associada de autovalores $(\lambda_k)_{k \in K}$ é independente e que $\sum u_k \in \Omega$. Então

$$\sum \mu_k u_k \in \Omega$$

para toda sequência $(\mu_k)_{k \in K} \in \mathbb{T}^K$.

Demonstração. Fixemos $(\mu_k)_{k \in K} \in \mathbb{T}^K$. Como $(\lambda_k)_{k \in K}$ é independente, a ideia será aplicar o teorema de aproximação de Kronecker. Cada λ_k e μ_k tem módulo 1, assim existem θ_k e α_k tais que $\lambda_k^{-1} = e^{2\pi i \theta_k}$ e $\mu_k = e^{2\pi i \alpha_k}$. Para facilitar a notação, suponhamos que $K = \{1, \ldots, N\}$. Note que

$$\lambda_1^{-m_1} \cdots \lambda_N^{-m_N} = e^{2\pi i (m_1 \theta_1 + \ldots + m_N \theta_N)},$$

ou seja, a independência dos (λ_k) implica que os (θ_k) são racionalmente independentes.

Aplicando o teorema de Kronecker, para cada $\delta > 0$ conseguimos a existência de
$p_1, \ldots, p_N$
$\in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$||q\theta_k - (\alpha_k + p_k)|| < \delta \text{ para todo } k \in K.$$

k Usando a continuidade da exponencial, temos que, para todo $\varepsilon > 0$ conseguimos $p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$||e^{2\pi i q \theta_k} - e^{2\pi i (\alpha_k + p_k)}|| < \varepsilon,$$

ou seja, $||\lambda_k^{-q} - \mu_k|| < \varepsilon$ para todo $k \in K$.

Como Ω é aberto, usando este mesmo argumento, conseguimos $n \in \mathbb{N}$ com λ_k^{-n} sendo tão perto de μ_k para todo $k \in K$ tal que

$$\sum \lambda_k^n \mu_k u_k \in \Omega.$$

Temos que $\sum \lambda_k^n \mu_k u_k = T^n(\sum \mu_k u_k))$ e $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$, logo $\sum \mu_k u_k \in \Omega$. $\square$

Fixemos $\Omega \neq \varnothing$ satisfazendo $T^{-1}(\Omega) \subseteq \Omega$ e W vizinhança de 0. Queremos encontrar uma medida de Steinhaus μ com suporte em Ω tal que $\mu(W)$ é próximo de 1.

Pelo fato 7.12, basta encontrarmos $\mu \in \mathcal{S}_T(\Omega)$ tal que $\int_X ||x||^2 d\mu(x) < \eta$ para um certo $\eta > 0$.

Pelo fato 7.15 e por $\mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$ ser invariante por multiplicação por escalar, existem $x_1, \ldots, x_I$
$\in \mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$ tal que

$$x := \sum x_i \in \Omega,$$

pois se $\sum \alpha_i y_i \in \Omega$, com $y_i \in \mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$ (cuja existência é garantida pelo fato 7.15), cada $x_i = \alpha_i y_i \in \mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$.

Como estamos com uma quantidade finita de $x_1, \ldots, x_I$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz existe $M = M(x_1, \ldots, x_I)$ tal que

$$\left|\left|\sum \theta_i x_i\right|\right|^2 \leq M \sum |\theta_i|^2$$

para toda sequência de escalares $\theta_1, \ldots, \theta_I$.

Sejam agora $a_1, \ldots, a_J \in (0, \infty)$ tal que $\sum a_j = 1$ e

$$MI \sum a_j^2 < \eta,$$

por exemplo, tome $a_j = 1/J$ para J suficientemente grande.

Escrevemos

$$x = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} a_j x_i = \sum_{i,j} v_{i,j},$$

com $v_{i,j} := a_j x_i \in \mathcal{E}_{\text{cond}}(T)$. Pelo fato 7.16, conseguimos autovetores unimodulares $u_{i,j}$ tão próximos quanto se queira dos $v_{i,j}$ para todo (i,j), ou seja, $\sum u_{i,j} \in \Omega$, cuja família de autovalores associados $(\lambda_{i,j})$ é independente.

Seja agora μ uma medida de Steinhaus que é o *pushforward* de $\mathbb{P}$ por $\Phi(\omega) = \sum \chi_{i,j}(\omega) u_{i,j}$. Pelo fato 7.17 (lembre que $\chi_{i,j}(\omega) \in \mathbb{T}$), temos que $\sum \chi_{i,j}(\omega) u_{i,j} \in \Omega$, logo o suporte da μ está contido em Ω.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\left|\sum \chi_{i,j} u_{i,j}\right|\right|^2\right) &= \int \left|\left|\sum \chi_{i,j}(\omega) u_{i,j}\right|\right|^2 d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_X ||x||^2 d\mu(x),
\end{aligned}$$

pois $\mu = \Phi_*\mathbb{P}$ e temos que $\int_{X_2} gd(\Phi_*\mathbb{P}) = \int_{X_1} g \circ \Phi d\mathbb{P}$, onde $g(x) = ||x||^2$.

Assim, se os $u_{i,j}$ forem próximos o bastante de $v_{i,j}$, é suficiente mostrarmos que

$$\mathbb{E}\left(\left|\left|\sum \chi_{i,j} v_{i,j}\right|\right|^2\right) < \eta.$$

Temos também que $\mathbb{E}(f(\chi_{i,j})) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta$ para toda f contínua em $\mathbb{T}$, pois

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(\chi_{i,j})) &= \int (f \circ \chi_{i,j})(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{T}} f(x) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta
\end{aligned}$$

pela definição da medida de Lebesgue λ em $\mathbb{T}$, novamente usando que $\lambda = g_*\theta/2\pi$, onde $g : [0, 2\pi) \to \mathbb{T}$ é dada por $g(\theta) = e^{i\theta}$.

Disso, temos que $\mathbb{E}(\chi_{i,j}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta = 0$ e $\mathbb{E}(|\chi_{i,j}|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{2i\theta}|d\theta = 1$. Temos então que os $\chi_{i,j}$ são ortonormais em L^2, pois se $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, pelo fato dos $\chi_{i,j}$ serem independentes,

$$\mathbb{E}(\chi_{i_1,j_1} \cdot \chi_{i_2,j_2}) = \mathbb{E}(\chi_{i_1,j_1})\mathbb{E}(\chi_{i_2,j_2}) = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\left|\sum_{i,j} \chi_{i,j} v_{i,j}\right|\right|^2\right) &= \mathbb{E}\left(\left|\left|\sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{j=1}^{J} \chi_{i,j} a_j\right) x_i\right|\right|^2\right) \\
&\leq M \sum_{i=1}^{I} \mathbb{E}\left(\left|\sum_{j=1}^{J} \chi_{i,j} a_j\right|^2\right) \\
&= MI \sum_{j=1}^{J} a_j^2 \text{ pois os } \chi_{i,j} \text{ são ortonormais} \\
&< \eta,
\end{aligned}$$

e segue o resultado. □

Usando que $\overline{\mathcal{S}}_T(HC(T))$ é G_δ denso em $\overline{\mathcal{S}}_T(X)$ e a implicação 5) $\implies$ 2) do teorema 7.7, temos o seguinte teorema, que será usado para provar a parte (1) de 7.4:

Teorema 7.18. *Seja T um operador em um espaço de Banach complexo X. Suponha que T admite um conjunto perfeitamente gerado de autovetores unimodulares. Então T admite uma medida invariante m com suporte total tal que $m(HC(T)) = 1$ e $m \in \overline{\mathcal{S}}_T(X)$.*

Demonstração do teorema 7.4 (1). Suponha que T possui um conjunto perfeitamente gerado de autovetores unimodulares e que todo autovetor unimodular pode ser aproximado o quanto quisermos por um autovetor periódico. A ideia será mostrar que a medida m dada no teorema 7.18 está em $\overline{\mathcal{F}}_T(X)$. Assim, usando a implicação 2) $\implies$ 5) do teorema 7.7 com $\mathcal{M} = \mathcal{F}_T(X)$, segue o que queremos.

Para facilitar a notação, diremos que uma medida $\nu \in \mathcal{P}(X)$ é uma *medida periódica de Steinhaus* para T se ν é o *pushforward* de $\mathbb{P}$ pela função mensurável $\Psi = \sum \chi_j u_j$, onde a soma é finita e os u_j são autovetores periódicos unimodulares para T. A demonstração será dada pelos seguintes fatos:

Fato 7.19. Toda medida de Steinhaus para T está no fecho das medidas periódicas de Steinhaus.

Demonstração. Suponha que μ é o *pushforward* de $\mathbb{P}$ por $\sum_{j\in J} \chi_j x_j$. Por hipótese, para cada j conseguimos uma sequência $(u_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de autovetores periódicos de T que converge para x_j. Basta então considerarmos as ν_n como sendo o *pushforward* de $\mathbb{P}$ por $\sum_{j\in J} \chi_j u_{j,n}$, pois temos que $\nu_n \to \mu$ em $\mathcal{P}(X)$. □

Fato 7.20. Toda medida periódica de Steinhaus para T está em $\overline{\mathcal{F}}_T(X)$.

Demonstração. Seja ν uma medida de Steinhaus periódica para T e suponha, sem perda de generalidade, que ν é o *pushforward* de $\mathbb{P}$ por $\Psi = \sum_{j=1}^{s} \chi_j u_j$, onde os u_j são autovetores periódicos de T.

Fixemos um conjunto independente $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\} \subseteq \mathbb{T}$ e $Q \geq 1$ tal que $T^Q(u_j) = u_j$ para todo $j = \{1, \dots, s\}$.

Para cada $N \geq 1$, seja $\nu_N \in \mathcal{P}(X)$ dada por

$$\nu_N = \frac{1}{N^s} \sum_{n_1,\dots,n_s=0}^{N-1} \left(\frac{1}{Q} \sum_{j=0}^{Q-1} \delta_{T^j(\lambda_1^{n_1} u_1 + \cdots + \lambda_s^{n_s} u_s)} \right).$$

Note que $T^Q(\lambda_1^{n_1} u_1 + \cdots + \lambda_s^{n_s} u_s) = \lambda_1^{n_1} u_1 + \cdots + \lambda_s^{n_s} u_s$ para todos os n_i's, pela linearidade de T e hipótese em Q. Assim, $\nu_N \in \mathcal{F}_T(X)$ para todo $N \geq 1$.

Seja f uma função contínua e limitada em X. Temos que

$$\begin{aligned}\int_X f d\nu_n &= \frac{1}{N^s} \sum_{n_1,\dots,n_s=0}^{N-1} \left(\frac{1}{Q} \sum_{j=0}^{Q-1} f(T^j(\lambda_1^{n_1} u_1 + \cdots + \lambda_s^{n_s} u_s)) \right) \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{j=0}^{Q-1} \left(\frac{1}{N^s} \sum_{n_1,\dots,n_s=0}^{N-1} f(\lambda_1^{n_1} T^j(u_1) + \cdots + \lambda_s^{n_s} T^j(u_s)) \right).\end{aligned}$$

Aplicando o teorema de equidistribuição de Weyl na sua versão multidimensional, segue que

$$\int_X f d\nu_N \to \frac{1}{Q} \sum_{j=0}^{Q-1} \int_{\mathbb{T}^s} f(\alpha_1 T^j(u_1) + \cdots + \alpha_s T^j(u_s)) d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

quando $N \to \infty$. Assim como fizemos na demonstração do item (1) do teorema (ou seja, escrevendo $\nu = \Psi_* \mathbb{P}$ e lembrando da definição de medida de Lebesgue), temos que

$$\begin{aligned}\int_X f d\nu &= \mathbb{E}\left[f\left(\sum_{j=1}^{s} \chi_j u_j \right) \right] \\ &= \int_{\mathbb{T}^s} f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_s u_s) d\alpha_1 \dots d\alpha_s.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_X f \circ T^j d\nu = \int_{\mathbb{T}^s} f(\alpha_1 T^j(u_1) + \cdots + \alpha_s T^j(u_s)) d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

para todo $j \geq 0$. Por ν ser T-invariante, temos que

$$\int_X f d\nu = \int_{\mathbb{T}^s} f(\alpha_1 T^j(u_1) + \cdots + \alpha_s T^j(u_s)) d\alpha_1 \dots d\alpha_s$$

para todo $j \in \{0, \dots, Q-1\}$.

Com isso, concluímos que

$$\int_X f d\nu_N \to \int_X f d\nu$$

para toda f contínua e limitada, logo $\nu_N \to \nu$ em $\mathcal{P}(X)$. Portanto, $\nu \in \overline{\mathcal{F}}_T(X)$. $\square$

Pelos fatos 7.19 e 7.20, segue que $\overline{\mathcal{S}}_T(X) \subseteq \overline{\mathcal{F}}_T(X)$. Assim, medida m dada pelo teorema 7.18 está em $\overline{\mathcal{F}}_T(X)$, e segue o resultado pelo teorema 7.7, como já observamos. $\square$

8 Considerações Finais

Estudamos na seção 4 condições para que um operador T frequentemente hipercíclico admita medida invariante com suporte total. Mostramos que vale, em particular, para espaços de Banach reflexivos. No entanto, o seguinte caso geral continua em aberto:

Pergunta 1. Se $T : X \to X$ é frequentemente hipercíclico, T admite medida *invariante* com suporte total?

É sabido que se um operador $T : X \to X$ é hipercíclico (resp. caótico) e invertível, T^{-1} também é hipercíclico (resp. caótico). No entanto, apenas em 2019 que Q. Menet mostrou em [26] um operador frequentemente hipercíclico invertível, cujo inverso não é frequentemente hipercíclico. Temos então a seguinte pergunta:

Pergunta 2. Sob quais operações o conjunto dos operadores frequentemente hipercíclicos é fechado? Quais subconjuntos dos operadores frequentemente hipercíclicos são fechados sob alguma operação?

Existem exemplos clássicos de operadores que são hipercíclicos e não são caóticos e que são hipercíclicos mas não são frequentemente hipercíclicos. Surge então a pergunta: existem operadores que são frequentemente hipercíclicos e não são caóticos, e vice-versa?

Em 2007, F. Bayart e S. Grivaux construíram em [28] um *weighted shift* que é frequentemente hipercíclico e não é caótico. Apenas em 2017 que Q. Menet mostrou em [27] a existência de um operador caótico que não é frequentemente hipercíclico. Entretanto, em diversos dos operadores mais conhecidos as noções de operadores frequentemente hipercíclicos e caóticos coincidem. Recentemente, U. B. Darji e B. Pires estudaram em [29] uma grande classe de operadores de composição em que estas duas noções coincidem.

Pergunta 3. Em quais exemplos de operadores as noções de operadores frequentemente hipercíclicos e caóticos coincidem?

Como pudemos ver, a teoria dos sistemas dinâmicos lineares é bastante rica e vem sendo bastante desenvolvida recentemente. Há uma busca por novos exemplos e diversos problemas interessantes em aberto. Ela está intimamente relacionada com o Problema do Subespaço Invariante, que é um dos problemas em aberto mais importantes da análise funcional.

Referências

[1] GRIVAUX, Sophie; MATHERON, Étienne. *Invariant measures for frequently hypercyclic operators.* Advances in Mathematics, v. 265, p. 371-427, 2014.

[2] BAYART, Frédéric; MATHERON, Étienne. *Dynamics of linear operators.* Cambridge university press, 2009.

[3] GROSSE-ERDMANN, Karl-G.; MANGUILLOT, Alfred Peris. *Linear chaos.* Springer Science & Business Media, 2011.

[4] OLIVEIRA, Krerley; VIANA, Marcelo. *Fundamentos da teoria ergódica.* IMPA, Brazil, 2014.

[5] WALTERS, Peter. *An introduction to ergodic theory.* Springer Science & Business Media, 2000.

[6] ALEKSEEV, M. A.; GLEBSKII, L. Yu; GORDON, E. I. *On Approximation of Groups, Group Actions, and Hopf Algebras.* Journal of Mathematical Sciences 107, 4305–4332 (2001).

[7] KOMJÁTH, Péter; TOTIK, Vilmos. *Problems and theorems in classical set theory.* Springer Science & Business Media, 2006.

[8] HRBACEK, Karel; JECH, Thomas. *Introduction to set theory, revised and expanded.* Crc Press, 1999.

[9] KOPPELBERG, Sabine. *Ultrafilters, semigroups, and topology.* Chapter 2: Filters and Ultrafilters, 2011. Disponível em: `http://www.mi.fu-berlin.de/math/groups/ag-logik/Lehre/UST-chapter02.pdf`.

[10] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis.* Tata McGraw-hill education, 2006.

[11] BOGACHEV, Vladimir Igorevich. *Gaussian measures.* American Mathematical Soc., 1998.

[12] MUNKRES, James R. *Topology.* 2000. Prenctice Hall, US.

[13] TURUNEN, Ville. Mat-1.152 *Special Course in Functional Analysis:(Non-) Commutative Topology.*

[14] BORKAR, Vivek S. *Probability theory: an advanced course.* Springer Science & Business Media, 2012.

[15] KECHRIS, Alexander. *Classical descriptive set theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[16] HALMOS, Paul R. *Measure theory.* Springer, 2013.

[17] BAYART, Frédéric; RUZSA, Imre Z. *Difference sets and frequently hypercyclic weighted shifts.* Ergodic Theory and Dynamical Systems, v. 35, n. 3, p. 691-709, 2015.

[18] HOCHMAN, Michael. *Notes on ergodic theory.* Classroom notes, 2013.

[19] BERNARDES Jr, N. C.; BONILLA, A.; MÜLLER, V.; PERIS, A. (2013). *Distributional chaos for linear operators.* Journal of Functional Analysis, 265(9), 2143-2163.

[20] BAYART, Frédéric; GRIVAUX, Sophie. *Frequently hypercyclic operators.* Transactions of the American Mathematical Society, v. 358, n. 11, p. 5083-5117, 2006.

[21] BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. *Fundamentos de análise funcional.* SBM, 2012.

[22] KAMTHAN, P. K., GUPTA, M. (1981). *Sequence spaces and series* (Vol. 65). Marcel Dekker Incorporated.

[23] ROLEWICZ, Stefan. *Metric linear spaces*, Polish Sci. Publ., Warsaw, 1972.

[24] ENFLO, P. *On the invariant subspace problem for Banach spaces. Acta Mathematica*, v. 158, n. 1, p. 213-313, 1987.

[25] READ, C. J. *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, 2: Hypercyclic operators.* Israel Journal of Mathematics, v. 63, n. 1, p. 1-40, 1988.

[26] MENET, Quentin. *Inverse of frequently hypercyclic operators*, 2019.

[27] MENET, Quentin. *Linear chaos and frequent hypercyclicity.* Transactions of the American Mathematical Society, v. 369, n. 7, p. 4977-4994, 2017.

[28] BAYART, Frédéric; GRIVAUX, Sophie. *Invariant Gaussian measures for operators on Banach spaces and linear dynamics.* Proceedings of the London Mathematical Society, v. 94, n. 1, p. 181-210, 2007.

[29] DARJI, Udayan; PIRES, Benito. *Chaos and frequent hypercyclicity for composition operators*, 2020.