



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

FRANCIELLE KUERTEN BOEING

Álgebras de Hopf e suas Aplicações na Teoria de Identidades Polinomiais

Campinas

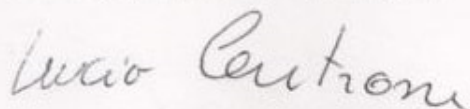
2016

Francielle Kuerten Boeing

Álgebras de Hopf e suas Aplicações na Teoria de Identidades Polinomiais

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática.

Orientador: Lucio Centrone



Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Francielle Kuerten Boeing e orientada pelo Prof. Dr. Lucio Centrone.

Campinas

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 160307/2014-7

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

B633a Boeing, Francielle Kuerten, 1992-
Álgebras de Hopf e suas aplicações na teoria de identidades polinomiais /
Francielle Kuerten Boeing. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Lucio Centrone.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Hopf, Álgebra de. 2. Identidade polinomial. 3. Codimensão (Matemática).
4. Amitsur, Conjectura de. 5. Sweedler, Álgebra de. I. Centrone, Lucio, 1983-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Hopf algebras and their applications in the theory of polynomial identities

Palavras-chave em inglês:

Hopf algebras

Polynomial identity

Codimension (Mathematics)

Amitsur conjecture

Sweedler algebras

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestra em Matemática

Banca examinadora:

Lucio Centrone [Orientador]

Plamen Emilov Kochloukov

Dimas José Gonçalves

Data de defesa: 31-10-2016

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 31 de outubro de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). LUCIO CENTRONE

Prof.(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof.(a). Dr(a). DIMAS JOSÉ GONÇALVES

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Edio e Raquel, e à minha irmã Michelle pelo apoio incondicional e pela confiança. Ao meu namorado, Luis Gustavo, por toda a ajuda e suporte emocional.

Ao meu amigo Deison, que me ajudou muito na adaptação a Campinas e às minhas melhores amigas Tamara e Amanda, que continuaram sendo minhas amigas mesmo com a distância.

Agradeço ao meu orientador neste trabalho, professor Lucio Centrone, que compartilhou comigo um pouco do seu grande conhecimento na área das identidades polinomiais e fez contribuições muito importantes para este trabalho.

Agradeço também aos professores Plamen E. Kochloukov e Dimas José Gonçalves pelas valiosas sugestões para a melhoria deste trabalho.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro durante o mestrado.

Resumo

Neste trabalho estuda-se a prova do análogo da conjectura de Amitsur para álgebras associativas de dimensão finita com uma ação generalizada de uma álgebra de Hopf sobre um corpo de característica zero. Para trabalhar com essas álgebras, apresentam-se conceitos e propriedades básicas sobre as identidades polinomiais, as representações do grupo simétrico e as álgebras de Hopf. A partir da prova do análogo da conjectura de Amitsur para álgebras associativas com uma ação generalizada de uma álgebra de Hopf, provam-se neste trabalho o análogo da conjectura de Amitsur para álgebras com uma ação de um grupo finito que age por automorfismos e antiautomorfismos, álgebras graduadas por um grupo finito e álgebras H -módulo, onde H é uma álgebra de Hopf. Por último, prova-se a conjectura de Amitsur para álgebras de Sweedler de dimensão 4 com a ação de seu dual, independentemente da prova apresentada para álgebras com uma ação generalizada de uma álgebra de Hopf. Este trabalho é baseado no artigo de Alexey Sergeevich Gordienko publicado por Journal of Pure and Applied Algebra em 2012.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf. Identidades Polinomiais. Conjectura de Amitsur. Codimensões. Representações. Álgebra de Sweedler.

Abstract

In this work we study the proof of the analog of Amitsur's conjecture for finite dimensional associative algebras with a generalized action of a Hopf algebra over a field of characteristic zero. In order to work with these algebras, we show concepts and basic properties about polynomial identities, representations of the symmetric group and Hopf algebras. Starting from the proof of the analog of the Amitsur's conjecture for associative algebras with a generalized action of a Hopf algebra, we prove on this work the analog of Amitsur's conjecture for algebras with an action of a finite group acting by automorphisms and anti-automorphisms, algebras graded by a finite group and H -module algebras, where H is a Hopf algebra. Finally, we prove Amitsur's conjecture for 4-dimensional Sweedler algebras with its dual action, independently of the proof for algebras with a generalized action of a Hopf algebra. This work is based on the paper by Alexey Sergeevich Gordienko, published in the Journal of Pure and Applied Algebra, in 2012.

Keywords: Hopf Algebras. Polynomial Identities. Amitsur's Conjecture. Codimensions. Representations. Sweedler's Algebras.

Sumário

	Introdução	11
1	PRELIMINARES	14
1.1	Identidades Polinomiais	14
1.1.1	T-ideais e variedades de álgebras	16
1.1.2	Componentes Multi-Homogêneas e Polinômios Multilineares	18
1.2	Representações do Grupo Simétrico	23
1.2.1	Representações de Dimensão Finita	23
1.2.2	Representações do Grupo Simétrico	25
1.2.2.1	Representações induzidas do grupo simétrico	29
1.2.3	Ações do Grupo Simétrico sobre Polinômios Multilineares e Codimensões	34
1.3	Álgebras de Hopf	38
1.3.1	Coálgebras e Biálgebras	38
1.3.2	Álgebras de Hopf	46
1.3.3	Módulos e Comódulos	50
1.3.4	Módulos de Hopf	55
1.4	Integrais e Semissimplicidade	60
1.4.1	Integrais	60
1.4.2	Teorema de Maschke	63
2	CONJECTURA DE AMITSUR	66
2.1	Introdução	66
2.1.1	G -codimensões	66
2.1.2	H -codimensões de Álgebras H -módulo	69
2.1.3	Codimensões de Álgebras Graduadas por um Grupo Finito	72
2.1.4	Ação de Hopf Generalizada	76
2.2	Limitação Superior	79
2.3	Limitação Inferior	84
2.4	Conjectura de Amitsur para H-codimensões, G-codimensões e Codimensões Graduadas	95
2.5	Exemplos e Aplicações	101
2.5.1	Álgebra de Sweedler	106
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS	110

REFERÊNCIAS 111

Introdução

Uma identidade polinomial para uma álgebra A é um polinômio que se anula para qualquer substituição de elementos de A nas variáveis do polinômio. Se existe uma identidade polinomial não trivial para a álgebra A , dizemos que A é uma PI-álgebra. Segundo Giambruno e Zaicev [6], o estudo das PI-álgebras começou com um artigo de Kaplansky [14] em 1948, onde ele prova que toda PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita, sugerindo uma condição importante de finitude para uma álgebra, o que despertou o interesse geral no estudo das PI-álgebras.

Sendo F um corpo de característica zero, $F\langle X \rangle$ a álgebra associativa livre gerada pelo conjunto X sobre F , A uma PI-álgebra sobre F , P_n o espaço dos polinômios multilineares de grau n de $F\langle X \rangle$ e $\text{Id}(A)$ o espaço das identidades polinomiais de A em $F\langle X \rangle$, chamamos de n -ésima codimensão de A a dimensão do espaço $P_n/(P_n \cap \text{Id}(A))$, e a denotamos por $c_n(A)$.

Em 1972, Regev [18] provou que a sequência das codimensões é exponencialmente limitada. Além disso, de acordo com Giambruno e Zaicev [6], um resultado de Kemer dizia que a sequência das codimensões ou é limitada por um polinômio ou cresce exponencialmente. Por fim, resultados de Berele e Regev para casos particulares implicaram na formulação, pelo matemático israelense Shimshon A. Amitsur na década de 1980, de uma conjectura sobre o comportamento assintótico das codimensões das identidades polinomiais ordinárias.

A conjectura de Amitsur diz que o limite

$$\text{PIexp}(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

existe e é um inteiro positivo. Para provar essa afirmação, basta mostrar que para todo n natural, existem $C_1, C_2 > 0$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n, \quad (0.1)$$

onde $d = \text{PIexp}(A)$ é chamado de PI-expoente de A .

A prova da conjectura de Amitsur para álgebras associativas foi realizada em 1999 por Giambruno e Zaicev no Teorema 6.5.2 da referência [6]. Em 2002, Zaicev [23] provou a conjectura de Amitsur para álgebras de Lie de dimensão finita. Em 2011, Giambruno, Shestakov e Zaicev [5] provaram para álgebras alternativas e de Jordan de dimensão finita e, em 2014, Gordienko [9] provou para álgebras de Lie que possuam uma representação de dimensão finita.

Também seria interessante provar os análogos da conjectura de Amitsur para álgebras graduadas, álgebras com uma ação de um grupo ou de uma álgebra de Hopf,

temas que são abordados no capítulo 2 deste trabalho. Isso porque as ações e graduações tornam mais fácil a busca por identidades polinomiais desse tipo. Assim, foram provados os análogos da conjectura de Amitsur para PI-álgebras associativas graduadas por um grupo finito e para PI-álgebras associativas com uma ação de um grupo abeliano finito que age por automorfismos por Aljadeff, Giambruno e La Mattina nas referências [1], [2] e [4]. Em 2011, Gordienko [7] provou a conjectura para álgebras de Lie de dimensão finita graduadas por um grupo abeliano finito e para álgebras de Lie de dimensão finita com uma ação de um grupo finito qualquer.

O objetivo deste trabalho é provar o análogo da conjectura de Amitsur para álgebras associativas de dimensão finita com uma ação de Hopf generalizada sobre um corpo de característica zero, sob algumas condições específicas. Desse resultado, vamos derivar a conjectura de Amitsur para álgebras com ação de um grupo finito que age por automorfismos e antiautomorfismos, álgebras graduadas e alguns outros exemplos.

Para entender o conceito de codimensões, vemos no capítulo 1 um estudo básico sobre identidades polinomiais com foco nas identidades polinomiais multilineares, cujas variáveis têm grau um em cada um de seus monômios. Trabalhando com um corpo de característica zero, obtemos que as identidades polinomiais multilineares geram o espaço das identidades polinomiais de uma álgebra. É por isso que o estudo das codimensões é tão interessante. Na segunda seção do capítulo 1 reunimos resultados importantes sobre a teoria de representações do grupo simétrico, pois veremos o espaço dos polinômios multilineares como um módulo do grupo simétrico e precisamos da decomposição em S_n -módulos irredutíveis do espaço $P_n/(P_n \cap \text{Id}(A))$ e das multiplicidades correspondentes para provar os principais teoremas do capítulo 2. Ainda no capítulo 1, estudamos alguns resultados sobre álgebras de Hopf importantes para o estudo das ações de Hopf generalizadas e para a prova do análogo da conjectura de Amitsur para alguns casos particulares no capítulo 2.

O objetivo do capítulo 2 é provar o análogo da conjectura de Amitsur para álgebras associativas com uma ação de Hopf generalizada e daí derivarmos as provas dos análogos da conjectura de Amitsur para álgebras com uma ação de um grupo que age por automorfismos e antiautomorfismos, álgebras com uma ação de Hopf, álgebras graduadas por um grupo finito e outros exemplos. Assim, definimos na primeira seção esses conceitos e vemos as relações existentes entre os casos. Como vimos antes, o análogo da conjectura de Amitsur já foi provado para álgebras associativas com uma ação de um grupo que age apenas por automorfismos. O objetivo de definirmos a ação de Hopf generalizada é englobar o caso em que um grupo age sobre uma álgebra associativa não só por automorfismos, mas também por antiautomorfismos. As segunda e terceira seções trazem a prova do análogo da conjectura de Amitsur para álgebras associativas com uma ação de Hopf generalizada. Na segunda seção mostramos a segunda desigualdade da expressão (0.1) e, na terceira seção, mostramos a primeira desigualdade. Por fim, provamos a conjectura de Amitsur para os

casos desejados na seção 4 e, na seção 5, aplicamos o resultado para vários exemplos e mostramos que o resultado também é válido para a álgebra de Sweedler de dimensão 4 com a ação de seu dual, apesar de essa não satisfazer as condições do teorema.

Na abordagem da fundamentação teórica desse trabalho, tomam-se como verdade conhecimentos básicos de Álgebra, tais como a teoria de anéis e corpos, ideais de um anel, grupos e alguns teoremas conhecidos na área da álgebra não comutativa e da álgebra linear, como o Teorema de Wedderburn, o Teorema da Densidade e o Teorema de Cayley-Hamilton.

1 Preliminares

Neste capítulo vamos estudar os conceitos necessários para entender o comportamento das codimensões de identidades polinomiais de uma álgebra associativa com uma ação de Hopf generalizada. Dessa forma, precisamos dos conceitos de identidades polinomiais, representações do grupo simétrico aplicadas em polinômios e álgebras de Hopf. Como só trabalhamos com álgebras associativas nesse trabalho, sempre que falarmos em álgebra, estaremos considerando-as associativas.

1.1 Identidades Polinomiais

Para começar, vamos introduzir o conceito de identidades polinomiais, culminando no Teorema 1.1.25 e em uma reunião dos principais teoremas necessários para a teoria de representações do grupo simétrico. Os resultados e demonstrações destas duas primeiras seções são baseados em [6].

Vamos começar com a definição de álgebra livre.

Definição 1.1.1 (Álgebra Livre). *Seja F um corpo e X um conjunto. Dizemos que $F\langle X \rangle$ é a álgebra livre em X sobre F (a menos de isomorfismos) se qualquer função $X \rightarrow A$, onde A é uma F -álgebra, pode ser unicamente estendida a um homomorfismo de álgebras $F\langle X \rangle \rightarrow A$. A cardinalidade de X é chamada de posto de $F\langle X \rangle$. Vamos considerar, em geral, que a álgebra livre $F\langle X \rangle$ tem posto enumerável e escrevemos $X = \{x_1, x_2, \dots\}$.*

Observe que para que possamos estender de forma única qualquer função $X \rightarrow A$ em um homomorfismo $F\langle X \rangle$, onde A é uma F -álgebra, temos que $F\langle X \rangle$ deve ser formado por elementos que são F -combinações de palavras formadas com elementos de X . Dessa forma, podemos ver $F\langle X \rangle$ como a álgebra de polinômios nas indeterminadas não comutativas $x \in X$.

Uma base linear de $F\langle X \rangle$ consiste em todas as palavras do alfabeto X , incluindo a palavra vazia 1. Essas palavras são chamadas de *monômios* e o produto de dois monômios é realizado através da justaposição. Também chamaremos de monômios os múltiplos escalares não nulos de uma palavra em X . Os elementos de $F\langle X \rangle$ são chamados *polinômios* e, se $f \in F\langle X \rangle$, escrevemos $f = f(x_1, \dots, x_n)$ para indicar que $x_1, \dots, x_n$ são as indeterminadas de X ocorrendo em f .

Denotamos por $\deg u$ o *grau* do monômio u , definido como o comprimento da palavra u e por $\deg_{x_i} u$ o grau de u na indeterminada $x_i \in X$, definido pelo número de ocorrências de x_i em u . Do mesmo modo, o grau $\deg f$ de um polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n)$

é dado pelo grau máximo de um monômio em f e o grau de f em x_i é o máximo $\deg_{x_i} u$, com u sendo um monômio de f .

Com isso, chegamos ao conceito de identidade polinomial.

Definição 1.1.2 (Identidade Polinomial). *Sejam A uma F -álgebra e $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Dizemos que $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$.*

Observação 1.1.3. *Seja Φ o conjunto de todos os homomorfismos $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow A$. Note que $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, $f \in \cap_{\varphi \in \Phi} \ker \varphi$.*

De fato, note que todo homomorfismo $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow A$ é da forma $x \mapsto g(x)$, ou seja, se $f = f(x_1, \dots, x_n)$, então $\varphi(f) = f(g_1(x_1), \dots, g_n(x_n))$. Assim, é claro que se $f \equiv 0$ em A , então $\varphi(f) \equiv 0$ também em A para todo $\varphi \in \Phi$. Reciprocamente, se $f \in \cap_{\varphi \in \Phi} \ker \varphi$ e $a_1, \dots, a_n \in A$, tome $\varphi \in \Phi$ tal que $\varphi(x_i) = a_i$ para $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$0 = \varphi(f) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = f(a_1, \dots, a_n).$$

Portanto, $f \equiv 0$ em A .

Definição 1.1.4. *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial não trivial ($f \neq 0$) $f \equiv 0$, dizemos que A é um PI-álgebra.*

Exemplo 1.1.5. *Se A é uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra, pois satisfaz a identidade $[x, y] \equiv 0$, onde $[x, y] = xy - yx$ é o chamado comutador de Lie de x e y .*

Exemplo 1.1.6. *Qualquer álgebra nilpotente é uma PI-álgebra. De fato, se A é uma álgebra tal que $A^n = 0$ para algum $n \geq 1$, então A satisfaz a identidade $x_1 x_2 \cdots x_n \equiv 0$.*

Exemplo 1.1.7. *Seja $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre o corpo F . Então, $UT_n(F)$ é uma PI-álgebra que satisfaz a identidade*

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0. \quad (1.1)$$

De fato, se A e B são matrizes triangulares superiores, então AB e BA também são e os elementos da diagonal principal são iguais. Logo, $AB - BA$ é uma matriz triangular estritamente superior. Além disso, sendo $SUT_n(F)$ o espaço das matrizes triangulares estritamente superiores, temos que $(SUT_n(F))^n = 0$, pois se $(SUT_n(F))^n \neq 0$ e $\{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ é uma base de $SUT_n(F)$ formada por matrizes elementares, então existem $e_{i_1 j_1}, \dots, e_{i_n j_n}$ tais que $e_{i_1 j_1} e_{i_2 j_2} \cdots e_{i_n j_n} \neq 0$, donde temos que $j_1 = i_2, j_2 = i_3, \dots, j_{n-1} = i_n$. Como $j_l > i_l$, temos $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq n$, o que não é possível.

Assim, mostramos que cada elemento $[A, B]$ é um elemento de $SUT_n(F)$ e que $(SUT_n(F))^n = 0$. Portanto, a identidade (1.1) é satisfeita por $UT_n(F)$.

Exemplo 1.1.8. A álgebra $M_2(F)$ satisfaz a identidade $[[x, y]^2, z] \equiv 0$.

Sejam $A, B \in M_2(F)$. Como $\text{tr}(AB - BA) = 0$, temos que se $C = [A, B]$, então $\text{tr } C = 0$ e podemos escrever $C = \begin{pmatrix} c & k \\ l & -c \end{pmatrix}$, com $c, k, l \in F$. Assim, o polinômio característico de C é dado por

$$p(\lambda) = (c - \lambda)(-c - \lambda) - kl = \lambda^2 + (-c^2 - kl) = \lambda^2 + \det C.$$

Sabemos que $p(C) = 0$, pelo Teorema de Cayley-Hamilton ([11], Teorema 4 da seção 6.3). Logo, obtemos que $0 = C^2 + (\det C)I$ e, conseqüentemente, C^2 é uma matriz escalar, que comuta com qualquer matriz de $M_2(F)$. Portanto, $[[A, B]^2, D] = 0$, para qualquer $D \in M_2(F)$.

1.1.1 T-ideais e variedades de álgebras

As definições de T -ideais e variedades de álgebras nos ajudarão a provar importantes resultados sobre identidades polinomiais e polinômios multilineares.

Definição 1.1.9. Um ideal I de $F\langle X \rangle$ é um T -ideal se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$.

Exemplo 1.1.10. Seja A uma álgebra qualquer. Defina

$$\text{Id}(A) := \{f \in F\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

o conjunto das identidades polinomiais de A . Então, $\text{Id}(A)$ é um T -ideal.

Isso porque todo endomorfismo $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ é da forma $x \mapsto g(x)$ e $f(g_1, \dots, g_n) \in \text{Id}(A)$ para todo $f \in \text{Id}(A)$.

Observação 1.1.11. Todo T -ideal de A é um conjunto de identidades de uma álgebra. Precisamente, temos que se I é um T -ideal de A , então $I = \text{Id}(F\langle X \rangle/I)$.

De fato, se $f \in F\langle X \rangle$ tal que $f \equiv 0$ em $F\langle X \rangle/I$, então

$$f(g_1, \dots, g_n) + I = f(g_1 + I, \dots, g_n + I) = I,$$

donde $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ para quaisquer $g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$. Tomando $g_i = x_i$ para $i = 1, \dots, n$, obtemos que $f \in I$, ou seja $\text{Id}(F\langle X \rangle/I) \subseteq I$. Reciprocamente, se $f \in I$, então $f(g_1, \dots, g_n) \in I$ para quaisquer $g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$, pois I é um T -ideal. Assim,

$$I = f(g_1, \dots, g_n) + I = f(g_1 + I, \dots, g_n + I),$$

ou seja, $f \equiv 0$ em $F\langle X \rangle$. Portanto, $\text{Id}(F\langle X \rangle/I) = I$.

Definição 1.1.12. *Seja $S \subseteq F\langle X \rangle$ não vazio. A classe de todas as álgebras associativas A tais que $f \equiv 0$ em A para todo $f \in S$ é chamada variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada por S .*

Uma variedade $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ é chamada não trivial se $S \neq 0$.

Exemplo 1.1.13. *Se $S = \{[x, y]\}$, então $\mathcal{V}(S)$ é a classe de todas as álgebras comutativas.*

Note que se $\mathcal{V}$ é uma variedade determinada pelo conjunto S e $\langle S \rangle_T$ é o T-ideal de $F\langle X \rangle$ gerado por S , ou seja, é o ideal gerado aplicando os endomorfismos $\varphi : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle$ nos polinômios de S , então $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\langle S \rangle_T)$ e, usando que $\langle S \rangle_T = \text{Id}(F\langle X \rangle / \langle S \rangle_T)$, obtemos que $\langle S \rangle_T = \cap_{A \in \mathcal{V}} \text{Id}(A)$. Por isso, vamos escrever $\langle S \rangle_T = \text{Id}(\mathcal{V})$.

Definição 1.1.14. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade, $A \in \mathcal{V}$ uma álgebra e $Y \subseteq A$ um subconjunto de A . Dizemos que A é relativamente livre sobre Y (com respeito a $\mathcal{V}$), se para cada álgebra $B \in \mathcal{V}$ e cada função $\alpha : Y \rightarrow B$, existe um único homomorfismo $\beta : A \rightarrow B$ estendendo α . A cardinalidade de Y é chamada de posto de A .*

Teorema 1.1.15. *Sejam X um conjunto não vazio, $F\langle X \rangle$ uma álgebra livre sobre X e $\mathcal{V}$ uma variedade com $\text{Id}(\mathcal{V}) \subseteq F\langle X \rangle$. Então, $F\langle X \rangle / \text{Id}(\mathcal{V})$ é uma álgebra relativamente livre sobre o conjunto $\bar{X} = \{x + \text{Id}(\mathcal{V}) \mid x \in X\}$. Além disso, quaisquer duas álgebras relativamente livres com respeito a $\mathcal{V}$ de mesmo posto são isomorfas.*

Demonstração: Sejam $B \in \mathcal{V}$ e $\alpha : \bar{X} \rightarrow B$ uma função. Considere $\beta : X \rightarrow B$ definida por

$$\beta(x) = \alpha(x + \text{Id}(\mathcal{V})).$$

Como $F\langle X \rangle$ é álgebra livre sobre X , existe um único homomorfismo $\bar{\beta} : F\langle X \rangle \rightarrow B$ que estende β . Note que $\text{Id}(\mathcal{V}) \subseteq \ker \bar{\beta}$, pois se $f = f(x_1, \dots, x_n) \in \text{Id}(\mathcal{V})$, então

$$\bar{\beta}(f) = f(\bar{\beta}(x_1), \dots, \bar{\beta}(x_n)) = 0.$$

Assim, podemos definir $\bar{\alpha} : F\langle X \rangle / \text{Id}(\mathcal{V}) \rightarrow B$ por

$$\bar{\alpha}(f + \text{Id}(\mathcal{V})) = \bar{\beta}(f),$$

que é um homomorfismo bem definido, pois se $f + \text{Id}(\mathcal{V}) = g + \text{Id}(\mathcal{V})$, com $f, g \in F\langle X \rangle$, então $f - g \in \text{Id}(\mathcal{V})$, donde $\bar{\beta}(f) - \bar{\beta}(g) = \bar{\beta}(f - g) = 0$, ou seja, $\bar{\alpha}(f + \text{Id}(\mathcal{V})) = \bar{\alpha}(g + \text{Id}(\mathcal{V}))$. Além disso, $\bar{\alpha}$ estende α , pois

$$\bar{\alpha}(x + \text{Id}(\mathcal{V})) = \bar{\beta}(x) = \beta(x) = \alpha(x + \text{Id}(\mathcal{V})).$$

Se existir outro homomorfismo $\alpha' : F\langle X \rangle / \text{Id}(\mathcal{V}) \rightarrow B$ que estenda α , então podemos definir outro homomorfismo extensão de β para $F\langle X \rangle$, dado por $\beta'(f) = \alpha'(f + \text{Id}(\mathcal{V}))$, e como $F\langle X \rangle$ é álgebra livre sobre X , temos que $\bar{\beta} = \beta'$. Assim,

$$\alpha'(f + \text{Id}(\mathcal{V})) = \beta'(f) = \bar{\beta}(f) = \bar{\alpha}(f + \text{Id}(\mathcal{V})).$$

Portanto, $\bar{\alpha}$ é único e, conseqüentemente, $F\langle X \rangle / \text{Id}(\mathcal{V})$ é uma álgebra relativamente livre sobre $\bar{X}$ com relação a $\mathcal{V}$.

Agora, sejam F_1 e F_2 álgebras relativamente livres e de mesmo posto sobre $X = \{x_i \mid i \in I\}$ e $Y = \{y_i \mid i \in I\}$, respectivamente, com relação a $\mathcal{V}$. Sejam $\varphi_1 : X \rightarrow F_2$ e $\varphi_2 : Y \rightarrow F_1$ dados por $\varphi_1(x_i) = y_i$ e $\varphi_2(y_i) = x_i$.

Assim, existem homomorfismo $\alpha_1 : F_1 \rightarrow F_2$ e $\alpha_2 : F_2 \rightarrow F_1$ únicos tais que

$$\begin{cases} \alpha_1(x_i) = \varphi_1(x_i) = y_i \\ \alpha_2(y_i) = \varphi_2(y_i) = x_i \end{cases}$$

para todo $i \in I$. Portanto, $\alpha_1\alpha_2$ e $\alpha_2\alpha_1$ são as funções identidade de X e Y , respectivamente e, conseqüentemente, α_1 e α_2 são isomorfismos. ■

1.1.2 Componentes Multi-Homogêneas e Polinômios Multilineares

Nesta seção veremos que, quando o corpo F tem característica zero, o estudo das identidades de uma F -álgebra pode ser reduzido ao estudo dos polinômios multilineares.

Seja $F_n = F\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ a álgebra livre de posto $n \geq 1$ sobre F . F_n pode ser decomposta como

$$F_n = F_n^{(0)} \oplus F_n^{(1)} \oplus F_n^{(2)} \oplus \dots,$$

onde $F_n^{(i)}$ é o subespaço gerado por todos os monômios de grau total i , para cada $i \geq 1$. Note que $F_n^{(i)} F_n^{(j)} \subseteq F_n^{(i+j)}$ e, portanto, F_n possui uma estrutura de álgebra graduada sobre os naturais. Os espaços vetoriais $F_n^{(i)}$ são chamados *componentes homogêneas* de F_n .

Ainda, podemos escrever

$$F_n^{(i)} = \bigoplus_{i_1 + \dots + i_n = i} F_n^{(i_1, \dots, i_n)}$$

onde $F_n^{(i_1, \dots, i_n)}$ é o subespaço gerado pelos monômios de grau i_1 em x_1 , i_2 em x_2 e assim por diante. Novamente, temos que $F_n^{(i_1, \dots, i_n)} F_n^{(j_1, \dots, j_n)} \subseteq F_n^{(i_1+j_1, \dots, i_n+j_n)}$ e F_n é multigraduado.

Note que as duas decomposições podem ser facilmente adaptadas para X enumerável.

Definição 1.1.16. Um polinômio $f \in F_n^{(k)}$ para algum $k \geq 1$, é chamado polinômio homogêneo de grau k . Se $f \in F_n^{(i_1, \dots, i_n)}$, f é chamado multi-homogêneo de multigrado $(i_1, \dots, i_n)$. Dizemos que um polinômio f é homogêneo na variável x_i se x_i aparece com mesmo grau em todo monômio de f .

Observação 1.1.17. Considere F um corpo infinito. Então, se $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$, podemos escrever

$$f = \sum_{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0} f^{(i_1, \dots, i_n)}$$

onde $f^{(i_1, \dots, i_n)} \in F_n^{(i_1, \dots, i_n)}$ é a soma de todos os monômios em f onde $x_1, \dots, x_n$ aparecem com grau $i_1, \dots, i_n$, respectivamente. Os polinômios $f^{(i_1, \dots, i_n)}$ são chamados componentes multi-homogêneas de f .

Teorema 1.1.18. Seja F um corpo infinito. Se $f \equiv 0$ é uma identidade polinomial da álgebra A , então cada componente multi-homogênea de f é, também, uma identidade polinomial para A .

Demonstração: Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$. Para cada x_t , $1 \leq t \leq n$, temos $f = \sum_{i=0}^m f_i$, com $m = \deg_{x_t} f$, onde f_i é a soma de todos os monômios de f de grau i em x_t . Note que, para mostrar o teorema, basta mostrar que, para cada x_t , $f_i \equiv 0$ em A para todo $0 \leq i \leq \deg_{x_t} f$. De fato, suponha válida essa afirmação. Podemos decompor f_i , para $x_{t'}$, em uma soma $\sum_{j=0}^{m'} f_{ij}$ de monômios de grau j em $x_{t'}$, onde $m' = \deg_{x_{t'}} f_i$, como fizemos com f . Dessa forma, cada f_{ij} fixa o grau em duas variáveis que também seriam identidades polinomiais em A . Repetindo o argumento até que as componentes da decomposição sejam multi-homogêneas, provamos o teorema.

Sejam $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ elementos distintos de F . É claro que, para cada $j = 0, \dots, m$,

$$f(x_1, \dots, \alpha_j x_t, \dots, x_n) \equiv 0$$

em A . Como cada f_i é homogênea em x_t com grau i , temos que

$$f(x_1, \dots, \alpha_j x_t, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^m \alpha_j^i f_i(x_1, \dots, x_t, \dots, x_n)$$

para todo $j = 0, \dots, m$.

Agora, considere a matriz de Vandermonde

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0^m & \alpha_1^m & \dots & \alpha_m^m \end{pmatrix}.$$

Dados quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$ e escrevendo $f_i(a_1, \dots, a_n) = \bar{f}_i$, temos que

$$(\bar{f}_0 \quad \dots \quad \bar{f}_m) \Delta = \left(\sum_{i=0}^m \alpha_0^i f_i(a_1, \dots, a_n) \quad \dots \quad \sum_{i=0}^m \alpha_m^i f_i(a_1, \dots, a_n) \right) = 0.$$

Sabemos que o determinante $\det(\Delta)$ da matriz de Vandermonde é dado por

$$\det(\Delta) = \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i),$$

que é não nulo. Logo, obtemos que $f_i(a_1, \dots, a_n) = 0$ para todo $i = 0, \dots, m$. Portanto, cada f_i é identidade polinomial de A . ■

Note que se F não é infinito, então não podemos garantir a existência de $m + 1$ elementos distintos $\alpha_0, \dots, \alpha_m$. Mas podemos usar o resultado para corpos F com $|F| > \deg f$.

Exemplo 1.1.19. *Seja F um corpo com $|F| = q$. Então, se $k \in F$, temos $k^q = k$. Logo $f(x) = x^q - x$ é identidade polinomial para a álgebra F , mas as componentes homogêneas x^q e x não se anulam em F .*

Definição 1.1.20. *Um polinômio f é linear na variável x_i se x_i aparece com grau 1 em todos os monômios de f . Se o polinômio é linear em todas as variáveis, ele é chamado multilinear. Também podemos dizer que o polinômio é multilinear se é multi-homogêneo de multigrado $(1, \dots, 1)$.*

Para um polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ multilinear, podemos escrever

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma \in F$ e S_n é o grupo simétrico sobre $\{1, \dots, n\}$.

Ainda, se $f(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio linear na variável x_1 , então

$$f\left(\sum \alpha_i y_i, x_2, \dots, x_n\right) = \sum \alpha_i f(y_i, x_2, \dots, x_n),$$

para $\alpha_i \in F$ e $y_i \in F\langle X \rangle$.

Lema 1.1.21. *Seja A uma F -álgebra gerada como espaço vetorial por um conjunto B sobre F . Se um polinômio multilinear f se anula em B , então $f \equiv 0$ em A .*

Demonstração: Sejam $a_1, \dots, a_n \in A$. Como A é gerado por B sobre F , podemos escrever, $a_1 = \sum \alpha_{1i} u_i, \dots, a_n = \sum \alpha_{ni} u_i$, onde $\alpha_{ij} \in F$ e u_i são elementos de B . Assim, se $f(x_1, \dots, x_n)$ é multilinear e se anula em B , temos que

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ni_n} f(u_{i_1}, \dots, u_{i_n}) = 0.$$

■

Vamos provar que podemos reduzir uma identidade polinomial qualquer a um polinômio multilinear, usando um processo chamado *multilinearização*.

Teorema 1.1.22. *Se uma álgebra A satisfaz uma identidade polinomial de grau k , então também satisfaz uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k .*

Demonstração: Seja $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ uma identidade polinomial de A . Se todas as variáveis aparecem com grau menor ou igual a 1, então obtemos uma identidade multilinear fazendo $x_i = 0$ para algumas das variáveis que aparecem com grau zero em algum monômio de f . Por exemplo, se apenas x_1 tem grau zero em algum dos monômios de f , então $g(x_2, \dots, x_n) = f(0, x_2, \dots, x_n)$ é a identidade multilinear desejada.

Assim, podemos assumir que uma das variáveis de f tem grau maior que 1. Sendo $d_1, \dots, d_n$ os graus das variáveis $x_1, \dots, x_n$, respectivamente, e $d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$, temos que $d > 1$. Ainda, sem perda de generalidade, podemos assumir que existe $t \leq n$ tal que $d = d_1 = \dots = d_t$ e $d_i < d$ para todo $t < i \leq n$.

Agora, defina um polinômio com uma variável adicional $h = h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)$ da forma

$$h := f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_2, x_2, \dots, x_n).$$

É claro que h também é identidade polinomial de A . Note que podemos escrever o polinômio f como soma de monômios $f = \sum_i \lambda_i w_i$, onde os w_i são as palavras de f diferentes duas a duas e $0 \neq \lambda_i \in F$. Da mesma forma, podemos escrever $h = \sum_i \lambda_i h_i$, onde cada h_i é obtido de w_i da mesma forma que h é obtido de f . Observe que se x_1 não aparece em w_i , então $h_i = -w_i$. Se x_1 aparece apenas uma vez em w_i , ou seja, w_i é linear na variável x_1 , então $h_i = 0$. Por fim, se x_1 aparece pelo menos duas vezes em w_i , então h_i é a soma de todas as palavras obtidas substituindo pelo menos um, mas não todos, x_1 em w_i por x_2 . Além disso, temos que essas palavras são diferentes das palavras de $h_{i'}$ para qualquer $i' \neq i$. Como $d > 1$, obtemos que $h \neq 0$.

Assim, $h \equiv 0$ em A e é um polinômio não nulo. Note que, em h , os monômios de grau d em y_1 e em y_2 de $f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n)$ se cancelam com os monômios de grau d em y_1 de $f(y_1, x_2, \dots, x_n)$ e de $f(y_2, x_2, \dots, x_n)$, respectivamente. Portanto, o grau de x_1 e x_2 em g é $d - 1$.

Repetindo o argumento até o grau de x_1 ser 1 e usando o mesmo processo para todas as variáveis com grau maior que 1, obtemos uma identidade polinomial multilinear não nula em A que possui grau menor do que o grau de f . ■

Definição 1.1.23. *Sejam $S \subseteq F\langle X \rangle$ e $f \in F\langle X \rangle$. Dizemos que f é uma consequência dos polinômios de S se $f \in \langle S \rangle_T$.*

Definição 1.1.24. *Dizemos que dois conjuntos de polinômios são equivalentes se eles geram o mesmo T -ideal.*

Teorema 1.1.25. *Se $\text{char } F = 0$, então cada polinômio não nulo $f \in F\langle X \rangle$ é equivalente a um conjunto finito de polinômios multilineares.*

Demonstração: Como $\text{char } F = 0$, temos que F é infinito e, pelo Teorema 1.1.18, que f é equivalente ao conjunto finito de suas componentes multi-homogêneas. Desse modo, podemos assumir que $f = f(x_1, \dots, x_n)$ é multi-homogêneo.

Se o grau de f em x_1 é $d > 1$, vamos usar o método de multilinearização descrito no Teorema 1.1.22. Temos que

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) = h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) + f(y_1, x_2, \dots, x_n) + f(y_2, x_2, \dots, x_n).$$

Como f é multi-homogêneo, temos que $f(y_1, x_2, \dots, x_n)$ e $f(y_2, x_2, \dots, x_n)$ são polinômios multi-homogêneos com grau d em y_1 e y_2 , respectivamente. Assim, podemos escrever

$$f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d g_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n),$$

onde para cada $i = 0, \dots, d$, g_i é a componente homogênea de $f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n)$ com grau i em y_1 e $d - i$ em y_2 . Note que $g_0(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_2, x_2, \dots, x_n)$ e $g_d(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_1, x_2, \dots, x_n)$.

Novamente pelo Teorema 1.1.18, temos que cada g_i é consequência de f , para $i = 0, \dots, d$. Além disso, temos para cada i , que

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_n).$$

E como $\text{char } F = 0$, temos que $\binom{d}{i} \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, d - 1$, ou seja, f é uma consequência de cada g_i , com $i = 1, \dots, d - 1$, que possuem graus em y_1 e y_2 menores do que d . Prosseguindo com o processo de multilinearização, obtemos um conjunto finito de polinômios multilineares equivalente a f . ■

Observe que o Teorema também é válido, para cada $f \in F\langle X \rangle$, se $\text{char } F$ é maior do que o grau de f . Como consequência direta do Teorema 1.1.25, temos o resultado seguinte.

Corolário 1.1.26. *Se $\text{char } F = 0$, então cada T -ideal de $F\langle X \rangle$ é gerado, como T -ideal, pelos polinômios multilineares nele contidos.*

Com isso, concluímos que para estudar as identidades polinomiais de uma F -álgebra com $\text{char } F = 0$, basta encontrarmos as identidades polinomiais multilineares.

1.2 Representações do Grupo Simétrico

Esta seção é baseada em [6] e em [19]. Vamos reunir resultados básicos sobre representações de dimensão finita e estudar melhor as representações do grupo simétrico, relacionando-as com partições de inteiros positivos para podermos aplicar esses conceitos aos polinômios multilineares.

1.2.1 Representações de Dimensão Finita

Definição 1.2.1. *Uma representação de um grupo G sobre um espaço vetorial V de dimensão finita é um homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow GL(V)$.*

Se ρ é uma representação de G sobre V , essa representação induz um homomorfismo de álgebras $\rho' : FG \rightarrow \text{End}_F(V)$ dado por

$$\rho' \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) = \sum_{g \in G} \alpha_g \rho(g)$$

tal que $\rho'(1) = 1$, com $\text{char } F = 0$. E ρ' induz o homomorfismo $\rho = \rho'|_G$, que é representação de G sobre V .

Se $\dim V = n$, n é chamado de *grau* da representação ρ . Além disso, cada representação de G determina unicamente um FG -módulo de dimensão finita. De fato, se $\rho : G \rightarrow GL(V)$ é uma representação de G sobre V , então V se torna um FG -módulo à esquerda com a operação $g \cdot v = \rho(g)v$ para $g \in G$ e $v \in V$. Por outro lado, se M é um FG -módulo e é um espaço vetorial de dimensão finita sobre F , podemos definir a representação $\rho : G \rightarrow GL(V)$ como $\rho(g)(m) = g \cdot m$, para $g \in G$ e $m \in M$, onde $\cdot$ é a operação do módulo.

Definição 1.2.2. *Sejam G um grupo e $\rho : FG \rightarrow \text{End}_F(FG)$ um homomorfismo tal que $\rho(g) = T_g$, onde $T_g(h) = gh$, com $g, h \in G$. O homomorfismo ρ é chamado representação regular à esquerda de G .*

Definição 1.2.3. *Se $\rho : G \rightarrow GL(V)$ e $\rho' : G \rightarrow GL(W)$ são duas representações do grupo G , dizemos que ρ e ρ' são equivalentes e escrevemos $\rho \sim \rho'$ se V e W são isomorfos como G -módulos.*

Teorema 1.2.4 (Maschke). *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que $\text{char } F = 0$ ou $\text{char } F = p > 0$ e $p \nmid |G|$. Então, a álgebra de grupo FG é semissimples.*

A demonstração do Teorema de Maschke é encontrada em [15], Teorema 1.2 do capítulo 18.

Usando os Teoremas de Wedderburn, Wedderburn-Artin e o Teorema de Maschke, podemos escrever a chamada *decomposição de Wedderburn* de FG

$$FG \cong M_{n_1}(D^{(1)}) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D^{(k)}),$$

onde $D^{(1)}, \dots, D^{(k)}$ são álgebras de divisão de dimensão finita sobre F . Dessa forma, temos que M é um FG -módulo irredutível se, e somente se, M é um $M_{n_i}(D^{(i)})$ -módulo irredutível, para algum i .

Corolário 1.2.5. *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que $\text{char } F = 0$ ou $\text{char } F = p > 0$ e $p \nmid |G|$. Então, cada representação de G é completamente redutível e o número de representações irredutíveis não equivalentes de G é igual ao número de componentes simples na decomposição de Wedderburn da álgebra de grupo FG .*

Sabemos que, para cada i , $M_{n_i}(D^{(i)})$ tem apenas um módulo irredutível (a menos de isomorfismos), isomorfo a $\sum_{j=1}^{n_i} D^{(i)} e_{ji}$. Assim, podemos escrever

$$FG \cong n_1 J_1 \oplus \cdots \oplus n_k J_k,$$

onde $n_i J_i = J_i \oplus \cdots \oplus J_i$ n_i vezes e $J_i \cong \sum_{l=1}^{n_i} D^{(i)} e_{li}$ é um ideal minimal à esquerda de $M_{n_i}(D^{(i)})$ e n_i é chamado de *multiplicidade* de J_i em FG . Note ainda que $n_i = \dim J_i$ é o grau da representação J_i como na proposição a seguir.

Proposição 1.2.6. *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que $\text{char } F = 0$ ou $\text{char } F = p > 0$ e $p \nmid |G|$. Então, cada representação irredutível de G aparece na representação regular de G com multiplicidade igual ao seu grau.*

Proposição 1.2.7. *Se M é uma representação irredutível de G , então $M \cong J_i$, um ideal minimal à esquerda de $M_{n_i}(D^{(i)})$, para algum $i = 1, \dots, k$. Logo, existe um elemento minimal idempotente $e \in FG$ tal que $M \cong FGe$.*

Proposição 1.2.8. *Seja F o corpo de decomposição para G . Então, o número de representações irredutíveis não equivalentes de G sobre F é igual ao número de classes de conjugação de G .*

Agora, vamos definir o *caracter* de uma representação, que apresenta relações importantes com as multiplicidades dos J_i na decomposição de Wedderburn para FG .

Definição 1.2.9. *Seja $\rho : G \rightarrow GL(V)$ uma representação de um grupo G . Então, a função $\chi_\rho : G \rightarrow F$ tal que $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$ é chamada *caracter* da representação ρ e $\dim V = \deg \chi_\rho = \chi_\rho(1)$ é chamado *grau* do caracter χ_ρ .*

Pelas definições de elementos conjugados e traço, temos que, se g e h são conjugados em G , então $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(h)$. Logo, χ_ρ é constante nas classes de conjugação.

Podemos definir um produto interno $(\ , \)$ sobre o espaço das funções de classe sobre G (constantes nas classes de conjugação), como

$$(\chi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$$

para χ, ψ funções de classe sobre G .

Proposição 1.2.10. *Suponha que F é um corpo algebricamente fechado com característica zero e seja $J_1, \dots, J_k$ uma lista completa de representações não equivalentes de G com caracteres $\chi_1, \dots, \chi_k$, respectivamente. Seja $\rho : G \rightarrow GL(V)$ uma representação de G e escreva $V \cong m_1 J_1 \oplus \dots \oplus m_k J_k$ com $m_i \geq 0$. Então,*

$$(1) \ \chi_\rho = \sum_{i=1}^k m_i \chi_i;$$

$$(2) \ (\chi_\rho, \chi_i) = m_i \ \forall i;$$

$$(3) \ (\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{i=1}^k m_i^2;$$

$$(4) \ \chi_\rho \text{ é irredutível se, e somente se, } (\chi_\rho, \chi_\rho) = 1;$$

$$(5) \ \text{Se } \rho \text{ e } \rho' \text{ são duas representações de } G \text{ não equivalentes, então } (\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 0;$$

$$(6) \ \text{Se } \rho' \text{ é outra representação de } G, \text{ então } \rho \sim \rho' \text{ se, e somente se, } \chi_\rho = \chi_{\rho'}.$$

Com essas informações, temos que $FG = \bigoplus_{i=1}^k e_i FG$, com $e_i FG \cong M_{n_i}(F)$ e

$$e_i = \frac{\chi_i(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)} g$$

é um idempotente minimal central de FG .

1.2.2 Representações do Grupo Simétrico

Agora podemos relacionar o estudo das representações do grupo simétrico S_n com as partições de n .

Definição 1.2.11. *Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma partição λ de n é uma sequência finita de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ e $\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$. Nesse caso, escrevemos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$.*

Se $r = 1$, escrevemos $\lambda = (n)$. Se $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$, escrevemos $\lambda = (1^n)$. Se $\lambda = (k^d)$, ou $\lambda = (k, \dots, k)$, temos $n = kd$.

Temos que cada classe de conjugação de S_n determina unicamente uma partição de n , para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Por exemplo, para S_4 , temos

$$\begin{aligned} [(1)] &\longleftrightarrow \lambda_1 = (1^4) \\ [(12)] &\longleftrightarrow \lambda_2 = (2, 1, 1) \\ [(12)(34)] &\longleftrightarrow \lambda_3 = (2, 2) \\ [(123)] &\longleftrightarrow \lambda_4 = (3, 1) \\ [(1234)] &\longleftrightarrow \lambda_5 = (4), \end{aligned}$$

onde $[(1)]$, $[(12)]$, $[(12)(34)]$, $[(123)]$ e $[(1234)]$ são as classes de conjugação de S_4 .

Como o número de caracteres irredutíveis de S_n é igual ao número de classes de conjugação de S_n , que por sua vez é igual ao número de partições de n , temos que cada partição de n determina unicamente um caracter irredutível de S_n . Por isso, denotamos os caracteres irredutíveis de S_n por χ_λ , onde $\lambda \vdash n$.

Vamos usar a notação $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ para o grau do caracter irredutível χ_λ .

Pelo Teorema de Maschke 1.2.4, pela Proposição 1.2.10 e pelo comentado acima, podemos concluir o seguinte resultado.

Proposição 1.2.12. *Sejam F um corpo qualquer de característica zero e $n \geq 1$. Então, existe uma correspondência biunívoca entre S_n -caracteres irredutíveis e partições de n . Sendo $\{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ uma lista completa de caracteres irredutíveis de S_n não equivalentes e $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau de χ_λ , $\lambda \vdash n$, temos*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F),$$

onde $I_\lambda = e_\lambda FS_n$ e $e_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\lambda(\sigma) \sigma$ é, a menos de um escalar, o elemento unidade de I_λ .

Assim, pela Proposição 1.2.10 (1), podemos escrever

$$\chi_\tau = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda \chi_\lambda,$$

onde τ é a representação regular de S_n .

Para facilitar a visualização e demonstração dos resultados envolvendo representações de S_n e polinômios multilineares, vamos definir alguns tipos de diagramas para representar as partições de n .

Definição 1.2.13. *Se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$, o diagrama de Young associado a λ é o subconjunto finito de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido como $D_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, \lambda_i\}$.*

$$D_{(4,2,2,1)} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1)\}.$$

$D_{(4,2,2,1)} =$

$$T_{(4,2,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 7 & 9 & & \\ \hline 8 & & & \\ \hline \end{array}$$

Definição 1.2.20. Sendo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \vdash n$ e $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_q)$ partições, escrevemos $\mu \leq \lambda$ se $q \leq p$ e $\mu_i \leq \lambda_i$ para todo $i = 1, \dots, p$. Se $\lambda \geq \mu$, definimos $\lambda \setminus \mu = (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \dots)$, que corresponde ao diagrama D_λ sem as caixas que também pertencem a D_μ .

Definição 1.2.21. Para qualquer caixa $(i, j) \in D_\lambda$, definimos o número gancho de (i, j) como $h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, onde $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Observe que $\lambda_i + \lambda'_j$ é a soma do número de caixas da linha i com o número de caixas da coluna j . Subtraindo i e j e somando 1 obtemos o número de caixas à direita e abaixo da caixa (i, j) mais a própria caixa, ou o comprimento do gancho correspondente à linha i e à coluna j .

Exemplo 1.2.22. Para $\lambda = (4, 2, 2, 1)$, vamos construir o diagrama de Young de λ com as caixas sendo preenchidas pelos seus números gancho:

$$D_{(4,2,2,1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 4 & 2 & & \\ \hline 3 & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array}$$

Teorema 1.2.23. Dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standard para λ é igual a d_λ , o grau do caracter irredutível χ_λ , correspondente a λ .

Com esse importante resultado e usando análise combinatória, deriva-se a proposição a seguir. A demonstração é encontrada em [13], Teorema 2.3.21.

Proposição 1.2.24. Para $\lambda \vdash n$,

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

onde o produto percorre todas as caixas de D_λ .

Vamos denotar a tabela de Young por $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é o inteiro da caixa (i, j) .

Definição 1.2.25. Seja $\lambda \vdash n$. O estabilizador de linha de $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ é definido como

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1\lambda_1}) \times \dots \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{r\lambda_r}),$$

onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i\lambda_i})$ denota o grupo simétrico agindo sobre os inteiros $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i\lambda_i}$.

Definição 1.2.26. Seja $\lambda \vdash n$. O estabilizador de coluna de $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ é definido como

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{\lambda'_1 1}) \times \dots \times S_{\lambda'_s}(a_{1\lambda_1}, a_{2\lambda_1}, \dots, a_{\lambda'_s \lambda_1}),$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ .

Assim, S_{T_λ} e C_{T_λ} são subgrupos de S_n que estabilizam as linhas e as colunas de T_λ , respectivamente, isto é, cada permutação de R_{T_λ} só pode permutar um elemento de uma linha da tabela T_λ com ele mesmo ou com outro elemento da mesma linha e cada permutação de C_{T_λ} só pode permutar um elemento de uma coluna da tabela T_λ com ele mesmo ou com outro elemento da mesma coluna.

Definição 1.2.27. *Seja $\lambda \vdash n$. Definimos*

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (\text{sgn } \tau) \sigma \tau.$$

Temos que $e_{T_\lambda}^2 = ae_{T_\lambda}$, onde $a = \prod_{i,j} h_{ij}$, donde e_{T_λ} é um idempotente essencial de FS_n , ou seja, $e_{T_\lambda}^2$ é igual a ele mesmo, a menos de um escalar.

Dada uma partição $\lambda \vdash n$, S_n age sobre uma tabela de Young de λ da forma $\sigma T_\lambda = D_\lambda(\sigma(a_{ij}))$, para $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, $\sigma \in S_n$. Além disso, pela definição de elementos conjugados, temos que $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda} \sigma^{-1}$ e $C_{\sigma T_\lambda} = \sigma C_{T_\lambda} \sigma^{-1}$. Daí, concluímos que $\sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1} = e_{\sigma T_\lambda}$.

Com isso, obtemos os seguintes resultados, que podem ser vistos em [6].

Proposição 1.2.28. *Para cada tabela de Young T_λ de $\lambda \vdash n$, o elemento e_{T_λ} é um idempotente essencial minimal de FS_n e $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal minimal à esquerda de FS_n com caracter χ_λ . Se T_λ e T_λ^* são tabelas de Young para o mesmo λ , então e_{T_λ} e $e_{T_\lambda^*}$ são conjugados em FS_n por algum $\sigma \in S_n$. Além disso, $\sigma e_{T_\lambda} \sigma^{-1} = e_{\sigma T_\lambda}$.*

Com isso, temos que $FS_n e_{T_\lambda} \cong FS_n e_{T_\lambda^*}$ como S_n -módulos.

Proposição 1.2.29. *Se $T_1, \dots, T_{d_\lambda}$ são todas as tabelas standard de Young de $\lambda \vdash n$, então o ideal minimal I_λ de FS_n correspondente a λ pode ser decomposto como*

$$I_\lambda = \bigoplus_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_i}.$$

1.2.2.1 Representações induzidas do grupo simétrico

Vamos ver agora algumas ferramentas úteis para encontrar uma representação de S_m conhecendo uma representação de S_n , com $m > n$. Sendo H um subgrupo de um grupo G e V um G -módulo com caracter χ , temos que V também é um H -módulo por restrição. Vamos denotar V como H -módulo por $V \downarrow H$ e o caracter induzido por $\chi \downarrow H$. Por outro lado, se V é um H -módulo com caracter χ , $FG \otimes_{FH} V$ possui uma estrutura natural de G -módulo usando a operação do grupo G para efetuar a ação de FH sobre FG e a ação do módulo sobre V . Vamos denotar esse módulo por $V \uparrow G$ e seu caracter por $\chi \uparrow G$.

Note que induzir um módulo para cima ou para baixo não resulta necessariamente em um módulo irredutível. Para $G = S_n$ com $n \in \mathbb{N}$, podemos identificar S_n com o subgrupo de S_{n+1} de todas permutações que fixam o inteiro $n + 1$, sempre podemos decompor o módulo induzido em irredutíveis usando o seguinte teorema.

Teorema 1.2.30 (Teorema da Ramificação). *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e M_λ um S_n -módulo irredutível correspondente à partição $\lambda \vdash n$. Então*

- (1) *Se $\lambda \vdash n$, então $M_\lambda \uparrow S_{n+1} \cong \sum_{\mu \in \lambda^+} M_\mu$, onde λ^+ é o conjunto de todas as partições de $n + 1$ cujos diagramas são obtidos de D_λ adicionando uma caixa.*
- (2) *Se $\mu \vdash n + 1$, então $M_\mu \downarrow S_n \cong \sum_{\lambda \in \mu^-} M_\lambda$, onde μ^- é o conjunto de todas as partições de n cujos diagramas são obtidos de D_μ removendo uma caixa.*

Podemos também induzir um $S_n \times S_m$ -módulo para cima como um S_{n+m} -módulo. Temos que $S_n \times S_m$ pode ser visto como subgrupo de S_{n+m} fazendo S_m agir sobre o conjunto $\{n + 1, \dots, n + m\}$. Sendo M um S_n -módulo e N um S_m -módulo, temos que $M \otimes_F N$ tem uma estrutura natural de $S_n \times S_m$ -módulo, que denotamos por $(M \otimes N) \uparrow S_{n+m}$.

Definição 1.2.31. *Se M é um S_n -módulo e N é um S_m -módulo, então o produto tensorial externo de M e N é definido como*

$$M \hat{\otimes} N = (M \otimes N) \uparrow S_{n+m}.$$

Lembrando que (n) representa uma partição $\lambda = \lambda_1 \vdash n$ com $\lambda_1 = n$, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.32 (Regra de Young). *Sejam $\lambda \vdash n$ e $m \geq 1$. Então*

$$M_\lambda \hat{\otimes} M_{(m)} \cong \sum M_\mu,$$

onde a soma percorre todas as partições μ de $n + m$ tais que $\mu_1 \geq \lambda_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n+m} \geq \lambda_{n+m}$.

Observe que cada μ é obtido adicionando m caixas ao diagrama D_λ de forma que duas novas caixas não podem ficar na mesma coluna de D_μ . De fato, se adicionarmos uma nova caixa na coluna j e na linha i , obtemos que $\mu_i > \lambda_i \geq \mu_{i+1}$. Como $\lambda_i \leq j - 1$, temos que $\mu_{i+1} \leq j - 1$, ou seja, não podemos adicionar outra caixa à coluna j .

A Regra de Young é generalizada para quaisquer $M_\lambda \hat{\otimes} M_\mu$ pela Regra de Littlewood-Richardson, que usa o conceito de tabelas semi-standard.

Definição 1.2.33. Uma palavra reticulada é uma sequência de números tal que em cada parte inicial, qualquer número i aparece no mínimo com a mesma frequência que o número $i + 1$.

Exemplo 1.2.34. A sequência 111221 é uma palavra reticulada, mas a sequência 122111 não é, pois na parte inicial 122 o número 1 aparece menos vezes do que o número 2.

Teorema 1.2.35 (Regra de Littlewood-Richardson). Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$. Então,

$$M_\lambda \hat{\otimes} M_\mu \cong \sum_{\nu \vdash n+m} k_{\nu \setminus \lambda}^\mu M_\nu,$$

onde $k_{\nu \setminus \lambda}^\mu$ representa o número de tabelas semi-standard de forma $\nu \setminus \lambda$ e conteúdo μ que apresentam permutações que formam palavras reticuladas quando lidas da direita para a esquerda e de cima para baixo.

Exemplo 1.2.36. Seja $\lambda = (4, 2, 1) \vdash n = 7$ e $\mu = (2, 1, 1) \vdash m = 4$. Vamos encontrar alguns coeficientes $k_{\nu \setminus \lambda}^\mu$ de Littlewood-Richardson.

Devemos adicionar 4 caixas ao diagrama D_λ preenchidas com os números 1, 2 e 3 de tal forma que o número 1 apareça $\mu_1 = 2$ vezes, 2 apareça $\mu_2 = 1$ vezes e 3, $\mu_3 = 1$ vezes com o diagrama resultante representando uma partição $\nu \vdash 11$. Além disso, a tabela $T_{\nu \setminus \lambda}$ deve ser semi-standard com os números formando uma permutação reticulada da direita para a esquerda e para baixo. Note que as opções para permutação reticulada com os números 1, 1, 2 e 3 são (1 1 2 3), (1 2 1 3) e (1 2 3 1).

Adicionando 4 caixas à primeira linha de D_λ obtemos a partição $\nu_1 = (8, 2, 1)$. Observe que não existe uma tabela semi-standard de forma $\nu_1 \setminus \lambda$ e conteúdo μ que forme uma permutação reticulada da direita para a esquerda. Logo, $k_{\nu_1 \setminus \lambda}^\mu = 0$.

Para $\nu_2 = (6, 3, 2)$, obtemos

				1	1
		2			
	3				

onde as caixas com números representam a única tabela de $\nu_2 \setminus \lambda$ que satisfaz as condições da Regra de Littlewood-Richardson, ou seja, $k_{\nu_2 \setminus \lambda}^\mu = 1$. Algumas partições tem mais de uma possibilidade, como por exemplo, a partição $\nu_3 = (5, 3, 2, 1)$, cujo coeficiente de Littlewood-Richardson é $k_{\nu_3 \setminus \lambda}^\mu = 3$, pois temos as possibilidades

				1
		1		
	2			
3				

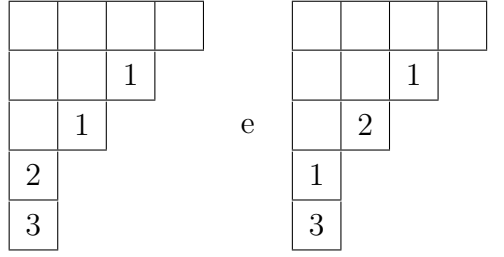
,

				1
		2		
	1			
3				

e

				1
		2		
	3			
1				

e a partição $\nu_4 = (4\ 3\ 2\ 1\ 1)$, com $k_{\nu_4 \setminus \lambda}^\mu = 2$, pois as possibilidades são

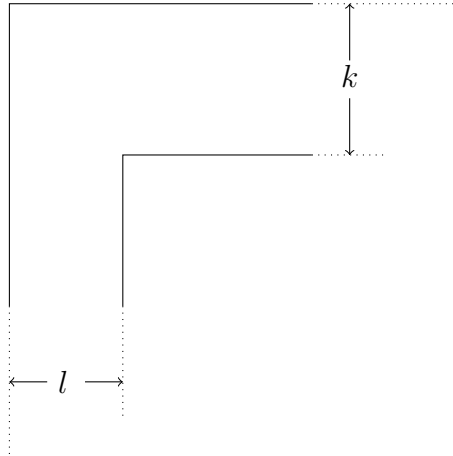


Observe que, preenchendo $\nu_4 \setminus \lambda$ como na partição reticulada $(1\ 2\ 3\ 1)$, não obtemos uma tabela semi-standard, pois os números da primeira coluna não são crescentes de cima para baixo.

Definição 1.2.37. *Vamos definir o gancho infinito $H(k, l)$ da seguinte forma:*

$$H(k, l) = \bigcup_{n \geq 1} \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n \mid \lambda_{k+1} \leq l \}.$$

A denominação *gancho infinito* para $H(k, l)$ é totalmente apropriada, pois todos os diagramas de $H(k, l)$ estão dentro da área com formato de gancho da figura



Lema 1.2.38. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash n'$ tais que $\mu \leq \lambda$. Se $n - n' \leq c$, então $d_\lambda \leq n^c d_\mu$.*

Demonstração: Sabemos pela Proposição 1.2.24 que

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

onde h_{ij} são os números gancho de D_λ . Para $n - n' = c' \leq c$ e sendo h'_{ij} os números gancho de D_μ , temos que

$$d_\mu = \frac{n'!}{\prod_{i,j} h'_{ij}} = \frac{(n - c')!}{\prod_{i,j} h'_{ij}}.$$

Como o diagrama D_μ está contido no diagrama D_λ , temos que $\prod_{i,j} h'_{ij} \leq \prod_{i,j} h_{ij}$,
 donde

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}} \leq \frac{n(n-1)\cdots(n-c')!}{\prod_{i,j} h'_{ij}} \leq n^{c'} d_\mu \leq n^c d_\mu.$$

■

Lema 1.2.39. *Existem constantes $C, s > 0$ tais que*

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,l)}} d_\lambda \leq C n^s (k+l)^n.$$

Demonstração: Vamos construir uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in H(k, l)$. Então, temos que $\lambda_{k+1} \leq l$, pela definição do gancho infinito $H(k, l)$. Assim, para a escolha dos comprimentos das primeiras k linhas de D_λ , temos $(n+1)^k$ opções, pois $0 \leq \lambda_i \leq n$ para todo $i = 1, \dots, r$. Pelo mesmo motivo, para escolher os comprimentos das primeiras l colunas de D_λ , temos $(n+1)^l$ opções. Logo, o número total de diagramas de Young D_λ em $H(k, l)$ é limitado por $(n+1)^{k+l}$.

Assim, precisamos mostrar apenas que para cada $\lambda \in H(k, l)$, temos $d_\lambda \leq (k+l)^n$, pois dessa forma,

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,l)}} d_\lambda \leq \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ \lambda \in H(k,l)}} (k+l)^n \leq (n+1)^{k+l} (k+l)^n \leq C n^s (k+l)^n$$

para $C, s > 0$ apropriados.

Defina

$$\lambda''_j = \begin{cases} \lambda'_j - k, & \text{se } \lambda'_j \geq k \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para $j = 1, \dots, l$, onde λ' é a partição conjugada de λ . Assim,

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + \lambda''_1 + \cdots + \lambda''_l = n,$$

pois $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ representa a quantidade de caixas de D_λ até a linha k e $\lambda''_1 + \cdots + \lambda''_l$ a quantidade de caixas abaixo da linha k .

Agora, sendo $\prod_{i,j} h_{ij}$ o produto dos números gancho de D_λ , temos que

$$\prod_{i,j} h_{ij} = \prod_{i=1}^k \left(\prod_j h_{ij} \right) \prod_{\substack{j=1 \\ i \geq k+1}}^l \left(\prod_i h_{ij} \right) \geq \left(\prod_{i=1}^k \lambda_i! \right) \left(\prod_{j=1}^l \lambda''_j! \right) = \lambda_1! \cdots \lambda_k! \lambda''_1! \cdots \lambda''_l!.$$

Com isso e com a Proposição 1.2.24, temos que

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}} \leq \frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_k! \lambda''_1! \cdots \lambda''_l!}. \quad (1.2)$$

Como $\lambda_1 + \dots + \lambda_k + \lambda_1'' + \dots + \lambda_l'' = n$, podemos aplicar o Teorema Multinomial em (1.2). O Teorema Multinomial diz que

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{t_1, t_2, \dots, t_m} \frac{n!}{t_1! t_2! \dots t_m!} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_m^{t_m}.$$

Tomando $m = k + l$, $x_1 = x_2 = \dots = x_{k+l} = 1$, $t_1 = \lambda_1, \dots, t_k = \lambda_k$ e $t_{k+1} = \lambda_1'', \dots, t_{k+l} = \lambda_l''$, obtemos

$$d_\lambda \leq \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_k! \lambda_1''! \dots \lambda_l''!} \leq (1 + \dots + 1)^n = (k + l)^n.$$

■

1.2.3 Ações do Grupo Simétrico sobre Polinômios Multilineares e Codimensões

Nesta seção, assumimos que F é um corpo de característica zero e vamos aplicar a teoria das representações do grupo simétrico para os polinômios multilineares, além de introduzir o conceito de codimensões.

Já vimos que, para A uma PI-álgebra sobre F , as identidades de A são determinadas por polinômios multilineares. Seja

$$P_n := \langle x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n \rangle_F$$

o espaço vetorial dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ na álgebra livre $F\langle X \rangle$. Considere a função $\varphi : FS_n \rightarrow P_n$ definida por

$$\varphi \left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)},$$

que é um isomorfismo linear. Por isso, vamos usar a mesma notação para um elemento de $f \in FS_n$ e para sua imagem em P_n . Esse isomorfismo torna P_n um S_n -bimódulo. A S_n -ação à esquerda pode ser vista como

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

para $\sigma \in S_n$ e $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$. De fato, por linearidade, é suficiente provar esse fato para os monômios de P_n . Seja $x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)} \in P_n$ e escreva

$$x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)} = M_\pi(x_1, \dots, x_n).$$

Precisamos mostrar que $\sigma M_\pi(x_1, \dots, x_n) = M_\pi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Fazendo $x_{\sigma(1)} = y_1, \dots, x_{\sigma(n)} = y_n$, temos que

$$\begin{aligned} M_\pi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) &= M_\pi(y_1, \dots, y_n) \\ &= y_{\pi(1)} \dots y_{\pi(n)} \\ &= x_{\sigma\pi(1)} \dots x_{\sigma\pi(n)} \\ &= \sigma M_\pi(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

A S_n -ação à direita é definida da seguinte maneira: se $\sigma \in S_n$, podemos escrever

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}.$$

Então, $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} = x_{i_1} \dots x_{i_n}$ e, para $\tau \in S_n$, temos

$$(x_{i_1} \dots x_{i_n})\tau = x_{i_{\tau(1)}} \dots x_{i_{\tau(n)}}.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned} \sigma(x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)}) &= x_{i_{\tau(1)}} \dots x_{i_{\tau(n)}} \\ &= (x_{i_1} \dots x_{i_n})\tau \\ &= (x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)})\tau. \end{aligned}$$

Queremos estudar o espaço $P_n \cap \text{Id}(A)$. Note que $P_n = P_n(x_1, \dots, x_n)$. Então, estamos considerando apenas os polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \dots, x_n$. Mas observe que, se $y_1, \dots, y_n$ são outras variáveis, temos $P_n(x_1, \dots, x_n) \cong P_n(y_1, \dots, y_n)$. Portanto, é suficiente considerar apenas o espaço $P_n(x_1, \dots, x_n) \cap \text{Id}(A)$. Vamos denotar $P_n(x_1, \dots, x_n)$ por P_n .

Agora, como os T-ideais são invariantes por permutações de variáveis e $P_n \cap \text{Id}(A)$ é um T-ideal, temos que $P_n \cap \text{Id}(A)$ é um S_n -submódulo à esquerda de P_n . Logo,

$$P_n(A) := \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$$

possui uma estrutura induzida de S_n -módulo. Se $F\langle X \rangle$ é a álgebra livre com $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, então $P_n(A)$ é o espaço dos elementos multilineares nas primeiras n variáveis da álgebra $F\langle X \rangle / \text{Id}(A)$, que é relativamente livre, pelo Teorema 1.1.15. Assim, podemos definir o n -ésimo cocaracter e a n -ésima codimensão de A .

Definição 1.2.40. Para $n \geq 1$, o S_n -caracter do S_n -módulo $P_n(A)$ é chamado de n -ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$.

Decompondo o n -ésimo cocaracter em caracteres irredutíveis, temos

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n -caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a multiplicidade correspondente.

Definição 1.2.41. Para $n \geq 1$, chamamos de n -ésima codimensão de A à dimensão de $P_n(A)$, ou seja,

$$c_n(A) := \dim \left(\frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)} \right).$$

Com a ação de S_n sobre os polinômios multilineares definida e o conceito de codimensão apresentados, podemos demonstrar alguns teoremas sobre multiplicidades e codimensões que são importantes para o desenvolvimento da prova do análogo da conjectura de Amitsur para os casos de interesse desse trabalho, no capítulo 2.

Teorema 1.2.42. *Seja A uma PI -álgebra com n -ésimo cocaracter $\chi_n(A)$. Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young T_μ de μ e para qualquer polinômio $f = f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$, a álgebra A satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$.*

Demonstração: Pelas proposições 1.2.12 e 1.2.29, sendo $\beta = \{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ uma lista completa de caracteres irredutíveis de S_n não equivalentes, temos que

$$FS_n = \bigoplus_{T_\lambda \text{ standard}} I_{T_\lambda}, \quad (1.3)$$

onde $I_{T_\lambda} = FS_n e_{T_\lambda}$. Além disso, considerando a função natural $P_n \rightarrow \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$ com núcleo $P_n \cap \text{Id}(A)$, podemos escrever $P_n = Q \oplus J$, onde $Q = P_n \cap \text{Id}(A)$ e $J \cong P_n(A)$.

Agora, seja $\chi_\mu \in \beta$ com $\mu \vdash n$. Temos que $m_\mu = 0$ se, e somente se, $I_\mu J = 0$. Isso porque se $I_\mu J = 0$, então a ação de I_μ é nula sobre $J \cong P_n(A)$, donde $m_\mu = 0$. Mas $I_\mu J = 0$ é equivalente a $I_\mu P_n \subseteq Q$, o que acontece se, e somente se, $e_{T_\mu} f \in Q$ para todo $f \in P_n$, pois I_μ é a soma de todos os ideais à esquerda $FS_n e_{T_\mu}$. Como $Q = P_n \cap \text{Id}(A)$, obtemos que $m_\mu = 0$ se, e somente se, $e_{T_\mu} f \equiv 0$ é uma identidade de A , para qualquer $f \in P_n$ e T_μ tabela de Young de μ . ■

Lema 1.2.43. *Seja F um corpo infinito, A uma F -álgebra e C uma F -álgebra comutativa. Então, cada identidade polinomial de A é também uma identidade polinomial de $A \otimes_F C$.*

Demonstração: Sejam $f(x_1, \dots, x_n)$ uma identidade polinomial para A , e $\bar{A} = A \otimes_F C$. Pelo Teorema 1.1.18, podemos supor que f é um polinômio multi-homogêneo de multigrado $(m_1, \dots, m_n)$.

Considere $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \bar{A}$ com $\bar{a}_1 = a_1 \otimes c_1, \bar{a}_2 = a_2 \otimes c_2, \dots, \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$, onde $a_i \in A$ e $c_i \in C$ para todo $i = 1, \dots, n$. Então,

$$f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = f(a_1, \dots, a_n) \otimes c_1^{m_1} \cdots c_n^{m_n} = 0,$$

pois f é multi-homogêneo.

Agora, tome $\bar{a}_1 = b_1 \otimes d_1 + b_2 \otimes d_2, \bar{a}_2 = a_2 \otimes c_2, \dots, \bar{a}_n = a_n \otimes c_n$, com $b_1, b_2, a_i \in A$ e $d_1, d_2, c_i \in C$ para todo $i = 2, \dots, n$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) &= f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n) + f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(b_1 \otimes d_1, b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} & f(x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{m_1-1} f_i(x_1, y_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

como no Teorema 1.1.25, com $\deg_{x_1} f_i = i$. Sabemos que os polinômios f_i são consequências multi-homogêneas de f . Aplicando a primeira parte da prova para $f(b_1 \otimes d_1, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n)$, $f(b_2 \otimes d_2, a_2 \otimes c_2, \dots, a_n \otimes c_n)$ e para os polinômios f_i , obtemos que $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$.

Falta generalizar esse argumento para quaisquer $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \in \bar{A}$, que podem ser escritos como $\bar{a}_1 = \sum a_{1i} \otimes c_{1i}, \dots, \bar{a}_n = \sum a_{ni} \otimes c_{ni}$. Usando o mesmo argumento das consequências multi-homogêneas, podemos escrever $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ como soma de polinômios do tipo

$$\bar{g} = g(a_{i_1 j_1} \otimes c_{i_1 j_1} \dots, a_{i_n j_n} \otimes c_{i_n j_n}),$$

que são todos consequências multi-homogêneas de f . Logo, podemos aplicar a primeira parte da prova também para esse caso e, consequentemente, $f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = 0$. ■

Teorema 1.2.44. *Seja A uma álgebra sobre um corpo infinito F e $F \subseteq K$ uma extensão de corpos. Então,*

$$c_n^K(\bar{A}) = c_n(A)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\bar{A} = A \otimes_F K$ e $c_n^K(A)$ é a n -ésima codimensão de $\bar{A}$ como K -álgebra.

Demonstração: Seja $c_n(A) = m$ e $\{f_1, \dots, f_m\}$ uma base para $P_n \pmod{P_n \cap \text{Id}(A)}$. Pela definição de base, temos que se $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ não são todos nulos, então

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m$$

não é uma identidade de A . Além disso, temos que se $f \in P_n$, então existem $\beta_1, \dots, \beta_m \in F$ tais que $f \equiv \sum_{i=1}^m \beta_i f_i \pmod{P_n \cap \text{Id}(A)}$, donde

$$h = h(x_1, \dots, x_n) = f - \sum_{i=1}^m \beta_i f_i \equiv 0$$

em A . Note que, pelo Lema 1.2.43, temos que h é uma identidade polinomial de $\bar{A}$ com coeficientes em K . Dessa forma, obtemos que $f \equiv \sum_{i=1}^m \beta_i f_i \pmod{P_n^K \cap \text{Id}^K(\bar{A})}$, onde P_n^K denota os polinômios multilineares de grau n com coeficientes em K . Portanto, $c_n^K(\bar{A}) \leq c_n(A)$.

Agora, para provar que $c_n(A) \leq c_n^K(\bar{A})$, basta mostrar que $f_1, \dots, f_m$ são linearmente independentes $\pmod{P_n^K \cap \text{Id}^K(\bar{A})}$. Suponhamos que

$$f = f(x_1, \dots, x_n) = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_m f_m \equiv 0$$

em $\bar{A}$ com $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$. Seja $\mathcal{B}$ uma base do espaço vetorial K sobre F . Então, podemos escrever

$$\beta_i = \sum_j \gamma_{ij} t_j$$

com $t_1, t_2, \dots \in \mathcal{B}$ e $\gamma_{ij} \in F$. Sendo $a_1, \dots, a_n \in A$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= f(a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1) = \sum_{i=1}^m \beta_i f_i(a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1) \\ &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^m \gamma_{ij} f_i(a_1, \dots, a_n) \right) \otimes t_j, \end{aligned}$$

donde obtemos que $\sum_{i=1}^m \gamma_{ij} f_i \equiv 0$ em A . Como $\{f_1, \dots, f_m\}$ é base de $P_n \pmod{P_n \cap \text{Id}(A)}$ e $\gamma_{ij} \in F$ para todo i, j , obtemos que todos os coeficientes γ_{ij} devem ser zero e, consequentemente, $\beta_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$. Portanto, $c_n(A) \leq c_n^K(\bar{A})$. ■

Com isso, finalizamos a teoria necessária sobre polinômios e representações para demonstrar a conjectura de Amitsur para álgebras com uma ação de Hopf generalizada. Para completar a teoria necessária a esse objetivo, vamos estudar e demonstrar alguns resultados básicos sobre as álgebras de Hopf.

1.3 Álgebras de Hopf

Nesta seção introduziremos o conceito de Álgebra de Hopf e, para esse fim, também exploraremos conceitos e proposições básicas sobre Coálgebras e Biálgebras, tendo como referência [17].

1.3.1 Coálgebras e Biálgebras

Antes da definição de coálgebras, vamos definir as álgebras com unidade usando um diagrama para representar a associatividade da multiplicação e um para representar a operação unidade. Dessa forma podemos observar a semelhança entre as definições de álgebra e coálgebra com unidade. Apesar disso, quando falamos de álgebras com unidade neste trabalho, a existência da unidade é explicitada.

Definição 1.3.1 (Álgebra). *Uma F -álgebra com unidade é um F -espaço vetorial A com dois funções F -lineares, multiplicação $m : A \otimes A \rightarrow A$ e unidade $u : F \rightarrow A$, tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

a) associatividade

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes id} & A \otimes A \\
 \downarrow id \otimes m & & \downarrow m \\
 A \otimes A & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

b) unidade

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \otimes A & & \\
 & u \otimes id \nearrow & \downarrow m & \nwarrow id \otimes u & \\
 F \otimes A & & & & A \otimes F \\
 & \searrow & \downarrow m & \swarrow & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

A multiplicação por escalar é vista no segundo diagrama, nas setas de baixo. Pelo diagrama da unidade, temos que

$$au(1_F) = m(id \otimes u)(a \otimes 1_F) = a \quad \text{e} \quad u(1_F)a = m(u \otimes id)(1_F \otimes a) = a$$

para todo $a \in A$, ou seja, $u(1_F) = 1_A$ e, como u é uma função F -linear, obtemos que $u(k) = k1_A$ para todo $k \in F$.

Para a definição de uma coálgebra C é feito, basicamente, o processo contrário. Definimos duas operações: a comultiplicação, que em vez de levar $C \otimes C$ em C leva C em $C \otimes C$ e a counidade, que leva cada elemento de C em um escalar. Veremos que o espaço dual representa uma importante relação entre álgebras e coálgebras.

Definição 1.3.2. Para quaisquer F -espaços vetoriais V e W , a função twist $\tau : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$ é dado por $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$.

Definição 1.3.3 (Coálgebra). Uma F -coálgebra com unidade é um F -espaço vetorial C munido de duas funções F -lineares, a comultiplicação $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$ e a counidade $\varepsilon : C \rightarrow F$ tais que os seguintes diagramas são comutativos:

a) coassociatividade

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \otimes id \\
 C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \Delta} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}$$

b) counidade

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C & & \\
 & 1 \otimes \nwarrow & \downarrow \Delta & \searrow \otimes 1 & \\
 F \otimes C & & & & C \otimes F \\
 & \nwarrow \varepsilon \otimes id & \downarrow id \otimes \varepsilon & & \\
 & & C \otimes C & &
 \end{array}$$

No segundo diagrama, as duas funções de cima são $c \mapsto 1 \otimes c$ e $c \mapsto c \otimes 1$.

Definição 1.3.4. Dizemos que uma coálgebra C é cocomutativa se $\tau \circ \Delta = \Delta$, onde τ é a função twist.

Exemplo 1.3.5. Seja S um conjunto e FS um espaço vetorial contendo S como base. Defina $\Delta : FS \rightarrow FS \otimes FS$ e $\varepsilon : FS \rightarrow F$ por

$$s \xrightarrow{\Delta} s \otimes s$$

$$s \xrightarrow{\varepsilon} 1$$

para $s \in S$.

Então, FS , juntamente com as duas operações Δ e ε , é uma coálgebra. De fato, se $s \in S$,

$$(id \otimes \Delta)(\Delta(s)) = (id \otimes \Delta)(s \otimes s) = id(s) \otimes \Delta(s) = s \otimes s \otimes s$$

$$(\Delta \otimes id)(\Delta(s)) = (\Delta \otimes id)(s \otimes s) = \Delta(s) \otimes id(s) = s \otimes s \otimes s$$

$$\text{e} \quad (\varepsilon \otimes id)(\Delta(s)) = (\varepsilon \otimes id)(s \otimes s) = \varepsilon(s) \otimes id(s) = 1 \otimes s$$

$$(id \otimes \varepsilon)(\Delta(s)) = (id \otimes \varepsilon)(s \otimes s) = id(s) \otimes \varepsilon(s) = s \otimes 1.$$

Definição 1.3.6. *Sejam C e D coálgebras com comultiplicações Δ_C e Δ_D , e counidades ε_C e ε_D , respectivamente.*

a) *Uma função $f : C \rightarrow D$ é um homomorfismo de coálgebras se $\Delta_D \circ f = (f \otimes f)\Delta_C$ e $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$.*

b) *Um subespaço $I \subseteq C$ é um coideal se $\Delta_C I \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ e $\varepsilon_C(I) = 0$.*

Observação 1.3.7. *Seja C uma F -coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε . Se I é um coideal de C , então o F -espaço C/I é uma coálgebra com comultiplicação induzida por Δ , e vice-versa.*

Proposição 1.3.8. *Seja C uma F -coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε . Então, C^* (dual de C como espaço vetorial) é uma álgebra com multiplicação $m = \Delta^*$ e $u = \varepsilon^*$, as transpostas de Δ e ε . Se C é cocomutativa, então C^* é comutativa.*

Lembremos da definição da função transposta para Δ e ε : temos que $m : (C \otimes C)^* \rightarrow C^*$ é dada por

$$m(f \otimes g)(a) = (f \otimes g)\Delta(a),$$

para $a \in C$ e $f, g \in C^*$. Como $C^* \otimes C^* \subseteq (C \otimes C)^*$, podemos tomar a restrição e considerar $m : C^* \otimes C^* \rightarrow C^*$. Já a unidade $u : F \rightarrow C^*$ é dada por

$$u(k)(a) = k \cdot \varepsilon(a),$$

com $k \in F$, $a \in C$. Com essas duas operações obtemos que C^* é uma álgebra.

Se C é cocomutativa, então $\tau \circ \Delta = \Delta$. Logo,

$$m(f \otimes g)(a) = (f \otimes g)(\tau \circ \Delta)a = \tau((g \otimes f)(\Delta a)) = m(g \otimes f)(a)$$

e, consequentemente, C^* é comutativa.

Definição 1.3.9. *Seja A uma F -álgebra. O dual finito de A é $A^\circ = \{f \in A^* \mid f(I) = 0, \text{ para algum ideal } I \text{ de } A \text{ tal que } \dim A/I < \infty\}$.*

Proposição 1.3.10. *Se (A, m, u) é uma álgebra, então A° é uma coálgebra com comultiplicação $\Delta = m^*$ e counidade $\varepsilon = u^*$. Se A é comutativa, então A° é cocomutativa.*

Temos que $\Delta : A^* \rightarrow (A \otimes A)^*$, é dada por

$$\Delta(f)(a \otimes b) = f(m(a \otimes b)) = f(ab),$$

onde $f \in A^*, a, b \in A$. E $\varepsilon : A^* \rightarrow F$,

$$\varepsilon(f)(k) = f(u(k)),$$

com $f \in A^*, k \in F$. Só precisamos restringir os domínios das operações de A^* para A° , pois temos $\Delta(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$. A demonstração dessa Proposição é encontrada em [17], Proposição 9.1.2.

Observação 1.3.11. *Observe que, se A tem dimensão finita, então $A^* = A^\circ$ e, portanto, A coálgebra implica em A^* álgebra e A álgebra implica em A^* coálgebra. O resultado em geral não vale quando a dimensão não é finita por que não podemos garantir $\Delta(A^*) \subseteq A^* \otimes A^*$.*

Agora, introduziremos uma nova notação para Δ , a chamada notação *sigma*, que será muito útil quando for necessário aplicar Δ mais de uma vez. Se C é uma coálgebra com comultiplicação Δ e counidade ε , vamos escrever, para $c \in C$,

$$\Delta c = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}, \quad (1.4)$$

onde $c_{(1)}$ e $c_{(2)}$ não indicam elementos particulares de C . Assim,

$$\begin{aligned} (id \otimes \Delta)(\Delta c) &= (\Delta \otimes id)(\Delta c) \\ \Rightarrow \sum c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)} &= (id \otimes \Delta) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= (\Delta \otimes id) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) \\ &= \sum (c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)}. \end{aligned}$$

Vamos denotar esse elemento por $\Delta_2(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$ e

$$\Delta_{n-1}(c) = \sum c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n)} \quad (1.5)$$

é o elemento obtido aplicando a coassociatividade $n - 1$ vezes. Usando essa notação para a counidade ε de C , obtemos do diagrama da counidade da definição de coálgebras que

$$\begin{aligned} 1 \otimes c &= (\varepsilon \otimes id)(\Delta c) = (\varepsilon \otimes id) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) = \sum \varepsilon(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} \\ c \otimes 1 &= (id \otimes \varepsilon)(\Delta c) = (id \otimes \varepsilon) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) = \sum c_{(1)} \otimes \varepsilon(c_{(2)}) \\ \Rightarrow c &= \sum \varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)} = \sum \varepsilon(c_{(2)}) c_{(1)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Exemplo 1.3.12. *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Usando a notação sigma, temos que $C \otimes C$ é uma coálgebra com a comultiplicação $\Delta' = (id_C \otimes \tau \otimes id_C) \circ (\Delta \otimes \Delta)$ e counidade $\varepsilon' = \varepsilon \otimes \varepsilon$.*

De fato, as operações definidas satisfazem os diagramas da definição de coálgebra, pois se $c, d \in C$, temos que

$$\begin{aligned} (\Delta' \otimes id_{C \otimes C}) \Delta'(c \otimes d) &= (\Delta' \otimes id_{C \otimes C}) \left(\sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \right) \\ &= \sum \Delta'(c_{(1)} \otimes d_{(1)}) \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \\ &= \sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes d_{(3)} = (id_{C \otimes C} \otimes \Delta') \Delta'(c \otimes d) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (id_{C \otimes C} \otimes \varepsilon') \Delta'(c \otimes d) &= \sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes \varepsilon'(c_{(2)} \otimes d_{(2)}) \\ &= \sum \varepsilon(c_{(2)}) c_{(1)} \otimes \varepsilon(d_{(2)}) d_{(1)} = c \otimes d. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\varepsilon' \otimes id_{C \otimes C}(c \otimes d) = c \otimes d$.

Definição 1.3.13. *Seja C uma coálgebra, e tome $c \in C$.*

a) *c é chamado tipo grupo se $\Delta c = c \otimes c$ e $\varepsilon(c) = 1$. O conjunto desses elementos de C é denotado por $G(C)$.*

b) *Para $g, h \in G(C)$, c é chamado g, h -primitivo se $\Delta c = c \otimes g + h \otimes c$. O conjunto de todos os elementos g, h -primitivos de C é denotado por $P_{g,h}(C)$.*

Proposição 1.3.14. *Os elementos tipo grupo de uma coálgebra C formam um conjunto F -linearmente independente de C .*

Demonstração: Suponha que $G(C)$ não é linearmente independente. Então, podemos escolher o número natural positivo n mínimo tal que quaisquer n elementos distintos de $G(C)$ sejam linearmente independentes e que existem $n + 1$ elementos distintos

de $G(C)$ que são linearmente dependentes. Assim, existem $g, g_1, \dots, g_n \in G(C)$ distintos e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ tais que

$$g = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_n g_n \quad \text{com } n \geq 1$$

e, como quaisquer n elementos distintos são linearmente independentes, podemos tomar também $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j g_i \otimes g_j &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j g_j \right) = g \otimes g = \Delta g \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta g_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i \otimes g_i. \end{aligned}$$

Como $\{g_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto linearmente independente, temos que $\{g_i \otimes g_j\}_{i,j=1}^n$ também é e, como $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, concluímos que a igualdade acima só é possível se $n = 1$. Consequentemente, temos $g = \lambda_1 g_1$. Além disso,

$$1 = \varepsilon(g) = \varepsilon(\lambda_1 g_1) = \lambda \varepsilon(g_1) = \lambda_1,$$

donde obtemos $g = g_1$, uma contradição. Portanto, $G(C)$ é um conjunto F -linearmente independente de C . ■

Exemplo 1.3.15. *Seja G um grupo. Considere a coálgebra $C = FG$ com estrutura de coálgebra $\Delta g = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$. Então, é claro que $G \subseteq G(C)$. Como qualquer elemento de FG é F -combinação linear dos elementos de G , obtemos pela Proposição 1.3.14, que $G(C) = G$.*

Exemplo 1.3.16. *Seja A uma F -álgebra de dimensão finita e defina*

$$\text{Alg}(A, F) = \{f \in A^* \mid f \text{ é um homomorfismo de álgebras}\}.$$

$$\text{Então, } \text{Alg}(A, F) \subseteq G(A^*).$$

De fato, se $f \in \text{Alg}(A, F)$, então

$$(\Delta f)(a \otimes b) = (m^* f)(a \otimes b) = f(ab) = f(a)f(b) = (f \otimes f)(a \otimes b)$$

para quaisquer $a, b \in A$ e

$$\varepsilon(f)(k) = f(u(k)) = kf(1) = k$$

Assim, obtemos $\Delta f = f \otimes f$ e $\varepsilon(f) = id$. Consequentemente, $f \in G(A^*)$.

Proposição 1.3.17. *Seja B um F -espaço vetorial tal que (B, m, u) é uma álgebra e (B, Δ, ε) é uma coálgebra. Então, Δ e ε são homomorfismos de álgebras se, e somente se, m e u são homomorfismos de coálgebras.*

Demonstração: Sejam $c, d \in B$ e Δ' e ε' a comultiplicação e a counidade da coálgebra $B \otimes B$ definida no Exemplo 1.3.12. Note que o corpo F é também uma coálgebra com comultiplicação Δ_F e counidade ε_F sendo a função identidade em F .

($\Leftarrow$) Suponha que m e u sejam homomorfismos de coálgebras. Pela definição de homomorfismos de coálgebras, temos para m que $\Delta \circ m = (m \otimes m)\Delta'$ e $\varepsilon' = \varepsilon \circ m$. Logo,

$$\Delta(cd) = (\Delta \circ m)(c \otimes d) = (m \otimes m)\Delta'(c \otimes d) = \sum c_{(1)}d_{(1)} \otimes c_{(2)}d_{(2)} = \Delta c \Delta d$$

$$\varepsilon(c)\varepsilon(d) = \varepsilon'(c \otimes d) = (\varepsilon \circ m)(c \otimes d) = \varepsilon(cd).$$

Logo, Δ e ε são homomorfismos de álgebras.

($\Rightarrow$) Agora, suponha que Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Então,

$$(\varepsilon \circ m)(c \otimes d) = \varepsilon(cd) = \varepsilon(c)\varepsilon(d) = \varepsilon'(c \otimes d).$$

Para mostrar que m é um homomorfismo de coálgebras, falta mostrar a igualdade $\Delta \circ m = (m \otimes m)\Delta'$. De fato,

$$\begin{aligned} (m \otimes m)\Delta'(c \otimes d) &= (m \otimes m) \left(\sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)} \right) \\ &= \sum c_{(1)}d_{(1)} \otimes c_{(2)}d_{(2)} = \Delta c \Delta d = (\Delta \circ m)(c \otimes d). \end{aligned}$$

Para mostrar que u é homomorfismo entre as coálgebras F e B , devemos provar que $\Delta \circ u = (u \otimes u)\Delta_F$ e $\varepsilon_F = \varepsilon \circ u$. De fato, se $k \in F$, então

$$(u \otimes u)\Delta_F(k) = k1_B \otimes 1_B = \Delta(k1_B) = (\Delta \circ u)(k)$$

e

$$(\varepsilon \circ u)(k) = k\varepsilon(1_B) = k = \varepsilon_F(k).$$

■

Definição 1.3.18 (Biálgebra). Uma 5-upla $(B, m, u, \Delta, \varepsilon)$ é chamada biálgebra se (B, m, u) é uma álgebra, (B, Δ, ε) é uma coálgebra e é válida uma das seguintes condições:

- 1) Δ e ε são homomorfismos de álgebras;
- 2) m e u são homomorfismos de coálgebras.

Analogamente, dizemos que um homomorfismo de biálgebras é uma função que é, ao mesmo tempo, um homomorfismo de álgebras e coálgebras. Um subespaço $I \subseteq B$ é um *biideal* se é um ideal e um coideal de B . Com I biideal, B/I é uma biálgebra.

Exemplo 1.3.19. *Seja G um grupo e tome $B = FG$ sua álgebra de grupo. Então B é uma biálgebra com as operações comultiplicação $\Delta g = g \otimes g$ e counidade $\varepsilon(g) = 1$, para todo $g \in G$.*

De fato, FG é uma álgebra com a operação induzida pela operação do grupo. $(FG, \Delta, \varepsilon)$ é coálgebra, como já visto no Exemplo 1.3.5. Falta mostrar que Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Temos que

$$\Delta(gh) = (gh) \otimes (gh) = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta g \Delta h$$

$$\text{e} \quad \varepsilon(gh) = 1 = \varepsilon(g) \varepsilon(h),$$

para quaisquer $g, h \in G$.

Exemplo 1.3.20. *Seja B uma biálgebra qualquer de dimensão finita. Então B^* é uma biálgebra, pois já vimos que B ser álgebra e coálgebra implica em B^* ser coálgebra e álgebra, respectivamente.*

Exemplo 1.3.21. *Tome $0 \neq q \in F$ e seja $B = \mathcal{O}(F^2) = F\langle x, y \mid xy = qyx \rangle$, o chamado plano quantum. B tem estrutura de biálgebra com comultiplicação dada por $\Delta x = x \otimes x$, $\Delta y = y \otimes 1 + x \otimes y$ e counidade $\varepsilon(x) = 1$, $\varepsilon(y) = 0$.*

Assim definidos, temos que Δ e ε são homomorfismos de álgebras. Logo, basta mostrar as propriedades de coálgebra para os geradores de B . Além disso,

$$1. (id \otimes \Delta)(\Delta x) = (id \otimes \Delta)(x \otimes x) = x \otimes x \otimes x = (\Delta \otimes id)(\Delta x);$$

$$\begin{aligned} 2. (id \otimes \Delta)(\Delta y) &= (id \otimes \Delta)(y \otimes 1 + x \otimes y) \\ &= y \otimes 1 \otimes 1 + x \otimes (y \otimes 1 + x \otimes y) \\ &= y \otimes 1 \otimes 1 + x \otimes y \otimes 1 + x \otimes x \otimes y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. (\Delta \otimes id)(\Delta y) &= (\Delta \otimes id)(y \otimes 1 + x \otimes y) \\ &= (y \otimes 1 + x \otimes y) \otimes 1 + x \otimes x \otimes y \\ &= y \otimes 1 \otimes 1 + x \otimes y \otimes 1 + x \otimes x \otimes y; \end{aligned}$$

$$4. (\varepsilon \otimes id)(\Delta x) = (\varepsilon \otimes id)(x \otimes x) = 1 \otimes x;$$

$$5. (id \otimes \varepsilon)(\Delta x) = (id \otimes \varepsilon)(x \otimes x) = x \otimes 1;$$

$$6. (\varepsilon \otimes id)(\Delta y) = (\varepsilon \otimes id)(y \otimes 1 + x \otimes y) = 0 \otimes 1 + 1 \otimes y = 1 \otimes y;$$

$$7. (id \otimes \varepsilon)(\Delta y) = (id \otimes \varepsilon)(y \otimes 1 + x \otimes y) = y \otimes 1 + x \otimes 0 = y \otimes 1.$$

Com as igualdades das expressões 2 e 3, 4 e 5, 6 e 7, temos que (B, Δ, ε) é uma coálgebra. Como Δ e ε são homomorfismos de álgebras, obtemos que B é uma biálgebra.

Observemos também que $x \in G(B)$ e que $y \in P_{1,x}(B)$.

1.3.2 Álgebras de Hopf

Definição 1.3.22. *Seja (C, Δ, ε) uma F -coálgebra e (A, m, u) uma F -álgebra. Então, $\text{Hom}_F(C, A)$ é uma álgebra com o produto convolução dado por*

$$(f * g)(c) = m \circ (f \otimes g)(\Delta c)$$

para todo $f, g \in \text{Hom}_F(C, A)$, $c \in C$. A unidade de $\text{Hom}_F(C, A)$ é $u\varepsilon$.

De fato,

$$(f * u\varepsilon)(c) = m \circ (f \otimes u\varepsilon)(\Delta c) = m \circ (f \otimes u)(id \otimes \varepsilon)(\Delta c) = m \circ (f \otimes u)(c \otimes 1) = f(c).$$

Analogamente, obtemos $u\varepsilon * f = f * u\varepsilon = f$.

Da mesma maneira, podemos definir o produto *convolução twist* (ou anticonvolução) sobre $\text{Hom}_F(C, A)$ como

$$(f \times g)(c) = m \circ (f \otimes g)(\tau \circ \Delta(c)).$$

Um exemplo de produto convolução foi dado na Proposição 1.3.8, com $m = \Delta^*$ e $C^* = \text{Hom}_F(C, F)$.

Usando a notação sigma, o produto convolução é dado por

$$(f * g)(c) = m \circ (f \otimes g) \left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \right) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)}). \quad (1.7)$$

Definição 1.3.23 (Álgebra de Hopf). *Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Então H é uma álgebra de Hopf se existe um elemento $S \in \text{Hom}_F(H, H)$ que é um inverso de id_H pela convolução $*$. O elemento S é chamado antípoda de H .*

Da definição, S satisfaz $(S * id_H)(h) = (u\varepsilon)(h) = (id_H * S)(h)$, $\forall h \in H$. Usando a notação sigma da equação (1.7), obtemos

$$\sum (S(h_{(1)}))h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = \sum h_{(1)}(S(h_{(2)})). \quad (1.8)$$

Definição 1.3.24. *Uma função $f : H \rightarrow H'$ de álgebras de Hopf é um homomorfismo de Hopf se é um homomorfismo de biálgebras e $f(S_H h) = S_{H'} f(h)$, para todo $h \in H$. Um subespaço I de H é um ideal de Hopf se é um biideal e se $S_H I \subseteq I$. Nesse caso, H/I é uma álgebra de Hopf com a estrutura induzida por H .*

Proposição 1.3.25. *Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma F -álgebra de Hopf com antípoda S . Sejam $g, h \in H$ e τ a função twist. Então,*

- (1) $S(hk) = S(k)S(h), \forall h, k \in H$;
- (2) $S(1) = 1$;
- (3) $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.
- (4) $\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$;

Demonstração:

- (1) Considere a coálgebra $H \otimes H$ com a estrutura

$$\begin{array}{ll} \Delta' : H \otimes H & \rightarrow H \otimes H \otimes H \otimes H \\ g \otimes h & \mapsto g_{(1)} \otimes h_{(1)} \otimes g_{(2)} \otimes h_{(2)} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ll} \varepsilon' : H \otimes H & \rightarrow F \\ g \otimes h & \mapsto \varepsilon(g)\varepsilon(h) \end{array}.$$

Assim, $\text{Hom}_F(H \otimes H, H)$ é uma álgebra sob a operação convolução. Considere as funções $M, N, P \in \text{Hom}_F(H \otimes H, H)$ dadas por $M(g \otimes h) = gh$, $N(g \otimes h) = S(h)S(g)$ e $P(g \otimes h) = S(gh)$.

Então,

$$(P * M)(g \otimes h) = \sum P(g_{(1)} \otimes h_{(1)})M(g_{(2)} \otimes h_{(2)}) = \sum S(g_{(1)}h_{(1)})g_{(2)}h_{(2)}.$$

Como H é biálgebra, temos que

$$\begin{aligned} \Delta(gh) &= \Delta g \Delta h = \sum (g_{(1)} \otimes g_{(2)})(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) = \sum g_{(1)}h_{(1)} \otimes g_{(2)}h_{(2)} \\ \implies (P * M)(g \otimes h) &= \sum S((gh)_{(1)})(gh)_{(2)} = \varepsilon(gh)1_H = u\varepsilon'(g \otimes h) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (M * N)(g \otimes h) &= \sum M(g_{(1)} \otimes h_{(1)})N(g_{(2)} \otimes h_{(2)}) \\ &= \sum g_{(1)}h_{(1)}S(h_{(2)})S(g_{(2)}) \\ &= \sum g_1\varepsilon(h)1_H S(g_{(2)}) \\ &= \varepsilon(g)\varepsilon(h)1_H \\ &= u\varepsilon'(g \otimes h). \end{aligned}$$

Assim, obtemos que $P * M = u\varepsilon' = M * N$ e, como $u\varepsilon'$ é a identidade de $\text{Hom}_F(H \otimes H, H)$,

$$P = P * (u\varepsilon') = P * M * N = (u\varepsilon') * N = N.$$

Portanto, $S(gh) = S(h)S(g)$.

- (2) Como H é biálgebra, temos que $\varepsilon(1_H) = 1$ e $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$. Assim,

$$1_H = u\varepsilon(1_H) = (S * id_H)(1_H) = S(1_H)id_H(1_H) = S(1_H).$$

(3) Temos que

$$\varepsilon u \varepsilon(h) = \varepsilon(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h)\varepsilon(1_H) = \varepsilon(h).$$

Assim, usando a expressão (1.7),

$$\varepsilon(h) = \varepsilon u \varepsilon(h) = \sum \varepsilon(S(h_{(1)}))\varepsilon(h_{(2)}).$$

Ainda, da expressão (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} h = \sum h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}) &\Rightarrow S(h) = \sum (S(h_{(1)}))\varepsilon(h_{(2)}) \\ \Rightarrow \varepsilon(S(h)) &= \varepsilon\left(\sum (S(h_{(1)}))\varepsilon(h_{(2)})\right) \\ &= \sum \varepsilon(S(h_{(1)}))\varepsilon(h_{(2)}) \\ &= \varepsilon(h). \end{aligned}$$

Portanto, $\varepsilon \circ S = \varepsilon$.

(4) A demonstração desse item é análoga à demonstração do item (1). Nesse caso, sabemos que H é coálgebra e $H \otimes H$ é álgebra. Logo, $\text{Hom}_F(H, H \otimes H)$ é álgebra com a operação convolução. Aqui, tomamos $M = \Delta$, $N = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta$ e $P = \Delta S$. Assim,

$$\begin{aligned} (P * M)(h) &= \sum P(h_{(1)})M(h_{(2)}) \\ &= \sum \Delta(S(h_{(1)}))\Delta(h_{(2)}) \\ &= \Delta\left(\sum (S(h_{(1)}))h_{(2)}\right) \\ &= \Delta(\varepsilon(h)1_H) \\ &= \varepsilon(h)(1_H \otimes 1_H) \\ &= u_{H \otimes H}\varepsilon(h). \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} (M * N)(h) &= \sum M(h_{(1)})N(h_{(2)}) \\ &= \sum \Delta(h_{(1)})\tau(S \otimes S)\Delta(h_{(2)}) \\ &= \sum \Delta(h_{(1)})\left(\sum S(h_{(2)})\right) \otimes S(h_{(3)}) \\ &= \varepsilon(h)1_H \otimes \varepsilon(h)1_H \\ &= \varepsilon(h)1_{H \otimes H} \\ &= u_{H \otimes H}\varepsilon(h). \end{aligned}$$

Portanto, $P * M = u_{H \otimes H}\varepsilon = M * N$ e, conseqüentemente, $P = N$, pois

$$P = P * (M * N) = (P * M) * N = N,$$

o que nos dá o resultado desejado. Note que esse resultado nos diz que

$$\sum (Sh)_{(1)} \otimes (Sh)_{(2)} = \sum S(h_{(2)}) \otimes S(h_{(1)}). \quad (1.9)$$

■

Exemplo 1.3.26. *Seja G um grupo e FG sua álgebra de grupo. Tome $H = FG$, que é uma biálgebra com as operações $\Delta g = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1$, para $g \in G$, o que já foi visto no Exemplo 1.3.19. Seja $S : FG \rightarrow FG$ dada por $Sg = g^{-1}$, para cada $g \in G$. Então FG é uma álgebra de Hopf com antípoda S .*

De fato, usando a expressão (1.7) para a convolução, obtemos

$$(S * id_H)(g) = \sum S(g_{(1)})id_H(g_{(2)}) = S(g)id_H(g) = g^{-1}g = 1_H = \varepsilon(g)1_H = (u\varepsilon)(g).$$

E, da mesma forma, obtemos $(id_H * S)(g) = (u\varepsilon)(g)$ e, conseqüentemente, $S * id_H = id_H * S = u\varepsilon$, ou seja, S é antípoda de H e H é álgebra de Hopf.

Proposição 1.3.27. *Seja $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ uma álgebra de Hopf com antípoda S . Então,*

- a) *Se $g \in G(H)$, então $Sg = g^{-1}$;*
- b) *Se $h \in P_{1,1}(H)$, então $Sh = -h$.*

Demonstração:

- a) Se $g \in G(H)$, então $\Delta g = g \otimes g$ e $\varepsilon(g) = 1$. A equação (1.8) implica que

$$(Sg)g = 1_H = g(Sg) \Rightarrow Sg = g^{-1}.$$

- b) Se $h \in P(H)$, então $\Delta h = h \otimes 1 + 1 \otimes h$. Do diagrama da counidade, temos que

$$\begin{aligned} h \otimes 1 &= (id \otimes \varepsilon)(\Delta h) = (id \otimes \varepsilon)(h \otimes 1 + 1 \otimes h) = h \otimes 1 + 1 \otimes \varepsilon(h) \\ &\Rightarrow \varepsilon(h) = 0. \end{aligned}$$

Logo, da Equação (1.8), obtemos

$$(Sh)1 + (S1)h = \varepsilon(h)1_H = 0 \Rightarrow Sh = -h.$$

■

Exemplo 1.3.28. *Seja F um corpo de característica diferente de 2. Considere*

$$H_4 = F\langle 1, g, x, gx \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx \rangle$$

com estrutura de coálgebra $\Delta g = g \otimes g$, $\Delta x = x \otimes 1 + g \otimes x$, $\varepsilon(g) = 1$ e $\varepsilon(x) = 0$. Então H_4 é uma álgebra de Hopf com antípoda $Sg = g$ e $Sx = -gx$, conhecida como álgebra de Sweedler de dimensão 4.

Como visto na Proposição 1.3.27 a), $Sg = g^{-1} = g$. Além disso, da equação (1.8) obtemos

$$Sx + (Sg)x = \varepsilon(x)1_H = 0 \Rightarrow Sx = -gx.$$

Além disso, observe que

$$1) (S * id_{H_4})(g) = (Sg)id_{H_4}(g) = g^2 = 1_{H_4} = \varepsilon(g)1_{H_4} = (id_{H_4} * S)(g)$$

$$2) (S * id_{H_4})(x) = Sx + (Sg)x = -gx + gx = 0_{H_4} = \varepsilon(x)1_H$$

$$3) (id_{H_4} * S)(x) = x + g(Sx) = x + g(-gx) = 0_{H_4} = \varepsilon(x)1_H$$

Logo, $S * id_{H_4} = u\varepsilon = id_{H_4} * S$. Portanto, S é o antípoda de H_4 .

Exemplo 1.3.29. Considere $H = \mathcal{O}(F^2)[x^{-1}]$ sendo a biálgebra $\mathcal{O}(F^2)$ apresentada no Exemplo 1.3.21 adicionando o elemento x^{-1} . Então, H é uma álgebra de Hopf com antípoda $Sx = x^{-1}$ e $Sy = -x^{-1}y$.

É claro que $Sx = x^{-1}$, pela Proposição 1.3.27. Para Sy , temos

$$Sy + (Sx)y = 0 \Rightarrow Sy = -(Sx)y = -x^{-1}y.$$

1.3.3 Módulos e Comódulos

Agora, veremos as definições e propriedades básicas de módulos e comódulos, para que então possamos introduzir o conceito de *Módulos de Hopf*.

Definição 1.3.30 (Módulo). Para uma F -álgebra A , um A -módulo à esquerda é um F -espaço vetorial M com uma função F -linear $\gamma : A \otimes M \rightarrow M$ tal que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \text{a)} & A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{m \otimes id} & A \otimes M \\ & \downarrow id \otimes \gamma & & \downarrow \gamma \\ & A \otimes M & \xrightarrow{\gamma} & M \end{array} \quad \text{b)} \quad \begin{array}{ccc} F \otimes M & \xrightarrow{u \otimes id} & A \otimes M \\ & \searrow \text{mult. por escalar} & \downarrow \gamma \\ & & M \end{array}$$

Podemos adaptar a definição para definir A -módulo à direita.

Definição 1.3.31 (Comódulo). Para uma F -coálgebra C , um C -comódulo à direita é um F -espaço vetorial M com uma função F -linear $\rho : M \rightarrow M \otimes C$ tal que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} \text{a)} & M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ & \downarrow \rho & & \downarrow id \otimes \Delta \\ & M \otimes C & \xrightarrow{\rho \otimes id} & M \otimes C \otimes C \end{array} \quad \text{b)} \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes C \\ & \searrow \otimes 1 & \downarrow id \otimes \varepsilon \\ & & M \otimes F \end{array}$$

Do mesmo modo, podemos adaptar a definição para comódulos à esquerda.

Vamos usar uma notação parecida com a notação sigma para a função ρ do comódulo C . Escrevemos $\sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes C$, com a convenção de que $m_{(i)} \in C$ para $i \neq 0$. Para um comódulo à esquerda, com a função $\rho' : M \rightarrow C \otimes M$, escrevemos $\rho'(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$.

Definição 1.3.32. *Sejam M e N dois C -comódulos à direita, com as funções de estrutura ρ_M e ρ_N , respectivamente. Uma função $f : M \rightarrow N$ é um homomorfismo de comódulos se*

$$\rho_N \circ f = (f \otimes id) \circ \rho_M.$$

Proposição 1.3.33. (1) *Se M é um C -comódulo à direita, então M é um C^* -módulo à esquerda.*

(2) *Seja M um A -módulo à esquerda. Então M é um A° -comódulo à direita se, e somente se, $\{A \cdot m\}$ tem dimensão finita, para todo $m \in M$.*

Demonstração:

(1) Lembremos que C^* é uma álgebra com multiplicação Δ^* e unidade ε^* , onde Δ e ε são a comultiplicação e a counidade de C .

Temos que $\varepsilon = 1_{C^*}$, pois do diagrama da unidade da álgebra C^* e da definição ε^* , obtemos

$$\begin{aligned} 1_{C^*} &= \Delta^*(\varepsilon^* \otimes id)(1_F \otimes 1_{C^*}) = \varepsilon^*(1_F) \\ \Rightarrow 1_{C^*}(c) &= \varepsilon^*(1_F)(c) = 1_F \varepsilon(c) = \varepsilon(c). \end{aligned}$$

M é um C^* -módulo à esquerda com a função $\gamma : C^* \otimes M \rightarrow M$ dada por

$$\gamma(f \otimes m) = f \cdot m = \sum m_{(0)} f(m_{(1)}).$$

Agora, vamos mostrar a comutatividade do segundo diagrama da definição de módulo. Como M é um C -comódulo à direita, obtemos do segundo diagrama da definição de comódulo, para $m \in M$, que

$$\begin{aligned} (id \otimes \varepsilon)\rho(m) &= \sum m_{(0)} \otimes \varepsilon(m_{(1)}) = m \otimes 1_F \\ \Rightarrow \varepsilon \cdot m &= \sum m_{(0)} \varepsilon(m_{(1)}) = m \\ \Rightarrow \gamma(\varepsilon^* \otimes id)(1_F \otimes m) &= \varepsilon^*(1_F) \cdot m = \varepsilon \cdot m = m. \end{aligned}$$

Para o primeiro diagrama, temos por um lado, para $f, g \in C^*$ e $m \in M$, que

$$\gamma(id \otimes \gamma)(f \otimes g \otimes m) = f \cdot (g \cdot m) = \sum f(m_{(2)})g(m_{(1)})m_{(0)}.$$

Por outro lado,

$$\gamma(\Delta^* \otimes id)(f \otimes g \otimes m) = \Delta^*(f \otimes g) \cdot m = \sum ((f \otimes g) \Delta m_{(1)}) m_{(0)} = \sum f(m_{(2)}) g(m_{(1)}) m_{(0)}.$$

Portanto, o primeiro diagrama é comutativo e, conseqüentemente, M é um C^* -módulo à esquerda.

(2) ($\Leftarrow$) Seja $m \in M$ e $\{m_1, \dots, m_n\}$ uma base para $A \cdot m$. Então, para cada $a \in A$,

$$a \cdot m = \sum_{i=1}^n f_i(a) m_i$$

com $f_i(a) \in F$. Seja $\varphi : A \rightarrow \text{End}_F(A \cdot m)$ definido por $\varphi(a) = T_a$, onde $T_a(b \cdot m) = ab \cdot m$ para quaisquer $a, b \in A$. Como $\{A \cdot m\}$ tem dimensão finita, temos que $A/(\ker \varphi)$ tem dimensão finita. Além disso, se $a \in A$,

$$\begin{aligned} a \in \ker \varphi &\Rightarrow 0 = (ab) \cdot m = \sum_{i=1}^n f_i(ab) m_i \quad \forall b \in A \\ &\Rightarrow f_i(ab) = 0 \quad \forall b \in A \text{ e } \forall i \\ &\Rightarrow f_i(a) = 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Consequentemente, $f_i \in A^\circ$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, M é um A° -comódulo à direita com $\rho : M \rightarrow M \otimes A^\circ$ definido por

$$\rho(m) = \sum_i m_i \otimes f_i.$$

($\Rightarrow$) Se M é um A° -comódulo à direita, então por 1) M é um A -módulo à esquerda com

$$a \cdot m = \sum (am_{(1)}) m_{(0)}.$$

Logo, cada $A \cdot m$ é gerado pelos elementos $\{m_{(0)}\}$, onde $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$.

■

Exemplo 1.3.34. Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Tome $M = C$ com $\rho = \Delta$. Então, (M, ρ) é um C -comódulo à direita, fato que vem direto da definição de coálgebra. Pela Proposição 1.3.33, C é um C^* -módulo à esquerda com a ação $\gamma : C^* \otimes C \rightarrow C$ dada por

$$\gamma(f \otimes c) = \sum f(c_{(2)}) c_{(1)},$$

para $f \in C^*, c \in C$.

Exemplo 1.3.35. Sendo A uma F -álgebra podemos definir uma ação $\rightarrow$ à esquerda de A sobre A^* , onde $\rightarrow : A \otimes A^* \rightarrow A^*$ é dada por

$$(a \rightarrow f)(b) = f(ba)$$

para $a, b \in A$ e $f \in A^*$. Assim, A^* é um A -módulo à esquerda com a ação $\rightarrow$. De fato, se $a, b \in A$ e $f \in A^*$, então

$$(a \rightarrow (b \rightarrow f))(c) = (b \rightarrow f)(ca) = f(cab) = (ab \rightarrow f)(c).$$

Note que, se $f \in A^\circ$, então podemos escrever $(a \rightarrow f)$ explicitamente, pois

$$\sum f_{(1)}(b)f_{(2)}(a) = m(\Delta f)(b \otimes a) = (m^*(f))(b \otimes a) = f(ba) = (a \rightarrow f)(b),$$

ou seja, $a \rightarrow f = \sum f_{(2)}(a)f_{(1)}$.

Proposição 1.3.36. *Seja $C = FG$ com a estrutura de coálgebra vista no Exemplo 1.3.5. Então M é um FG -comódulo à direita se, e somente se, M é um módulo G -graduado, ou seja, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) M é um FG -comódulo à direita com a função $\rho : M \rightarrow M \otimes FG$ dada por $\rho(m) = \sum m_g \otimes g$, para $m \in M$. Da definição de comódulo, obtemos que

$$(\rho \otimes id)\rho(m) = \sum \rho(m_g) \otimes g = \sum (m_g)_h \otimes h \otimes g$$

e

$$(id \otimes \Delta)\rho(m) = \sum m_g \otimes \Delta g = \sum m_g \otimes g \otimes g.$$

Então,

$$(\rho \otimes id)\rho(m) = (id \otimes \Delta)\rho(m) \Rightarrow (m_g)_h = \delta_{g,h} m_g$$

$$\Rightarrow \rho(m_g) = \sum (m_g)_h \otimes h = m_g \otimes g. \quad (1.10)$$

Tomando $M_g = \{m_g \mid m \in M\}$, obtemos a soma direta necessária. De fato, do segundo diagrama da definição de comódulos, para $m \in M$,

$$m \otimes 1 = (id \otimes \varepsilon)\rho(m) = \sum m_g \otimes \varepsilon(g) \Rightarrow m = \sum m_g \in \bigoplus_{g \in G} M_g.$$

Além disso, sejam $m_g \in M_g$ tais que $0 = m = \sum_{g \in G} m_g$. Por (1.10), temos que

$$0 = \rho(m) = \sum_{g \in G} \rho(m_g) = \sum_{g \in G} m_g \otimes g.$$

Pela Proposição 1.3.14 e pelo Exemplo 1.3.15, temos que os elementos de G são linearmente independente. Dessa forma, segue que $m_g = 0$ para todo $g \in G$, ou seja, a soma dos M_g é direta e, conseqüentemente, M é um módulo G -graduado.

($\Leftarrow$) Basta tomar $\rho(m) = m \otimes g$, para cada $m \in M_g$. De fato,

$$(\rho \otimes id)\rho(m) = \rho(m) \otimes g = m \otimes g \otimes g$$

$$(id \otimes \Delta)\rho(m) = m \otimes \Delta g = m \otimes g \otimes g$$

e

$$(id \otimes \varepsilon)\rho(m) = m \otimes \varepsilon(g) = m \otimes 1.$$

■

Definição 1.3.37. *Seja H uma álgebra de Hopf.*

(1) *Seja M um H –módulo à esquerda. Os invariantes de H sobre M são o conjunto*

$$M^H = \{m \in M \mid h \cdot m = \varepsilon(h)m, \forall h \in H\}.$$

(2) *Seja M um H –comódulo à direita. Os coinvariantes de H em M são o conjunto*

$$M^{coH} = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}.$$

Vamos denotar por ${}^H M$ o conjunto dos invariantes quando M é um H –módulo à direita.

Proposição 1.3.38. *Sejam H uma álgebra de Hopf e M um H –comódulo à direita e considere sua estrutura de H^* –módulo à esquerda. Então $M^{H^*} = M^{coH}$.*

Demonstração: Consideremos M^{H^*} como os invariantes da ação de H^* sobre M dada por

$$f \cdot m = \sum f(m_{(1)})m_{(0)}.$$

Nesse caso, $M^{H^*} = \{m \in M \mid f \cdot m = m \ \forall f \in H^*\}$. Se $m \in M^{coH}$ e $f \in H^*$ é qualquer, temos que

$$\rho(m) = m \otimes 1 \Rightarrow f \cdot m = \sum f(m_{(1)})m_{(0)} = f(1)m = m \Rightarrow m \in M^{H^*},$$

ou seja, $M^{coH} \subseteq M^{H^*}$. Reciprocamente, se $m \in M^{H^*}$, então

$$f \cdot m = m \Rightarrow (\rho \otimes id)\rho(m) = (\rho \otimes id)\rho(f \cdot m)$$

$$\begin{aligned} \sum \rho(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} &= (\rho \otimes id) \left(\sum f(m_{(1)})\rho(m_{(0)}) \right) = \sum f(m_{(2)})(\rho(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}) \\ &\Rightarrow f(m_{(2)}) = 1. \end{aligned}$$

Como f é qualquer, obtemos que $m_{(2)} = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned} \sum \rho(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} &= \sum f(m_{(1)})\rho(m_{(0)}) \otimes f(m_{(1)})m_{(2)} = \sum f(m_{(1)})\rho(m_{(0)}) \otimes f(m_{(1)})1 \\ &\Rightarrow m_{(1)} = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$m = f \cdot m \Rightarrow \rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes 1.$$

E da definição de comódulo, temos que

$$m \otimes 1 = (id \otimes \varepsilon)\rho(m) = \sum m_0 \otimes \varepsilon(m_{(1)}) = \sum m_{(0)} \otimes 1 = \rho(m).$$

Portanto, $M^{H^*} \subseteq M^{coH}$. ■

Exemplo 1.3.39. *Seja $H = FG$, com a estrutura de álgebra de Hopf do Exemplo 1.3.5.*

Seja M um H -módulo à esquerda. Denotemos por M^G o conjunto dos elementos de M tais que $g \cdot m = \varepsilon(g)m$ para todo $g \in G$. Temos que $M^H = M^G$, pois

$$m \in M^G \Rightarrow g \cdot m = \varepsilon(g)m = m,$$

para qualquer $g \in G$. Como $\varepsilon(g) = 1$ e ε é uma função F -linear, obtemos que, se $m \in M^G$, então $h \cdot m = \varepsilon(h)m$, para qualquer $h \in H$. Logo, $M^G \subseteq M^H$. A continência contrária é direta.

Se M é um H -comódulo à direita, então pela Proposição 1.3.36, temos que M é um módulo G -graduado, ou seja, $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$. Os coinvariantes de H sobre M são dados pelo conjunto M_1 . De fato,

$$m \in M^{coH} \Rightarrow \rho(m) = m \otimes 1$$

$$\Rightarrow m \otimes 1 = \rho(m) = \sum m_g \otimes g \Rightarrow \rho(m) = m_1 \otimes 1,$$

com $m_1 = m$. Assim, $m \in M_1$. Reciprocamente, se $m \in M_1$, então existe $m' \in M$ tal que $\rho(m'_1) = m \otimes 1$. E então

$$m \otimes 1 = \rho(m'_1) = \sum m'_g \otimes g \Rightarrow m'_1 = m.$$

Portanto, $m \in M^{coH}$ e, consequentemente, $M^{coH} = M_1$.

Exemplo 1.3.40. *Seja H uma álgebra de Hopf qualquer e considere H como um H -módulo à esquerda usando a operação de multiplicação de H à esquerda. Então*

$$H^H = \{t \in H \mid h \cdot t = \varepsilon(h)t \ \forall \ h \in H\}.$$

1.3.4 Módulos de Hopf

Antes de definirmos os módulos de Hopf, vejamos como a ação de uma álgebra de Hopf sobre o produto tensorial de módulos estende a ação diagonal usual para grupos.

Definição 1.3.41. *Seja H uma F -álgebra de Hopf, V e W H -módulos à esquerda. Então $V \otimes W$ é um H -módulo à esquerda, com ação dada por*

$$h \cdot (v \otimes w) = \sum (h_{(1)} \cdot v) \otimes (h_{(2)} \cdot w),$$

para $h \in H$, $v \in V$ e $w \in W$, com $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.

De fato, essa ação define um H -módulo à esquerda, pois se $h, t \in H$,

$$\begin{aligned} h \cdot (t \cdot (v \otimes w)) &= h \cdot \left(\sum (t_{(1)} \cdot v) \otimes (t_{(2)} \cdot w) \right) \\ &= \sum (h_{(1)} \cdot (t_{(1)} \cdot v)) \otimes (h_{(2)} \cdot (t_{(2)} \cdot w)) \\ &= \sum (h_{(1)} t_{(1)} \cdot v) \otimes (h_{(2)} t_{(2)} \cdot w) \\ &= ht \cdot (v \otimes w) \end{aligned}$$

e

$$k 1_H \cdot (v \otimes w) = k((1_H \otimes v) \otimes (1_H \otimes w)) = k(v \otimes w)$$

para qualquer $k \in F$.

Definição 1.3.42 (Módulo de Hopf). *Seja H uma F -álgebra de Hopf. Um H -módulo de Hopf à direita é um F -espaço M tal que*

- (1) M é um H -módulo à direita.
- (2) M é um H -comódulo à direita, via $\rho : M \rightarrow M \otimes H$.
- (3) ρ é uma função de H -módulos à direita, onde $M \otimes H$ é um H -módulo à direita como na Definição 1.3.41 e H age em si mesmo com a multiplicação à direita.

Também podemos escrever o item (3) como

$$\rho(m \cdot h) = \rho(m) \cdot h \Rightarrow \sum (m \cdot h)_{(0)} \otimes (m \cdot h)_{(1)} = \sum (m_{(0)} \cdot h_{(1)}) \otimes (m_{(1)} h_{(2)}),$$

onde $m \in M$ e $h \in H$, lembrando que $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ e $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.

No geral, podemos substituir H em todas as menções a “ H -módulo” da definição anterior por uma subálgebra de Hopf H' de H . Desse modo, dizemos que M é um (H, H') -módulo de Hopf à direita. A categoria desses módulos é denotada por $\mathcal{M}_{H'}^H$.

Exemplo 1.3.43. *Para qualquer álgebra de Hopf H , $M = H$ é um H -módulo de Hopf usando $\rho = \Delta$.*

De fato, H é um H -módulo com sua própria multiplicação à direita e é um H -comódulo com sua comultiplicação à direita ($\rho = \Delta$). Além disso, para $h, t \in H$, temos que

$$\sum (th)_{(0)} \otimes (th)_{(1)} = \sum (th)_{(1)} \otimes (th)_{(2)} = \sum t_{(1)} h_{(1)} \otimes t_{(2)} h_{(2)} = \sum t_{(0)} h_{(1)} \otimes t_{(1)} h_{(2)},$$

satisfazendo a condição (3).

Exemplo 1.3.44. *Seja W um H -módulo à direita. Então $M = W \otimes H$ é um H -módulo de Hopf à direita usando $\rho = id \otimes \Delta$.*

É claro que M é um H -módulo à direita com a operação multiplicação de H à direita. Dos diagramas da coálgebra H obtemos que M é um H -comódulo à direita. Falta mostrar que $\rho((w \otimes t) \cdot h) = \rho(w \otimes t) \cdot h$, para todo $w \in W, t, h \in H$. Por um lado,

$$\rho((w \otimes t) \cdot h) = \sum \rho((w \cdot h_1) \otimes (th_2)) = \sum (w \cdot h_1) \otimes \Delta t \Delta h_2 = \sum (w \cdot h_1) \otimes t_1 h_2 \otimes t_2 h_3.$$

Por outro lado,

$$\rho(w \otimes t) \cdot h = \sum (w \otimes t_1 \otimes t_2) \cdot h = \sum ((w \otimes t_1) \cdot h_1) \otimes (t_2 h_2) = \sum (w \cdot h_1) \otimes t_1 h_2 \otimes t_2 h_3.$$

Um caso especial desse exemplo é o caso em que W é um H -módulo trivial, ou seja, $w \cdot h = \varepsilon(h)w$ para todo $w \in W$ e $h \in H$. Sendo $M = W \otimes H$, temos que

$$(w \otimes k) \cdot h = \sum (w \cdot h_{(1)}) \otimes kh_{(2)} = \sum \varepsilon(h_{(1)})w \otimes kh_{(2)} = w \otimes kh$$

para quaisquer $w \in W$ e $k, h \in H$. Com essa ação, M é chamado de *módulo trivial de Hopf*.

Teorema 1.3.45 (Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf). *Seja $M \in \mathcal{M}_H^H$. Então $M \cong M^{coH} \otimes H$ como H -módulos de Hopf à direita, onde $M^{coH} \otimes H$ é um módulo de Hopf trivial.*

Em particular, M é um H -módulo livre à direita com posto igual a $\dim_F M^{coH}$.

Demonstração: Já sabemos, pelo exemplo anterior, que $M^{coH} \otimes H$ é um H -módulo trivial de Hopf. Considere as funções $\alpha : M^{coH} \otimes H \rightarrow M$ e $\beta : M \rightarrow M \otimes H$ dadas por

$$\alpha(m' \otimes h) = m' \cdot h \quad \text{e} \quad \beta(m) = \sum m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)}) \otimes m_{(2)},$$

para $m' \in M^{coH}, h \in H, m \in M$. Vamos mostrar que $\alpha\beta = id_M$, a função identidade sobre M e $\beta\alpha = id_{M^{coH} \otimes H}$, a função identidade sobre $M^{coH} \otimes H$. Precisamos primeiro mostrar

que $\beta(M) \subseteq M^{coH} \otimes H$. Usando a notação sigma, a definição de counidade e as expressões 1.9 e 1.8, obtemos que

$$\begin{aligned}
 \rho\left(\sum m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)})\right) &= \sum \rho(m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)})) \\
 &= \sum (m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)}))_0 \otimes (m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)}))_{(1)} \\
 &= \sum ((m_{(0)})_{(0)} \cdot (Sm_{(1)})_{(1)}) \otimes ((m_{(0)})_{(1)} (Sm_{(1)})_{(2)}) \\
 &= \sum (m_{(0)} \cdot (Sm_{(3)})) \otimes m_{(1)} (Sm_{(2)}) \\
 &= \sum (m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)})) \otimes \varepsilon(m_{(1)}) 1_H \\
 &= \sum m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)}) \otimes 1_H.
 \end{aligned}$$

Assim, mostramos que $\sum m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)}) \in M^{coH}$. Logo, $\beta(M) \subseteq M^{coH} \otimes H$. Então, para $m \in M$,

$$\alpha\beta(m) = \sum ((m_{(0)} \cdot (Sm_{(1)})) \cdot m_{(2)}) = \sum m_{(0)} \cdot ((Sm_{(1)})m_{(2)}) = \sum m_{(0)} \cdot \varepsilon(m_{(1)}) = m,$$

usando a definição de módulos e comódulos. Além disso, para $m' \in M^{coH}$,

$$\rho(m' \cdot h) = \rho(m') \cdot h = (m' \otimes 1) \cdot h = \sum (m' \cdot h_{(1)}) \otimes h_{(2)}.$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
 \beta\alpha(m' \otimes h) &= \beta(m' \cdot h) \\
 &= \sum (m' \cdot h)_{(0)} \cdot (S(m' \cdot h)_{(1)}) \otimes (m' \cdot h)_{(2)} \\
 &= \sum (m' \cdot h_{(1)}) \cdot S(h_{(2)}) \otimes h_{(3)} \\
 &= \sum (m' \cdot h_{(1)} S(h_{(2)})) \otimes h_{(3)} \\
 &= \sum m' \cdot \varepsilon(h_{(1)}) 1_H \otimes h_{(2)} \\
 &= m' \otimes h,
 \end{aligned}$$

pois $\sum \varepsilon(h_{(1)}) = 1$. Portanto, encontramos $\alpha\beta = id_M$ e $\beta\alpha = id_{M^{coH} \otimes H}$ e, consequentemente, α é um isomorfismo entre $M^{coH} \otimes H$ e M . Falta mostrar que α é um isomorfismo de comódulos. De fato,

$$\begin{aligned}
 (\alpha \otimes id)(id \otimes \Delta)(m' \otimes h) &= \sum (\alpha \otimes id)(m' \otimes h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\
 &= \sum (m' \cdot h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = \rho(m' \cdot h) = \rho\alpha(m' \otimes h),
 \end{aligned}$$

para cada $m' \in M^{coH}$, $h \in H$. ■

Considere agora, uma álgebra de Hopf H de dimensão finita e $M = H^*$. Então, M se torna um H -módulo de Hopf usando uma ação e uma coação particulares. De fato, H^* é um H^* -módulo à esquerda usando a própria multiplicação à esquerda. Logo, a

Proposição 1.3.33 (2) nos diz que M é um H -comódulo com a coação definida lá, ou seja, se $\{g_1, \dots, g_n\}$ é uma base de H^* e $f \in H^*$, então existem $h_1, \dots, h_n \in H$ tais que, para qualquer $g \in H^*$, $gf = \sum_i g(h_i)g_i$. A função comódulo $\rho : H^* \rightarrow H^* \otimes H$ é dada por $\rho(f) = \sum_i g_i \otimes h_i$. Reciprocamente, se $\rho(f) = \sum f_0 \otimes f_1$, então $gf = \sum g(f_1)f_0$.

H^* é também um H -módulo à direita com ação dada por $(f \leftarrow h)(l) = f(l(Sh))$, para $f \in H^*$, $h, l \in H$. Usando a ação $\rightarrow$ definida no Exemplo 1.3.35, obtemos que

$$(f \leftarrow h)(l) = f(l(Sh)) = (Sh \rightarrow f)(l),$$

ou seja, $f \leftarrow h = Sh \rightarrow f$.

Lema 1.3.46. $M = H^*$ é um H -módulo de Hopf usando ρ e $\leftarrow$ definidas acima.

Demonstração: Primeiramente, temos que se $f, g \in M$ e $h, l \in H$, então

$$\begin{aligned} (h \rightarrow fg)(l) &= (fg)(lh) = \sum f(l_1 h_1)g(l_2 h_2) \\ &= \sum (h_1 \rightarrow f)(l_1)(h_2 \rightarrow g)(l_2) \\ &= \sum (h_1 \rightarrow f)(h_2 \rightarrow g)(l). \end{aligned}$$

Logo, $h \rightarrow fg = \sum (h_1 \rightarrow f)(h_2 \rightarrow g)$. Com isso, podemos mostrar que

$$g(f \leftarrow h) = \sum ((h_2 \rightarrow g)f) \leftarrow h_1. \quad (1.11)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \sum ((h_2 \rightarrow g)f) \leftarrow h_1 &= \sum Sh_1 \rightarrow ((h_2 \rightarrow g)f) \\ &= \sum (Sh_2 \rightarrow (h_3 \rightarrow g))(Sh_1 \rightarrow f) \\ &= \sum (\varepsilon(h)1_H \rightarrow g)(f \leftarrow h) \\ &= g(f \leftarrow h). \end{aligned}$$

Agora, para mostrar que M é um H -módulo de Hopf, falta mostrar que

$$\rho(f \leftarrow h) = \sum (f_0 \leftarrow h_1) \otimes (f_1 h_2) = \rho(f) \cdot h.$$

Usando a expressão (1.11) e os comentários anteriores ao lema, obtemos

$$\begin{aligned} g(f \leftarrow h) &= \sum ((h_2 \rightarrow g)f) \leftarrow h_1 \\ &= \sum ((h_2 \rightarrow g)(f_1))f_0 \leftarrow h_1 \\ &= \sum g(f_1 h_2)(f_0 \leftarrow h_1), \end{aligned}$$

para todo $g \in H^*$, o que implica que $\rho(f \leftarrow h) = \sum (f_0 \leftarrow h_1) \otimes f_1 h_2$. ■

1.4 Integrais e Semissimplicidade

Nesta seção, considere H sendo uma álgebra de Hopf. Vamos estudar a relação entre integrais, semissimplicidade e álgebras de Hopf.

1.4.1 Integrais

Definição 1.4.1. Um integral à esquerda de H é um elemento $t \in H$ tal que $ht = \varepsilon(h)t$, para todo $h \in H$. Similarmente, um integral à direita de H é um elemento $t' \in H$ tal que $t'h = \varepsilon(h)t'$, para todo $h \in H$.

Vamos usar a notação $\int_H^l$ para denotar o espaço dos integrais à esquerda de H e $\int_H^r$ para os integrais à direita. H é chamado *unimodular* se $\int_H^l = \int_H^r$.

Exemplo 1.4.2. Seja $H = FG$. Então, $t = \sum_{g \in G} g$ gera o espaço dos integrais à esquerda e à direita de H .

De fato, se $h \in G$, então

$$ht = \sum_{g \in G} hg = \sum_{g \in G} g = t = \varepsilon(h)t,$$

pois $\varepsilon(g) = 1$ para qualquer $g \in G$.

Logo, se $h = \sum_{g' \in G} \alpha_{g'} g' \in H$, então

$$ht = \sum_{g' \in G} \alpha_{g'} g' t = \sum_{g' \in G} \alpha_{g'} t = \varepsilon(h)t$$

e t é um integral à esquerda. Do mesmo modo, encontramos que t é um integral à direita.

Além disso, se t é um integral à esquerda, então $gt = \varepsilon(g)t = t$ para todo $g \in G$. Logo, escrevendo $t = \sum_{h \in G} \alpha_h h$, temos que

$$\sum_{h \in G} \alpha_h gh = \sum_{h \in G} \alpha_h h.$$

Note que, como g é qualquer e gh na soma assume a forma de todos os elementos de G em qualquer ordem, temos que a igualdade é válida se, e somente se, os α_h são constantes. Portanto, $\sum_{g \in G} g$ gera os espaços $\int_H^l$ e $\int_H^r$.

Exemplo 1.4.3. Seja $H = (FG)^*$. Então, p_1 gera os espaços dos integrais à esquerda e à direita.

Note que $\{p_g \mid g \in G\}$ é base de H , com $p_g(g') = \delta_{g,g'}$ para quaisquer $g, g' \in G$. Dessa forma, temos que

$$\varepsilon(p_g)(k) = u^*(p_g)(k) = p_g(k \cdot 1) = k\delta_{g,1}.$$

Logo, $\varepsilon(p_g) = \delta_{g,1}$ e, para $h = \sum_{g \in G} \alpha_g p_g \in H$,

$$\varepsilon(h)(k) = k \sum_{g \in G} \alpha_g p_g(1) = k \sum_{g \in G} \alpha_g \delta_{g,1}$$

e então, $\varepsilon(h) = \sum_{g \in G} \alpha_g \delta_{g,1}$.

Temos que p_1 é integral à esquerda, pois

$$hp_1 = \sum_{g \in G} \alpha_g p_g p_1 = \sum_{g \in G} \alpha_g \delta_{g,1} p_1 = \varepsilon(h)p_1.$$

Agora, se $t = \sum_{g \in G} \alpha_g p_g$ é integral à esquerda, então

$$p_1 t = \varepsilon(p_1)t = t \Rightarrow t = \sum_{g \in G} \alpha_g p_1 p_g = \alpha_1 p_1.$$

Portanto, $\int_H^l$ é gerado por p_1 . Analogamente, obtemos o mesmo para $\int_H^r$.

Exemplo 1.4.4. A F -álgebra de Hopf $H = H_4$ do Exemplo 1.3.28 não é unimodular. Os integrais à esquerda são gerados por $x + gx$ e os integrais à direita, por $x - gx$.

De fato, lembremos que

$$H_4 = F\langle 1, g, x, gx \mid g^2 = 1, x^2 = 0, xg = -gx \rangle$$

com $\varepsilon(g) = 1$ e $\varepsilon(x) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} g(x + gx) &= gx + x = \varepsilon(g)(x + gx) \\ x(x + gx) &= xgx = 0 = \varepsilon(x)(x + gx) \\ gx(x + gx) &= gxgx = 0 = \varepsilon(gx)(x + gx). \end{aligned}$$

Logo, $x + gx$ é integral à esquerda de H . Analogamente, temos que $(x - gx)x = (x - gx)gx = 0$ e

$$(x - gx)g = xg + xg^2 = x - gx = (x - gx)g,$$

donde $x - gx$ é integral à direita de H . Além disso, se $t = a + bg + cx + dgx$ é integral à esquerda de H com $a, b, c, d \in F$, temos que

$$gt = t \Rightarrow ag + b + cgx + dx = a + bg + cx + dgx$$

$$\Rightarrow a = b = 0 \text{ e } c = d.$$

Portanto, $t = k(x + gx)$ e $x + gx$ gera $\int_H^l$. Similarmente, encontramos que $x - gx$ gera $\int_H^r$.

Teorema 1.4.5 (Larson e Sweedler). *Seja H uma F -álgebra de Hopf de dimensão finita. Então,*

- (1) $\int_H^l$ e $\int_H^r$ são unidimensionais;
- (2) O antípoda S de H é bijetivo e $S\left(\int_H^l\right) = \int_H^r$;

Demonstração:

- (1) Sabemos pelo Lema 1.3.46 que $M = H^* \in \mathcal{M}_H^H$. Então, pelo Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, 1.3.45, temos que $M \cong M^{coH} \otimes H$ como H -módulos à direita. Como H e H^* têm dimensões iguais, obtemos que $\dim M^{coH} = 1$. Pela Proposição 1.3.38,

$$M^{coH} = M^M = \{f \in M \mid gf = \varepsilon_M(g)f, \text{ para todo } g \in M\} = \int_{H^*}^l.$$

Logo, $\int_{H^*}^l$ é unidimensional. O mesmo processo pode ser realizado substituindo H por H^* . Com isso, obtemos que $\int_H^l$ é unidimensional.

- (2) Tome $0 \neq f \in \int_{H^*}^l$ e $h \in \ker S$. Sendo $\alpha : M^{coH} \otimes H \rightarrow M$ o isomorfismo da demonstração do Teorema Fundamental dos Módulos de Hopf, dado por $\alpha(f' \otimes h) = f' \leftarrow h$, temos que $\alpha(f \otimes h) = Sh \rightarrow f = 0$. Como α é injetivo, obtemos que $f \otimes h = 0$, donde $h = 0$. Portanto, S é injetiva. E como H tem dimensão finita, concluímos que S é bijetiva.

Agora, se $t \in \int_H^l$, então $ht = \varepsilon(h)t$ para todo $h \in H$. Fixe h e tome o único $h' \in H$ tal que $Sh' = h$. Então, usando que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$, temos

$$(St)h = (St)(Sh') = S(h't) = S(\varepsilon(h')t) = \varepsilon(h')St = \varepsilon(Sh')St = \varepsilon(h)St,$$

ou seja, $St \in \int_H^r$ e, conseqüentemente, $S\left(\int_H^l\right) \subseteq \int_H^r$. Como são unidimensionais, temos a igualdade.

■

1.4.2 Teorema de Maschke

Pelo resultado clássico do Teorema de Maschke, temos que, para um grupo finito G , FG é semissimples se, e somente se, $|G|^{-1} \in F$.

Seja $t = \sum_{g \in G} g$, que é integral de FG à esquerda e à direita. Então, $\varepsilon(t) = |G|$ e, consequentemente, $|G|^{-1} \in F$ se, e somente se, $\varepsilon(t) \neq 0$ em F . Logo, o teorema a seguir é a versão do Teorema de Maschke para álgebras de Hopf.

Teorema 1.4.6 (Larson e Sweedler). *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Então, são equivalentes:*

(1) H é semissimples;

(2) $\varepsilon\left(\int_H^l\right) \neq 0$;

(3) $\varepsilon\left(\int_H^r\right) \neq 0$.

Demonstração: Sabemos que H é semissimples se, somente se, cada H -módulo à esquerda é completamente redutível.

(1) $\Rightarrow$ (2) e (1) $\Rightarrow$ (3) Suponha H semissimples. Como H é álgebra de Hopf, temos que $\ker \varepsilon$ é um ideal de H . Assim, podemos escrever $H = I \oplus \ker \varepsilon$ para algum ideal $I \neq 0$ de H , pois H é um H -módulo à esquerda usando sua multiplicação à esquerda. Vamos provar que $I \subseteq \int_H^l$.

Tome $0 \neq z \in I$ e $h \in H$. É claro que $h - \varepsilon(h)1_H \in \ker \varepsilon$. Além disso,

$$hz = (h - \varepsilon(h)1_H)z + \varepsilon(h)z = 0 + \varepsilon(h)z = \varepsilon(h)z.$$

Note que $(h - \varepsilon(h)1_H)z = 0$ porque pertence a $I \cap \ker \varepsilon$. Assim, $z \in \int_H^l$ e $\varepsilon(z) \neq 0$, pois $z \notin \ker \varepsilon$. Portanto, $\varepsilon\left(\int_H^l\right) \neq 0$. Do mesmo modo, obtemos que $\varepsilon\left(\int_H^r\right) \neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Assuma $\varepsilon\left(\int_H^l\right) \neq 0$. Podemos, então, escolher $t \in \int_H^l$ tal que $\varepsilon(t) = 1$. Sejam M um H -módulo à esquerda e N um H -submódulo de M . Precisamos mostrar que N possui um complemento em M , ou seja, que M é completamente redutível.

Seja $\pi : M \rightarrow N$ qualquer projeção F -linear e defina $\tilde{\pi} : M \rightarrow N$ por

$$\tilde{\pi}(m) = \sum t_1 \cdot \pi(St_2 \cdot m)$$

para $m \in M$. Então, $\tilde{\pi}$ é uma H -projeção de M sobre N . De fato,

$$\tilde{\pi}(n) = \sum t_1 \cdot \pi(St_2 \cdot n) = \sum t_1(St_2) \cdot n = \varepsilon(t)n = n \quad \forall n \in N,$$

pois $St_2 \cdot n \in N$ e π é identidade em N . Assim, $\tilde{\pi}$ também é projeção de M sobre N .

Note que, se $h \in H$, então

$$\Delta t \otimes h = \sum \Delta t \otimes \varepsilon(h_1)h_2 = \sum \Delta(\varepsilon(h_1)t) \otimes h_2 = \sum \Delta(h_1t) \otimes h_2 = \sum h_1t_1 \otimes h_2t_2 \otimes h_3.$$

Como $\Delta t \otimes h = \sum t_1 \otimes t_2 \otimes h$, concluímos que podemos trocar t_1 por h_1t_1 , h_2 por h_2t_2 e h por h_3 .

Assim, para $m \in M$ e $h \in H$,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(h \cdot m) &= \sum t_1 \cdot \pi(St_2 \cdot (h \cdot m)) \\ &= \sum h_1t_1 \cdot \pi(S(h_2t_2)h_3 \cdot m) \\ &= \sum h_1t_1 \cdot \pi((St_2)(Sh_2)h_3 \cdot m) \\ &= \sum h_1t_1 \cdot \pi(\varepsilon(h_2)St_2 \cdot m) \\ &= \sum ht_1 \cdot \pi(St_2 \cdot m) \\ &= h \cdot \left(\sum t_1 \cdot \pi(St_2 \cdot m) \right) \\ &= h \cdot \tilde{\pi}(m). \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{\pi}$ é uma função H -módulo. Então, $M = \ker \tilde{\pi} \oplus N$, ou seja, $\ker \tilde{\pi}$ é um H -complemento para N em M .

Portanto, H é semissimples. Procedimento análogo prova que (3) $\Rightarrow$ (1). (2) $\Leftrightarrow$ (3) é direto da bijetividade de S . $\blacksquare$

Seja $0 \neq t \in \int_H^l$, onde H é uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita.

Note que $th \in \int_H^l$ para todo $h \in H$ e o Teorema 1.4.5 nos diz que $\int_H^l$ é unidimensional. Logo, podemos escrever $th = \alpha(h)t$, com $\alpha(h) \in F$. Além disso, é claro que $\alpha \in \text{Alg}(H, F)$, pois se $h, l \in H$, então

$$th = \alpha(h)t \quad \text{e} \quad tl = \alpha(l)t \quad \Rightarrow \quad \alpha(hl)t = thl = \alpha(h)tl = \alpha(h)\alpha(l)t,$$

donde $\alpha(hl) = \alpha(h)\alpha(l)$. Assim, o Exemplo 1.3.16 nos diz que α é um elemento tipo grupo de H^* , ou seja, $\Delta\alpha = \alpha \otimes \alpha$.

Fazendo o mesmo processo para os integrais à direita, temos que se $0 \neq t' \in \int_H^r$, então $ht' \in \int_H^r$ para todo $h \in H$ e então $ht' = \alpha^{-1}(h)t'$. De fato, como $t' \in \int_H^r$, temos que

$$St' \in \int_H^l e$$

$$S(ht') = (St')(Sh) = \alpha(Sh)St' = S(\alpha(Sh)t'),$$

donde $ht' = \alpha(Sh)t'$, pois S é bijetivo. Definindo $\beta : H \rightarrow H$ por $\beta(h) = \alpha(Sh)$, temos que

$$(\alpha * \beta)(h) = \sum \alpha(h_1)\alpha(Sh_2) = \alpha(\varepsilon(h)1_H) = \varepsilon(h)1_H.$$

Do mesmo modo, temos que $\beta * \alpha = u\varepsilon$. Portanto, $\alpha^{-1} = \beta$.

Definição 1.4.7. O elemento $\alpha \in G(H^*)$ construído acima é chamado elemento tipo grupo distinto de H^* .

Note que H é unimodular se, e somente se, $\alpha = u\varepsilon$.

Corolário 1.4.8. Se H é uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita, então H é unimodular.

Demonstração: Pelo Teorema 1.4.6, podemos escolher $t \in \int_H^l$ tal que $\varepsilon(t) \neq 0$. Então, para $h \in H$, temos

$$\alpha(h)\varepsilon(t)t = \alpha(h)t^2 = tht = \varepsilon(h)t^2 = \varepsilon(h)\varepsilon(t)t.$$

Como $\varepsilon(t) \neq 0$, obtemos que $\alpha(h) = \varepsilon(h)1_H$ e, portanto, H é unimodular. ■

2 Conjectura de Amitsur

2.1 Introdução

Na década de 1980, o matemático israelense Shimshon A. Amitsur formulou uma conjectura sobre o comportamento assintótico das codimensões das identidades polinomiais ordinárias. Ele afirmou que o limite

$$\text{PIexp}(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

existe e é um inteiro positivo. Veremos que isso é equivalente a mostrar que, para todo n natural, existem $C_1, C_2 > 0$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n, \quad (2.1)$$

onde $d = \text{PIexp}(A)$ é chamado de PI-expoente de A .

Giambruno e Zaicev provaram a conjectura de Amitsur para álgebras associativas em 1999. Essa prova é encontrada na referência [6], Teorema 6.5.2. Vamos provar a conjectura de Amitsur para H -codimensões de álgebras associativas com uma ação de Hopf generalizada, sendo H uma álgebra de Hopf. Considerando $H = \{1\}$, obtemos uma prova diferente da de Giambruno e Zaicev da conjectura de Amitsur para as codimensões das identidades polinomiais ordinárias. Além disso, veremos como podemos usar o resultado geral para provar a conjectura de Amitsur para os casos das codimensões de álgebras graduadas por um grupo finito, das H -codimensões de álgebras H -módulo e das G -codimensões, onde G é um grupo finito que age por automorfismos e antiautomorfismos. Por isso, começamos o capítulo estudando cada um desses casos e suas inter-relações. O capítulo é baseado em [8].

Lembre que estamos trabalhando sempre com álgebras associativas e coálgebras associativas com unidade. Além disso, vimos que trabalhando com corpos de característica zero, trabalhar com identidades polinomiais se reduz a trabalhar com identidades polinomiais multilineares. Por isso, consideramos apenas corpos de característica zero neste capítulo.

2.1.1 G -codimensões

Vamos usar a notação exponencial para a ação de um grupo. Seja A uma álgebra sobre um corpo F . Assim, $\psi \in GL(A)$ é um *automorfismo* se $(ab)^\psi = a^\psi b^\psi$ para quaisquer $a, b \in A$ e é um *antiautomorfismo* se $(ab)^\psi = b^\psi a^\psi$ para quaisquer $a, b \in A$. O grupo dos automorfismos de A é denotado por $\text{Aut}(A)$ e o grupo dos automorfismos e antiautomorfismos, denotado por $\text{Aut}^*(A)$.

Observação 2.1.1. $\text{Aut}(A)$ é um subgrupo normal de $\text{Aut}^*(A)$ de índice menor ou igual a 2.

Note que, se ψ é um antiautomorfismo, então ψ^{-1} também é, pois, se $a, b \in A$, existem únicos $c, d \in A$ tais que $c^\psi = a$ e $d^\psi = b$. Assim,

$$(ab)^{\psi^{-1}} = (c^\psi d^\psi)^{\psi^{-1}} = ((dc)^\psi)^{\psi^{-1}} = dc = b^{\psi^{-1}} a^{\psi^{-1}}.$$

Então, se φ é automorfismo e ψ é antiautomorfismo,

$$(ab)^{\psi^{-1}\varphi\psi} = (b^{\psi^{-1}} a^{\psi^{-1}})^{\varphi\psi} = (b^{\psi^{-1}\varphi} a^{\psi^{-1}\varphi})^\psi = a^{\psi^{-1}\varphi\psi} b^{\psi^{-1}\varphi\psi}.$$

Logo, $\psi^{-1}\varphi\psi \in \text{Aut}(A)$ e, consequentemente, $\text{Aut}(A)$ é subgrupo normal de $\text{Aut}^*(A)$.

Agora, considere o grupo $\text{Aut}^*(A)/\text{Aut}(A)$. Sejam φ e ψ antiautomorfismos. Temos que

$$(ab)^{\varphi\psi^{-1}} = ((b)^\varphi(a)^\varphi)^{\psi^{-1}} = (a)^{\varphi\psi^{-1}}(b)^{\varphi\psi^{-1}},$$

ou seja, $\varphi\psi^{-1} \in \text{Aut}(A)$ e as classes de φ e ψ são iguais. Portanto, o índice de $\text{Aut}(A)$ sobre $\text{Aut}^*(A)$ é menor ou igual a 2.

Definição 2.1.2. Seja G um grupo com um subgrupo normal G_0 fixado de índice menor ou igual a 2. Dizemos que uma álgebra A é uma G -álgebra com G -ação ou uma G -álgebra se A é dotada de um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}^*(A)$ tal que $\varphi^{-1}(\text{Aut}(A)) = G_0$.

Seja G um grupo com um subgrupo normal G_0 fixado de índice menor ou igual a 2 e $X := \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Vamos denotar por $F\langle X|G \rangle$ a álgebra associativa livre sobre F com geradores livres x_j^g , $j \in \mathbb{N}$, $g \in G$, com $x_j := x_j^1$. Definamos

$$\begin{aligned} h \cdot (x_{i_1}^{g_1} x_{i_2}^{g_2} \dots x_{i_{n-1}}^{g_{n-1}} x_{i_n}^{g_n}) &:= x_{i_1}^{hg_1} x_{i_2}^{hg_2} \dots x_{i_{n-1}}^{hg_{n-1}} x_{i_n}^{hg_n}, \quad \text{para } h \in G_0, \\ h \cdot (x_{i_1}^{g_1} x_{i_2}^{g_2} \dots x_{i_{n-1}}^{g_{n-1}} x_{i_n}^{g_n}) &:= x_{i_n}^{hg_n} x_{i_{n-1}}^{hg_{n-1}} \dots x_{i_2}^{hg_2} x_{i_1}^{hg_1}, \quad \text{para } h \in G \setminus G_0. \end{aligned}$$

Assim, $F\langle X|G \rangle$ se torna uma G -álgebra livre com geradores x_j , $j \in \mathbb{N}$, pois é dotada do homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}^*(F\langle X|G \rangle)$ dado por $h \mapsto \varphi_h$, com φ_h sendo a ação definida acima. Dessa forma, temos $h \in G_0$ se, e somente se, $\varphi_h \in \text{Aut}(F\langle X|G \rangle)$, ou seja, $\varphi^{-1}(\text{Aut}(F\langle X|G \rangle)) = G_0$. Os elementos de $F\langle X|G \rangle$ como G -álgebra livre são chamados G -polinômios.

Além disso, se A é uma G -álgebra sobre F , um G -polinômio $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X|G \rangle$ é uma G -identidade de A se $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$, $i = 1, \dots, n$. Nesse caso, escrevemos $f \equiv 0$.

O conjunto $\text{Id}^G(A)$ de todas as G -identidades de A é um ideal de $F\langle X|G \rangle$ invariante sob a G -ação. Se $G = \{e\}$ é o grupo trivial, então temos o caso das identidades polinomiais ordinárias.

Exemplo 2.1.3. Seja $M_2(F)$ a álgebra das matrizes 2×2 . Considere $\psi \in \text{Aut}(M_2(F))$ definida pela fórmula

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\psi := \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Então, $[x + x^\psi, y + y^\psi] \in \text{Id}^G(M_2(F))$, onde $G = \langle \psi \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

De fato, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_2(F)$, então

$$\begin{aligned} A + A^\psi &= \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B + B^\psi = \begin{pmatrix} 2e & 0 \\ 0 & 2h \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (A + A^\psi)(B + B^\psi) &= \begin{pmatrix} 4ae & 0 \\ 0 & 4dh \end{pmatrix} = (B + B^\psi)(A + A^\psi). \end{aligned}$$

Portanto, $[A + A^\psi, B + B^\psi] = 0$ para quaisquer $A, B \in M_2(F)$ e então, $[x + x^\psi, y + y^\psi] \equiv 0$ em $M_2(F)$.

Exemplo 2.1.4. Considere $\psi \in \text{Aut}^*(M_2(F))$ definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\psi := \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Então $[x - x^\psi, y - y^\psi] \in \text{Id}^G(M_2(F))$ onde $G = \langle \psi \rangle \cong \mathbb{Z}_2$.

De fato, se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_2(F)$, então

$$\begin{aligned} A - A^\psi &= \begin{pmatrix} 0 & b - c \\ c - b & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B - B^\psi = \begin{pmatrix} 0 & f - g \\ g - f & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (A - A^\psi)(B - B^\psi) &= \begin{pmatrix} (b - c)(g - f) & 0 \\ 0 & (c - b)(f - g) \end{pmatrix} = (B - B^\psi)(A - A^\psi). \end{aligned}$$

Portanto, $[A - A^\psi, B - B^\psi] = 0$ para quaisquer $A, B \in M_2(F)$ e então, $[x - x^\psi, y - y^\psi] \equiv 0$ em $M_2(F)$.

Um dos objetivos desse capítulo é provar o análogo da conjectura de Amitsur para codimensões definidas a partir do conceito de G -identidades polinomiais. Agora que conhecemos o conceito de G -identidades polinomiais, podemos definir os G -polinômios multilineares e as G -codimensões.

Definição 2.1.5. Vamos denotar por P_n^G o espaço de todos os G –polinômios multilineares em $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ ou seja,

$$P_n^G = \langle x_{\sigma(1)}^{g_1} x_{\sigma(2)}^{g_2} \dots x_{\sigma(n)}^{g_n} \mid g_i \in G, \sigma \in S_n \rangle_F \subseteq F\langle X|G \rangle,$$

onde S_n é o n –ésimo grupo simétrico. Então a dimensão

$$c_n^G(A) := \dim \left(\frac{P_n^G}{P_n^G \cap \text{Id}^G(A)} \right)$$

é chamada de n –ésima codimensão das G –identidades polinomiais ou a n –ésima G –codimensão de A .

Observação 2.1.6. Note que, se $G = \{e\}$ é o grupo trivial, então a n –ésima G –codimensão de A é igual à n –ésima codimensão ordinária de A .

2.1.2 H –codimensões de Álgebras H –módulo

Definição 2.1.7. Seja H uma álgebra de Hopf. Uma álgebra A sobre um corpo F é uma álgebra H –módulo à esquerda ou uma álgebra com uma H –ação se

- (1) A é um H –módulo à esquerda via $h \otimes a \mapsto h \cdot a$;
- (2) $h \cdot (ab) = \sum (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$;
- (3) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A$;

para quaisquer $h \in H$, $a, b \in A$, onde ε é a counidade de H e Δ é a comultiplicação de H com $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.

Seja H uma álgebra de Hopf com uma base $\{h_\beta \mid \beta \in \Lambda\}$. Denotemos por $F\langle X|H \rangle$ a álgebra associativa livre sobre F gerada pelo conjunto $\{x_i^{h_\beta} \mid \beta \in \Lambda, i \in \mathbb{N}\}$, com $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, $x_j := x_j^1$, $1 \in H$.

Para $h \in H$, temos que existem $\{\alpha_\beta \mid \beta \in \Lambda\}$ tais que $h = \sum_{\beta \in \Lambda} \alpha_\beta h_\beta$, onde só um número finito de α_β são não nulos. Dessa forma, escrevemos

$$x_i^h := \sum_{\beta \in \Lambda} \alpha_\beta x_i^{h_\beta}.$$

A ação de H sobre $F\langle X|H \rangle$ é definida por

$$h \cdot \left(x_{i_1}^{h_{\beta_1}} x_{i_2}^{h_{\beta_2}} \dots x_{i_{n-1}}^{h_{\beta_{n-1}}} x_{i_n}^{h_{\beta_n}} \right) := \sum x_{i_1}^{h_{(1)}h_{\beta_1}} x_{i_2}^{h_{(2)}h_{\beta_2}} \dots x_{i_{n-1}}^{h_{(n-1)}h_{\beta_{n-1}}} x_{i_n}^{h_{(n)}h_{\beta_n}},$$

para $h \in H$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \Lambda$, lembrando que $\Delta_{n-1}(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes \dots \otimes h_{(n)}$, usando a notação sigma.

Pela construção da H -ação sobre $F\langle X|H \rangle$, temos que $F\langle X|H \rangle$ se torna uma álgebra H -módulo com geradores $x_j, j \in \mathbb{N}$. Os elementos de $F\langle X|H \rangle$ são chamados de H -polinômios.

Definição 2.1.8. *Sejam A e B álgebras H -módulo, onde H é uma álgebra e Hopf. Dizemos que um homomorfismo de álgebras $\psi : A \rightarrow B$ é um H -homomorfismo se é H -invariante, ou seja, $\psi(h \cdot a) = h \cdot \psi(a)$.*

Definição 2.1.9. *Seja A uma álgebra sobre F com uma H -ação. Um H -polinômio $f(x_1, \dots, x_n)$ é uma H -identidade polinomial de A se, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$, obtemos $f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Escrevemos, nesse caso, $f \equiv 0$.*

Pela Observação 1.1.3, temos que $f \in F\langle X \rangle$ é uma identidade polinomial ordinária de A se, e somente se, $\psi(f) = 0$ para todo homomorfismo $\psi : F\langle X \rangle \rightarrow A$. Adaptando esse resultado para os H -polinômios, obtemos que $f \in F\langle X|H \rangle$ é uma H -identidade se, e somente se, $\psi(f) = 0$ para todo H -homomorfismo $\psi : F\langle X|H \rangle \rightarrow A$.

Dessa forma, o conjunto $\text{Id}^H(A)$ de todas as H -identidades de A é um ideal de $F\langle X|H \rangle$ invariante sob a H -ação.

Exemplo 2.1.10. *Seja A uma álgebra com uma ação de um grupo G apenas por automorfismos. Temos que $H = FG$ é uma álgebra de Hopf com $\Delta g = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ e $Sg = g^{-1}$, para todo $g \in G$, como provado no Exemplo 1.3.26. Como $\Delta_n(g) = g \otimes g \otimes \dots \otimes g$, temos que a ação de grupo se torna uma H -ação sobre os H -polinômios quando a estendemos para todo FG e a definimos apenas por automorfismos. Assim, podemos identificar $F\langle X|G \rangle$ com $F\langle X|H \rangle$. Além disso, $\text{Id}^H(A) = \text{Id}^G(A)$.*

Exemplo 2.1.11. *Seja $M_2(F)$ a álgebra das matrizes 2×2 . Considere $e_0, e_1 \in \text{End}_F(M_2(F))$ definidas por*

$$e_0 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad e \quad e_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $H := Fe_0 \oplus Fe_1$ (soma direta de ideais) é uma álgebra de Hopf com counidade ε , onde $\varepsilon(e_0) := 1$ e $\varepsilon(e_1) := 0$, comultiplicação Δ dada por

$$\Delta(e_0) := e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1,$$

$$\Delta(e_1) := e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0$$

e antípoda $S := id$. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
 (id \otimes \Delta)\Delta e_0 &= e_0 \otimes \Delta e_0 + e_1 \otimes \Delta e_1 \\
 &= e_0 \otimes e_0 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_0 \\
 (\Delta \otimes id)\Delta e_0 &= \Delta e_0 \otimes e_0 + \Delta e_1 \otimes e_1 \\
 &= e_0 \otimes e_0 \otimes e_0 + e_1 \otimes e_1 \otimes e_0 + e_0 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_0 \otimes e_1.
 \end{aligned}$$

Logo, obtemos a igualdade $(id \otimes \Delta)\Delta(e_0) = (\Delta \otimes id)\Delta(e_0)$. Analogamente, encontramos que $(id \otimes \Delta)\Delta(e_1) = (\Delta \otimes id)\Delta(e_1)$. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon \otimes id)\Delta e_0 &= \varepsilon(e_0) \otimes e_0 + \varepsilon(e_1) \otimes e_1 = 1 \otimes e_0 \\
 (id \otimes \varepsilon)\Delta e_0 &= e_0 \otimes \varepsilon(e_0) + e_1 \otimes \varepsilon(e_1) = e_0 \otimes 1.
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos o resultado acima para e_1 . Assim, H é uma biálgebra. Note que a unidade 1_H de H é o elemento $e_0 + e_1$. Sendo $S = id$, temos que

$$\begin{aligned}
 (S * id)(e_0) &= e_0 e_0 + e_1 e_1 = e_0 + e_1 = \varepsilon(e_0)1_H \\
 (S * id)(e_1) &= e_0 e_1 + e_1 e_0 = 0 = \varepsilon(e_1)1_H.
 \end{aligned}$$

Portanto, H é uma álgebra de Hopf.

Um exemplo de H -identidade polinomial para $M_2(F)$ é o H -polinômio $x^{e_0}y^{e_0} - y^{e_0}x^{e_0}$, pois se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_2(F)$, então

$$A^{e_0}B^{e_0} = \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{pmatrix} = B^{e_0}A^{e_0}.$$

Introduzidos os conceitos básicos de álgebras H -módulo, onde H é uma álgebra de Hopf, falta apenas introduzir o conceito de H -codimensão.

Definição 2.1.12. Denotemos por P_n^H o espaço de todos os H -polinômios multilineares em $x_1, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja

$$P_n^H = \langle x_{\sigma(1)}^{h_1} x_{\sigma(2)}^{h_2} \dots x_{\sigma(n)}^{h_n} \mid h_i \in H, \sigma \in S_n \rangle_F \subseteq F\langle X \mid H \rangle.$$

Então, a dimensão

$$c_n^H(A) := \dim \left(\frac{P_n^H}{P_n^H \cap \text{Id}^H(A)} \right)$$

é chamada de n -ésima codimensão das H -identidades polinomiais ou a n -ésima H -codimensão de A .

2.1.3 Codimensões de Álgebras Graduadas por um Grupo Finito

Vamos continuar o raciocínio, agora para álgebras graduadas por um grupo finito. Queremos encontrar uma relação entre as codimensões de álgebras H -módulo, onde H é uma álgebra de Hopf, e as codimensões de álgebras graduadas por um grupo finito. Quando trabalhamos com um grupo finito G , temos que o dual da álgebra de grupo FG com F corpo é uma álgebra de Hopf, pois FG tem dimensão igual a $|G|$. É por isso que vamos trabalhar apenas com grupos finitos. A partir daí, conseguimos encontrar a relação desejada.

Definição 2.1.13. *Seja G um grupo e F um corpo. Denotemos por $F\langle X^{gr} \rangle$ a álgebra associativa livre G -graduada sobre F gerada pelo conjunto enumerável*

$$X^{gr} := \bigcup_{g \in G} X^{(g)},$$

com $X^{(g)} = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \dots\}$, ou seja, a álgebra de polinômios nas variáveis não comutativas de X^{gr} .

As indeterminadas de $X^{(g)}$ são chamadas *homogêneas de grau g* . O G -grau do monômio $x_{i_1}^{g_1} \dots x_{i_t}^{g_t} \in F\langle X^{gr} \rangle$ é dado por $g_1 g_2 \dots g_t$ e o *grau total* é definido como t .

Por fim, denotemos por $F\langle X^{gr} \rangle^{(g)}$ o subespaço da álgebra $F\langle X^{gr} \rangle$ gerado por todos os monômios que têm G -grau igual a g . Note que

$$F\langle X^{gr} \rangle^{(g)} F\langle X^{gr} \rangle^{(h)} \subseteq F\langle X^{gr} \rangle^{(gh)},$$

para quaisquer $g, h \in G$. Logo, obtemos que

$$F\langle X^{gr} \rangle = \bigoplus_{g \in G} F\langle X^{gr} \rangle^{(g)}$$

é uma G -graduação.

Seja $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, \dots, x_{i_t}^{(g_t)}) \in F\langle X^{gr} \rangle$. Dizemos que f é uma *identidade polinomial graduada* da álgebra G -graduada $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ e escrevemos $f \equiv 0$ se $f(a_{i_1}^{(g_1)}, \dots, a_{i_t}^{(g_t)}) = 0$ para quaisquer $a_{i_j}^{(g_j)} \in A^{(g_j)}$, $1 \leq j \leq t$.

O conjunto $\text{Id}^{gr}(A)$ das identidades polinomiais graduadas de A é um ideal graduado de $F\langle X^{gr} \rangle$. O caso das identidades polinomiais ordinárias está incluso para o caso trivial $G = \{e\}$.

Exemplo 2.1.14. *Sejam $G = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Então, $M_2(F) = M_2(F)^{(\bar{0})} \oplus M_2(F)^{(\bar{1})}$, onde*

$$M_2(F)^{(\bar{0})} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \quad e \quad M_2(F)^{(\bar{1})} = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainda, temos que $M_2(F)^{(\bar{0})} M_2(F)^{(\bar{1})} \subseteq M_2(F)^{(\bar{1})}$. Logo, $M_2(F)$ é uma álgebra G -graduada. Além disso, temos que $x^{(\bar{0})} y^{(\bar{0})} - y^{(\bar{0})} x^{(\bar{0})} \in \text{Id}^{gr}(M_2(F))$, pois estamos trabalhando apenas com matrizes diagonais e F é comutativo.

Do mesmo modo que para as codimensões ordinárias, G -codimensões e H -codimensões, podemos definir as codimensões graduadas.

Definição 2.1.15. Denotemos por P_n^{gr} o espaço de todos os polinômios graduados multilineares de grau total $n \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$P_n^{gr} = \langle x_{\sigma(1)}^{(g_1)} x_{\sigma(2)}^{(g_2)} \cdots x_{\sigma(n)}^{(g_n)} \mid g_i \in G, \sigma \in S_n \rangle_F \subseteq F\langle X^{gr} \rangle.$$

Então, a dimensão

$$c_n^{gr}(A) := \dim \left(\frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap \text{Id}^{gr}(A)} \right)$$

é chamada de n -ésima codimensão das identidades polinomiais graduadas ou a n -ésima codimensão graduada de A .

Podemos estabelecer uma relação entre as codimensões das álgebras G -graduadas e as H -codimensões de álgebras H -módulo. Para encontrar essa relação, vamos estudar o dual da álgebra de grupo FG .

Sejam G um grupo finito e $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ uma álgebra graduada sobre um corpo F . Então $H := (FG)^*$, o espaço dual de FG , é uma álgebra de Hopf. Pela Proposição 1.3.36, A é um FG -comódulo. A função comódulo $\rho : A \rightarrow A \otimes FG$ é definida por $\rho(a_g) := a_g \otimes g$, para $a_g \in A^{(g)}$.

Lembre que podemos tomar $\{p_g \mid g \in G\}$ base de H tal que $p_g(g') = \delta_{g,g'}$ e a comultiplicação Δ de H pode ser escrita como

$$\Delta p_g = \sum_{uv=g} p_u \otimes p_v.$$

Vamos mostrar que A é uma álgebra H -módulo pela ação $h \cdot a = \sum h(a_{(1)})a_{(0)}$, onde $h \in H$, $a \in A$, e $\rho(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$. Para isso, precisamos mostrar que

$$h \cdot (ab) = \sum h((ab)_{(1)})(ab)_{(0)} = \sum (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b).$$

Seja $x \in G$, $a \in A^{(g)}$ e $b \in A^{(g')}$. Sabemos que $\rho(a) = a \otimes g$, $\rho(b) = b \otimes g'$ e, como $A^{(g)}A^{(g')} \subseteq A^{(gg')}$, temos $\rho(ab) = ab \otimes gg'$. Pela definição da H -ação, obtemos

$$p_x \cdot (ab) = p_x(gg')ab = \sum_{uv=xx} p_u(g)p_v(g')ab = \sum_{uv=xx} (p_u(g)a)(p_v(g')b) = \sum_{uv=xx} (p_u \cdot a)(p_u \cdot b),$$

justamente o que desejávamos.

Assim, sabemos que se A é uma álgebra G -graduada, então A é uma álgebra $(FG)^*$ -módulo. Por outro lado, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.16. *Seja $H = (FG)^*$ com G finito. Toda álgebra H –módulo A tem uma G –graduação dada por $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, onde*

$$A^{(g)} = \{a \in A \mid h \cdot a = h(g)a \ \forall \ h \in H\}.$$

Em particular, temos que $F\langle X|H \rangle$ e $F\langle X^{gr} \rangle$ são ambas álgebras H –módulo e G –graduadas.

Demonstração: Observe que

$$a = \sum_{g \in G} p_g \cdot a$$

para todo $a \in A$, pois $\sum_{g \in G} p_g$ é a unidade em H . Além disso, para $h = \sum_{g' \in G} \alpha_{g'} p_{g'} \in H$, temos

$$h \cdot (p_g \cdot a) = \sum_{g' \in G} \alpha_{g'} (p'_{g'} p_g) \cdot a = \alpha_g p_g \cdot a = h(g)(p_g \cdot a)$$

e, consequentemente, $p_g \cdot a \in A^{(g)}$. Logo, $A = \sum_{g \in G} A^{(g)}$.

Agora, sejam $x \in G$, $a \in A^{(g)}$ e $b \in A^{(g')}$. Então, $h \cdot a = h(g)a$ e $h \cdot b = h(g')b$, para todo $h \in H$. Temos que

$$p_x \cdot (ab) = \sum_{uv=x} (p_u \cdot a)(p_v \cdot b) = \sum_{uv=x} (p_u(g)a)(p_v(g')b) = \sum_{uv=x} (p_u(g))(p_v(g'))ab = p_x(gg')ab.$$

Logo, $ab \in A^{(gg')}$ e, consequentemente, $A^{(g)}A^{(g')} \subseteq A^{(gg')}$.

Além disso, a soma dos $A^{(g)}$ é direta, pois se $a \in A^{(g)} \cap \sum_{\substack{h \in G \\ h \neq g}} A^{(h)}$, então podemos

escrever $a = \sum_{\substack{h \in G \\ h \neq g}} a_h$, onde $a_h \in A^{(h)}$. Então,

$$a = p_g(g)a = p_g \cdot a = \sum_{\substack{h \in G \\ h \neq g}} p_g \cdot a_h = \sum_{\substack{h \in G \\ h \neq g}} p_g(h)a = 0.$$

Portanto, a soma é direta e, consequentemente, $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ é uma G –graduação. ■

Com esse resultado, é natural pensar que se G é finito, então a $(FG)^*$ –codimensão de uma álgebra $(FG)^*$ –módulo é igual à codimensão graduada dessa mesma álgebra, que é G –graduada. Para provar essa afirmação, precisamos de um isomorfismo entre os espaços dos H –polinômios e dos polinômios graduados, que é definido na proposição a seguir.

Proposição 2.1.17. *Seja $H = (FG)^*$. Então o H -homomorfismo $\varphi : F\langle X|H \rangle \rightarrow F\langle X^{gr} \rangle$ definido por $\varphi(x_j) = \sum_{g \in G} x_j^{(g)}$ é isomorfismo.*

Demonstração: De fato, temos que $\varphi^{-1}(x_j^{(g)}) = x_j^{p_g}$, onde $\{p_g \mid g \in G\}$ tal que $p_g(g') = \delta_{g,g'}$ para quaisquer $g, g' \in G$, pois

$$\varphi^{-1}\varphi(x_j) = \sum_{g \in G} \varphi^{-1}(x_j^{(g)}) = \sum_{g \in G} x_j^{p_g} = x_j^{\sum_{g \in G} p_g} = x_j$$

e

$$\varphi\varphi^{-1}(x_j^{(g)}) = \varphi(x_j^{p_g}) = \sum_{h \in G} p_g x_j^{(h)} = \sum_{h \in G} p_g(h) x_j^{(g)} = x_j^{(g)}.$$

No último passo, usamos a ação de H -módulo $h \cdot a = h(a_1)a_0$ para $h \in H$ e $a \in F\langle X^{gr} \rangle$, que é G -álgebra graduada. ■

Lema 2.1.18. *Seja A uma álgebra G -graduada onde G é um grupo finito. Considere a H -ação sobre A dada por $h \cdot a = h(a_1)a_0$ para $h \in H, a \in A$, onde $H = (FG)^*$. Então, $\varphi(\text{Id}^H(A)) = \text{Id}^{gr}(A)$ e $c_n^H(A) = c_n^{gr}(A)$, onde φ é o H -homomorfismo definido na Proposição 2.1.17.*

Demonstração: Seja $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X|H \rangle$ uma H -identidade polinomial de A . Como φ é um H -homomorfismo, temos que

$$\varphi(f(x_1, \dots, x_n)) = f(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) = f\left(\sum_{g \in G} x_1^{(g)}, \dots, \sum_{g \in G} x_n^{(g)}\right).$$

Se $\varphi(f) \notin \text{Id}^{gr}(A)$, então para cada $g \in G$, existem $a_1^{(g)}, \dots, a_n^{(g)} \in A$ tais que

$$f\left(\sum_{g \in G} a_1^{(g)}, \dots, \sum_{g \in G} a_n^{(g)}\right) \neq 0,$$

contradizendo a hipótese de que f é uma H -identidade de A , pois $\sum_{g \in G} a_j^{(g)} \in A$ para todo $j = 1, \dots, n$. Portanto, $\varphi(\text{Id}^H(A)) \subseteq \text{Id}^{gr}(A)$.

Por outro lado, seja $f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, \dots, x_{i_n}^{(g_n)}) \in F\langle X^{gr} \rangle$ uma identidade polinomial graduada de A . Pela Proposição 2.1.17, podemos escrever

$$\varphi^{-1}(f(x_{i_1}^{(g_1)}, \dots, x_{i_n}^{(g_n)})) = f(\varphi^{-1}(x_{i_1}^{(g_1)}), \dots, \varphi^{-1}(x_{i_n}^{(g_n)})) = f(x_{i_1}^{p_{g_1}}, \dots, x_{i_n}^{p_{g_n}}).$$

Assim, se $\varphi^{-1}(f) \notin \text{Id}^H(A)$, então existem $a_{i_1}, \dots, a_{i_n} \in A$ tais que $f(a_{i_1}^{p_{g_1}}, \dots, a_{i_n}^{p_{g_n}}) \neq 0$. Mas isso contradiz a hipótese de que $f(x_{i_1}^{(g_1)}, \dots, x_{i_n}^{(g_n)}) \in F\langle X^{gr} \rangle$, pois $a_{i_k}^{p_{g_k}} \in A^{(g_k)}$ para todo $k = 1, \dots, n$. De fato,

$$a_{i_k} = \sum_{g \in G} a^{(g)} \Rightarrow p_{g_k} \cdot (a_{i_k}) = \sum_{g \in G} p_{g_k}(g) a^g = a^{g_k} \in A^{(g_k)}.$$

Portanto, obtemos que $\text{Id}^H(A) = \text{Id}^{gr}(A)$. Além disso, temos que $\varphi(P_n^H) \subseteq P_n^{gr}$ e se $g_1, \dots, g_n \in G$, então

$$\varphi^{-1}(x_{\sigma(1)}^{(g_1)} \dots x_{\sigma(n)}^{(g_n)}) = x_{\sigma(1)}^{p_{g_1}} \dots x_{\sigma(n)}^{p_{g_n}} \in P_n^H.$$

Logo, obtemos que $P_n^H \cong P_n^{gr}$ e $\text{Id}^H(A) \cong \text{Id}^{gr}(A)$. Portanto, $c_n^H(A) = c_n^{gr}(A)$. ■

2.1.4 Ação de Hopf Generalizada

Vimos no Lema 2.1.18 que trabalhando com as H -codimensões de uma álgebra H -módulo, onde H é uma álgebra de Hopf, englobamos o caso das codimensões das álgebras graduadas por um grupo finito. Além disso, o Exemplo 2.1.10 diz que com as H -codimensões, englobamos também o caso das G -codimensões, onde G age somente por automorfismos. Com o objetivo de englobar também o caso das G -codimensões quando G age por automorfismos e por antiautomorfismos, vamos definir a H -ação de Hopf generalizada.

Definição 2.1.19. *Seja H uma álgebra com unidade. Dizemos que uma álgebra A é uma álgebra com uma H -ação generalizada se A é dotada de um homomorfismo $H \rightarrow \text{End}_F(A)$ que define uma ação tal que, para cada $h \in H$,*

$$h \cdot (ab) = \sum_i ((h'_i \cdot a)(h''_i \cdot b) + (h'''_i \cdot b)(h''''_i \cdot a)), \quad (2.2)$$

para quaisquer $a, b \in A$, com $h'_i, h''_i, h'''_i, h''''_i \in H$ apropriados.

Observação 2.1.20. *Note que não precisamos que H seja uma álgebra de Hopf para definirmos uma H -ação generalizada, pois os elementos h'_i, h''_i, h'''_i e h''''_i não dependem da comultiplicação de H , logo não precisamos nem exigir que H seja uma coálgebra, ao contrário do que acontece na definição de álgebras H -módulo. Se H é uma álgebra de Hopf, chamamos a H -ação da expressão (2.2) de H -ação de Hopf generalizada.*

Sejam $\{h_\beta \mid \beta \in \Lambda\}$ uma base de H e, como na Seção 2.1.2, $F\langle X|H \rangle$ a álgebra associativa livre sobre F gerada pelo conjunto $\{x_i^{h_\beta} \mid \beta \in \Lambda, i \in \mathbb{N}\}$, onde $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ e $x_i = x_i^1$. Podemos escrever, para $h = \sum_{\beta \in \Lambda} \alpha_\beta h_\beta \in H$,

$$x_i^h := \sum_{\beta \in \Lambda} \alpha_\beta x_i^{h_\beta}$$

onde $\alpha_\beta \in F$ e apenas um número finito de α_β são não nulos. Chamamos os elementos de $F\langle X|H \rangle$ de H -polinômios, assim como definimos para as álgebras H -módulo.

Agora, seja A uma álgebra com uma H -ação generalizada. Como $F\langle X|H \rangle$ é uma álgebra livre gerada pelos elementos $x_i^{h_\beta}$, temos que qualquer função $\psi : X \rightarrow A$

possui um único homomorfismo $\bar{\psi} : F\langle X|H \rangle \rightarrow A$ que é extensão de ψ e, dessa forma, $\bar{\psi}(x_i^h) = h\bar{\psi}(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ e $h \in H$.

Adaptando a definição de H -identidade polinomial de álgebras H -módulo para álgebras com uma H -ação generalizada, dizemos que $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X|H \rangle$ é uma H -identidade polinomial de A se $\bar{\psi}(f) = 0$ para toda função $\psi : X \rightarrow A$, o que é equivalente a dizer que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$. Além disso, o conjunto $\text{Id}^H(A)$ das H -identidades de A é um ideal de $F\langle X|H \rangle$. Note que não estamos definindo nenhuma H -ação sobre $F\langle X|H \rangle$.

Temos que o espaço das H -identidades polinomiais multilineares em $x_1, \dots, x_n$ é dado por

$$P_n^H = \langle x_{\sigma(1)}^{h_1} x_{\sigma(2)}^{h_2} \dots x_{\sigma(n)}^{h_n} \mid h_i \in H, \sigma \in S_n \rangle_F \subseteq F\langle X|H \rangle.$$

A dimensão

$$c_n^H(A) := \dim \left(\frac{P_n^H}{P_n^H \cap \text{Id}^H(A)} \right)$$

é chamada n -ésima codimensão das H -identidades polinomiais de A ou simplesmente n -ésima H -codimensão de A .

Já o caracter $\chi_n^H(A)$ do FS_n -módulo $P_n^H / (P_n^H \cap \text{Id}^H(A))$ é chamado de n -ésimo cocaracter das H -identidades polinomiais de A e podemos escrevê-lo como

$$\chi_n^H(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^H \chi_\lambda$$

soma dos caracteres irredutíveis não equivalentes, onde m_λ^H é a multiplicidade do caracter χ_λ .

Exemplo 2.1.21. *Seja A uma álgebra com uma ação de um grupo G finito, onde G age por automorfismos e antiautomorfismos, ou seja, existem um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}^*(A)$ e um subgrupo normal G_0 de G tais que $\varphi^{-1}(\text{Aut}(A)) = G_0$. Assim, podemos considerar o homomorfismo $\bar{\varphi} : FG \rightarrow \text{End}_F(A)$ definido por φ nos elementos de G . Se $h = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in FG$, que é uma álgebra de Hopf, então para quaisquer $a, b \in A$,*

$$h \cdot (ab) = \sum_{g \in G} \alpha_g g \cdot (ab) = \sum_{g, g' \in G} (\alpha_g (g \cdot a)(g \cdot b) + \alpha_{g'} (g' \cdot b)(g' \cdot a)),$$

onde g e g' são elementos de G levados por φ em automorfismos e antiautomorfismos, respectivamente. Dessa forma, temos que A é uma álgebra com uma H -ação de Hopf generalizada, com $H = FG$ e podemos identificar $F\langle X|H \rangle$ com $F\langle X|G \rangle$. Portanto, $\text{Id}^H(A) = \text{Id}^G(A)$ e $c_n^H(A) = c_n^G(A)$. Dessa forma, obtemos que trabalhando com codimensões de álgebras com uma H -ação de Hopf generalizada, englobamos as codimensões de álgebras com uma G -ação, onde G é um grupo finito que age por automorfismos e antiautomorfismos.

Agora, vamos encontrar algumas limitações superiores para $c_n^H(A)$.

Lema 2.1.22. *Seja A uma álgebra de dimensão finita com uma H -ação generalizada sobre um corpo qualquer F , onde H é uma álgebra com unidade. Então, $c_n^H(A) \leq (\dim A)^{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Vamos considerar os H -polinômios multilineares de P_n^H como funções $A \rightarrow A$ n -lineares. Assim, temos a função natural $\psi : P_n^H \rightarrow \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$. Observe que o núcleo de ψ é dado por $P_n^H \cap \text{Id}^H(A)$, fato que segue direto da definição de $\text{Id}^H(A)$. Dessa forma, obtemos que $P_n^H / (P_n^H \cap \text{Id}^H(A))$ é isomorfo a um subespaço de $\text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$. Portanto,

$$c_n^H(A) = \dim \left(\frac{P_n^H}{P_n^H \cap \text{Id}^H(A)} \right) \leq \dim \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A) = (\dim A)^{n+1}.$$

■

Corolário 2.1.23. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo qualquer F com uma G -ação por automorfismos e antiautomorfismos, onde G é um grupo finito qualquer. Então, $c_n^G(A) \leq (\dim A)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Resultado direto do Exemplo 2.1.21 e do Lema 2.1.22. ■

Corolário 2.1.24. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo qualquer F graduada por um grupo finito G . Então, $c_n^{gr}(A) \leq (\dim A)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Do Lema 2.1.18, temos que $c_n^H(A) = c_n^{gr}(A)$. Portanto, o Lema 2.1.22 nos dá o resultado desejado. ■

Lema 2.1.25. *Sejam A uma álgebra com uma H -ação generalizada sobre um corpo qualquer F e H uma álgebra com unidade e de dimensão finita. Então,*

$$c_n(A) \leq c_n^H(A) \leq (\dim H)^n c_n(A)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Novamente, considere os H -polinômios de P_n^H como funções n -lineares de A em A . Sabemos que $P_n = P_n^{\{e\}} \subseteq P_n^H$. Logo, para a função natural $\psi : P_n^H \rightarrow \text{Hom}_F(A^{\otimes n}; A)$, temos que $\psi(P_n) \subseteq \psi(P_n^H)$. Pelo Teorema dos Isomorfismos, temos que

$$\frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)} \cong \psi(P_n) \subseteq \psi(P_n^H) \cong \frac{P_n^H}{P_n^H \cap \text{Id}^H(A)}.$$

Portanto, $c_n(A) \leq c_n^H(A)$. Para a segunda desigualdade, tome $f_1, \dots, f_t \in P_n$ tais que suas imagens formam uma base para $P_n / (P_n \cap \text{Id}(A))$. Então, para cada monômio

$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$, com $\sigma \in S_n$, existem únicos $\alpha_{i,\sigma} \in F$ tais que

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)} - \sum_{i=1}^t \alpha_{i,\sigma} f_i(x_1, \dots, x_n) \in \text{Id}(A). \quad (2.3)$$

Agora, seja $\{h_1, \dots, h_m\}$ base de H . Então, $\{x_{\sigma(1)}^{h_{i_1}}x_{\sigma(2)}^{h_{i_2}} \dots x_{\sigma(n)}^{h_{i_n}} \mid \sigma \in S_n, 1 \leq i_j \leq m\}$ é uma base para P_n^H . Ainda, a expressão (2.3) e a definição de identidade polinomial nos indicam que

$$x_{\sigma(1)}^{h_{i_1}}x_{\sigma(2)}^{h_{i_2}} \dots x_{\sigma(n)}^{h_{i_n}} - \sum_{i=1}^t \alpha_{i,\sigma} f_i(x_1^{h_{i_1}}, \dots, x_n^{h_{i_n}}) \in \text{Id}^H(A).$$

Logo, todo H -polinômio em P_n^H pode ser escrito módulo $\text{Id}^H(A)$ como combinação linear dos H -polinômios $f_i(x_1^{h_{i_1}}, \dots, x_n^{h_{i_n}})$. Observe que, para cada i , temos m^n polinômios $f_i(x_1^{h_{i_1}}, \dots, x_n^{h_{i_n}})$. Portanto, a dimensão de $P_n^H / (P_n^H \cap \text{Id}^H(A))$ é menor ou igual a $m^n t$, ou seja,

$$c_n^H(A) \leq m^n t = (\dim H)^n c_n(A).$$

■

Corolário 2.1.26. *Seja A uma álgebra graduada por um grupo finito G . Então,*

$$c_n(A) \leq c_n^{gr}(A) \leq |G|^n c_n(A).$$

Demonstração: De fato, observe que a ação de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra H -módulo é uma ação de Hopf generalizada. Logo, qualquer resultado válido para as álgebras com uma ação generalizada vale também para as álgebras H -módulo. Dessa forma, obtemos o resultado desejado usando o Lema 2.1.18 e o Lema 2.1.25, pois $\dim FG = |G|$. ■

Nas próximas seções, vamos mostrar as limitações inferior e superior da expressão (2.1) para as H -codimensões, das quais derivamos a prova da conjectura de Amitsur para esse caso.

2.2 Limitação Superior

Nas Seções 2.2 e 2.3, vamos provar a conjectura de Amitsur para álgebras com uma ação de Hopf generalizada sob algumas condições. Vamos considerar A como uma álgebra não nilpotente de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado. Além disso, temos uma H -ação de Hopf generalizada sobre A , onde H é uma álgebra de Hopf de dimensão finita agindo sobre A de tal forma que o radical de Jacobson $J := J(A)$ é H -invariante e que podemos escrever $A = B \oplus J$ como soma direta de

H -submódulos, sendo $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q$ uma soma direta de ideais H -invariantes e B_i álgebras semissimples H -simples (simples como H -módulo).

Como A tem dimensão finita, temos que A é artiniano. Dessa forma, que o radical de Jacobson J de A é nilpotente, ou seja, existe $p \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $J^p = 0$. Para as Seções 2.2 e 2.3, vamos fixar essas condições.

Nesta seção, vamos encontrar uma limitação superior para a n -ésima H -codimensão nas condições acima.

Definição 2.2.1. *Seja $d = d(A)$ o número definido por*

$$d := \max(\dim(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus \cdots \oplus B_{i_s}) \mid B_{i_1} J B_{i_2} J \cdots J B_{i_s} \neq 0, 1 \leq i_k \leq q, 1 \leq k \leq s; 0 \leq s \leq q).$$

Vamos mostrar que $d = d(A)$ é o PI-exponente de A . Para encontrar as limitações inferior e superior para as H -codimensões, vamos trabalhar com tabelas de Young e partições de naturais. Por isso, vamos provar alguns resultados importantes que relacionam as partições com as multiplicidades m_λ^H e com polinômios.

Lema 2.2.2. *Se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ e $\sum_{i=d+1}^r \lambda_i \geq p$ ou $\lambda_{\dim A+1} > 0$, então $m_\lambda^H = 0$.*

Demonstração: O Teorema 1.2.42 pode ser provado para H -polinômios de forma análoga a que vimos, logo é suficiente mostrar que $e_{T_\lambda} f \in \text{Id}^H(A)$ para quaisquer $f \in P_n^H$ e T_λ tabela de Young relativa a λ . Como $FS_n e_{T_\lambda} \cong FS_n e_{T_\lambda}^*$, onde

$$e_{T_\lambda}^* = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (\text{sgn } \tau) \tau \sigma,$$

temos que é suficiente mostrar essa afirmação para $e_{T_\lambda}^*$. Usando a notação $a_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma$ e

$$b_{T_\lambda} = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (\text{sgn } \tau) \tau, \text{ temos } e_{T_\lambda}^* = b_{T_\lambda} a_{T_\lambda}.$$

Considere uma base de A que é a união de bases de J e de $B_1, \dots, B_q$. Como estamos usando polinômios multilineares, só precisamos provar que $e_{T_\lambda}^* f$ é identidade para os elementos da base.

Note que, como b_{T_λ} alterna as variáveis de cada coluna de T_λ , $e_{T_\lambda}^* f$ só não se anula para uma substituição de elementos da base se esses elementos substituídos nas variáveis de cada coluna são todos distintos. De fato, se substituirmos o mesmo elemento da base nas variáveis x_i e x_j , a substituição toda se anula, pois a transposição $(i \ j) \in C_{T_\lambda}$. Assim, devemos substituir elementos distintos para cada coluna. Se $\lambda_{\dim A+1} > 0$, não temos elementos de base distintos suficientes para preencher a primeira coluna. Portanto, $e_{T_\lambda}^* \in \text{Id}^H(A)$.

Agora considere o caso $\sum_{i=d+1}^r \lambda_i \geq p$ e fixe uma substituição de elementos da base para as variáveis $x_1, \dots, x_n$. Suponha que $e_{T_\lambda}^* f$ não se anula com essa substituição. Então, temos um produto de elementos da base que não se anula. Logo, a definição de d nos diz que podemos escolher $1 \leq i_1, \dots, i_s \leq q$, $0 \leq s \leq q$ tais que todos esses elementos de base estão em $B_{i_1} \oplus \dots \oplus B_{i_s} \oplus J$ e

$$\dim(B_{i_1} \oplus \dots \oplus B_{i_s}) \leq d.$$

Pelo mesmo argumento utilizado no primeiro caso, temos que não podemos substituir mais de d desses elementos de base de $B_{i_1} \oplus \dots \oplus B_{i_s}$ em cada coluna, pois caso contrário, eles seriam linearmente dependentes e $e_{T_\lambda}^* f$ se anularia com essa substituição. Dessa forma, o número desses elementos de base que devem estar em J nessa substituição deve ser pelo menos $\sum_{i=d+1}^r \lambda_i$, que é o número de caixas abaixo da linha d . Como $\sum_{i=d+1}^r \lambda_i \geq p$ e $J^p = 0$, temos que $e_{T_\lambda}^* f$ se anula em A , o que é uma contradição. Portanto, não existe uma substituição de elementos da base de A que não anule $e_{T_\lambda}^* f$, ou seja, $e_{T_\lambda}^* f \in \text{Id}(A)$. ■

Lema 2.2.3. *Se $\lambda \in H(k, l)$ é uma partição de um inteiro positivo n , então o coeficiente $k_{\lambda \setminus \mu}^\nu$ encontrado no Teorema 1.2.35 é limitado por um polinômio em n .*

Demonstração: Lembre que o coeficiente de Littlewood-Richardson $k_{\lambda \setminus \mu}^\nu$ representa o número de tabelas semi-standard de forma $\lambda \setminus \mu$ e conteúdo ν que apresentam permutações reticuladas quando lemos as linhas da direita para a esquerda e de cima para baixo, onde uma permutação reticulada é uma permutação em que em cada parte inicial, qualquer número i aparece no mínimo com a mesma frequência que o número $i + 1$.

Vamos usar indução sobre $k + l$. Considere $\lambda \in H(1, 0)$. Então, $\lambda = (n)$. Se $k_{\lambda \setminus \mu}^\nu \neq 0$, devemos ter $\mu \leq \lambda$, donde $\lambda \setminus \mu = (m)$, para algum $m < n$ e, pela Regra de Littlewood-Richardson, Teorema 1.2.35, a tabela $T_{(m)}$ deve ter conteúdo ν , com números não decrescentes da esquerda pra direita e formando uma permutação reticulada da direita pra esquerda. Isso só é possível se $\nu \in H(1, 0)$, donde $k_{\lambda \setminus \mu}^\nu = 1$. Agora, suponha que $\lambda \in H(0, 1)$. Dessa forma, temos que $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$ e se $k_{\lambda \setminus \mu}^\nu \neq 0$, então temos $\mu \in H(0, 1)$ com $\mu \vdash m < n$. Logo, $D_{\lambda \setminus \mu}$ é um diagrama de uma coluna só, que deve ser preenchida com números crescentes de cima para baixo para gerar uma tabela semi-standard. Como a opção de conteúdo de $\lambda \setminus \mu$ é única, obtemos que $k_{\lambda \setminus \mu}^\nu = 1$. Portanto, se $\lambda \in H(1, 0)$ ou $\lambda \in H(0, 1)$, então obtemos pela Regra de Littlewood-Richardson que $k_{\lambda \setminus \mu}^\nu \leq 1$. Isso prova o caso $k + l = 1$.

Agora, suponha que $k + l \geq 1$ e, sem perda de generalidade, que $k \geq 1$. Observe que se $\mu \in H(k, l)$, podemos tomar $\mu' \in H(k - 1, l)$ e $\mu_1 > a > 0$ tais que $\mu \setminus a$ e μ' sejam partições do mesmo inteiro positivo. Dessa forma, temos pela Regra de Littlewood-Richardson que $k_{\mu \setminus (a)}^{\mu'} \neq 0$.

Para $\lambda \in H(k, l)$, temos pela Regra de Littlewood-Richardson, Teorema 1.2.35, e pelas propriedades do produto interno de caracteres vistas na Proposição 1.2.10, que

$$k_{\lambda \setminus \mu}^\nu = (\chi_\lambda, \chi_\mu \hat{\otimes} \chi_\nu).$$

Além disso,

$$M_{(a)} \hat{\otimes} M_{\mu'} \hat{\otimes} M_\nu \cong \sum_{\gamma} k_{\gamma \setminus (a)}^{\mu'} M_\gamma \hat{\otimes} M_\nu.$$

Como μ' é uma das partições γ da soma e $k_{\mu \setminus (a)}^{\mu'} \neq 0$, obtemos que

$$(\chi_\lambda, \chi_{(a)} \hat{\otimes} \chi_{\mu'} \hat{\otimes} \chi_\nu) \geq (\chi_\lambda, \chi_\mu \hat{\otimes} \chi_\nu).$$

Assim,

$$\begin{aligned} k_{\lambda \setminus \mu}^\nu &= (\chi_\lambda, \chi_\mu \hat{\otimes} \chi_\nu) \\ &\leq (\chi_\lambda, \chi_{(a)} \hat{\otimes} \chi_{\mu'} \hat{\otimes} \chi_\nu). \end{aligned}$$

Note que pela Regra de Littlewood-Richardson,

$$\begin{aligned} M_{(a)} \hat{\otimes} M_{\mu'} \hat{\otimes} M_\nu &\cong M_{(a)} \hat{\otimes} \left(\sum_{\lambda'} k_{\lambda' \setminus \mu'}^\nu M_{\lambda'} \right) \\ &\cong \sum_{\gamma} \sum_{\lambda'} k_{\lambda' \setminus \mu'}^\nu k_{\gamma \setminus (a)}^{\lambda'} M_\gamma. \end{aligned}$$

Portanto,

$$k_{\lambda \setminus \mu}^\nu \leq (\chi_\lambda, \chi_{(a)} \hat{\otimes} \chi_{\mu'} \hat{\otimes} \chi_\nu) = \sum_{\lambda'} k_{\lambda \setminus \lambda'}^{(a)} k_{\lambda' \setminus \mu'}^\nu.$$

Pela Regra de Young, Teorema 1.2.32, temos que $k_{\lambda \setminus \lambda'}^{(a)} \leq 1$ e, por indução, temos que $k_{\lambda' \setminus \mu'}^\nu$ é limitado por um polinômio em $|\lambda'| \leq |\lambda|$, o que prova o lema. ■

Com os lemas 2.2.2 e 2.2.3 provados, já temos o suficiente para provar a primeira parte da conjectura de Amitsur, isto é, a segunda desigualdade da expressão (2.1), a qual representa uma limitação superior para as H -codimensões.

Teorema 2.2.4. *Se $d = d(A) > 0$, então existem constantes $C_2 > 0, s_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$c_n^H(A) \leq C_2 n^{s_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $d = 0$, então A é nilpotente.

Demonstração: Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ uma partição com $m_\lambda^H \neq 0$ e considere o gancho infinito $H(d, 0) = \cup_{n \geq 1} \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash n \mid \lambda_{d+1} = 0\}$. Pelo Lema 2.2.2, temos que $\sum_{i=d+1}^r \lambda_i < p$. Vamos denotar por λ_t as partições com $t = \sum_{i=d+1}^r \lambda_i < p$, ou seja, com t caixas abaixo da linha d de D_{λ_t} . Dessa forma, podemos escrever

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ m_\lambda \neq 0}} d_\lambda = \sum_{t=0}^{p-1} \left(\sum_{\substack{\lambda_t \vdash n \\ m_{\lambda_t} \neq 0}} d_{\lambda_t} \right), \quad (2.4)$$

onde d_λ é a dimensão de M_λ , o FS_n -submódulo irredutível correspondente a λ .

Para cada λ_t , considere a partição $\lambda'_t \vdash n - t$ com diagrama $D_{\lambda'_t}$ sendo D_{λ_t} da linha d para cima. Note que $\lambda'_t \in H(d, 0)$ e $\lambda'_t \leq \lambda_t$. Logo, temos pelo Lema 1.2.38 que $d_{\lambda_t} \leq n^t d_{\lambda'_t}$. Além disso, para cada partição λ'_t de $n - t$ em $H(d, 0)$, existe uma quantidade limitada de partições λ_t tais que $\lambda'_t \leq \lambda_t$, pois $t < p$ sempre. Seja k um natural positivo que limita essas quantidades.

Com isso, o Lema 1.2.39 nos diz que existem $C_t, s_t > 0$ constantes tais que

$$\sum_{\substack{\lambda'_t \vdash n-t \\ \lambda'_t \in H(d,0)}} d_{\lambda'_t} \leq C_t (n-t)^{s_t} d^{n-t} \quad (2.5)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usando as expressões (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ m_\lambda \neq 0}} d_\lambda &\leq \sum_{t=0}^{p-1} k \left(\sum_{\substack{\lambda_t \vdash n \\ m_{\lambda_t} \neq 0}} n^t d_{\lambda'_t} \right) \\ &\leq \sum_{t=0}^{p-1} k n^{p-1} \left(\sum_{\substack{\lambda'_t \vdash n-t \\ \lambda'_t \in H(d,0)}} d_{\lambda'_t} \right) \\ &\leq k n^{p-1} \sum_{t=0}^{p-1} C_t (n-t)^{s_t} d^{n-t} \\ &\leq n^{p-1} \sum_{t=0}^{p-1} C_t n^{s_t} d^n \\ &\leq n^{p-1} C_3 n^{p-1} d^n = C_3 n^{s_3} d^n \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ m_\lambda^H \neq 0}} d_\lambda \leq C_3 n^{s_3} d^n. \quad (2.6)$$

Por outro lado, o Lema 2.2.3 implica que existem $C_4 > 0$ e $s_4 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^H \leq C_4 n^{s_4} \quad (2.7)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois as multiplicidades m_λ^H são coeficientes de Littlewood-Richardson. Dessa forma, usando as desigualdades (2.6) e (2.7), obtemos que

$$c_n^H(A) \leq \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^H d_\lambda \leq C_3 n^{s_3} d^n C_4 n^{s_4} = C_2 n^{s_2} d^n$$

com $C_2 = C_3 C_4$ e $s_2 = s_3 + s_4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por fim, suponhamos $d = 0$. Note que $B_i J \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, q$. Logo, pela definição de $d = d(A)$, temos que $d \geq \dim B_i$ para todo i . Assim, $d = 0$ implica em $B = 0$ e $A = J$. Portanto, A é nilpotente. ■

2.3 Limitação Inferior

A demonstração da segunda parte da conjectura de Amitsur, isto é, a primeira desigualdade da expressão (2.1), depende da existência de uma partição de n que satisfaça algumas condições específicas para cada n suficientemente grande. A existência dessa partição, por sua vez, é garantida encontrando um H -polinômio em P_n^H que não é uma H -identidade de A e é alternado em certos conjuntos de variáveis. Os próximos lemas têm como objetivo garantir a existência desse polinômio.

Vamos começar trabalhando com as álgebras semissimples H -simples para depois aplicarmos os resultados para as álgebras B_i da decomposição de A dada no início da Seção 2.2. Seja B_0 uma álgebra semissimples H -simples sobre um corpo F algebricamente fechado com uma ação de Hopf generalizada de uma álgebra H de dimensão finita.

Considere as representações regulares à esquerda e à direita de B_0 , denotadas por $\varphi, \psi : B_0 \rightarrow \text{End}_F(B_0)$, ou seja, $\varphi(a)b = ab$ e $\psi(a)b = ba$, para $a, b \in B_0$. Denote por ρ a ação de Hopf generalizada, com $\rho : H \rightarrow \text{End}_F(B_0)$. Temos que

$$\begin{aligned} (\rho(h)\varphi(a))(b) &= h \cdot (ab) \\ &= \sum_i ((h'_i \cdot a)(h''_i \cdot b) + (h'''_i \cdot b)(h''''_i \cdot a)) \\ &= \sum_i (\varphi(h'_i \cdot a)(h''_i \cdot b) + \psi(h'''_i \cdot a)(h''''_i \cdot b)) \\ &= \sum_i (\varphi(h'_i \cdot a)\rho(h''_i) + \psi(h'''_i \cdot a)\rho(h''''_i))(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho(h)\psi(a))(b) &= h \cdot (ba) \\ &= \sum_i ((h'_i \cdot b)(h''_i \cdot a) + (h'''_i \cdot a)(h''''_i \cdot b)) \\ &= \sum_i (\psi(h''_i \cdot a)(h'_i \cdot b) + \varphi(h'''_i \cdot a)(h''''_i \cdot b)) \\ &= \sum_i (\psi(h''_i \cdot a)\rho(h'_i) + \varphi(h'''_i \cdot a)\rho(h''''_i))(b) \end{aligned}$$

e

$$\varphi(a)\psi(b)(c) = \varphi(a)(cb) = acb = \psi(b)(ac) = \psi(b)\varphi(a)(c)$$

para $a, b, c \in B_0$.

Portanto,

$$\rho(h)\varphi(a) = \sum_i (\varphi(h'_i \cdot a)\rho(h''_i) + \psi(h'''_i \cdot a)\rho(h''''_i)) \quad (2.8)$$

$$\rho(h)\psi(a) = \sum_i (\psi(h''_i \cdot a)\rho(h'_i) + \varphi(h'''_i \cdot a)\rho(h''''_i)) \quad (2.9)$$

$$\varphi(a)\psi(b) = \psi(b)\varphi(a). \quad (2.10)$$

Lema 2.3.1. *Seja B_0 uma álgebra semissimples H -simples sobre um corpo F algebricamente fechado com uma ação de Hopf generalizada de uma álgebra H de dimensão finita. A forma bilinear $\text{tr}(\varphi(\cdot)\varphi(\cdot))$ é não degenerada sobre B_0 .*

Demonstração: Como B_0 é semissimples, temos que

$$B_0 \cong M_{k_1}(F) \oplus \cdots \oplus M_{k_s}(F)$$

com $k_i \in \mathbb{N}$, sendo $M_{k_i}(F)$ a álgebra das matrizes $k_i \times k_i$.

Considere as bases de $M_{k_i}(F)$ dadas pelos elementos $e_{\alpha\beta}^{(i)}$, as matrizes elementares. Assim, $\text{tr}(\varphi(e_{\alpha\beta}^{(i)})) \neq 0$ se, e somente se, $\alpha = \beta$. Dessa maneira, se b é um elemento da base de $M_{k_i}(F)$, então

$$\text{tr}(\varphi(e_{\alpha\beta}^{(i)})\varphi(b)) \neq 0 \Leftrightarrow \text{tr}(\varphi(e_{\alpha\beta}^{(i)}b)) \neq 0 \Leftrightarrow b = e_{\beta\alpha}^{(i)}.$$

Assim, o único elemento $a \in B_0$ tal que $\text{tr}(\varphi(a)\varphi(b)) = 0$ para todo $b \in B_0$ é o elemento nulo. Portanto, a forma bilinear $\text{tr}(\varphi(\cdot)\varphi(\cdot))$ é não degenerada. ■

Lema 2.3.2. *Seja B_0 uma álgebra semissimples H -simples sobre um corpo F algebricamente fechado com uma ação de Hopf generalizada de uma álgebra H de dimensão finita. Seja $\{a_1, \dots, a_l\}$ uma base de B_0 . Então, para algum $T \in \mathbb{N}$, existe um polinômio*

$$f = f(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z) \in P_{2l+T+1}^H$$

alternado nos conjuntos de variáveis $\{x_1, \dots, x_l\}$ e $\{y_1, \dots, y_l\}$ e que satisfaça a seguinte propriedade: existem $z'_1, \dots, z'_T \in B_0$ tais que $f(a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, z'_1, \dots, z'_T, z') = z'$ para qualquer $z' \in B_0$.

Demonstração: Temos que B_0 pode ser visto como um H -módulo fiel simples. Assim, H é um anel primitivo e, pelo Teorema da Densidade, para todo n natural, $v_1, \dots, v_n \in \text{End}_F(B_0)$ linearmente independentes sobre F e $w_1, \dots, w_n \in \text{End}_F(B_0)$, existe $h \in H$ tal que $w_i = v_i\rho(h)$.

Dessa forma, temos que $\text{End}_F(B_0) \cong M_l(F)$ é gerado pelos operadores de $\rho(H)$, $\varphi(B_0)$ e $\psi(B_0)$. Pelas equações (2.8), (2.9) e (2.10), temos que quando compomos endomorfismos do tipo $\varphi(a)$ e $\psi(b)$ com $\rho(h)$, sendo $a, b \in B_0$ e $h \in H$, sempre podemos reescrever a composição colocando $\rho(h')$ à direita, para h' apropriado. Logo, temos que

$$\text{End}_F(B_0) = \langle \varphi(a)\psi(b)\rho(h) \mid a, b \in B_0, h \in H \rangle_F. \quad (2.11)$$

Considere o polinômio

$$f_l(x_1, \dots, x_{l^2}; y_1, \dots, y_{l^2}) = \sum_{\sigma, \tau \in S_{l^2}} (\text{sign}(\sigma\tau)) x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} y_{\tau(2)} y_{\tau(3)} y_{\tau(4)} \cdots \\ x_{\sigma(l^2-2l+2)} \cdots x_{\sigma(l^2)} x_{\tau(l^2-2l+2)} \cdots y_{\tau(l^2)}.$$

conhecido como polinômio de Regev, que é alternado nos conjuntos de variáveis $\{x_1, \dots, x_{l^2}\}$ e $\{y_1, \dots, y_{l^2}\}$. Temos que f_l é um polinômio central para $M_l(F)$, ou seja, $f_l(b_1, \dots, b_{l^2}, c_1, \dots, c_{l^2})$ está no centro de $M_l(F)$ para quaisquer $b_1, \dots, b_{l^2}, c_1, \dots, c_{l^2} \in B_0$ e não é uma identidade polinomial para $M_l(F)$. A prova de que o polinômio de Regev é um polinômio central é encontrada em [17], Teorema 5.7.4.

Como B_0 é semissimples, temos que se $a \in B_0$ e $ab = 0$ para todo $b \in B_0$, então $a = 0$. Portanto, $\ker \varphi = 0$ e, conseqüentemente, φ é um monomorfismo. Dessa forma, usando (2.11), podemos construir uma base para $\text{End}_F(B_0)$ dada por

$$\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_l), \varphi(a_{i_1})\psi(a_{k_1})\rho(h_1), \dots, \varphi(a_{i_s})\psi(a_{k_s})\rho(h_s)$$

com $s = l^2 - l$ e $i_t, k_t \in \{1, \dots, l\}, h_t \in H$ apropriados. Considere a função $\tilde{f}_l$ construída substituindo x_i e y_i em f_l por $\varphi(x_i)$ e $\varphi(y_i)$, respectivamente, para $1 \leq i \leq l$, e x_{l+j} e y_{l+j} por $\varphi(z_j)\psi(u_j)\rho(h_j)$ e $\varphi(v_j)\psi(w_j)\rho(h_j)$, respectivamente, para $1 \leq j \leq s$. Substituindo $z_t = v_t = a_{i_t}$, $u_t = w_t = a_{k_t}$ para $1 \leq t \leq s$ e $x_i = y_i = a_i$ para $1 \leq i \leq l$ em $\tilde{f}_l$, obtemos uma substituição de elementos de $M_l(F)$ em f_l e, por isso, essa substituição resulta em um elemento do centro de $M_l(F)$, ou seja, é um operador escalar da forma (μid_{B_0}) , com $0 \neq \mu \in F$.

Agora, vamos considerar uma nova variável z e reescrever todos termos $\varphi(\dots)$ e $\psi(\dots)$ de $\tilde{f}_l \cdot z$ usando a definição das representações regulares, e mover todos os termos $\rho(h_i)$ para a direita usando as igualdades (2.8), (2.9) e (2.10). Reescrita dessa maneira, a função $f := \mu^{-1} \tilde{f} \cdot z$ se torna um polinômio em P_n^H para algum $n \in \mathbb{N}$, que é alternado nos conjuntos de variáveis $\{x_1, \dots, x_l\}$ e $\{y_1, \dots, y_l\}$. Fazendo $T = 4s$ e renomeando u_i, v_i e w_i como z_j com $s+1 \leq j \leq T$, obtemos o polinômio desejado, pois usando a substituição descrita anteriormente, temos que

$$f(a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, a_{i_1}, \dots, a_{i_s}, a_{k_1}, \dots, a_{k_s}, a_{i_1}, \dots, a_{i_s}, a_{k_1}, \dots, a_{k_s}, z') = \mu^{-1} \mu z' = z'$$

para todo $z' \in B_0$. ■

Assim, encontramos um H -polinômio alternado que ainda não é o que buscamos. Vamos expandir essa ideia, usando a definição a seguir.

Definição 2.3.3. *Sejam $k, l, n \in \mathbb{N}$ tais que $kl \leq n$. O subespaço de P_n^H denotado por $Q_{l,k,n}^H$ é o subespaço gerado por todos os polinômios alternados nos k conjuntos de variáveis $\{x_1^i, \dots, x_l^i\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, com $1 \leq i \leq k$.*

Teorema 2.3.4. *Sejam B_0 uma álgebra semissimples H -simples sobre um corpo algebricamente fechado F dotada de uma ação de Hopf generalizada de uma álgebra H de dimensão finita e $\{a_i\}_{i=1}^l$ uma base para B_0 . Então, existe T um inteiro não negativo e $z'_1, \dots, z'_T \in B_0$ tais que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um polinômio*

$$f = f(x_1^1, \dots, x_l^1, \dots, x_1^{2k}, \dots, x_l^{2k}, z_1, \dots, z_T, z) \in Q_{l,2k,2kl+T+1}^H$$

tal que $f(a_1, \dots, a_l, \dots, a_1, \dots, a_l, z'_1, \dots, z'_T, z') = z'$ para todo $z' \in B_0$.

Demonstração: Pelo Lema 2.3.2, podemos tomar $z'_1, \dots, z'_T \in B_0$ e um polinômio $f_1 = f_1(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z) \in P_{2l+T+1}^H$ alternado nos conjuntos de variáveis $\{x_1, \dots, x_l\}$ e $\{y_1, \dots, y_l\}$ tais que

$$f_1(a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, z'_1, \dots, z'_T, z') = z'$$

para todo $z' \in B_0$. Note que $f_1 \in Q_{l,2,2l+T+1}^H$ satisfaz as condições do teorema para $k = 1$. Então, podemos supor $k > 1$.

Adicionando duas variáveis u_1 e v_1 , definimos

$$f_1^{(1)}(u_1, v_1, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, z) := \sum_{i=1}^l f_1(x_1, \dots, u_1 v_1 x_i, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z),$$

que continua sendo alternado nos conjuntos de variáveis $\{x_1, \dots, x_l\}$ e $\{y_1, \dots, y_l\}$. Além disso, tomando $x'_1, \dots, x'_l$ que formam uma base ortogonal para B_0 , obtemos

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(u'_1, v'_1, x'_1, \dots, x'_l, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_T, z') \\ = \text{tr}(\varphi(u'_1)\varphi(v'_1))f_1(x'_1, \dots, x'_l, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_T, z') \end{aligned}$$

para quaisquer $u'_1, v'_1, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_l, z' \in B_0$. Adicionando as variáveis $u_2, \dots, u_j, v_2, \dots, v_j$, podemos definir para $2 \leq j \leq l$,

$$\begin{aligned} f_1^{(j)}(u_1, \dots, u_j, v_1, \dots, v_j, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z) \\ := \sum_{i=1}^l f_1^{(j-1)}(u_1, \dots, u_{j-1}, v_1, \dots, v_{j-1}, x_1, \dots, u_j v_j x_i, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z). \end{aligned}$$

Observe que, para $u'_2, v'_2 \in B_0$,

$$f_1^{(2)}(u'_1, u'_2, v'_1, v'_2, x'_1, \dots, x'_l, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_T, z')$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^l f_1^{(1)}(u_1, v_1, x_1, \dots, u_2 v_2 x_i, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z) \\
&= \sum_{i=1}^l \text{tr}(\varphi(u'_1) \varphi(v'_1)) f_1(x'_1, \dots, u_2 v_2 x'_i, \dots, x'_l, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_T, z') \\
&= \text{tr}(\varphi(u'_1) \varphi(v'_1)) \text{tr}(\varphi(u_2) \varphi(v_2)) f_1(x'_1, \dots, x'_l, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_T, z').
\end{aligned}$$

Generalizando, temos

$$\begin{aligned}
&f_1^{(j)}(u'_1, \dots, u'_j, v'_1, \dots, v'_j, x'_1, \dots, x'_l, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_T, z') \\
&= \text{tr}(\varphi(u'_1) \varphi(v'_1)) \text{tr}(\varphi(u'_2) \varphi(v'_2)) \cdots \text{tr}(\varphi(u'_j) \varphi(v'_j)) f_1(x'_1, \dots, x'_l, y'_1, \dots, y'_l, z'_1, \dots, z'_T, z')
\end{aligned}$$

para $u'_1, \dots, u'_j, v'_1, \dots, v'_j \in B_0$.

Agora, defina

$$\begin{aligned}
&f_2(u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_l, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z) \\
&:= \frac{1}{l! \det(\text{tr}(\varphi(a_i) \varphi(a_j)))_{i,j=1}^l} \sum_{\sigma, \tau \in S_l} \text{sign}(\sigma \tau) f_1^{(l)}(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(l)}, \\
&\quad v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(l)}, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z),
\end{aligned}$$

que está bem definida, pois pelo Lema 2.3.1, $\text{tr}(\varphi(\cdot) \varphi(\cdot))$ é não degenerada, donde

$$\det(\text{tr}(\varphi(a_i) \varphi(a_j)))_{i,j=1}^l \neq 0.$$

Por construção, temos que f_2 é multilinear, além de alternado nos conjuntos de variáveis $\{u_1, \dots, u_l\}$, $\{v_1, \dots, v_l\}$, $\{x_1, \dots, x_l\}$ e $\{y_1, \dots, y_l\}$. Logo, $f_2 \in Q_{l,4,4l+T+1}^H$. Para mostrar que f_2 é o polinômio desejado para $k = 2$, vamos provar que

$$f_2(a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, z'_1, \dots, z'_T, z') = z'$$

para todo $z' \in B_0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
&f_2(a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, z'_1, \dots, z'_T, z') \\
&= \frac{1}{l! \det(\text{tr}(\varphi(a_i) \varphi(a_j)))_{i,j=1}^l} \sum_{\sigma, \tau \in S_l} \text{sign}(\sigma \tau) f_1^{(l)}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(l)}, a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(l)}, \\
&\quad a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, z'_1, \dots, z'_T, z') \\
&= \frac{1}{l! \det(\text{tr}(\varphi(a_i) \varphi(a_j)))_{i,j=1}^l} \sum_{\sigma, \tau \in S_l} \text{sign}(\sigma \tau) \text{tr}(\varphi(a_{\sigma(1)}) \varphi(a_{\tau(1)})) \cdots \text{tr}(\varphi(a_{\sigma(l)}) \varphi(a_{\tau(l)})) \\
&\quad \cdot f_1(a_1, \dots, a_l, a_1, \dots, a_l, z'_1, \dots, z'_T, z') \\
&= z',
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma, \tau \in S_l} \text{sign}(\sigma\tau) \text{tr}(\varphi(a_{\sigma(1)})\varphi(a_{\tau(1)})) \dots \text{tr}(\varphi(a_{\sigma(l)})\varphi(a_{\tau(l)})) \\
&= \sum_{\sigma, \tau' \in S_l} \text{sign}(\tau') \text{tr}(\varphi(a_1)\varphi(a_{\tau'(1)})) \dots \text{tr}(\varphi(a_l)\varphi(a_{\tau'(l)})) \\
&= l! \det(\text{tr}(\varphi(a_i)\varphi(a_j)))_{i,j=1}^l,
\end{aligned}$$

onde $\tau' = \tau\sigma^{-1}$, em cada fator da soma.

Note que o polinômio

$$\begin{aligned}
& f_2(u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_l, x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, z_1, \dots, z_T, z) \\
&= f_2(u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_l, w_1, \dots, w_{T'}, z),
\end{aligned}$$

onde $T' = 2l + T$, também satisfaz as condições do Lema 2.3.2 e é alternado em algumas das variáveis $w_1, \dots, w_{T'}$. Dessa forma, podemos aplicar o procedimento descrito anteriormente para f_2 em vez de f_1 , assim obtendo um polinômio f_3 que, por construção, também é alternado nos mesmos subconjuntos de variáveis de $\{w_1, \dots, w_{T'}\}$ que f_2 , ou seja, $f_3 \in Q_{l,6l+T+1}^H$. Analogamente, encontramos f_4 usando f_3 , f_5 usando f_4 e assim sucessivamente. Portanto, obtemos o polinômio $f := f_k \in Q_{l,2k,2k+T+1}^H$ desejado aplicando o procedimento para f_{k-1} . ■

Agora, vamos aplicar o Teorema 2.3.4 para cada B_i da decomposição de A para encontrar o H -polinômio alternado que desejamos.

Lema 2.3.5. *Se $d \neq 0$, então existe um número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existem subconjuntos disjuntos $X_1, \dots, X_{2k} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, $k = [(n - n_0)/(2d)]$, $|X_1| = \dots = |X_{2k}| = d$ e um polinômio $f \in P_n^H \setminus \text{Id}^H(A)$ alternado nas variáveis de cada conjunto X_j .*

Demonstração: Seja $d_t := \dim(B_{i_t})$ e $\{a_1^{(t)}, \dots, a_{d_t}^{(t)}\}$ base de B_{i_t} para $1 \leq t \leq s$. Aplicando o Teorema 2.3.4 para cada B_{i_t} , temos que existe um polinômio

$$f_t = f_t(x_1^{(t,1)}, \dots, x_{d_t}^{(t,1)}, x_1^{(t,2k)}, \dots, x_{d_t}^{(t,2k)}, z_1, \dots, z_{m_t}^{(t)}, z_t) \in Q_{d_t, 2kd_t + m_t + 1}^H$$

alternado nos conjuntos disjuntos de variáveis $X_l^{(t)} = \{x_1^{(t,l)}, \dots, x_{d_t}^{(t,l)}\}$ para $1 \leq l \leq 2k$. Além disso, existem $z_1^{(t)}, \dots, z_{m_t}^{(t)} \in B_{i_t}$ tais que

$$f_t(a_1^{(t)}, \dots, a_{d_t}^{(t)}, \dots, a_1^{(t)}, \dots, a_{d_t}^{(t)}, z_1^{(t)}, \dots, z_{m_t}^{(t)}, z_t') = z_t'$$

para todo $z_t' \in B_{i_t}$.

$$\text{Considere } n_0 = 2s - 1 + \sum_{i=1}^s m_i, \quad k = \left\lceil \frac{n - n_0}{2d} \right\rceil, \quad \tilde{k} = \left\lceil \frac{n - 2kd - n_0 - m_1}{2d_1} + 1 \right\rceil$$

e

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &:= f_1(x_1^{(1,1)}, \dots, x_{d_1}^{(1,1)}, \dots, x_1^{(1,2k)}, \dots, x_{d_1}^{(1,2k)}, z_1^{(1)}, \dots, z_{m_1}^{(1)}, \\ &\quad \tilde{f}_1(y_1^{(1)}, \dots, y_{d_1}^{(1)}, \dots, y_1^{(2\tilde{k})}, \dots, y_{d_1}^{(2\tilde{k})}, u_1, \dots, u_{m_1}, z_1)) \\ &\quad \cdot \prod_{t=2}^s (v_{t-1} f_t(x_1^{(t,1)}, \dots, x_{d_t}^{(t,1)}, \dots, x_1^{(t,2k)}, \dots, x_{d_t}^{(t,2k)}, z_1^{(t)}, \dots, z_{m_t}^{(t)}, z_t)), \end{aligned}$$

onde $\tilde{f}_1$ é um polinômio obtido pelo Teorema 2.3.4 para B_{i_1} .

Como $B_{i_1} J B_{i_2} J \cdots J B_{i_s} \neq 0$, podemos tomar $b_t \in B_{i_t}$ com $t = 1, \dots, s$ e $j_1, \dots, j_{s-1} \in J$ tais que $b_1 j_1 b_2 j_2 \cdots j_{s-1} b_s \neq 0$. Seja $b \in A$ o valor resultante da substituição $x_\beta^{(t,\alpha)} = a_\beta^{(t)}$, $z_\beta^{(t)} = z_\beta'^{(t)}$, $v_t = j_t$, $z_t = b_t$, $y_\beta^{(\alpha)} = z_\beta'^{(1)}$ e $u_\beta = z_\beta'^{(1)}$ em $\hat{f}_0$. Vamos denotar essa substituição por Ξ . Temos também do Teorema 2.3.4, que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(a_1^{(1)}, \dots, a_{d_1}^{(1)}, \dots, a_1^{(1)}, \dots, a_{d_1}^{(1)}, z_1'^{(1)}, \dots, z_{m_1}^{(1)}, b_1) &= b_1 \\ j_{t-1} f_t(a_1^{(t)}, \dots, a_{d_t}^{(t)}, \dots, a_1^{(t)}, \dots, a_{d_t}^{(t)}, z_1^{(t)}, \dots, z_{m_t}^{(t)}, b_t) &= j_{t-1} b_t. \end{aligned}$$

Logo, fazendo a substituição Ξ em $\hat{f}_0$, obtemos

$$\begin{aligned} b &= f_1(a_1^{(1)}, \dots, a_{d_1}^{(1)}, \dots, a_1^{(1)}, \dots, a_{d_1}^{(1)}, z_1'^{(1)}, \dots, z_{m_1}^{(1)}, b_1) \cdot \prod_{t=2}^s j_{t-1} b_t \\ &= b_1 j_1 b_2 \cdots j_{s-1} b_s \neq 0. \end{aligned}$$

Agora, considere $X_l = \bigcup_{t=1}^s X_l^{(t)}$ e sejam Alt_l o operador de alternância sobre o conjunto X_l e $\hat{f} = \text{Alt}_1 \text{Alt}_2 \cdots \text{Alt}_{2k} \hat{f}_0$. Assim, Alt_l age somente nas variáveis $x_1^{(1,l)}, \dots, x_{d_1}^{(1,l)}, \dots, x_1^{(s,l)}, \dots, x_{d_s}^{(s,l)}$. Aqui consideramos $\text{Alt}_l = \sum_{\sigma \in S_d} (\text{sgn } \sigma) \sigma$. Note que se $\sigma \in S_d$ leva uma variável $x_\beta^{(t,l)}$ de $X_l^{(t)}$ para $X_l^{(t')}$, então $b_{t'}$ é anulado, pois $B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_s}$ é soma direta de H -ideais, donde

$$a_1^{(t')} a_2^{(t')} \cdots a_\beta^{(t')} \cdots a_{d_{t'}}^{(t')} \in B_{i_t} \cap B_{i_{t'}} = 0.$$

Dessa forma, é suficiente considerar apenas as permutações de S_d que agem somente dentro de cada $X_l^{(t)}$. Existem $d_1! d_2! \cdots d_s!$ dessas permutações em S_d . Então, se $\sigma \in S_d$ é uma permutação desse tipo, podemos escrever

$$\sigma \hat{f}_0 = (\text{sgn } \sigma) \hat{f}_0,$$

pois cada f_t é alternado em $X_l^{(t)}$. Assim, temos que a substituição Ξ em $\hat{f}$ resulta em

$$d_1! d_2! \cdots d_s! b \neq 0.$$

Como $\tilde{f}_1$ é um polinômio multilinear que é combinação de monômios multilineares, temos que existe um monômio multilinear W dessa combinação tal que

$$\begin{aligned} &\text{Alt}_1 \text{Alt}_2 \cdots \text{Alt}_{2k} f_1(x_1^{(1,1)}, \dots, x_{d_1}^{(1,1)}, \dots, x_1^{(1,2k)}, \dots, x_{d_1}^{(1,2k)}, z_1^{(1)}, \dots, z_{m_1}^{(1)}, W) \\ &\quad \cdot \prod_{t=2}^s (v_{t-1} f_t(x_1^{(t,1)}, \dots, x_{d_t}^{(t,1)}, \dots, x_1^{(t,2k)}, \dots, x_{d_t}^{(t,2k)}, z_1^{(t)}, \dots, z_{m_t}^{(t)}, z_t)) \end{aligned}$$

não se anula com a substituição Ξ . Fixemos esse W . Note que o grau de $\hat{f}$ é dado pelo número de variáveis das quais $\hat{f}$ depende. Logo,

$$\begin{aligned} \deg \hat{f} &= 2k \left(\sum_{t=1}^s d_t \right) + \sum_{t=1}^s m_t + s + s - 1 + 2\tilde{k}d_1 + m_1 \\ &= 2kd + n_0 + 2\tilde{k}d_1 + m_1 \\ &= 2kd + n - 2kd - n_0 - m_1 + 2d_1 + m_1 + n_0 \\ &= n + 2d_1 > n. \end{aligned}$$

Além disso, $\deg \tilde{f}_1 = 2\tilde{k}d_1 + m_1 + 1 = n - 2kd - n_0 + 2d_1 + 1$. Seja $W = w_1 w_2 \cdots w_{2\tilde{k}d_1 + m_1 + 1}$ com w_i sendo variáveis do conjunto $\{y_1^{(1)}, \dots, y_{d_1}^{(1)}, \dots, y_1^{(2\tilde{k})}, \dots, y_{d_1}^{(2\tilde{k})}, u_1, \dots, u_{m_1}, z_1\}$. A substituição Ξ para essas variáveis é $w'_1, \dots, w'_{2\tilde{k}d_1 + m_1 + 1}$. Seja

$$\begin{aligned} f &:= \text{Alt}_1 \cdots \text{Alt}_{2k} f_1(x_1^{(1,1)}, \dots, x_{d_1}^{(1,1)}, \dots, x_1^{(1,2k)}, \dots, x_{d_1}^{(1,2k)}, z_1^{(1)}, \dots, z_{m_1}^{(1)}, w_1 \cdots w_{n-2kd-n_0} z) \\ &\quad \cdot \prod_{t=2}^s (v_{t-1} f_t(x_1^{(t,1)}, \dots, x_{d_t}^{(t,1)}, \dots, x_1^{(t,2k)}, \dots, x_{d_t}^{(t,2k)}, z_1^{(t)}, \dots, z_{m_t}^{(t)}, z_t)), \end{aligned}$$

onde z é uma variável adicional. Note que f é uma composição de H -polinômios, mas não necessariamente um H -polinômio. Apesar disso, sempre podemos considerar f como um H -polinômio se fizermos as manipulações necessárias usando a propriedade da H -ação generalizada dada na igualdade (2.2). Além disso, f possui $2d_1$ variáveis a menos que $\hat{f}$. Logo, $f \in P_n^H$. Por construção f é alternado em cada X_l , $l = 1, \dots, 2k$. Além disso, f não se anula com a substituição Ξ com $z = w'_{n-2kd-n_0+1} \cdots w'_{2\tilde{k}d_1 + m_1 + 1}$. Portanto, f é o polinômio desejado. ■

Observação 2.3.6. A composição de H -polinômios não é necessariamente um H -polinômio. Tomando, por exemplo, $f(x, y) = h(x)t(y)$, com $h, h' \in H$. Se $t \in H$, temos

$$f(x, t(y)t(z)) = h(x)h'(t(y)t(z)),$$

que não é um elemento de P_2^H nem de P_3^H . Usando a definição da H -ação generalizada (2.2), podemos representar a composição pelo H -polinômio

$$\sum_i (h(x)t'_i(y)t''_i(z) + h(x)t'''_i(z)t''''_i(y)) \in P_3^H,$$

para adequados $t'_i, t''_i, t'''_i, t''''_i \in H$.

Note que a existência do H -polinômio alternado encontrado no Lema 2.3.5 só é garantida para $d \neq 0$, o que é suficiente, pois de fato temos $d = d(A) > 0$ para a álgebra A dada no início da Seção 2.2. Lembrando que $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_q \oplus J$ tem

dimensão finita, a definição de $d(A)$ implica que existem álgebras semissimples H -simples $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_s}$ tais que

$$d = \dim(B_{i_1} \oplus \dots \oplus B_{i_s})$$

e $B_{i_1}JB_{i_2}J \dots JB_{i_s} \neq 0$. Se d fosse igual a zero, teríamos que não existe $B_i \neq 0$ na decomposição dada de A e, conseqüentemente, obteríamos $A = J$. Mas como A é não nilpotente, concluímos que d deve ser maior do que zero.

Agora, usando o polinômio encontrado no Lema 2.3.5, podemos garantir a existência da partição que é a principal ferramenta na prova da limitação inferior das H -codimensões.

Lema 2.3.7. *Sejam k e n_0 os números naturais do Lema 2.3.5. Então, para qualquer $n \geq n_0$ existe uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ tal que $\lambda_d > 2k - p$, com $m_\lambda^H \neq 0$ e $d = d(A)$.*

Demonstração: Tome f o polinômio do Lema 2.3.5. Sabemos que

$$FS_n = \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n \\ T_\lambda \text{ standard}}} FS_n e_{T_\lambda}^*.$$

Como $f \notin \text{Id}^H(A)$, temos que

$$\sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ T_\lambda \text{ standard}}} FS_n e_{T_\lambda}^* f = FS_n f \not\subseteq \text{Id}^H(A),$$

ou seja, existe $\lambda \vdash n$ com T_λ standard tal que $e_{T_\lambda}^* f \notin \text{Id}^H(A)$. Portanto, $m_\lambda^H \neq 0$. Pelo argumento já visto no Lema 2.2.2, temos que cada linha de T_λ inclui no máximo uma variável de cada X_l , $l = 1, \dots, 2k$. E como o número de variáveis de f que não estão em nenhum X_i é $n - 2kd$, temos que

$$\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \leq 2k(d-1) + n - 2kd = n - 2k.$$

Além disso, temos pelo Lema 2.2.2 que $\sum_{i=1}^d \lambda_i > n - p$. Portanto,

$$\lambda_d > n - p - \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i \geq n - p - n + 2k = 2k - p.$$

■

Teorema 2.3.8. *Existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^H(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: A segunda desigualdade já foi provada no Teorema 2.2.4. Falta apenas a limitação inferior.

Pelo Lema 2.3.7, podemos tomar $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ tal que $\lambda_d > 2k - p$ e $m_\lambda^H \neq 0$. Assim, D_λ contém o subdiagrama D_μ com $\mu = \underbrace{(2k - p, 2k - p, \dots, 2k - p)}_d \vdash (2k - p)d$.

Pelo Teorema 1.2.30, podemos induzir M_λ a um S_{n-1} -módulo que é isomorfo a uma soma direta de S_{n-1} -módulos irredutíveis M_ν , onde as partições $\nu \vdash n - 1$ são obtidas deletando uma caixa de D_λ . Aplicando o Teorema $(n - (2k - p)d)$ vezes, obtemos M_λ como um $S_{(2k-p)d}$ -módulo que é isomorfo à uma soma direta de $S_{(2k-p)d}$ -módulos irredutíveis, entre eles M_μ . Portanto, $\dim M_\mu \leq \dim M_\lambda$.

Pela Proposição 1.2.24, temos

$$d_\mu = \dim M_\mu = \frac{((2k - p)d)!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

onde h_{ij} são os números gancho de D_μ . Note que D_μ é um diagrama retangular com $2k - p$ caixas em cada linha e d caixas em cada coluna. Por definição, $h_{ij} = 2k - p + d - i - j + 1$ para todo $1 \leq i \leq d$ e $1 \leq j \leq 2k - p$. Para cada linha i , temos

$$\prod_{j=1}^{2k-p} h_{ij} = (2k - p + d - i)(2k - p + d - i - 1) \dots (d - i + 1) \leq (2k - p + d - i)!.$$

Logo,

$$\prod_{i,j} h_{ij} = \prod_{i=1}^d \left(\prod_{j=1}^{2k-p} h_{ij} \right) \leq \prod_{i=1}^d (2k - p + d - i)! \leq ((2k - p + d)!)^d,$$

donde

$$d_\mu = \frac{((2k - p)d)!}{\prod_{i,j} h_{ij}} \geq \frac{((2k - p)d)!}{((2k - p + d)!)^d}. \quad (2.12)$$

Pela fórmula de Stirling, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde e é o número de Euler. Para representar esse limite, usamos a notação $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Aplicando a fórmula de Stirling na desigualdade (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} c_n^H(A) &\geq d_\lambda \geq d_\mu \geq \frac{((2k - p)d)!}{((2k - p + d)!)^d} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi(2k - p)d} \left(\frac{(2k - p)d}{e}\right)^{(2k - p)d}}{\left(\sqrt{2\pi(2k - p + d)} \left(\frac{2k - p + d}{e}\right)^{2k - p + d}\right)^d}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sendo c', c'', c''' e c'''' constantes positivas apropriadas, temos

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi(2k-p)d} \left(\frac{(2k-p)d}{e} \right)^{(2k-p)d}}{\left(\sqrt{2\pi(2k-p+d)} \left(\frac{(2k-p+d)}{e} \right)^{2k+p+d} \right)^d k^{1/2-d^2-d/2} d^{2kd}} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} c' \frac{(2k-p)^{(2k-p)d+1/2}}{(2k-p+d)^{(2k-p+d+1/2)d} k^{1/2-d^2-d/2}} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} c'' \frac{(2k-p)^{1/2-d^2-d/2}}{\left(1 + \frac{d}{2k-p} \right)^{(2k-p)d} \left(1 + \frac{d}{2k-p} \right)^{d^2+d/2} k^{1/2-d^2-d/2}} \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} c''' \frac{(2k-p)^{1/2-d^2-d/2}}{k^{1/2-d^2-d/2}} \\
&= c'''.
\end{aligned}$$

Portanto, existe $c > 0$ tal que

$$\frac{\sqrt{2\pi(2k-p)d} \left(\frac{(2k-p)d}{e} \right)^{(2k-p)d}}{\left(\sqrt{2\pi(2k-p+d)} \left(\frac{(2k-p+d)}{e} \right)^{2k+p+d} \right)^d} \sim ck^R d^{2kd},$$

onde $R = 1/2 - d^2 - d/2 \in \mathbb{Q}$. Como $k \sim n$, temos pela expressão (2.13) que existem $c_5 > 0$, $r_5 \in \mathbb{Q}$ e $n' \in \mathbb{N}$ tais que

$$c_n^H(A) \geq c_5 n^{R_5} d^n$$

para todo $n \geq n'$.

Para cada número natural n menor do que n' , existem $c^{(n)} > 0$ e $r^{(n)} \in \mathbb{Q}$ tais que $c_n^H(A) \geq c_n n^{r_n} d^n$. Portanto, basta tomar $C_1 = \min\{c^{(1)}, \dots, c^{(n'-1)}, c_5\}$ e $r_1 = \min\{r^{(1)}, \dots, r^{(n'-1)}, r_5\}$ para obtermos

$$c_n^H(A) \geq C_1 n^{r_1} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Com o resultado do Teorema 2.3.8, enfim temos provado o análogo da conjectura de Amitsur para álgebras com uma ação de Hopf generalizada nas condições citadas no início da Seção 2.2. De fato, as desigualdades encontradas no Teorema 2.3.8 juntas implicam que o limite da sequência $\left(\sqrt[n]{c_n^H(A)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ existe e é um inteiro positivo. Vemos a prova dessa implicação no próximo teorema.

Teorema 2.3.9 (Conjectura de Amitsur para H -codimensões). $\text{Plexp}^H(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)}$ existe e é um inteiro positivo.

Demonstração: Pelo Teorema 2.3.8, temos que existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^H(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n \quad (2.14)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e provamos esses resultados usando $d = d(A)$. Aplicando a raiz n -ésima e o limite com n tendendo a infinito na desigualdade (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_1} \sqrt[n]{n^{r_1}} d &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \leq \sqrt[n]{C_2} \sqrt[n]{n^{r_2}} d \\ \Rightarrow d &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} \leq d. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Confronto, obtemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)} = d$, ou seja, $\text{Plexp}^H(A) = d(A)$, que como é uma dimensão, é um número inteiro não negativo, e é maior do que zero porque A é não nilpotente. ■

2.4 Conjectura de Amitsur para H -codimensões, G -codimensões e Codimensões Graduadas

Usando o resultado do Teorema 2.3.8, podemos encontrar resultados similares para codimensões graduadas, H -codimensões para álgebras H -módulo e G -codimensões.

Para as G -codimensões tais que G é um grupo finito que age sobre A por automorfismos e antiautomorfismos, podemos usar o Exemplo 2.1.21 para aplicar o Teorema 2.3.8 com as mesmas hipóteses. Mas vamos ver que a hipótese da existência da decomposição $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \oplus J$, onde as álgebras B_i são semissimples FG -simples e J é FG -invariante pode ser retirada.

Lema 2.4.1. *Seja B uma álgebra semissimples de dimensão finita sobre um corpo F com uma G -ação por automorfismos e antiautomorfismos. Então, $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q$ como soma direta de ideais, onde B_i é álgebra G -simples, para $i = 1, \dots, q$.*

Demonstração: Seja I_1 um ideal G -invariante de B . Como B é uma álgebra semissimples de dimensão finita, o Teorema de Wedderburn nos diz que existe I_2 ideal de B tal que $B = I_1 \oplus I_2$.

Seja π a projeção de B sobre I_1 ao longo de I_2 . Então, $\pi(ab) = a\pi(b) = \pi(a)b$ para quaisquer $a, b \in B$. De fato, podemos escrever $a = a_1 + a_2$ e $b = b_1 + b_2$ com $a_1, b_1 \in I_1$ e $a_2, b_2 \in I_2$. Então,

$$ab = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 = a_1b_1 + a_2b_2 \Rightarrow \pi(ab) = a_1b_1$$

e

$$\begin{aligned} a\pi(b) &= ab_1 = a_1b_1 + a_2b_2 = a_1b_1 \\ \pi(a)b &= a_1b = a_1b_1 + a_1b_2 = a_1b_1, \end{aligned}$$

pois $I_1 \cap I_2 = 0$.

Seja

$$\tilde{\pi}(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}a)$$

para $a \in B$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(ab) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}(ab)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g, h \in G} (g\pi(g^{-1}ag^{-1}b) + h\pi(h^{-1}bh^{-1}a)), \end{aligned}$$

onde os elementos g e h representam os elementos de G levados pela G -ação em automorfismos e antiautomorfismos, respectivamente. Continuando,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(ab) &= \sum_{g, h \in G} (g(g^{-1}a\pi(g^{-1}b) + h(\pi(h^{-1}b)h^{-1}a))) \\ &= \sum_{g, h \in G} (ag\pi(g^{-1}b) + ah\pi(h^{-1}b)) \\ &= a\tilde{\pi}(b). \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)b$. Além disso, temos que $\tilde{\pi}(ga) = g\tilde{\pi}(a)$ para quaisquer $a \in B$ e $g \in G$. De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(ga) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h\pi(h^{-1}ga) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} gh\pi(h^{-1}a) \\ &= g\tilde{\pi}(a). \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $\ker \tilde{\pi}$ é um ideal G -invariante de B . Ainda, note que como I_1 é G -invariante, temos $\tilde{\pi}(B) \subseteq I_1$ e, se $a \in I_1$,

$$\tilde{\pi}(a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\pi(g^{-1}a) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}a = a,$$

ou seja, $\tilde{\pi}|_{I_1} = id_{I_1}$ e, consequentemente, $\tilde{\pi}(B) = I_1$. Portanto, $B = I_1 \oplus \ker \tilde{\pi}$. ■

Teorema 2.4.2 (Conjectura de Amitsur para G -codimensões). *Seja A uma álgebra não nilpotente de dimensão finita sobre um corpo F . Considere um grupo finito G que age em A por automorfismos e antiautomorfismos. Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^G(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\text{Plexp}^G(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^G(A)}$$

existe e é um inteiro positivo.

Demonstração: O Teorema 1.2.44 diz que as codimensões ordinárias não mudam para uma extensão do corpo base. O análogo para H -codimensões é provado de maneira análoga. Logo, podemos assumir F algebricamente fechado. Além disso, sabemos que a imagem de um ideal nilpotente é nilpotente. Logo, como o radical de Jacobson $J := J(A)$ de A é o maior ideal nilpotente de A , temos que J é G -invariante. Pela nota após o Teorema 1 de [22], temos que a álgebra A/J é G -segregada em A , ou seja, existe uma subálgebra maximal semissimples e G -invariante B tal que $A = B \oplus J$. Pelo Lema 2.4.1, temos que $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_q$ como soma direta de ideais e as álgebras B_i são G -simples. Como pelo Exemplo 2.1.21, podemos identificar $F\langle X|FG \rangle$ com $F\langle X|G \rangle$ obtendo $c_n^{FG}(A) = c_n^{G(A)}$, podemos usar o Teorema 2.3.8 para obter o resultado desejado, com $\text{PIexp}^G(A) = d(A)$. ■

Note que, se a álgebra A do Teorema 2.4.2 fosse nilpotente, ou seja, $x_1 x_2 \dots x_p \equiv 0$ para algum $p \in \mathbb{N}$, então teríamos $P_n^G(A) \subseteq \text{Id}^G(A)$, para todo $n \geq p$. Dessa forma, obtemos que $c_n^G(A) = 0$ para todo $n \geq p$ e, consequentemente, o PI-expoente de A seria zero.

Para as álgebras H -módulo, também podemos diminuir as hipóteses. Primeiramente, enunciamos o Teorema com as mesmas hipóteses do Teorema 2.3.8.

Teorema 2.4.3 (Conjectura de Amitsur para H -codimensões de álgebras H -módulo). *Seja A uma álgebra H -módulo não nilpotente de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado. Suponha que H age sobre A de tal forma que o radical de Jacobson $J := J(A)$ é H -invariante e $A = B \oplus J$ como soma direta de H -submódulos, onde $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_q$ como soma direta de ideais H -invariantes, B_i sendo álgebras semissimples H -simples. Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^H(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\text{PIexp}^H(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)}$$

existe e é um inteiro positivo.

Demonstração: Observe que, como A é uma álgebra H -módulo, a ação de H sobre A é uma ação de Hopf generalizada. Portanto, esse é um caso particular do Teorema 2.3.8, ou seja, $\text{PIexp}^H(A) = d(A)$. ■

Da mesma forma que para as G -álgebras, se a álgebra A do Teorema 2.4.3 fosse nilpotente, teríamos $P_n^H(A) \subseteq \text{Id}^H(A)$ e $c_n^H(A) = 0$ para todo $n \geq p$ e, consequentemente,

$$\text{PIexp}(A) = 0.$$

A conjectura de Amitsur para H -codimensões de álgebras H -módulo continua sendo válida se trocarmos a hipótese da existência da decomposição $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \oplus J$ pela hipótese de que H é semissimples. Se H é uma F -álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita com antípoda S , temos que H é unimodular pelo Corolário 1.4.8. Assim, temos que S^2 é diagonalizável e o elemento tipo grupo distinto de H é $\alpha = u\varepsilon$. Pelo Teorema 7.1.6, de [3], temos que

$$S^4(h) = u\varepsilon \rightarrow h \leftarrow u\varepsilon,$$

onde $\rightarrow$ e $\leftarrow$ são ações definidas como

$$f \rightarrow h = \sum f(h_{(2)})h_{(1)} \quad \text{e} \quad h \leftarrow f = \sum f(h_{(1)})h_{(2)}$$

para quaisquer $f \in H^*$ e $h \in H$. Dessa forma, obtemos

$$S^4(h) = u\varepsilon \rightarrow h \leftarrow u\varepsilon = u\varepsilon \rightarrow \left(\sum \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)} \right) = u\varepsilon \rightarrow h = \sum \varepsilon(h_{(2)})h_{(1)} = h,$$

ou seja, $S^4 = \text{id}_H$. Assim, temos que o polinômio característico de S^2 só pode conter fatores $x + 1$ ou $x - 1$ em sua decomposição. Consequentemente, os autovalores de S^2 são 1 ou -1 , donde obtemos $\text{Tr}(S^2) \leq \dim H$.

Pela demonstração de [3], Teorema 7.4.6 (i) $\rightarrow$ (ii), e pelo Lema 7.4.5 (iv) da mesma referência, temos que $\text{Tr}(S^2) > 0$ e que $\dim H$ divide $\text{Tr}(S^2)$. Como $\text{Tr}(S^2) \leq \dim H$ obtemos que $\text{Tr}(S^2) = \dim H$, ou seja, $S^2 = \text{id}_H$. Além disso, temos também por [3], Exercício 7.4.7, que

$$\Delta t = \sum t_{(1)} \otimes t_{(2)} = \sum t_{(2)} \otimes t_{(1)}$$

para qualquer t integral à esquerda ou à direita de H , onde Δ é a comultiplicação de H . Esses dois fatos nos ajudarão a mostrar que a semissimplicidade garante a existência da decomposição $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \oplus J$, nos próximos lemas.

Lema 2.4.4. *Seja t um integral à esquerda de uma álgebra de Hopf H semissimples de dimensão finita sobre um corpo F . Então,*

$$\sum t_{(1)} S t_{(3)} \otimes t_{(2)} = 1_H \otimes t.$$

Demonstração: Sabemos que $\sum t_{(1)} \otimes t_{(2)} = \sum t_{(2)} \otimes t_{(1)}$. Aplicando $\Delta \otimes \text{id}_H$ em ambos os lados da igualdade, obtemos

$$\sum t_{(1)} \otimes t_{(2)} \otimes t_{(3)} = \sum t_{(2)} \otimes t_{(3)} \otimes t_{(1)} = \sum t_{(2)} \otimes t_{(1)} \otimes t_{(3)},$$

donde

$$\sum t_{(1)} S t_{(2)} \otimes t_{(3)} = \sum t_{(2)} S t_{(1)} \otimes t_{(3)}, \quad (2.15)$$

pois se t é integral à esquerda de H com H semissimples, então St também é.

Usando que $S^2 = id_H$, obtemos

$$\sum t_{(2)}St_{(1)} = \sum S^2t_{(2)}St_{(1)} = \sum S(t_{(1)}St_{(2)}) = S(\varepsilon(t)1_H) = \varepsilon(t)1_H.$$

Aplicando esse fato na expressão (2.15), obtemos

$$\sum t_{(1)}St_{(3)} \otimes t_{(2)} = \sum \varepsilon(t_{(1)})1_H \otimes t_{(2)} = 1_H \otimes t.$$

■

Lema 2.4.5. *Sejam H uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita sobre um corpo F e B uma álgebra H -módulo semissimples de dimensão finita. Então, $B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_q$ (soma direta de ideais) para subálgebras H -simples B_i .*

Demonstração: Seja I_1 um ideal H -invariante de B . Como B é uma álgebra semissimples de dimensão finita, temos pelo Teorema de Wedderburn que B é igual a uma soma de ideais simples, donde podemos encontrar um ideal I_2 de B complementar a I_1 , ou seja, $B = I_1 \oplus I_2$.

Seja π a projeção de B sobre I_1 ao longo de I_2 . Como no Lema 2.4.5, temos que

$$\pi(ab) = a\pi(b) = \pi(a)b$$

para quaisquer $a, b \in B$. Como H é semissimples, temos pelo Teorema 1.4.6 que $\varepsilon\left(\int_H^l\right) \neq 0$. Consequentemente, podemos tomar $t \in H$ um integral à esquerda de H tal que $\varepsilon(t) = 1$. Defina $\tilde{\pi}$ como no Teorema 1.4.6, ou seja, $\tilde{\pi}(a) := \sum t_{(1)} \cdot \pi((St_{(2)}) \cdot a)$, para $a \in B$. Note que $\tilde{\pi}(B) \subseteq I_1$, pois I_1 é H -invariante. Além disso, se $a \in I_1$, então

$$\tilde{\pi}(a) = \sum t_{(1)} \cdot \pi((St_{(2)}) \cdot a) = \sum t_{(1)}(St_{(2)}) \cdot a = \varepsilon(t)a = a.$$

Logo, $\tilde{\pi}$ é projeção sobre I_1 . Ainda, usando a condição de álgebra H -módulo para quaisquer $a, b \in B$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(ab) &= \sum t_{(1)} \cdot \pi((St_{(2)}) \cdot (ab)) \\ &= \sum t_{(1)} \cdot \pi(((St_{(3)}) \cdot a)((St_{(2)}) \cdot b)). \end{aligned}$$

Por um lado, usando $\pi(ab) = \pi(a)b$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(ab) &= \sum t_{(1)} \cdot (\pi((St_{(3)}) \cdot a)((St_{(2)}) \cdot b)) \\ &= \sum (t_{(1)} \cdot (\pi((St_{(4)}) \cdot a)))(t_{(2)} \cdot ((St_{(3)}) \cdot b)) \\ &= \sum (t_{(1)} \cdot \pi((St_{(2)}) \cdot a))b \\ &= \tilde{\pi}(a)b. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $\pi(ab) = a\pi(b)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(ab) &= \sum t_{(1)} \cdot (((St_{(3)}) \cdot a)(\pi((St_{(2)}) \cdot b))) \\ &= \sum (t_{(1)} \cdot ((St_{(4)}) \cdot a))(t_{(2)} \cdot \pi((St_{(3)}) \cdot b))\end{aligned}$$

Do Lema 2.4.4 temos que $\sum t_{(1)}St_{(4)} \otimes t_{(2)} \otimes t_{(3)} = 1_H \otimes t_{(1)} \otimes t_{(2)}$. Substituindo na equação anterior, obtemos

$$\tilde{\pi}(ab) = \sum a(t_{(1)} \cdot \pi((St_{(2)}) \cdot b)) = a\tilde{\pi}(b).$$

Portanto, $\tilde{\pi}(ab) = \tilde{\pi}(a)b = a\tilde{\pi}(b)$ para quaisquer $a, b \in B$. E repetindo o argumento utilizado na demonstração do Teorema 1.4.6, obtemos que $\tilde{\pi}(h \cdot a) = h \cdot \tilde{\pi}(a)$ para quaisquer $h \in H$ e $a \in B$. Logo, $\ker \tilde{\pi}$ é H -invariante com $B = (\ker \tilde{\pi}) \oplus I_1$ e, consequentemente, B pode ser escrito como soma direta de subálgebras H -simples. ■

Teorema 2.4.6. *Seja A uma álgebra H -módulo não nilpotente de dimensão finita sobre um corpo F onde H é uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita. Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^H(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Do mesmo modo que para as G -codimensões, podemos considerar F como um corpo algebricamente fechado, pelo Teorema 1.2.44. O Teorema 3.1 do artigo [16] diz que se H é uma álgebra de Hopf tal que o antípoda S satisfaz $S^2 = id$ e A é uma álgebra H -módulo de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, então o radical de Jacobson de A é H -invariante. Além disso, por [20], Corolário 2.7, se H é uma álgebra de Hopf semissimples de dimensão finita e A é uma álgebra H -módulo tal que o radical de Jacobson é um H -submódulo de A , então existe a decomposição $A = B \oplus J$ como soma direta de ideais, onde B é um H -submódulo de A . Logo, esse fato é válido para esse caso e, como A tem dimensão finita, podemos concluir que B é uma álgebra semissimples de dimensão finita. Assim, o Lema 2.4.5 garante a existência da decomposição $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_q \oplus J$ necessária para a aplicação do Teorema 2.4.3, donde existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^H(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 2.4.7 (Conjectura de Amitsur para codimensões graduadas). *Seja A uma álgebra não nilpotente de dimensão finita sobre um corpo F , graduada por um grupo finito G . Então existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^{gr}(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\text{PIexp}^{gr}(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n^H(A)}$$

existe e é um inteiro positivo.

Demonstração: Como a álgebra G -graduada é uma álgebra $(FG)^*$ -módulo com $(FG)^*$ semissimples de dimensão finita e o Lema 2.1.18 garante que $c_n^{gr}(A) = c_n^{(FG)^*}(A)$, temos pelo Teorema 2.4.6 que existem constantes $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^{gr}(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\text{PIexp}^{gr}(A) = d(A)$. ■

2.5 Exemplos e Aplicações

Com o análogo da conjectura de Amitsur para álgebras com uma ação de Hopf generalizada provado, vamos aplicar o teorema para alguns casos particulares, observando os respectivos PI-exponentes. Entre os exemplos, vamos trabalhar com álgebras de matrizes, cujos T-ideais são muito importantes na teoria de identidades polinomiais. Como o problema de descrever o T-ideal das identidades das álgebras de matrizes $n \times n$ sobre um corpo infinito ainda não foi solucionado para $n \geq 3$, tornou-se muito importante o estudo das identidades polinomiais graduadas e das G -identidades, com G sendo um grupo finito. Por isso, também vemos alguns exemplos trabalhando com esses tipos de identidades em álgebras de matrizes.

Exemplo 2.5.1. *Seja $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_q$ uma álgebra com uma H -ação generalizada, onde B_i são álgebras semissimples H -simples e H é uma álgebra com unidade de dimensão finita. Seja $d := \max_{1 \leq k \leq q} \dim B_k$. Então existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^H(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, observe que podemos aplicar o Teorema 2.3.8 para $J = 0$ pois as álgebras B_i são semissimples. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} d(A) &= \max(\dim(B_{i_1} \oplus B_{i_2} \oplus B_{i_s}) \mid B_{i_1} J B_{i_2} J \dots J B_{i_s} \neq 0, 1 \leq i_k \leq q, 1 \leq k \leq s, 0 \leq s \leq q) \\ &= \max_{1 \leq k \leq q} \dim B_k \\ &= d. \end{aligned}$$

Exemplo 2.5.2. *Seja $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_q$ uma álgebra semissimples graduada por um grupo finito, onde as álgebras B_i são simples graduadas de dimensão finita. Seja $d := \max_{1 \leq k \leq q} \dim B_k$. Então existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^{gr}(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como A é uma álgebra semissimples, temos que o radical de Jacobson $J(A)$ é igual a zero. E como no Exemplo 2.5.1, temos $d = d(A)$. Logo, o resultado é direto do Teorema 2.4.7.

Exemplo 2.5.3. *Seja $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_q$ uma G -álgebra semissimples onde B_i são álgebras G -simples de dimensão finita e G é um grupo finito. Seja $d := \max_{1 \leq k \leq q} \dim B_k$. Então existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^G(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Novamente, como A é semissimples temos $J(A) = 0$. Assim, o Teorema 2.4.2 e o fato de que $d = d(A)$ implicam o resultado.

Exemplo 2.5.4. *Sejam $G = S_3$ e $A = M_2(F) \oplus M_2(F)$. Considere a seguinte G -graduação de A :*

$$\begin{aligned} A^{(e)} &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in F \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}; \gamma, \mu \in F \right\}, \\ A^{((12))} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in F \right\} \oplus 0, \quad A^{((23))} = 0 \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in F \right\}, \\ A^{((13))} &= A^{((123))} = A^{((132))} = 0. \end{aligned}$$

Essa é, de fato, uma graduação, pois $A = A^{(e)} \oplus A^{((12))} \oplus A^{((23))}$ e $A^{(\sigma)} A^{(\tau)} \subseteq A^{(\sigma\tau)}$ para quaisquer $\sigma, \tau \in S_3$.

Note que $M_2(F)$ é um ideal simples de A e pode ser graduado usando a graduação

$$M_2(F)^{(e)} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in F \right\}, \quad M_2(F)^{((12))} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in F \right\},$$

$M_2(F)^{((13))} = M_2(F)^{((23))} = M_2(F)^{((123))} = M_2(F)^{((132))} = 0$. Logo, o Exemplo 2.5.2 nos diz que existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} 4^n \leq c_n^{gr}(A) \leq C_2 n^{r_2} 4^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\dim M_2(F) = 4$.

Exemplo 2.5.5. *Seja $A = FG$, onde G é um grupo finito e considere a G -graduação natural $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, com $A^{(g)} = Fg$.*

Como FG é uma álgebra semissimples e cada Fg é uma álgebra simples, temos pelo Exemplo 2.5.2 que existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} |G|^n \leq c_n^{gr}(A) \leq C_2 n^{r_2} |G|^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, pois $\dim FG = |G|$.

Exemplo 2.5.6. *Seja $A = Fe_1 \oplus Fe_2 \oplus \cdots \oplus Fe_m$ uma soma direta de ideais onde $e_i^2 = e_i$ e $m \in \mathbb{N}$. Suponha que $G \subseteq S_m$ age sobre A da forma $\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$ para $\sigma \in G$. Sejam O_i , $i = 1, \dots, q$, as órbitas da G -ação sobre $\{1, 2, \dots, m\}$. Sendo $d := \max_{1 \leq i \leq q} |O_i|$, então existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^G(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lembre que as órbitas O_i são as classes de equivalência da relação $\sim$, onde $i_1 \sim i_2$ se, e somente se, existe $\sigma \in G$ tal que $i_1 = \sigma(i_2)$. Dessa forma, os conjuntos O_i são disjuntos e unidos formam $\{1, \dots, m\}$, ou seja, os conjuntos O_i juntos formam uma partição do conjunto $\{1, \dots, m\}$. Assim, temos que $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_q$, onde $B_i = \langle e_j \mid j \in O_i \rangle_F$ são ideais G -invariantes. Note que $\dim B_i = |O_i|$ e, conseqüentemente, o máximo das dimensões de B_i , para $1 \leq i \leq q$ é igual a d . Logo, para chegar ao resultado desejado usando o Exemplo 2.5.3, falta provar que os ideais B_i são G -simples para $i = 1, \dots, q$.

De fato, se I é um ideal não trivial G -invariante de B_i , então existe $a = \sum_{j \in O_i} \alpha_j e_j \in I$ tal que $\alpha_k \neq 0$ para algum $1 \leq k \leq q$. Assim, o elemento e_k está em I , pois $e_i e_j \in Fe_i \cap Fe_j = 0$, donde $e_k = \frac{1}{\alpha_k} e_k a$. Além disso, se $j \in O_i$, então existe $\sigma \in G$ tal que $e_j = \sigma e_k$, ou seja, $e_j \in I$ para todo $j \in O_i$, pois I é G -invariante. Portanto, $I = B_i$ e B_i é G -simples.

Exemplo 2.5.7. *Seja $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$ como soma direta de ideais, com $A_i \cong M_k(F)$, $1 \leq i \leq m$ e $k, m \in \mathbb{N}$. O grupo $\text{Aut}^*(M_k(F)) \times S_m$ age em A da seguinte maneira: se $(\varphi, \sigma) \in \text{Aut}^*(M_k(F)) \times S_m$ e $(a_1, \dots, a_m) \in A$, então*

$$(\varphi, \sigma) \cdot (a_1, \dots, a_m) := \left(a_{\sigma^{-1}(1)}^\varphi, \dots, a_{\sigma^{-1}(m)}^\varphi \right).$$

Seja $G \subseteq \text{Aut}^(M_k(F)) \times S_m$ um subgrupo e denote por $\pi : \text{Aut}^*(M_k(F)) \times S_m \rightarrow S_m$ a projeção natural na segunda componente. Sejam O_i , $i = 1, \dots, q$, as órbitas da*

$\pi(G)$ -ação sobre $\{1, 2, \dots, m\}$ e $d := k^2 \max_{1 \leq i \leq q} |O_i|$. Então existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^G(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note que $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_q$, onde $B_i = \bigoplus_{j \in O_i} A_j$. Como as órbitas O_i são as classes de equivalência da relação $\sim$, onde $i_1 \sim i_2$ se, e somente se, existe $(\varphi, \sigma) \in G$ tal que $\sigma(i_2) = i_1$, temos que as álgebras B_i são G -invariantes, pois para quaisquer $(\varphi, \sigma) \in G$, $j \in O_i$,

$$(\varphi, \sigma) \cdot A_j = A_{\sigma^{-1}(j)}^\varphi = A_{\sigma^{-1}(j)}$$

e $j \sim \sigma^{-1}(j)$ implica que $\sigma^{-1}(j) \in O_i$, donde $(\varphi, \sigma) \cdot A_j \subseteq B_i$.

Além disso, cada B_i é G -simples. De fato, se I é um ideal não trivial G -invariante de B_i , existe $a = \sum_{j \in O_i} a_j \in I$ com $a_j \in A_j$ e $a_l \neq 0$ para algum $l \in O_i$. Seja e_l a matriz identidade de A_l . Então

$$e_l a = \sum_{j \in O_i} e_l a_j = a_l \neq 0,$$

pois $e_l a_j \in A_l \cap A_j = 0$ se $j \neq l$. Dessa forma, temos $0 \neq e_l a \in I \cap A_l$, ou seja $I \cap A_l \neq 0$. De $A_l \cong M_k(F)$, temos que A_l é uma álgebra simples, donde $A_l \subseteq I$.

Ainda, temos que para cada $j \in O_i$, existe $(\varphi, \sigma) \in G$ tal que $\sigma^{-1}(l) = j$. Logo, $(\varphi, \sigma) \cdot A_l = A_{\sigma^{-1}(l)}^\varphi = A_j$. Como I é G -invariante, obtemos que $A_j \subseteq I$ para todo $j \in O_i$, ou seja, $I = B_i$ e B_i é G -simples. Portanto, temos pelo Exemplo 2.5.3 que existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^G(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $d = k^2 \max_{1 \leq i \leq q} |O_i|$, pois

$$\dim B_i = \dim (\bigoplus_{j \in O_i} A_j) = |O_i| k^2.$$

Exemplo 2.5.8. Seja $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$ como soma direta de ideais, onde $A_i \cong UT_k(F)$, a álgebra das matrizes triangulares superiores $k \times k$, com $1 \leq i \leq m$ e $k, m \in \mathbb{N}$. Suponha que um subgrupo $G \subseteq S_m$ age em A da forma

$$\sigma \cdot (a_1, \dots, a_m) := (a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(m)})$$

para quaisquer $\sigma \in G$ e $(a_1, \dots, a_m) \in A$. Sejam $O_1, O_2, \dots, O_s$ as órbitas da G -ação sobre $\{1, 2, \dots, m\}$ e $d := k \cdot \max_{1 \leq i \leq s} |O_i|$. Então existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^G(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos denotar por $e_{ij}^{(t)}$, $1 \leq i \leq j \leq k$, as matrizes unidade de A_t , $1 \leq t \leq m$. Sendo $B_{ij} = \langle e_{jj}^{(t)} \mid t \in O_i \rangle_F$ e $J := \langle e_{ij}^{(t)} \mid 1 \leq i < j \leq k, 1 \leq t \leq m \rangle_F$, temos que

$$A = \left(\bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^k B_{ij} \right) \oplus J,$$

onde $\bigoplus_{i=1}^s \bigoplus_{j=1}^k B_{ij}$ representa as matrizes diagonais e J representa as matrizes triangulares estritamente superiores. Note que cada B_{ij} é G -invariante, pois pela definição da G -ação, temos que se $\sigma \in G$, então $\sigma e_{ij}^{(t)} = e_{ij}^{(\sigma^{-1}(t))} \in B_{ij}$, pois $t \sim \sigma^{-1}(t)$. Pelo mesmo argumento, J também é G -invariante. Além disso, J é um ideal nilpotente, por ser formado por matrizes triangulares estritamente superiores.

Temos também que cada B_{ij} é G -simples. De fato, se I é um ideal não trivial G -invariante de B_{ij} , então existe $a = \sum_{t \in O_i} \alpha_t e_{jj}^{(t)} \in I$ com $\alpha_l \neq 0$ para algum $l \in O_i$. Então,

$$\frac{1}{\alpha_l} e_{jj}^{(l)} a = \sum_{t \in O_i} \frac{\alpha_t}{\alpha_l} e_{jj}^{(l)} e_{jj}^{(t)} = e_{jj}^{(l)} \in I.$$

Como I é G -invariante e para qualquer $t \in O_i$, existe $\sigma \in G$ tal que $\sigma^{-1}(l) = t$. Logo, $e_{jj}^{(t)} = \sigma e_{jj}^{(l)} \in I$ e $I = B_{ij}$, donde B_{ij} é G -simples. Dessa forma, temos pelo Teorema 2.4.2 que existem $C_1, C_2 > 0$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 n^{r_1} d(A)^n \leq c_n^G(A) \leq C_2 n^{r_2} d(A)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Podemos ainda, melhorar o valor de $d(A)$. Note que, para $1 \leq i \leq s$ e $t \in O_i$, temos que

$$0 \neq e_{1k}^{(t)} = e_{11}^{(t)} e_{12}^{(t)} e_{22}^{(t)} e_{23}^{(t)} \dots e_{kk}^{(t)} \in B_{i1} J B_{i2} J \dots J B_{ik}.$$

Consequentemente, $B_{i1} J B_{i2} J \dots J B_{ik} \neq 0$ e, pela definição de $d(A)$, temos que

$$\begin{aligned} d(A) &\geq \dim(B_{i1} \oplus \dots \oplus B_{ik}) = k|O_i| \\ \Rightarrow d(A) &\geq k \cdot \max_{1 \leq i \leq s} |O_i|. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Agora, suponha que $B_{i_1 j_1} J B_{i_2 j_2} J \dots J B_{i_r j_r} \neq 0$ para alguns $1 \leq i_l \leq s$, $1 \leq j_l \leq k$ e $r \in \mathbb{N}$. Então existem $e_{j_l j_l}^{(q_l)} \in B_{i_l j_l}$, $q_l \in O_{i_l}$ e $e_{i'_l j'_l}^{(q'_l)} \in J$ com $1 \leq i_l \leq s$, $1 \leq j_l \leq k$ e $1 \leq i'_l < j'_l \leq k$, tais que

$$e_{j_1 j_1}^{(q_1)} e_{i'_1 j'_1}^{(q'_1)} e_{j_2 j_2}^{(q_2)} e_{i'_2 j'_2}^{(q'_2)} \dots e_{i'_{r-1} j'_{r-1}}^{(q'_{r-1})} e_{j_r j_r}^{(q_r)} \neq 0.$$

Observe que, para esse elemento ser não nulo, devemos ter $q_1 = q'_1 = q_2 = q'_2 = \dots = q'_{r-1} = q_r$, donde $i_1 = i_2 = \dots = i_r$. Também devemos ter $j_l = i'_l$ e $j'_l = j_{l+1}$. E como

$1 \leq i'_l < j'_l \leq k$, obtemos que $r \leq k$. Assim, temos que $\dim(B_{i_1 j_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r j_r}) \leq k|O_{i_1}|$, donde

$$d(A) \leq k \cdot \max_{1 \leq i \leq s} |O_i|. \quad (2.17)$$

Portanto, usando as desigualdades (2.16) e (2.17), obtemos que

$$\text{PIexp}^G(A) = d(A) = k \cdot \max_{1 \leq i \leq s} |O_i|.$$

2.5.1 Álgebra de Sweedler

Seja $H_4 = \langle 1, c, b, cb \rangle_F$ a álgebra de Hopf do Exemplo 1.3.28, conhecida como álgebra de Sweedler de dimensão 4. Temos que $c^2 = 1$, $b^2 = 0$, $bc = -cb$, $\Delta(c) = c \otimes c$, $\Delta(b) = c \otimes b + b \otimes 1$, $\varepsilon(c) = 1$, $\varepsilon(b) = 0$, $S(c) = c$ e $S(b) = -cb$. Além disso, H_4 é um H_4^* -módulo à esquerda com a ação $g \cdot h = \sum g(h_{(2)})h_{(1)}$ para $g \in H_4^*$ e $h \in H_4$ com $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.

Vamos ver que, apesar de não podermos aplicar o Teorema 2.3.8 diretamente, podemos adaptar os teoremas e lemas anteriores para provar o análogo da conjectura de Amitsur para a álgebra de Sweedler de dimensão 4 com a ação de seu dual. Além disso, a álgebra H_4 é interessante porque é uma álgebra de Hopf não comutativa de dimensão mínima.

Sendo $\{g_1, g_c, g_b, g_{cb}\}$ a base de H_4^* , onde $g_x(y) = 1$ se $x = y$ e $g_x(y) = 0$ se $x \neq y$ para $x, y \in H_4$, temos que

$$g_1 \cdot 1 = g_1(1)1 = 1, \quad g_1 \cdot c = g_1(c)c = 0, \quad g_1 \cdot b = g_1(b)c + g_1(1)b = b$$

e $g_1 \cdot (cb) = g_1(cb)1 + g_1(c)cb = 0$, pois $\Delta(cb) = \Delta(c)\Delta(b) = 1 \otimes cb + cb \otimes c$. Prosseguindo de forma análoga, podemos construir a tabela da ação de g_1, g_c, g_b e g_{cb} sobre $1, c, b$ e cb :

	1	c	b	cb
g_1	1	0	b	0
g_c	0	c	0	cb
g_b	0	0	c	0
g_{cb}	0	0	0	1

Observe que H_4 é uma álgebra H_4^* -simples. De fato, se I é um ideal não trivial H_4^* -invariante de H_4 , então existe $0 \neq a = \alpha 1 + \beta c + \gamma b + \mu cb \in I$. Assim, se $\gamma \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, temos que $g_b \cdot a = \gamma c$ e $g_{cb} \cdot a = \mu 1$, donde $c \in I$ ou $1 \in I$, pois I é H_4^* -invariante. Os dois casos indicam que $1 \in I$, pois $c^2 = 1$ e, consequentemente, obtemos $I = H_4$. Se $\gamma = \mu = 0$, então $a = \alpha 1 + \beta c$ com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Como $g_1 \cdot a = \alpha 1$ e $g_c \cdot a = \beta c$, temos novamente que $1 \in I$ ou $c \in I$, donde $I = H_4$.

Lembrando que o radical de Jacobson $J := J(H_4)$ é dado pela interseção dos ideais maximais à esquerda de H_4 , temos que $J = \langle b, cb \rangle_F$. De fato, c e 1 não podem estar em um ideal próprio de H_4 , pois $H_4 = H_4 \langle c \rangle_F = H_4 \langle 1 \rangle_F$. Dessa forma, $\langle b, cb \rangle_F$ é o único ideal maximal à esquerda de H_4 .

Observação 2.5.9. Note que J não é H_4^* -invariante, pois $g_{cb} \cdot (cb) = 1 \notin J$. Por isso, não podemos aplicar o Teorema 2.4.3 para esse caso. Além disso, mesmo H_4 sendo uma álgebra H_4^* -simples, não conseguimos provar o Lema 2.3.1 para H_4 , pois a forma bilinear $\text{tr}(\varphi(\cdot)\varphi(\cdot))$, onde φ é a representação regular à esquerda de H_4 , é degenerada.

De fato, temos que $\varphi(1) = I_{4 \times 4}$,

$$\varphi(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi(cb) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que $\text{tr}(\varphi(b)\varphi(1)) = \text{tr}(\varphi(b)\varphi(c)) = \text{tr}(\varphi(b)\varphi(b)) = \text{tr}(\varphi(b)\varphi(cb)) = 0$ e, conseqüentemente, $\text{tr}(\varphi(\cdot)\varphi(\cdot))$ é degenerada.

Mas apesar de não podermos aplicar o Teorema 2.4.3 para H_4 , ainda podemos provar o resultado de forma direta. Para isso, precisamos do lema a seguir, que é análogo ao Lema 2.3.5.

Lema 2.5.10. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existem subconjuntos disjuntos $X_1, \dots, X_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, com $|X_1| = \dots = |X_k| = 4$, $k = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$, e um polinômio $f \in P_n^{H_4^*} \setminus \text{Id}^{H_4^*}(H_4)$ alternado nas variáveis de cada conjunto X_j .

Demonstração: Considere o H_4^* -polinômio

$$f_1 = \sum_{\sigma \in S_4} (\text{sgn } \sigma) x_{\sigma(1)}^{g_1} x_{\sigma(2)}^{g_c} x_{\sigma(3)}^{g_b} x_{\sigma(4)}^{g_{cb}}.$$

Fazendo $x_1 = 1$, $x_2 = c$, $x_3 = b$ e $x_4 = cb$, temos os únicos monômios de f_1 que não se anulam com essa substituição são os monômios com $\sigma(3) = 3$ e $\sigma(4) = 4$, pois usando a tabela da ação de H_4^* sobre H_4 , vemos que $g_b \neq 0$ somente em b e $g_{cb} \neq 0$ somente em cb . Assim, as únicas permutações que sobram são (1) e (12) , donde

$$f_1(1, c, b, cb) = (g_1 \cdot 1)(g_c \cdot c)(g_b \cdot b)(g_{cb} \cdot (cb)) - (g_1 \cdot c)(g_c \cdot 1)(g_b \cdot b)(g_{cb} \cdot (cb)) = c^2 - 0 = 1.$$

Dessa forma, o polinômio

$$f = \left(\prod_{j=1}^k f_1(x_{4j-3}, x_{4j-2}, x_{4j-1}, x_j) \right) x_{4k+1} x_{4k+2} \cdots x_n$$

é um H_4^* -polinômio multilinear que não é identidade de H_4 , pois f não se anula com a substituição $x_{4j-3} = 1$, $x_{4j-2} = c$, $x_{4j-1} = b$, $x_{4j} = cb$ para $1 \leq j \leq k$ e $x_l = 1$ para $4k+1 \leq l \leq n$. Além disso, f é por construção alternado nas variáveis de cada conjunto $X_j = \{x_{4j-3}, x_{4j-2}, x_{4j-1}, x_{4j}\}$, com $|X_j| = k$ e $j = 1, \dots, k$. ■

Teorema 2.5.11. *Seja F um corpo. Então existem $C > 0$ e $r \in \mathbb{R}$ tais que*

$$Cn^r 4^n \leq c_n^{H_4^*}(H_4) \leq 4^{n+1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pelo Lema 2.1.22, temos que

$$c_n^{H_4^*}(H_4) \leq (\dim H_4)^{n+1} = 4^{n+1}$$

e a segunda desigualdade está provada.

Para a primeira desigualdade podemos assumir que F é algebricamente fechado, pois as codimensões não variam para extensões do corpo base e $H_4 \otimes_F K$ continua sendo uma álgebra de Sweedler para qualquer extensão $K \supseteq F$. Assim, precisamos adaptar as demonstrações do Lema 2.2.2, do Lema 2.3.7 e do Teorema 2.3.8 para H_4 , usando a decomposição de H_4 como o próprio H_4 , que é H^* -simples, ou seja, sem destacar o radical de Jacobson na decomposição. Por isso, vamos usar $p = 1$ nas demonstrações e $d = 4 = \dim H_4$.

Adaptando o Lema 2.2.2 para H_4 , temos que provar que se $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ é uma partição com $\sum_{i=5}^r \lambda_i \geq 1$ ou $\lambda_5 > 0$, então $m_\lambda^H = 0$. Supondo $\lambda_5 > 0$, a demonstração é a mesma. Agora, supondo $\sum_{i=5}^r \lambda_i \geq 1$, temos diretamente que $\lambda_5 \geq 1 > 0$ e, pela primeira parte da demonstração, obtemos $m_\lambda^H = 0$.

Na adaptação do Lema 2.3.7, vamos usar $n_0 = 0$, $k = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ e o H_4^* -polinômio f do Lema 2.5.10, que é alternado em cada $X_1, \dots, X_k \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ com $|X_j| = 4$ para todo $1 \leq j \leq k$. Precisamos encontrar uma partição $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \vdash n$ tal que $\lambda_5 > k-1$ e $m_\lambda \neq 0$. Para mostrar que $m_\lambda \neq 0$, o processo é o mesmo. E como $e_{T_\lambda}^* f$ simetriza as variáveis de cada linha de T_λ , cada linha deve ter no máximo uma variável de cada X_j . Assim,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq 3k + (n - 4k) = n - k,$$

onde $n - 4k$ é o número de variáveis de f que não estão em nenhum X_j . Já pela nossa adaptação do Lema 2.2.2, temos que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 > n - 1.$$

Juntando as duas informações, obtemos

$$\lambda_4 > n - 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \geq n - 1 + k - n = k - 1.$$

Com a adaptação desses dois lemas, o Teorema 2.3.8 é facilmente adaptável usando $2k - p = k - 1$ e $d = 4$. Assim, podemos assumir o resultado do Teorema 2.3.8 para H_4 , ou seja, existem $C > 0$ e $r \in \mathbb{R}$ tais que

$$Cn^r 4^n \leq c_n^{H_4^*}(H_4)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Assim, encontramos que o PI-expoente da álgebra de Sweedler de dimensão 4 com a ação de seu dual é igual a 4, que é um inteiro positivo. A álgebra de Sweedler é um exemplo muito interessante também porque dependendo do tipo de identidade que estudamos, podemos encontrar um PI-expoente não inteiro. Segundo [10], temos que a álgebra de Sweedler com graduação de um semigrupo possui PI-expoente racional.

3 Considerações Finais

No estudo das identidades polinomiais para uma álgebra A sobre um corpo de característica zero, vimos que o problema pode ser reduzido ao estudo das identidades polinomiais multilineares. A partir daí, se tornou interessante o espaço $P_n/P_n \cap \text{Id}(A)$, que representa o espaço das não identidades polinomiais multilineares de A em n variáveis. O estudo das codimensões é mais um passo na busca pelas identidades polinomiais.

A conjectura de Amitsur apresenta uma limitação para as codimensões. A ideia de formular análogos da conjectura de Amitsur para álgebras com algum tipo de ação abre novas possibilidades para o estudo das identidades polinomiais.

A prova do análogo da conjectura de Amitsur para H -codimensões é uma prova alternativa para a conjectura de Amitsur para codimensões ordinárias usando $H = \{1\}$. Além disso, vimos que as codimensões graduadas por um grupo finito e as G -codimensões, onde G é um grupo finito que age por automorfismos e antiautomorfismos, são casos particulares de H -codimensões. Sendo casos particulares, conseguimos reduzir as hipóteses do análogo da conjectura de Amitsur para H -codimensões, ou substituir por hipóteses mais fracas.

Além de ser útil para as álgebras que se encaixam nas hipóteses da prova do análogo da conjectura de Amitsur para H -codimensões, o desenvolvimento da prova apresenta importantes ferramentas que podem ser utilizadas na busca do PI-expoente de uma álgebra, mesmo quando essa não satisfaz todas as hipóteses do teorema, assim como fizemos para a álgebra de Sweedler de dimensão 4. Fica para futuros estudos encontrar o expoente PI de outros tipos de álgebras, como as álgebras de Lie, as álgebras de Jordan e as álgebras alternativas, além de explorar as hipóteses necessárias para esses casos.

Referências

- [1] E. Aljadeff and A. Giambruno. Multialternating graded polynomials and growth of polynomial identities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141:3055–3065, 2013.
- [2] E. Aljadeff, A. Giambruno, and D. La Mattina. Graded polynomial identities an exponential growth. *J. Reine Angew. Math.*, 650:83–100, 2011.
- [3] S. Dascalescu, C. Nastasescu, and S. Raianu. *Hopf Algebras: An Introduction*. Marcel Dekker Inc., 2001.
- [4] A. Giambruno and D. La Mattina. Graded polynomial identities and codimensions: computing the exponential growth. *Adv. Math.*, 225:859–881, 2010.
- [5] A. Giambruno, I. P. Shestakov, and M. V. Zaicev. Finite-dimensional non-associative algebras and codimension growth. *Adv. Appl. Math.*, 47:125–139, 2011.
- [6] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. Mathematical Surveys and Monographs, 2005.
- [7] A. S. Gordienko. Graded polynomial identities, group actions, and exponential growth of Lie algebras. *J. Algebra*, 367:26–53, 2012.
- [8] A. S. Gordienko. Amitsur’s conjecture for associative algebras with a generalized Hopf action. *J. Pure Appl. Algebra*, 217:1395–1411, 2013.
- [9] A. S. Gordienko. Codimensions of polynomial identities of representations of Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141:3369–3382, 2013.
- [10] A. S. Gordienko, G. Janssens, and E. Jespers. Semigroup graded algebras and graded PI-exponent. In print. [arXiv:1511.01860 \[math.Ra\]](https://arxiv.org/abs/1511.01860) 5 Nov 2015.
- [11] K. Hoffmann and R. Kunze. *Linear Algebra*. Prentice Hall, 1971.
- [12] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [13] G. D. James and A. Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [14] I. Kaplansky. Rings with a polynomial identity. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45:575–580, 1948.
- [15] S. Lang. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 211. Springer, 2002.

-
- [16] V. Linchenko, S. Montgomery, and L. W. Small. Stable Jacobson radicals and semiprime smash products. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 37:860–872, 2005.
 - [17] S. Montgomery. *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*. CBMS Lecture Notes, vol. 82, Amer. Math. Soc., 1993.
 - [18] A. Regev. Existence of identities in $A \otimes B$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77:1067–1069, 1971.
 - [19] B. E. Sagan. *The Symmetric Group: representations, combinatorial algorithms and symmetric functions*. Graduate Texts in Mathematics 203. Springer, 2001.
 - [20] D. Stefan and F. V. Oystaeyen. The Wedderburn-Malcev theorem for comodule algebras. *Comm. Algebra*, 27:3569–3581, 1999.
 - [21] M. E. Sweedler. *Hopf Algebras*. W. A. Benjamin Inc., 1969.
 - [22] E. J. Taft. Invariant Wedderburn factors. *Illinois J. Math*, 1:565–573, 1957.
 - [23] M. V. Zaicev. Integrality of exponents of growth of identities of finite-dimensional Lie algebras. *Izv. Math.*, 66:463–487, 2002.