Rafael Honorio Pereira Alves

Percolação de Primeira Passagem

CAMPINAS
2015

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

RAFAEL HONORIO PEREIRA ALVES

PERCOLAÇÃO DE PRIMEIRA PASSAGEM

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em estatística.

Orientador: Christophe Frédéric Gallesco

O ARQUIVO DIGITAL CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL HONORIO PEREIRA ALVES, E ORIENTADA PELO PROF. DR. CHRISTOPHE FRÉDÉRIC GALLESCO.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 131476/2012-2

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

AL87p Alves, Rafael Honorio Pereira, 1990-
Percolação de primeira passagem / Rafael Honório Pereira Alves. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Christophe Frédéric Gallesco.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Percolação. 2. Teoria ergódica. 3. Teoria assintótica. I. Gallesco, Christophe Frédéric,1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: First passage percolation
Palavras-chave em inglês:
Percolation
Ergodic theory
Asymptotic theory
Área de concentração: Estatística
Titulação: Mestre em Estatística
Banca examinadora:
Christophe Frédéric Gallesco [Orientador]
Élcio Lebensztayn
Renato Jacob Gava
Data de defesa: 03-09-2015
Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 03 de setembro de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof.(a). Dr(a). CHRISTOPHE FRÉDÉRIC GALLESCO

____

Prof.(a). Dr(a). ÉLCIO LEBENSZTAYN

____

Prof.(a). Dr(a). RENATO JACOB GAVA

À minha querida família, Honório, Magnamar e Isadora, pelo incentivo e apoio em todas as minhas escolhas e decisões.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, professor Christophe. Foi um grande prazer trabalhar com o senhor.

Agradeço também a cada um que participou dessa caminhada ao meu lado, em especial à minha família e aos meus grandes amigos pelos ensinamentos e apoio incondicional.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro a este projeto.

RESUMO

Considere o problema do caminho mais curto no tráfego em uma rede. No caso determinístico em que o tempo necessário para percorrer uma rota é constante, procuramos a maneira mais rápida de viajar entre duas localidades. A Percolação de Primeira Passagem é a extensão desse problema que considera o caso em que cada aresta do grafo está associada a uma variável aleatória positiva, procurando nesse contexto a existência de uma estratégia geral otimizada de viajar ao longo da rede, cujo tamanho das arestas são variáveis aleatórias. O presente trabalho tem como objetivo apresentar o modelo de Percolação de Primeira Passagem, mostrar a existência de uma constante, chamada "constante de tempo" (uma ferramenta fundamental para o modelo) e investigar a forma assintótica do conjunto de pontos atingidos, para tal desenvolvemos alguns resultados importantes da teoria: o Teorema Ergódico Subaditivo, o Teorema da Forma Assintótica e o Teorema de Kesten.

Palavras-chave: Percolação, Teorema Ergódico Subaditivo, Teorema da Forma Assintótica, Teorema de Kesten.

ABSTRACT

Consider the shortest path problem in traffic network. The deterministic case, when the time taken to traverse a route is constant, we search for the fastest way to travel between two locations. The First Passage Percolation is an extension of this problem that considers the case in which each edge in the graph is associated with a positive random variable, in this context searching for the existence of a general optimized strategy to travel along a network, whose size of the edges are random variables. This study aims to present the model of First Passage Percolation, show the existence of the "time constant" (a fundamental tool for the model) and investigate the asymptotic form of the set of achieved points, and for such we develope some important results of the theory: the subadditive ergodic theorem, the asymptotic shape theorem and Kesten's theorem.

Keywords: Percolation, Subadditive ergodic theorem, Asymptotic shape theorem, Kesten's theorem.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O modelo chamado Percolação de Primeira Passagem foi formulado por J.M. Hammersley e D.J.A. Welsh (1965) como um modelo dependente da passagem de um fluido através de um meio poroso.

A motivação do modelo pode ser ilustrada através do exemplo: considere um conjunto de árvores em um pomar, plantadas nos vértices do grafo, e também que a distância entre elas possibilite que as árvores doentes infectem somente suas quatro vizinhas mais próximas. Além disso, uma árvore infectada tem probabilidade p de infectar cada vizinha de maneira independente. A teoria de percolação está preocupada com a probabilidade $P_N(p)$ de que, a partir de uma árvore infectada, a doença se espalhe para mais N outras. Esse modelo é muitas vezes chamado de modelo de Bernoulli de percolação no grafo.

De maneira mais geral, suponha ainda que uma árvore irá infectar uma dada vizinha somente após a decorrência de um tempo aleatório t. 'Percolação de Primeira Passagem' estuda o tempo no qual o contágio, pela primeira vez, se espalha para fora de uma dada região.

Outra forma de idealizar o modelo é considerando o problema do caminho mais curto no tráfego em uma rede. No caso determinístico em que o tempo necessário para percorrer uma rota é constante, procuramos a maneira mais rápida de viajar entre duas localidades. Nesse caso, existem muitos algoritmos conhecidos para selecionar a rota mais rápida.

'Percolação de Primeira Passagem' é a extensão desse problema que considera o caso em que cada aresta $e \in \mathbb{Z}^d$ está associada a uma variável aleatória positiva $T(e)$, procurando nesse contexto a existência de uma estratégia geral otimizada de viajar ao longo da rede, cujo tamanho das arestas são variáveis aleatórias.

O estudo da Percolação de Primeira Passagem, está focado no tempo de passagem de um ponto de partida a um outro fixo e na forma do conjunto dos pontos atingidos ("infectados") até um tempo t.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o modelo de Percolação de Primeira Passagem, mostrar a existência de uma constante, chamada "constante de tempo" (uma ferramenta fundamental para o modelo) e estudar a forma assintótica do conjuntos de pontos atingidos. Para tal, desenvolveremos alguns importantes teoremas da teoria: o Teorema Ergódico Subadtivo, o Teorema da Forma Assintótica e o Teorema de Kesten.

No primeiro capítulo, vamos definir formalmente o modelo, provar o Teorema Ergódico Subaditivo, daí a partir do teorema definir a constante de tempos μ e explorar algumas de suas propriedades.

No segundo capítulo, vamos estudar a forma assintótica do conjunto de pontos atingidos:

Vamos demonstrar o Teorema da Forma Assintótica para dar uma descrição ao conjunto e fornecer um critério que nos permite saber quando a constante de tempo é nula ou estritamente positiva.

Finalmente vamos demonstrar o Teorema de Kesten, que relaciona a forma do conjunto de pontos atingidos com a distribuição do tempo de passagem pelas arestas.

Capítulo 2

Modelo e Constante de Tempo

Vamos definir o modelo de Percolação de Primeira Passagem sobre $\mathbb{Z}^d(d \geq 2)$. Para estudar o modelo iremos enunciar e demonstrar o Teorema Ergódico Subaditivo. A partir do teorema vamos definir a constante de tempo μ e exibir algumas de suas propriedades.

2.1 Modelo de Percolação de Primeira Passagem

Seja o grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$, $d \geq 2$, cujos vértices são os pontos de $\mathbb{Z}^d$ e o conjunto de arestas é

$$\mathcal{E} := \{(u, v) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d; |u - v|_1 = 1\}$$

em que $|\cdot|_1$ é a norma definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, |x|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|.$$

Por simplificação usaremos $|\cdot|$ ao invés de $|\cdot|_1$. A cada aresta $e \in \mathcal{E}$ será associada uma variável aleatória $t(e)$. Assumindo que todas $t(e)$, $e \in \mathcal{E}$, são independentes e de mesma distribuição ν. Seja F a função de distribuiçao de ν, $F(0-) = 0$.

Assim $t(e)$ são quase certamente não-negativas, vamos denominar $t(e)$ como o "tempo de passagem" pela aresta e. Um "caminho" de u a v é uma sequência de vértices $(v_1, \dots, v_{n+1})$ tal que $v_1 = u$, $v_{n+1} = v$ e $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i := (v_i, v_{i+1})$ é uma aresta. Denotaremos por Γ o conjunto de todos os caminhos. Um caminho é dito "sem sobreposição" se não contém duas vezes o mesmo vértice, denotamos por Γ_{ss} o conjunto dos caminhos sem sobreposição. Denotaremos por $\Gamma(u, v)$ o conjunto dos caminhos de u a v, $\Gamma(u, a_1, \dots, a_k, v)$ o conjunto dos caminhos de u a v passando por $a_1, \dots, a_k$.

O tempo necessário para percorrer um caminho $r = (v_1, \dots, v_{n+1})$ será:

$$T(r) := \sum_{i=1}^{n} t(e_i),$$

onde $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Agora, para dois pontos u e $v \in \mathbb{Z}^d$, vamos definir uma semi-distância aleatória por:

$$T(u, v) := \inf\{T(r); r \in \Gamma(u, v)\} = \inf\{T(r); r \in \Gamma_{ss}(u, v)\}.$$

Observe que se $u = v$, $T(u,v) = 0$.

Se um caminho r verifica $T(u,v) = T(r)$, dizemos que r é uma "rota" de u a v. Uma rota é um caminho de distância mínima.

É conveniente estender a definição de $T(\cdot,\cdot) =$ à $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, da seguinte forma:

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^d, T(u,v) := T(u^*, v^*)$$

em que u^* (respectivamente v^*) são os vértices de $\mathbb{Z}^d$ mais próximos de u (respectivamente v), com relação à norma já definida. Temos, então, a seguinte proposição:

Proposição 2.1.0.1 (semi-distância). $T(\cdot,\cdot)$ *é uma semi-distância, isto é:*

1. $\forall u, v \in \mathbb{R}^d, T(u,v) \geq 0.$

2. $\forall u, v \in \mathbb{R}^d, T(u,v) = T(v,u)$

3. $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^d, T(u,v) \leq T(u,w) + T(w,v)$

Demonstração. O tempo de passagem é positivo logo 1. é válida e 2. é verdadeira por definição. Resta mostrar 3., sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}
T(u,v) &= T(u^*, v^*) \\
&= \inf\{T(r); r \in \Gamma(u^*, v^*)\} \\
&\leq \inf\{T(r); r \in \Gamma(u^*, w^*, v^*)\} \\
&\leq \inf\{T(r_1) + T(r_2); r_1 \in \Gamma(u^*, w^*), r_2 \in \Gamma(w^*, v^*)\} \\
&\leq \inf\{T(r_1); r_1 \in \Gamma(u^*, w^*)\} + \inf\{T(r_2); r_2 \in \Gamma(w^*, v^*)\} \\
&\leq T(u^*, w^*) + T(w^*, v^*) \leq T(u,w) + T(w,v).
\end{aligned}$$

□

O estudo do tempo após o qual o vértice u é alcançado a partir de 0 é representado por $T(0,u)$, $\forall u \in \mathbb{Z}^d$. Para isso definiremos o seguinte processo estocástico:

$$a_{m,n} := T(m\epsilon_1, n\epsilon_1)$$

em que $\epsilon_1 := (1, 0, \ldots, 0)$. Seja $H_n = \{x | x_1 = n\}$ definiremos também:

$$b_{m,n} := \inf\left\{T(r) | r \in \Gamma(m\epsilon_1, H_n)\right\},$$

é evidente que $b_{m,n} \leq a_{m,n}$.

O conjunto de pontos atingidos até o tempo t será:

$$B(t) := \{x \in \mathbb{R}^d : T(0,x) \leq t\}$$

O processo $(a_{m,n})_{m,n \in \mathbb{Z}^d}$ tem forte subaditividade. Para explorar melhor esse processo precisamos desenvolver uma ferramenta fundamental da percolação de primeira passagem, o teorema ergódico subaditivo, que é o assunto da próxima seção.

2.2 Teorema Ergódico Subaditivo

Antes de enunciarmos o teorema faremos as seguintes definições:

Definição 2.2.0.1. *Um processo* $(X_{m,n}; m \leq n)$ *é subaditivo se* $X_{m,n} \leq X_{m,r} + X_{r,n}$*, para* $m \leq r < n$.

Definição 2.2.0.2. *Um processo* $(X_{m,n}; m \leq n)$ *é homogêneo se* $\{X_{m,m+k}\}_{k\geq 1}$ *não depende de* m.

Definição 2.2.0.3. *Um processo* $(X_{m,n}; m \leq n)$ *é estacionário se* $(X_{m,n}; m \leq n)$ *e* $(X_{m+1,n+1}; m \leq n)$ *têm a mesma lei.*

Kingnan desenvolveu o Teorema Ergódico Subaditivo para demonstrar a convergência de $\frac{a_{0n}}{n}$ em [Kin76]. A versão do teorema presente nesse trabalho é a de Liggett em [Lig85].

Teorema 2.2.0.1. *Seja* $\{X_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}^d}$ *uma família de variáveis aleatórias tais que:*

i. $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$, $\forall 0 < m < n$.*("subaditividade")*

ii. $\{X_{m,m+k}\}_{k\geq 1}$ *não depende de* m.*("homogeneidade")*

iii. $\forall k \geq 1$, $\{X_{mk,(m+1)k}\}_{m\geq 1}$ *é estacionário.*

iv. $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(|X_{0,n}|) < \infty$ *e* $E(X_{0,n}) > -cn$*, com* c *constante.*

Então:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{E(X_{0,n})}{n} \text{ e } \lim_{n\to\infty} \frac{E(X_{0,n})}{n} = \gamma \text{ sendo } \gamma := \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{E(X_{0,n})}{n} \tag{2.2.1}$$

$$X := \lim_{n\to\infty} \frac{X_{0,n}}{n} \text{ existe q.c. e em } L^1 \text{ , } \gamma = E(X) \text{ q.c. e em } L^1 \tag{2.2.2}$$

Além disso se o processo em iii. é também ergódico (A.1.0.1)*, então*

$$X = \gamma \text{ q.c.} \tag{2.2.3}$$

Demonstração. De *i.*,*ii.* e *iii.* temos:

$$X_{l,n} \leq X_{l,m} + X_{m,n} \; \forall 0 \leq l < m < n$$

e

$$\{X_{m+k,n+k}\}_{0\leq m<n}$$

não depende de k.

Fazendo $X_n := X_{0,n}$, $\gamma_n := E(X_n)$, $\overline{X} := \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}$ e $\underline{X} := \liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}$

A demonstração será dividida em quatro etapas:

1. $\gamma := \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{E(X_{0,n})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{E(X_{0,n})}{n}$
2. $E(\overline{X}) \leq \gamma$ e se *iii.* é ergódico, então $\overline{X} \leq \gamma$ q.c
3. $E(\underline{X}) \geq \gamma$

4. $\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{X_n}{n} - x\right| = 0$

Etapa 1: De $i.$ e $ii.$

$$\gamma_n \leq \gamma_m + \gamma_{n-m}$$

Seja $\gamma := \inf_{n\geq 1} \frac{\gamma_n}{n} < \infty$, pois $E(X_n) \geq -cn$ Fixamos $m \geq 1$, logo $n = k.m + l$ em que $0 \leq l < m$, então

$$\gamma_n = \gamma_{km+l} \leq \gamma_m + \gamma_{km+l-m} = \gamma_m + \gamma_{(k-1)m+l} \leq \gamma_{km} + \gamma_l \leq k\gamma_m + \gamma_l$$

$$\gamma_n \leq k\gamma_m + \gamma_l$$

Quando n tende à ∞, $\frac{n}{k} = \frac{km}{k} + \frac{l}{k} = m + \frac{l}{k} \to m$, daí

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} \leq \frac{\gamma_m}{m} \text{ , } \forall m > 0$$

logo

$$\gamma \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n} \leq \gamma$$

$$\therefore \gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n}{n}$$

Etapa 2: Seja $k \geq 1$, de $i.$

$$X_{kn} \leq X_{0,km} + X_{km,kn},$$

usando $i.$ repetidas vezes podemos escrever

$$X_{kn} \leq \sum_{j=1}^{n} X_{k(j-1),kj},$$

Por $iii.$ e o teorema ergódico de Birkhoff (A.1.0.5) temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{k(j-1),kj} \longrightarrow V_k \text{ q.c. e em } L^1$$

onde V_k é uma variável aleatória com $\gamma_k = E[V_k]$ então

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_{kn}}{kn} \leq \frac{V_k}{k}.$$

Portanto,

$$E\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{X_{kn}}{kn}\right] \leq \frac{\gamma_k}{k}.$$

Usando $i.$ novamente,

$$X_{kn+j} \leq X_{kn} + X_{kn,kn+j}.$$

Por $iii.$ a distribuição de $X_{kn,kn+j}$ depende apenas de j e tem mesma distribuição que $X_{0,j}$ que tem esperança finita. Assim, $\forall \epsilon > 0$

$$\sum_n P\left(\frac{X_{kn,kn+j}}{n} > \epsilon\right) = \sum_n P\left(\frac{X_{0,j}}{n} > \epsilon\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{|X_{0,j}|}{\epsilon} > n\right) \leq E\left[\frac{|X_{0,j}|}{\epsilon}\right] < \infty.$$

Por consequência do Lema de Borel-Cantelli,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{kn,kn+j}}{n} = 0 \text{ q.c. } \forall 0 \leq j \leq k.$$

Daí

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_{kn+j}}{kn} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{X_{kn}}{kn} + \limsup_{n\to\infty} \frac{X_{kn,kn+j}}{kn}.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_{kn+j}}{kn} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{X_{kn}}{kn} + 0$$

Dessa forma $E(\overline{X}) \leq \frac{\gamma_k}{k}$, fazendo $k \to \infty$,

$$E(\overline{X}) \leq \gamma.$$

Se o processo é ergódico $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_{k(j-1),kj} = \gamma_k$, assim,

$$\overline{X} \leq \gamma \text{ q.c.}$$

Etapa 3: Seja U_n uma variável aleatória independente de todas as $X_{l,m}$, com distribuição uniforme no conjunto $\{1,\ldots,n\}$ e seja $Y_k^n := X_{k+U_n} - X_{k+U_n-1}$. Assim,

$$E(Y_k^n) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} E(X_{k+l} - X_{k+l-1}) = \frac{1}{n} E(X_{k+n} - X_k) = \frac{1}{n}(\gamma_{k+n} - \gamma_k)$$

e

$$E((Y_n^k)^+) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} E((X_{k+l} - X_{k+l-1})^+) \leq \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} E(X_{k+l-1,k+l}^+) \leq E(X_1^+).$$

De acordo com $ii.$ temos

$$|Y_k^n| = 2(Y_k^n)^+ - Y_k^n, \text{ e}$$

$$E(|Y_k^n|) \leq E(X_1^+) - E(Y_k^n).$$

Daí

$$\sup_n E(|Y_k^n|) \leq 2E(X_1^+) - \inf_n \left\{ \frac{\gamma_{k+n} - \gamma_k}{n} \right\} \leq 2E(X_1^+) - M_k(\inf_n \gamma).$$

Seja $M_k := \sup_n E(|Y_k^n|) < \infty$ e $\lim_{n\to\infty} E(Y_k^n) = \gamma \quad \forall k \geq 1$

Usando o Teorema de Prokhorov (A.2.0.6), iremos mostrar que é possível extrair da família $(\{Y_k^n\}_{k\geq 1})$, uma subsequência que converge para uma família estacionária $\{Y_k\}_{k\geq 1}$. Para isso vamos mostrar que $(\{Y_k^n\}_{k\geq 1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ é rígida (A.2.0.2).

Pela desigualdade de Markov:

$$\forall n \geq 1, \forall \epsilon > 0, P\left(|Y_k^n| > \frac{M_k}{\epsilon} 2^k\right) \leq \frac{E\left[|Y_k^n|\right]\epsilon}{M_k 2^k} = \frac{M_k \epsilon}{M_k 2^k} = \frac{\epsilon}{2^k}$$

logo

$$\forall n \geq 1, \forall \epsilon > 0, P\left(\exists k; |Y_k{}^n| > \frac{M_k}{\epsilon} 2^k\right) \leq \epsilon \sum_{k \geq > 1} 2^{-k} = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \epsilon.$$

Assim
$$\forall n \geq 1, \forall \epsilon > 0, P\left(\{Y_k^n\}_{k\geq 1} \in \prod_{k\geq 1}\left[\frac{-M_k 2^k}{\epsilon}, \frac{M_k 2^k}{\epsilon}\right]\right) > 1-\epsilon$$
daí, $\forall n \geq 1$ e $\epsilon > 0$, existe um compacto k_ϵ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}$ tal que $P(\{Y_k^n\}_{k\geq 1} \in k_\epsilon) > 1-\epsilon$.

Finalmente a família $(\{Y_k^n\}_{k\geq 1})$ é rígida, aplicando o teorema de Prokhorov, existe uma subsequência $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ com distribuição conjunta $\{Y_k^n\}_{k\geq 1}$ convergente para a família estacionária $\{Y_k\}_{k\geq 1}$.

Para qualquer função limitada $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}$, que depende de um número finito de coordenadas, temos
$$\begin{aligned} E[(f(Y_1, Y_2, \ldots))] &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f dP_Y \\ &= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i}\sum_{l=1}^{n_i} E[f(X_{l+1}-X_l, X_{l+2}-X_{l+1}, \ldots)] \\ &= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i}\sum_{l=1}^{n_i} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f \circ \triangle \circ \theta^{l-1} dP_X \end{aligned} \tag{2.2.4}$$
em que $\triangle$ é definido por $\triangle(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) = (x_2 - x_3, x_3 - x_2, \ldots, x_{k+1} - x_k, \ldots)$ e θ é o "shift natural", ou seja, $\theta(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

Resta mostrar que $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ é estacionária, ou seja,
$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f dP_Y = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f \circ \theta dP_Y$$
de fato
$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f dP_Y - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f \circ \theta dP_Y = \lim_{i\to\infty}\frac{1}{n_i}\left(\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f \circ \triangle dP_X - \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}} f \circ \triangle \circ \theta^{n_i} dP_X\right) = 0$$
pois f é limitada.

Portanto $\{Y_k\}_{k\geq 1}$ é uma sequência estacionária. De $i.$ e $ii.$
$$Y_1^n = X_{U_{n+1}} - X_{U_n} \leq X_{U_n, U_{n+1}} \overset{\mathcal{L}}{=} X_1$$
Assim, usando $iv.$ $\{(Y_1^n)^+\}_{n\geq 1}$ é uniformemente integrável.

Pelo Lema de Fatou e $\lim\limits_{n\to\infty}[Y_k^n] = \gamma, k \geq 1$ temos:
$$E(Y_1) \geq \limsup_n E(Y_1^n) = \gamma_n$$
Como $\{(Y_1^n)^+\}_{n\geq 1}$ é uniformemente integrável, $\exists c > 0$ tal que $\sup\limits_n E\left((Y_1^n)^+ \mathbb{I}_{\{(Y_1^n)^+ > c\}}\right) < \epsilon$.

Seja $Z_1^n = c - Y_1^n \wedge c \geq 0$, pelo Teorema do Mapeamento Continuo,
$$Z_1^n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z_1 = c - Y_1 \wedge c.$$
Pelo lema de Fatou novamente,
$$E(Z_1) \leq \liminf_n E(Z_1^n)$$
$$E(-Y_1^n \wedge c) \leq \liminf_n E(-Y_1^n \wedge c) \leq \limsup_n E(Y_1^n \wedge c) \leq E(Y_1^n \wedge c) \leq E(Y_1).$$

Daí

$$\sup_n |E(Y_1^n \wedge c) - E(Y_1^n)| \leq E(|Y_1^n \wedge c - Y_1^n|) \leq E\left((Y_1^n)^+ \mathbb{I}_{\{(Y_1^n)^+ > c\}}\right) \leq \epsilon$$

Logo $E(Y_1) \geq \gamma$.

De acordo com o Teorema de Birkhoff,

$$Y = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad \exists \text{ q.c. e } E(Y) = E(Y_1) \geq \gamma.$$

Resta mostrar que $\underline{X}$ é maior que Y estocasticamente, para isso basta mostrar:

$$(Y_1, Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_2 + Y_3, \ldots) \leq_{stoc} (X_1, X_2, X_3, \ldots),$$

o que é equivalente à

$$(Y_1, \frac{Y_1 + Y_2}{2}, \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}, \ldots, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k, \ldots) \leq_{stoc} (X_1, \frac{X_2}{2}, \frac{X_3}{3}, \ldots, \frac{X_n}{n}, \ldots),$$

o que vem de i. e ii.. Através de (2.2.4), para qualquer função limitada f em $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_*}$, que depende de um número finito de coordenadas,

$$\begin{aligned} E[f(Y_1, , Y_1 + Y_2, \ldots)] &= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i} \sum_{l=1}^{n_i} E[f(X_{l+1} - X_l, X_{l+2} - X_{l+1}, \ldots)] \\ &\leq \lim_{i\to\infty} \sum_{l=1}^{n_i} E[f(X_{l,l+1}, X_{l,l+2}, \ldots)] \leq E[f(X_1, X_2, \ldots)] \end{aligned}$$

Logo $E(\underline{X}) \geq \gamma$

Etapa 4: Das etapas 2 e 3 temos

$$X := \overline{X} = \underline{X}$$

em que $E(X) = \gamma$.

Tomando $X_{kn} \leq \sum_{j=1}^{n} X_{k(j-1),kj}$ e fazendo $k = 1$, temos:

$$X_n \leq \sum_{j=1}^{n} X_{j-1,j}.$$

Logo $\left(\frac{X_n}{n}\right)^+ \leq \sum_{j=1}^{n} X_{j-1,j}^+$ que converge em L^1 e dessa forma é uniformemente integrável, portanto:

$$\left(\frac{X_n}{n}\right)^+ \text{ é uniformemente integrável, ou seja, } \lim_{n\to\infty} E\left(\left(\frac{X_n}{n}\right)^+ - X^+\right) = 0$$

Além disso, $\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{X_n}{n}\right) = E(X)$, ou seja, $E\left(\frac{X_n}{n} - X\right) = 0$. Como

$$E\left(\left|\frac{X_n}{n} - X\right|\right) = 2E\left(\left(\frac{X_n}{n} - X\right)^+\right) - E\left(\frac{X_n}{n} - X\right)$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} E\left|\frac{X_n}{n} - x\right| = 0$$

$\square$

2.3 A constante de tempo

O teorema será aplicado ao processo $a_{m,n}$, na verdade aplicaremos à $\frac{a_{0,n}}{n}$ quando $n \to \infty$. O processo $(a_{m,n})$ foi estudado pela primeira vez por Harry Kesten em 1986, mas foi introduzido por Hammersley e Welsh em 1965.

O processo $(a_{m,n})$ satisfaz as hipoteses do Teorema Ergódico Subaditivo, com efeito:

A hipótese de subaditividade *i.*:

$$a_{0,n} \leq a_{0,m} + a_{m,n} \quad \forall 0 \leq m < n$$

é claramente satisfeita, pelo fato de que o caminho entre 0 e $m\epsilon_1$ pode ser concatenado através de um caminho entre 0 e $n\epsilon_1$ a um caminho entre $n\epsilon_1$ e $m\epsilon_1$.

As hipóteses de homogeneidade e estacionariedade *ii.* e *iii.* são verificadas pois $t(e)$, $e \in \mathcal{E}$, são independentemente e identicamente distribuídas, o que implica num modelo invariante a translações sobre ϵ_1.

Com relação à *iv.*, $E(a_{0,n}) \geq 0 \geq -cn$, $\forall c \geq 0$ é verificada quando$F(0-) = 0$, no entanto a hipótese $E(|a_{0,n}|) < \infty$ não é necessariamente verdade. Nesse caso é necessario acrescentar uma hipótese sobre a distribuição do tempo de passagem. Uma condição suficiente é que

$$E(\min\{t_1, t_2, \ldots, t_{2d}\}) < \infty, \tag{2.3.1}$$

onde $t_1, t_2, \ldots, t_{2d}$ são independentes e tem mesma lei que o tempo de passagem pelas arestas. Para mostrar (2.3.1) é necessário notar que existem $2d$ caminhos disjuntos $r_1, r_2, \ldots, r_{2d}$ entre 0 e $n\epsilon_1$, ou seja, $2d$ caminhos que não tem vértices em comum, daí

$$a_{0,n} \leq \min\{T(r_1), T(r_2), \ldots, T(r_{2d})\}$$

então

$$P\left(\min_{1\leq i\leq 2d} T(r_i) \geq k\right) = \prod_{i=1}^{2d} P(T(r_i) > k)$$

e

$$\begin{aligned} P(T(r_i) > k) = P(t_1 + \cdots + t_{l(r_i)} > k) \leq \\ \leq l(r_i) \cdot P\left(t_1 \geq \frac{k}{l(r_i)}\right) \leq l(n) \cdot P\left(t_1 \geq \frac{k}{l(n)}\right) \end{aligned}$$

em que $l(r_i)$ é o comprimento do caminho r_i, $l(n)$ é o comprimento de um caminho maior que r_i, $i \in \{1, \ldots, 2d\}$ e $t_1, \ldots, t_{l(r_i)}$ são $l(r_i)$ variáveis aleatórias com distribuição ν. Consequentemente

$$P(\min_i T(r_i) > k) \leq (l(n))^{2d} \prod_{i=1}^{2d} P\left(t_i \geq \frac{k}{l(n)}\right)$$

e $E\left(\min_{1\leq i\leq 2d} t_i\right) < \infty$ implica que $\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\min_i t_i > k\right) < \infty$. Daí podemos usar a desigualdade acima para deduzir que $\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\min_i T(r_i) > k\right) < \infty$, daí $E\left(\min_{1\leq i\leq 2d} T(r_i)\right) < \infty$, assim

$$E\left(|a_{0n}|\right) < \infty.$$

Desse modo *iv.* é verificada por (2.3.1) e pelo teorema ergódico subaditivo:

Teorema 2.3.0.2. *Sob a condição* (2.3.1)*, temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{0,n}}{n} = \mu \text{ } q.c. \text{ e em } L^1$$

A constante μ é chamada constante de tempo. Denotaremos por $\mu(\nu)$ ou $\mu(F)$ a constante de tempo correspondente ao tempo de passagem sobre as arestas de medida ν e função de distribuição F.

2.4 Propriedades da constante de tempo

Nessa Seção, estudaremos a constante de tempo, vamos encontrar um limite superior para a constante, fazer algumas comparações para $\mu(F)$ quando F tem distribuição de Bernoulli e obter um resultado para a regularidade de μ dependendo da distribuição para o tempo de passagem.

2.4.1 Limitante superior para a constante de tempo

Teorema 2.4.0.3. *Temos que,*

$$0 \leq \mu \leq E[t(e)]$$

a segunda desigualdade é estrita se ν não for concentrada em um único ponto.

Demonstração. Seja S_n a soma dos tempos de passagem pelas n primeiras arestas localizadas no lado positivo da primeira coordenada do eixo. Assim

$$0 \leq \frac{a_{0,n}}{n} \leq \frac{S_n}{n}$$

usando a lei forte dos grandes números

$$0 \leq \mu \leq E[t(e)].$$

Claramente, se ν é concentrada em um único ponto, temos $a_{0,n} = S_n$ e $\mu = E[t(e)]$.

Seja X tal que

$$0 < X < E[t(e)] \text{ e } F(X) > 0$$

Fazendo $p = F(X)$ e seja n tal que

$$(n+2)X < nE[t(e)].$$

Então, para todo i inteiro tal que $1 \leq i \leq n$, $e_i := ((i-1)\epsilon_1, i - \epsilon_1)$, $e'_i := ((i-1)\epsilon_2, i - \epsilon_2)$, $e'_0 := (0, \epsilon_2)$ e $e'_{n+1} := (n\epsilon_1 + \epsilon_2, n\epsilon_1)$.

Vamos denotar por U_i(respectivamente U'_i) os tempos de passagem por e_i(respectivamente e'_i). Definindo:

$$y(w) := \min\left\{\sum_{i=1}^{n} U_i, \sum_{i=0}^{n+1} U'_i\right\}.$$

Fazendo

$$y^*(w) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n+1} U_i'(w) & \text{se } \forall i, U_i'(w) \leq X \\ \sum_{i=1}^{n} U_i(w) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Daí

$$E[y^*(w)] = p^{n+1} E\left[\sum_{i=0}^{n+1} U_i'; U_i'(w) \leq X, \forall i\right] + (1-p^{n+1}) E\left[\sum_{i=1}^{n} U_i\right] \leq$$
$$\leq p^{n+1}(n+2)X + (1-p^{n+1}) n E[t(e)] < nE[t(e)].$$

Assim, temos $a_{0,n} \leq y \leq y^*$, portanto

$$n\mu \leq E[a_{0,n}] < nE[t(e)]$$
$$\mu < E[t(e)]$$

□

No caso particular em que a distribuição é tal que $F(0) = p > 0$, Smythe e Weirman em [SW06] encontraram um limite superior para $\mu(F)$ em função da constante de tempo dada um distribuição de Bernoulli com parâmetro $1 - p$.

Teorema 2.4.0.4. *Seja F um função de distribuição de uma variável aleatória positiva tal que $p := F(0) > 0$ e seja $\mu(p)$ a constante de tempo de uma distribuição de Bernoulli tal que $P(X = 0) = p$, então*

$$\mu(F) \leq \frac{\mu(p)}{1-p} E[t(e)]$$

Demonstração. Seja G uma função definida por:

$$G(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \leq 0 \\ \frac{F(X)-p}{1-p} & \text{se } X > 0 \end{cases}$$

É fácil ver que G é uma função de distribuição. Seja $(B_e)_{e\in\mathcal{E}}$ uma família de variáveis aleatórias independentemente e identicamente distribuídas com distribuição $Ber(1-p)$ e $(X_e)_{e\in\mathcal{E}}$ uma família de variáveis aleatórias independentemente e identicamente distribuídas com distribuição G independente da família $(B_e)_{e\in\mathcal{E}}$. Assim $\forall e \in \mathcal{E}$ e $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$P(B_e X_e \leq t) = P(B_e X_e \leq t \text{ e } B_e = 0) + P(B_e X_e \leq t \text{ e } B_e = 1) =$$
$$= P(t \geq 0 \text{ e } B_e = 0) + P(X_e \leq t) P(B_e = 1) =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ p + (1-p)G(t) & \text{se } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ F(t) & \text{se } t > 0 \end{cases} = F(t).$$

Daí, $\forall e \in \mathcal{E}$, $B_e X_e$ tem função de distribuição F e $(B_e X_e)_{e\in\mathcal{E}}$ é uma família independente e identicamente distribuída.

Seja r_n^B um caminho por $l_{0,n}^B$ que se identifica com $l_{0,n}$ quando o tempo de passagem das arestas seguem a distribuição de B_e. Seja N_n o número de arestas e em $r_{0,n}^B$ tal que $B_e = 1$, assim $l_{0,n}^B = N_n$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{N_n}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{l_{0,n}^B}{n}\right] = \mu.$$

Fazemos $\delta_n = T(r_n^B)$ quando os tempos de passagem das arestas seguem a distribuição de partida. Logo, δ_n é a soma das X_e em N_n arestas e de r_n^B tais que $B_e = 1$. As X_e, $e \in \mathcal{E}$, são independentes das B_e, $e \in \mathcal{E}$, portanto de r_n^B, daí

$$E\left[\delta_n | (B_e)_{e\in\mathcal{E}}\right] = E[X_e] \times N_n,$$

com $l_{0,n} \leq \delta_n$. Logo,

$$E\left[\frac{l_{0,n}}{n}\right] \leq E[X_e] E\left[\frac{N_n}{n}\right],$$

fazendo $n \to \infty$, vamos ter $\mu \leq E[X_e]\mu(p)$, com $E[X_e] = \frac{E[t(e)]}{1-p}$, logo

$$\mu \leq \frac{\mu(p)}{1-p} E[t(e)] \text{ em que } p = F(0).$$

□

2.4.2 Continuidade da constante de tempo

Esse resultado foi obtido por Cox e Kesten[CK81].

Teorema 2.4.0.5. *Se ν_n converge em distribuição para ν quando $n \to \infty$, então $\mu(\nu_n)$ converge para $\mu(\nu)$ quando $n \to \infty$, ou seja, μ é contínua com respeito a ν, pela convergência fraca.*

A demonstração será omitida mas pode ser vista em [CK81].

A pergunta natural nesse contexto é se $\mu(\nu)$ pode ser calculada quando ν for especificada, o que infelizmente está longe de ser possível para uma ν não trivial. No entanto é possível determinar em quais casos μ é 0 ou estritamente positiva. Esse resultado será demonstrado, em partes, no próximo capítulo cujo ponto de partida é a forma assintótica de $B(t)$.

Capítulo 3

Forma assintótica e consequência

Nesse capítulo, vamos demonstrar o teorema da forma assintótica para $B(t)$. Há dois casos, em um a forma assintótica é um compacto no outro é $\mathbb{R}^d$. Será possível também exibir uma delimitação para $B(t)$ quando compacto e deduzir a convergência de $\frac{b_{0,n}}{n}$ através do teorema.

3.1 Teorema da forma assintótica

Antes de enunciar o teorema, veremos alguns resultados necessários.

Lema 3.1.1. *Temos que*

$$E[t_1^2] < \infty \Rightarrow E[\min(t_1^d, \dots, t_{2d}^d)] < \infty$$

Demonstração. Se $E[t_1^2] < \infty$, então $E[t_1^2] \leq C$, para algum $C \in \mathbb{R}$, daí:

$$\begin{aligned}
E\left[\min\left(t_1^d, \dots, t_{2d}^d\right)\right] &= \sum_k P\left[\min\left(t_1^d, \dots, t_{2d}^d\right) > k\right] \\
&= \sum_k \prod_{i=1}^{2d} P\left[t_i^d > k\right] \\
&= \sum_k \left(P\left[t_1^d > k\right]\right)^{2d} \\
&= \sum_k P\left[t_1 > k^{\frac{1}{d}}\right]^{2d} \leq \sum_k \frac{E\left[t_1\right]^{2d}}{k^2} \\
&\leq \sum_k \left(P\left[t_1^2 > k^{\frac{2}{d}}\right]\right)^{2d} \\
&\leq \sum_k \frac{E\left[t_1^2\right]^{2d}}{k^4} \leq \sum_k \frac{C^{2d}}{k^4} < \infty
\end{aligned}$$

□

Lema 3.1.2. *Se $E[t^2(e)] < \infty$, então para $d \geq 2$, para todos $u, v \in \mathbb{Z}^d$ e $\forall \lambda > 2d$, existe $k_1 > 0$ tal que*

$$P\left(T(u,v) \geq 2E[t(e)](|u-v|+\lambda)\right) \leq k_1(|u-v|+\lambda)^{-2d}.$$

Demonstração. • Caso $d \geq 3$:

Sem perda de generalidade, podemos supor que $u = 0$. Há $2d$ caminhos r_i de arestas disjuntas de 0 a v contendo no máximo $|v|+2d$ arestas. Uma vez que os diferentes caminhos r_i têm arestas dijuntas e $t(e)$ são independentes, temos

$$P\left(T(0,v) \geq 2E[t(e)](|v|+\lambda)\right) \leq \prod_{i=1}^{2d} P\left(T(r_1) \geq 2E[t(e)](|v|+\lambda)\right),$$

$$\begin{aligned} E[T(r_1)] &\leq E[t(e)] \times (\text{ número de arestas de } r_i \text{ }) \\ &\leq E[t(e)](|u-v|+2d) \end{aligned}$$

$$\sigma^2(T(r_i) \leq E[t^2(e)](|u-v|+2d))$$

$$\begin{aligned} \{T(r_i) \geq 2E[t(e)](|u-v|+\lambda)\} &\subset \{(T(r_i) - E[T(r_i)]) \geq E[t(e)](|u-v|+2\lambda-2d)\} \\ &\subset \{|T(r_i) - E[T(r_i)]| \geq E[t(e)](|u-v|+2\lambda-2d)\} \end{aligned}$$

pois $E[t(e)](|u-v|+2\lambda-2d) > 0$, já que $\lambda > 2d$ e $F(0-) = 0$. Aplicando a desigualdade de Tchebychev, obtemos

$$P(|T(r_i) - E[T(r_i)]| \geq E[t(e)](|u-v|+2\lambda-2d)) \leq \frac{\sigma^2(T(r_i))}{(E[t(e)](|u-v|+2\lambda-2d))^2}$$

$$\leq \frac{E[t^2(e)](|u-v|+2d)}{E[t(e)]^2(|u-v|+2\lambda-2d)^2} \leq \frac{E[t^2(e)]}{E[t(e)]^2} \cdot \frac{1}{|u-v|+\lambda},$$

pois $\frac{|u-v|+2d}{|u-v|+2\lambda-2d} = \frac{|u-v|+2d}{|u-v|+2d+2\lambda-4d} < 1$ e $|u-v|+2\lambda-2d \geq |u-v|+\lambda$, já que $2d-2\lambda \geq \lambda$.

Assim com $k_1 = \left(\frac{E[t^2(e)]}{E[t(e)]^2}\right)^{2d}$, o lema está provado.

• Caso $d = 2$:

Não é sempre que existem $2d = 4$ caminhos de 0 a v, de tamanho $|v|+4$, disjuntos. Nesse caso devemos substituir $2d$ por 6 e a demonstração segue da mesma forma.

□

Lema 3.1.3. *Se $E[t^2(e)] < \infty$, existe uma constante k_2 tal que $\forall 0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$:*

$$P(T(u,v) \leq k_2\epsilon|u|, \forall u, v \in \mathbb{Z}^d; |u-v| \leq \epsilon|u| \text{ e } |u| \text{ suficientemente grande}) = 1$$

Demonstração. Seja $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$ e $C_k = C_k(\epsilon)$ o conjunto de todos os vértices $v = (v_1, \ldots, v_d)$ tal que $|v| = \lfloor (1+\epsilon)^k \rfloor$ e os $v_1, \ldots, v_{d-1}$ são divisíveis por $\lfloor \epsilon(1+\epsilon)^{k-1} \rfloor$. Gostariamos de um limitante para C_k.

Com base nas hipóteses, $\forall 1 \leq i \leq d-1$, $\exists \lambda_i > 0$, tal que

$$|v_i| = \lambda_i \lfloor \epsilon(1+\epsilon)^{k-1} \rfloor \text{ e } \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right) \lfloor \epsilon(1+\epsilon)^{k-1} \rfloor = \lfloor (1+\epsilon)^k \rfloor$$

Daí $\forall 1 \leq i \leq d-1$, vamos ter $\lambda_i \lfloor \epsilon(1+\epsilon)^{k-1} \rfloor \leq \lfloor (1+\epsilon)^k \rfloor$

- Se $\epsilon(1+\epsilon)^{k-1} < 1$, então não há valores possíveis para os λ_i pois os v_i não podem ser divisíveis por 0.
- Se $\epsilon(1+\epsilon)^{k-1} \geq 1$, então

$$\lambda_i \leq \frac{\lfloor(1+\epsilon)^k\rfloor}{\lfloor\epsilon(1+\epsilon)^{k-1}\rfloor} \leq \frac{(1+\epsilon)^k}{\lfloor\epsilon(1+\epsilon)^{k-1}\rfloor} = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}\frac{\epsilon(1+\epsilon)^{k-1}}{\lfloor\epsilon(1+\epsilon)^{k-1}\rfloor}$$
$$\leq \frac{1+\epsilon}{\epsilon}.2 \leq \frac{3/2}{\epsilon}.2 = \frac{3}{\epsilon}$$

  Portanto o número de valores possíveis para cada v_i é menor ou igual a $\frac{6}{\epsilon}$

Em todos os casos, há no máximo $\frac{6}{\epsilon}$ valores possíveis para v_i $\forall 1 \leq i \leq d-1$ e $\forall v \in C_k$ $|v_d|$ é inteiramente determinado por $v_1, \ldots, v_{d-1}$. Daí

$$|C_k| \leq \left(\frac{6}{3}\right)^d.$$

Seja o evento

$$E_k := E_k(\epsilon) = \{T(u,v) \leq k_3\epsilon(1+\epsilon)^k \text{ para todos}$$
$$\text{os vértices } u \text{ e } v \text{ tais que } u \in C_k,\ |u-v| \leq 4d\epsilon(1+\epsilon)^k\}$$

em que $k_3 = 10d \times E[t(e)]$.

De acordo com o lema anterior, para k suficientemente grande,

$$\begin{aligned} P(E_k^c) &\leq \sum_{u\in C_k}\sum_{v;|u-v|\leq 4d(1+\epsilon)^k} P(T(u,v) > k_3\epsilon(1+\epsilon)^k) \\ &\leq \left(\frac{6}{\epsilon}\right)^d (8d\epsilon(1+\epsilon)^k)^d k_4(\epsilon(1+\epsilon)^k)^{-2d} \\ &\leq \frac{k_5}{\epsilon^{2d}}(1+\epsilon)^{-dk} \end{aligned}$$

com $k_5 = k_5(d)$ uma constante. Assim

$$\sum_k P(E_k^c) = \frac{k_5}{\epsilon^{2d}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[(1+\epsilon)^d]^k} < \infty.$$

Pelo lema de Borel-Cantelli, $P(E_k^c$ acontecer infinitas vezes$) = 0$

Agora, considere uma realização de $t(e)$ tal que exista um $k_0 < \infty$ e E_k ocorra $\forall k \geq k_0$, assumindo $\epsilon(1+\epsilon)^{k_0} > 1$, sem perda de generalidade. Vamos mostrar que para essa realização:

$$T(u,v) \leq 4k_3\epsilon|u| \text{ sempre que } |u| \geq (1+\epsilon)^{k_0} \text{ e } |u-v| \leq \epsilon|u|. \tag{3.1.1}$$

Seja $l = l(u)$ o único inteiro tal que:

$$\lfloor(1+\epsilon)^l\rfloor \leq |u| < \lfloor(1+\epsilon)^{l+1}\rfloor, \tag{3.1.2}$$

e $z = z(u)$ o vértice de C_{l+1} tal que

$$|u - z(u)| = \min_{y\in C_{l+1}} |u-y|.$$

Se $|u|\geq (1+\epsilon)^{k_0}$, então $l(u) \geq k_0$ e por definição de C_{l+1}, existe $y \in C_{l+1}$ tal que

$$|y(i)|\leq |u(i)| \ , \ |y(i)-u(i)|\leq \lfloor \epsilon(1+\epsilon)^l \rfloor \ , \ \forall 1 \leq i \leq (d-1) \text{ e } sgn(y(d)) = sgn(u(d)) \quad (3.1.3)$$

De (3.1.2) e (3.1.3)

$$\begin{aligned} |y(d)-u(d)| &= |y(d)|-|u(d)| \\ &\leq \lfloor (1+\epsilon)^{l+1} \rfloor - \sum_{i=1}^{d-1} |y(i)| - \left\{ \lfloor (1+\epsilon)^l \rfloor - \sum_{i=1}^{d-1} |u(i)| \right\} \\ &\leq d\epsilon(1+\epsilon)^l + 1 \end{aligned}$$

como $\epsilon(1+\epsilon)^{K_0} \geq 1$

$$|y-u|\leq 2d\epsilon(1+\epsilon)^l$$

e, assim

$$|u-z(u)|\leq 2d\epsilon(1+\epsilon)^l.$$

Se E_{l+1} ocorre:

$$T(z(u),u) \leq k_3\epsilon(1+\epsilon)^{l+1},$$

e se $|u-v|\leq \epsilon|u|\leq \epsilon(1+\epsilon)^{l+1}$, então

$$|v-z(u)|\leq |v-u|+|u-z(u)|\leq (2d+1)\epsilon(1+\epsilon)^{l+1}.$$

Daí,

$$T(u,v) \leq T(z(u),u) + T(z(u),v) \leq 2k_3\epsilon(1+\epsilon)^{l+1} \leq 4k_3\epsilon|u|$$

O que prova (3.1.1) e o lema com $k_2 = 4k_3$.

□

Essa versão do teorema foi obtida por Harry Kesten em [Kes03] e segue as principais idéias do teorema geral, que pode ser visto em [**RIC03**].

Teorema 3.1.3.1. *Se* $E[\min(t_1^d, \ldots, t_{2d}^d)] < \infty$*, existe um convexo determinístico* $B_0 = B_0(F,d) \subset \mathbb{R}^d$ *de interior não-vazio que é:*

- *Compacto, no caso* $\forall \epsilon > 0$ *e para* t *suficientemente grande,*

$$(1-\epsilon)B_0 \subset \frac{B(t)}{t} \subset (1+\epsilon)B_0 \ q.c., \quad (3.1.4)$$

- *Ou igual a* $\mathbb{R}^d$*, no caso* $\forall \epsilon > 0$ *e para* t *suficientemente grande,*

$$\{x \in \mathbb{R}^d; ||x||\leq \epsilon^{-1}\} \subset \frac{B(t)}{t} \ q.c.. \quad (3.1.5)$$

Além disso, B_0 *é invariante a permutação de coordenadas ou reflexões sobre os hiperplanos de equações* $\{x_i = 0\}$.

Sem a hipótese $E[\min(t_1^d, \ldots, t_{2d}^d)] < \infty$,

$$\limsup_{||v|| \to \infty} \frac{T(0,v)}{||v||} = \infty \ q.c.. \quad (3.1.6)$$

O teorema indica que $B(t)$ aumenta linearmente em t quando B_0 é compacto e mais do que linearmente quando $B_0 = \mathbb{R}^d$

Vamos demonstrar o teorema da forma assintótica assumindo algo mais forte(como visto em ,lema2.1.1.):

$$E[t^2(e)] < \infty \tag{3.1.7}$$

Demonstração. Vamos mostrar que se $\mu > 0$, então vale (3.1.4), para um compacto convexo B_0 que é invariante a permutação de coordenadas ou reflexões sobre os hiperplanos de equações $\{x_i = 0\}$ e que intercepta o i^e eixo de coordenadas em $(0, \ldots, 0, \pm\mu^{-1}, 0, \ldots, 0)$. Em particular $\mu = 0$ implica em (3.1.5).

Para começar, vamos explorar algumas propriedades de μ. Seja $\mathcal{V}_M$ o conjunto de todos vetores $x = (x(1), \ldots, x(d)) \in \mathbb{R}^d$ em que cada $x(i)$ é múltiplo inteiro de M^{-1} e $\mathcal{V} = \bigcup_{M \geq 1} \mathcal{V}_M$. $\forall x \in \mathcal{V}_M$ o processo:

$$X_{m,n} = T(mMx, nMx)\ ,\ m \leq n,$$

satisfaz o teorema ergódico subaditivo, logo $\exists \mu(x) < \infty$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nM} T(0, nMx) = \mu(x) \text{ q.c. e em } L^1.$$

i) $\mu(x)$ é único $\forall x \in \mathcal{V}$.

De fato, se $x \in \mathcal{V}_M \cap \mathcal{V}_N$, então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nM} T(0, nMx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nMN} T(0, nMNx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nN} T(0, nNx).$$

ii) $\mu(\cdot)$ é homogenea em $\mathcal{V}$

Para o racional $r > 0$,

$$\mu(rx) = r\mu(x).$$

iii) μ é uniformemente contínua sobre $\mathcal{V}$

Primeiro note que se $x \in \mathcal{V}_M$ e $y \in \mathcal{V}_N$, então $x - y \in \mathcal{V}_{MN}$ e

$$\mu(y) - \mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nMN} (T(0, nMNy) - T(0, nMNx)).$$

Uma vez que,

$$T(0, nMNy) \leq T(0, nMNx) + T(nMNx, nMNy)$$

e $T(nMNx, nMNy)$ tem mesma distribuição de $T(0, nMN(y - x))$, segue que

$$\mu(y) - \mu(x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nMN} T(nMNx, nMNy) \text{ em probabilidade } = \mu(y - x).$$

iv) $\mu(0) = 0$ e $\mu(\lambda x) = \lambda\mu(x)\ ,\ \lambda > 0$

$$\mu((\pm x(\sigma(1)), \pm x(\sigma(2)), \ldots, \pm x(\sigma(d)))) = \mu((x(1), x(2), \ldots, x(d))), \tag{3.1.8}$$

para qualquer permutação $(\sigma(1), \ldots, \sigma(d))$ de $(1, \ldots, d)$, uma vez que todo modelo é invariante a permutações ou reflexões de coordenadas. Assim

$$\begin{array}{rcl} \mu((x(1), x(2), \ldots, x(d))) & \leq & \sum_{i=1}^{d} \mu(0, \ldots, 0, x(i), 0, \ldots, 0) \\ & = & \sum_{i=1}^{d} |x(i)| \mu(1, 0, \ldots, 0) = \mu \sum_{i=1}^{d} |x(i)|. \end{array} \tag{3.1.9}$$

Daí,

$$|\mu(y) - \mu(x)| \leq \mu(y - x) \leq \mu \sum_{i=1}^{d} |x(i) - y(i)| \tag{3.1.10}$$

Podemos estender μ por continuidade $\forall z \in \mathbb{R}^d$ fazendo:

$$\mu(z) = \lim_{x \in \mathcal{V} \to z} \mu(x).$$

Daí de (3.1.8), (3.1.9) e (3.1.10), $\mu(\cdot)$ é Lipschitz-contínua, isto é:

$$\mu(0) = 0 \text{ e } \mu(\lambda x) = \lambda \mu(x) \ , \ \lambda > 0 \tag{3.1.11}$$

v) $\mu(x) = 0$, para algum $x \neq 0 \Rightarrow \mu(x) = 0 \forall x$

Assuma $\mu((x(1), x(2), \ldots, x(d))) = 0$, para algum x com $x(1) \neq 0$, então de (3.1.8), (3.1.9) e (3.1.11):

$$\begin{array}{rcl} 2|x(1)|\mu & = & \mu((2x(1), 0, \ldots, 0)) \\ & \leq & \mu((x(1), x(2), \ldots, x(d))) + \mu((x(1), -x(2), \ldots, -x(d))) \\ & = & \mu(x) + \mu(x) = 0 \end{array}$$

Assim de (3.1.10) $\mu(\cdot) \equiv 0$.

Mostraremos (3.1.4) quando $\mu > 0$ e $B_0 = \{x; \mu(x) \leq 1\}$. Inicialmente vamos mostrar que B_0 é compacto, convexo e invariante a permutação de coordenadas ou reflexões sobre os hiperplanos de equações $\{x_i = 0\}$.

$\{|x| = 1\}$ é compacto, assim como μ é contínua, $\mu(\{|x| = 1\})$ admite mínimo, seja $\min\limits_{|x|=1} \mu(x) = \alpha > 0$, dado $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\mu\left(\frac{x}{|x|}\right) \geq \alpha \Rightarrow |x| \leq \frac{\mu(x)}{\alpha}.$$

Daí $\forall x \in B_0$:

$$|x| \leq \frac{1}{\alpha} < \infty,$$

o que implica em B_0 limitado.

$B_0 = \mu^{-1}([0, 1])$ e μ é contínua, então B_0 é fechado.

Sejam x e $y \in B_0$:

$$\begin{array}{rcl} \mu(\lambda x + (1 - \lambda) y) & \leq & \mu(\lambda x) + \mu((1 - \lambda) y) \\ & \leq & \lambda \mu(x) + (1 - \lambda) \mu(y) \\ & \leq & \lambda + 1 - \lambda = 1. \end{array}$$

Desse modo $\lambda x + (1 - \lambda) y \in B_0$, logo B_0 é convexo.

Como os elementos da família $\{t(e)\}_{e\in\mathcal{E}}$ são independentes e identicamente distribuidos nosso modelo é invariante a permutação de coordenadas ou reflexões sobre os hiperplanos de equações $\{x_i = 0\}$ e μ também é, assim B_0 é invariante a permutação de coordenadas ou reflexões sobre os hiperplanos de equações $\{x_i = 0\}$.

Finalmente, mostramos que

$$\forall\epsilon > 0, -\epsilon|y|+\mu(y) \leq T(0,y) \leq \mu(y) + \epsilon|y| \text{ q.c., para } y \text{ suficientemente grande} \tag{3.1.12}$$

Essa relação independe do fato de $\mu > 0$.

Considere as realizações de $t(e)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T(0,nx)}{n} = \mu(x), \forall x \in \mathcal{V}$$

e no caso do terceiro lema $\forall\epsilon$ da forma $\frac{1}{m}$, $m \geq 2$.

Todas as realizações que têm essa propriedade têm probabilidade 1, pois são intersecção enumerável de conjuntos com probabilidade 1.

Vamos mostrar que para essas realizações (3.1.12) é válida.

Suponha que (3.1.12) não seja válida, em particular existe ϵ suficientemente pequeno o quanto se queira, por exemplo $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, ao longo de uma sequência y_n tal que $|y_n|\to \infty$ e $\frac{y_n}{|y_n|} \to z$ quando $|z|= 1$ e $z \in \mathcal{V}$.

Assim a partir de certo n:

$$|T(0, y_n) - \mu(y_n)|\geq \epsilon|y_n| \tag{3.1.13}$$

Pode-se encontrar um $m > \frac{k_2+2}{\epsilon}$ e M tal que $z = \frac{k}{M}(k \in \mathbb{Z}^d, z \in \mathcal{V})$, tal que para n suficientemente grande, temos:

$$\left|\mu\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right) - \mu(z)\right| \leq \frac{1}{m} \text{ e } |T(0, y_n) - \mu(y_n)|\geq \epsilon|y_n|$$

Precisamos de um ponto próximo à y_n em $\mathbb{Z}^d$, escolhendo $v = \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz$, onde $\lfloor . \rfloor$ denota a parte inteira piso, temos:

$$|y_n|z - Mz \leq \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz \leq |y_n|z$$

então

$$|y_n|z - Mz - y_n \leq \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz - y_n \leq |y_n|z - y_n,$$

daí,

$$|y_n|\left(z - \frac{Mz}{|y_n|} - \frac{y_n}{|y_n|}\right) \leq \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz - y_n \leq |y_n|\left(z - \frac{y_n}{|y_n|}\right)$$

Como $z - \frac{y_n}{|y_n|} \to 0$ e $\frac{Mz}{|y_n|} \to 0$, a partir de certo tamanho $\left|y_n - \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz\right| \leq \frac{|y_n|}{m}$.

Daí

$$\left|T(0, y_n) - M\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right)\right| \leq \frac{1}{|y_n|}\left|T(0, y_n) - T\left(0, \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz\right)\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{|y_n|}T\left(0, \left\lfloor \frac{|y_n|}{M} \right\rfloor Mz\right) - \mu(z)\right| + \left|\mu(z) - \mu\left(\frac{y_n}{|y_n|}\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{k_2}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{k_2+2}{m} < \epsilon,$$

o que contradiz (3.1.13). Assim a condição (3.1.12) é verificada q.c.

Se $\mu > 0$, seja $\epsilon > 0$ e $x \in (1-\epsilon)B_0 = \{z; \mu(z) \leq 1-\epsilon\}$. Temos

$$\begin{aligned} T(0,tx) &\leq \mu(tx) + \tilde{\epsilon}|tx| \\ &\leq t\mu(x) + \tilde{\epsilon}t|x| \\ &\leq (1-\epsilon)t + \tilde{\epsilon}t|x| \\ &\leq t \end{aligned}$$

quando $\tilde{\epsilon}|x| < \epsilon$

Finalmente $(1-\epsilon)B_0 \subset \frac{B_t}{t}, \forall \epsilon > 0$.

Seja $x \in \frac{B_t}{t} = \{x, T(0,tx) \leq t\}$ Assim,

$$\mu(x) = \frac{1}{t}\mu(tx) \leq \frac{1}{t}(T(0,tx) + \tilde{\epsilon}t|x|) \leq 1 + \tilde{\epsilon}|x|, \forall \tilde{\epsilon} > 0$$

logo $\mu(x) \leq 1+\epsilon$, $\epsilon > 0$.

Finalmente $\frac{B_t}{t} \subset (1+\epsilon)B_0$, $\epsilon > 0$.

Portanto, mostramos que se $\mu > 0$, então (3.1.4) é válido. Se $\mu = 0$, então (3.1.12) implica em (3.1.5). Com efeito, seja $\epsilon > 0$ e $x \in \{x \in \mathbb{R}^d; ||x|| \leq \epsilon^{-1}\}$. Daí

$$T(0,tx) \leq \tilde{\epsilon}|tx| = t\tilde{\epsilon}|x| \leq t$$

quando $\tilde{\epsilon}|x| \leq 1$

Nos resta mostrar (3.1.6). Seja

$$Y(v) := \min\{t(e); e \text{ é incidente à } v\} \leq T(0,v) \tag{3.1.14}$$

As variáveis aleatórias $Y(v)$ tal que v_i é par para $1 \leq i \leq d$ são independentes e cada $Y(v)$ tem distribuição $\min(t_1, \ldots, t_{2d})$. Se $E(\min(t_1^2, \ldots, t_{2d}^2)) = \infty$, então $\forall \lambda > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{v; v_i \text{ é par} \forall i} P(Y(v) \geq \lambda|v|) &= \sum_{k=0}^{\infty} Card\{v; v_i \text{é par e } |v| = 2k\} P(\min(t_1, \ldots, t_{2d}) \geq 2\lambda k) \\ &\geq k_6 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{d-1} P(\min(t_1, \ldots, t_{2d}) \geq 2\lambda k) \\ &\geq k_7 E(\min(t_1^2, \ldots, t_{2d}^2)) = \infty. \end{aligned}$$

Assim pelo Lema de Borel-Cantelli para todos $\lambda > 0$, $Y(v) \geq \lambda|v|$ ocorre infinitas vezes quase certamente, daí $T(0,v) \geq \lambda|v| \Rightarrow \frac{T(0,v)}{|v|} \geq \lambda$ ocorre infinitas vezes quase certamente $\forall \lambda > 0$, portanto deduzimos (3.1.6). □

Obtivemos da demonstração que

$$B_0 = \mathbb{R}^d \Leftrightarrow \mu = 0$$

Dessa forma o teorema (3.1.3.1) nos dá uma condição necessária e suficiente para μ ser estritamente positiva:

- Se $\mu > 0$, então B_0 é um compacto.
- Se $\mu = 0$, então $B_0 = \mathbb{R}^d$.

Nas próximas seções daremos uma determinação à B_0 no caso em que B_0 é compacto e deduziremos a convergência de $\frac{b_{0,n}}{n}$, relembrando que $b_{0,n} = \inf\{T(r), r \in \Gamma(0, H_n)\}$ e $H_n = \{x \in \mathbb{Z}^d; x_1 = n\}$, a partir do teorema (3.1.3.1).

3.2 Determinação de B_0(B_0 é compacto)

Já sabemos que B_0 é convexo, compacto, tem interior não-vazio e é invariante a permutação de coordenadas ou reflexões sobre os hiperplanos de equações $\{x_i = 0\}$.

Durante a prova, B_0 foi definido por

$$B_0 = \{x; \mu(x) \leq 1\}.$$

Então $B_0 \cap \mathbb{R}\epsilon_1 = \left[\frac{-1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right]$, daí por convexidade e simetria temos:

$$\left\{x \in \mathbb{R}^d; \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq \frac{1}{\mu}\right\} \subset B_0 \subset \left[\frac{-1}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right]^d.$$

Isto é,

$$\frac{1}{\mu} B_{|\cdot|} \subset B_0 \subset \frac{1}{\mu} B_{||\cdot||_\infty}$$

em que $B_{|\cdot|} = \left\{x \in \mathbb{R}^d; \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq 1\right\}$ e $B_{||\cdot||_\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^d; \sup_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq 1\right\}$

3.3 Convergência de $\frac{b_{0,n}}{n}$

Teorema 3.3.0.2.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_{0,n}}{n} = \mu \text{ } q.c. \text{ } e \text{ } em \text{ } L^1$$

A demonstração que se segue vem de [Kes86].

Demonstração. Lembrando que $b_{0,n} \leq a_{0,n}$, assim $\limsup \frac{b_{0,n}}{n} \leq \mu$ q.c.

Resta mostrar que $\liminf \frac{b_{0,n}}{n} \geq \mu$ q.c.

Se $\mu = 0$ não há o que mostrar pois as variáveis aleatórias são positivas.

Seja $\mu > 0$, considere as realizações de $t(e)$ tais que:

$$\liminf \frac{b_{0,n}}{n} = \mu - 2\delta \text{ para } \delta > 0 \tag{3.3.1}$$

Então existe uma sequência $n_1 < n_2 < \cdots$ de inteiros e uma sequência de vértices $z_1, z_2, \ldots$ tais que $z_k(1) = n_k$ e $T(0, z_k) = b_{0,n_k} + \delta_k$ quando $|\delta_k| \leq \delta$.

De acordo com (3.3.1), para k suficientemente grande,

$$z_k \in B(n_k(\mu - 2\delta + \delta_k)) \subset B(n_k(\mu - \delta)).$$

Assim, para k suficientemente grande, $x = \frac{z_k}{n_k(\mu-\delta)}$ em B_0. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= \lim_{n \to \infty} \frac{T(0, nx)}{n} \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{T\left(0, nk(\mu - \delta)\frac{z_k}{n_k(\mu-\delta)}\right)}{n_k(\mu - \delta)} \\
&= \lim_{k \to \infty} \frac{T(0, z_k)}{n_k(\mu - \delta)} \\
&= \frac{b_{0,n_k} + \delta_k}{n_k(\mu - \delta)} = \frac{\mu - 2\delta}{\mu - \delta} < 1.
\end{aligned}$$

Observando que

$$x_1 = \frac{z_k(1)}{n_k(\mu - \delta)} = \frac{1}{\mu - \delta}.$$

Pela simetria e convexidade de B_0, B_0 contém o ponto $\frac{1}{2}(x_1, x_2, \ldots, x_d) + \frac{1}{2}(x_1, -x_2, \ldots, -x_d) = (x_1, 0, \ldots, 0)$. Então $B(t)$ contém o ponto $(\lfloor (1-\epsilon)tx_1 \rfloor, 0, \ldots, 0)$ e assim

$$\begin{aligned} \liminf \frac{a_{0,n}}{n} &\leq \liminf_{t\to\infty} \frac{a_{0,\lfloor (1-\epsilon)tx_1 \rfloor}}{(1-\epsilon)tx_1} \\ &\leq \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{(1-\epsilon)tx_1} \\ &\leq \frac{\mu - \delta}{1-\epsilon}. \end{aligned}$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$

$$(1-\epsilon) \liminf \frac{a_{0,n}}{n} \leq \mu - \delta.$$

O que contradiz o fato de $\lim \frac{a_{0,n}}{n} = \mu$. Logo

$$\liminf \frac{b_{0,n}}{n} \geq \mu.$$

Portanto $\frac{b_{0,n}}{n}$ converge q.c. para μ. □

Capítulo 4

Teorema de Kesten

Em 1986 Harry Kesten obteve uma relação entre a forma assintótica do conjunto de pontos atingidos (Compacto quando $\mu > 0$ ou $\mathbb{R}^d$ quando $\mu = 0$) e a probabilidade crítica de percolação por arestas no modelo de percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$. Nesse capítulo vamos exibir alguns resultados das teorias de percolação e dos grandes desvios e então enunciar e demonstrar o Teorema de Kesten.

4.1 Desigualdade para desacoplamento

Faremos uma extensão da desigualdade de BK, usando assim a desigualdade de FKG(A.3.0.7), a forma apresentada a seguir foi introduzida por Kenneth S. Alexander em [Ale93].

Para $e \in \mathcal{E}$, seja $(\Omega_e, \mathcal{B}_e, Q_e)$ um espaço de probabilidade. Assuma que Ω_e tem uma ordem parcial, denotada por $\leq$, seja também

$$\{w_e \in \Omega_e : w_e \leq \tilde{w}_e\} \in \mathcal{B}_e \text{ e } \{w_e \in \Omega_e : w_e \geq \tilde{w}_e\} \in \mathcal{B}_e \tag{4.1.1}$$

para cada $\tilde{w}_e$ fixo e $e \in \mathcal{E}$.

A ordem parcial sobre Ω_e induz uma ordem parcial em $\Omega = \prod_{e \in \mathcal{E}} \Omega_e$, ainda denotada por $\leq$ e definida por

$$w \leq \tilde{w} \in \Omega \Leftrightarrow w_e \leq \tilde{w}_e \ , \forall e \in \mathcal{E}.$$

Uma função $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é chamada crescente(decrescente) se $w' \leq w''$ implica em $f(w') \leq f(w'')(\ f(w') \geq f(w''))$. Um evento crescente(decrescente) é um evento cuja função indicadora é crescente(decrescente).

Dizemos que Q_e tem correlação positiva se

$$\int (f \cdot g) dQ_e \geq \int f dQ_e \cdot \int g dQ_e \tag{4.1.2}$$

para todas funções não negativas e crescentes(ou decrescentes) $f, g : \Omega_e \to [0, \infty]$.

Toda medida de probabilidade em um espaço totalmente ordenado ou o produto de medidas de probabilidade em um produto cartesiano de espaços totalmente ordenados têm correlação positiva. Mais explicitamente, quando $\Omega_e = \mathbb{R}$, temos a desigualdade de FKG.

Para um conjunto enumerável S, $\mathcal{F}(S)$ será a coleção finita de subconjuntos de S.

Lema 4.1.1. *(**Desigualdade de Alexander**) Seja $\mathcal{E}$ um conjunto enumerável e $(\Omega_e, \mathcal{B}_e, Q_e)$ um espaço de probabilidade parcialmente ordenado com a propriedade* (4.1.1)*, tal que cada*

Q_e tem correlação positiva. Assumiremos $\Omega := \prod_{e\in\mathcal{E}} \Omega_e$, $\mathcal{B} := \prod_{e\in\mathcal{E}} \mathcal{B}_e$ e $Q := \prod_{e\in\mathcal{E}} Q_e$, $f, g : \mathcal{F}(\mathcal{E}) \times \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ serão funções com $f(A, \cdot)$, $g(B, \cdot)$ $\mathcal{B}$-mensuráveis, ambas crescentes(decrescentes) para todos $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ e $f(A, w)$, $g(B, w)$ são determinados pela restrição de w à A e B, respectivamente. Seja S uma coleção de pares $(A, B) \in \mathcal{F}(\mathcal{E}) \times \mathcal{F}(\mathcal{E})$ tais que $A \cap B = \emptyset$ $\forall (A, B) \in S$, seja também w e $w*$ duas configurações independentes, cada uma com distribuição Q, definiremos:

$$X(w) = \inf\{f(A, w) + g(B, w) : (A, B) \in S\},$$

$$X^*(w, w^*) = \inf\{f(A, w) + g(B, w^*) : (A, B) \in S\},$$

assim $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$Q\{X(w) \geq x\} \geq Q \times Q\{X^*(w, w^*) \geq x\}. \tag{4.1.3}$$

Demonstração. A prova geral pode ser vista em [Ale93], demonstraremos o caso em que $\mathcal{E}$ é finito, usando de técnicas semelhantes às usadas no caso geral.

Suponha $\mathcal{E}$ finito.

Sejam w e w' duas configurações independentes. Para todo $G \subset S$, definiremos uma nova configuração w^G:

$$w_f^G = \begin{cases} w_f \text{ se } f \notin G \\ w'_f \text{ se } f \in G. \end{cases}$$

Então definiremos

$$X_G := \min\{f(A, w) + g(B, w^G) : (A, B) \in S\}.$$

Vamos mostrar que

$$X_\emptyset \geq_{stoc} X_{\mathcal{E}},$$

onde $\geq_{stoc}$ denota dominância estocástica . É necessário mostrar que para todo $G \subset \mathcal{E}$ e $e \notin G$,

$$X_G \geq_{stoc} X_{G\cup e}. \tag{4.1.4}$$

Seja $G \subset \mathcal{E}$ e $e \notin G$, $\forall s \in \Omega_e$, definiremos a configuração $w^{G,e,s}$:

$$w_f^{G,e,s} = \begin{cases} s & \text{se } f = e \\ w_f^G & \text{se } f \neq e. \end{cases}$$

Seja $\tilde{w}$ a restrição de w à $S \setminus \{e\}$.

Para $s \in \Omega_e$, vamos definir:

$$U(\tilde{w}, \tilde{w}', s) := \min\{f(A, w) + g(B, w^{G,e,s}) : (A, B) \in S, e \in B\}$$

$$V(\tilde{w}, \tilde{w}', s) := \min\{f(A, w^{\emptyset,e,s}) + g(B, w^G) : (A, B) \in S, e \in A\}$$

$$W(\tilde{w}, \tilde{w}') := \min\{f(A, w) + g(B, w^G) : (A, B) \in S, e \notin A \cup B\}.$$

Agora sejam $\tilde{w}$ e $\tilde{w}'$, $x \in \mathbb{R}$.

Se $W(\tilde{w}, \tilde{w}') \leq x$, então

$$P(X_G > x|\tilde{w}, \tilde{w}') = 0 = P(X_{G\cup\{e\}} > x|\tilde{w}, \tilde{w}') \tag{4.1.5}$$

Se $W(\tilde{w},\tilde{w}') > x$, então

$$X_G > x \Leftrightarrow U(\tilde{w},\tilde{w}',w_e) > x \text{ e } V(\tilde{w},\tilde{w}',w_e) > x \tag{4.1.6}$$

e

$$X_{G\cup\{e\}} > x \Leftrightarrow U(\tilde{w},\tilde{w}',w_e) > x \text{ e } V(\tilde{w},\tilde{w}',w_e') > x \tag{4.1.7}$$

Dessa forma, sendo

$$J := \{s \in \Omega_e : U(\tilde{w},\tilde{w}',s) > x\}$$

e

$$K := \{s \in \Omega_e : V(\tilde{w},\tilde{w}',s) > x\}$$

Esses são eventos crescentes de Ω_e, pois $f(A,\cdot)$ e $g(B,\cdot)$ são funções crescentes, e Q_e tem correlação positiva, então de (4.1.5), (4.1.6) e (4.1.7),

$$P(X_G > x|\tilde{w},\tilde{w}') = Q_e(J\cap K) \geq Q_e(J)\cdot Q_e(K) = P(X_{G\cup\{e\}} > x|\tilde{w},\tilde{w}').$$

O que resulta em (4.1.4).

$\square$

Por indução podemos generalizar a desigualdade para $N < \infty$ funções crescentes e $\mathcal{B}$-mensuráveis $f_k(A_k,\cdot)$ tais que $f_k(A_k,w)$ são determinados pelas restrições de w à A_k. Seja S uma coleção enumerável de N-uplas de conjuntos finitos, disjuntos dois a dois, $(A_1,A_2,\ldots,A_N)$ e defina:

$$X(w) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{N} f_k(A_k,w) : (A_1,A_2,\ldots,A_N)\in S\right\},$$

$$X^*(w_1,\ldots,w_N) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{N} f_k(A_k,w_k) : (A_1,A_2,\ldots,A_N)\in S\right\},$$

então $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$Q\{X(w)\geq x\} \geq Q\times Q\times\cdots\times Q\{X^*(w_1,\ldots,w_N)\geq x\}. \tag{4.1.8}$$

Devemos usar (4.1.8) na seguinte situação:

Seja C_k, D_k, $1\leq k\leq N$, alguns subconjuntos finitos de $\mathcal{E}$ e $A_{k,i}, i\geq 1$, uma coleção finita de caminhos em $\mathbb{Z}^d$ de C_k para D_k, tais que:

Para i fixo, $A_{1,i}, A_{2,i},\ldots,A_{N,i}$ são disjuntos dois a dois e $\forall 1\leq k\leq N$, cada caminho sem auto-interseção de C_k para D_k encontra-se em algum $A_{k,i}$. Também

$$f(k,i,w) = \inf\{T(r) : r\in A_{k,i}\},$$

daí,

$$X(w) = \inf_i\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[\inf\left\{T(r_{k,i})(w) : r_{k,i}\in A_{k,i}\right\}\right]\right\},$$

$$X^*(w_1,\ldots,w_N) = \inf_i\left\{\sum_{k=1}^{N}\left[\inf\left\{T(r_{k,i})(w_k) : r_{k,i}\in A_{k,i}\right\}\right]\right\}.$$

4.2 Caminhos sem auto-interseção com tempo de passagem Binomial

Nessas seção vamos considerar $t(e)$ Bernoulli com:

$$P(t(e)=0)=1-p \text{ e } P(t(e)=1)=p \tag{4.2.1}$$

Equivalentemente,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x<0 \\ p & \text{se } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

A distribuição de $\{t(e): e\in\mathcal{E}\}$ será denotada por P_p. Arestas e com $t(e)=0(t(e)=1)$ serão chamadas abertas(fechadas). Um caminho de $\mathbb{Z}^2$ é chamado aberto(fechado) se todas suas arestas são abertas(fechadas).

Definiremos a probabilidade de percolação por

$$\theta(p)=P_p\{0 \text{ é conectado ao } \infty \text{ por um caminho aberto.}\}$$

$p_c=p_c(\mathbb{Z}^d)$ é a probabilidade critica do modelo de percolação de Bernoulli em $\mathbb{Z}^d$, isto é

$$p_c(\mathbb{Z}^d)=\sup\{p:\theta(p)=0\}$$

Seja $B(M)=[-M,M]^d$, $\partial B(M)=$ fronteira de $B(M)$ e $\mathring{B}(M)=$ interior aberto de $B(M)$, em 1986, Menshikov obteve o seguinte resultado:

Teorema 4.2.0.1. *Para todo $p<p_c, \exists k_1,k_2\in\mathbb{R}_+$ tal que*

$$P_p\{0 \text{ é conectado à } \partial B(M) \text{ por um caminho aberto.}\}\leq k_1e^{-k_2n} \tag{4.2.2}$$

$k_i=k_i(p)$

Demonstração. Recentemente Hugo Duminil-Copin e Vincent Tassion chegaram a uma interessante prova para esse teorema em [DCT15]. □

A partir do Teorema (4.2.0.1) temos:

Teorema 4.2.0.2. *Se $p<p_c(\mathbb{Z}^d)$, então existem $c_1=c_1(p)>0$ e $k_i=k_i(p)$, tais que*

$$\begin{aligned} P_p\{ & \text{ Existe um caminho sem auto-interseção } r \text{ , partindo de } 0, \\ & \qquad \text{com, pelo menos, } n \text{ arestas e } T(r)<c_1n\} = \\ =P_p\{ & \text{ Existe um caminho sem auto-interseção } r \text{ , partindo de } 0, \text{ com, pelo menos,} \\ & \qquad n \text{ arestas e menos que } c_1n \text{ arestas fechadas.}\}\leq k_1e^{-k_2n} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Demonstração. De (4.2.0.1) $\forall v \in \partial B(M)$, $P_p\{T(0,v)=0\} \leq k_1 e^{-k_2 M}$, seja M tal que

$$\sum_{v \in \partial B(M)} P_p\{T(0,v)=0\} \leq \frac{1}{2} \tag{4.2.4}$$

Agora seja $r = (v_0 = 0, v_1, \ldots, v_n)$ um caminho sem auto-interseção partindo de 0. Definindo sucessivamente os índices $\tau(i)$ e os vértices $a_i = v_{\tau(i)}$ por

$$\tau(0) = 0 \ , \ \tau(k+1) = min\{\tau > \tau(k) : v_\tau \in a_k + \partial B(M)\}$$

com $k = 0, 1, \ldots, Q-1$, em que Q é o maior índice k cujo τ_k continua bem definido (Uma provável construção pode ser vista na figura 4.2). Equivalentemente, Q é o menor k tal que

$$\{v_i \in a_k + \mathring{B}(M) \text{ para todo } \tau(k) \leq i \leq n\}.$$

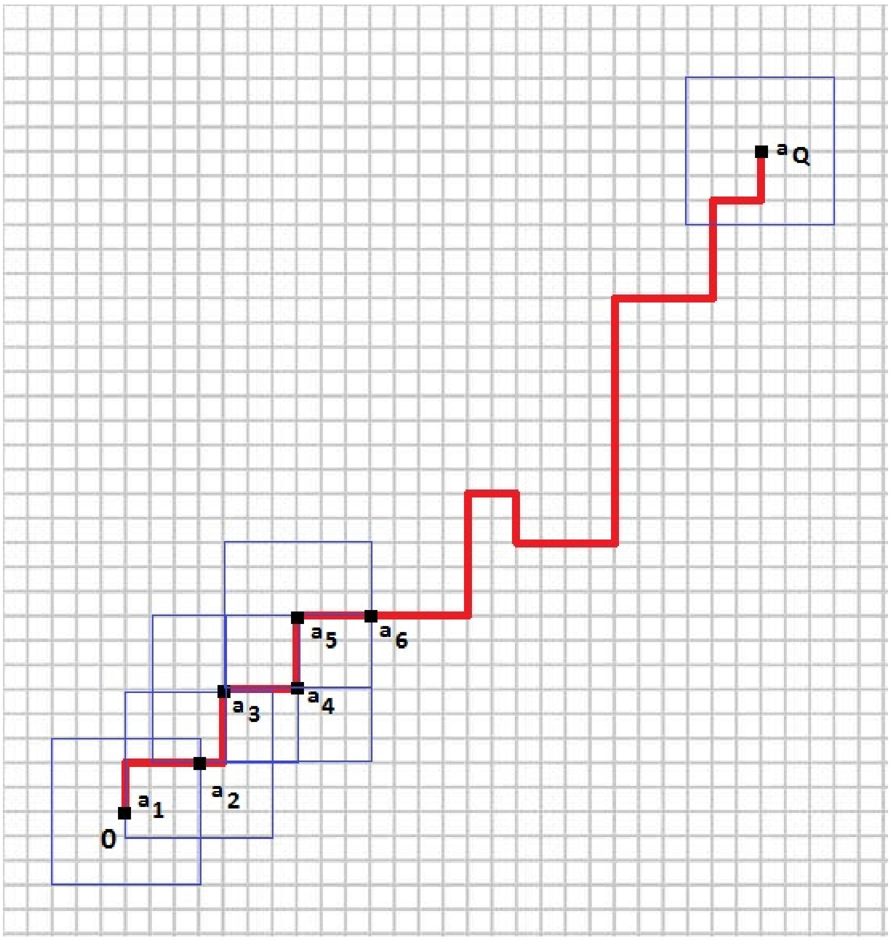

Figura 4.1: Construção dos a_i's.

Assim o caminho r passa sucessivamente pelos vértices $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_Q$, denotaremos por r_k o fragmento de r, que está entre a_k e a_{k+1}, então

$$T(r) \geq \sum_{k=0}^{Q-1} T(r_k).$$

Além disso, os caminhos r_k, $0 \leq k \leq Q-1$, não tem auto-interseção e $r_k \setminus \{a_{k+1}\}$ encontra-se em $a_k + \mathring{B}(M)$, contendo assim no máximo $(2M)^d$ vértices. Se r contém n vértices, temos

$$(Q+1)(2M)^d \geq n. \tag{4.2.5}$$

Dessa forma obtemos:

$$\begin{aligned} &P_p\{ \text{ Existe um caminho sem auto-interseção } r \text{ , partindo de 0,} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{com, pelo menos, } n \text{ arestas e } T(r) < c_1 n\} \leq \\ &\leq \sum_{(Q+1)\geq n(2m)^{-d}} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{r \text{ passa sucessivamente por } a_1,\ldots,a_Q \text{ e } \sum_{k=0}^{Q-1} T(r_k) < c_1 n\} \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Desde que os fragmentos r_k de r possuam arestas disjuntas para k diferentes, podemos aplicar (4.1.8) para $C_k = \{a_k\}$, $D_k = \{a_{k+1}\}$, $\forall 0 \leq k \leq Q-1$. Para cada i, seja $A_{k,i}$ constituído por um único caminho sem auto-interseção $r_{k,i}$, de a_k para a_{k+1}, tal que para i fixo, os caminhos em $A_{0,i}, A_{2,i}, \ldots, A_{Q-1,i}$ não tem arestas em comum. Estes caminhos podem ser concatenados por um caminho sem auto-interseção r, de a_0 para a_Q, que passa sucessivamente por $a_0, a_1, \ldots, a_Q$ com

$$T(r) = \sum_{k=0}^{Q-1} T(r_{k,i}).$$

Se, ainda mais, escolhermos $A_{k,i}$ ou, equivalentemente, $r_{k,i}$ tais que a concatenação r varia ao longo de todos caminhos sem auto-interseção que passam por $a_0, a_1, \ldots, a_Q$(Como i varia de 1 a ∞), então:

$$X(w) = \inf_i \left\{ \sum_{k=0}^{Q-1} T(r_{k,i})(w) : r_{k,i} \in A_{k,i} \right\},$$

$$X^*(w_0, w_2, \ldots, w_{Q-1}) = \inf_i \left\{ \sum_{k=0}^{Q-1} T(r_{k,i})(w_k) : r_{k,i} \in A_{k,i} \right\}.$$

De (4.1.8) podemos ver que (4.2.6) é limitada por cima por

$$\begin{aligned} &\sum_{Q+1\geq n(2M)^{-d}} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{\text{para algum } i, \sum_{k=0}^{Q-1} T(r_{k,i}) \leq c_1 n\} \\ &= \sum_{Q+1\geq n(2M)^{-d}} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{x < c_1 n\} \\ &\leq \sum_{Q+1\geq n(2M)^{-d}} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p \times P_p \times \cdots \times P_p\{X^*(w_0,\ldots,w_{Q-1}) < c_1 n\} \\ &= \sum_{Q+1\geq n(2M)^{-d}} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{\text{para algum } i, \sum_{k=0}^{Q-1} T'(r_{k,i}) \leq c_1 n\} \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

em que $T'(r_{k,i})$, $k = 0,\ldots,Q-1$, denota cópias independentes de $T(r_{k,i})$, $0 \leq k \leq Q-1$, e escreve-se P_p ao invés de $P_p \times \cdots \times P_p$. Como i varia, os caminhos $r_{k,i}$ percorrem todos caminhos sem auto-interseção de a_k para a_{k+1}. Logo em (4.2.7)

$$\sum_{Q+1\geq n(2M)^{-d}} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{\text{para algum } i, \sum_{k=0}^{Q-1} T'(r_{k,i}) \leq c_1 n\} \leq$$

$$\leq \sum_{Q+1 \geq n(2M)^{-d}} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{\sum_{k=0}^{Q-1} T'(a_k, a_{k+1}) \leq c_1 n\},$$

em que $T'(a_k, a_{k+1})$ são cópias independentes de $T(a_k, a_{k+1})$. Usando a desigualdade de Markov

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{\text{para algum } i, \sum_{k=0}^{Q-1} T'(r_{k,i}) \leq c_1 n\} \leq e^{\theta c_1 n} \sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} \prod_{k=0}^{Q-1} E\left[e^{-\theta T(a_k, a_{k+1})}\right].$$

Somando sucessivamente para a_Q, a_{Q-1}, a_1

$$\sum_{(a_1,\ldots,a_Q)} P_p\{\text{para algum } i, \sum_{k=0}^{Q-1} T'(r_{k,i}) \leq c_1 n\} \leq e^{\theta c_1 n} \left[\sum_{a_1 \in \partial B(M)} E(e^{-\theta T(0,a_1)})\right]^Q.$$

Seja θ grande, tal que

$$\sum_{a_1 \in \partial B(M)} E(e^{-\theta T(0,a_1)}) \leq \sum_{a_1 \in \partial B(M)} P\{T(0, a_1) = 0\} + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$$

Finalmente seja $c_1 > 0$ pequeno, tal que

$$e^{\theta c_1 n} \left[\frac{3}{4}\right]^Q \leq \exp\left[\theta c_1 (Q+1)(2M)^d\right] \left[\frac{3}{4}\right]^Q \leq \exp\left[\theta c_1 (2M)^d\right] \left[\frac{7}{8}\right]^Q.$$

Quando $Q \geq n(2M)^{-d} - 1$

$$\exp\left[\theta c_1 (Q+1)(2M)^d\right] \left[\frac{3}{4}\right]^Q \leq \exp\left[\theta c_1 n\right] \left[\frac{7}{8}\right]^Q,$$

obtendo (4.2.3). □

4.3 Prova do Teorema de Kesten

Retornaremos ao caso das $t(e)$ não negativas. Por métodos similares aos usados na seção anterior podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 4.3.0.3. $\forall \epsilon > 0$, *existem constantes* $k_i = k_i(\epsilon, F, d) > 0$ *com* $k_3 < \infty$*(*$k_4 = \infty$ *ou* $k_5 = \infty$ *permitidos) tais que*

$$P\{b_{0,n} < n(\mu - \epsilon)\} \leq k_3 e^{-k_4 n} \ , \ n \geq 0 \tag{4.3.1}$$

$$P\{a_{0,n} < n(\mu - \epsilon)\} \leq e^{-k_5 n} \ , \ n \geq 0 \tag{4.3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log P\{a_{0,n} < n(\mu - \epsilon)\} = k_5 \tag{4.3.3}$$

Seja $k_5(\epsilon, F, d) = 0$ *para* $\epsilon < 0$ *e para* $\beta = \sup\{x : F(\mu - x) > 0\}$, *faça*

$$F_5(0, F, d) = \begin{cases} 0 & se\ \beta > 0 \\ \infty & se\ \beta = 0 \end{cases}$$

então (4.3.2) e (4.3.3) são satisfeitas $\forall\epsilon$ e a função k_5 têm as seguintes propriedades:

- $0 < k_5(\epsilon, F, d) < \infty$ para $0 < \epsilon < \beta$,
- $k_5(\epsilon, F, d) = 0$ para $\epsilon < 0$ e $k_5(\epsilon, F, d) = \infty$ para $\epsilon \geq \beta$,
- $\epsilon \mapsto k_5(\epsilon, F, d) =$ é convexo e contínuo em $(-\infty, \beta)$ e estritamente crescente em $[0, \beta)$.

Demonstração. A demonstração será omitida mas pode ser vista em [Kes86]. $\square$

Teorema 4.3.0.4. ***Teorema de Kesten***
Sejam:

- *$t(e)$, $e \in \mathcal{E}$, independentes e identicamente distribuidas,*
- $E[\min(t_1^d, \ldots, t_{2d}^d)] < \infty$
- $F(0-) = 0$

então

$$\mu = 0(B_0 = \mathbb{R}^d) \Leftrightarrow F(0) \geq p_c(\mathbb{Z}^d)$$

$$\mu > 0(B_0 \text{ compacto }) \Leftrightarrow F(0) < p_c(\mathbb{Z}^d)$$

Demonstração. Seja $F(0) > p_c(\mathbb{Z}^d)$ e seja $\mathcal{C}(v)$ uma coleção de pontos que podem ser alcançados por v via todos caminhos que tem arestas e tais que $t(e) = 0$. Podemos chamar esses caminhos de caminhos abertos e $\mathcal{C}(v)$ o aglomerado aberto de v. Por definição de p_c, $P\{\mathcal{C}(v)$ é infinito $\} > 0$ quando $F(0) > p_c(\mathbb{Z}^d)$, então $P\{\mathcal{C}(v)$ é infinito para algum $v\} > 0$ logo, pela lei 0-1 de Kolmogorov, $P\{\mathcal{C}(v)$ é infinito para algum $v\} = 1$. É possível mostrar que esse aglomerado é único com probabilidade 1, veja [BK93], denote-o por $\mathcal{C}$, então o tempo de passagem ao longo de qualquer caminho em $\mathcal{C}$ é 0 e $a_{0,n}$ é o tempo de passagem de entre 0 e $\mathcal{C}$ mais o tempo de passagem de $n\xi_1$ para $\mathcal{C}$. Pela invariância por translação esses tempos de passagem até $\mathcal{C}$ tem mesma distribuição(são independentes de n), e assim $\{a_{0,n} : n \geq 1\}$ é uma família rígida. Em particular

$$\frac{1}{n}a_{0,n} \to 0 \text{ em probabilidade, ou seja, } \mu = 0$$

Agora seja $F(0) < p_c(\mathbb{Z}^d)$ e seja x_0 tal que

$$F(x_0) = P\{t(e) \leq x_0\} < p_c(\mathbb{Z}^d).$$

Denote por abertas(fechadas) as arestas com $t(e) \leq x_0(t(e) > x_0)$. O Teorema (4.3.0.3) implica em

$$\begin{aligned} P\{a_{0,n} \leq c_1 x_0 n\} \leq P_p\{ & \text{ existe um caminho sem auto-interseção } r, \text{ partindo de } 0, \\ & \text{com pelo menos } n \text{ arestas} \\ & \text{e menos que } c_1 n \text{ arestas com tempo de passagem} > x_0\} \leq k_1 e^{-k_2 n}, \quad (4.3.4) \end{aligned}$$

Assim,

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}a_{0,n} \geq c_1 x_0 \text{ com probabilidade 1 , ou seja, } \mu > 0.$$

Finalmente, seja $F(0) = p_c$. Suponha $\mu > 0$ segue de (4.3.0.3) com $\epsilon = \frac{\mu}{2}$ que

$$P\{b_{0,n} < \frac{1}{2}n\mu\} \leq k_3 e^{-k_4 n} \ , \ n \geq 0,$$

mas devido a percolação no ponto critico, veja [Kes86],

$$P_{p_c}\{\text{existe um caminho aberto de 0 à } H_n\},$$

em que $H_n = \{(n, k_2, \ldots, k_d) : k_i \in \mathbb{Z}\}$, não decresce exponencialmente e é limitado inferiormente por $P\{b_{0,n} = 0\}$ quando $F(0) = p_c$, de modo que $\mu = 0$.

$\square$

Referências

[Ale93] Kenneth S Alexander. “A note on some rates of convergence in first-passage percolation”. Em: *The Annals of Applied Probability* (1993), pp. 81–90.

[BK93] Jacob van den Berg e Harry Kesten. “Inequalities for the time constant in first-passage percolation”. Em: *The Annals of Applied Probability* (1993), pp. 56–80.

[CD81] J Theodore Cox e Richard Durrett. “Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions”. Em: *The Annals of Probability* (1981), pp. 583–603.

[CK81] J Theodore Cox e Harry Kesten. *On the continuity of the time constant of first-passage percolation*. 1981.

[DCT15] Hugo Duminil-Copin e Vincent Tassion. “A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation on Z d”. Em: *arXiv preprint arXiv:1502.03051* (2015).

[Dur10] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*. Cambridge university press, 2010.

[GAR09] Olivier GARET. “Modeles probabilistes sur réseaux”. Em: *Cours de M2R* (2009).

[Gri99] Geoffrey Grimmett. “Percolation, volume 321 of”. Em: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* (1999).

[HW65] John M Hammersley e DJA Welsh. “First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory”. Em: *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*. Springer, 1965, pp. 61–110.

[Kes03] Harry Kesten. “First-passage percolation”. Em: *From classical to modern probability*. Springer, 2003, pp. 93–143.

[Kes86] Harry Kesten. “Aspects of first passage percolation”. Em: *École d’Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984*. Springer, 1986, pp. 125–264.

[Kin76] JFC Kingman. “Subadditive processes”. Em: *Ecole d’Eté de Probabilités de Saint-Flour V-1975*. Springer, 1976, pp. 167–223.

[Lig12] Thomas Liggett. *Interacting particle systems*. Vol. 276. Springer Science & Business Media, 2012.

[Lig85] Thomas M Liggett. “An improved subadditive ergodic theorem”. Em: *The Annals of Probability* (1985), pp. 1279–1285.

[Ric73] Daniel Richardson. “Random growth in a tessellation”. Em: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 74. 03. Cambridge Univ Press. 1973, pp. 515–528.

[Ros+96] Sheldon M Ross et al. *Stochastic processes*. Vol. 2. John Wiley & Sons New York, 1996.

[Sch09] Julie Scholler. "Percolation de premier passage". Em: (2009).

[Shi96] Albert N Shiryaev. *Probability, volume 95 of Graduate texts in mathematics*. 1996.

[SW06] Robert Thomas Smythe e John C Wierman. *First-passage percolation on the square lattice*. Vol. 671. Springer, 2006.

[WF08] Xian-Yuan Wu e Ping Feng. "On a Lower Bound for the Time Constant of First-Passage Percolation". Em: *arXiv preprint arXiv:0807.0839* (2008).

Apêndice A

Apêndice

A.1 Teoria Ergódica

O teorema fundamental da Teoria Ergódica afirma que, para qualquer subconjunto mensurável e para quase todo ponto, existe um tempo médio de permanência. Este resultado é devido a Von Neumann, que provou um enunciado mais fraco,e sobretudo a Birkhoff, que em 1931, o provou na forma definitiva.

Em muitos casos, esse tempo médio de permanência é precisamente igual a média do subconjunto. Isto é o que se chama de ergodicidade.

Definição A.1.0.1. *Um processo aleatório $X(t)$ é dito ergódico se suas médias temporais e de conjunto coincidem quando $T \to \infty$, ou seja*

$$\lim_{T\to\infty} \mu_X(T) = \mu_X$$

$$\lim_{T\to\infty} \; var\ [\mu_X(T)] = 0$$

onde

$$\mu_X(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt.$$

Teorema A.1.0.5. *(**Teorema Ergódico de Birkhoff**) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, $T : M \to M$ uma transformação que preserva medida e $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência estacionária e ergódica de variáveis aleatórias tais que $E(|X_i|) \leq \infty$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X(T^k) = E(X) \ q.c. \ e \ em \ L^1.$$

Demonstração. A prova pode ser vista em [Dur10]. □

Como aplicação do Teorema Ergódico de Birkhoff, dado $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de variáveis aleatórias ergódicas tais que $E(|X_i|) \leq \infty$, $i = 1, \ldots, n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k = E(X) \text{ q.c. e em } L^1.$$

A.2 Teoria da Medida

Ser rígida é um conceito em teoria da medida, a ideia intuitiva é caracterizar um conjunto de medidas que não "escapa para o infinito".

Definição A.2.0.2. *Seja $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de variáveis aleatórias, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é rígida se $\forall\epsilon > 0$, $\exists K_\epsilon$ compacto tal que $\sup_n P[P_n \in K_\epsilon] \geq 1-\epsilon$.*

O Teorema de Prokhorov relaciona rigidez à compacidade (e, portanto, à convergência fraca).

Teorema A.2.0.6. ***(Teorema de Prokhorov)*** *Seja (S,p) um espaço métrico separável e $\mathcal{P}(S)$ espaço de probabilidade sobre S.*

Uma família $K \subset \mathcal{P}(S)$ é rígida se e somente se o fecho de K é sequencialmente compacto em $\mathcal{P}(S)$ equipado com a convergência fraca.

Demonstração. A prova pode ser vista em [Shi96]. □

Como aplicação do Teorema de Prokhorov, dada $(P_n)_{n\in(N)}$ uma família de variáveis aleatórias rígida então, existe uma subsequência P_{n_k} tal que $P_{n_k} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} P$.

A.3 Percolação

A seguinte desigualdade é chamada FKG ou Harris-FKG, obtida por Harris e posteriormente generalizadas para outros modelos por Fortuin, Kasteleyn e Ginibre, cujas iniciais batizaram-na.

Teorema A.3.0.7. ***(Desigualdade de FKG)*** *Seja $\mathcal{E}$ um conjunto enumerável, X_e, $e \in \mathcal{E}$, uma família enumerável de variavéis reais independentes em algum espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Então para todas funções não negativas crescentes(decrescentes) $f, g : \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \to [0,\infty]$:*

$$E\left\{f(\{X_e\})g(\{X_e\})\right\} \geq E\left\{f(\{X_e\})\right\} E\left\{g(\{X_e\})\right\}.$$

Equivalentemente,

$$\int_\Omega f(\{X_e(w)\})g(\{X_e(w)\})P(dw) \geq \int_\Omega f(\{X_e(w)\})P(dw) \int_\Omega g(\{X_e(w)\})P(dw).$$

Demonstração. A prova pode ser vista em [Ale93]. □