



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ANA FLÁVIA DA CUNHA LIMA

RIGIDEZ DE GRAFOS E APLICAÇÕES

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ANA FLÁVIA DA CUNHA LIMA

RIGIDEZ DE GRAFOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em matemática aplicada.

Orientador: Carlile Campos Lavor

O ARQUIVO DIGITAL CORRESPONDE À
VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFEN-
DIDA PELA ALUNA ANA FLÁVIA DA CU-
NHA LIMA, E ORIENTADA PELO PROF.
DR(A). CARLILE CAMPOS LAVOR.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS

2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES, 33003017004P1

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

L628r Lima, Ana Flávia da Cunha, 1991-
Rigidez de grafos e aplicações / Ana Flávia da Cunha Lima. – Campinas,
SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Carlile Campos Lavor.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grafos. I. Lavor, Carlile Campos, 1968-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Graph rigidity and applications

Palavras-chave em inglês:

Graph theory

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestra em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Carlile Campos Lavor [Orientador]

João Eloir Strapasson

Leo Liberti

Data de defesa: 28-09-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de setembro de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). CARLILE CAMPOS LAVOR

Prof.(a). Dr(a). JOÃO ELOIR STRAPASSON

Prof.(a). Dr(a). LEO LIBERTI

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Não é novidade o quão difícil a carreira acadêmica pode ser. Existe um padrão muito alto a ser mantido, e espera-se que todo aluno tire as melhores notas, o que por si só já seria um trabalho que ocupa boa parte de seu tempo. Adicionalmente, existe também a expectativa de fazer pesquisa e produzir conhecimento novo. Isso, somado a possíveis atividades extracurriculares (como congressos e workshops) torna intensa a experiência de se fazer um mestrado.

De fato, eu posso dizer que foram dois anos que passaram-se muito rápido, nos quais eu aprendi muito. Não só em termos acadêmicos, mas o que realmente torna essa experiência complicada, na minha opinião, é ter a disciplina e a calma para saber lidar com todas as exigências e ainda assim manter-se sã. Descobri o quão importante é saber regular o meu tempo, deixando espaço para todas as coisas importantes, profissionais e pessoais.

Por isso, eu gostaria de agradecer a várias pessoas que me deram apoio e orientação nessa fase, fossem conselhos sobre o mestrado ou conselhos sobre a vida (os quais muitas vezes acabavam se misturando). Gostaria também que elas soubessem que eu vou levar para sempre as lições que aprendi. Espero tê-las por perto por muito mais tempo, pois me fizeram ser uma pessoa melhor.

Primeiramente, gostaria de agradecer a meus pais, que sempre me deram apoio para que eu pudesse fazer o que eu gosto. Especialmente à minha mãe, que além de ser uma pessoa incrível, também sempre foi uma grande amiga. Obrigada por serem compreensivos nas horas mais difíceis (como quando eu não tinha bolsa) e por acreditarem no meu trabalho.

Meus agradecimentos também a meu orientador, Carlile Lavor, o qual me ensinou muito mais do que se aprende em aulas. Leo Liberti, pelas conversas e brainstormings os quais contribuíram para a melhoria dessa dissertação e deram um novo ânimo para que eu pudesse realizar minhas tarefas. Professor Aurelio, pelos conselhos e pela ajuda.

Gostaria também de agradecer aos meus colegas de laboratório e de pós-graduação, pela companhia e pelas horas de estudo em grupo, sem as quais a minha rotina teria sido muito mais difícil e cansativa.

E finalmente, aos meus amigos, que deram o suporte necessário para que eu pudesse passar por essa fase, pelas (muitas) conversas, cafés e coxinhas. Muito obrigada.

Em especial Julianna Pinele, João Gomes, Christiane Rodrigues e Leonardo Pennetta.
Meus agradecimentos também à CAPES, a qual financiou meu mestrado.

Resumo

Essa dissertação trata da teoria de rigidez de grafos, bem como algumas de suas aplicações. Inicialmente, é feita uma abordagem através de deformações de malhas e graus de liberdade, bem como um apanhado geral de teoria de grafos, a qual será usada no decorrer do texto.

Partimos então para uma definição mais precisa de rigidez, apresentando também os termos de rigidez infinitesimal e rigidez estática, assim como relações entre essas definições. No penúltimo capítulo, desenvolvemos uma classe de grafos a qual é globalmente rígida - outra modalidade de rigidez.

Por último, apresentamos uma aplicação à teoria de grafos, relacionada a determinar-se rigidez em grafos isostáticos no plano. Utilizando Sequências de Henneberg, um algoritmo é apresentado para esse fim.

Abstract

This dissertation approaches rigidity theory and applications. At first, an analysis of grid deformations and degrees of freedom will be made, along with a general overview of graph theory, to be used ahead in the text.

We move forward more precise definitions of rigidity, also presenting the terms of infinitesimal rigidity and static rigidity and their relations to each other. In the penultimate chapter, we develop a class of graphs which is globally rigid - another modality of rigidity to be presented.

At last, we present an application to graph theory about how to determine rigidity in isostatic graphs in the plane, followed by an algorithm based on Henneberg Sequences.

Lista de Ilustrações

1.1	Poliedros no espaço.	15
1.2	Exemplo de uma malha.	16
1.3	Malha com a primeira coluna coberta.	16
1.4	Exemplo de uma deformação em uma malha.	17
1.5	Exemplo de uma malha rígida.	17
1.6	Ilustração da proposição 2	17
1.7	Exemplo de uma situação aonde duas barras ligadas por uma articulação são conectadas a uma parte rígida de uma malha não-rígida.	18
1.8	Exemplo de uma situação aonde duas barras ligadas por uma articulação são conectadas a uma parte não-rígida de uma malha não-rígida.	18
1.9	Graus de liberdade de um segmento de reta o plano.	20
1.10	Análise de graus de liberdade de um triângulo no plano.	22
2.1	Exemplo de um grafo com 8 vértices e 11 arestas.	25
2.2	Exemplo de um grafo desconexo.	26
2.3	Exemplo de grafos isomorfos.	27
2.4	Exemplo de um possível subgrafo (destacado em vermelho).	27
2.5	Exemplo de um caminho.	28
2.6	Contra-exemplo de que nem toda trilha é um caminho.	28
2.7	Ilustração do lema 2 para o caso $n = 1$	29
2.8	Exemplo de grafos completos.	30
2.9	Exemplo de um grafo bipartido.	31
2.10	Grafos Bipartidos Completos.	32
2.11	$P_0 = K_1 = K_{0,1}$, $P_1 = K_2 = K_{1,1}$ e $P_2 = K_{1,2}$ - grafos isomorfos.	32
2.12	$C_3 = K_3$ e $C_4 = K_{2,2}$	33
2.13	Exemplo de uma árvore.	33
2.14	Ilustração do lema 5.	34
2.15	As arestas em vermelho fazem parte de uma árvore geradora do grafo, junto com seus vértices.	34
2.16	Os vértices destacados em verde são as folhas da árvore.	35

2.17	Os vértices em cinza são aqueles em U , e as arestas em vermelho pertencem a $E(U)$	36
2.18	K_4 e $K_{2,4}$ em suas formas planares.	37
2.19	Construção do grafo K_5	38
2.20	Tentativa de construir uma versão de $K_{3,3}$ que seja planar.	38
2.21	Faces de um grafo.	38
2.22	Um mesmo grafo pode ter relações entre faces diferentes de acordo com o modo como é desenhado.	39
2.23	Utilizando as faces de um grafo planar, é possível construir um novo mapeamento.	40
2.24	Representando uma malha como um grafo bipartido.	41
3.1	Sistema do exemplo do capítulo.	44
4.1	Sistema rígido porém não infinitesimalmente rígido.	50
4.2	Exemplo de um grafo mapeado de modo que seu sistema resultante é flexível (<i>a</i>), rígido (<i>b</i>) e infinitesimalmente rígido (<i>c</i>).	50
4.3	Sistema infinitesimalmente rígido.	52
5.1	O sistema acima é rígido, porém seu grafo pode dar origem a um sistema flexível.	61
5.2	Exemplo de uma 2-árvore.	63
5.3	Exemplo de uma 2-extensão.	65
5.4	Exemplo de um 2-split de arestas.	66
5.5	Exemplo de um 2-circuito.	67
7.1	Sistemas equivalentes porém não congruentes.	72
7.2	Um exemplo de subdivisão.	73
7.3	Um exemplo de um split.	73
7.4	Exemplo de pinching.	75
7.5	Exemplo de grafting.	76
7.6	Exemplo de um grafo body-bar	76
8.1	Exemplo de uma sequência de Henneberg no plano.	83

Sumário

Dedicatória	v
Agradecimentos	vi
1 O Problema da Cobertura de Malhas	15
1.1 Malhas e Suas Movimentações	15
1.2 Sistemas e suas Movimentações	19
1.3 Graus de Liberdade	20
1.4 O Problema da Cobertura de Malhas e Graus de Liberdade	23
2 Grafos	25
2.1 Alguns Tipos Clássicos de Grafos	29
2.1.1 O Grafo Completo	29
2.1.2 Grafos Bipartidos	30
2.2 Árvores	31
2.3 Grafos Planares	37
2.4 A Solução Para o Problema da Cobertura de Malhas	41
3 Rigidez	43
4 Rigidez Infinitesimal	48
4.1 A Matriz de Rigidez	53
4.2 Translações e Rotações	54
4.3 Rigidez na Reta	57
5 Aspectos combinatoriais	61
5.1 Rigidez no Espaço	68
6 Rigidez Estática	69
6.1 A Matriz de Stress	70
7 Rigidez Global	71
7.1 Primeiras Definições	71

7.1.1	Grafos e Sistemas Body-Bar	74
7.2	O Resultado Principal do Capítulo	77
7.3	Outros Resultados Necessários	77
7.4	Determinando Rigidez Generica Global em Sistemas Body-Bar	78
7.5	Inserção de Corpos	79
7.6	Grafos Body-Bar Globalmente Rígidos	81
8	Sequências de Henneberg	82
8.1	Sequências de Henneberg no Plano	82
8.2	Criando um Algoritmo	83
8.3	Construções de Henneberg no Espaço	83
9	Licença	89
9.1	Sobre a licença dessa obra	89
10	Licença	90
10.1	Sobre a licença dessa obra	90

Introdução

O objetivo desse trabalho é definir o conceito de rigidez e quais as condições para que tenhamos uma estrutura desse tipo.

É possível encontrar traços de abordagens analíticas para a teoria de rigidez em trabalhos tão antigos quanto os de Arquímedes e Leonardo da Vinci. Porém, foi no século 19 onde essa área teve real desenvolvimento, resultando em três linhas distintas de pesquisa.

Uma vertente surgiu dos avanços em máquinas e mecanismos (trazidos também pela revolução industrial), fazendo-se necessário entender como mecanismos flexíveis e rígidos funcionavam. Outra linha de desenvolvimento surgiu em pesquisas sobre a construção de pontes e ferrovias, também no século 19, o que levou a um grande desenvolvimento das teorias de rigidez infinitesimal e rigidez estática.

Mas rigidez não deriva apenas de problemas reais. Havia também uma linha de pesquisa puramente geométrica, que passa por Euclides, Cauchy, e vem até o presente. A análise inicial era feita em poliedros convexos e quando estes não apresentariam mudanças em suas configurações - o que, hoje em dia, é equivalente a dizer que o que era estudado eram condições para que fossem rígidos.

Em 1970, Laman em seu paper “On graphs and rigidity of plane skeletal structures” ([13]) também investigou as propriedades combinatoriais de grafos mapeados no plano, dando origem ao seu famoso teorema, conhecido hoje como “Condições de Laman”.

Recentemente, temos também Conelly, o qual fez importantes contribuições, particularmente na área de rigidez global geral ([4]). Seu paper sobre o assunto será abordado mais a fundo no capítulo sobre Rigidez Global Geral.

Inicialmente faremos um apanhado sobre teoria de grafos e conceitos iniciais de rigidez (malhas e graus de liberdade). Grafos são parte do tema central no qual a teoria se desenvolve. A estrutura geométrica a qual será estudada é chamada aqui de *sistema*: dado um grafo $G = (V, E)$, onde V é seu conjunto de vértices e E seu conjunto de arestas, temos um sistema $(V, E, p) \in \mathbb{R}^m$ quando associamos a cada vértice de G uma coordenada $p_i \in \mathbb{R}^m$, $1 \leq i \leq |V| = n$.

Intuitivamente, dizemos que uma estrutura é rígida se é resistente a distorção mesmo se suas articulações são flexíveis. Um sistema pode ser rígido de maneiras diferentes: existem definições como *rigidez infinitesimal*, *rigidez geral* e *rigidez global*,

as quais serão apresentadas no decorrer do texto, conforme serão estudadas. A cada uma, relaciona-se uma teoria ligeiramente diferente, assim como classes de grafos os quais sempre possuirão tal propriedade - problema o qual encontra-se resolvido em algumas instâncias, porém possui ainda muito terreno a ser explorado e em vários casos permanece em aberto.

No início do texto, será dada uma breve definição de rigidez, e uma primeira técnica para determiná-la será apresentada, utilizando graus de liberdade e malhas.

Mais adiante, a teoria de grafos necessária será desenvolvida, passando por árvores e grafos planares. Nesse ponto, termina a parte introdutória do trabalho, e é feito um apanhado sobre o problema inicial para dimensões 1, 2 e 3, as quais serão o foco do trabalho.

A seguir, o conceito de rigidez infinitesimal é apresentado, bem como exemplos associados a ela, e falamos também sobre sistemas de coordenadas nos quais a teoria é trabalhada.

Muitas vezes, rigidez não depende apenas do grafo do sistema, mas também das coordenadas nos quais seus vértices se encontram. Por essa razão, dois sistemas que possuem o mesmo grafo podem não ter as mesmas propriedades, diferindo no que se diz a rigidez. Na próxima seção, então, são desenvolvidas maneiras combinatoriais de se determiná-la, ou seja, analisamos sob quais condições podemos dizer que um sistema é rígido baseado em seu grafo.

A seguir é dada uma breve descrição de rigidez estática, e continuamos a análise descrevendo rigidez geral global, junto com a construção de uma classe de grafos a qual possui essa propriedade.

Finalmente, na última seção são apresentadas sequências de Henneberg, e um algoritmo (ainda em desenvolvimento) o qual responde se um grafo no plano é isostático ou não.

Capítulo 1

O Problema da Cobertura de Malhas

O foco aqui será a construção de estruturas de um tipo específico, concentrando-se em como planejá-las para que tenham certas propriedades, de acordo com [8].

Iniciamos com uma abordagem baseada em malhas no plano. Essa é uma maneira simplificada de começar a análise, que depois será expandida para estruturas no espaço. A ideia é encontrar configurações que façam com que a malha seja rígida (ou seja, não sofra distorções) adicionando-se barras diagonais.

1.1 Malhas e Suas Movimentações

Considere uma malha retangular formada por por barras ligadas entre si em suas articulações. Essas barras formam *casas* (quadrados) como na figura 1.2, constituída por 6 casas na horizontal por 5 casas na vertical.

O primeiro problema a ser abordado trata de procurar o número mínimo de barras extras posicionadas diagonalmente a se adicionar de forma que a malha torne-se rígida - ou seja, que não haja distorção quando uma força é aplicada. Diremos que uma casa com uma barra extra estará *coberta*, como as casas na primeira coluna da malha na figura 1.3.

É necessário cobrir casas o suficiente para que a malha seja rígida. Obviamente, poderíamos cobrir todas as casas, mas como iremos ver, isso é desnecessário. Uma

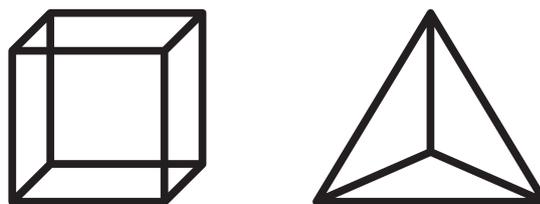


Figura 1.1: Poliedros no espaço.

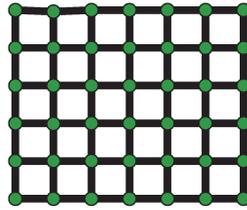


Figura 1.2: Exemplo de uma malha.

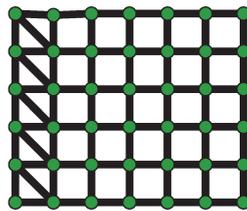


Figura 1.3: Malha com a primeira coluna coberta.

pergunta mais específica então seria: qual é o menor número de casas a serem cobertas para que uma malha seja rígida? Também é necessário analisar-se onde colocar tais coberturas, pois, como veremos a seguir, a configuração de coberturas em uma malha também influencia sua rigidez.

A primeira observação a se fazer é a seguinte:

Proposição 1. [8] *Se existe alguma linha ou coluna a qual não está coberta, então a malha não é rígida.*

Assim, vemos que duas malhas com o mesmo número de coberturas podem apresentar resultados diferentes relacionados à rigidez.

A segunda observação a se fazer é que, enquanto um triângulo (assim como um tetraedro no espaço) é rígido, um quadrado (assim como um cubo) não é. Então, uma malha, sendo formada de quadrados, obviamente não será rígida.

Analisando as malhas $2 \times k$ (e $k \times 2$), vê-se que elas necessitam de, pelo menos, k coberturas para que sejam rígidas. Analisando uma malha 2×2 , vê-se que a configuração mínima na qual rigidez é atingida é encontrada quando 3 das 4 casas estão cobertas, como por exemplo na figura 1.5

Também iremos fazer uso de uma operação que trata-se de acoplar duas barras unidas por uma articulação. A observação relativa a isso é a seguinte:

Proposição 2. [8] *Alocando-se duas barras com uma articulação em comum a uma malha rígida resulta em uma nova malha rígida.*

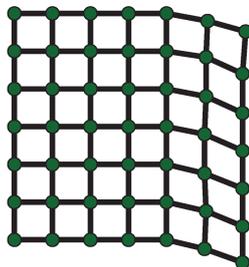


Figura 1.4: Exemplo de uma deformação em uma malha.

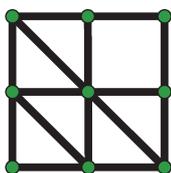


Figura 1.5: Exemplo de uma malha rígida.

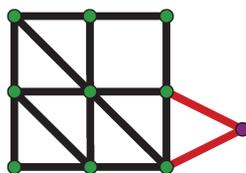


Figura 1.6: Ilustração da proposição 2

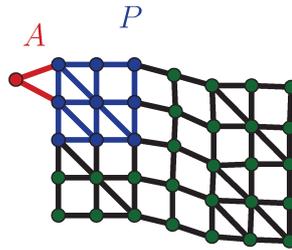


Figura 1.7: Exemplo de uma situação aonde duas barras ligadas por uma articulação são conectadas a uma parte rígida de uma malha não-rígida.

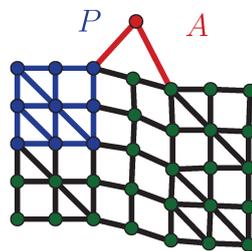


Figura 1.8: Exemplo de uma situação aonde duas barras ligadas por uma articulação são conectadas a uma parte não-rígida de uma malha não-rígida.

Essa observação é fácil de se entender, visto que duas barras ligadas por uma articulação formam um triângulo quando conectados a uma malha.

Definição 1. *Diremos que uma articulação conectando k barras possui **grau** k .*

Por exemplo, a articulação central na malha 2 x 2 acima possui grau 6.

Agora, vale analisar o problema inverso: dada uma malha que não é rígida, o que pode-se dizer ao adicionar duas barras conectadas por uma articulação?

Esse problema pode ser dividido em casos. Seja A a parte formada pelas duas novas barras e articulação, M a malha e P a parte na qual A é conectada. Se P possui partes as quais são rígidas e A está inteiramente contida em uma dessas partes, então a rigidez da nova configuração de P (vamos chamá-la de P') não é alterada. A malha como um todo não é rígida, ou seja, ainda existem pontos de deformação fora de P' , visto que nada fora dessa região foi modificado (figura 1.7).

Continuando com a hipótese na qual P possui partes rígidas, suponha, por outro lado, que as barras de A não estão na mesma parte rígida e não possuem um ângulo de 0 ou 180 graus entre si. Nesse caso, conforme a malha se deforma, A também se deformará (com o ângulo entre as duas novas barras modificando-se conforme a deformação ocorre), e a malha continua não sendo rígida (1.8).

Em ambos os casos acima, a articulação de A é chamada de removível, e eliminando-se partes desse tipo da malha e analisando o resultado é possível concluir se a malha original é rígida.

Dessa construção segue a seguinte observação:

Proposição 3. [8] *Uma malha rígida obtida de uma aresta adicionando-se conjuntos de duas barras unidas por uma articulação satisfaz a equação $r = 2n - 3$, onde r é o número de coberturas e n o número de articulações.*

Para uma malha $h \times k$, que possui $(h + 1)k$ articulações horizontais e $(k + 1)h$ articulações verticais (com um total de $2hk + h + k = r'$), definindo-se b como o número de coberturas, temos que

$$\begin{aligned} b = r - r' &= (2n - 3) - (2hk + h + k) = \\ &= h + k - 1 \end{aligned}$$

Para malhas pequenas, como as analisadas anteriormente, é fácil encontrar a configuração ideal (cobrindo-se o menor número possível de casas) para atingir rigidez. Porém, é possível encontrar situações em que existem malhas de dimensões iguais cujas coberturas, apesar de serem iguais em número, apresentam configurações diferentes, de forma que uma malha seja rígida e a outra não. Em casos como esse, são necessárias as ferramentas que serão desenvolvidas mais à frente.

1.2 Sistemas e suas Movimentações

A essa altura, será necessária a definição de conceitos adicionais. Os termos *barra* e *articulação* serão substituídos, respectivamente, por *segmento* e *ponto*, pois agora será dado início à abordagem mais matemática e abstrata da teoria, a qual será formalmente definida no próximo capítulo.

Definição 2. *Um sistema em \mathbb{R}^m é um par $\mathcal{F} = (V, E, p)$, aonde $G = (V, E)$ é um grafo e $p = (p_1, \dots, p_{|V|}) \in \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m|V|}$, tal que os vértices de G são mapeados nos pontos p_i , $1 \leq i \leq |V|$*

Definição 3. *O movimento de um sistema, em qualquer dimensão, é chamado de **deformação** se os comprimentos dos segmentos não são alterados, mas ocorre alteração nas distâncias entre pares de seus pontos.*

Definição 4. *Movimentos que preservam as distâncias entre todos os pares de pontos de um sistema são chamados de **rígidos**.*

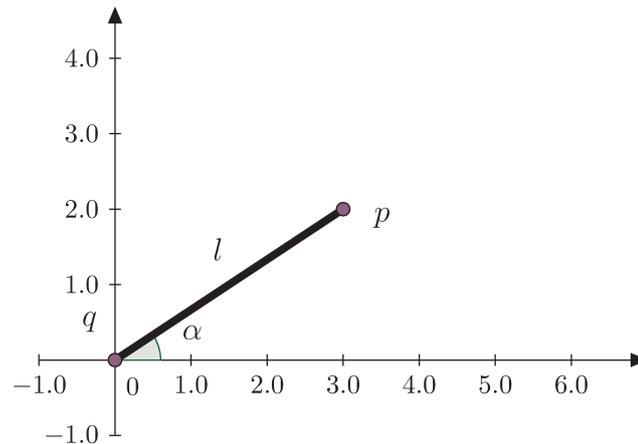


Figura 1.9: Graus de liberdade de um segmento de reta no plano.

Vale observar que, em qualquer movimento, a distância entre pontos ligados entre si não se altera nunca. O que pode mudar é a distância entre pontos que não são ligados entre si.

Definição 5. *Um sistema é considerado **rígido** se todos os seus movimentos são rígidos (ou seja, não admite deformações).*

A rigidez de um sistema depende da dimensão na qual esse sistema é analisado: por exemplo, o retângulo com uma diagonal é rígido no plano, mas no espaço admite uma deformação. Veremos a seguir o porquê.

1.3 Graus de Liberdade

Qualquer movimentação de um ponto no plano pode ser alcançada através de uma combinação de um movimento vertical e outro horizontal. Por essa razão, dizemos que o ponto no plano possui dois graus de liberdade.

Agora, seja r um segmento de reta de comprimento l e p e q os pontos de suas extremidades. Qualquer movimento de r no plano pode ser definido por três coordenadas: duas referentes à localização de p , e uma referente ao ângulo que r faz com o eixo horizontal. Assim, dizemos que r possui três graus de liberdade.

Considerando um corpo rígido mais complicado, podemos escolher um segmento de reta nesse objeto e, salvo o caso de reflexões, a posição do corpo no plano será dada pelas três coordenadas que localizam o segmento. Concluímos então que todo corpo rígido, salvo um ponto isolado, possui três graus de liberdade no plano.

Essa ideia pode ser utilizada para analisar sistemas no plano.

No exemplo abaixo, começamos com três pontos não-colineares e 6 graus de liberdade. Adicionando-se um segmento ligando um par desses pontos reduz os graus do

sistema a 5 (3 graus de liberdade da reta e 2 do ponto isolado). Adicionando-se outro segmento entre um par diferente, o sistema apresenta 4 graus de liberdade (3 correspondentes ao primeiro segmento e 1 ao ângulo da segunda reta com o eixo horizontal). Por fim, formando-se um triângulo reduz-se os graus de liberdade do sistema a 3, ou seja, ele agora é rígido.

Um quadrado, por outro lado, possui 4 graus de liberdade: 2 de translação, 1 de rotação (como nos sistemas rígidos), e 1 que diz respeito às deformações que podem ocorrer em sua estrutura, a qual não é rígida. Isso pode ser visto facilmente aplicando-se o método descrito no parágrafo anterior, no qual começa-se com 4 pontos isolados (e um total de 8 graus de liberdade), e adiciona-se segmentos para ligá-los, os quais diminuem um grau de liberdade cada uma. Como são adicionadas quatro retas, o resultado segue.

Definição 6. Dizemos que um segmento que não altera os graus de liberdade de um sistema é um segmento *implícito*.

Então, o número de graus de liberdade de um sistema pode ser encontrado adicionando-se segmentos até que o sistema torne-se rígido, com atenção para que nenhum segmento seja implícito. Espera-se que um sistema com n pontos e r segmentos *corretamente postos* seja rígido quando o número de segmentos for suficiente para diminuir os graus de liberdade de $2n$ (pontos isolados) para 3. Fazendo $2n - r = 3$ e resolvendo para r , concluímos que:

Um sistema deve atingir rigidez com $2n - 3$ segmentos colocados de maneira correta.

Existem, entretanto, casos especiais nos quais adicionar-se um segmento a uma malha faz com que seus graus de liberdade sejam diminuídos mais do que uma unidade. Porém, para esses casos é necessário o desenvolvimento de um modelo mais elaborado, o que será feito mais adiante.

É válido observar que durante os argumentos propostos aqui para a generalização das ideias presumimos que quaisquer três vértices tomados em um sistema não são colineares, ao contrário do sistema descrito no último exemplo. Ao selecionar aleatoriamente três pontos no espaço, a probabilidade de que todos se encontrem em uma reta é nula, o que significa que os sistemas nos quais existem pontos colineares são exceções. Sistemas desse tipo serão definidos mais claramente nos capítulos seguintes.

É possível estender essa teoria para outros espaços: um ponto no \mathbb{R}^m possui m graus de liberdade. Então, um sistema com n pontos e s segmentos *corretamente postos* deveria ter (para modelos simples) $mn - s$ graus de liberdade, até que esse número seja reduzido aos graus de liberdade de um corpo rígido no \mathbb{R}^m , df_m . Assim, analogamente ao que foi feito antes, espera-se que um sistema no \mathbb{R}^m com n pontos necessite de $mn - df_m$ segmentos *corretamente postos* para atingir rigidez.

Existem casos nos quais a remoção de qualquer segmento faz com que o sistema resultante não seja rígido.

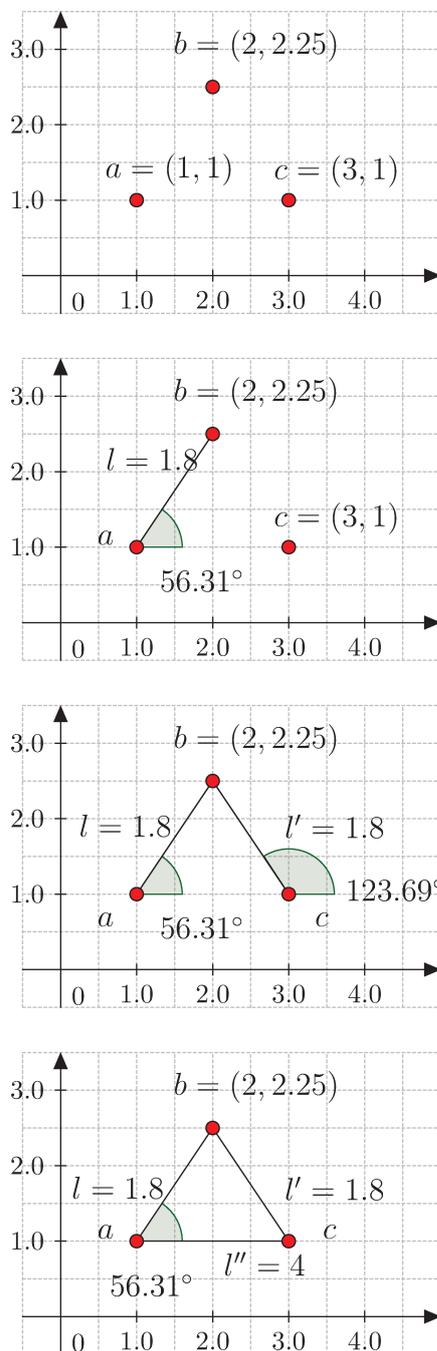


Figura 1.10: Análise de graus de liberdade de um triângulo no plano.

Definição 7. Se a remoção de qualquer segmento em um sistema (V, E, p) resulta em um novo sistema o qual não é rígido, (V, E, p) é chamado de **sistema isostático**.

Definição 8. Alternativamente, se ao deletar-se um segmento específico seu sistema mantém os mesmos movimentos de antes, esse é chamado de **segmento implícito**.

Definição 9. O sistema o qual mantém-se rígido após a remoção de qualquer aresta é chamado de **redundantemente rígido**.

1.4 O Problema da Cobertura de Malhas e Graus de Liberdade

Vamos explorar um pouco mais o problema de tornar uma malha $h \times k$ fixa. Como essa malha possui h casas na horizontal e k casas na vertical, é fácil ver que existem $(k + 1)(h + 1) = n$ articulações no total (pois cada linha/coluna possui uma articulação a mais do que o número de casas).

Existem, também, um total de $2hk + h + k$ barras (r'). O número total de segmentos b é dado, portanto, pela soma dos segmentos originais da malha, r' , e os segmentos adicionados para atingir-se rigidez (as coberturas), r :

$$\begin{aligned} r &= b + r' \Rightarrow b = r - r' \\ &= 2n - 3 - (2hk + h + k) = \\ &= h + k - 1 \end{aligned}$$

Com a ferramenta de análise de graus de liberdade em mãos, também é possível obter-se uma análise similar: já sabemos os valores de r , r' e n . Assumindo que não serão adicionados segmentos implícitos, a malha possui

$$2n - r' = h + k + 2$$

graus de liberdade. Logo, ela possui

$$(h + k + 2) - 3 = h + k - 1$$

graus *internos* de liberdade, o que concorda com a análise anterior.

Ainda vale analisar o que acontece com uma malha quando são adicionados partes extras, tais como duas barras ligadas por uma articulação: adicionando-se o ponto extra ao sistema aumenta em 2 os graus de liberdade, porém cada barra adicionada

diminui os graus de liberdade em uma unidade. Logo, a mudança total no número de graus de liberdade é nula. Isso significa que remover um ponto de um sistema cujo grau seja 2, salvo exceções, resulta em um novo sistema com o mesmo número de graus de liberdade.

Capítulo 2

Grafos

As demonstrações dos resultados que não aparecem aqui poderão ser encontradas nas referências, especificamente em [8] e [18].

Definição 10. Um grafo é um par (V, E) , onde V é um conjunto finito cujos elementos são chamados de **vértices** e E é uma coleção de par de vértices chamados de **arestas**.

É válido ressaltar que serão considerados apenas grafos sem loops (arestas que começam e terminam no mesmo vértice) e sem arestas duplas (duas arestas com as mesmas extremidades).

Na figura 2.1, temos o exemplo de um grafo com 8 vértices e 11 arestas. Assim, se a e b são vértices de um grafo e estão conectados por uma aresta $e = \{a, b\}$, dizemos que a e b são *adjacentes*, e essas são as *extremidades* de e .

Definição 11. Um grafo (V, E) é denominado **desconexo** se V pode ser particionado em dois conjuntos não-vazios A e B tais que nenhum vértice de A possui uma aresta cuja outra extremidade esteja em B (e vice-versa). Se essa partição não existe, então (V, E) é **conexo**.

O grafo no início dessa seção é conexo. Na figura 2.2, temos o exemplo de um grafo desconexo.

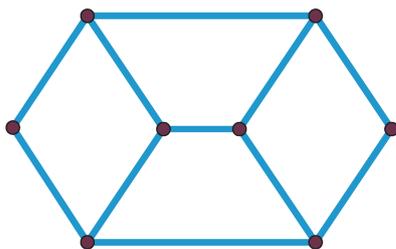


Figura 2.1: Exemplo de um grafo com 8 vértices e 11 arestas.

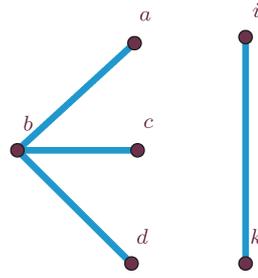


Figura 2.2: Exemplo de um grafo desconexo.

Vale ressaltar que, por ser uma partição, A e B são conjuntos não-vazios tais que $A \cup B = V$ e $A \cap B = \emptyset$. Na figura 2.2, $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{i, k\}$.

Definição 12. O **grau** de um vértice $v \in V$ é o número de arestas no grafo (V, E) que possuem v como uma de suas extremidades, e será denotado por $\rho(v)$.

Vértices de grau zero são chamados *isolados*, e de grau 1, *pendentes*.

Contando o grau de todos os vértices do grafo, conta-se cada aresta duas vezes. Desse raciocínio segue o seguinte lema, muito utilizado em teoria de Grafos:

Lema 1. Seja $G = (V, E)$. Então,

$$\sum_{v \in V} \rho(v) = 2|E|$$

Definição 13. O **grau médio** de um grafo $G = (V, E)$ é dada por

$$\bar{\rho} = \frac{2|E|}{|V|}$$

Definição 14. Dois grafos (V, E) e (U, D) são **isomorfos** se existe uma função bijetora $c: V \rightarrow U$ tal que $(c(a_i), c(a_j)) \in D$ se e somente se $(a_i, a_j) \in E$.

Na prática, isso significa que ambos os grafos possuem o mesmo número de vértices, os quais estão ligados entre si da mesma forma (o que implica também que possuem o mesmo número de arestas). Pode-se dizer que são o mesmo grafo, a menos de uma transformação - e é por isso que em alguns momentos falaremos sobre "o" grafo completo de n vértices, por exemplo: dois grafos completos com o mesmo número de vértices são, para todos os fins, iguais. O mesmo se aplica a vários outros tipos especiais de grafos, a serem mostrados mais a frente. Na figura 2.3, os dois grafos apresentados são isomorfos.

Definição 15. Se tem-se (V, E) e (U, D) tais que $U \subseteq V$ e $E \subseteq D$, então (U, D) é chamado de **subgrafo** de (V, E) . Se $U = V$, então (U, D) é um **grafo gerador** de (V, E) .

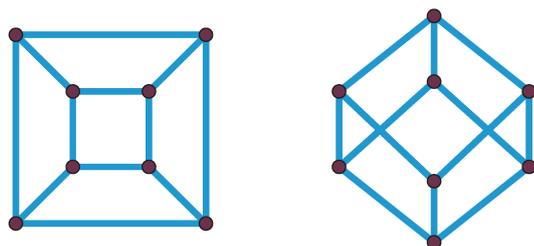


Figura 2.3: Exemplo de grafos isomorfos.

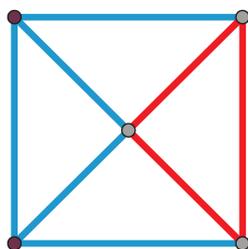


Figura 2.4: Exemplo de um possível subgrafo (destacado em vermelho).

Na figura 2.4, temos grafo e , destacado (vértices em cinza e arestas em vermelho), um exemplo de um possível subgrafo:

Utilizando as definições 11 e 15, definimos o seguinte termo:

Definição 16. As **componentes** de um grafo $G = (V, E)$ são seus subgrafos conexos *maximais*.

Assim, no caso do grafo desconexo ilustrado no exemplo da Definição 11 (figura 2.2), suas componentes são os subgrafos (A, U) e (B, U') , onde $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{i, k\}$, e U e U' são seus respectivos conjuntos de arestas.

Definição 17. Um **passaio** em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência $P = (v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$, com $v_i \in V$ e $e_i \in E$, e os extremos de e_i são v_{i-1} e v_i . $|P| = k$ denota o comprimento do passaio.

Note que, em um passaio, as arestas e vértices de um grafo podem se repetir. Para casos onde uma dessas alternativas não acontece, existem outros tipos especiais de percursos:

Definição 18. Uma **trilha** é um passaio que não repete arestas.

Definição 19. Um **caminho** é um passaio que não repete vértices.

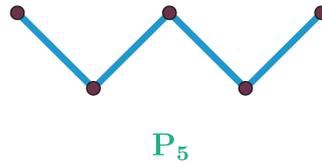


Figura 2.5: Exemplo de um caminho.

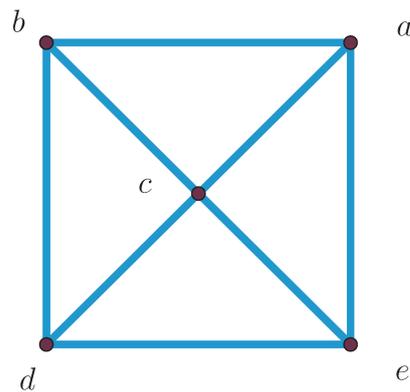


Figura 2.6: Contra-exemplo de que nem toda trilha é um caminho.

O caminho $P = (v_0, e_1, \dots, e_k, v_k)$ em um grafo $G = (V, E)$, com $v_i \in V$ e $e_i \in E$ também pode ser visto como um grafo, e é denotado por P_k (onde k é seu comprimento).

Como os vértices não se repetem em um caminho, as arestas também não se repetem. Logo, todo caminho é uma trilha. O contrário, porém, não é sempre verdade: no grafo da figura 2.6, a trilha passando por a, b, c, e, d, c e a novamente, nessa ordem, é um exemplo.

Definição 20. Um **circuito** é um caminho fechado. Denota-se o circuito de n vértices por C_n .

O próximo lema, apesar de ser intuitivo, será provado pois possui como consequência um resultado muito utilizado em teoria de grafos.

Lema 2. Seja $G = (V, E)$. Se existe uma sequência S de vértices

$$a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$$

com a, b e $a_i \in V$ tal que todo par sucessivo de vértices é ligado por uma aresta, então a e b são ligados por um caminho em G .

Demonstração:

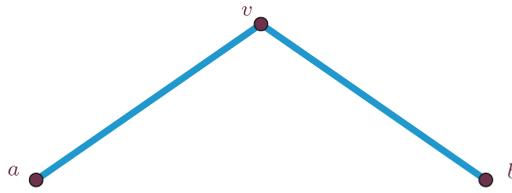


Figura 2.7: Ilustração do lema 2 para o caso $n = 1$.

A demonstração será feita por indução no número de vértices entre a e b , denotado por n . Para $n = 1$, o resultado é um caminho com 3 vértices, e segue diretamente que a e b são ligados (figura 2.7).

Seja a hipótese de indução válida para $n = k$, vamos prová-la para $k + 1$. Assim, sejam S uma sequência de vértices como no enunciado, tal que existem $k + 1$ vértices entre a e b , e S' a sequência de vértices

$$a = a_0, a_1, \dots, a_{k+1},$$

que é subsequência de S , contendo todos os vértices menos o último. Como existem k vértices entre a e a_{k+1} , esses dois vértices são ligados por um caminho P , pela hipótese de indução. Também sabemos que a_{k+1} é ligado a b . Assim, temos que $P \cup b$ é um caminho que vai de a até b . \square

Um resultado que segue do lema anterior é o seguinte:

Lema 3. *Dado $G = (V, E)$, se $a, b, c \in V$ e existe um caminho P_1 de a para b e um caminho P_2 de b para c , então existe um caminho P_3 de a para c .*

Agora é possível dar uma outra caracterização de conectividade em grafos utilizando as definições que acabaram de ser apresentadas:

Definição 21. *Um grafo é conexo se e somente se todos os seus pares de vértices são conectados por um caminho.*

2.1 Alguns Tipos Clássicos de Grafos

Existem certas estruturas de grafos que são utilizadas tão frequentemente que receberam nomes específicos. Nessa seção serão apresentadas algumas delas.

2.1.1 O Grafo Completo

Definição 22. *O grafo $G = (V, E)$ de n vértices no qual todo vértice $v \in V$ está conectado a todos os outros vértices é chamado de **Grafo Completo**, e é denotado por K_n .*

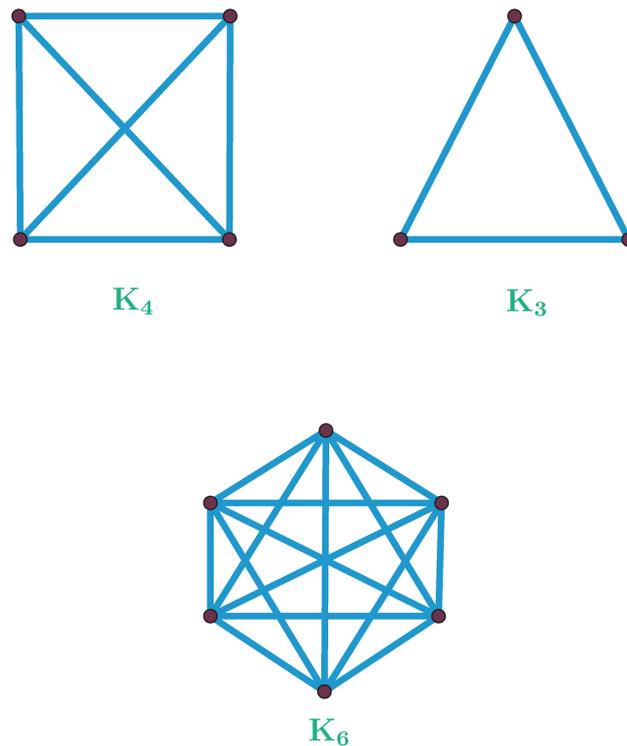


Figura 2.8: Exemplo de grafos completos.

Essa classe de grafos possui um número fixo de arestas, o qual pode ser obtido calculando-se todas as possíveis combinações dos vértices 2 a 2:

Lema 4. *Seja $G = (V, E)$ um grafo completo tal que $|V| = n$. Então*

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

É fácil ver também que esse é o número máximo de arestas que um grafo de n vértices pode ter, como ilustrado na figura 2.8.

2.1.2 Grafos Bipartidos

Definição 23. *Um grafo $G = (V, E)$ é **bipartido** se existe uma partição do seu conjunto de vértices em dois subconjuntos, A e B (isto é, $A \cup B = V$ e $A \cap B = \emptyset$) tal que toda aresta de E tenha uma extremidade em A e a outra em B .*

Logo, sua principal característica é o fato de que vértices que pertencem a partições iguais não podem estar conectados entre si.

No grafo bipartido da figura 2.9, temos duas partições, $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$.

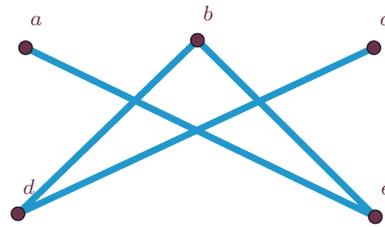


Figura 2.9: Exemplo de um grafo bipartido.

Definição 24. Se $|A| = m$, $|B| = n$ e E é o conjunto de todos os pares (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, então G é chamado de **Grafo Bipartido Completo** e denotado por $K_{m,n}$.

É fácil ver que, se $G = K_{m,n}$, então $|E| = mn$ (basta contar as arestas que saem de uma partição apenas, para ter-se certeza de que elas não serão contadas duas vezes).

Note que $P_0 = K_1 = K_{0,1}$, $P_1 = K_2 = K_{1,1}$ e $P_2 = K_{1,2}$, ou, na linguagem das definições já apresentadas, tais grafos são *isomorfos* (figura 2.11).

Note que $C_3 = K_3$ e $C_4 = K_{2,2}$ (figura 2.12).

2.2 Árvores

Definição 25. Uma **floresta** é um grafo sem circuitos. Uma **árvore** é um grafo conexo sem circuitos.

Um exemplo de uma árvore é o da figura 2.13.

Obviamente, cada componente conexa de uma floresta é uma árvore.

Um resultado que é muito utilizado na hora de provar resultados sobre árvores, devido ao uso do princípio de indução, é o seguinte:

Lema 5. [18] Sejam $G = (V, E)$ um grafo conexo, com $e \in E$. Então $G' = (V, E - e)$ é conexo se e somente se a aresta e pertence a um circuito de G .

Demonstração:

Suponha que $e = \{a, b\}$ ($a, b \in V$) pertence a um circuito C . Sejam $c, d \in V$ dois vértices quaisquer em G . Como G é conexo, existe um caminho de c para d . Se e não está nesse caminho, então esses dois vértices também estão conectados em G' .

Suponha agora que e está no caminho de c para d . Vamos chamar esse caminho de P_{cd} , e assumir, sem perda de generalidade, que possui a forma c, \dots, a, b, \dots, d . Sejam k o primeiro vértice de P_{cd} que também está em C , e u o último vértice de P_{cd} que está em C . Sabemos que ambos existem, pois a e $b \in P_{cd} \cap C$.

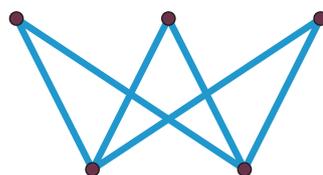
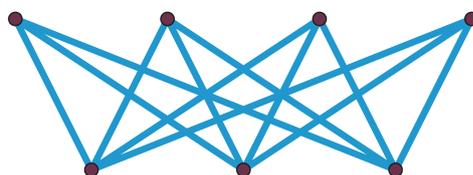
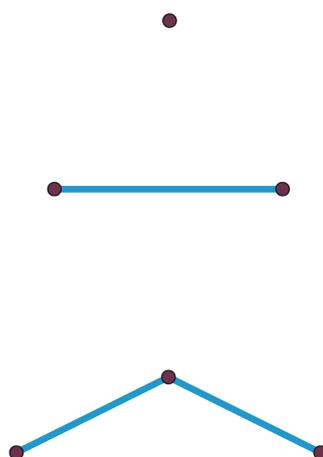
 $K_{3,2}$  $K_{4,3}$

Figura 2.10: Grafos Bipartidos Completos.

Figura 2.11: $P_0 = K_1 = K_{0,1}$, $P_1 = K_2 = K_{1,1}$ e $P_2 = K_{1,2}$ - grafos isomorfos.

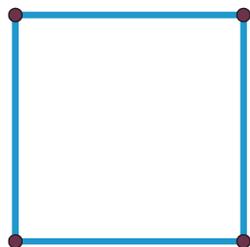
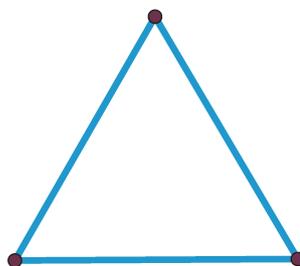
 C_4 

Figura 2.12: $C_3 = K_3$ e $C_4 = K_{2,2}$

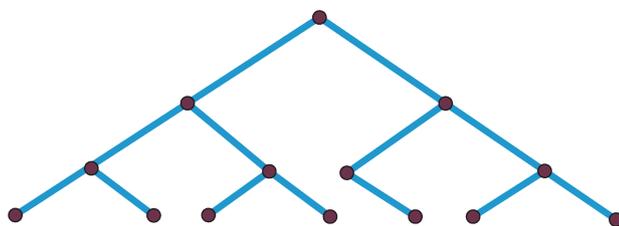


Figura 2.13: Exemplo de uma árvore.

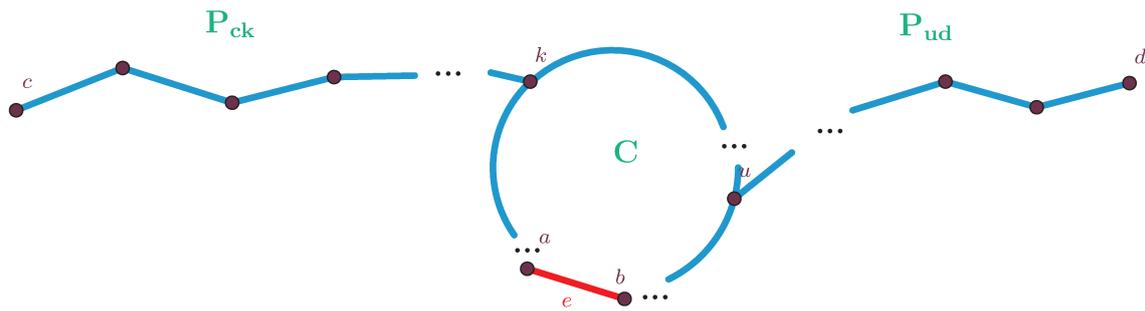


Figura 2.14: Ilustração do lema 5.

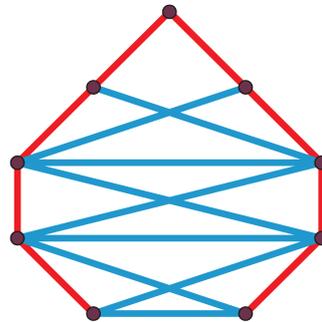


Figura 2.15: As arestas em vermelho fazem parte de uma árvore geradora do grafo, junto com seus vértices.

Vamos definir agora dois caminhos: P_{ck} , trecho de P_{cd} que vai até k , e analogamente, P_{ud} .

Sabemos então que existe um caminho de c até C , e de C até d . Agora, em $C - e$ ainda existe um caminho de u para k . Concatenando esses três caminhos e utilizando o lema 3, obtemos a primeira parte da prova.

Assuma que G' é conexo. Então existe um caminho de a para b em G' . Adicionando-se e nesse caminho, obtemos um circuito, e também o grafo G . Uma ilustração dessa demonstração pode ser vista na figura 2.14. \square

Lema 6. [18] *Um grafo é conexo se e somente se possui uma árvore geradora.*

Ou seja, todo grafo conexo $G = (V, E)$ possui um subgrafo $T = (V, E')$ com o mesmo conjunto de vértices e um conjunto de arestas E' tal que $E' \in E$, onde T é uma árvore. No grafo da figura 2.15, as arestas em vermelho fazem parte da árvore geradora, junto com seus vértices:

Definição 26. *Um vértice que possui grau 1 em uma árvore (ou floresta) é chamado de **folha** ou **vértice pendente**.*

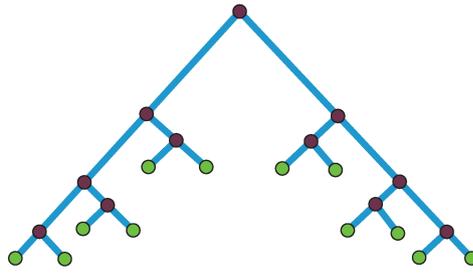


Figura 2.16: Os vértices destacados em verde são as folhas da árvore.

Na figura 2.16, os vértices em verde são as folhas da árvore:

Lema 7. [18] *Toda floresta com pelo menos um vértice possui uma folha.*

Demonstração:

Seja $P = a_0, a_1, \dots, a_k, v$ o caminho mais longo em uma floresta F . O vértice v possui um vizinho em P , a_k , logo seu grau é pelo menos um. Suponha que existe outro vértice u adjacente a v em F . Se $u \notin P$, então P pode ser estendido para um caminho maior que contenha u , logo não é o caminho mais longo em F , o que é uma contradição. Se $u \in P$, digamos, $u = a_j$, então $a_j, a_{j+1}, \dots, a_k, v$ formam um circuito, outra contradição. Logo, o grau de v é exatamente 1. \square

Lema 8. [18] *Sejam $G = (U, V)$ um grafo conexo, $v \in V$ um vértice pendente de G e $e \in U$ a aresta adjacente a v . Então o grafo $G' = (U - e, V - v)$ também é conexo. Em particular, se G é uma árvore, G' também é uma árvore.*

Demonstração:

Sejam $w, u \in V - v$. Como G é conexo, existe um caminho P_{wu} de w para u . Todos os vértices internos em P_{wu} possuem grau 2, e $u \neq v, w \neq v$. Logo $v \notin P_{wu}$. Assim, $P_{wu} \in G'$, logo G' também é conexo. Mais ainda, se G não possui circuitos, G' também não possui. \square

Lema 9. [18] *Se um grafo $G = (U, V)$ satisfaz duas das condições seguintes, então satisfaz as três:*

1. G é conexo
2. G não possui circuitos
3. $|E| = |V| - 1$

Claramente, se G satisfaz as condições 1 e 2, G é uma árvore. Então, esse lema é válido para concluir outras características de uma árvore: conexa e com o número de vértices uma unidade menos que o número de arestas, por exemplo.

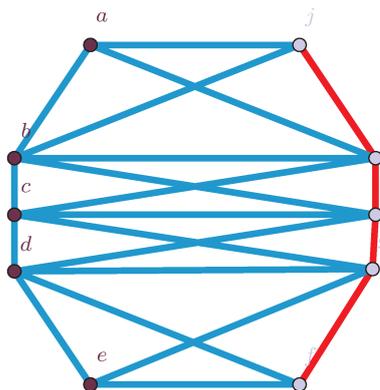


Figura 2.17: Os vértices em cinza são aqueles em U , e as arestas em vermelho pertencem a $E(U)$.

Definição 27. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então $E(U)$ será a coleção de vértices que possuem suas duas extremidades em U ($U \subseteq V$).

No grafo da figura 2.17, os vértices em cinza são aqueles em U , e as arestas em vermelho pertencem a $E(U)$:

Lema 10. [18] Um grafo $G = (V, E)$ não possui circuitos se e somente se $|E(U)| \leq |U| - 1$, $\forall \emptyset \subset U \subseteq V$

Demonstração:

Se $G = (V, E)$ não possui circuitos, seus subgrafos também não, e em particular todo subgrafo da forma $G' = (U, E(U))$. Logo G' é uma floresta com k componentes, e $|E(U)| = |U| - k \leq |U| - 1$.

Agora, seja U o conjunto de vértices de um circuito em G . Como o número de vértices de um circuito é igual ao seu número de arestas, $|E(U)| \geq |U|$. Logo, se $|E(U)| \leq |U| - 1 \forall \emptyset \subset U \subseteq V$, (V, E) não pode conter circuitos. \square

O próximo resultado traz um método para construir todas as árvores.

Definição 28. Seja $G = (V, E)$, com $a \in V$, $b \notin V$ e $e = \{a, b\}$. Então $G' = (V \cup b, E \cup e)$ é chamado de **1-extensão** de G .

Teorema 4. Um grafo G é uma árvore se e somente se pode ser construído a partir de um único ponto por uma sequência de 1-extensões.

Demonstração. Claramente, G' não contém circuitos, pois b possui um único vizinho. Também temos que

$$\begin{aligned} |E \cup \{e\}| &= |E| + 1 \\ &= |V| - 1 + 1 \end{aligned}$$

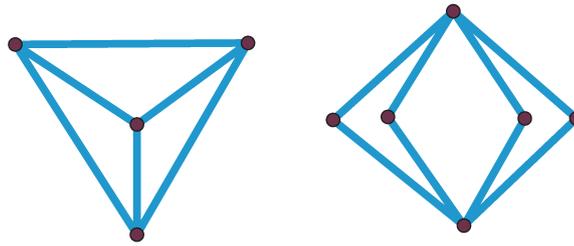


Figura 2.18: K_4 e $K_{2,4}$ em suas formas planares.

$$= |V \cup \{b\}| - 1$$

e assim, pelo teorema 9, G' é uma árvore.

Como toda árvore tem uma folha (que pode ser deletada, dando origem a uma árvore menor, seguindo um argumento indutivo segue que toda árvore pode ser contruída por uma sequência de 1-extensões.

2.3 Grafos Planares

Definição 29. Um grafo é dito **planar** se pode ser desenhado no plano sem que suas arestas se cruzem.

Alguns exemplos de grafos planares são K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , $K_{1,n}$ e $K_{2,n}$, para todo n . Na figura 2.18, K_4 e $K_{2,4}$ encontram-se em suas formas planares.

Os dois grafos não planares mais simples são K_5 e $K_{3,3}$. É fácil ver esse resultado utilizando a premissa de que, se todos os vértices de um grafo G pertencem a um circuito C , ele pode ser construído primeiramente construindo-se C e depois adicionando-se as arestas adicionais.

No caso de K_5 , seria necessário primeiramente construir C_5 . Depois, podemos adicionar quatro arestas, como na figura 2.19.

É fácil ver que existe uma aresta que deve ser adicionada ainda. Porém, isso não pode acontecer sem que essa última aresta cruze alguma outra aresta já colocada. O caso do grafo $K_{3,3}$ é análogo, e na figura 2.20 é mostrada uma tentativa de construir uma versão sua que seja planar (as cores dos vértices referem-se às suas partições).

Teorema 5. [18] (Kuratowski) Todo grafo não-planar possui uma cópia homeomórfica de K_5 ou $K_{3,3}$.

Definição 30. As **faces** de um grafo são as regiões do plano limitadas por suas arestas.

Na figura 2.21 encontra-se um dos grafos ilustrados no início da seção, com suas respectivas faces.

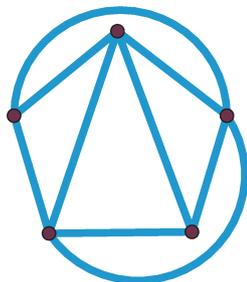


Figura 2.19: Construção do grafo K_5 .

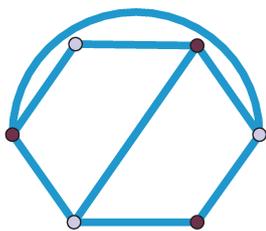


Figura 2.20: Tentativa de construir uma versão de $K_{3,3}$ que seja planar.

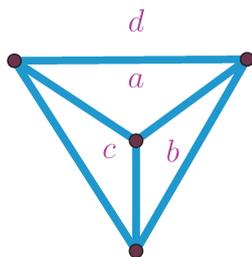


Figura 2.21: Faces de um grafo.

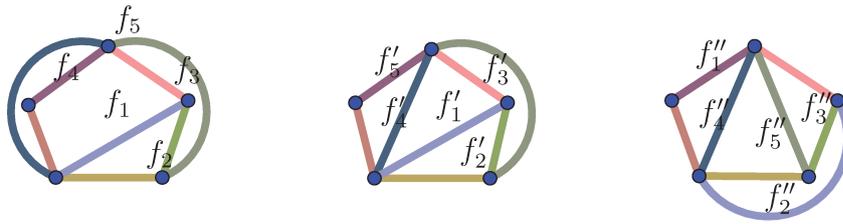


Figura 2.22: Um mesmo grafo pode ter relações entre faces diferentes de acordo com o modo como é desenhado.

Definição 31. O número de arestas na fronteira da face f de um grafo é dito **grau de f** , e é denotado por $\rho(f)$.

Lema 11. Seja $G = (V, E)$ um grafo com uma dada imersão planar, e seja F o conjunto de todas as suas faces. Então:

$$\sum_{f \in F} \rho(f) = 2|E|$$

É válido lembrar que um mesmo grafo pode ter mais de uma imersão planar. Embora seja algo parecido com o que ocorre ao falarmos de isomorfismos (grafos "iguais" desenhados de maneiras diferentes), a diferença aqui é que um mesmo grafo planar desenhado de maneiras diferentes pode ou não ter as mesmas relações entre suas faces, como na figura 2.22, onde apenas o segundo e o último grafos possuem as mesmas relações.

Acima, às arestas correspondentes foram dadas cores iguais nos três grafos, para que cada face pudesse ser visualizada.

Teorema 6. (Euler) Seja $G = (V, E)$ um grafo planar conexo. Então

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

Onde F é o número de faces de G .

Como todo desenho de um mesmo grafo possui os mesmos números de arestas e vértices, o teorema anterior implica que toda imersão planar de um grafo possui o mesmo número de faces.

Demonstração:

Primeiramente, vale observar que esse resultado é válido para árvores. Todo desenho planar de uma árvore possui apenas uma face, então $|F| = 1$. Pelo Lema 9, $|E| = |V| - 1$, logo o resultado segue.

O resto da demonstração será por indução em n , o número de arestas de G . A hipótese de indução é assumir que, se $G' = (V', E')$ é um grafo conexo e plano com

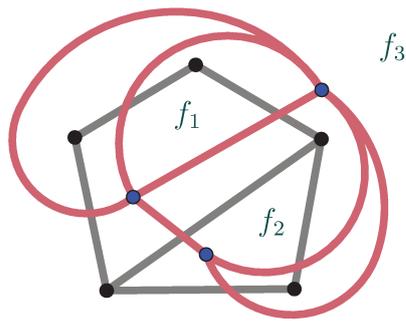


Figura 2.23: Utilizando as faces de um grafo planar, é possível construir um novo mapeamento.

um número de arestas menor do que n e conjunto de faces F' , então $|V'| - |E'| + |F'| = 2$. Também assumimos que G é um grafo conexo planar com n arestas. Se G é uma árvore, já foi demonstrado que a fórmula se confirma. Seja G então um grafo que não é uma árvore.

Assim, sabemos que G contém um circuito C . Seja e uma aresta de G , $e \in C$. Pelo Lema 5, $G' = G - e$ ainda é conexo. Também é planar, e denotaremos seu conjunto de faces por F' . Como e estava em um circuito, as faces de cada um de seus lados eram diferentes (uma face dentro de C e outra fora de C), de modo que ao remover e essas faces se juntam e G' possui uma face a menos que G :

$$|F'| = |F| - 1$$

Também sabemos que

$$|E'| = |E| - 1$$

e pela hipótese de indução

$$|V'| - |E'| + |F'| = 2$$

Combinando as três equações anteriores, o resultado segue. \square

Utilizando as faces de um grafo planar, é possível construir um novo mapeamento: tome cada face como um vértice, e para cada aresta do grafo inicial, ligue com uma aresta as faces que se tocarem, como na figura 2.23, aonde o grafo original está em preto e cinza.

Definição 32. O grafo obtido pelo método descrito anteriormente é chamado de **Grafo Dual** de G .

É possível fazer uma relação bijetora das arestas do grafo dual para as arestas de um grafo planar G , o que é fácil ver da figura acima, onde cada aresta do dual cruza

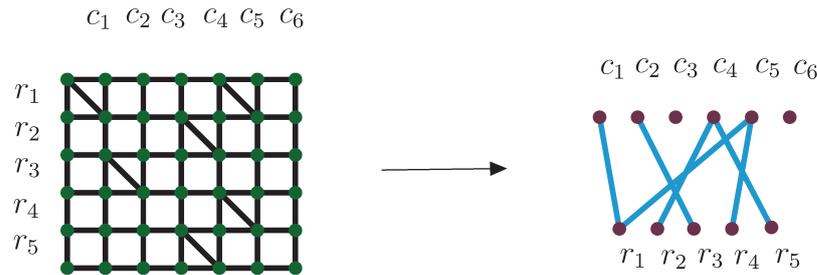


Figura 2.24: Representando uma malha como um grafo bipartido.

uma aresta de G . Assim, o grafo dual é único. Também vale notar que os papéis de faces e vértices são invertidos: para cada face em G existe um vértice correspondente no dual, e vice-versa.

2.4 A Solução Para o Problema da Cobertura de Malhas

Com a teoria básica de grafos em mãos, podemos agora enunciar e provar o resultado que dá a solução para o problema da cobertura de malhas. Esse resultado foi provado em 1977, por Edwin Bolker e Henry Crapo, com um modelo muito mais abstrato do que o apresentado até o momento.

Seja \mathbf{G}_{nm} uma malha com n linhas e m colunas. As linhas serão numeradas r_1, \dots, r_n , de cima para baixo, e as colunas, c_1, \dots, c_m , da esquerda para a direita.

A essa malha está associado um grafo G com $n + m$ vértices, de modo que existem dois conjuntos de vértices em G : aquele correspondente às linhas (vamos chamá-lo de R), e os correspondentes às colunas (chamado de C). Assim, $r_i \in R$ e $c_j \in C$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. E então, uma cobertura na casa que se encontra na coluna c_j e linha r_i é representada por uma aresta ligando o vértice correspondente a c_j ao vértice correspondente a r_i em G . O grafo correspondente é bipartido, como na figura 2.24.

Teorema 7. [8] *Uma malha será rígida se e somente se seu grafo bipartido associado for conexo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Considere uma malha m por n , com as linhas e colunas rotuladas como dito anteriormente. A célula na i -ésima linha e j -ésima coluna será denominada ij . Primeiramente, é válido resaltar que uma casa deformada assume a forma de um paralelogramo, o que implica que as barras que possuem uma linha (ou coluna) em comum permanecem paralelas.

Suponha que existe uma cobertura na célula ij . Levando a consideração anterior em conta, vemos que, como a célula ij permanece quadrada (ou seja, não muda sua

forma original), as outras células de sua linha e coluna também permanecerão assim.

Se coberturas suficientes foram adicionadas na malha a ponto de que haja um caminho do vértice r_i ao vértice c_j . Assim,

- Todas as barras relativas aos vértices do caminho no grafo são paralelas entre si (tanto nas linhas quanto nas colunas);
- Todas as barras horizontais relativas aos vértices do caminho são perpendiculares às barras verticais do caminho.

Assim, se existe um caminho de r_i a c_j no grafo associado, a célula correspondente ij permanece quadrada em qualquer movimentação da malha. Como um grafo conexo possui um caminho entre qualquer par de seus vértices, o resultado segue.

(\Leftarrow) Para provar a volta, assuma que \mathcal{G} é uma malha m por n cujo grafo correspondente não é conexo. Seja A o conjunto de vértices da componente do grafo que contém r_1 , e B o conjunto dos vértices restantes. Se e é uma aresta desse grafo ambas de suas extremidades estão no mesmo conjunto, A ou B , e se a célula ij está coberta, então r_i e c_j também estarão no mesmo conjunto.

Seja α um ângulo, e ajuste as barras da malha da seguinte maneira:

- Se $r_i \in A$, a barra correspondente é vertical;
- Se $c_j \in A$, a barra correspondente é horizontal;
- Se $r_i \in B$, a barra correspondente é faz um ângulo α no sentido anti-horário com a vertical;
- Se $c_j \in B$, a barra correspondente é faz um ângulo α no sentido anti-horário com a horizontal.

É fácil ver que as casas as quais estão no mesmo conjunto são quadradas. Portanto, todas as casas que poderiam ser cobertas são quadradas, e assim uma malha não-deformada pode ser deformada associando-se a α um valor diferente de zero. \square

Capítulo 3

Rigidez

Consideramos aqui um grafo $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e E é um subconjunto de pares de V (como definido anteriormente), e um ponto $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^K \times \dots \times \mathbb{R}^K = \mathbb{R}^{nK}$. Os pontos p_i serão tratados como os vértices de G no \mathbb{R}^K , e os segmentos que os ligam, como as arestas do grafo.

Inicialmente, vamos lidar apenas com sistemas em dimensões 1, 2 e 3, e as definições dadas adiante são baseadas em [8].

Definição 33. Um sistema $\mathcal{F} = (V, E, p)$ é formado por um grafo $G = (V, E)$ mapeado nos pontos $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^K$, com $|V| = n$.

Definição 34. Um movimento do sistema (V, E, p) é uma família de funções $P_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^K$, $i = 1, \dots, n$, tal que:

- $P_i(0) = p_i, \forall i$;
- P_i é diferenciável por partes, $i = 1, \dots, n$;
- $|P_i(t) - P_j(t)| = |p_i - p_j|, \forall t \in [0, 1]$ e $\{v_i, v_j\} \in E$;

Definição 35. A função $P_i(t)$ é chamada de **trajetória** do ponto p_i

onde $|\cdot|$ denota a distância euclidiana entre dois pontos.

Definição 36. Um movimento é **rígido** se as distâncias entre os vértices são preservadas:

$$|P_i(t) - P_j(t)| = |p_i - p_j|, \forall \{v_i, v_j\} \in V. \quad (3.0.1)$$

Definição 37. O movimento definido em 34 é uma deformação caso as distâncias não sejam todas conservadas.

Definição 38. O sistema o qual mantém-se rígido após a remoção de qualquer aresta é chamado de **redundantemente rígido**.

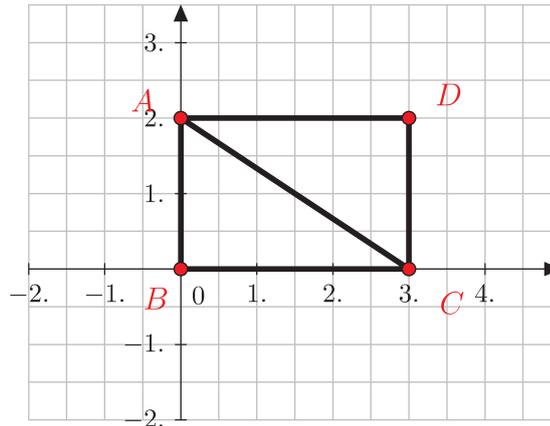


Figura 3.1: Sistema do exemplo do capítulo.

Suponha que estamos no plano. Para toda aresta $e_{ij} \in E$ do nosso sistema (V, E, p) , as distâncias dos vértices ligados por e_{ij} devem ser sempre preservadas. Seja h_{ij} o comprimento de e_{ij} , e (x_i, y_i) e (x_j, y_j) as coordenadas das extremidades de e_{ij} . Temos, então,

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = h_{ij}^2 \quad (3.0.2)$$

Sabemos que a equação 3.0.2 deve ser satisfeita para todos os vértices ligados entre si. Mas como aplicá-la a um sistema e determinar sua rigidez?

Utilizando as definições anteriores, se um sistema é rígido então a distância de nenhum de seus pares de vértices muda durante um movimento. Então, o que deveria acontecer ao aplicarmos equações do tipo 3.0.2 a um sistema rígido? As equações das arestas já existentes devem implicar as equações das arestas que conectariam pares de vértices que não são ligados no sistema.

Vamos aplicar as equações 3.0.2 a um exemplo, encontrado em [8] (cujo sistema está ilustrado na figura 3.1), dado um movimento genérico no plano.

Sejam $p_1 = A = (x_1, y_1) = (0, 2)$, $p_2 = B = (x_2, y_2) = (0, 0)$, $p_3 = C = (x_3, y_3) = (3, 0)$ e $p_4 = D = (x_4, y_4) = (3, 2)$.

As equações relacionadas às arestas a , b , c , d e e seguem abaixo:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 9 \quad (3.0.3)$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = 4 \quad (3.0.4)$$

$$(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 = 9 \quad (3.0.5)$$

$$(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 = 4 \quad (3.0.6)$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 = 13 \quad (3.0.7)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\hat{x}_i = x_i - x_1$$

e

$$\hat{y}_i = y_i - y_1$$

encontramos o seguinte sistema:

$$(\hat{x}_2)^2 + (\hat{y}_2)^2 = 9$$

$$(\hat{x}_2 - \hat{x}_3)^2 + (\hat{y}_2 - \hat{y}_3)^2 = 4$$

$$(\hat{x}_3 - \hat{x}_4)^2 + (\hat{y}_3 - \hat{y}_4)^2 = 9$$

$$(\hat{x}_4)^2 + (\hat{y}_4)^2 = 4$$

$$(\hat{x}_3)^2 + (\hat{y}_3)^2 = 13$$

Agora, sejam

$$\tilde{x}_i = \frac{\hat{x}_2}{3}\hat{x}_i + \frac{\hat{y}_2}{3}\hat{y}_i$$

$$\tilde{y}_i = \frac{-\hat{y}_2}{3}\hat{x}_i + \frac{\hat{x}_2}{3}\hat{y}_i$$

Expandindo $(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2$, temos:

$$(\tilde{x}_i - \tilde{x}_j)^2 + (\tilde{y}_i - \tilde{y}_j)^2 =$$

$$(\hat{x}_i - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_i - \hat{y}_j)^2$$

Uma expansão similar nos dá

$$\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2 = \hat{x}_i^2 + \hat{y}_i^2$$

Computamos também

$$\tilde{x}_2 = \frac{\hat{x}_2^2 + \hat{y}_2^2}{3} = 3$$

e

$$\tilde{y}_2 = \frac{-\hat{y}_2\hat{x}_2 + \hat{x}_2\hat{y}_2}{3} = 0$$

e assim o sistema inicial assume a seguinte forma:

$$(\tilde{x}_3 - 3)^2 + (\tilde{y}_3)^2 = 4$$

$$(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_4)^2 + (\tilde{y}_3 - \tilde{y}_4)^2 = 9$$

$$(\tilde{x}_4)^2 + (\tilde{y}_4)^2 = 4$$

$$(\tilde{x}_3)^2 + (\tilde{y}_3)^2 = 13$$

E a equação relacionada ao segmento faltante torna-se

$$(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 =$$

$$(\hat{x}_4 - \hat{x}_2)^2 + (\hat{y}_4 - \hat{y}_2)^2 =$$

$$(\tilde{x}_4 - 3)^2 + (\tilde{y}_4)^2 = 13$$

Resolvendo o sistema acima, encontramos as seguintes soluções:

$$\tilde{x}_3 = 3, \tilde{y}_3 = 2, \tilde{x}_4 = 0, \tilde{y}_4 = 2$$

$$\tilde{x}_3 = 3, \tilde{y}_3 = 2, \tilde{x}_4 = \frac{24}{13}, \tilde{y}_4 = \frac{-10}{13}$$

$$\tilde{x}_3 = 3, \tilde{y}_3 = -2, \tilde{x}_4 = 0, \tilde{y}_4 = -2$$

$$\tilde{x}_3 = 3, \tilde{y}_3 = -2, \tilde{x}_4 = \frac{24}{13}, \tilde{y}_4 = \frac{10}{13}$$

Esses valores dão origem a duas distâncias possíveis entre p_2 e p_4 : $\sqrt{13}$ ou $\frac{5}{\sqrt{13}}$. Como qualquer movimento do sistema é contínuo, fica claro que a distância entre p_2 e p_4 não pode pular de $\sqrt{13}$ para $\frac{5}{\sqrt{13}}$. Logo, essa distância será sempre igual a $\sqrt{13}$.
 \square

Capítulo 4

Rigidez Infinitesimal

Seja \mathcal{F} um sistema no \mathbb{R}^K , onde $K = 1, 2, 3$. Queremos encontrar as condições para que tal sistema seja rígido. Mais precisamente, queremos saber o que acontece quando ocorre algum deslocamento dos pontos que o formam, ou seja, quando esses pontos adquirem velocidade.

Temos que os pontos $p_i \in \mathbb{R}^K$ em função da variável t , são dados por

$$(x_i) = (x_i(t)), \quad \text{se } K = 1$$

$$(x_i, y_i) = (x_i(t), y_i(t)), \quad \text{se } K = 2$$

$$(x_i, y_i, z_i) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), \quad \text{se } K = 3$$

e as velocidades momentâneas q_i , $i = 1, \dots, n$:

$$(u_i), \quad \text{se } K = 1$$

$$(u_i, v_i), \quad \text{se } K = 2$$

$$(u_i, v_i, w_i), \quad \text{se } K = 3$$

Assim, de acordo com [8], a condição para que tal sistema seja rígido é que as distâncias entre os pontos permanecem sempre as mesmas. Então, se a distância entre um par de pontos (p_i, p_j) é d_{ij} ,

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{ij}^2 \tag{4.0.1}$$

e essa condição pode ser escrita matematicamente derivando a equação acima. Abaixo, escrevemos na forma do produto interno para o caso $K = 2$:

$$(x_i(t) - x_j(t), y_i(t) - y_j(t)) \cdot (u_i(t) - u_j(t), v_i(t) - v_j(t)) = 0 \tag{4.0.2}$$

Definição 39. Seja $\mathcal{F} = (V, E, p)$, um sistema K -dimensional, com $|V| = n$ e $P = \{p_1, \dots, p_n\}$. Dizemos que \mathcal{F} é **constrito** se:

- $K = 1, 2, 3$, $n > 1$ mas todos os pontos são iguais;
- $K = 2, 3$, $n > 2$ e todos os pontos estão em uma mesma reta;
- $K = 3$, $n > 3$ e todos os pontos estão em um mesmo plano;

se um sistema não é constrito, então é chamada de **normal**.

Definição 40. Um conjunto de pontos $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ no plano está em **posição geral** se não existem dois pontos iguais e três pontos em uma reta. Em \mathbb{R} dois pontos não ocupam a mesma posição, e no espaço, dois pontos não ocupam a mesma posição, três pontos não estão em uma reta e quatro pontos não estão em um plano.

As definições a seguir são baseadas em [8] e [16].

Definição 41. • Um **movimento infinitesimal** de um sistema K -dimensional (V, E, p) é uma função $q : V \rightarrow \mathbb{R}^K$ tal que $(p_i - p_j) \cdot (q_i - q_j) = 0 \quad \forall \{v_i, v_j\} \in E$

- Um movimento infinitesimal q de um sistema normal (V, E, p) é chamado de **movimento infinitesimalmente rígido** se $(p_i - p_j) \cdot (q_i - q_j) = 0 \quad \forall v_i, v_j \in V$.
- Um movimento infinitesimal q de um sistema normal (V, E, p) é chamado de **deformação infinitesimal** se $(p_i - p_j) \cdot (q_i - q_j) \neq 0 \quad \forall v_i, v_j \in V$.
- Um sistema (V, E, p) é chamado de **infinitesimalmente rígido** se todos os seus movimentos são infinitesimalmente rígidos.

Por convenção, nenhum sistema constrito é infinitesimalmente rígido. É válido ressaltar, também, que um ponto é sempre normal, assim como um segmento de reta de comprimento positivo.

É possível que um sistema seja rígido, mas não infinitesimalmente rígido? A resposta é sim. Na figura 4.1, é mostrado um sistema no \mathbb{R}^2 junto com uma força aplicada a ele.

Claramente, esse sistema é rígido. Como as projeções do vetor em destaque nos segmentos do sistema são nulas, eles não são distorcidos, porém a distância entre o vértice oposto ao ângulo reto e o vértice onde a força é exercida é modificada. Logo, o sistema não é infinitesimalmente rígido.

Outro exemplo, encontrado em [15], está na figura 4.2: nas três figuras o grafo é o mesmo. Porém, o sistema é flexível em (a), rígido em (b) e infinitesimalmente rígido em (c).

Rigidez não implica rigidez infinitesimal, mas o contrário se mantém:

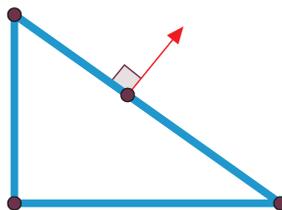


Figura 4.1: Sistema rígido porém não infinitesimalmente rígido.

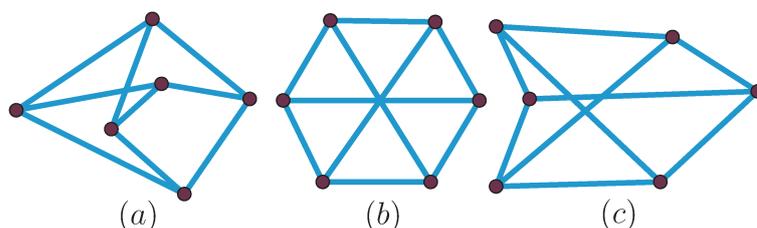


Figura 4.2: Exemplo de um grafo mapeado de modo que seu sistema resultante é flexível (a), rígido (b) e infinitesimalmente rígido (c).

Teorema 8. *Se um sistema é infinitesimalmente rígido, então é rígido.*

Em [5] é possível encontrar 3 demonstrações distintas para esse importante fato. \square

Seja (V, E, p) um sistema arbitrário no \mathbb{R}^K , e $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. x_i , (x_i, y_i) ou (x_i, y_i, z_i) serão as coordenadas de p_i , a depender do valor de K . Seja também $q : V \rightarrow \mathbb{R}^K$ uma função arbitrária tal que, novamente a depender de K , u_i , (u_i, v_i) ou (u_i, v_i, w_i) serão as coordenadas de q_i .

Suponha que (V, E, p) possui o vértice $\{v_i, v_j\} \in E$. Se \mathbf{q} é um movimento infinitesimal desse sistema, então

se $K = 1$:

$$(x_i - x_j)u_i - (x_i - x_j)u_j = 0$$

se $K = 2$:

$$(x_i - x_j)u_i + (y_i - y_j)v_i - (x_i - x_j)u_j - (y_i - y_j)v_j = 0$$

se $K = 3$:

$$(x_i - x_j)u_i + (y_i - y_j)v_i + (z_i - z_j)w_i - (x_i - x_j)u_j - (y_i - y_j)v_j - (z_i - z_j)w_j = 0$$

(4.0.3)

Como as equações acima são homogêneas, os conjuntos de suas soluções formam subespaços vetoriais. Seja $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ o subespaço de movimentos infinitesimais do sistema $\mathcal{F} = (V, E, p)$. Se \mathcal{F} é normal, denote por $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ o subespaço de movimentos infinitesimalmente rígidos. Como todo movimento rígido infinitesimal é um movimento infinitesimal,

$$\mathcal{R}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$$

Assim, de acordo com [8], \mathcal{F} é infinitesimalmente rígido se e somente se $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$, e dada a equação acima, podemos dizer que \mathcal{F} é infinitesimalmente rígido se e somente se

$$\dim[\mathcal{R}(\mathcal{F})] = \dim[\mathcal{M}(\mathcal{F})]$$

Formalizando:

Lema 12. [8]

Seja $\mathcal{F} = (V, E, p)$ um sistema normal e K -dimensional. Então

$$\dim[\mathcal{R}(\mathcal{F})] \leq \dim[\mathcal{M}(\mathcal{F})]$$

e \mathcal{F} é infinitesimalmente rígido se e somente se

$$\dim[\mathcal{R}(\mathcal{F})] = \dim[\mathcal{M}(\mathcal{F})]$$

o que nos leva ao seguinte teorema quando $K = 2$:

Teorema 9. [8] Seja $\mathcal{F} = (V, E, p)$ um sistema planar em posição geral, onde $|V| \geq 2$. Então, $\dim[\mathcal{M}(\mathcal{F})] \geq 3$, e \mathcal{F} é infinitesimalmente rígido se e somente se $\dim[\mathcal{M}(\mathcal{F})] = 3$

Temos também os análogos ao teorema 9 quando estamos no espaço:

Teorema 10. [8] Seja $\mathcal{F} = (V, E, p)$ um sistema espacial em posição geral, onde $|V| \geq 3$. Então, $\dim[\mathcal{M}(\mathcal{F})] \geq 6$, e \mathcal{F} é infinitesimalmente rígido se e somente se $\dim[\mathcal{M}(\mathcal{F})] = 6$

Vamos ilustrar a teoria com um exemplo. Seja $\mathcal{F} = (V, E, p)$ o retângulo na figura 4.3:

Assim, temos que $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (3, 0)$, $p_3 = (3, 2)$ e $p_4 = (0, 2)$. Como esse é um movimento infinitesimal, a cada segmento existe uma equação correspondente que deve ser satisfeita da forma

$$(p_{i1} - p_{j1}, p_{i2} - p_{j2}) \cdot (u_i - u_j, v_i - v_j) = 0,$$

o que nos leva a

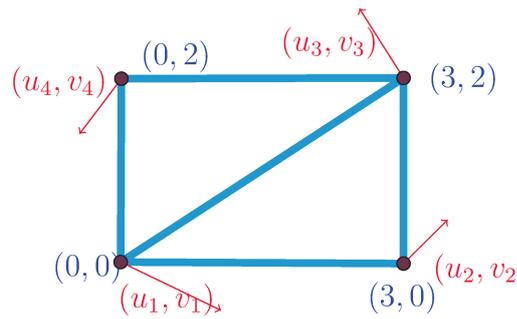


Figura 4.3: Sistema infinitesimalmente rígido.

$$\begin{aligned}
 3(u_2 - u_1) &= 0 \\
 3(u_4 - u_3) &= 0 \\
 2(v_3 - v_2) &= 0 \\
 2(v_4 - v_1) &= 0 \\
 3(u_3 - u_1) + 2(v_3 - v_1) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.0.4}$$

Primeiramente, vamos provar que tal sistema é infinitesimalmente rígido. Já sabemos que os vértices conectados pelos segmentos existentes sempre permanecem à mesma distância. Assim, resta mostrar que a distância entre $(0, 2)$ e $(3, 0)$ nunca muda - ou seja,

$$3(u_4 - u_2) + 2(v_4 - v_2) = 0$$

e, mais ainda, essa equação deve seguir do sistema acima 4.0.4.

Das primeiras quatro equações, vê-se que $u_2 = u_1$, $u_4 = u_3$, $v_3 = v_2$ e $v_4 = v_1$. Substituindo na última equação, o que procuramos segue direto.

A solução do sistema de equações 4.0.4 também define o subespaço $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ de movimentos infinitesimais, cujo vetor-solução é da forma $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4) = (c + \frac{3}{2}(b - a), a, c + \frac{3}{2}(b - a), b, c, b, c, a)$.

O espaço $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ é dado pela solução do sistema de equações que utilizamos

para determinar a rigidez infinitesimal do sistema:

$$\begin{aligned}
 3(u_2 - u_1) &= 0 \\
 3(u_4 - u_3) &= 0 \\
 2(v_3 - v_2) &= 0 \\
 2(v_4 - v_1) &= 0 \\
 3(u_3 - u_1) + 2(v_3 - v_1) &= 0 \\
 3(u_4 - u_2) + 2(v_4 - v_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.0.5}$$

o que leva ao vetor

$$\left(c + \frac{3}{2}(b - a), a, c + \frac{3}{2}(b - a), b, c, b, c, a\right),$$

e como esperado, $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$, visto que \mathcal{F} é infinitesimalmente rígido.

Note que o sistema 4.0.5 possui uma equação a mais.

Teorema 11. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com k vértices, K_n o grafo completo com n vértices e $p \in \mathbb{R}^{nK}$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

- $G(p)$ não é rígido em \mathbb{R}^K .
- $G(p)$ é flexível em \mathbb{R}^K .

4.1 A Matriz de Rigidez

Anteriormente, foi apresentado o sistema de equações que determina o movimento do sistema a ser estudado. As derivadas presentes nesse sistema nos mostram sua velocidade instantânea, e colocando-as como incógnitas, esse sistema nos dá o conjunto de todas as velocidades momentâneas possíveis induzidas pelo movimento do sistema.

Definição 42. *A **matriz de rigidez** $M(G, p)$ é a matriz de coeficientes do sistema de equações de movimentos infinitesimais de \mathcal{F} .*

Essa matriz possui $|E|$ linhas e $K|V|$ colunas (onde K é a dimensão do espaço), e suas entradas nas colunas correspondem ao vetor $p_i - p_j$ se $\{v_i, v_j\} \in E$, $v_i, v_j \in V$, e 0

caso contrário. Por exemplo, no sistema 4.0.4, a matriz de rigidez é dada por:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_4 & y_3 - y_2 & x_4 - x_3 & y_4 - y_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & 0 & 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Translações e Rotações

Vamos começar nossa análise pelo plano.

Definição 43. Uma translação é uma função $T_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T_u(x, t) = x + ut$$

onde $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$ e $u \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Assim, temos que, na nossa definição (a qual está de acordo com [8]), uma translação começa em x e termina em $x + u$. Diferenciando a função e calculando o resultado em $t = 0$, temos

$$\dot{T}_u(x) = u,$$

definindo mais um termo:

Definição 44. $\tau_u(x) = u = \dot{T}_u(x)$ é a função constante que associa u a cada ponto da reta, e é chamada de **translação infinitesimal**.

Em dimensão um, temos então que $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ é o espaço unidimensional de movimentos rígidos infinitesimais, no qual τ_u é uma base.

Para o plano, analogamente, temos que $\tau_{(u,v)}(x, y) = (u, v)$, e qualquer ponto de coordenadas (u, v) pode ser descrito como

$$\tau_{(u,v)}(x, y) = u\tau_{(1,0)} + v\tau_{(0,1)}.$$

Como já foi dito anteriormente, um ponto no plano necessita de duas coordenadas para ser definido. Porém, ao adicionarmos mais um ponto e ligarmos ambos por um segmento de comprimento l , são necessárias três coordenadas.

O que foi feito anteriormente sugere associar o ângulo que o segmento faz com algum eixo (utilizaremos nesse caso, sem perda de generalidade, o eixo x). Por isso, é necessário introduzir o conceito de **rotações infinitesimais**.

Definição 45. *Uma rotação no plano por um ângulo θ de um segmento de comprimento l pode ser escrita como*

$$(x(t), y(t)) = (l\text{sen}(\theta + \alpha t), l\text{cos}(\theta + \alpha t)),$$

onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$.

Diferenciando e calculando o resultado em $t = 0$, obtemos

$$\alpha(l\text{cos}(\theta), -l\text{sen}(\theta)) = \alpha(y, -x),$$

gerando mais um novo termo:

Definição 46. *A rotação infinitesimal centrada em (x_0, y_0) é uma função $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por*

$$\rho_{(x_0, y_0)}(x, y) = (y - y_0, x_0 - x).$$

Deve ficar claro que toda rotação $\alpha(y - y_0, x_0 - x)$ é um múltiplo de $\rho_{(x_0, y_0)}(x, y)$, o mesmo acontecendo com as translações infinitesimais.

Vamos verificar que $\rho_{(x_0, y_0)}$ é um movimento rígido no plano. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois pontos em \mathbb{R}^2 . Então,

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \cdot (\rho_{(x_0, y_0)}(x_1, y_1) - \rho_{(x_0, y_0)}(x_2, y_2)) &= \\ (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \cdot ((y_1 - y_0, x_0 - x_1) - (y_2 - y_0, x_0 - x_2)) &= \\ (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \cdot (y_2 - y_1, x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned}$$

A demonstração para o caso das translações infinitesimais é análoga.

Seja (\hat{x}, \hat{y}) o resultado de uma combinação linear de uma translação e uma rotação de um ponto (x, y) . Então, temos que:

$$\begin{aligned} (\hat{x}, \hat{y}) &= a\rho_{(x_0, y_0)}(x, y) + b\tau_{u, v}(x, y) = \\ &= a(\hat{y} - y_0, x_0 - \hat{x}) + b(u, v) = \\ &= a(\hat{y} - y_0, x_0 - \hat{x}) + a(b \setminus au, b \setminus av) = \\ &= a(\hat{y} - y_0 + b \setminus au, x_0 - \hat{x} + b \setminus av) = \\ &= a(\hat{y} - (y_0 - b \setminus au), (x_0 + b \setminus av) - \hat{x}) = \\ &= a\rho_{(x_0 + b \setminus av, y_0 + b \setminus au)}(x, y) \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Se analisarmos a combinação linear de $\rho_{0,0}$, $\tau_{(1,0)}$ e $\tau_{(0,1)}$ aplicada em um ponto (x, y) , veremos que essas três funções são linearmente independentes:

$$\begin{aligned} a\rho_{0,0}(x, y) + b\tau_{(1,0)}(x, y) + c\tau_{(0,1)}(x, y) &= 0 \Rightarrow \\ a\rho_{0,0}(x, y) + (b, 0) + (0, c) &= 0 \Rightarrow \\ a(y, -x) + (b, 0) + (0, c) &= 0 \Rightarrow \\ (ay + b, c - ax) &= 0 \end{aligned}$$

Como x e y não estão fixos (ou seja, a equação aqui deve seguir para qualquer ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), a única solução é que $a = b = c = 0$.

Já foi ressaltado anteriormente que qualquer translação no plano é uma combinação linear de $\tau_{(1,0)}$ e $\tau_{(0,1)}$. O fato de que uma rotação com centro em (x_0, y_0) combinada a uma translação dá origem a uma rotação com centro diferente (como demonstrado acima) nos diz que existe uma combinação linear de $\rho_{(0,0)}$ e das translações com centro em $(1, 0)$ e $(0, 1)$ que descreve qualquer rotação no plano. De fato, substituindo os termos em 4.2.1, encontramos que

$$a\rho_{(x_0, y_0)} = a\rho_{(0,0)} + (-ay_0)\tau_{(1,0)} + (ax_0)\tau_{(0,1)}$$

E assim, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 12. [8] *O conjunto de rotações e translações infinitesimais no plano forma um espaço vetorial tridimensional.*

Voltando ao exemplo da figura 4, podemos agora selecionar uma base e interpretá-la de acordo com as novas definições:

tomando $c = 1$ e $b = a = 0$, encontramos o vetor $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$: $\tau_{(1,0)}$ restrito a

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

tomando $c = 0$ e $b = a = 1$, encontramos o vetor $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$: $\tau_{(0,1)}$ restrito a P

tomando $c = -2$, $b = 3$ e $a = 0$, encontramos o vetor $(0, 0, 0, 3, -2, 3, -2, 0)$: $\rho_{(0,0)}$ restrito a P

Possuímos agora ferramentas teóricas para utilizar a técnica de graus de liberdade. Se a análise fosse feita utilizando-se rigidez, adicionando uma aresta faria com que fosse possível adicionar-se mais do que uma equação ao sistema de equações que define o espaço vetorial - o que não acontece quando lidamos com rigidez infinitesimal. Temos, então, a seguinte definição:

Definição 47. *Um sistema $\mathcal{F} = (V, E, p)$ em posição geral possui*

- $\dim[M(\mathcal{F})]$ graus de liberdade;
- $\dim[M(\mathcal{F})] - \dim[R(\mathcal{F})]$ graus internos de liberdade.

Podemos também definir mais precisamente o conceito de arestas implícitas: de acordo com [8], elas ocorrem quando uma equação redundante é adicionada ao sistema 4.0.3.

Teorema 13. [8] *Seja $\mathcal{F} = (V, E, p)$ um sistema planar, com $|V| \geq 2$ e em posição geral. Se $|E| < 2|V| - 3$, o sistema não é infinitesimalmente rígido.*

Demonstração: Sejam $E = \{e_1, \dots, e_{|E|}\}$ e $E_i = \{e_1, \dots, e_i\}$. Assim,

$$M(V, E_0, p) = R^{2|V|}.$$

Cada segmento incluso reduz a dimensão em, no máximo, um:

$$\dim[\mathcal{M}(V, E_i, p)] \geq 2n - i.$$

Logo, para o sistema completo, temos que

$$\dim[M(V, E, p)] \geq 2|V| - |E|.$$

Sabendo que para que \mathcal{F} seja rígido $\dim[M(\mathcal{F})] \geq 3$, temos então que $3 \geq 2|V| - |E| \Rightarrow |E| \geq 2|V| - 3 \quad \square$

Corolário 14. [8] *Seja $\mathcal{F} = (V, E, p)$ um sistema espacial em posição geral, onde $|V| \geq 3$. Se $|E| < 3|V| - 6$, o sistema não é infinitesimalmente rígido.*

Demonstração. Análoga ao teorema anterior. O número de graus de liberdade de um sistema de $|V|$ pontos isolados no espaço é $3|V|$ (dado que um ponto no espaço possui 3 graus de liberdade), e cada aresta adicionada ao sistema diminui seus graus de liberdade em 1. Utilizando o teorema 10, o resultado segue. \square

4.3 Rigidez na Reta

Em dimensão 1, existe um resultado o qual reduz rigidez a um aspecto combinatorial.

Teorema 15. [8] *Um sistema unidimensional (V, E, p) é rígido se, e somente se, seu grafo (V, E) é conexo.*

Demonstração. (\Leftarrow)

Seja $\mathbf{F} = (V, E, p)$ um sistema unidimensional. Assuma que $G = (V, E)$ é desconexo e que $G_1 = (V_1, E_1)$ é uma componente de G . Assuma também que os vértices tenham sido nomeados a_1, \dots, a_n , tal que $V_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$. Defina o movimento $p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como a seguir:

- $p_i(t)$ é o ponto com coordenada x_i , $i \leq k$,
- $p_i(t)$ é o ponto com coordenada $x_i + t$, $i > k$.

É fácil ver que as condições 34 e 34 que definem um movimento são satisfeitas. Se $(v_i, v_j) \in E$, tanto i quanto j são menores ou iguais a k ou ambos são maiores ou iguais a k .

A condição 34 é obtida diretamente se ambos são menores ou iguais a k . Se ambos são maiores ou iguais k , temos que

$$|p_i, p_j| = |(x_i + t) - (x_j + t)| = |x_i - x_j| = |p_i, p_j|.$$

Caso $i = k + 1$ e $j = 1$,

$$|p_{k+1}, p_1| = |(x_{k+1} + t) - x_1| \neq |x_{k+1} - x_1| = |p_{k+1}, p_1|,$$

para $t > 0$. Essa é, então, uma deformação de \mathcal{F} . (\Rightarrow)

Assuma que G é conexo e $\{p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ é uma movimentação de \mathcal{F} . Seja $\{v_i, v_j\} \in E$. Então,

$$|p_j(t), p_i(t)| = |x_j - x_i|,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Ou seja, $p_j - p_i$ pode tomar apenas os valores $x_j - x_i$ e $x_i - x_j$. Mas como $p_j - p_i$ é uma função contínua,

$$p_j(t) - p_i(t) = x_j - x_i,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Logo,

$$p_j(t) - x_j = p_i(t) - x_i,$$

para todo $t \in [0, 1]$, $\{v_i, v_j\} \in E$.

Sejam v_i e v_j dois vértices quaisquer de G . Como esse grafo é conexo, esses dois vértices são ligados por um caminho $v_i = v_{i0}, v_{i1}, \dots, v_{ik} = v_k$, implicando em

$$p_i(t) - x_j = p_{i1}(t) - x_{i1} = \dots = p_j(t) - x_j.$$

Logo,

$$|p_j(t), p_i(t)| = |p_j(t) - p_i(t)| = |x_j - x_i|,$$

para todo $t \in [0, 1]$. Assim, p_i é um movimento rígido de \mathcal{F} . \square

Definição 48. *Um sistema \mathcal{F} é **K-isostático** se é rígido e a remoção de qualquer aresta faz com que \mathcal{F} deixe de ser rígido em \mathbb{R}^K .*

Da definição acima vê-se que as definições *k-árvore* e *K-isostático* são equivalentes. A primeira é usada mais frequentemente referindo-se ao grafo gerador de um sistema, e a segunda ao sistema em si, mas é possível definir também grafos K-isostáticos.

Dos teoremas 6 e 5, podemos tirar certas conclusões:

- Um sistema $\mathcal{F} = (V, E, p)$ isostático em dimensão 1 é aquele cujo grafo não possui nenhum circuito - do contrário, existe alguma aresta a qual, ao ser removida, não resultará em um grafo desconexo.
- Qualquer aresta $e \in E$ que não possui a propriedade de que sua remoção do grafo $G = (V, E)$ faz com que G seja desconexo está em um circuito, pois assim existirá um caminho entre suas extremidades caso e seja removida.
- Utilizando a ideia anterior, qualquer grafo sem circuitos resulta em um grafo desconexo ao eliminar-se uma aresta. Caso contrário, haveria um circuito ao colocar essa aresta removida de volta (dado que antes existia um caminho entre suas extremidades), o que é absurdo.

Dessas observações seguem os próximos lemas:

Lema 13. *Um sistema unidimensional é isostático se, e somente se, seu grafo é uma árvore.*

Lema 14. *Um segmento de um sistema unidimensional é implícito se, e somente se, o vértice correspondente de seu grafo encontra-se em um circuito.*

Esses dois lemas anteriores dão origem também ao próximo teorema, para o qual é necessário uma nova definição:

Definição 49. *Sistemas rígidos os quais permanecem rígidos mesmo quando qualquer uma de suas arestas é removida são chamados de **birígidos**.*

Teorema 16. *Um sistema unidimensional (V, E, p) é birígido se, e somente se:*

- (V, E) é conexo;
- cada aresta encontra-se em um circuito.

Capítulo 5

Aspectos combinatoriais

Sabemos que, em dimensão 1, rigidez é algo puramente combinatorial - ou seja, pode-se descobrir se um dado sistema é rígido ou não baseado apenas em seu grafo (mais especificamente, se o grafo do sistema é conexo ou não).

Agora, vamos estender um pouco mais essa noção, olhando para sistemas em outras dimensões (principalmente para o plano e espaço).

O sistema da figura 5.1 é rígido, porém é fácil ver que seu grafo gerador pode ser mapeado de tal forma a dar origem a um sistema flexível.

Vemos também que esse sistema não é infinitesimalmente rígido: $|E| = 8 < 9 = 2|V| - 3$.

Sabemos que rigidez em dimensões diferentes de 1 não dependem apenas do grafo do sistema, e que rigidez não implica rigidez infinitesimal. O que veremos é que esses sistemas pertencem a uma categoria especial (grafos mapeados em configurações não-gerais), e sistemas onde isso não acontece são rígidos se e somente se são infinitesimalmente rígidos. Além disso, esse aspecto depende apenas da estrutura do grafo do sistema.

Queremos, então, lidar na maior parte do tempo com sistemas gerais. Mas o que nos garante que a maioria dos sistemas é desse tipo? Recordando sua definição, vemos que a representação de um grafo em \mathbb{R}^K é geral se não existem dois pontos em posições iguais, três pontos alinhados em uma reta, quatro em um mesmo plano, e assim

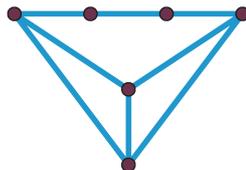


Figura 5.1: O sistema acima é rígido, porém seu grafo pode dar origem a um sistema flexível.

por diante, até que não existam $K + 1$ pontos em um hiperplano.

Sabemos pela teoria da medida e probabilidade que um hiperplano (e qualquer espaço de dimensão menor) possui volume zero em \mathbb{R}^K , o que significa que a probabilidade de ocorrer uma configuração desse tipo é nula. Os sistemas que apresentam essa configuração são extremamente incomuns e improváveis, se compararmos todas as configurações possíveis nos espaços citados.

Uma definição mais forte do que *configurações gerais* e mais fácil de lidar é dada a seguir.

Definição 50. *Uma configuração de um sistema é **genérica** se o conjunto contendo as coordenadas de p_i , $i \in V$, for algebricamente independente em \mathbb{Q} .*

É necessário também, nesse ponto, estender alguns conceitos relacionados a rigidez. Começamos com a definição a seguir, apresentando outras no decorrer do texto, conforme forem utilizadas.

Definição 51. *Um grafo $G = (V, E)$ é K -rígido se é rígido em dimensão K .*

Teorema 17. [8] *Seja $K = 2$ ou 3 e (V, E, p) qualquer sistema K -dimensional (não necessariamente genérico). Se (V, E, p) é infinitesimalmente rígido, qualquer sistema genérico no \mathbb{R}^K do tipo (V, E, q) é infinitesimalmente rígido, e o grafo (V, E) é K -rígido. Além disso, se (V, E) não é K -rígido, qualquer sistema K -dimensional (V, E, p) (com (V, E) como seu grafo gerador) não é infinitesimalmente rígido.*

Demonstração. Sejam (V, E, p) um sistema infinitesimalmente rígido K -dimensional, e (V, E, q) um sistema genérico K -dimensional com o mesmo grafo gerador. Sabemos que, para $K = 1, 2, 3$, o posto da matriz de rigidez de um sistema infinitesimalmente rígido é $K|V| - \binom{K+1}{2}$.

Pela definição de sistemas genéricos, temos também que o posto da matriz de um sistema genérico é sempre maior ou igual ao posto de um sistema qualquer com o mesmo grafo gerador. Assim, o posto da matriz de (V, E, q) é maior ou igual ao posto da matriz de (V, E, p) . O que implica que o posto da matriz de (V, E, q) é maior ou igual a $K|V| - \binom{K+1}{2}$.

Mas sabemos também que o posto da matriz de rigidez de (V, E, q) é sempre menor ou igual a $K|V| - \binom{K+1}{2}$. Assim, o resultado segue. \square

Sabemos que, em dimensão 1, um sistema é rígido se seu grafo é conexo. Essa é uma propriedade simples de se checar, e queremos encontrar propriedades semelhantes em dimensões 2 e 3. O teorema 5 nos diz que, para checar um grafo, devemos tomar um sistema que o tenha como gerador e verificar se esse sistema é rígido ou não.

Grafos conexos são frequentemente caracterizados em termos de árvores (veja 2.2). Assim, inicialmente vamos generalizar o conceito de árvores para dimensões maiores:

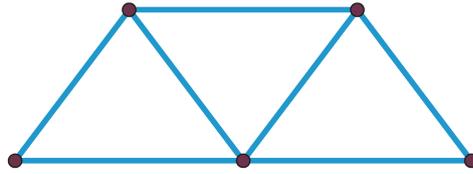


Figura 5.2: Exemplo de uma 2-árvore.

Definição 52. Para $K = 1, 2$ ou 3 , um grafo (V, E) é uma **K -árvore** se é K -rígido e a remoção de qualquer aresta resulta em um grafo o qual não é K -rígido.

Um exemplo da definição anterior no plano é ilustrado na figura [?].

Se (V, E) é K -rígido mas não uma K -árvore, deve haver um vértice $e \in E$ o qual $(V, E - e)$ ainda é K -rígido. Esse processo deve continuar até que se encontre uma K -árvore. Essa é a generalização do lema 6:

Lema 15. [8] Para $K = 1, 2$, ou 3 , um grafo é K -rígido se e somente se possui uma K -árvore geradora.

A generalização do lema 9 está a seguir:

Lema 16. [8] Para $K = 1, 2$ ou 3 , se um grafo $G = (U, V)$ satisfaz duas das condições seguintes, então satisfaz as três e é uma K -árvore. Qualquer K -árvore satisfaz as 3 condições:

1. G é K -rígido
2. As linhas da matriz de rigidez de qualquer imersão genérica de V são independentes
3. $|E| = K|V| - \binom{K+1}{2}$

Demonstração. Seja $p : V \rightarrow \mathbb{R}^K$ uma imersão genérica de V em \mathbb{R}^K . A primeira condição pode ser reescrita como

$$\text{posto}(M(V, E, p)) = K|V| - \binom{K+1}{2}, \quad (5.0.1)$$

e a segunda condição como

$$\text{posto}(M(V, E, p)) = |E|, \quad (5.0.2)$$

visto que a matriz de rigidez possui $|E|$ linhas. Assim a condição 3 é uma consequência direta das condições 1 e 2.

Seja $e \in E$, e suponha que (V, E) satisfaz as condições 1 e 3. Então, esse grafo é K -rígido, e

$$\text{posto}(M(V, E - e, p)) \leq |E| - 1 < |E| = K|V| - \binom{K+1}{2}.$$

E assim, $(V, E - e)$ não é K -rígido. Logo, (V, E) é uma K -árvore.

Analogamente, seja (V, E) uma K -árvore, e que a condição 1 seja válida nesse caso. Suponha que a condição 2 não seja, e que a linha correspondente à aresta $e \in E$ é uma combinação linear das outras linhas em $M(V, E, p)$. Então,

$$\text{posto}(M(V, E - e, p)) = \text{posto}(M(V, E, p))$$

Mas isso significa que $(V, E - e, p)$ também é K -rígido - contradição à condição 1. Assim, a condição 2 também se verifica. \square

Sabemos que um grafo é uma árvore se e somente se

- $|E(U)| \leq |U| - 1, \forall \emptyset \subset U \subseteq V$ e
- $E = |V| - 1.$

A generalização dessa definição é um teorema provado por Laman:

Teorema 18. [13], [8] (Condições de Laman) Se um grafo (V, E) é uma K -árvore, com $|V| \leq K, K = 1, 2, 3$ então:

- $|E(U)| \leq K|U| - \binom{K+1}{2}, \forall U \subseteq V$ com $|U| \leq K, e$
- $|E| = K|V| - \binom{K+1}{2}$

Demonstração.

Esse resultado já foi provado para o caso em que $K = 1$ (teorema 10). No caso em que $K = 2$ ou 3 , seja $G = (V, E)$ uma K -árvore, com $|V| \geq K$. A condição 2 segue do lema 16. Seja $p : V \rightarrow V\mathbb{R}^K$ uma imersão genérica de V e $U \subseteq V, |U| \geq K$. Pelo teorema 10 e pelo corolário 14, a matriz $M(U, E(U), p)$ possui posto máximo de $K|U| - \binom{K+1}{2}$. Como (V, E) é uma K -árvore, as linhas de $M(V, E, p)$ são independentes, e portanto as linhas de $M(V, E(U), p)$ também são. Mas as linhas de $M(U, E(U), p)$ são simplesmente as linhas de $M(V, E(U), p)$ com algumas colunas de zeros deletadas. Logo,

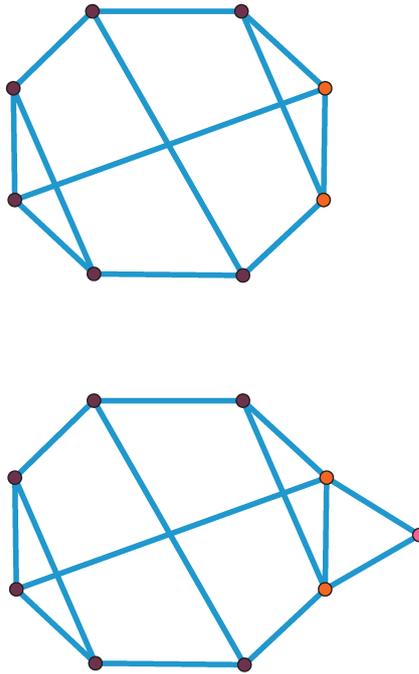


Figura 5.3: Exemplo de uma 2-extensão.

as linhas de $M(U, E(U), p)$ são independentes também, e $E(U) = \text{posto}(M(U, E(U), p)) \leq K|U| - \binom{K+1}{2}$. \square

Definição 53. *Sejam $K = 1, 2$ ou 3 , e (V, E) um grafo com $V = \{a_1, \dots, a_n\}$, com $n \geq K$. Sejam também a_0 tal que $a_0 \notin V$, e $\{\{a_{i1}, \dots, a_{iK}\}\}$ uma coleção de m vértices. O grafo (\hat{V}, \hat{E}) , com $\hat{V} = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $\hat{E} = E \cup \{\{a_0, a_{i1}\}, \dots, \{a_0, a_{iK}\}\}$, é chamado uma **K -extensão** de (V, E) .*

Um exemplo de 2-extensão é ilustrado na figura 5.3, onde o vértice a_0 está em rosa e os vértices a_{11} e a_{12} , em laranja.

Lema 17. *[8] Qualquer K -extensão de uma K -árvore é uma K -árvore. Analogamente, deletando qualquer vértice de grau m de uma K -árvore resulta em uma K -árvore menor.*

Definição 54. *Seja $G = (V, E)$. Um **K -split de arestas** se dá quando uma aresta $e = \{v_1, v_2\} \in E$ é deletado, e um vértice v_0 é adicionado a V , ligado a um conjunto Q de $K + 1$ vértices em V , com $v_1, v_2 \in Q$.*

Um exemplo de 2-split de arestas está na figura 5.4, aonde e está em verde, v_1 e v_2 em laranja, v_0 em rosa e as novas arestas em preto.

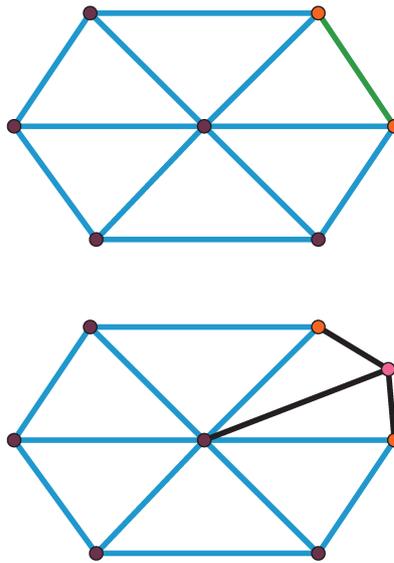


Figura 5.4: Exemplo de um 2-split de arestas.

Lema 18. [8] *Qualquer K -split de arestas de uma K -árvore é uma K -árvore. Analogamente, se um vértice v_0 de grau $m+1$ é deletado de uma K -árvore, então pode-se adicionar uma aresta entre um dos pares de vértices adjacentes a v_0 para que o grafo resultante seja uma K -árvore.*

Teorema 19. [8] (Henneberg) *Um grafo G é uma 2-árvore se e somente se pode ser construído a partir de um único vértice através de uma sequência de 2-extensões e 2-splits de arestas.*

Demonstração. \Rightarrow

Pelos lemas 17 e 18, qualquer grafo construído através de uma 2-extensão ou um 2-splits de arestas a partir de uma 2-árvore é uma outra 2-árvore. Logo, qualquer grafo construído a partir de um único ponto através de uma sequência de 2-extensões e 2-splits de arestas é uma 2-árvore. \Leftarrow

Indução em $|V|$. Claramente, a única 2-árvore de três vértices é construída a partir de uma única aresta através de uma 2-extensão.

Seja $n \leq 4$. Assuma que toda 2-árvore com menos que n vértices pode ser construída a partir de um único vértice através de uma sequência de 2-extensões e 2-splits de arestas, e seja $G = (V, E)$ uma 2-árvore de n vértices. Pelo lema 16, $|E| = 2|V| - 3$. Então, o grau médio é

$$\frac{2|E|}{|V|} = 4 - \frac{6}{|V|} < 4$$

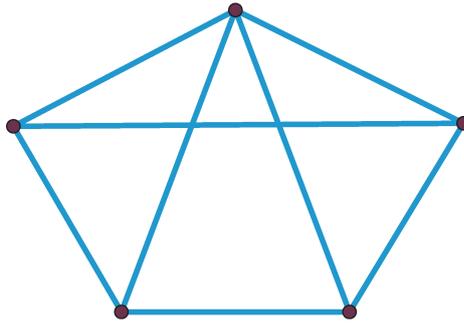


Figura 5.5: Exemplo de um 2-circuito.

Uma consequência das condições de laman é que todo vértice de uma 2-árvore de três ou mais vértices possui grau pelo menos dois. Concluímos que G possui um vértice de grau 2 ou um vértice de grau 3. No primeiro caso, é uma 2-extensão de uma 2-árvore. No segundo caso, é um 2-split de arestas de uma 2-árvore. Aplicando a hipótese de indução, a prova segue. \square

Lema 19. [8] *Seja $G = (V, E)$ uma 2-árvore com $|V| \leq 3$. Então:*

- *Todo vértice de G possui grau mínimo 2;*
- *G é conexo;*
- *Toda aresta de G encontra-se em um circuito.*

Definição 55. *Um grafo $G = (V, E)$ é um **2-circuito** se, para cada aresta $e \in E$, $(V, E - e)$ é uma 2-árvore.*

Na figura 20 é dado um exemplo de um 2-circuito.

Uma forma de caracterizar 2-circuitos é dada no teorema a seguir.

Teorema 20. [8] *Um grafo $G = (V, E)$ é um 2-circuito se e somente se*

- $|E(U)| \leq 2|U| - 3, \forall U \subset V$ com $2 \leq |U| < |V|$, e
- $|E| = 2|V| - 2$

O teorema 20 possui o seguinte corolário:

Corolário 21. [8] *Um grafo $G = (V, E)$ é um 2-circuito se e somente se existem duas árvores $A_1 = (V, T_1)$ e $A_2 = (V, T_2)$, tal que as seguintes condições sejam verificadas:*

- $T_1 \cap T_2 = \emptyset$
- $T_1 \cup T_2 = E$

- $\forall U \subset V$, com $U \neq V$ e $|U| > 3$, no máximo um entre $(U, T_1(U))$ e $(U, T_2(U))$ é uma árvore.

Definição 56. Um grafo $G = (V, E)$ é **2-birígido** se $(V, E - e)$ é 2-rígido, $\forall e \in E$.

E assim, a seguir encontra-se o análogo do teorema 16:

Teorema 22. [8] Um grafo $G = (V, E)$ é 2-birígido se e somente se

- G é 2-rígido, e
- cada aresta encontra-se em um 2-circuito.

5.1 Rigidez no Espaço

Após fazer a análise de formas de se definir rigidez na reta e no plano, a pergunta agora é se é possível encontrar um análogo ao que foi feito anteriormente para sistemas no espaço.

Pelo lema 18, vemos as condições que uma 3-árvore deve satisfazer. Porém, essas condições são apenas necessárias, e não suficientes.

Olhando para a abordagem de Henneberg, temos o análogo para o espaço combinando os lemas 17 e 18:

Lema 20. [8] *Todo grafo que é construído a partir de um triângulo através de uma sequência de 3-splits de aresta é uma 3-árvore. Além disso, toda 3-árvore com um vértice de grau 3 é uma 3-extensão de uma 3-árvore menor, e toda 3-árvore com um vértice de grau 4 é um 3-split de arestas de uma 3-árvore menor.*

Capítulo 6

Rigidez Estática

Nessa seção será feita uma breve abordagem sobre rigidez estática e um resultado que a relaciona com rigidez infinitesimal será enunciado, baseado nas referências [5] e [16].

Definição 57. Um **stress** $L = (L_1, \dots, L_n)$ em um sistema \mathcal{F} é uma associação de n -vetores aos vértices v_1, \dots, v_n de \mathcal{F} .

Definição 58. Uma **resolução** da carga L por um sistema \mathcal{F} é uma associação de escalares às arestas e_{ij} do grafo do sistema tal que, para cada vértice:

$$\sum_{j|e_{ij} \in E} \omega_{ij}(p_i - p_j) + L_i = 0$$

Definição 59. Um stress de equilíbrio em um sistema $\mathcal{F} = (V, E, p)$ é uma associação de escalares ω_{ij} às arestas tal que

- $\sum_{v \in V} L_v = 0$, e
- para cada par de índices $1 \leq h < k \leq n$

$$\sum_{v \in V} [(L_v)_h(p_v)_k - (L_v)_k(p_v)_h] = 0.$$

Definição 60. Um sistema $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^K$ é **estaticamente rígido** se e somente se todo stress de equilíbrio em \mathbb{R}^K possui uma resolução.

Rigidez infinitesimal e rigidez estática são duais, o que significa que são equivalentes:

Teorema 23. [5] Um sistema \mathcal{F} é infinitesimalmente rígido em \mathbb{R}^K se e somente se é estaticamente rígido em \mathbb{R}^K .

Demonstração. Ver [5].

6.1 A Matriz de Stress

Uma técnica frequentemente utilizada para provar rigidez geral (a ser apresentada no próximo capítulo) utiliza matrizes de stress, especialmente técnicas que fazem uso do princípio de indução.

Definição 61. *Seja $G = (V, E)$, onde $|V| = n$. Uma **matriz de stress** Ω é uma matriz simétrica n por n , onde as entradas fora da diagonal são denotadas por $-\omega_{v_i v_j}$ e que obedece às seguintes condições:*

- Se $v_i \neq v_j$ e $\{v_i, v_j\} \notin E$, então $\omega_{v_i v_j} = 0$.
- $w_{v_i v_i} = \sum_{v_j \neq v_i} w_{v_i v_j}$
- $[1, 1, \dots, 1]\Omega = 0$.

Definição 62. *Seja $p = (p_1, \dots, p_m)$ uma configuração, onde $p_i \in \mathbb{R}^K$ é um vetor-coluna. Formamos então a **matriz de configuração** $P = [p_1, \dots, p_m]$.*

Se $P\Omega = 0$, dizemos que a configuração p encontra-se em *equilíbrio* em relação ao stress representado pela matriz Ω . Isso é equivalente à equação

$$\sum_j \omega_{v_i v_j} (p_j - p_i) = 0 \quad \forall i \in V,$$

a qual é conhecida como *stress de equilíbrio*.

Vale notar que a soma de qualquer linha ou coluna de Ω é igual a zero, e que seu rank máximo é $|V| - d - 1$.

Suponha que $(b - a) = \alpha(c - a)$, para algum $\alpha \neq 0, 1$, e que haja um stress de equilíbrio ω em (V, E, p) . É fácil ver, então, que obtém-se um novo stress ω^* no novo sistema colocando-se $\omega^*_{v_i v_k} = \frac{1}{1 - \alpha} \omega_{v_i v_j}$, $\omega^*_{kj} = \frac{1}{\alpha} \omega_{v_i v_j}$ e $\omega^*_{v_i v_j} = 0$, enquanto o resto da matriz permanece o mesmo.

Capítulo 7

Rigidez Global

Continuamos com o objetivo de procurar maneiras práticas para determinar diferentes tipos de rigidez. A ideia é tentar encontrar uma classe de sistemas (e portanto de grafos geradores desses sistemas) a qual possui um algoritmo de tempo polinomial para sua rigidez global. No decorrer dessa seção, vamos construir essa classe aos poucos.

7.1 Primeiras Definições

A seguir estão algumas definições que serão utilizadas adiante nessa seção.

Definição 63. *Um sistema (V, E, p) é **globalmente rígido em \mathbb{R}^K** se quando (V, E, p) é equivalente a (V, E, q) , então q é congruente a p .*

Definição 64. *Um grafo $G = (V, E)$ é **genericamente rígido em \mathbb{R}^K** se (V, E, p) é rígido em todas as configurações genéricas de p .*

No centro das definições 64 e 63, temos a que vem a seguir:

Definição 65. *Um grafo $G = (V, E)$ é **genericamente globalmente rígido em \mathbb{R}^K** se $\mathcal{F} = (V, E, p)$ é globalmente rígido em todas as configurações genéricas de p .*

Definição 66. *Dois sistemas (V, E, p) e (V, E, q) são **equivalentes em \mathbb{R}^K** se os comprimentos de suas arestas correspondentes são os mesmos.*

Definição 67. *Uma configuração $p = (p_1, \dots, p_n)$ é **congruente** a outra configuração $q = (q_1, \dots, q_n)$, denotado por $p \equiv q$, se para todo $\{i, j\}$ em $\{1, \dots, n\}$, $|p_i - p_j| = |q_i - q_j|$.*

Assim, vemos que a diferença entre essas duas definições é que, enquanto em dois sistemas equivalentes é necessário comparar apenas os comprimentos das arestas aos pares (para checar se a aresta de um sistema possui o mesmo comprimento que a sua correspondente no outro), em sistemas congruentes todos os vértices devem respeitar as mesmas distâncias.

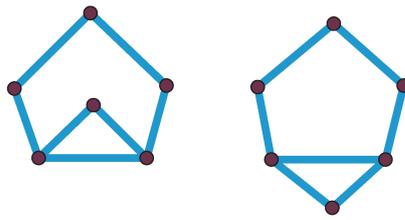


Figura 7.1: Sistemas equivalentes porém não congruentes.

É possível que dois sistemas sejam equivalentes, porém não congruentes? A resposta para isso é sim, como mostra o exemplo da figura 7.1.

Determinar se um sistema é globalmente rígido, assim como quando tratamos de rigidez, pode tornar-se um problema muito complicado. Porém, quando nos restringimos a configurações *genéricas* (como o que é feito com rigidez infinitesimal), esse problema torna-se mais fácil de se resolver.

A ideia de configurações genéricas traz também outras definições:

Definição 68. Uma ***K*-adição de vértices** adiciona um novo vértice v_0 a um grafo $G = (V, E)$ e K novas arestas ligando v_0 a elementos de V .

A operação geométrica correspondente à definição 68 ocorre em (V, E, p) , onde um novo vértice é adicionado em p_0 e K novas barras são adicionadas.

Definição 69. Seja e um vértice de $G = (V, E)$ com extremidades a e b . A operação de **subdivisão** elimina a aresta e e adiciona um novo vértice, c , em algum lugar no segmento que une a e b (ou seja, onde e estava anteriormente), junto com dois novos vértices unindo a até c e c até b .

É possível estender um stress ω do sistema original para o stress ω^* do novo sistema, utilizando a operação de subdivisão (correspondente ao split no sistema (V, E, p)) em e e colocando os stresses nas outras novas arestas como sendo nulo.

Um exemplo de subdivisão está na figura 7.2.

É válido notar que, para $K \geq 2$, um sistema obtido através da operação de subdivisão nunca é infinitesimalmente rígido.

Definição 70. O **split** da aresta e pertencente a um grafo $G = (V, E)$ é a adição de um novo vértice a , a remoção de e , seguido da inserção de $|V|$ novas arestas, de forma que todos os vértices antigos sejam agora ligados ao novo vértice a .

Um exemplo de um split é dado na figura 7.3.

Definição 71. Dizemos que um split de arestas em $e \in G = (V, E)$ é de **posição geral** se os vetores $\{a - v_1, \dots, a - v_m\}$, $v_i \in V$, geram \mathbb{R}^K .

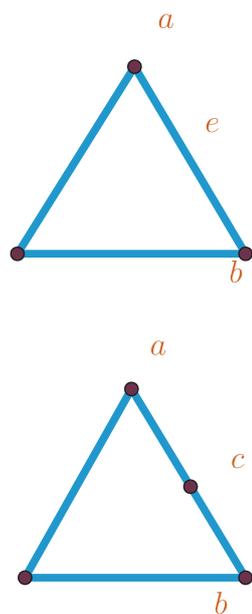


Figura 7.2: Um exemplo de subdivisão.

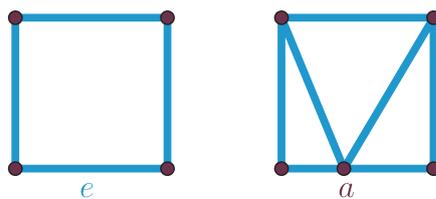


Figura 7.3: Um exemplo de um split.

Anteriormente, utilizamos o fato de que há uma relação de correspondência entre um split de arestas em um grafo $G = (V, E)$ e uma subdivisão de uma aresta em um sistema (V, E, p) . Vale notar que existem definições que dizem respeito a elementos distintos, como grafos (um split) e sistemas (uma separação) por exemplo. Então, é importante notar não apenas qual é a definição, mas sobre o que ela é, para melhor compreensão do texto.

Também é válido observar que o sistema obtido da separação de uma configuração existente nunca é genérico, visto que o novo vértice encontra-se no segmento de reta de dois vértices do grafo inicial.

Definição 72. Dizemos que um split de arestas em $e \in G = (V, E)$ é de **posição geral** se os vetores $\{a - v_1, \dots, a - v_m\}$, $v_i \in V$, geram \mathbb{R}^K .

Definição 73. A operação aonde k arestas são subdivididas e então os novos vértices criados são contraídos em um chama-se **pinching** (em k arestas).

Definição 74. Sejam $G_1 = (V_1, E_1, p_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2, p_2)$ dois sistemas K -dimensionais, com $\hat{V}_1 = \{v_1^1, \dots, v_t^1\} \subseteq V_1$ e $\hat{V}_2 = \{v_1^2, \dots, v_t^2\} \subseteq V_2$ tais que $p_{1i} = p_{2i}$, $1 \leq i \leq t$. Então, **grafting** G_2 em G_1 **através de** \hat{V}_1, \hat{V}_2 significa criar um novo sistema, com um novo grafo $H = (V, E, p)$, deletando as arestas de G_2 que conectam os vértices em \hat{V}_2 e identificando os vértices v_i^1 e v_i^2 , $1 \leq i \leq t$.

Definição 75. Para dois vértices não-adjacentes u, v de um sistema $\mathcal{F} = (V, E, p)$, $u, v \in V$, dizemos que o segmento $e = \{u, v\}$ é **implícito** se $\text{posto}(M(G)) = \text{posto}(M(G+e))$.

onde $M(G)$ é a matriz de rigidez.

Definição 76. O **fecho** de $\mathcal{F} = (V, E, p)$ é o sistema obtido adicionando-se todos os segmentos implícitos.

7.1.1 Grafos e Sistemas Body-Bar

Hendrickson [11] observou que duas condições necessárias para que um grafo G seja genericamente globalmente rígido no \mathbb{R}^K são $(K + 1)$ -conectividade e rigidez redundante.

Para $K = 2$, foi confirmado posteriormente que essas condições também são suficientes. Porém, para dimensões maiores, foram encontrados contra-exemplos, mostrando que essas condições não são sempre suficientes. Então, é natural procurar uma classe de grafos onde seja possível determinar rigidez genérica global de um modo combinatorial. Assim, são introduzidos os seguintes conceitos:

Definição 77. Um **multigrafo** é dado por um conjunto V de vértices, um conjunto E de arestas e uma função $f : E \rightarrow \{u, v\}$ tal que $u, v \in V, u \neq v$.

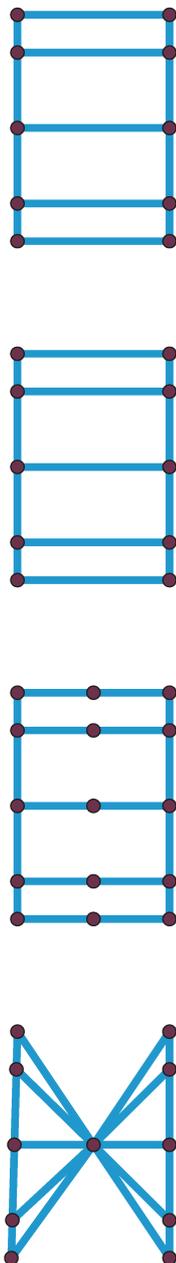


Figura 7.4: Exemplo de pinching.

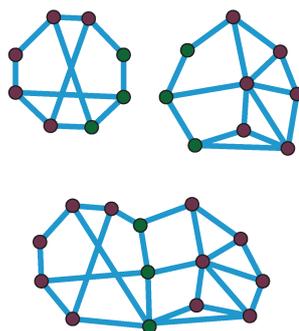


Figura 7.5: Exemplo de grafting.

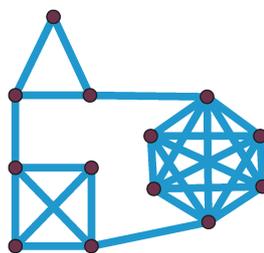


Figura 7.6: Exemplo de um grafo body-bar

Definição 78. Um grafo $G = (V, E)$ o qual é particionado em grafos completos par a par disjuntos e as arestas às quais conectam esses grafos são par a par disjuntas é chamado de **body-bar**.

Definição 79. Um **sistema body-and-bar K -dimensional** é um sistema (V, E, p) no qual (V, E) é um grafo body-bar.

Na figura 7.6 encontramos um exemplo de um grafo body-bar.

Definição 80. O **grafo body-bar induzido por um multigrafo $H = (V, E)$** , denotado por G_H , é o grafo obtido a partir de H substituindo cada um de seus vértices v_i por um grafo completo $K_{\rho(v_i)}$, $i = 1, \dots, |V|$, e cada uma de suas arestas (que não sejam um loop) por uma aresta entre os grafos completos correspondentes, de tal forma que esses grafos completos sejam par a par disjuntos.

Vê-se que grafos body-bar podem ser construídos de uma forma indutiva. Agora, vamos utilizar ferramentas definidas anteriormente, junto com essa mais recente, para construir um sistema infinitesimalmente rígido, que possua uma matriz de posto máximo, atrelados a um multigrafo H construído dessa nova maneira. O que procuramos, aqui, é um sistema resultante que seja genericamente globalmente rígido.

Definição 81. Dizemos que o multigrafo $H = (V, E)$ é **altamente K -árvore conexo** se

$$e_H(\mathcal{P}) \geq m(t - 1) + 1$$

$\forall \mathcal{P} = \{X_1, \dots, X_t\} \in V, t \geq 2$, onde \mathcal{P} representa uma partição de V , e $e_H(\mathcal{P})$ o número de arestas de H conectando diferentes elementos de \mathcal{P} .

7.2 O Resultado Principal do Capítulo

Adiante, o teorema que relaciona algumas definições primárias com o assunto dessa seção, e é o resultado principal:

Teorema 24. [3] *Um sistema body-and-bar $\mathbf{F} = (V, E, p)$ é genericamente globalmente rígido em \mathbb{R}^K se e somente se é genericamente redundantemente rígido (isto é, não existe aresta $e \in E$ tal que sua remoção faça com que (V, E) deixe de ser rígido) em \mathbb{R}^K .*

O teorema anterior implica em um algoritmo de tempo polinomial para determinar rigidez generica global em qualquer dimensão: é necessário testar se o sistema resultante é rígido na falta uma de suas arestas, e fazer esse teste para todas elas. Assim, a velocidade do algoritmo depende do número de arestas de forma polinomial.

7.3 Outros Resultados Necessários

A seguir, encontram-se teoremas e lemas que são pré-requisitos para chegarmos ao resultado principal.

Teorema 25. [11] *Seja $\mathbf{F} = (V, E, p)$ um sistema genericamente rígido em \mathbb{R}^K . Então ou $G = (V, E)$ é um grafo completo com, no máximo, $K + 1$ vértices, ou:*

- G é $(K + 1)$ -vértice-conexo e
- não existe $e \in E$ tal que sua remoção faça com que \mathbf{F} deixe de ser infinitesimalmente rígido em \mathbb{R}^K .

Teorema 26. [3] *Seja (V, E, p) um sistema em \mathbb{R}^K , onde p é uma configuração genérica. Se (V, E, p) possui um stress de equilíbrio com o rank da matriz Ω associada ao sistema sendo igual a $|V| - d - 1$ e (V, E, p) sendo infinitesimalmente rígido, então (V, E, p) é globalmente rígido em \mathbb{R}^K .*

Lema 21. [3] *Suponha que o sistema (V^*, E^*, p^*) é obtido de (V, E, p) através da operação de subdivisão do vértice $\{v_i, v_j\}$, e seja ω um stress de equilíbrio e Ω a matriz de stress de (V, E, G) tais que $\omega_{v_i v_j} \neq 0$ e $\alpha \neq 0$. Então, se Ω^* é a matriz de stress obtida do novo sistema, posto $(\Omega^*) = \text{posto}(\Omega) + 1$.*

Lema 22. [3] Se (V, E, p) é um sistema infinitesimalmente rígido em \mathbb{R}^K , um split de posição geral de uma aresta pertencente a $G = (V, E)$ gera um novo grafo $G^* = (V^*, E^*)$, junto a uma nova configuração (V^*, E^*, p^*) que é infinitesimalmente rígida em \mathbb{R}^K .

Lema 23. [11] Suponha que (V, E, p) é um sistema infinitesimalmente rígido, com uma matriz de stress Ω de rank máximo $|V| - m - 1$. Então existe uma vizinhança U_p no espaço de configurações \mathbb{R}^K tal que, se $q \in U_p$, então (V, E, q) é infinitesimalmente rígido em \mathbb{R}^K e possui um stress de equilíbrio ω' e uma matriz de stress Ω' também de rank máximo $|V| - m - 1$. Além disso, se G é genericamente redundantemente rígido e q é uma configuração genérica, ω' pode ser escolhido de tal forma que $\omega'_{v_i, v_j} \neq 0$ em todas as arestas $\{v_i, v_j\} \in G$.

Agrupado-se os teoremas e definições anteriores, tem-se o método original para determinar rigidez genérica global: sejam $G = (V, E, p)$ um sistema infinitesimalmente rígido associado a um stress ω e uma matriz de post máximo, e e uma aresta com stress não-nulo. Um split de aresta de posição geral em $e \in E$ gera um novo sistema $G^* = (V^*, E^*, p^*)$ infinitesimalmente rígido cuja matriz de stress correspondente também possui rank máximo.

Após executar as operações citadas acima, é necessário ainda mostrar que $G^* = (V^*, E^*, p^*)$ é genericamente globalmente rígido. Mas o lema 23 nos diz que, para isso, é necessário apenas olhar para a vizinhança do sistema.

Esse tipo de argumento, no qual um sistema é contruído a partir de outro, será a base para chegar ao objetivo final, que é encontrar uma classe de grafos globalmente rígidos no \mathbb{R}^K .

7.4 Determinando Rigidez Genérica Global em Sistemas Body-Bar

O próximo resultado nos dá uma construção indutiva de multigrafos que induzem grafos body-bar rígidos. Isso será utilizado na construção de um sistema infinitesimalmente rígido, mais adiante.

Teorema 27. [3] Um multigrafo $H = (V, E)$ é altamente K -árvore conexo se e somente se pode ser obtido de um único vértice a partir das seguintes operações:

- adicionando-se um vértice (podendo esse ser um loop);
- fazendo-se a operação de pinching k arestas ($1 \leq k \leq K - 1$) com um novo vértice z e adicionando-se $K - k$ novos vértices conectando-se z com vértices preexistentes (operação conhecida também como **K -split em k arestas**).

O teorema 27 será utilizado depois de estabelecer-se condições para que um grafo seja genericamente redundantemente rígido em \mathbb{R}^K . A seguir, reuniremos lemas e teoremas necessários para a prova do teorema final, e depois explicamos como os utilizaremos para isso.

7.5 Inserção de Corpos

Primeiramente, será construído um corpo na forma de um grafo $B_{K,k}$ genericamente rígido com k vértices e conjunto de vértices E_1 , o qual será unido a um grafo completo cujo conjunto de vértices é E_2 , onde $|E_2| = mk - \binom{k}{2}$ se $1 \leq k \leq K$ e $\binom{d+1}{2}$ se $d+1 \leq k \leq \binom{d+1}{2} - 1$. O grafo final será denominado por $C_{K,k}$, e também é genericamente rígido devido ao modo como será construído.

Vamos começar com o caso onde $1 \leq k \leq K$.

O lema seguinte faz uso da operação definida em 68 para começar a formar $C_{K,k}$. É importante que, além de um corpo geralmente rígido, a matriz de stress do sistema permaneça com o mesmo ranking, conforme as mudanças são feitas nos grafos. Daí vem a importância do enunciado a seguir:

Lema 24. [3] *Seja $G = (V, E, p)$ um sistema K -dimensional e seja $G' = (V', E', p')$ o sistema obtido através de uma K -adição de vértices. Se p_0, p_1, \dots, p_d estão em posição geral em \mathbb{R}^K , então posto $(R(G', p)) = \text{posto}(R(G, p) + d)$, onde $R(G, p)$ é a matriz de rigidez do sistema original.*

A construção é feita da seguinte maneira, para $1 \leq k \leq K$. Inicialmente temos um vértice v_1^1 (onde o expoente significa que a aresta pertence a E_1) de grau K adicionado a um grafo completo de K vértices quando $k = 1$. A cada passo k um novo vértice v_k^1 é adicionado. Esse novo vértice possui K arestas, das quais $k - 1$ serão entre v_k^1 e v_i^1 , $i < k$, e as outras $K - k + 1$ o ligarão a novos vértices que são adicionados ao grafo completo, tornando-o um grafo completo ainda maior. A primeira aresta que conecta w_k^1 a E_2 é chamada de *primária*, e as outras, *secundárias*.

Quando $k = K$, v_m^1 é ligado a todos os vértices em E_1 e a um novo vértice em E_2 . Nesse ponto, está formado o $C_{K,K}$, e a construção muda. Para formar $B_{K,k}$ ($K + 1 \leq k \leq \binom{K+1}{2} - 1$), partimos de $C_{K,K}$ e adicionamos $k - d$ vértices v_{K+1}^1, \dots, v_k^1 por meio de splits nas arestas secundárias que conectam V_1 e V_2 (onde o primeiro conjunto é o de vértices adicionados no passo anterior, e o segundo, de vértices do grafo completo). Cada novo vértice interno deve tornar-se conectado a exatamente um vértice em V_2 (a parte de “fora” do split), o qual será seu vértice primário, e também a $K - 1$ vértices internos em V_1 . No final, $C_{K,k}$ possui $V_1 = v_1^1, \dots, v_k^1$, e o número de vértices que ligam V_1 a V_2 é igual a $\binom{K+1}{2}$.

Lemas 22 e 24 implicam que:

Lema 25. [3] Os grafos $B_{K,k}$ e $C_{K,k}$ são genericamente infinitesimalmente rígidos em \mathbb{R}^K , $\forall \{m, k\}$ tais que $1 \leq k \leq \binom{K+1}{2} - 1$. O número de vértices de $B_{K,k}$ é k , e no corpo exterior (o qual é igual a V_1 e V_2) é $Kk - \binom{k}{2}$ se $1 \leq k \leq K$, e $\binom{K+1}{2}$ se $d+1 \leq k \leq \binom{K+1}{2} - 1$.

Agora, é necessário fazer a operação de *grafting* para unir $B_{K,k}$ e os outros vértices a um sistema infinitesimalmente rígido.

Lema 26. Sejam $G_1 = (V_1, E_1, p_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2, p_2)$ sistemas rígidos K -dimensionais e H o sistema obtido pelo processo de *grafting* G_2 em G_1 através de \hat{V}_1, \hat{V}_2 , onde $\hat{V}_1 \subseteq V_1$, $\hat{V}_2 \subseteq V_2$, $|V_1| = |V_2| = t \geq K$. Se os pontos $q_{1i} = q_{2i}$, $1 \leq i \leq t$ estão em posição geral, então H é infinitesimalmente rígido.

Agora, estamos prontos para executar o procedimento de *grafting* de $C_{K,k}$ em G_H , um sistema selecionado com k arestas u_1v_1, \dots, u_kv_k a serem *pinched*. Para cada vértice interno w_i ($1 \leq i \leq k$) de $C_{K,k}$, existe uma única aresta primária incidente a ele. Seja r_i a outra extremidade de cada aresta primária correspondente aos vértices w_i , e r_{k+1}, \dots, r_s os vértices restantes do corpo interior, $s = mk - \binom{k}{2}$ quando $1 \leq k \leq K$ e $s = \binom{K+1}{2}$ quando $K+1 \leq k \leq \binom{K+1}{2} - 1$. Aqui, S é um conjunto de s vértices designados em G_H , onde $u_i \in S$ e $v_i \notin S$, $1 \leq i \leq k$.

Sejam p' uma configuração de $C_{K,k}$ na qual os vértices do grafo completo externo correspondem aos s vértices de $G_H = (V, E, p)$ que foram designados, com $p'(r_i) = p(u_i)$, $1 \leq i \leq k$, e com cada $p'(w_i)$ no ponto médio da aresta u_iv_i , $1 \leq i \leq k$. Vamos então *graft* $C_{K,k}$ em G_H ao longo de S, R .

O conjunto S será determinado pelo *split* em H , quando aplicamos o seguinte lema:

Lema 27. Dado um sistema infinitesimalmente genérico G_H com k vértices designados u_1v_1, \dots, u_kv_k e um conjunto S de vértices distintos com $u_i \in S$ e $v_i \notin S$, $1 \leq i \leq k$, colocando-se $C_{K,k}$ nas k arestas e s vértices produz um sistema estendido $\hat{G}_H = (\hat{V}, \hat{E}, \hat{p})$, o qual é infinitesimalmente rígido.

O próximo passo é substituir as barras u_iw_i e u_iv_i por u_iw_i e w_iv_i . Isso é feito para que os vértices w_i operem um *split* e preservem rigidez infinitesimal, ao mesmo tempo que o posto da matriz de rigidez aumente em k . Essa operação é conhecida como uma **troca de triângulos**, e o sistema resultante $G_H^* = (V^*, E^*, p^*)$, de **sistema inserido**.

Lema 28. [3] Seja $G_H = (V, E, p)$ um sistema infinitesimalmente rígido com uma matriz de stress de posto completo e com um stress não-negativo em todas as arestas. Seja também $\hat{G}_H = (\hat{V}, \hat{E}, \hat{p})$ obtido inicialmente de G_H e colocando-se $C_{K,k}$ em k arestas u_iv_i e s vértices. Suponha que $G_H^* = (V^*, E^*, p^*)$ é obtido a partir de $\bar{G}_H = (\bar{V}, \bar{E}, \bar{p})$ através de k trocas de triângulos nos pares colineares u_iw_i, u_iv_i , $1 \leq i \leq k$. Então

- $G_H^* = (V^*, E^*, p^*)$ é infinitesimalmente rígido;
- $G_H^* = (V^*, E^*, p^*)$ possui uma matriz de stress de posto completo.

$G_H^* = (V^*, E^*, p^*)$ ainda não é um grafo body-bar, pois podem existir vértices os quais estão conectados a mais de um vértice de um corpo diferente do seu. Como em um grafo dessa categoria cada vértice está ligado a no máximo um vértice de um corpo diferente, é necessário operar mais uma modificação, mantendo a propriedade de rigidez infinitesimal para configurações genéricas. O próximo lema nos mostra como fazer isso.

Lema 29. [11] *Seja H um multigrafo para o qual o grafo body-bar $G_H = (V, E)$ é genericamente rígido em \mathbb{R}^K . Seja p uma configuração genérica para a qual (V, E, p) possui um stress de equilíbrio ω associado a uma matriz de stress de posto máximo. Suponha que haja um conjunto de arestas designadas $u_i v_i$, $1 \leq i \leq k$, e inteiros não-negativos s_1, \dots, s_n designados aos n corpos de G_H , onde $1 \leq k \leq \binom{K+1}{2} + k$ e $\sum_{l=1}^n s_l = \binom{K+1}{2} - k$. Então, um grafo body-bar $G_{H^*} = (V^*, E^*)$ e uma configuração \hat{p} extendido podem ser construídos através da adição de um corpo b^* de $\binom{K+1}{2} + k$ vértices, o qual possui s_i vértices adicionados a cada corpo já existente b_i , $1 \leq i \leq n$, e substituindo-se as k arestas designadas por $\binom{K+1}{2} + k$ arestas disjuntas conectando b^* aos vértices adicionados e aos vértices u_i, v_i , $1 \leq i \leq k$, tal que*

- (V^*, E^*, \hat{p}) é infinitesimalmente rígido, e
- (V^*, E^*, \hat{p}) possui uma matriz de stress de posto máximo.

7.6 Grafos Body-Bar Globalmente Rígidos

Lema 30. [11] *Seja $H = (V, E)$ um multigrafo com $|V| \leq 2$ e suponha que o grafo body-bar G_H induzido por H é genericamente redundantemente rígido em \mathbb{R}^K . Então H é altamente $\binom{K+1}{2}$ -árvore-conexo.*

Lema 31. [11] *Seja $H = (V, E)$ um multigrafo altamente $\binom{K+1}{2}$ -árvore-conexo. Seja também $G_H = K_{K+2(l+1)}$ quando $|V|=1$ e E é um conjunto de $l \leq 0$ loops, e o grafo body-bar induzido por H caso contrário. então existe uma realização infinitesimalmente rígida (V, E, p) , onde $(V, E) = G_H$, de G_H em \mathbb{R}^K com um stress de equilíbrio ω para o qual a matriz de stress associada Ω possui posto $n - K - 1$, onde $n = |V(G_H)|$.*

Capítulo 8

Sequências de Henneberg

Podemos aplicar a teoria estudada até o momento na determinação de rigidez de certos tipos de grafos. Existem sequências no plano que, dadas certas condições iniciais, geram apenas grafos 2-isostáticos. Para o espaço, existem métodos análogos em casos especiais. Aqui, analisaremos tais sequências, chamadas *Sequências de Henneberg*, introduzidas em [16], aonde encontram-se as demonstrações dos teoremas apresentados.

Analogamente, dado um grafo $G = (V, E)$ com $|E| = 2|V| - 3$, é possível gerar uma sequência tal que todos os grafos nela são isostáticos se e somente se G é isostático.

A ideia é remover um a um os vértices de um grafo G , criando um novo grafo G' tal que, se G é rígido no espaço a ser analisado, G' mantém a propriedade. Obviamente, não podemos simplesmente remover qualquer vértice de qualquer grau - às vezes é necessário substituí-lo por outro vértice de um grau menor. Os pormenores dessas operações serão analisados a seguir.

8.1 Sequências de Henneberg no Plano

É válido lembrar que um grafo $G = (V, E)$ genericamente 2-rígido no plano possui $|E| = 2|V| - 3$ vértices, o que implica que deve existir um vértice de grau menor que 4. Assim, analisaremos as operações em vértices desse tipo.

Proposição 28. [16] *Sejam $G = (V, E)$ um grafo com dois vértices distintos a e b , e $G^* = (V^*, E^*)$ o grafo obtido adicionando-se um vértice q com arestas $\{q, a\}$ e $\{q, b\}$ a G . Então, G^* é genericamente 2-rígido se e somente se G é genericamente 2-rígido.*

Proposição 29. [16] *Sejam $G = (V, E)$ um grafo com uma aresta $\{a, b\}$ e um terceiro vértice distinto c , e $G^* = (V^*, E^*)$ o grafo obtido a partir de G deletando-se a aresta $\{a, b\}$ e adicionando-se um novo vértice q e as arestas $\{q, a\}$, $\{q, b\}$ e $\{q, c\}$. Então, G^* é genericamente 2-rígido se e somente se G é genericamente 2-rígido.*

Proposição 30. [16] *Seja $G^* = (V^*, E^*)$ um grafo que possui um vértice q de grau 3 e $G = (V, E)$ o grafo obtido a partir de G^* deletando-se q e suas respectivas arestas. Então,*

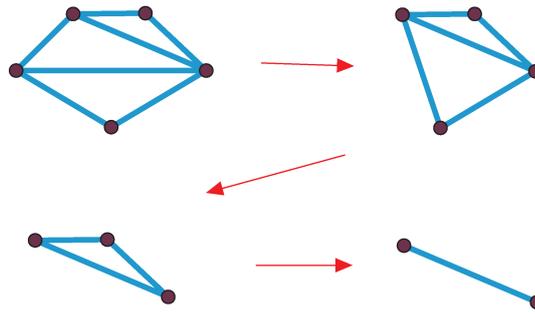


Figura 8.1: Exemplo de uma sequência de Henneberg no plano.

uma aresta escolhida entre $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ ou $\{b, c\}$ adicionada a G^* gera um novo grafo G' o qual é genericamente 2-rígido se G^* é genericamente 2-rígido.

Proposição 31. [16] Seja $G^* = (V^*, E^*)$ um grafo com um vértice $(k+2)$ -valente q , com arestas $\{q, a_i\}$, $1 \leq i \leq k+2$. Então é possível criar um novo grafo G 2-rígido removendo q e adicionando k arestas entre os $k+2$ vértices a_i .

Definição 82. Uma **2-sequência de Henneberg** é uma sequência de grafos G_2, \dots, G_k na qual G_2 é K_2 e G_{i+1} é obtido a partir de G_i adicionando-se um vértice de grau 2, ou deletando-se uma aresta $\{a, b\}$ e adicionando-se um vértice q de grau 3 ligado aos vértices a, b e um terceiro vértice c .

Proposição 32. [16] Um grafo G é genericamente 2-rígido se e somente se existe uma 2-sequência de Henneberg para G

8.2 Criando um Algoritmo

Com base nas proposições anteriores, a autora dessa dissertação, junto com o pesquisador Leo Liberti, criaram um algoritmo que gera 2-sequências de Henneberg no plano, a fim de determinar se um dado grafo é isostático ou não.

A primeira verificação, $|V| \neq 2|E| - 3$, é uma condição necessária para que um grafo seja isostático no plano. Ela não é suficiente, porém com ela o algoritmo devolve uma resposta correta para grafos isostáticos. Uma versão para grafos não-isostáticos (porém rígidos) está em desenvolvimento.

8.3 Construções de Henneberg no Espaço

Existem resultados para grafos mapeados no espaço os quais possuem vértices de grau 3, 4 ou 5 ([16]).

Entrada: Grafo $G = (V, E)$

Saída: *out*, variável a qual é 1 se G é 2-rígido e 0 caso contrário

Tome $k = 0$ e $G' = (V', E') = G$.

enquanto $k < |V|$ **faça**

 Tome o nó v_i com o menor grau em G .

se $|V| \neq 2|E| - 3$ **então**

 - *out* = 0

 - **retorna**

fim

se v_i possui grau 0 (o grafo não é 2-rígido) **então**

 - *out* = 0

 - **retorna**

fim

se v_i possui grau 1 **então**

 - **se** $|V'| > 2$ (o grafo original G não é rígido) **então**

 - *out* = 0

 - **retorna**

fim

 - **se** $|V'| = 2$ (o grafo original G é rígido) **então**

 - *out* = 1

 - **retorna**

fim

fim

se v_i possui grau 2 **então**

 Delete-o

 Atualize G'

fim

se v_i possui grau 3 e é conectado aos vértices a, b e c **então**

 Delete v_i e adicione uma nova aresta entre a e b , a e c ou c e b

 Atualize G'

fim

se v_i possui grau $i + 2$ maior ou igual a 4, conectado aos vértices a_1, \dots, a_{i+2} **então**

 Delete v_i e adicione i novas arestas entre a_1, \dots, a_{i+2}

 Atualize G'

fim

$k = k + 1$

fim

Definição 83. *Um grafo é **stiff** se suas estruturas genéricas isomorfas são rígidas.*

A definição acima é algo mais forte do que a definição original de rigidez.

Em [14] existe outro resultado interessante, o qual diz que todo grafo 6-conexo é *stiff* no plano - outro resultado útil para montar um algoritmo. Porém, ainda falta-se resultados mais gerais para que algo que abranje todos os grafos 2-rígidos seja alcançado.

Conclusão

Nesse trabalho foi feito um estudo sobre a teoria de rigidez e algumas de suas principais linhas de desenvolvimento.

Essa teoria é bem desenvolvida para dimensões 1, 2 e 3, especialmente no caso de grafos mapeados na reta e grafos isostáticos no plano. Ainda assim, além desses casos, não existem condições necessárias e suficientes para se determinar rigidez.

Para dimensões maiores, existem alguns resultados, mas torna-se mais complexo determinar-se rigidez. Uma proposta para pesquisas futuras é abordar mais especificamente casos em dimensões diferentes de 1, 2 e 3.

Também existe pouca pesquisa relacionada a rigidez em outras normas. Aqui, assim como na vasta maioria de referências encontradas, foi seguido o estudo de rigidez na norma euclidiana, e projetos futuros incluem pesquisar o que acontece quando muda-se a norma.

Outra ideia para trabalhos futuros é continuar a desenvolver o algoritmo apresentado no Capítulo 7 baseado em sequências de Henneberg. No momento, esse algoritmo é aplicável apenas a grafos isostáticos no plano, e queremos generalizá-lo para qualquer tipo de grafo - inicialmente no plano, depois, em maiores dimensões.

Mais um projeto futuro baseia-se em estudar classes de grafos e classificá-las de acordo com seu grau de complexidade computacional para determinar rigidez. Claramente, grafos completos são sempre rígidos, e grafos no plano tais que $|E| \leq 2|V| - 3$ (aonde E é o conjunto de arestas do grafo e V seu conjunto de vértices) nunca serão rígidos. Essa são, então, as classes mais simples para se determinar rigidez, e a ideia é estudar outros tipos de grafos e o esforço computacional necessário para determinar sua rigidez.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Asimow e B. Roth *The Rigidity of Graphs, II* Journal of Mathematical analysis and Applications 68, p. 171-190 (1979)
- [2] L. Asimow e B. Roth *The Rigidity of Graphs* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 245, Novembro de 1978
- [3] R. Connelly *Stress Matrices and M Matrices*,
- [4] R. Connelly, T. Jordán, W. Whiteley *Generic global rigidity of body-bar frameworks*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 103 (2013) 689–705
- [5] R. Connelly *Chapter 3: The Basic Concepts of Static Rigidity* <http://www.math.cornell.edu/connelly/rigidity.chapter.3.pdf>
- [6] R. Connelly *Chapter 2: Basic Concepts* <http://www.math.cornell.edu/connelly/rigidity.chapter.2.pdf>
- [7] J. Cheng *Characterizing Generic Global Rigidity*, Geometric Complexity CIS6930, 3 de Novembro de 2011, Aulas 27 a 32
- [8] J. E. Graver *Counting on Frameworks: Mathematics to Aid the Design of Rigid Structures* The Mathematical Association of America (Incorporated), 2001
- [9] S. J. Gortler e D. P. Thurston, *Characterizing the Universal Rigidity of Generic Frameworks*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge university press, 1997.
- [10] S. J. Gortler, A. Healy, D. P. Thurston *Characterizing Generic Global Rigidity*, American Journal of Mathematics (Impact Factor: 1.65). 10/2007;
- [11] B. Hendrickson *Conditions for unique graph realizations*, SIAM J. Comput. 21 (1992)
- [12] B. Jackson *Notes on the Rigidity of Graphs* , Levico, 22-26 October 2007
- [13] G. Laman *On graphs and rigidity of plane skeletal structures* Journal of Engineering Mathematics October 1970, Volume 4, Issue 4, pp 331-340

-
- [14] L. Lovasz e Y. Yemini *On Generic Rigidity in the Plane* SIAM J. ALG. DISC. METH. Vol. 3, No. 1, March 1982
- [15] B. Roth *Chapter 1 - Introduction*, <http://www.math.cornell.edu/~connelly/rigidity.chapter.1.pdf>
- [16] T.S. Tay, W. Whiteley *Generating Isostatic Frameworks* Structural Topology # 11, 1985
- [17] P. Walters, *Global Rigidity: The Effect of Coning*, Discrete and Computational Geometry, Junho de 2010, Volume 43, Issue 4, p. 717-735
- [18] D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, 2001
- [19] W. Whiteley *Counting out to the flexibility of molecules* Recebido em 18 de Julho de 2005, aceito para publicação em 28 de Setembro de 2005 e publicado em 9 de Novembro de 2005. Online em stacks.iop.org/PhysBio/2/S116

Capítulo 9

Licença

Copyright (c) 2015 de Ana Flávia da Cunha Lima.

Exceto quando indicado o contrário, esta obra está licenciada sob a licença Creative Commons Atribuição 3.0 Não Adaptada. Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/>.



A marca e o logotipo da UNICAMP são propriedade da Universidade Estadual de Campinas. Maiores informações sobre encontram-se disponíveis em <http://www.unicamp.br/unicamp/a-unicamp/logotipo/normas%20oficiais-para-uso-do-logotipo>.

9.1 Sobre a licença dessa obra

A licença Creative Commons Atribuição 3.0 Não Adaptada utilizada nessa obra diz que:

1. Você tem a liberdade de:

- Compartilhar — copiar, distribuir e transmitir a obra;
- Remixar — criar obras derivadas;
- fazer uso comercial da obra.

2. Sob as seguintes condições:

- Atribuição — Você deve creditar a obra da forma especificada pelo autor ou licenciante (mas não de maneira que sugira que estes concedem qualquer aval a você ou ao seu uso da obra).

Capítulo 10

Licença

Copyright (c) 2015 de Ana Flávia da Cunha Lima.

Exceto quando indicado o contrário, esta obra está licenciada sob a licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada. Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.



A marca e o logotipo da UNICAMP são propriedade da Universidade Estadual de Campinas. Maiores informações sobre encontram-se disponíveis em <http://www.unicamp.br/unicamp/a-unicamp/logotipo/normas%20oficiais-para-uso-do-logotipo>.

10.1 Sobre a licença dessa obra

A licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada utilizada nessa obra diz que:

1. Você tem a liberdade de:

- Compartilhar — copiar, distribuir e transmitir a obra;
- Remixar — criar obras derivadas;
- fazer uso comercial da obra.

2. Sob as seguintes condições:

- Atribuição — Você deve creditar a obra da forma especificada pelo autor ou licenciante (mas não de maneira que sugira que estes concedem qualquer aval a você ou ao seu uso da obra).

- Compartilhamento pela mesma licença — Se você alterar, transformar ou criar em cima desta obra, você poderá distribuir a obra resultante apenas sob a mesma licença, ou sob uma licença similar à presente.