

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Estudo de uma Classe de Equações de
Schrödinger Quase-Lineares**

por

Uberlandio Batista Severo [†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

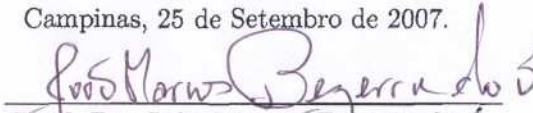
Co-orientador: Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

[†]Este trabalho contou com o suporte financeiro da Capes.

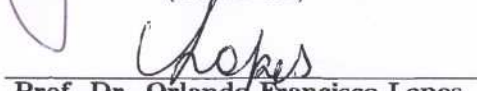
Estudo de uma Classe de Equações de Schrödinger Quase-Lineares

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Uberlandio Batista Severo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de Setembro de 2007.



Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
(Orientador)



Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes
(Co-orientador)

Banca examinadora:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó.
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo.
Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva.
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki.
Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla Lopez.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

Severo, Uberlandio Batista
Se83e Estudo de uma classe de equações de Schrödinger quase-lineares /
Uberlandio Batista Severo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientadores : João Marcos Bezerra do Ó ; Orlando Francisco Lopes
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Schrödinger, Equação de. 2. Ondas estacionárias. 3. Princípios
variacionais. I. Do Ó, João Marcos Bezerra. II. Lopes, Orlando Francisco. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Study of a class of quasilinear Schrödinger equations.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Schrödinger equation. 2. Standing waves.
3. Variational principles.

Área de concentração: Análise

Titulação: Doutor em Matemática

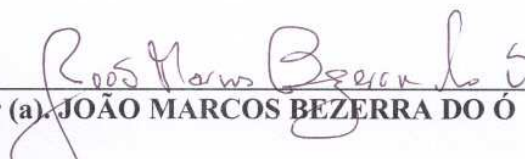
Banca examinadora: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (UFPB)
Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva (UnB)
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFV)
Prof. Dr. Pedro Eduardo Ubilla Lopez (Univ. de Santiago do Chile)

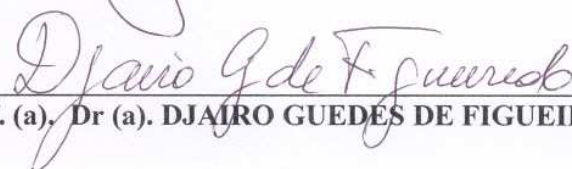
Data da defesa: 25/09/2007

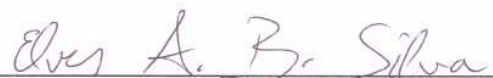
Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 25 de setembro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof. (a). Dr (a). **JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**


Prof. (a). Dr (a). **DJALMAR GUEDES DE FIGUEIREDO**


Prof. (a). Dr (a). **ELVES ALVES DE BARROS E SILVA**


Prof. (a). Dr (a). **OLÍMPIO HIROSHI MIYAGAKI**


Prof. (a) Dr. (a) **PEDRO EDUARDO UBILLA LOPEZ**

A minha esposa Shirley

A minha mãe

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me fornecido saúde, paz e ter iluminado o meu caminho na hora da escuridão. Sem Ele esta conquista não teria se concretizado.

Ao meu orientador João Marcos Bezerra do Ó, por ter me incentivado a continuar os estudos em Matemática, pelos conselhos de amigo e pela excelente orientação.

A minha família que sempre apoiou as minhas decisões e, em especial, à minha esposa Shirley pela compreensão, paciência e incentivo quando estávamos distantes um do outro.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal da Paraíba, por ter concedido minha liberação para capacitação, logo após a minha redistribuição da UFCG para UFPB. Em especial, ao professor Everaldo Souto de Medeiros pelas discussões e dicas que contribuíram para a realização deste trabalho e a professora Flávia Jerônimo pelo o apoio e incentivo.

Aos professores Djairo Guedes de Figueiredo, Elves Alves de Barros e Silva, Olímpio Hiroshi Miyagaki e Pedro Eduardo Ubilla Lopez, por terem aceitado a participar da banca examinadora.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do IMECC-UNICAMP e ao Professor Orlando Lopes por ter aceitado ser meu co-orientador.

Aos amigos e colegas do curso de doutorado: Fábio, Antônio Brandão, Augusto, Sérgio, Ederson, dentre outros, e aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC-UNICAMP, em especial, a Tânia e Ednaldo pela atenção e cordialidade.

Enfim, a Capes pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência, multiplicidade e comportamento de concentração de soluções do tipo onda estacionária, para uma classe de equações de Schrödinger quase-lineares, as quais modelam fenômenos físicos, por exemplo, na Física de Plasmas. Na obtenção de nossos resultados, usamos métodos variacionais, tais como, teoremas do tipo mini-max, bem como, teoria de regularidade de equações elípticas de segunda ordem.

Abstract

In this work, we study questions related to existence, multiplicity and concentration behavior of standing waves, for a class of quasilinear Schrödinger equations, arising, for example, in Plasma Physics. To obtain our results, we use variational methods, such as, minimax theorems and also regularity theory of elliptic equations of second order.

Lista de Símbolos

Neste trabalho, faremos uso da seguinte simbologia:

- $C, C_0, C_1, \dots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$;
- $\text{supp}(f)$ denota o suporte da função f ;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio R e B_R quando estiver centrada na origem;
- $\rightharpoonup, \rightarrow$ denotam convergência fraca e forte, respectivamente, em um espaço normado X ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dualidade entre o espaço X e o seu dual X' ;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ and $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω ;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ denota o gradiente da função u ;
- $\Delta u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o laplaciano de u e, para $1 < p < \infty$, $\Delta_p u = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ é o p -laplaciano de u ;

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} : \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\}$, em que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto conexo, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf \{ C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega \};$$

- $C(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $C_0(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω ;
- $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$;
- $C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;
- $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$, e $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até ordem k estão em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$;
- Para $1 \leq p < \infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \dots, N \end{array} \right. \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right]^{1/p}$$

e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito a norma acima. Quando $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) \doteq H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) \doteq H_0^1(\Omega)$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i \doteq \partial u / \partial x_i$;

- Para $m \geq 2$ inteiro e $1 \leq p < \infty$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{ para todo } i = 1, \dots, N \right\};$$

- Para $1 \leq p < N$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Equações de Schrödinger com não-linearidades envolvendo termos côncavos e convexos	11
1.1 A estrutura variacional	14
1.1.1 Reformulação do problema e preliminares	14
1.1.2 Propriedades do espaço E	17
1.1.3 Regularidade do funcional I_λ	24
1.2 Resultados de existência via Passo da Montanha	27
1.2.1 Geometria do Passo da Montanha	28
1.2.2 Condição de Palais-Smale	30
1.2.3 Prova do Teorema 1.1	33
2 Existência e concentração de ondas estacionárias para uma classe de equações de Schrödinger envolvendo crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$	39
2.1 A estrutura variacional e resultados preliminares	42
2.1.1 Propriedades do Espaço E	43
2.2 O problema modificado	48
2.2.1 Regularidade do funcional $\mathcal{I}$	49
2.2.2 Geometria do Passo da Montanha	53

2.2.3	Caracterização do nível do Passo da Montanha	54
2.2.4	Condição de Palais-Smale	57
2.3	O problema limite	64
2.4	Estimativa do nível do Passo da Montanha b_ε	65
2.5	Estimativa L^∞ e decaimento uniforme a zero	68
2.6	Prova do Teorema 2.1	74
2.6.1	O comportamento de concentração	74
2.6.2	Decaimento exponencial das soluções	78
3	Soluções simétricas e não-simétricas para uma equação de Schrödinger quase-linear	79
3.1	Resultados Preliminares	81
3.2	Geometria do Passo da Montanha	83
3.3	Prova do Teorema 3.1	86
3.3.1	Solução não-radial e mudando de sinal	86
3.3.2	Solução radial e positiva	88
4	Uma equação elíptica quase-linear envolvendo o operador p-laplaciano em $\mathbb{R}^N$	90
4.1	Resultados preliminares	92
4.2	O problema auxiliar	96
4.3	Prova do Teorema 4.1	98
4.3.1	Geometria do Passo da Montanha	98
4.3.2	Seqüências de Cerami	99
4.3.3	Decaimento a zero no infinito	105
5	Multiplicidade de soluções para uma equação quase-linear com termos côncavos e convexos em $\mathbb{R}$	109
5.1	Resultados preliminares	111
5.2	A condição de Palais-Smale	114
5.3	Prova do Teorema 5.1	118
	Referências	122

Introdução

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência, multiplicidade e concentração de soluções para a equação elíptica quase-linear

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u - \varepsilon^2 \Delta(u^2)u = p(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

em que $N \geq 1$, $\varepsilon > 0$, $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função chamada de potencial e $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. Ao longo do trabalho, teremos hipóteses adicionais sobre as funções V e p .

Ao abordar a equação (1), utilizamos métodos variacionais, ou seja, analisamos o funcional energia associado a (1) no que diz respeito a obtenção de pontos críticos. Na maioria dos casos, introduzimos uma mudança de variável adequada a fim de obter um novo funcional que esteja bem definido nos espaços de Banach que consideramos e, com isso, relacionamos os pontos críticos deste funcional com as soluções de (1).

Equações do tipo (1) modelam vários problemas da Física-Matemática e têm sido objetos de estudos durante os últimos anos. Por exemplo, as soluções de (1) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para equações de Schrödinger quase-lineares da forma

$$i\varepsilon \partial_t z = -\varepsilon^2 \Delta z + W(x)z - g(|z|^2)z - \kappa \varepsilon^2 \Delta[\rho(|z|^2)]\rho'(|z|^2)z, \quad (2)$$

onde $W(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, é um potencial dado, $\varepsilon > 0$, κ é uma constante real e g, ρ são funções reais. Equações quase-lineares da forma (2) aparecem, naturalmente, como modelo de vários

fenômenos físicos relacionados a vários tipos de ρ . O caso em que $\rho(s) = s$ foi usado na obtenção da equação da membrana de superfluido em Física dos Plasmas por Kurihura em [52](cf. [53]). Para $\rho(s) = (1 + s)^{1/2}$, a equação (2) modela a canalização de um laser ultracurto de alta potência na matéria, veja [15], [16], [24], [70] e referências em [26]. A equação (2) também surge em Física dos Plasmas e Mecânica dos Fluidos em [12], [51], [67], [76], em Mecânica [46] e em Teoria da Matéria Condensada [62]. O caso semi-linear, correspondente a $\kappa = 0$, já foi bastante estudado nos últimos anos, veja, por exemplo, [14], [42], [48], [68], [74] e algumas de suas referências.

Considerando o caso $\rho(s) = s$, $\kappa > 0$ e buscando soluções do tipo onda estacionária, a saber, soluções da forma

$$z(t, x) = \exp(-iEt)u(x), \quad E \in \mathbb{R},$$

obtemos a equação correspondente

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u - \kappa \varepsilon^2 \Delta(u^2)u = h(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (3)$$

onde $V(x) = W(x) - E$, $h(u) = g(u^2)u$ e, sem perda de generalidade, podemos supor que $\kappa = 1$.

Recentemente, com $\varepsilon = 1$, houve um grande interesse no estudo da equação (3). Por exemplo, veja os trabalhos [23], [25], [36], [58], [59], [66] e suas referências. A existência de uma solução positiva de energia mínima foi provada em [66] usando-se argumentos de minimização com vínculos, onde obteve-se uma solução de (3) com um multiplicador de Lagrange desconhecido λ em frente do termo não-linear. Em [58], por uma mudança de variável, o problema quase-linear foi transformado em um semi-linear. Usando espaços de Orlicz, os autores provaram a existência de soluções positivas de (3) aplicando o Teorema do Passo da Montanha. O mesmo método de mudança de variável foi também usado recentemente em [25], mas os autores trabalharam com o espaço de Sobolev usual $H^1(\mathbb{R}^N)$ na busca de soluções e estudaram diferentes classes de não-linearidades. Em [36], para $N = 2$, foi tratado o caso em que a não-linearidade $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possuía crescimento crítico exponencial, isto é, h se comportava como $\exp(4\pi s^4)$ quando $|s| \rightarrow \infty$. Os autores estabeleceram um resultado de existência para o problema combinando o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz com uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$. Em [59], foi estabelecido a existência de soluções nodais de energia mínima, bem como soluções

com sinal bem definido, usando-se o método de Nehari.

Levando em consideração o comportamento do potencial $V(x)$ e os tipos de não-linearidades $p(x, s)$, obtemos vários resultados de existência e multiplicidade de soluções para a equação do tipo (1) e de sua generalização (equação (4.1) do *Capítulo 4*), que abordaremos também em nosso estudo.

Nosso trabalho está dividido em cinco capítulos.

No *Capítulo 1*, tratamos o caso em que $\varepsilon = 1$ e a não-linearidade $p(x, s)$ contém uma combinação de termos côncavos e convexos em s , mais especificamente, estudamos a equação

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda h(x, u) + g(x, u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (P_\lambda)$$

em que $N \geq 3$, λ é um parâmetro não-negativo e as seguintes hipóteses sobre $h(x, s)$ e $g(x, s)$ serão assumidas:

(h_0) A função $h : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é contínua e existem $C > 0$ e $q \in (1, 2)$ tais que para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$,

$$h(x, s) \leq Cs^{q-1};$$

(g_1) A função $g : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g(x, s)}{s} = 0 \quad \text{uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N;$$

(g_2) Existem $C_1 > 0$ e $4 < r < 22^*$, tais que, para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$,

$$g(x, s) \leq C_1(1 + s^{r-1});$$

(g_3) Existe $\mu > 2$ tal que, para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$,

$$0 < 2\mu G(x, s) = 2\mu \int_0^s g(x, t) dt \leq g(x, s)s.$$

Assumimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua uniformemente positiva, ou seja,

(V_1) $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$

e satisfaça a seguinte condição de integrabilidade

$$(V_2) \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(x)^{-1} dx < \infty.$$

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.1. *Sob as hipóteses $(V_1) - (V_2)$, (h_0) e $(g_1) - (g_3)$, existem $\lambda_0, C_0 > 0$ tais que, para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$, o problema (P_λ) possui uma solução positiva $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_\lambda\|_{1,2} \leq C_0$. Além disso, se u_0 é uma solução de (P_λ) quando $\lambda = 0$, existem constantes positivas C e ζ satisfazendo*

$$u_0(x) \leq C \exp(-\zeta|x|) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Para provar o Teorema 0.1, usamos uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo uma equação semi-linear que tem um funcional associado bem definido e Gateaux-diferenciável em um espaço do tipo Orlicz. Este funcional satisfaz as hipóteses geométricas do Teorema do Passo da Montanha e a condição de compacidade de Palais-Smale. Obtemos o nosso resultado de existência, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha. No caso em que $\lambda = 0$, usamos iteração de Moser e o princípio do máximo para mostrar o decaimento exponencial das soluções.

No *Capítulo 2*, lidamos com o problema de existência e concentração de soluções para a seguinte classe de problemas no plano envolvendo crescimento crítico:

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(z)u - \varepsilon^2 \Delta(u^2)u = h(u) \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad (P_\varepsilon)$$

em que ε é um parâmetro positivo pequeno, o potencial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente Hölder contínuo, satisfaz a condição (V_1) e a seguinte hipótese:

(V_3) Existe um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\nu_1 \doteq \min_{\overline{\Omega}} V < \min_{\partial\Omega} V.$$

Enfatizamos que a condição local (V_3) não requer nenhuma outra condição global além de (V_1) . Em particular, não pedimos nenhuma limitação superior e nem coercividade sobre o potencial V . Assumimos que a não-linearidade $h(s)$ satisfaz as hipóteses:

(h_1) $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $h(s) = 0$ para $s \leq 0$;

(h_2) $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{h(s)}{s} = 0$;

(h_3) h tem crescimento crítico em $+\infty$, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{h(s)}{\exp(\alpha s^4)} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \alpha < \alpha_0; \end{cases} \quad (4)$$

(h_4) Existe $\mu > 2$ tal que para todo $s > 0$,

$$0 < 2\mu H(s) = 2\mu \int_0^s h(t) dt \leq sh(s);$$

(h_5) A função $s \rightarrow h(s)/s^3$ é crescente para $s > 0$;

(h_6) Existe $\beta_0 > 0$ tal que $\liminf_{s \rightarrow +\infty} sh(s) \exp(-\alpha_0 s^4) \geq \beta_0$.

O principal resultado deste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 0.2. *Suponha que o potencial V satisfaz (V_1) e (V_3) e que a não-linearidade $h(s)$ satisfaz $(h_1) - (h_6)$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, o problema (P_ε) possui uma solução positiva de energia mínima $u_\varepsilon(z)$ em $C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ com as seguintes propriedades:*

- (i) u_ε tem um único máximo local (portanto global) z_ε em $\mathbb{R}^2$ e $z_\varepsilon \in \Omega$;
- (ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V(z_\varepsilon) = \nu_1 = \min_{\bar{\Omega}} V$;
- (iii) Existem constantes positivas C e ζ tais que, para todo $z \in \mathbb{R}^2$,

$$u_\varepsilon(z) \leq C \exp \left(-\zeta \left| \frac{z - z_\varepsilon}{\varepsilon} \right| \right).$$

Para tratar variacionalmente esta classe de problemas, com $h(s)$ se comportando como $\exp(\alpha s^4)$, $\alpha > 0$, quando $s \rightarrow +\infty$, fazemos, como no *Capítulo 1*, uma mudança de variável e exploramos suas propriedades, bem como, uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$ que afirma que se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então, para todo $\alpha > 0$, a integral $\int_{\mathbb{R}^2} [\exp(\alpha u^2) - 1] dx$ é finita. De fato, esta desigualdade, juntamente com a mudança de variável realizada, motiva a noção de criticalidade dada em (h_3) , veja, por exemplo, [1], [21], [33], [34], [36] e [58]. Aqui,

adaptamos algumas idéias dos trabalhos anteriores para contornar as dificuldades da não-limitação do domínio, do crescimento crítico e da mudança de variável. Desde que o potencial V não é necessariamente limitado, trabalhamos com o mesmo espaço de Orlicz do capítulo anterior. Como em [30] e [37], fazemos uma modificação conveniente na não-linearidade $h(s)$ fora do domínio Ω , de modo que o funcional energia associado satisfaça a condição de Palais-Smale e, usando estimativas elípticas, provamos que, para ε suficientemente pequeno, o ponto crítico do tipo mini-max é, de fato, uma solução da equação original.

O *Capítulo 3* trata o problema (1) em que $\varepsilon = 1$, $N \geq 4$ e $p(x, u)$ não depende de x . Além do potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ser uma função contínua e limitada cumprindo a condição (V_1) , pedimos que satisfaça a seguinte condição de periodicidade e simetria:

(V_4) Existe $T = (T_1, \dots, T_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$, onde $T_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, N_1$, tal que para todo $z = (x, y) \in \mathbb{R}^N \equiv \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$ e para todo $g \in O(\mathbb{R}^{2M})$, temos

$$V(x_1, \dots, x_i + T_i, \dots, x_{N_1}, y) = V(x, g(y)),$$

em que $i = 1, \dots, N_1$, $x = (x_1, \dots, x_{N_1})$ e $O(\mathbb{R}^{2M})$ é o grupo ortogonal em $\mathbb{R}^{2M}$.

Sobre a não-linearidade $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pedimos que seja uma função contínua e satisfaça as seguintes hipóteses:

$$(p_1) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p(s)}{s} = 0;$$

$$(p_2) \quad |p(s)| \leq C(1 + |s|^r) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ onde } C > 0 \text{ e } 3 < r < 22^* - 1;$$

$$(p_3) \quad \text{Existe } \theta > 4 \text{ tal que para todo } s > 0$$

$$0 < \theta P(s) \leq sp(s),$$

$$\text{em que } P(s) = \int_0^s p(t)dt;$$

$$(p_4) \quad p(-s) = -p(s) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

O principal resultado, neste capítulo, é enunciado como segue:

Teorema 0.3. *Sob as hipóteses (V_1) e (V_4) , $(h_1) - (h_4)$ e $N \geq 4$, o problema (1) tem duas soluções não-triviais em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, uma solução é positiva em $\mathbb{R}^N$ e radial na segunda variável y e a outra solução muda de sinal e é não-radial em y .*

Para provar o Teorema 0.3, também introduzimos uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo assim uma equação semi-linear que tem um funcional variacional associado I bem definido no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Em seguida, usamos o Teorema do Passo da Montanha para obter uma seqüência de Cerami, a qual mostramos ser limitada. Então, por uma extensão de um Lema de Concentração de Lions combinado com um resultado de imersão compacta e o Princípio de Criticalidade Simétrica, mostramos que a seqüência de Cerami converge a um ponto crítico não-trivial do funcional I .

No *Capítulo 4*, considerando o operador p -Laplaciano, generalizamos a equação (1). Mais precisamente, estudamos a seguinte equação quase-linear:

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u - \Delta_p(u^2)u = h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (5)$$

Aqui, vamos supor que o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua satisfazendo a hipótese (V_1) e também cumpra a seguinte condição assintótica:

$$(V_5) \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = V_\infty \text{ e } V(x) \leq V_\infty \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

As hipóteses abaixo sobre a não-linearidade $h(s)$ serão assumidas:

$$(H_0) \quad \text{A função } h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ é contínua e } \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{h(s)}{s^{p-1}} = 0;$$

$$(H_1) \quad \text{Existe uma constante } C > 0 \text{ tal que para todo } s \geq 0$$

$$h(s) \leq C(1 + s^r),$$

$$\text{onde } 2p - 1 < r < 2p^* - 1 \text{ se } 1 < p < N \text{ e } r > 2p - 1 \text{ se } p = N;$$

$$(H_2) \quad \text{Existe } \theta \geq 2p \text{ tal que } 0 < \theta H(s) \leq sh(s) \text{ para todo } s > 0, \text{ em que } H(s) = \int_0^s h(t)dt.$$

Usando métodos mini-max, nosso objetivo é provar a existência de solução fraca não-trivial para (5). O funcional natural associado a (5) não está bem definido, em geral, em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. A fim de superarmos esta dificuldade, generalizamos o argumento desenvolvido nos capítulos anteriores, introduzindo uma nova mudança de variável. Deste modo, obtemos um novo funcional I , o qual fica bem definido sobre $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Nesta situação, nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 0.4. *Seja $1 < p \leq N$. Assuma que (V_1) , (V_5) e $(H_0) - (H_1)$ valem. Então a equação (5) possui uma solução fraca positiva $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ desde que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:*

- (a) (H_2) vale com $\theta > 2p$;
- (b) (H_2) vale com $\theta = 2p$ e $p - 1 < r < p^* - 1$ se $1 < p < N$ ou $r > p - 1$ se $p = N$ em (H_1) .

Além disso, se $1 < p < N$ temos que $u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$.

O Teorema 0.4 complementa e melhora alguns resultados obtidos em Colin-Jeanjean [25], devido ao fato de estarmos considerando uma equação mais geral e de mostrarmos que as soluções têm decaimento para zero no infinito. Para provarmos o Teorema 0.4, mostramos que o funcional I possui a geometria do Passo da Montanha e, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha dada em [40], obtemos uma seqüência de Cerami a qual mostramos ser limitada. Utilizando um problema auxiliar e um Lema de Concentração de Lions, provamos que esta seqüência de Cerami converge fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para um ponto crítico não-trivial v de I . Usando um método de iteração, mostramos que v decai para zero no infinito.

Problemas envolvendo o operador p -Laplaciano surgem em diversos contextos. Alguns destes problemas vem de diferentes áreas da Matemática Aplicada e Física. Por exemplo, no estudo de fluidos não-newtonianos, teoria de elasticidade não-linear, reações-difusões, Glaciologia, teoria de combustão, biologia das populações, leis de fluxos não-lineares e sistemas de equações diferenciais parciais de Monge-Kantorovich. Para discussões adicionais sobre problemas modelados pelo operador p -Laplaciano, veja, por exemplo, [31], [32], [39], [41], [43], [47], [55], [61], [65] e [69].

O *Capítulo 5* trata a equação (5) no caso unidimensional e quando a não-linearidade $h(s)$ possui termos côncavos e convexos, isto é, consideramos o seguinte problema:

$$L_p u = \lambda |u|^{q-2} u + \mu |u|^{r-2} u, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad (6)$$

em que

$$L_p u \doteq -(|u'|^{p-2} u')' + V(x) |u|^{p-2} u - (|(u^2)'|^{p-2} (u^2)')' u,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $1 < q < p$ e $r > 2p$. Assumimos que o potencial $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja localmente limitada, não-negativo e cumpra as seguintes condições:

(U₁) Para algum $0 < R_0 < \frac{1}{2p}$, $V(x) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > R_0$;

(U₂) $\int_{|x| \geq R_0} V(x)^{-1/(p-1)} dx < \infty$.

Neste capítulo, trabalhamos com o espaço de funções

$$X = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} V(x)|u|^p dx < \infty \right\}$$

que é um espaço de Banach separável e reflexivo quando munido da norma

$$\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}} |u'|^p dx + \int_{\mathbb{R}} V(x)|u|^p dx.$$

Note que (6) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{2^{p-1}}{p} \int_{\mathbb{R}} |u'|^p |u|^p dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}} |u|^q dx - \frac{\mu}{r} \int_{\mathbb{R}} |u|^r dx.$$

Diferentemente dos capítulos anteriores, não precisamos fazer mudança de variável para obtermos um novo funcional, pois, como mostraremos, o espaço X está imerso em $L^t(\mathbb{R})$ para $1 \leq t \leq \infty$. Com isso, o funcional $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ fica bem definido sobre o espaço X . O resultado principal deste capítulo é:

Teorema 0.5. *Sob as condições (U₁) e (U₂) e supondo que $1 < p < \infty$, $1 < q < p$ e $r > 2p$, temos:*

- (a) *para cada $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação (6) tem uma seqüência de soluções (u_k) tal que $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u_k) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$;*
- (b) *para cada $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, a equação (6) tem uma seqüência de soluções (v_k) tal que $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(v_k) < 0$ e $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(v_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Nosso resultado complementa e melhora alguns resultados em Poppenberg-Schmitt-Wang [66], no sentido de que estamos considerando uma classe mais geral de operadores e não-linearidades e também permitimos que o potencial V se anule em uma parte limitada do domínio. Para obtermos multiplicidade de soluções para (6), aplicamos o Teorema da Fonte de Bartsch-Willem, bem como o Teorema da Fonte Dual (veja [10] e [80]).

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à *Introdução* e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os resultados principais, bem como, as hipóteses sobre as funções $V(x)$ e $p(x, s)$.

CAPÍTULO 1

Equações de Schrödinger com não-linearidades envolvendo termos côncavos e convexos

O principal objetivo deste capítulo é mostrar que, usando uma estrutura variacional global definida em um espaço do tipo Orlicz, é possível encontrar condições suficientes para a existência de soluções positivas para equações de Schrödinger quase-lineares da forma

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda h(x, u) + g(x, u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad (P_\lambda)$$

em que $N \geq 3$, $\lambda \geq 0$, o potencial V é contínuo, uniformemente positivo e satisfaz uma condição apropriada de integrabilidade. Além disso, o termo não-linear $p(x, s) = \lambda h(x, s) + g(x, s)$ pode envolver uma combinação de termos côncavo e convexo em s . Um exemplo típico de equação (P_λ) considerada neste capítulo é a seguinte:

$$-\Delta u + V(x)u - \Delta(u^2)u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{r-2}u, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad (1.1)$$

com $1 < q < 2$ e $4 < r < 22^*$.

Problemas elípticos em domínios limitados, envolvendo termos côncavos e convexos, têm sido estudados, extensivamente, depois do trabalho inicial de Ambrosetti–Brezis–Cerami [6] (veja também [29] para mais referências) e pouco tem sido feito para problemas em $\mathbb{R}^N$.

Citamos, por exemplo, os trabalhos de [9], [18], [20], [22] and [56], onde os autores estudaram existência de soluções em $\mathbb{R}^N$ para algumas equações semi-lineares. Não conhecemos, até o momento, nenhum resultado a respeito de equações de Schrödinger quase-lineares do tipo (P_λ) envolvendo uma combinação de termos côncavo e convexo.

Para lidarmos com o termo côncavo, consideramos as seguintes hipóteses sobre o potencial V :

(V_1) A função $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e uniformemente positiva, isto é,

$$0 < V_0 \leq V(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^N;$$

(V_2) A função $1/V$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx < \infty.$$

Ao longo deste capítulo, as seguintes hipóteses sobre $h(x, s)$ e $g(x, s)$ serão assumidas:

(h_0) A função $h : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é contínua e existem $C > 0$ e $q \in (1, 2)$ tais que para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$,

$$h(x, s) \leq Cs^{q-1};$$

(g_1) A função $g : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{g(x, s)}{s} = 0 \text{ uniformemente em } x \in \mathbb{R}^N;$$

(g_2) Existem $C_1 > 0$ e $4 < r < 22^*$ tais que para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$,

$$g(x, s) \leq C_1(1 + s^{r-1});$$

(g_3) Existe $\mu > 2$ tal que para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$,

$$0 < 2\mu G(x, s) = 2\mu \int_0^s g(x, t) dt \leq g(x, s)s.$$

O seguinte teorema contém nosso resultado principal:

Teorema 1.1. *Suponha que as hipóteses $(V_1) - (V_2)$, (h_0) e $(g_1) - (g_3)$ valem. Então, existem $\lambda_0, C_0 > 0$ tais que, para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$, (P_λ) possui uma solução positiva $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_\lambda\|_{1,2} \leq C_0$. Além disso, se u_0 é uma solução de (P_λ) quando $\lambda = 0$, existem constantes positivas C e ζ satisfazendo*

$$u_0(x) \leq C \exp(-\zeta|x|) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Em [58], os autores obtêm existência de soluções de (P_λ) em um espaço de Orlicz, com $\lambda = 0$ e $g(x, s) = \nu|s|^{r-1}s$, $\nu > 0$, e consideram vários tipos de potenciais positivos V , incluindo potenciais não-limitados. O resultado principal afirma que se $4 \leq r + 1 < 22^*$ então, para cada $\nu > 0$, existe uma solução. Em [25], os autores deram uma prova, mais resumida e menos técnica, dos resultados em [58], trabalhando no espaço usual $H^1(\mathbb{R}^N)$ ao invés de usar espaços de Orlicz. Contudo, os autores consideram somente uma classe de potenciais limitados. O fato de trabalharem em $H^1(\mathbb{R}^N)$ permitiu tratar diferentes tipos de não-linearidades. Em ambos os trabalhos, os autores apresentam diferentes maneiras de superar a perda de compacidade que é típica de problemas elípticos em domínios não-limitados. Mas, em momento algum, deixam claro ou não provam que o funcional associado satisfaz a tão conhecida condição de Palais-Smale.

Neste capítulo, complementamos e melhoramos os resultados principais em [25] e [58], no sentido que estamos considerando uma classe mais geral de não-linearidades, a qual também inclui uma combinação de termos côncavo e convexo. Sem significantes mudanças em nosso argumento, para $\lambda = 0$, nosso método também aplica-se a vários tipos de potenciais positivos incluindo aqueles em [58]. Aqui, porém, vamos concentrar nossa atenção no caso em que o potencial satisfaz a condição (V_2) .

A principal dificuldade em tratar esta classe de equações de Schrödinger quase-lineares em $\mathbb{R}^N$ é a possível perda de compacidade, além do termo côncavo e do termo $\Delta(u^2)u$. O espaço de funções usado em [58] e o método em [25] não podem ser aplicados diretamente para lidar com esta classe de não-linearidades. Foi crucial em nosso argumento, o fato que o espaço de funções, considerado em nosso tratamento, estivesse imerso no espaço de Lebesgue usual $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq 2^*$, como também no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Para provar o Teorema 1.1, usamos uma mudança de variável para reformular o problema, obtendo uma equação semi-linear que tem um funcional associado bem definido e Gateaux-diferenciável em um espaço do tipo Orlicz. Este funcional satisfaz as hipóteses geométricas do

Teorema do Passo da Montanha e a condição de compacidade de Palais-Smale. Alcançamos o nosso resultado de existência, aplicando uma versão do Teorema do Passo da Montanha ¹.

1.1 A estrutura variacional

1.1.1 Reformulação do problema e preliminares

Observemos que, formalmente, (P_λ) é a equação de Euler–Lagrange associada ao funcional energia natural

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \, dx - \Psi_\lambda(u),$$

em que

$$\Psi_\lambda(u) = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(x, u) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) \, dx$$

e

$$H(x, s) = \int_0^s h(x, t) \, dt, \quad G(x, s) = \int_0^s g(x, t) \, dt.$$

Usando as hipóteses (h_0) e (g_1) , podemos ver que $h(x, 0) = g(x, 0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e, desde que, estamos interessados em soluções positivas, consideramos $h(x, s) = g(x, s) = 0$ para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0)$.

Devido ao termo $\int_{\mathbb{R}^N} u^2 |\nabla u|^2 \, dx$, utilizamos argumentos similares aos desenvolvidos por Liu, Wang e Wang em [58] (veja também [25]), considerando a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, em que f é definida por

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1 + 2f^2(t))^{1/2}} && \text{em } [0, +\infty), \\ f(t) &= -f(-t) && \text{em } (-\infty, 0]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Então, depois desta mudança de variável, a partir de $J_\lambda(u)$ obtemos o funcional

$$I_\lambda(v) \doteq J_\lambda(f(v)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)] \, dx - \Psi_\lambda(f(v)),$$

que está bem definido no espaço

$$E = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx < \infty \right\}$$

¹Esta versão não requer que o funcional seja de classe C^1 e pode ser obtido como consequência do Princípio Variacional de Ekeland, veja [8].

o qual é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|v\| = \|\nabla v\|_2 + \inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi v) \, dx \right] \quad (1.3)$$

(veja Proposições 1.3 e 1.7). Como já observado antes, em nosso trabalho, conseguimos obter imersões do espaço E nos espaços $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq 2^*$, como também no espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$, o que não foi obtido em [58], quando os autores trabalharam em um espaço de Orlicz. Mesmo no caso $\lambda = 0$, nossos resultados melhoram os de Liu, Wang e Wang [58], pois trabalhamos com não-linearidades mais gerais e mostramos que as soluções têm decaimento exponencial.

Note que pontos críticos não-triviais de I_λ correspondem precisamente as soluções positivas da equação semi-linear

$$-\Delta v = \frac{1}{\sqrt{1 + 2f^2(v)}} [\lambda h(x, f(v)) + g(x, f(v)) - V(x)f(v)]. \quad (1.4)$$

Para uma fácil referência, colecionamos aqui algumas propriedades da função f .

Lema 1.2. *A função $f(t)$ e sua derivada gozam das seguintes propriedades:*

- (1) f é uma função C^∞ , unicamente definida e invertível;
- (2) $|f'(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (3) $|f(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (4) $f(t)/t \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0$;
- (5) $f(t)/\sqrt{t} \rightarrow 2^{1/4}$ quando $t \rightarrow +\infty$;
- (6) $f(t)/2 \leq tf'(t) \leq f(t)$ para todo $t \geq 0$;
- (7) $|f(t)| \leq 2^{1/4}|t|^{1/2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (8) A função $f^2(t)$ é estritamente convexa;
- (9) Existe uma constante positiva C tal que

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & |t| \leq 1 \\ C|t|^{1/2}, & |t| \geq 1; \end{cases}$$

(10) Existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$|t| \leq C_1|f(t)| + C_2|f(t)|^2 \text{ para todo } t \in \mathbb{R};$$

(11) $|f(t)f'(t)| \leq 1/\sqrt{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

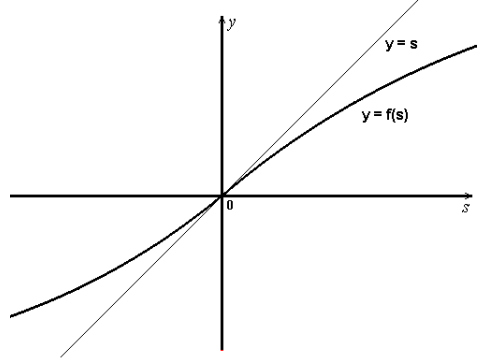


Figura 1.1: Gráfico de f

Prova. As propriedades (1), (2), (4), (5) e (6) estão provadas em [25] (veja também [58]). A desigualdade (3) é uma consequência de (2) e do fato que $f(t)$ é uma função ímpar e côncava para $t > 0$. Para provar (7), usamos (4), (5) e (6). De fato, de acordo com (4), temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} = 0$$

e (6) implica que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \right) = \frac{2f'(t)t - f(t)}{2t\sqrt{t}} \geq 0 \text{ para todo } t > 0.$$

Consequentemente, a função $f(t)/\sqrt{t}$ é não-decrescente para $t > 0$ e de (5) concluímos que

$$f(t)/\sqrt{t} \leq 2^{1/4} \text{ para todo } t > 0.$$

Isto, juntamente com o fato que f é ímpar, prova (7).

A fim de provarmos (8), basta notarmos que

$$\frac{d^2}{dt^2}[f^2(t)] = \frac{1}{(1 + 2f^2(t))^2} > 0.$$

Os pontos (9) e (10) são consequências imediatas de (4) e (5). Finalmente, a estimativa (11) segue diretamente da definição de f e o lema está provado. ■

1.1.2 Propriedades do espaço E

Nesta subseção, colecionamos alguns fatos sobre o espaço E que são essenciais em nosso argumento para provar a existência e propriedades qualitativas de soluções. Primeiramente, consideramos o seguinte espaço de funções

$$X = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 \, dx < \infty \right\}$$

o qual é um espaço de Banach reflexivo quando munido da norma

$$\|v\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)v^2) \, dx.$$

Sob as nossas hipóteses sobre o potencial, a imersão

$$X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N) \tag{1.5}$$

é contínua para $1 \leq s \leq 2^*$ e compacta para $1 \leq s < 2^*$ (este fato pode ser encontrado em [50]).

A próxima proposição traz uma desigualdade e propriedades de convergência importantes a respeito do espaço E que usaremos ao longo deste capítulo.

Proposição 1.3. *(1) E é um espaço vetorial normado com respeito a norma dada em (1.3);*

(2) Existe uma constante positiva C tal que para todo $v \in E$,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx}{\left[1 + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx\right)^{1/2}\right]} \leq C\|v\|; \tag{1.6}$$

(3) Se $v_n \rightarrow v$ em E , então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f^2(v_n) - f^2(v)| \, dx \rightarrow 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n) - f(v)|^2 \, dx \rightarrow 0;$$

(4) Se $v_n \rightarrow v$ quase sempre e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx,$$

então

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi(v_n - v)) \, dx \right] \rightarrow 0.$$

Prova. Por (4) e (5) do Lema 1.2, f tem o seguinte comportamento assintótico:

$$f^2(s) \sim \begin{cases} s^2, & \text{para } |s| \text{ pequeno;} \\ C|s|, & \text{para } |s| \text{ grande.} \end{cases}$$

Em particular, para algum $C_0 > 0$, temos

$$f^2(2s) \leq C_0 f^2(s), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Para provar (1), observemos que claramente $0 \in E$. Sejam $v \in E$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha|/2^k \in (0, 1)$. Usando a estimativa (1.7) e que f^2 é convexa, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\alpha v) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2 \left(2^k \frac{|\alpha|}{2^k} v \right) \, dx \\ &\leq C_0^k \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2 \left(\frac{|\alpha|}{2^k} v \right) \, dx \\ &\leq \frac{C_0^k |\alpha|}{2^k} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx. \end{aligned}$$

Logo, $\alpha v \in E$. Sejam $u, v \in E$ e usando mais uma vez que f^2 é convexa, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(u + v) \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(2v) \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(2u) \, dx.$$

Assim, E é um espaço vetorial. É padrão checar que (1.3) é uma norma em E .

A seguir, provemos a propriedade (2). Para $v \in E$ e $\xi > 0$, definamos

$$\mathcal{A}_\xi \doteq \{x \in \mathbb{R}^N : \xi |v(x)| \leq 1\}.$$

Pelas propriedades (3) e (7) do Lema 1.2, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx &= \int_{\mathcal{A}_\xi} V(x) f^2(v) \, dx + \int_{\mathcal{A}_\xi^c} V(x) f^2(v) \, dx \\ &\leq \int_{\mathcal{A}_\xi} V(x) |f(v)| |v| \, dx + C \int_{\mathcal{A}_\xi^c} V(x) |v| \, dx \end{aligned} \quad (1.8)$$

Usando a desigualdade de Hölder e (9) do Lema 1.2, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}_\xi} V(x)|f(v)||v| \, dx &\leq \left[\int_{\mathcal{A}_\xi} V(x)f^2(v) \, dx \right]^{1/2} \left[\int_{\mathcal{A}_\xi} V(x)v^2 \, dx \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx \right]^{1/2} \frac{C}{\xi} \left[\int_{\mathcal{A}_\xi} V(x)f^2(\xi v) \, dx \right]^{1/2} \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx \right]^{1/2} \frac{C}{\xi} \left[1 + \int_{\mathcal{A}_\xi} V(x)f^2(\xi v) \, dx \right],
\end{aligned} \tag{1.9}$$

onde, na última estimativa, usamos a desigualdade $s^{1/2} \leq 1 + s$ para todo $s \geq 0$. Pela estimativa (9) do Lema 1.2, obtemos

$$\int_{\mathcal{A}_\xi^c} V(x)|v| \, dx = \frac{C}{\xi} \int_{\mathcal{A}_\xi^c} V(x)|\xi v| \, dx \leq \frac{C}{\xi} \left[1 + \int_{\mathcal{A}_\xi^c} V(x)f^2(\xi v) \, dx \right]. \tag{1.10}$$

Logo, de (1.8)-(1.10) concluimos que para todo $\xi > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx \leq \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx \right]^{1/2} + 1 \right\} \frac{C}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\xi v) \, dx \right],$$

e a propriedade (2) segue.

A fim de provarmos (3), observemos que da imersão contínua

$$E \hookrightarrow D^{1,2}(\mathbb{R}^N)^2 \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N), \tag{1.11}$$

obtemos que $v_n \rightarrow v$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Pela desigualdade (1.6) e usando que $\lim_{s \rightarrow +\infty} s(1 + s^{1/2})^{-1} = +\infty$, devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) \, dx \leq C$$

que, juntamente com o Lema de Fatou, implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) \, dx \leq C.$$

Por (1.6) novamente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n - v) \, dx \rightarrow 0.$$

²O espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é o completamento de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com relação à norma do gradiente.

Logo, a menos de subsequência, existe $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$V(x)f^2(v_n - v) \leq h$$

vale quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Além disso, a desigualdade (1.7), juntamente com a convexidade de f^2 , implica que

$$\begin{aligned} V(x)f^2(v_n) &\leq \frac{C_0}{2}V(x)f^2(v_n - v) + \frac{C_0}{2}V(x)f^2(v) \\ &\leq C_1(h + V(x)f^2(v)). \end{aligned}$$

Desde que

$$h + V(x)f^2(v) \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a prova do ítem (3) está completa.

Finalmente, indicamos que a propriedade (4) está provada em [58, Proposição 2.1].

■

Corolário 1.4. *A imersão $X \hookrightarrow E$ é contínua.*

Prova. Seja $v_n \rightarrow 0$ em X . Usando que $|f(s)| \leq |s|$ para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2 \, dx \rightarrow 0.$$

Assim, da propriedade (4) da Proposição 1.3, concluímos que $v_n \rightarrow 0$ em E que é o resultado desejado.

■

Proposição 1.5. *A aplicação $v \rightarrow f(v)$ de E em $L^q(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $1 \leq q \leq 22^*$. Além disso, sob a hipótese (V_2) , a aplicação anterior é compacta para $1 \leq q < 22^*$.*

Prova. Para $v \in E$, obtemos, por definição, que $f(v) \in X$. Isto, juntamente com (1.5), implica que

$$\|f(v)\|_q \leq C\|f(v)\|_X \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) \, dx \right]^{1/2}, \quad (1.12)$$

para $1 \leq q \leq 2^*$. Além disso, pela desigualdade de Gagliardo–Nirenberg, obtemos

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_{22^*} &= \|f^2(v)\|_{2^*}^{1/2} \leq C\|\nabla(f^2(v))\|_2^{1/2} \\ &= C \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{f^2(v)}{1 + 2f^2(v)} |\nabla v|^2 \, dx \right]^{1/4} \\ &\leq C\|v\|^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Logo, para todo $v \in E$ temos que $f(v)$ pertence a $L^{22^*}(\mathbb{R}^N)$, que juntamente com (2.10) mostra, por interpolação, que a aplicação $v \rightarrow f(v)$ de E em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q \leq 22^*$, está bem definida.

Seja (v_n) uma seqüência em E tal que $v_n \rightarrow v$ em E . Assim, temos

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N)$$

para $i = 1, \dots, N$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v_n) - f(v)|^2 dx \rightarrow 0. \quad (1.14)$$

Portanto, a menos de subsequência, existe $h_i \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq h_i$$

vale quase sempre em $\mathbb{R}^N$ para $i = 1, \dots, N$, de onde obtemos

$$\left| \frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} \right| = \left| f'(v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq \left| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq h_i$$

e

$$\frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} = f'(v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \rightarrow f'(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial f(v)}{\partial x_i}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$ para $i = 1, \dots, N$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$f(v_n) \rightarrow f(v) \quad \text{em} \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N),$$

que em conjunto com (1.14), implica que

$$f(v_n) \rightarrow f(v) \quad \text{em} \quad X.$$

Portanto, pela imersão contínua (1.5), obtemos

$$f(v_n) \rightarrow f(v) \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{para} \quad 1 \leq q \leq 2^*.$$

Note que, de (1.13), também temos que

$$f^2(v_n - v) \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Logo, a menos de subsequência, existe $w \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$f^2(v_n - v) \leq w$$

e $v_n \rightarrow v$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Agora, podemos usar a convexidade de f^2 e (1.7) para concluir que

$$f^{22^*}(v_n) \leq C(w^{2^*} + f^{22^*}(v)) \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos que

$$f(v_n) \rightarrow f(v) \quad \text{em} \quad L^{22^*}(\mathbb{R}^N).$$

Finalmente, usando a desigualdade de interpolação a continuidade segue.

A seguir, provemos a compacidade. Seja $(v_n) \subset E$ uma seqüência limitada. Então (v_n) é limitada em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e, por (1.6), segue também que $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n)dx$ é limitada. Usando (2.10) e (1.13), temos que $(f(v_n))$ é uma seqüência limitada em X e em $L^{22^*}(\mathbb{R}^N)$. A imersão compacta $X \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$ implica que, a menos de subsequência, existe $w \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $f(v_n) \rightarrow w$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Logo, pelo Lema de Brezis-Lieb concluímos que $w \in L^{22^*}(\mathbb{R}^N)$ e, em virtude da desigualdade de interpolação, dado qualquer $1 \leq q < 22^*$, existe $0 < \alpha \leq 1$ tal que

$$\|f(v_n) - w\|_q \leq \|f(v_n) - w\|_1^\alpha \|f(v_n) - w\|_{22^*}^{1-\alpha} \leq C\|f(v_n) - w\|_1^\alpha,$$

o que implica que $f(v_n) \rightarrow w$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq q < 22^*$ e a prova está completa. $\blacksquare$

Corolário 1.6. *A imersão $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)$ é contínua para $1 \leq s \leq 2^*$.*

Prova. Por (10) do Lema 1.2 e Proposição 1.5, segue que se $v \in E$ então $v \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, podemos concluir que se $v_n \rightarrow 0$ em E , temos que $f(v_n) \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e, assim, $v_n \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, a imersão $E \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Usando mais uma vez (10) do Lema 1.2, temos

$$|v_n|^{2^*} \leq C(|f(v_n)|^{2^*} + |f(v_n)|^{22^*}),$$

que juntamente com a Proposição 1.5, implica que $v_n \rightarrow 0$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Finalmente, por interpolação, o resultado segue. $\blacksquare$

Proposição 1.7. *E é um espaço de Banach.*

Prova. Seja (v_n) uma seqüência de Cauchy em E . Usando a imersão contínua (1.11) e a completude de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, existe $v \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $v_n \rightarrow v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Pela desigualdade (1.6), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) dx \leq C$$

que juntamente com o Lema de Fatou implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx \leq C.$$

Pela Proposição 1.5, $(f^2(v_n))$ e $(f^4(v_n))$ são seqüências limitadas em $L^1(\mathbb{R}^N)$ desde que $22^* > 4$. Usando a desigualdade (10) do Lema 1.2, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^2 \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} C \left[\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v_n) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} f^4(v_n) \, dx \right].$$

Assim, $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e, conseqüentemente, $v \in E$.

Por (1.6), dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_m - v_n) \, dx < \epsilon.$$

Fixando $m > n_0$ qualquer e aplicando o Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_m - v) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_m - v_n) \, dx < \epsilon$$

e isto implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_m - v) \, dx = 0.$$

Por um argumento similar como na prova da propriedade (3) da Proposição 1.3, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx.$$

Logo, usando o ponto (4) da Proposição 1.3,

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi(v_n - v)) \, dx \right] \rightarrow 0$$

e, conseqüentemente, $v_n \rightarrow v$ em E . ■

A prova da seguinte proposição é análoga a das anteriores e omitimos aqui.

Proposição 1.8. *A imersão $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Além disso, $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E .*

1.1.3 Regularidade do funcional I_λ

Os próximos resultados, a respeito da regularidade do funcional I_λ e de seus pontos críticos, tornarão claro que para se obter soluções clássicas de (P_λ) é suficiente procurarmos por pontos críticos de I_λ de classe C^2 .

Proposição 1.9. *O funcional I_λ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) I_λ está bem definido em E .
- (2) I_λ é contínua em E .
- (3) I_λ é Gateaux-diferenciável em E e

$$\langle I'_\lambda(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v) f'(v) \varphi \, dx - \langle \Psi'_\lambda(v), \varphi \rangle$$

onde

$$\langle \Psi'_\lambda(v), \varphi \rangle = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(v)) f'(v) \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) \varphi \, dx.$$

- (4) Para $v \in E$, $I'_\lambda(v) \in E'$ e se $v_n \rightarrow v$ em E então $I'_\lambda(v_n) \rightarrow I'_\lambda(v)$ na topologia fraca * de E' ³

Prova. Para provarmos o item (1), notemos que, pelas hipóteses (h_0) , (g_1) e (g_2) , para cada $v \in E$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(v)) \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^q \, dx \quad (1.15)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) \, dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} (|f(v)|^2 + |f(v)|^r) \, dx. \quad (1.16)$$

Assim, pela Proposição 1.5, $\Psi(v)$ está bem definido em E .

Na sequência, provemos (2). Seja $v_n \rightarrow v$ em E . Então pela imersão contínua (1.11), Proposições 1.3 e 1.5, temos que $v_n \rightarrow v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $f(v_n) \rightarrow f(v)$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $1 \leq s \leq 22^*$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx,$$

³ $I'_\lambda(v_n) \rightarrow I'_\lambda(v)$ na topologia fraca * de E' se para cada $\varphi \in E$ temos $\langle I'_\lambda(v_n), \varphi \rangle \rightarrow \langle I'_\lambda(v), \varphi \rangle$.

que juntamente com (1.15)-(1.16) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(v_n)) \, dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(v)) \, dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_n)) \, dx &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) \, dx.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, $I_\lambda(v_n) \rightarrow I_\lambda(v)$.

Para provarmos (3), veja que para $v, \varphi \in E$ fixados, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)(f^2(v + t\varphi) - f^2(v))}{t} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(\xi)f'(\xi)\varphi \, dx,$$

em que

$$\min\{v, v + t\varphi\} \leq \xi \leq \max\{v, v + t\varphi\}.$$

Note que para $|t| \leq 1$, $|\xi| \leq |v| + |\varphi|$ e usando (2), (10) e (11) do Lema 1.2 e o fato que f é crescente, obtemos

$$\begin{aligned}|V(x)f(\xi)f'(\xi)\varphi| &\leq C_1V(x)|f(\xi)f'(\xi)||f(\varphi)| + C_2V(x)|f(\xi)f'(\xi)|f^2(\varphi) \\ &\leq C_1V(x)f(|v| + |\varphi|)|f(\varphi)| + \frac{C_2}{\sqrt{2}}V(x)f^2(\varphi) \\ &\leq C_1V(x)f^2(|v| + |\varphi|) + C_1V(x)f^2(\varphi) + C_2V(x)f^2(\varphi),\end{aligned}$$

onde o lado direito pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$. Desde que

$$V(x)f(\xi)f'(\xi)\varphi \rightarrow V(x)f(v)f'(v)\varphi$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$ quando $t \rightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x)(f^2(v + t\varphi) - f^2(v))}{t} \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\varphi \, dx.$$

Analogamente, usando as propriedades de f , as hipóteses (h_0) , $(g_1) - (g_2)$ e novamente o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos obter que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{H(x, f(v + t\varphi)) - H(x, f(v))}{t} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(v))f'(v)\varphi \, dx \\ \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{G(x, f(v + t\varphi)) - G(x, f(v))}{t} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v))f'(v)\varphi \, dx.\end{aligned}$$

Conseqüentemente, o ponto (3) está provado.

Para ver que $I'_\lambda(v) \in E'$ quando $v \in E$, a principal dificuldade se encontra no termo $\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\varphi \, dx$. Então, suponha que $\varphi_n \rightarrow 0$ em E . Usando (3) da Proposição 1.3, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\varphi_n) \, dx \rightarrow 0.$$

Agora, por (2), (10) and (11) do Lema 1.2 temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\varphi_n \, dx \right| &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v)f'(v)||f(\varphi_n)| \, dx \\ &\quad + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v)f'(v)|f^2(\varphi_n) \, dx \\ &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v) \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\varphi_n) \, dx \right)^{1/2} \\ &\quad + C_3 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(\varphi_n) \, dx. \end{aligned}$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)f(v)f'(v)\varphi_n \, dx \rightarrow 0.$$

Logo, $I'_\lambda(v) \in E'$. Usando argumentos similares aos anteriores, podemos provar que se $v_n \rightarrow v$ em E então

$$\langle I'_\lambda(v_n), \varphi \rangle \rightarrow \langle I'_\lambda(v), \varphi \rangle$$

para cada $\varphi \in E$. ■

Proposição 1.10. *Assuma que as funções V , h e g sejam localmente Hölder contínuas. Então qualquer ponto crítico de I_λ é de classe $C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, se $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap E$ é um ponto crítico do funcional I_λ , então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica de (P_λ) . Portanto, para obtermos soluções clássicas de (P_λ) , é suficiente conseguirmos pontos críticos de I_λ de classe C^2 .*

Prova. Seja $v \in E$ um ponto crítico de I_λ . Então

$$-\Delta v = w \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

no sentido fraco, em que

$$w(x) \doteq f'(v(x))[\lambda h(x, f(v(x))) + g(x, f(v(x))) - V(x)f(v(x))].$$

De acordo com as condições sobre as não-linearidades h e g , obtemos

$$|w| \leq f'(v)[C_1 + C_2|f(v)| + C_3|f(v)|^{r-1}] \leq C_4 + C_5|v|^{(r-2)/2}$$

em qualquer bola B_R , onde usamos (7) e (11) do Lema 1.2. Seja $p_0 \doteq 22^*/(r-2) > 1$. Como $v \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ segue que $w \in L^{p_0}(B_R)$. Assim, pela teoria de regularidade elíptica $v \in W^{2,p_0}(B_R)$. Usando um argumento de “bootstrap” padrão, podemos concluir que $v \in W^{2,p}(B_R)$ para todo $p \geq 2$ (para mais detalhes, veja [49, Exemplo 11.6]). Assim, $v \in C_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e isto implica que w é localmente Hölder contínua. Conseqüentemente, $v \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$.

Finalmente, indicamos que a segunda afirmação está provada em [25] ou veja Proposição 4.3 do *Capítulo 4* numa situação mais geral. ■

1.2 Resultados de existência via Passo da Montanha

Nosso resultado de existência será obtido aplicando-se a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha, o qual é uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland como abordado em [8] (veja também [19], [28], [45], [49] e [75], para resultados relacionados).

Teorema 1.11. *Sejam E um espaço de Banach e $\Phi \in C(E; \mathbb{R})$, Gateaux-diferenciável em E , com a derivada de Gateaux $\Phi'(v) \in E'$ para todo $v \in E$ e contínua da topologia da norma de E para a topologia fraca $*$ de E' . Suponha que $\Phi(0) = 0$ e seja $\mathcal{S} \subset E$ fechado que desconecta (por caminhos) E . Sejam $v_0 = 0$ e $v_1 \in E$ pontos pertencentes a componentes conexas distintas de $E \setminus \mathcal{S}$. Suponha ainda que*

$$\inf_{\mathcal{S}} \Phi \geq \alpha > 0 \quad e \quad \Phi(v_1) \leq 0$$

e seja

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1]; E) : \gamma(0) = 0 \quad e \quad \gamma(1) = v_1\}.$$

Então

$$c \doteq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \Phi(\gamma(t)) \geq \alpha$$

e Φ possui uma seqüência de Palais-Smale no nível c (daqui por diante denotada por $(PS)_c^4$). O número c é chamado o nível do passo da montanha de Φ .

⁴Relembremos que (v_n) é uma seqüência $(PS)_c$ para Φ se $\Phi(v_n) \rightarrow c$ e $\Phi'(v_n) \rightarrow 0$ no espaço dual E' .

1.2.1 Geometria do Passo da Montanha

Agora, vamos provar que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$, o funcional I_λ tem a geometria do Passo da Montanha. Com este intuito, primeiramente, consideremos o conjunto

$$\mathcal{S}(\rho) \doteq \{v \in E : \mathcal{Q}(v) = \rho^2\},$$

em que $\rho > 0$ e $\mathcal{Q} : E \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathcal{Q}(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx.$$

Desde que $\mathcal{Q}(v)$ é contínua, $\mathcal{S}(\rho)$ é um subconjunto fechado e desconecta o espaço E .

Lema 1.12. *Existem $\lambda_0, \rho_0, \alpha_0 > 0$ tais que, para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$,*

$$I_\lambda(v) \geq \alpha_0 \quad \text{para todo } v \in \mathcal{S}(\rho_0).$$

Prova. Das hipóteses $(g_1) - (g_2)$, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que para todo $(x, s) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty)$,

$$G(x, s) \leq \epsilon s^2 + C s^r.$$

Conseqüentemente, para $v \in \mathcal{S}(\rho)$, por (V_1) e desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) \, dx &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^2 \, dx + C \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^r \, dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C \int_{\mathbb{R}^N} |f^2(v)|^{r/2} \, dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C \left[\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v) \, dx \right]^{\alpha r/2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} (f^2(v))^{2^*} \, dx \right]^{1-\alpha r/2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C(\rho^2)^{\alpha r/2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(v))|^2 \, dx \right]^{(1-\alpha r/2)2^*/2}, \end{aligned}$$

em que

$$\alpha = \frac{22^* - r}{r(2^* - 1)}.$$

Desde que, para $v \in \mathcal{S}(\rho)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(v))|^2 \, dx &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx \\ &\leq 2\rho^2, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) \, dx &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C \rho^{(2\alpha r + 2^*(2-\alpha r))/2} \\ &= \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C \rho^{(2N+2r)/(N+2)}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde $(2N + 2r)/(N + 2) > 2$ pois $r > 2$.

Além disso, pela condição (h_0) ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(v)) \, dx &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^q \, dx \\ &\leq C_1 \|f(v)\|_X^q \\ &\leq C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)) \, dx \right]^{q/2}. \end{aligned}$$

Assim, para $v \in \mathcal{S}(\rho)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(v)) \, dx \leq C_1 \rho^q. \quad (1.18)$$

De (1.17) e (1.18), para $v \in \mathcal{S}(\rho)$ obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(v) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{V_0} \right) \rho^2 - C \rho^{(2N+2r)/(N+2)} - \lambda C_1 \rho^q \\ &= \rho^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{V_0} - C \rho^{2(r-2)/(N+2)} \right) - \lambda C_1 \rho^q. \end{aligned}$$

Agora, escolhendo $0 < 2\epsilon < V_0$ e $\rho = \rho_0 > 0$ tais que

$$\beta_0 \doteq \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{V_0} - C \rho_0^{2(r-2)/(N+2)} > 0,$$

temos

$$I_\lambda(v) \geq \alpha_0 \doteq \frac{\beta_0 \rho_0^2}{2} > 0,$$

para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$ e $v \in \mathcal{S}(\rho_0)$, onde $\lambda_0 \doteq (\beta_0 \rho_0^{2-q})/(2C_1)$. ■

Lema 1.13. Para $\lambda \in [0, \lambda_0]$, existe $v \in E$ satisfazendo $\mathcal{Q}(v) > \rho_0^2$ e $I_\lambda(v) < 0$.

Prova. Vamos provar que existe $\varphi \in E$ tal que $I_\lambda(t\varphi) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, o que prova nossa tese se tomarmos $v = t\varphi$ com t suficientemente grande.

Note que por (g_3) existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$G(x, s) \geq C_1 s^{2\mu} - C_2 \quad (1.19)$$

para todo $(x, s) \in \overline{B_1} \times [0, +\infty)$. Escolhendo qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0, 1])$ tal que $\text{supp}\varphi = \overline{B_1}$, (1.19) implica que

$$I_\lambda(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2} \int_{B_1} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2) \, dx - C_1 \int_{B_1} |f(t\varphi)|^{2\mu} \, dx + C_2|B_1|.$$

Usando a propriedade (6) do Lema 1.2, segue que $f(s)/s$ é decrescente para $s > 0$. Desde que $0 \leq t\varphi(x) \leq t$ para $x \in B_1$ e $t > 0$, obtemos $f(t\varphi(x)) \geq f(t)\varphi(x)$, o que implica que

$$\begin{aligned} I_\lambda(t\varphi) &\leq \frac{t^2}{2} \left[\int_{B_1} (|\nabla\varphi|^2 + V(x)\varphi^2) \, dx - C_1 \frac{f(t)^{2\mu}}{t^2} \int_{B_1} \varphi^{2\mu} \, dx + \frac{C_2}{t^2} |B_1| \right] \\ &\rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)^{2\mu}}{t^2} = +\infty,$$

que é uma conseqüência de $\mu > 2$ e de (5) do Lema 1.2. ■

1.2.2 Condição de Palais-Smale

Primeiro, relembremos que $(v_n) \subset E$ é uma seqüência de Palais-Smale para I_λ se $(I_\lambda(v_n))$ é limitada e $I'_\lambda(v_n) \rightarrow 0$ no espaço dual E' . O lema, a seguir, mostra-nos o motivo de trabalharmos no espaço E em vez do espaço X . Se considerássemos o espaço X , devido a não-limitação do potencial V , não conseguiríamos provar a limitação das seqüências de Palais-Smale.

Lema 1.14. *Qualquer seqüência de Palais-Smale para I_λ é limitada.*

Prova. Seja $(v_n) \subset E$ uma seqüência (PS) para I_λ . Logo, dado $\delta > 0$, para n grande e para algum $c > 0$ temos

$$I_\lambda(v_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'_\lambda(v_n), v_n \rangle \leq \delta \|v_n\| + c.$$

Pela propriedade (6) do Lema 1.2 e hipóteses (h_0) e (g_3) , obtemos

$$\begin{aligned} I_\lambda(v_n) - \frac{1}{\mu} \langle I'_\lambda(v_n), v_n \rangle &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx \\ &\quad - \frac{1}{2\mu} \int_{\mathbb{R}^N} [2\mu G(x, f(v_n)) - g(x, f(v_n)) f(v_n)] \, dx \\ &\quad - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(v_n)) \, dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)] \, dx - \lambda C \|f(v_n)\|_q^q. \end{aligned}$$

Usando a imersão contínua (1.5) e que $|\nabla f(v_n)| = f'(v_n)|\nabla v_n| \leq |\nabla v_n|$ obtemos

$$\|f(v_n)\|_q^q \leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)] \, dx \right\}^{q/2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta \|v_n\| + c + \lambda C_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)] \, dx \right\}^{q/2} \\ \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} \right) \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)] \, dx \end{aligned}$$

Usando a estimativa

$$\begin{aligned} \|v_n\| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx \right)^{1/2} + 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)f^2(v_n) \, dx \\ &\leq 2 + \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)] \, dx \end{aligned} \tag{1.20}$$

e escolhendo $\delta > 0$ tal que $C(\mu, \delta) \doteq 1/2 - 1/\mu - \delta > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\delta + c + \lambda C_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)] \, dx \right\}^{q/2} \\ \geq C(\mu, \delta) \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)] \, dx, \end{aligned}$$

e como $q \in (1, 2)$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla v_n|^2 + V(x)f^2(v_n)] \, dx \leq C.$$

Novamente por (1.20), segue que $\|v_n\|$ é limitada. ■

Proposição 1.15. I_λ satisfaz a condição $(PS)^5$ (condição de Palais-Smale).

Prova. Seja $(v_n) \subset E$ uma seqüência (PS) para I_λ . Pelo Lema 1.14, sabemos que (v_n) é limitada em E e, portanto, em $H^1(\mathbb{R}^N)$ em vista da Proposição 1.8. Assim, a menos de subsequência, para algum $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$v_n \rightharpoonup v \text{ em } H^1(\mathbb{R}^N), \quad v_n \rightarrow v \text{ em } L^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 1 \leq s \leq 2^*$$

⁵Um funcional $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição (PS) ($(PS)_c$) se toda seqüência (PS) ($(PS)_c$) para Φ possui uma subsequência convergente em E . Observe que Φ satisfaz a condição (PS) se, e somente se, satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

e $v_n \rightarrow v$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Logo, por (1.6) e Lema de Fatou, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx \leq C,$$

o que implica que $v \in E$. Além disso, usando Proposition 1.5,

$$f(v_n) \rightarrow f(v) \quad \text{em} \quad L^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo} \quad 1 \leq s < 22^*. \quad (1.21)$$

Agora, desde que $f^2(s)$ é convexa, o funcional $\mathcal{Q}(v)$ é convexo e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{Q}(v) - \frac{1}{2} \mathcal{Q}(v_n) &\geq \frac{1}{2} \langle \mathcal{Q}'(v_n), v - v_n \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n (\nabla v - \nabla v_n) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v_n) f'(v_n) (v - v_n) \, dx, \end{aligned}$$

(veja [49, Lema 15.3]). Assim

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x) f^2(v)) \, dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^2 + V(x) f^2(v_n)) \, dx \\ &\geq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(v_n)) f'(v_n) (v - v_n) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n)) f'(v_n) (v - v_n) \, dx \\ &\quad + \langle I'_\lambda(v_n), v - v_n \rangle \end{aligned} \quad (1.22)$$

Note que escrevendo

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_n)) f'(v_n) (v - v_n) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [g(x, f(v_n)) f'(v_n) - g(x, f(v)) f'(v)] (v - v_n) \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) (v - v_n) \, dx, \end{aligned}$$

e usando que $g(x, f(v)) f'(v) \in L^{2N/(N+2)}$ e $v_n \rightharpoonup v$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) (v - v_n) \, dx \rightarrow 0.$$

Além disso, usando $(g_1) - (g_2)$, (1.21) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$g(x, f(v_n)) f'(v_n) \rightarrow g(x, f(v)) f'(v) \quad \text{em} \quad L^{2N/(N+2)}(\mathbb{R}^N).$$

Pela desigualdade de Hölder e o fato que $\|v - v_n\|_{2^*} \leq C$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [g(x, f(v_n)) f'(v_n) - g(x, f(v)) f'(v)] (v - v_n) \, dx \rightarrow 0.$$

Analogamente, pelos mesmos argumentos,

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(v_n)) f'(v_n) (v - v_n) \, dx \rightarrow 0$$

desde que

$$h(x, f(v_n)) f'(v_n) \rightarrow h(x, f(v)) f'(v) \quad \text{em } L^{q/(q-1)}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad v_n \rightharpoonup v \quad \text{em } L^q(\mathbb{R}^N).$$

Então, tomando o limite em (1.22), obtemos

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx &+ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx. \end{aligned}$$

Mas, pela semicontinuidade da norma e Lema de Fatou segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx \\ \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx. \end{aligned}$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dx \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_n) \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v) \, dx. \end{aligned}$$

Usando (4) da Proposição 1.3, a menos de subsequência, obtemos

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(\xi(v_n - v)) \, dx \right] \rightarrow 0$$

e isto juntamente com $\nabla v_n \rightarrow \nabla v$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ implica que $v_n \rightarrow v$ em E . ■

1.2.3 Prova do Teorema 1.1

Nos Lemas 1.12, 1.13 e Proposições 1.9, 1.15, checamos que I_λ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.11 para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Logo, I_λ possui uma seqüência $(PS)_{c_\lambda}$ em que

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \max_{t \in [0,1]} I_\lambda(\gamma(t)) > 0$$

e

$$\Gamma_\lambda = \{\gamma \in C([0, 1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I_\lambda(\gamma(1)) < 0\}.$$

Desde que I_λ satisfaz a condição $(PS)_{c_\lambda}$, então v_λ é um ponto crítico de I_λ no nível c_λ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla v_\lambda \nabla w + V(x) f(v_\lambda) f'(v_\lambda) w] \, dx = & \lambda \int_{\mathbb{R}^N} h(x, f(v_\lambda)) f'(v_\lambda) w \, dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_\lambda)) f'(v_\lambda) w \, dx, \end{aligned} \quad (1.23)$$

para todo $w \in E$. Tomando $w = -v_\lambda^-$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda^-|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f'(v_\lambda) f(v_\lambda) (-v_\lambda^-) \, dx = 0$$

Como $f(v_\lambda) (-v_\lambda^-) \geq 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda^-|^2 \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x) f(v_\lambda) (-v_\lambda^-)}{\sqrt{1 + 2f^2(v_\lambda)}} \, dx = 0.$$

Logo, podemos concluir que $v_\lambda^- = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e, portanto, $v_\lambda = v_\lambda^+ \geq 0$. Sabemos, pela Proposição 1.10, que $v_\lambda \in C^2(\mathbb{R}^N)$. A fim de provarmos que $v_\lambda > 0$ em $\mathbb{R}^N$, supomos, caso contrário, que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $v_\lambda(x_0) = 0$. A equação (1.4) pode ser escrita na forma

$$-\Delta v_\lambda + c(x) v_\lambda = V(x) f'(v_\lambda) (v_\lambda - f(v_\lambda)) + \lambda h(x, f(v_\lambda)) f'(v_\lambda) + g(x, f(v_\lambda)) f'(v_\lambda) \geq 0,$$

onde $c(x) = V(x) f'(v_\lambda(x)) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Aplicando o princípio do máximo forte para uma bola arbitrária centrada em x_0 , podemos concluir que $v_\lambda \equiv 0$ o que é impossível. Portanto, v_λ tem que ser estritamente positiva. Logo, $u_\lambda = f(v_\lambda)$ é uma solução clássica positiva de (P_λ) .

A seguir, provemos a limitação de $\|u_\lambda\|_{1,2}$ em λ . Tomando $w = v_\lambda$ em (1.23) e usando (6) do Lema 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f^2(v_\lambda) \, dx \\ \geq 2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_\lambda|^2 \, dx + 2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x) f(v_\lambda) f'(v_\lambda) v_\lambda \, dx \\ \geq \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_\lambda)) f(v_\lambda) \, dx. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \mu \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_\lambda|^2 + V(x)f^2(v_\lambda)) \, dx &= 2\mu\lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(x, f(v_\lambda)) \, dx \\ &\quad + 2\mu \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v_\lambda)) \, dx + 2\mu c_\lambda \end{aligned} \quad (1.25)$$

e $c_\lambda \leq c_0$ onde $c_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma_0} \max_{t \in [0,1]} I_0(\gamma(t))$ com I_0 dado por

$$I_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v|^2 + V(x)f^2(v)) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(x, f(v)) \, dx$$

e

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in C([0, 1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I_0(\gamma(1)) < 0\}.$$

Logo, por (1.24), (1.25) e usando (h_0) e (g_3) , obtemos

$$\begin{aligned} &(\mu - 2) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_\lambda|^2 + V(x)f^2(v_\lambda)) \, dx \\ &\leq 2\mu C \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_\lambda)|^q + \int_{\mathbb{R}^N} [2\mu G(x, f(v_\lambda)) - g(x, f(v_\lambda))f(v_\lambda)] \, dx + 2\mu c_0 \\ &\leq 2\mu C \lambda_0 \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_\lambda|^2 + V(x)f^2(v_\lambda)) \, dx \right)^{q/2} + 2\mu c_0. \end{aligned}$$

onde usamos que a imersão $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Desta desigualdade, concluímos que $\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_\lambda|^2 + V(x)f^2(v_\lambda)) \, dx$ deve ser limitada em λ , mostrando que para todo $\lambda \in [0, \lambda_0]$ temos

$$\|u_\lambda\|_{1,2} = \|f(v_\lambda)\|_{1,2} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_\lambda|^2 + V(x)f^2(v_\lambda)) \, dx \right)^{1/2} \leq C_0.$$

Decaimento exponencial das soluções: Suponha que $\lambda = 0$ e seja v_0 uma solução de (1.4) para este caso. Primeiramente, mostremos que $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla v_0 \nabla \varphi + V(x)f(v_0)f'(v_0)\varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v_0))f'(v_0)\varphi \, dx, \quad (1.26)$$

para todo $\varphi \in E$. Para cada $k > 0$, definamos

$$v_k = \begin{cases} v_0 & \text{se } v_0 \leq k \\ k & \text{se } v_0 \geq k, \end{cases}$$

$\vartheta_k = v_k^{2(\beta-1)}v_0$ e $\omega_k = v_0v_k^{\beta-1}$ com $\beta > 1$ a ser determinado mais tarde. Tomando ϑ_k como uma função teste em (1.23) e usando (V_1) , (6) do Lema 1.2 e que

$$g(x, f(v_0)) \leq \frac{V_0}{2}f(v_0) + Cf(v_0)^{r-1}, \quad (1.27)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 \, dx &+ 2(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} v_0 v_k^{2(\beta-1)-1} \nabla v_k \nabla v_0 \, dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} f(v_0)^{r-1} f'(v_0) v_0 v_k^{2(\beta-1)} \, dx. \end{aligned}$$

Observando que a segunda parcela no lado esquerdo da desigualdade anterior é não-negativa e por (6) – (7) do Lema 1.2, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} v_0^{r/2} v_k^{2(\beta-1)} \, dx = C \int_{\mathbb{R}^N} v_0^{\tilde{r}-2} \omega_k^2 \, dx, \quad (1.28)$$

em que $\tilde{r} \doteq r/2$. Pela desigualdade de Gagliardo–Nirenberg e (1.28), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k^{2^*} \, dx \right)^{2/2^*} &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \omega_k|^2 \, dx \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 \, dx + C_3 (\beta-1)^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_0^2 v_k^{2(\beta-2)} |\nabla v_k|^2 \, dx \\ &\leq C_4 \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{2(\beta-1)} |\nabla v_0|^2 \, dx \\ &\leq C_5 \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} v_0^{\tilde{r}-2} \omega_k^2 \, dx, \end{aligned}$$

onde usamos que $v_k \leq v_0$, $1 \leq \beta^2$ e $(\beta-1)^2 \leq \beta^2$. Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k^{2^*} \, dx \right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_0^{2^*} \, dx \right)^{(\tilde{r}-2)/2^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \omega_k^{22^*/(2^*-\tilde{r}+2)} \, dx \right)^{(2^*-\tilde{r}+2)/2^*}.$$

Desde que $\omega_k \leq v_0^\beta$ e a imersão $E \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ é contínua, obtemos

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N} (v_0 v_k^{\beta-1})^{2^*} \, dx \right]^{2/2^*} \leq \beta^2 C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v_0^{\beta 22^*/(2^*-\tilde{r}+2)} \, dx \right)^{(2^*-\tilde{r}+2)/2^*}.$$

Escolhendo $\beta = 1 + (2^* - \tilde{r})/2$, temos $\beta 22^*/(2^* - \tilde{r} + 2) = 2^*$. Logo,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_0 v_k^{\beta-1}|^{2^*} \, dx \right)^{2/2^*} \leq \beta^2 C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2} \|v_0\|_{\beta\alpha^*}^{2\beta},$$

em que $\alpha^* = 22^*/(2^* - \tilde{r} + 2)$. Aplicando o Lema de Fatou em k , concluimos que

$$\|v_0\|_{\beta 2^*} \leq (\beta^2 C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2})^{1/2\beta} \|v_0\|_{\beta\alpha^*}. \quad (1.29)$$

Para cada $m = 0, 1, 2, \dots$, definamos $\beta_{m+1}\alpha^* \doteq 2^*\beta_m$ com $\beta_0 \doteq \beta$. Usando o argumento anterior para β_1 , por (1.29) obtemos

$$\begin{aligned}\|v_0\|_{\beta_1 2^*} &\leq (\beta_1^2 C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2})^{1/2\beta_1} \|v_0\|_{\beta_1 \alpha^*} \\ &\leq (\beta_1^2 C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2})^{1/2\beta_1} (\beta^2 C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2})^{1/2\beta} \|v_0\|_{\beta \alpha^*} \\ &\leq (C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2})^{1/2\beta_1 + 1/2\beta} (\beta)^{1/\beta} (\beta_1)^{1/\beta_1} \|v_0\|_{2^*}.\end{aligned}$$

Observando que $\beta_m = \beta^m \beta$, por iteração obtemos

$$\|v_0\|_{\beta_m 2^*} \leq (C_6 \|v_0\|^{\tilde{r}-2})^{1/2\beta \sum_{i=0}^m \beta^{-i}} \beta^{1/\beta \sum_{i=0}^m \beta^{-i}} \beta^{1/\beta \sum_{i=0}^m i\beta^{-i}} \|v_0\|_{2^*}.$$

Como $\beta > 1$, as séries $\sum_{i=0}^m \beta^{-i}$ e $\sum_{i=0}^m i\beta^{-i}$ são convergentes. Logo, podemos tomar o limite quando $m \rightarrow \infty$ para concluir que $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|v_0\|_\infty \leq C_7 \|v_0\|^{(2^*-2)/(2^*-\tilde{r})}.$$

Novamente por (V_1) , (6) do Lema 1.2, (1.23) e (1.27), para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_0 \nabla \varphi \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} v_0 \varphi \, dx.$$

Logo, pelo Teorema 8.17 em [44], para um $t > N/2$ e para qualquer bola $B_r(x)$ centrada em qualquer $x \in \mathbb{R}^N$, temos

$$\sup_{y \in B_r(x)} v_0(y) \leq C(\|v_0\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v_0\|_{L^t(B_{2r}(x))})$$

Em particular,

$$v_0(x) \leq C(\|v_0\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v_0\|_{L^t(B_{2r}(x))})$$

e como

$$\|v_0\|_{L^2(B_{2r}(x))} + \|v_0\|_{L^t(B_{2r}(x))} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty$$

concluímos que

$$v_0(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Agora, vamos provar o decaimento exponencial de v_0 . Usando (g_1) e o limite $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)f'(s)/s = 1$, podemos escolher $R_0 > 0$ tal que, para todo $|x| \geq R_0$,

$$f(v_0(x))f'(v_0(x)) \geq \frac{3}{4}v_0(x) \quad \text{e} \quad g(x, f(v_0(x))) \leq \frac{V_0}{2}f(v_0(x)). \quad (1.30)$$

Definamos $\psi(x) \doteq M \exp(-\xi|x|)$ onde ξ e M são tais que $4\xi^2 < V_0$ e $M \exp(-\xi R_0) \geq v_0(x)$ para todo $|x| = R_0$. É fácil checar que, para todo $x \neq 0$,

$$\Delta\psi \leq \xi^2\psi. \quad (1.31)$$

Consideremos a função $\phi \doteq \psi - v_0$. Logo, usando (1.30), (1.31) e o fato que

$$-\Delta v_0 + V(x)f(v_0)f'(v_0) = g(x, f(v_0))f'(v_0) \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

obtemos

$$-\Delta\phi + \frac{V_0}{4}\phi \geq 0 \quad \text{em } |x| \geq R_0,$$

$$\phi \geq 0 \quad \text{em } |x| = R_0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0.$$

Pelo princípio do máximo, devemos ter $\phi(x) \geq 0$ para todo $|x| \geq R_0$. Assim, $v_0(x) \leq M \exp(-\xi|x|)$ para todo $|x| \geq R_0$, de onde obtemos

$$u_0(x) = f(v_0(x)) \leq v_0(x) \leq C \exp(-\xi|x|)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e a prova do teorema está completa.

Observação 1.16. *Note que a hipótese (V_2) pode ser trocada por qualquer condição sobre o potencial V com o intuito de obtermos a compacidade da imersão*

$$X \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo } 1 \leq p < 2^*.$$

Observação 1.17. *Existem classes importantes de não-linearidades que não são cobertas por nossos resultados. Por exemplo,*

$$\lambda h(x, u) + g(x, u) = \lambda u^{q-1} + u^{r-1}$$

com $2 \leq q < 4$ e $4 < r < 22^*$ ou, ainda, r sendo o expoente crítico $r = 22^* = 4N/(N-2)$.

CAPÍTULO 2

Existência e concentração de ondas estacionárias para uma classe de equações de Schrödinger envolvendo crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$

Neste capítulo, consideramos o problema de concentração

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(z)u - \varepsilon^2 \Delta(u^2)u = h(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad (P_\varepsilon)$$

em que ε é um parâmetro positivo pequeno, o potencial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente Hölder contínuo, satisfaz a condição (V_1) , isto é, $V(z) \geq V_0 > 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$, e a condição

(V_3) Existe um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\nu_1 \doteq \min_{\overline{\Omega}} V < \min_{\partial\Omega} V.$$

Aqui, estamos interessados no caso em que o termo não-linear $h(s)$ tem crescimento máximo sobre s , o que nos permite tratar o problema (P_ε) variacionalmente em um subespaço conveniente E de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Usando uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser e do Teorema do Passo da Montanha (veja Teorema 1.11 do *Capítulo 1*) em E , estabelecemos a

existência de soluções que se concentram perto do mínimo local ν_1 de V .

Dizemos que uma função $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem crescimento crítico em $+\infty$ se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{h(s)}{\exp(\alpha s^4)} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \alpha < \alpha_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Acreditamos que este crescimento exponencial seja o crescimento crítico para este tipo de problema quando $N = 2$, em contrapartida ao caso $N \geq 3$, onde o expoente crítico é $22^* = 4N/(N-2)$ (veja [36] e [58]). Tais noções são motivadas pelas estimativas de Trudinger-Moser [63, 79] que afirmam que para todo $\alpha > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\exp(\alpha u^2) \in L^1(\Omega)$$

e, para todo $\alpha \leq 4\pi$,

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\Omega} \exp(\alpha u^2) \, dx \leq C,$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitada suave. Subseqüentemente, Cao [21] provou uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser no espaço inteiro, a qual foi melhorada por do Ó [33], a saber, para todo $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$

$$\exp(\alpha |u|^2) - 1 \in L^1(\mathbb{R}^2). \quad (2.2)$$

Além disso, se $\alpha < 4\pi$ e $\|u\|_2 \leq C$, existe uma constante $C_1 = C_1(C, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} [\exp(\alpha u^2) - 1] \, dx \leq C_1. \quad (2.3)$$

Recentemente, a equação (P_ε) , com $\varepsilon = 1$, foi considerada em [36], onde os autores obtiveram um resultado de existência de solução, com a não-linearidade $h(s)$ tendo o crescimento crítico (2.1), mas o potencial V satisfazia a hipótese (V_1) e a condição assintótica

$$V(z) \leq \lim_{|z| \rightarrow \infty} V(z) \doteq V_\infty < \infty.$$

Até o momento, não existe nenhum trabalho abordando problemas de concentração envolvendo a equação (P_ε) com $N = 2$. Para enfatizarmos, neste capítulo, a não-linearidade $h(s)$ cumpre as condições abaixo:

(h_1) $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $h(s) = 0$ para $s \leq 0$;

(h_2) $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{h(s)}{s} = 0$;

(h_3) h tem o crescimento crítico (2.1);

(h_4) Existe $\mu > 2$ tal que para todo $s > 0$

$$0 < 2\mu H(s) = 2\mu \int_0^s h(t) dt \leq sh(s);$$

(h_5) a função $s \rightarrow h(s)/s^3$ é crescente para $s > 0$;

(h_6) Existe $\beta_0 > 0$ tal que

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} sh(s) \exp(-\alpha_0 s^4) \geq \beta_0.$$

Um exemplo típico de uma função h satisfazendo as hipóteses (h_1) – (h_6) é dada por

$$h(s) = \begin{cases} \lambda s^3 [\exp(s^4) - 1], & s > 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases}$$

em que $\lambda > 0$ e $\alpha_0 = 1$.

Como exposto na *Introdução* do trabalho, o próximo teorema contém o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.1. *Suponha que o potencial V satisfaz (V_1) e (V_3) e que a não-linearidade $h(s)$ satisfaz (h_1) – (h_6). Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, o problema (P_ε) possui uma solução positiva de energia mínima $u_\varepsilon(z)$ em $C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ com as seguintes propriedades:*

(i) u_ε tem um único máximo local (portanto global) z_ε em $\mathbb{R}^2$ e $z_\varepsilon \in \Omega$;

(ii) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V(z_\varepsilon) = \nu_1 = \min_{\bar{\Omega}} V$;

(iii) Existem constantes positivas C e ζ tais que para todo $z \in \mathbb{R}^2$

$$u_\varepsilon(z) \leq C \exp \left(-\zeta \left| \frac{z - z_\varepsilon}{\varepsilon} \right| \right).$$

2.1 A estrutura variacional e resultados preliminares

Formalmente, formulamos nosso problema em uma estrutura variacional, considerando o seguinte funcional associado a (P_ε) :

$$J_\varepsilon(u) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) u^2 dz - \int_{\mathbb{R}^2} H(u) dz,$$

para $u \in X$, o subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$X = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(z) v^2 dz < \infty \right\}.$$

Não podemos aplicar diretamente os métodos mini-max para estudar soluções de (P_ε) como pontos críticos do funcional J_ε pois este não está nem bem definido sobre X . Fazendo a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, veja (1.2), a partir de $J_\varepsilon(u)$ obtemos o funcional

$$I_\varepsilon(v) = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) dz - \int_{\mathbb{R}^2} H(f(v)) dz \quad (2.4)$$

o qual está bem definido sobre o espaço

$$E = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) dz < \infty \right\},$$

graças as condições de crescimento $(h_2) - (h_3)$, (7) do Lema 1.2 e a desigualdade do tipo Trudinger-Moser (2.2). Conforme Proposição 2.7, E é um espaço de Banach munido da norma dada por

$$\|v\| = \|\nabla v\|_2 + \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(\lambda v) dz \right). \quad (2.5)$$

Além disso, os pontos críticos do funcional I_ε são exatamente as soluções fracas da equação semi-linear

$$-\varepsilon^2 \Delta v = f'(v)[h(f(v)) - V(z)f(v)] \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (2.6)$$

Observação 2.2. De acordo com [25, pag. 217] (veja também Proposição 4.3 do Capítulo 4), se $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap E$ é um ponto crítico do funcional I_ε , então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica de (P_ε) . Portanto, está claro que para obtermos soluções clássicas de (P_ε) , é suficiente procurarmos por pontos críticos do funcional I_ε de classe C^2 .

Como consequência das propriedades de f obtidas no Lema 1.2 do Capítulo 1, obtemos o seguinte resultado que será importante para obtermos as caracterizações do nível do Passo da Montanha:

Lema 2.3. (i) A função $\frac{f(s)f'(s)}{s}$ é decrescente para $s > 0$;

(ii) A função $\frac{f^3(s)f'(s)}{s}$ é crescente para $s > 0$.

Prova. Usando (6) do Lema 1.2, segue facilmente que $f(s)/s$ é decrescente para $s > 0$. Logo, obtemos

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{f(s)f'(s)}{s} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{f(s)}{s} \right) f'(s) - \frac{f(s)}{s} 2f'(s) = -\frac{f(s)}{s^2} f'(s) < 0 \quad \text{para } s > 0$$

o que mostra o ítem (i). Para provarmos (ii), calculamos a derivada abaixo para concluirmos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{f^3(s)f'(s)}{s} \right) &= \frac{3f^2(s)(f'(s))^2s - 2f^4(s)(f'(s))^4s - f^3(s)f'(s)}{s^2} \\ &\geq f'(s)f^2(s) \frac{3f'(s)s - f'(s)s - f(s)}{s^2} \\ &= f'(s)f^2(s) \frac{2f'(s)s - f(s)}{s^2} > 0 \quad \text{para } s > 0, \end{aligned}$$

onde usamos (6) e (11) do Lema 1.2. Portanto, o resultado está provado. ■

2.1.1 Propriedades do Espaço E

Nesta seção, apresentamos propriedades do espaço E análogas as do capítulo anterior, que são de suma importância em nossos argumentos para provarmos a existência e o comportamento de concentração das soluções de (P_ε) . Primeiramente, consideramos o espaço de funções

$$X = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(z)v^2 dz < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert munido com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(z)uv) dz$$

cujas norma correspondente é

$$\|v\|_X^2 = \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(z)v^2) dz.$$

Como no *Capítulo 1*, as conclusões obtidas nos próximos resultados são essenciais para o desenvolvimento dos resultados.

Proposição 2.4. (1) E é um espaço vetorial normado com respeito a norma (2.5);

(2) Existe uma constante positiva C tal que para todo $v \in E$,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v) \, dz}{1 + [\int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v) \, dz]^{1/2}} \leq C \|v\|; \quad (2.7)$$

(3) Se $v_n \rightarrow v$ em E , então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(z) |f^2(v_n) - f^2(v)| \, dz \rightarrow 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(z) |f(v_n) - f(v)|^2 \, dz \rightarrow 0;$$

(4) Se $v_n \rightarrow v$ quase sempre e

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v) \, dz,$$

então

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(\xi(v_n - v)) \, dz \right] \rightarrow 0.$$

Prova. As provas de (1), (2) e (4) são idênticas as provas dos itens (1), (2) e (4) da Proposição 1.3.

A provar de (3) tem uma pequena diferença com relação à prova do item (3) da Proposição 1.3. Note que se $v_n \rightarrow v$ em E , então por (2.7) devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n - v) \, dz \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Em particular, a menos de subsequência, $V(z) f^2(v_n - v) \rightarrow 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Desde que $V(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e f^{-1} é contínua, segue que $v_n \rightarrow v$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Logo, pelo Lema de Fatou obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) \, dz \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n) \, dz \leq C.$$

Por (2.8), também temos que existe $h \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$V(x) f^2(v_n - v) \leq h$$

vale quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Ademais, a desigualdade (1.7) juntamente com a convexidade de f^2 implica que

$$\begin{aligned} V(x)f^2(v_n) &\leq \frac{C_0}{2}V(x)f^2(v_n - v) + \frac{C_0}{2}V(x)f^2(v) \\ &\leq C_1 (h + V(x)f^2(v)). \end{aligned}$$

Desde que $h + V(x)f^2(v) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, os limites em (3) estão provados. ■

Corolário 2.5. *A imersão $X \hookrightarrow E$ é contínua.*

Prova. Análoga à prova do Corolário 1.4. ■

Proposição 2.6. *A aplicação $v \rightarrow f(v)$ de E em $L^q(\mathbb{R}^2)$ é contínua para $2 \leq q < \infty$.*

Prova. Para $v \in E$, segue, por definição, que $f(v) \in X$. Usando (V_1) , temos que a imersão $X \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ é contínua. Conseqüentemente, a imersão

$$X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \quad 2 \leq q < \infty \quad (2.9)$$

é também contínua. Logo, para algum $C > 0$, temos

$$\|f(v)\|_q \leq C\|f(v)\|_X \leq C \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(z)f^2(v)) \, dz \right]^{1/2}. \quad (2.10)$$

Seja (v_n) uma seqüência em E tal que $v_n \rightarrow v$ em E . Por (3) da Proposição 2.4, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z)|f(v_n) - f(v)|^2 dz \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Segue também que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^2)$$

para $i = 1, 2$. Portanto, a menos de subsequência, existe $h_i \in L^2(\mathbb{R}^2)$ verificando

$$\left| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq h_i \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2$$

para $i = 1, 2$ e isto implica que

$$\left| \frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} \right| = \left| f'(v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq \left| \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right| \leq h_i.$$

Além disso,

$$\frac{\partial f(v_n)}{\partial x_i} = f'(v_n) \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \rightarrow f'(v) \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial f(v)}{\partial x_i} \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2$$

para $i = 1, 2$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\|\nabla(f(v_n)) - \nabla(f(v))\|_2 \rightarrow 0.$$

Usando a imersão (2.10) e (2.11), concluímos que

$$\begin{aligned} \|f(v_n) - f(v)\|_q^2 &\leq C \|\nabla(f(v_n)) - \nabla(f(v))\|_2^2 \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^2} V(z) |f(v_n) - f(v)|^2 dz \rightarrow 0 \end{aligned}$$

para $2 \leq q < \infty$. Assim, o resultado está provado. ■

Proposição 2.7. *E é um espaço de Banach.*

Prova. Seja (v_n) uma sequência de Cauchy em E . Pela definição da norma em E , $(|\nabla v_n|)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Logo, existem $w_1, w_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tais que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_1} \rightarrow w_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v_n}{\partial x_2} \rightarrow w_2 \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^2).$$

Usando (2.7), dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_m - v_n) dz < \epsilon^2/2 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_m - \nabla v_n|^2 dz < \epsilon^2/2 \quad (2.12)$$

para todo $m, n \geq n_0$. Logo, por (2.9) obtemos que $\|f(v_n - v_m)\|_q < C\epsilon$ para $2 \leq q < \infty$.

Agora, usando (10) do Lema 1.2, concluímos que (v_n) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Portanto, existe $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $v_n \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Para $i = 1, 2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dz = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \varphi dz \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dz = - \int_{\mathbb{R}^2} w_i \varphi dz \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),$$

o que implica que v tem derivada fraca e $w_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$ para $i = 1, 2$. Assim, $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e

$$\|\nabla v_n - \nabla v\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Como (v_n) é limitada em E , usando (2.7) temos que $\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n) \, dz$ é também limitada. Então, o Lema de Fatou implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) \, dz \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n) \, dz \leq C. \quad (2.14)$$

Conseqüentemente, $v \in E$. Fixando $m > n_0$ qualquer em (2.12), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_m - v) \, dz \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_m - v_n) \, dz < \epsilon^2/2$$

e isto mostra que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_m - v) \, dz = 0.$$

Por um argumento similar, usado na prova de (3) da Proposição 1.3, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n) \, dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) \, dz.$$

Portanto, por (4) do Proposição 2.4, concluímos que

$$\inf_{\xi > 0} \frac{1}{\xi} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(\xi(v_n - v)) \, dz \right] \rightarrow 0$$

que juntamente com (2.13) mostra que

$$\|v_m - v\| \rightarrow 0.$$

■

Proposição 2.8. *A imersão $E \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^2)$ é contínua para $2 \leq r < \infty$.*

Prova. Em vista de (10) do Lema 1.2 e Proposição 2.6, segue que se $v \in E$ então $v \in L^q(\mathbb{R}^2)$ for $2 \leq q < \infty$. Além disso, se $v_n \rightarrow 0$ em E , a Proposição 2.6 mostra que $f(v_n) \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para $2 \leq q < \infty$. Usando mais uma vez (10) do Lema 1.2, obtemos

$$|v_n|^r \leq C_1 |f(v_n)|^r + C_2 |f(v_n)|^{2r}$$

para $r \geq 2$ e isto implica que $v_n \rightarrow 0$ em $L^r(\mathbb{R}^2)$ para $2 \leq r < \infty$. Assim, o resultado está provado. ■

Também como no *Capítulo 1*, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.9. *A imersão $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Além disso, o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E .*

2.2 O problema modificado

Nesta seção, seguindo idéias de [30], fazemos uma modificação conveniente no termo não-linear $h(s)$ fora do domínio Ω de tal maneira que o novo funcional energia associado satisfaça a condição de Palais-Smale.

Definamos a função

$$k(z, s) \doteq \chi_{\Omega}(z)h(s) + (1 - \chi_{\Omega}(z))\tilde{h}(s)$$

em que

$$\tilde{h}(s) = \begin{cases} h(s), & \text{se } s \leq a \\ \frac{V_0}{\tau}s, & \text{se } s > a \end{cases}$$

com $\tau > \frac{2\mu}{\mu-2} > 2$ e $a > 0$ é tal que $h(a) = aV_0/\tau$.

Não é difícil checar que $k(z, s)$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (k_1) $k(z, s)$ é de classe C^1 por partes em s para qualquer z fixado e $k(z, s) = 0$ para $s \leq 0$;
- (k_2) para cada $\delta > 0$, $\beta > \alpha_0$ e $q \geq 0$ existe uma constante $C = C(\delta, \beta, q) > 0$ tal que para todo $s \geq 0$ e $z \in \mathbb{R}^2$, temos

$$k(z, s) \leq \delta s + Cs^q[\exp(\beta s^4) - 1];$$

- (k_3) $0 < 2\mu K(z, s) \leq k(z, s)s$, $(z, s) \in [\Omega \times (0, +\infty)] \cup [(\mathbb{R}^2 - \Omega) \times (0, a)]$ e

$$0 \leq 2K(z, s) \leq k(z, s)s \leq \frac{1}{\tau}V(z)s^2, \quad (z, s) \in [(\mathbb{R}^2 - \Omega) \times [0, +\infty)]$$

em que $K(z, s) = \int_0^s k(z, t)dt$;

- (k_4) Para cada $z \in \Omega$, a função $s \rightarrow k(z, s)/s^3$ é crescente para $s > 0$.

Agora, consideremos o problema modificado

$$-\varepsilon^2 \Delta v = f'(v)[k(z, f(v)) - V(z)f(v)] \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \quad (2.15)$$

Sem perda de generalidade, vamos assumir por enquanto que $\varepsilon = 1$. O funcional energia $\mathcal{I} : E \rightarrow \mathbb{R}$ associado a (2.15) é dado por

$$\mathcal{I}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v) dz - \int_{\mathbb{R}^2} K(z, f(v)) dz.$$

2.2.1 Regularidade do funcional $\mathcal{I}$

O lema e o corolário, a seguir, serão usados para mostrar a regularidade e a geometria do Passo da Montanha do funcional $\mathcal{I}$.

Lema 2.10. *Sejam $\beta > 0$ e $r > 1$. Então, para cada $\alpha > r$, existe uma constante positiva $C = C(\alpha)$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$[\exp(\beta s^2) - 1]^r \leq C [\exp(\alpha \beta s^2) - 1]. \quad (2.16)$$

Prova. Basta estudar o comportamento da função contínua

$$g(s) \doteq \frac{[\exp(\beta s^2) - 1]^r}{[\exp(\alpha \beta s^2) - 1]}$$

no zero e no infinito. Temos que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{[\exp(\beta s^2) - 1]^r}{[\exp(\alpha \beta s^2) - 1]} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{r [\exp(\beta s^2) - 1]^{r-1} \exp(\beta s^2)}{\alpha \exp(\alpha \beta s^2)} = 0.$$

Além disso,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{[\exp(\beta s^2) - 1]^r}{[\exp(\alpha \beta s^2) - 1]} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\exp(r\beta s^2) [1 - \exp(-\beta s^2)]^r}{\exp(\alpha \beta s^2) [1 - \exp(-\alpha \beta s^2)]} = 0$$

e o resultado segue. ■

O seguinte Corolário é uma consequência do Lema 2.10 e da desigualdade de Trudinger-Moser (2.2):

Corolário 2.11. *Se $\beta > 0$, $q > 0$ e $r > 1$, as funções $[\exp(\beta u^2) - 1]^r$ e $|u|^q [\exp(\beta u^2) - 1]$ pertencem a $L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Prova. Seja u em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pela desigualdade de Trudinger-Moser e (2.16), é claro que

$$[\exp(\beta u^2) - 1]^r \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Agora, escolhendo $t > 1$ tal que $tq \geq 2$ e usando a desigualdade de Young obtemos

$$|u|^q [\exp(\beta u^2) - 1] \leq \frac{1}{t} |u|^{tq} + \frac{t-1}{t} [\exp(\beta u^2) - 1]^{t/(t-1)}.$$

Pela primeira parte da prova segue que

$$[\exp(\beta u^2) - 1]^{t/(t-1)} \in L^1(\mathbb{R}^2),$$

e desde que $u \in L^{tq}(\mathbb{R}^2)$, pela desigualdade anterior concluímos que $|u|^q [\exp(\beta u^2) - 1] \in L^1(\mathbb{R}^2)$. ■

Proposição 2.12. *O funcional $\mathcal{I}$ é contínuo e Gateaux-diferenciável em E com*

$$\langle \mathcal{I}'(v), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla \varphi \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f(v) f'(v) \varphi \, dz - \int_{\mathbb{R}^N} k(z, f(v)) f'(v) \varphi \, dz.$$

para $v, \varphi \in E$. Além disso, para $v \in E$ temos que $\mathcal{I}'(v) \in E'$ e se $v_n \rightarrow v$ em E então

$$\mathcal{I}'(v_n) \rightarrow \mathcal{I}'(v) \quad \text{na topologia fraca } * \text{ de } E'.$$

Prova. Por (k_2) e (k_3) temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} K(z, f(v)) \, dz \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |k(z, f(v)) f(v)| \, dz \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} |f(v)|^2 \, dz + C_2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(v)| [\exp(\beta(f(v))^4) - 1] \, dz \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^2} v^2 \, dz + C_2 \int_{\mathbb{R}^2} |v| [\exp(2\beta v^2) - 1] \, dz, \end{aligned} \quad (2.17)$$

o que mostra que $\mathcal{I}$ está bem definido em E , graças ao Corolário 2.11.

Agora, suponha que $v_n \rightarrow v$ em E . Então, pela Proposição 2.4, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 \, dz &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \, dz \\ \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n) \, dz &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) \, dz \end{aligned}$$

e a Proposição 2.9 implica que $v_n \rightarrow v$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Disto, a menos de subsequência, podemos concluir que $|v_n| \leq g$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ para alguma $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Logo, como em (2.17), segue que

$$|K(z, f(v_n))| \leq C_1 g^2 + C_2 |g| [\exp(2\beta g^2) - 1] \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^2$$

e desde que $C_1 g^2 + C_2 |g| [\exp(2\beta g^2) - 1] \in L^1(\mathbb{R}^2)$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(z, f(v_n)) \, dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} K(z, f(v)) \, dz.$$

Conseqüentemente, $\mathcal{I}(v_n) \rightarrow \mathcal{I}(v)$ e a continuidade está provada.

Em seguida, para $v, \varphi \in E$, temos que

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(z)(f^2(v + t\varphi) - f^2(v))}{t} \, dz = \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f(\xi) f'(\xi) \varphi \, dz$$

em que

$$\min\{v, v + t\varphi\} \leq \xi \leq \max\{v, v + t\varphi\}.$$

Se $|t| \leq 1$, segue que $|\xi| \leq |v| + |\varphi|$ e usando (2), (10) – (11) do Lema 1.2 e o fato que f é crescente, obtemos

$$\begin{aligned} |V(z)f(\xi)f'(\xi)\varphi| &\leq C_1V(z)|f(\xi)f'(\xi)||f(\varphi)| + C_2V(z)|f(\xi)f'(\xi)|f^2(\varphi) \\ &\leq C_1V(x)|f(|v| + |\varphi|)|f(\varphi) + \frac{C_2}{\sqrt{2}}V(z)f^2(\varphi) \\ &\leq C_1V(z)f^2(|v| + |\varphi|) + C_1V(z)f^2(\varphi) + C_2V(z)f^2(\varphi) \end{aligned}$$

e

$$C_1V(z)f^2(|v| + |\varphi|) + C_1V(z)f^2(\varphi) + C_2V(z)f^2(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Como $V(z)f(\xi)f'(\xi)\varphi \rightarrow V(z)f(v)f'(v)\varphi$ quase sempre quando $t \rightarrow 0$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(z)(f^2(v + t\varphi) - f^2(v))}{t} dz = \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v)f'(v)\varphi dz.$$

Analogamente, usando as propriedades de f , a hipótese (k_2) e mais uma vez o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{K(z, f(v + t\varphi)) - K(z, f(v))}{t} dz = \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v))f'(v)\varphi dz.$$

Logo, $\mathcal{I}$ é Gateaux-diferenciável em E .

A prova de que $\mathcal{I}'(v) \in E'$ para cada $v \in E$ é análoga à prova da Proposição 1.9.

A seguir, seja $\varphi \in E$ e suponha que $v_n \rightarrow v$ em E . Logo, por (3) da Proposição 2.4 temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z)|f^2(v_n) - f^2(v)| dz \rightarrow 0,$$

o que implica, a menos de subsequência, que existe $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $V(z)f^2(v_n) \leq g_1$ vale quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Daí, usando (2), (10) – (11) do Lema 1.2, temos que

$$\begin{aligned} |V(z)f(v_n)f'(v_n)\varphi| &\leq C_1V(z)|f(v_n)f'(v_n)||f(\varphi)| + C_2V(z)|f(v_n)f'(v_n)|f^2(\varphi) \\ &\leq C_1V(z)f^2(v_n) + C_1V(z)f^2(\varphi) + C_2V(z)f^2(\varphi) \\ &\leq C_1g_1 + C_3V(z)f^2(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) f(v_n) f'(v_n) \varphi \, dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f(v) f'(v) \varphi \, dz.$$

Como na prova da continuidade, podemos concluir que $|v_n| \leq g$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ para alguma $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Logo, por (k_2) , segue que

$$\begin{aligned} |k(z, f(v_n)) f'(v_n) \varphi| &\leq C_1 |f(v_n) f'(v_n) \varphi| + C_2 |f'(v_n) \varphi| [\exp(\beta f(v_n)^4) - 1] \\ &\leq C_1 g^2 + C_3 \varphi^2 + C_2 [\exp(2\beta g^2) - 1]^2 \end{aligned}$$

e como $C_1 g^2 + C_3 \varphi^2 + C_2 [\exp(2\beta g^2) - 1]^2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, mais uma vez pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v_n)) f'(v_n) \varphi \, dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v)) f'(v) \varphi \, dz.$$

Portanto, $\langle \mathcal{I}'(v_n), \varphi \rangle \rightarrow \langle \mathcal{I}'(v), \varphi \rangle$ e a prova está completa. ■

Lema 2.13. *Se $v \in E$, $\beta > 0$, $q > 0$ e $\|v\| \leq M$ com $2\beta M^2 < 4\pi$, então existe $C = C(\beta, M, q) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\exp(\beta |f(v)|^4) - 1] |f(v)|^q \, dz \leq C \|f(v)\|_X^q.$$

Prova. Consideremos $r > 1$ perto de 1 tal que $2r\beta M^2 < 4\pi$ e $sq \geq 2$, em que $s = r/(r-1)$. Por (7) do Lema 1.2 e desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} [\exp(\beta |f(v)|^4) - 1] |f(v)|^q \, dz &\leq \int_{\mathbb{R}^2} [\exp(2\beta v^2) - 1] |f(v)|^q \, dz \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} [\exp(2\beta v^2) - 1]^r \, dz \right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(v)|^{qs} \, dz \right)^{1/s}. \end{aligned}$$

Em seguida, tomando $\alpha > r$ perto de r tal que $2\alpha\beta M^2 < 4\pi$, Pelo Lema 2.10 e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} [\exp(2\beta v^2) - 1] |f(v)|^q \, dz \\ &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} [\exp(2\alpha\beta v^2) - 1] \, dz \right)^{1/r} \|f(v)\|_{qs}^q \\ &\leq C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left[\exp \left(2\alpha\beta M^2 \left(\frac{v}{\|\nabla v\|_2} \right)^2 \right) - 1 \right] \, dz \right)^{1/r} \|f(v)\|_{qs}^q \\ &\leq C_2 \|f(v)\|_{qs}^q. \end{aligned}$$

Finalmente, a imersão (2.9) implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\exp(\beta|f(v)|^4) - 1] |f(v)|^q \, dz \leq C \|f(v)\|_X^q.$$

■

2.2.2 Geometria do Passo da Montanha

Em vista do Lema 2.13, podemos, agora, provar que o funcional $\mathcal{I}$ possui a geometria do Passo da Montanha. Com este intuito, para $\rho > 0$, definamos

$$S_\rho \doteq \left\{ v \in E : \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) \, dz = \rho^2 \right\}.$$

Desde que $\mathcal{Q} : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{Q}(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v) \, dz$$

é contínua, então S_ρ é um subconjunto fechado que desconecta o espaço E .

Lema 2.14. (1) *Existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $\mathcal{I}(v) \geq \alpha$ para todo $v \in S_\rho$;*

(2) *Para todo $v \in E \setminus \{0\}$, $\mathcal{I}(tv) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$.*

Prova. Para $v \in S_\rho$, obtemos, por $(k_2) - (k_3)$ e Lema 2.13, que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(v) &\geq \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{V_0}{4} \int_{\mathbb{R}^2} f^2(v) \, dz - C \int_{\mathbb{R}^2} [\exp(\beta|f(v)|^4) - 1] |f(v)|^q \, dz \\ &\geq \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v) \, dz - C_1 \|f(v)\|_X^q \\ &\geq \frac{1}{4} \rho^2 - C_1 \rho^q \end{aligned}$$

com $q > 2$ e $\|v\|$ pequeno. Portanto, se $\rho > 0$ é suficientemente pequeno, segue que $\alpha \doteq \frac{1}{4} \rho^2 - C \rho^q > 0$ e

$$\mathcal{I}(v) \geq \alpha \quad \text{para } v \in S_\rho.$$

Agora, provemos que para todo $v \in E \setminus \{0\}$,

$$\mathcal{I}(tv) \rightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Temos que existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $K(z, s) \geq C_1 s^{2\mu} - C_2$ para todo $z \in \Omega$ e $s \geq 0$. Assim, para $v \in E \setminus \{0\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(tv) &\leq \frac{t^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(tv) dz - \int_{\Omega} K(z, f(tv)) dz \\ &\leq t^2 \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(z) \frac{f^2(tv)}{t^2} dz - C_1 \int_{\Omega} \frac{|f(tv)|^{2\mu}}{t^2} dz + C_2 \frac{|\Omega|}{t^2} \right). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (2.7), temos

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^2} V(z) \frac{f^2(tv)}{t^2} dz}{\frac{1}{t} + \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(z) \frac{f^2(tv)}{t^2} dz \right)^{1/2}} \leq C \|v\|$$

e isto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z) \frac{f^2(tv)}{t^2} dz = O(1) \quad \text{quando } t \rightarrow \infty.$$

Por outro lado, temos

$$\int_{\Omega} \frac{|f(tv)|^{2\mu}}{t^2} dz = \int_{\{z \in \Omega: v(z) \neq 0\}} \left(\frac{f(t|v|)}{\sqrt{t|v|}} \right)^4 |f(tv)|^{2\mu-4} v^2 dz$$

e desde que

$$\left(\frac{f(t|v(z)|)}{\sqrt{t|v(z)|}} \right)^4 |f(tv(z))|^{2\mu-4} v^2(z) \rightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty$$

se $v(z) \neq 0$, pelo Lema de Fatou segue que

$$\int_{\Omega} \frac{|f(tv)|^{2\mu}}{t^2} dz \rightarrow +\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

Portanto,

$$\mathcal{I}(tv) \rightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty.$$

■

2.2.3 Caracterização do nível do Passo da Montanha

Consideremos a Variedade de Nehari

$$\mathcal{N} \doteq \{v \in E \setminus \{0\} : \langle \mathcal{I}'(v), v \rangle = 0\}.$$

Temos o seguinte lema:

Lema 2.15. *Para cada $v \in E \setminus \{0\}$, existe um único $t_v > 0$ tal que $t_v v \in \mathcal{N}$. Além disso, o valor máximo de $\mathcal{I}(tv)$ para $t \geq 0$ é atingido em $t = t_v$.*

Prova. Seja $v \in E \setminus \{0\}$ fixado e defina a função $g(t) \doteq \mathcal{I}(tv)$ para $t \geq 0$. Note que $g'(t) = \langle \mathcal{I}'(tv), v \rangle = 0$ se e, somente se, $tv \in \mathcal{N}$. Temos que $g'(t) = 0$ é equivalente a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{k(z, f(tv))f'(tv)v}{t} dz - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(z)f(tv)f'(tv)v}{t} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{k(z, f(t|v|))f'(t|v|)}{t|v|} - \frac{V(z)f(t|v|)f'(t|v|)}{t|v|} \right] v^2 dz. \end{aligned}$$

Afirmamos que o lado direito da igualdade anterior é uma função crescente de t . Para ver isto, fixado z , consideremos a função $c : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$c(s) = \frac{k(z, f(s))f'(s)}{s} - \frac{V(z)f(s)f'(s)}{s}.$$

A função c é crescente para cada $z \in \mathbb{R}^2$. De fato, se $z \in \Omega$ temos que

$$c(s) = \frac{h(f(s))}{f^3(s)} \frac{f^3(s)f'(s)}{s} + V(z) \left(-\frac{f(s)f'(s)}{s} \right)$$

e se $z \in \mathbb{R}^2 - \Omega$

$$c(s) = \begin{cases} \frac{h(f(s))}{f^3(s)} \frac{f^3(s)f'(s)}{s} + V(z) \left(-\frac{f(s)f'(s)}{s} \right), & \text{se } s \leq f^{-1}(a) \\ \frac{\tau V(z) - V_0}{\tau} \left(-\frac{f(s)f'(s)}{s} \right), & \text{se } s > f^{-1}(a) \end{cases}$$

Assim, o Corolário 2.3 e (h_5) implicam a afirmação.

Em seguida, escolhamos $\delta > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz - \delta \int_{\mathbb{R}^2} v^2 dz > 0$. Em vista de $(k_2) - (k_3)$, para $\beta > \alpha_0$, existe $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{k(z, f(tv))f(tv)}{t^2} &\leq \delta \frac{f^2(tv)}{t^2 v^2} v^2 + C \frac{f^2(tv)}{t^2 v^2} v^2 [\exp(\beta f^4(tv)) - 1] \\ &\leq \delta v^2 + C v^2 [\exp(2\beta v^2) - 1]. \end{aligned}$$

Como $\delta v^2 + C v^2 [\exp(2\beta v^2) - 1] \in L^1(\mathbb{R}^2)$, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{k(z, f(tv))f(tv)}{t^2} dz \leq \delta \int_{\mathbb{R}^2} v^2 dz. \quad (2.18)$$

Desde que

$$\begin{aligned} g(t) &= t^2 \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{V(z)f^2(tv)}{t^2} dz - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{K(z, f(tv))}{t^2} dz \right) \\ &\geq t^2 \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{k(z, f(tv))f(tv)}{t^2} dz \right), \end{aligned}$$

pelo limite (2.18) segue que $g(t) > 0$ para $t > 0$ pequeno. Ademais, $g(0) = 0$ e $g(t) = \mathcal{I}(tv) < 0$ para t grande. Portanto, das conclusões anteriores, existe um único $t_v > 0$ tal que $g'(t_v) = 0$, isto é, $t_v v \in \mathcal{N}$. Além disso, $g(t_v) = \max_{t \geq 0} g(t)$. ■

O nível do Passo da Montanha do funcional $\mathcal{I}$ é definido por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \mathcal{I}(\gamma(t)),$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \mathcal{I}(\gamma(1)) < 0\}.$$

Pelo Lema 2.14, sabemos que $c > 0$. Agora, definamos os números

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \inf_{\mathcal{N}} \mathcal{I} \\ \bar{c} &= \inf_{v \in E \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \mathcal{I}(tv). \end{aligned}$$

O próximo resultado mostra a igualdade entre os números c , $\tilde{c}$ e $\bar{c}$.

Lema 2.16. $\tilde{c} = \bar{c} = c$

Prova. O Lema precedente implica que $\max_{t \geq 0} \mathcal{I}(tv) = \mathcal{I}(t_v v) \geq \tilde{c}$ para todo $v \in E \setminus \{0\}$ pois $t_v v \in \mathcal{N}$. Logo $\bar{c} \geq \tilde{c}$. Por outro lado, pela definição de $\bar{c}$, temos, em particular, que $\bar{c} \leq \max_{t \geq 0} \mathcal{I}(tv) = \mathcal{I}(t_v v)$ para todo $v \in \mathcal{N}$. Mas, para $v \in \mathcal{N}$, temos que $t_v = 1$, o que implica que $\bar{c} \leq \mathcal{I}(v)$ para todo $v \in \mathcal{N}$ e, portanto, $\bar{c} \leq \tilde{c}$. Assim, $\tilde{c} = \bar{c}$.

Desde que $\mathcal{I}(t_0 v) < 0$ para $v \in E \setminus \{0\}$ e t_0 grande, definindo $\gamma : [0,1] \rightarrow E$ por $\gamma(t) = tt_0 v$, segue que $\gamma \in \Gamma$ e, conseqüentemente, $c \leq \bar{c}$. Agora, mostremos que $\tilde{c} \leq c$.

A variedade $\mathcal{N}$ separa E em duas componentes. A idéia é mostrar que para toda curva $\gamma \in \Gamma$, $0 = \gamma(0)$ e $\gamma(1)$ estão em componentes distintas. Procedendo como na prova da geometria do Passo da Montanha, segue que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}'(v), v \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v)f'(v)v dz - \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v))f'(v)v dz \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(z)f^2(v)) dz - C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(z)f^2(v)) dz \right)^{q/2}, \end{aligned}$$

com $q > 2$ e $\|v\|$ pequena. Pela desigualdade (2.7), observe que se $\|v\| \rightarrow 0$ então

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V(z)f^2(v)) \, dz \rightarrow 0,$$

o que implica, pela última desigualdade, que existe $\delta > 0$ tal que $\langle \mathcal{I}'(v), v \rangle > 0$ quando $0 < \|v\| < \delta$. Isto prova que a componente contendo a origem também contém uma pequena bola em torno da origem. Além disso, $\mathcal{I}(v) \geq 0$ para todo v nesta componente, pois $\langle \mathcal{I}'(tv), v \rangle \geq 0$ para todo $0 \leq t \leq t_v$. Assim, $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ estão em componentes distintas, mostrando que toda curva $\gamma \in \Gamma$ tem que cruzar $\mathcal{N}$. Portanto, devemos ter $\tilde{c} \leq c$. Com isso, $\bar{c} \leq c$ e o lema está provado. ■

2.2.4 Condição de Palais-Smale

Lema 2.17. *Qualquer seqüência de Palais-Smale de $\mathcal{I}$ é limitada.*

Prova. Seja (v_n) em E uma seqüência de Palais-Smale para $\mathcal{I}$ no nível c , isto é,

$$\mathcal{I}(v_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \mathcal{I}'(v_n) \rightarrow 0.$$

Temos que

$$\mu \mathcal{I}(v_n) - \langle \mathcal{I}'(v_n), v_n \rangle \leq \epsilon_n \|v_n\| + c\mu + o_n(1).$$

com $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} & \mu \mathcal{I}(v_n) - \langle \mathcal{I}'(v_n), v_n \rangle \\ &= \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^2} V(z) \left[\frac{\mu}{2} f^2(v_n) - f'(v_n) f(v_n) v_n \right] \, dz \\ & \quad + \int_{\Omega} [k(z, f(v_n)) f'(v_n) v_n - \mu K(z, f(v_n))] \, dz \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} [k(z, f(v_n)) f'(v_n) v_n - \mu K(z, f(v_n))] \, dz. \end{aligned}$$

Usando (k_3) e o fato que $f^2(s)/2 \leq f'(s)f(s)s \leq f^2(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \mu \mathcal{I}(v_n) - \langle \mathcal{I}'(v_n), v_n \rangle &\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 \, dz + \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n) \, dz \\ &\quad - \mu \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega} K(z, f(v_n)) \, dz \\ &\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 \, dz + \left(\frac{\mu}{2} - 1 - \frac{\mu}{2\tau}\right) \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f^2(v_n) \, dz \\ &\geq \left(\frac{\mu}{2} - 1 - \frac{\mu}{2\tau}\right) \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_n|^2 + V(z) f^2(v_n)) \, dz. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Desde que

$$\|v_n\| \leq 2 + \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_n|^2 + V(z)f^2(v_n)) \, dz,$$

segue que

$$o_n(1) + c\mu + \epsilon_n \|v_n\| \geq \left[\frac{(\mu - 2)\tau - \mu}{2\tau} \right] (\|v_n\| - 2)$$

e, portanto,

$$\left[\frac{(\mu - 2)\tau - \mu}{2\tau} - \epsilon_n \right] \|v_n\| \leq o_n(1) + c\mu + \frac{(\mu - 2)\tau - \mu}{\tau}.$$

Como $\tau > \mu/(\mu - 2)$, concluímos que (v_n) é limitada. ■

Observação 2.18. *Das desigualdades (2.19), podemos concluir que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 \, dz \leq \frac{2\mu}{\mu - 2} c + o_n(1).$$

O corolário, a seguir, será essencial para mostrar que o funcional $\mathcal{I}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.

Corolário 2.19. *Se (v_n) é uma seqüência de Palais-Smale para $\mathcal{I}$, então dado $\delta > 0$ existe $R > 0$ tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|z| \geq R} (|\nabla v_n|^2 + V(z)f^2(v_n)) \, dz < \delta.$$

Prova. Para $R > 0$, considere a função $\varphi_R v_n$, onde $\varphi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^2, [0, 1])$, $\varphi_R(z) = 0$ se $|z| \leq R/2$, $\varphi_R(z) = 1$ se $|z| \geq R$ e $|\nabla \varphi_R(z)| \leq C/R$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$. Pelo lema anterior, $(\varphi_R v_n)$ é limitada em E . Logo, $\langle \mathcal{I}'(v_n), \varphi_R v_n \rangle = o_n(1)$, de onde obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 \varphi_R \, dz &+ \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v_n)f'(v_n)v_n \varphi_R \, dz + \int_{\mathbb{R}^2} v_n \nabla v_n \nabla \varphi_R \, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v_n))f'(v_n)v_n \varphi_R \, dz + o_n(1). \end{aligned}$$

Por (k_3) e propriedade (6) do Lema 1.2, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_n|^2 + V(z)f^2(v_n)) \varphi_R \, dz &+ \int_{\mathbb{R}^2} v_n \nabla v_n \nabla \varphi_R \, dz \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v_n) \varphi_R \, dz + o_n(1) \end{aligned}$$

pois, para $R > 0$ suficientemente grande, $\Omega \subset B_{R/2}$. Daí, usando desigualdade de Hölder e que $|\nabla \varphi_R| \leq C/R$ e $\tau > 2$, segue que

$$\int_{|z| \geq R} (|\nabla v_n|^2 + V(z)f^2(v_n)) \, dz \leq \frac{C}{R} \|v_n\|_2 \|\nabla v_n\|_2 + o_n(1)$$

o que prova o lema. ■

Agora, vamos mostrar que o funcional $\mathcal{I}$ satisfaz a condição $(PS)_c$, em que c é o seu nível do Passo da Montanha. Para isto, usaremos o seguinte resultado de convergência cuja prova pode ser encontrada em [27].

Lema 2.20. *Sejam $\mathcal{O}$ um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ e (u_n) em $L^1(\mathcal{O})$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\mathcal{O})$ e seja $g(x, s)$ uma função contínua. Então $g(x, u_n) \rightarrow g(x, u)$ em $L^1(\mathcal{O})$ desde que $g(x, u_n) \in L^1(\mathcal{O})$ para todo n e $\int_{\mathcal{O}} |g(x, u_n)u_n| dx \leq C$.*

Proposição 2.21. *Suponha que o nível do Passo da Montanha c seja menor que $\frac{\mu-2}{\mu} \frac{\pi}{\alpha_0}$. Então o funcional $\mathcal{I}$ satisfaz a condição $(PS)_c$.*

Prova. Seja (v_n) em E tal que

$$\mathcal{I}(v_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \mathcal{I}'(v_n) \rightarrow 0,$$

com $0 < c < (\mu - 2)\pi/(\mu\alpha_0)$. Pelo Lema 2.17, a sequência (v_n) é limitada em E e, portanto, em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Logo, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $v_n \rightarrow v$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Assim, usando o Lema de Fatou, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v)dz \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v_n)dz \leq C$$

o que implica que $v \in E$. Também temos que $v_n \rightarrow v$ em $L_{loc}^s(\mathbb{R}^2)$ para todo $s \geq 1$ e, como consequência do Teorema do Valor Médio, $f(v_n) \rightarrow f(v)$ em $L_{loc}^s(\mathbb{R}^2)$ para todo $s \geq 1$. Desta convergência e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{B_R} V(z)f^2(v_n)dz \rightarrow \int_{B_R} V(z)f^2(v)dz \quad \text{para todo } R > 0$$

e, em vista do Corolário 2.19, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v_n)dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v)dz. \tag{2.20}$$

Em virtude de (4) da Proposição 2.4, para provarmos que $v_n \rightarrow v$ em E , falta apenas garantirmos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz. \tag{2.21}$$

Para isto, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmação 1. v é um ponto crítico não-trivial de $\mathcal{I}$.

Verificação da Afirmação 1. Seja ϕ em $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $Q = \text{supp}(\phi)$. Usando Lema 2.20, segue que $k(z, f(v_n)) \rightarrow k(z, f(v))$ em $L^1(Q)$. Logo, a menos de subsequência, temos

$$|k(z, f(v_n))| \leq l \in L^1(Q) \text{ quase sempre em } Q.$$

Assim,

$$|k(z, f(v_n))f'(v_n)\phi| \leq \sup_Q |\phi| l \in L^1(Q).$$

Portanto, como consequência do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v_n))f'(v_n)\phi \, dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v))f'(v)\phi \, dz.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v_n)f'(v_n)\phi \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v)f'(v)\phi.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{I}'(v_n), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_n \nabla \phi \, dz + \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v_n)f'(v_n)\phi \, dz \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v_n))f'(v_n)\phi \, dz \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Logo, para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla v \nabla \phi \, dz + \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v)f'(v)\phi \, dz = \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v))f'(v)\phi \, dz \quad (2.22)$$

o que mostra que v é um ponto crítico de $\mathcal{I}$ pois $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E . Se $v \equiv 0$, por (2.20), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v_n)f'(v_n)v_n \, dz \leq \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v_n) \, dz \rightarrow 0$$

e tomando $R > 0$ satisfazendo $\Omega \subset B_R$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{|z| \geq R} k(z, f(v_n))f'(v_n)v_n \, dz &\leq \int_{|z| \geq R} k(z, f(v_n))f(v_n) \, dz \\ &\leq \frac{1}{\tau} \int_{|z| \geq R} V(z)f^2(v_n) \, dz \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Além disso, como $c < (\mu - 2)\pi/(\mu\alpha_0)$, pela Observação 2.18 segue que $\|\nabla v_n\|_2 < 2\pi/\alpha_0$ para n suficientemente grande. Agora, escolhamos $q > 1$ perto de 1 e $\beta > \alpha_0$ perto de α_0 de modo que ainda tenhamos

$$2q\beta\|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi.$$

Usando a desigualdade de Trudinger-Moser (2.3), (k_2) e o fato que $f(v_n) \rightarrow 0$ em $L^s(B_R)$ para todo $s \geq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{B_R} k(z, f(v_n))f'(v_n)v_n dz \leq \int_{B_R} k(z, f(v_n))f(v_n) dz \\ & \leq \int_{B_R} f^2(v_n) dz + C \int_{B_R} f(v_n)[\exp(\beta f^4(v_n)) - 1] dz \\ & \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left[\exp \left(2\alpha\beta\|\nabla v_n\|_2^2 \left(\frac{v_n}{\|\nabla v_n\|_2} \right)^2 \right) - 1 \right] dz \right)^{1/q} \left(\int_{B_R} |f(v_n)|^{q'} dz \right)^{1/q'} \\ & \quad + \int_{B_R} f^2(v_n) dz \\ & \leq C \left(\int_{B_R} |f(v_n)|^{q'} dz \right)^{1/q'} + \int_{B_R} f^2(v_n) dz \rightarrow 0. \end{aligned}$$

em que $q' = q/(q - 1)$ e onde usamos o Lema 2.10 com $\alpha > q$ próximo de q tal que $2\alpha\beta\|\nabla v_n\|_2^2 < 4\pi$. Logo, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v_n))f'(v_n)v_n dz \rightarrow 0$$

Em particular, por (k_3) , também obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(z, f(v_n)) dz \rightarrow 0$$

e desde que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dz + \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f(v_n)f'(v_n)v_n dz - \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v_n))f'(v_n)v_n dz \rightarrow 0,$$

concluimos que $\|\nabla v_n\|_2^2 \rightarrow 0$. Assim,

$$\mathcal{I}(v_n) = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dz + \int_{\mathbb{R}^2} V(z)f^2(v_n) dz - \int_{\mathbb{R}^2} K(z, f(v_n)) dz \rightarrow 0$$

o que é uma contradição. Portanto, $v \neq 0$ e a Afirmação 1 está provada.

Da caracterização do nível do Passo da Montanha obtida no Lema 2.16, segue que $\mathcal{I}(v) \geq c$. Como também temos $v_n \rightharpoonup v$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, pela semicontinuidade da norma,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dz. \quad (2.23)$$

Observe que devemos ter a igualdade em (2.23). Caso contrário, pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} \mu c &\leq \mu \mathcal{I}(v) - \langle \mathcal{I}'(v), v \rangle \\ &= \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\mu}{2} V(z) f^2(v) - V(z) f(v) f'(v) + k(z, f(v)) f'(v) v - \mu K(z, f(v)) \right] dz \\ &< \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\mu}{2} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\mu}{2} V(z) f^2(v_n) - V(z) f(v_n) f'(v_n) + k(z, f(v_n)) f'(v_n) v_n - \mu K(z, f(v_n)) \right] dz \right\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} [\mu \mathcal{I}(v_n) - \langle \mathcal{I}'(v_n), v_n \rangle] = \mu c. \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, a menos de subsequência, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v_n|^2 dz \rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dz$$

que juntamente com a convergência fraca implica que $\|\nabla v_n - \nabla v\|_2 \rightarrow 0$. Daí, por (2.20) e (4) da Proposição 2.4 segue que $v_n \rightarrow v$ em E , o que prova que $\mathcal{I}$ satisfaz a condição $(PS)_c$. ■

Em vista do que foi obtido para o funcional $\mathcal{I}$, podemos resumir os resultados anteriores no seguinte teorema:

Teorema 2.22. *Para cada $\varepsilon > 0$ tal que $0 < c_\varepsilon < \frac{\mu}{\mu-2} \frac{\pi}{\alpha_0}$, em que*

$$c_\varepsilon = \inf_{v \in E \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \mathcal{I}_\varepsilon(tv), \quad (2.24)$$

o problema modificado (2.15) possui uma solução positiva $v_\varepsilon \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ com $\mathcal{I}_\varepsilon(v_\varepsilon) = c_\varepsilon$.

Prova. Pelas Proposições 2.12, 2.21 e Lema 2.14, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha (veja Proposição 1.11 do *Capítulo 1*) para concluir que para todo $\varepsilon > 0$ tal que

$0 < c_\varepsilon < (\mu - 2)\pi/(\mu\alpha_0)$, onde c_ε é dado por

$$c_\varepsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} \max_{t \in [0,1]} \mathcal{I}_\varepsilon(\gamma(t))$$

e

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in C([0,1]; E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \mathcal{I}_\varepsilon(\gamma(1)) < 0\},$$

o funcional $\mathcal{I}_\varepsilon$ possui um ponto crítico $v_\varepsilon \in E \setminus \{0\}$ no nível c_ε . Pelo Lema 2.16, o nível c_ε pode ser dado como em (2.24). Logo, para todo $w \in E$, temos

$$\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_\varepsilon \nabla w \, dz + \int_{\mathbb{R}^2} V(z) f(v_\varepsilon) f'(v_\varepsilon) w \, dz - \int_{\mathbb{R}^2} k(z, f(v_\varepsilon)) f'(v_\varepsilon) w \, dz = 0$$

e, como na prova do Teorema 1.1 do *Capítulo 1*, tomando $w = -v_\varepsilon^-$, podemos concluir que $v_\varepsilon^- = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e, portanto, $v_\varepsilon = v_\varepsilon^+ \geq 0$. Além disso, $v_\varepsilon \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$. De fato, temos que

$$-\Delta v_\varepsilon = w \quad \text{em } \mathbb{R}^2$$

no sentido fraco, em que

$$w(z) \doteq f'(v_\varepsilon(z)) [k(z, f(v_\varepsilon(z))) - V(z) f(v_\varepsilon(z))].$$

Em vista de (k_2) , obtemos

$$|w| \leq f'(v_\varepsilon) \{C_1 |f(v_\varepsilon)| + C_2 |f(v_\varepsilon)| [\exp(\alpha(f(v_\varepsilon))^4) - 1]\} \leq C_3 + C_4 [\exp(2\alpha v_\varepsilon^2) - 1]$$

em qualquer bola B_R , onde usamos (7) e (11) do Lema 1.2. Usando o Lemma 2.10 e a desigualdade de Trudinger-Moser, segue que $w \in L^q(B_R)$ para todo $q \geq 2$. Assim, pela teoria de regularidade elíptica, obtemos que $v_\varepsilon \in W^{2,q}(B_R)$ para todo $q \geq 2$. Logo, $v_\varepsilon \in C_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ e isto implica que w é localmente Hölder contínua. Consequentemente, pela teoria de regularidade de Schauder $v_\varepsilon \in C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ for some $\alpha \in (0,1)$.

Finalmente, temos que $v_\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}^2$. Com efeito, suponha, ao contrário, que exista $z_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_\varepsilon(z_0) = 0$. A equação (3.3) pode ser escrita na forma

$$-\Delta v_\varepsilon + c(z) v_\varepsilon = V(z) f'(v_\varepsilon) (v_\varepsilon - f(v_\varepsilon)) + k(z, f(v_\varepsilon)) f'(v_\varepsilon) \geq 0,$$

onde $c(z) = V(z) f'(v_\varepsilon(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$. Aplicando o princípio do máximo forte para uma bola arbitrária centrada em z_0 , podemos concluir que $v_\varepsilon \equiv 0$, o que é impossível. A prova do teorema está agora completa. ■

2.3 O problema limite

Nesta seção, obtemos um resultado, através de um problema auxiliar, que será importante na obtenção de nossos resultados. Para isto, consideremos o seguinte funcional energia

$$\mathcal{F}_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(v) dx - \int_{\mathbb{R}^2} K(\varepsilon x, f(v)) dx,$$

associado à equação

$$-\Delta v = f'(v)[k(\varepsilon x, f(v)) - V(\varepsilon x)f(v)] \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad (2.25)$$

definido sobre o espaço de Banach

$$E_\varepsilon = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(v) dx < \infty \right\}$$

munido da norma

$$\|v\|_\varepsilon = \|\nabla v\|_2 + \inf_{\lambda > 0} \frac{1}{\lambda} \left(1 + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(\lambda v) dx \right).$$

Da mesma forma que $\mathcal{I}_\varepsilon$, o funcional $\mathcal{F}_\varepsilon$ possui a geometria do Passo da Montanha com o nível dado por

$$b_\varepsilon = \inf_{v \in E_\varepsilon \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \mathcal{F}_\varepsilon(tv) > 0.$$

Daqui por diante, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\partial\Omega$ é suave, $0 \in \Omega$ e $V(0) = \nu_1$.

A fim de obtermos uma estimativa para o nível do Passo da Montanha b_ε , vamos considerar o problema auxiliar

$$-\Delta u + \nu_1 u - \Delta(u^2)u = h(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^2, \quad (2.26)$$

o qual torna-se

$$-\Delta v = f'(v)[h(f(v)) - \nu_1 f(v)] \doteq g_1(v) \quad \text{em } \mathbb{R}^2 \quad (2.27)$$

depois da mudança de variável $v = f^{-1}(u)$. O funcional energia correspondente à Equação (2.27) é dado por

$$I_1(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + \nu_1 f^2(v)) dx - \int_{\mathbb{R}^2} h(f(v)) dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Agora, enunciamos o seguinte resultado devido a do Ó, Miyagaki e Soares [36]:

Teorema 2.23. *Suponha que a não-linearidade $h(s)$ satisfaz $(h_2), (h_3), (h_4)$ e (h_6) . Então a equação (2.27) tem uma solução clássica positiva $\omega \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Além disso, $\omega(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$ e*

$$\inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_1(\gamma(t)) = I_1(\omega) = c_1 = \frac{4\pi\mu_0}{\alpha_0 r \sigma^4}, \quad (2.28)$$

em que $\mu_0 = (\mu - 2)/(2\mu)$, $\sigma > 2^{1/4}$, $r > 0$ é tal que $\beta_0 > 8/(\alpha_0 r^2)$ e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H^1(\mathbb{R}^2)) : \gamma(0) = 0, I_1(\gamma(1)) < 0\}.$$

Observação 2.24. *Em [36], a estimativa (2.28) é obtida das desigualdades (4.20) e da Observação 4.2. Chamamos a atenção que o decaimento para zero no infinito, vale para qualquer solução de (2.27).*

Observação 2.25. *Desde que*

$$g'_1(s) = f''(s)h(f(s)) + (f'(s))^2 h'(f(s)) - \nu_1 f''(s)f(s) - \nu_1 (f'(s))^2,$$

temos que $g'_1(0) = -\nu_1 < 0$. Logo, usando um resultado de Gidas-Ni-Nirenberg [38], concluímos que ω é esfericamente simétrica em torno de algum ponto em $\mathbb{R}^2$ e $\partial\omega/\partial r < 0$ para todo $r > 0$, onde r é a coordenada radial em torno daquele ponto.

2.4 Estimativa do nível do Passo da Montanha b_ε

Em vista de (2.28), o próximo resultado traz uma estimativa para o nível do Passo da Montanha b_ε , que nos permitirá mostrar que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 < c_\varepsilon < (\mu - 2)\pi/(\mu\alpha_0)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Lema 2.26. $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon \leq c_1$.

Prova. Seja ω uma solução clássica positiva do problema (2.27). Sem perda de generalidade, podemos assumir que ω atinge seu máximo no zero. Considere a função $\widehat{\omega}_\varepsilon(x) \doteq \phi(\varepsilon x)\omega(x)$, onde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, [0, 1])$ é definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_\rho \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{2\rho} \end{cases}$$

para algum $\rho > 0$. Assumiremos que $B_{2\rho} \subset \subset \Omega$. É fácil ver que

$$\widehat{\omega}_\varepsilon \rightarrow \omega \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso, $\text{supp}(\widehat{\omega}_\varepsilon) \subset \Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon x \in \Omega\}$ e

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(\widehat{\omega}_\varepsilon) \, dx &= \int_{\text{supp}(\widehat{\omega}_\varepsilon)} V(\varepsilon x) f^2(\widehat{\omega}_\varepsilon) \, dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} V(\varepsilon x) \widehat{\omega}_\varepsilon^2 \, dx \\ &\leq \sup_{\Omega} V \int_{\Omega_\varepsilon} \widehat{\omega}_\varepsilon^2 \, dx \leq C \sup_{\Omega} V \end{aligned}$$

e isto implica, em particular, que $\widehat{\omega}_\varepsilon \in E_\varepsilon$. Para cada $\varepsilon > 0$, seja $t_\varepsilon \in (0, +\infty)$ tal que

$$\max_{t \geq 0} \mathcal{F}_\varepsilon(t\widehat{\omega}_\varepsilon) = \mathcal{F}_\varepsilon(t_\varepsilon\widehat{\omega}_\varepsilon).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} b_\varepsilon \leq \max_{t \geq 0} \mathcal{F}_\varepsilon(t\widehat{\omega}_\varepsilon) &\leq \frac{t_\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \widehat{\omega}_\varepsilon|^2 + V(\varepsilon x) \widehat{\omega}_\varepsilon^2) \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} K(\varepsilon x, f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon)) \, dx \\ &= \frac{t_\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \widehat{\omega}_\varepsilon|^2 + V(\varepsilon x) \widehat{\omega}_\varepsilon^2) \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} H(f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon)) \, dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Afirmamos que $t_\varepsilon \rightarrow 1$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. De fato, desde que $\langle \mathcal{F}'_\varepsilon(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon), t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon \rangle = 0$, usando (6) do Lema 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} t_\varepsilon^2 |\nabla \widehat{\omega}_\varepsilon|^2 \, dx &+ \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) f'(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon x, f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon)) f'(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} h(f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon)) f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) \, dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Logo, por (h_4) , segue que

$$t_\varepsilon^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widehat{\omega}_\varepsilon|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) \widehat{\omega}_\varepsilon^2 \, dx \right) \geq \mu \int_{\Omega} H(f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon)) \, dx.$$

Para ε pequeno, segue que $\Omega \subset B_{\rho/\varepsilon}$ o que implica que $\widehat{\omega}_\varepsilon(x) = \omega(x)$. Da última desigualdade e novamente por (h_4) , temos que existem constantes C_1 e C_2 tais que

$$\begin{aligned} t_\varepsilon^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widehat{\omega}_\varepsilon|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) \widehat{\omega}_\varepsilon^2 \, dx \right) &\geq C_1 \mu \int_{\Omega} (f(t_\varepsilon \omega))^{2\mu} \, dx - C_2 \mu |\Omega| \\ &\geq C_1 \mu (f(t_\varepsilon \omega(y_0)))^{2\mu} |\Omega| - C_2 \mu |\Omega| \end{aligned}$$

de onde obtemos que

$$C \geq C_1 \mu \left(\frac{f(t_\varepsilon \omega(y_0))}{\sqrt{t_\varepsilon \omega(y_0)}} \right)^4 (f(t_\varepsilon \omega(y_0))^{2\mu-4} \omega^2(y_0) |\Omega| - \frac{C_2 \mu |\Omega|}{t_\varepsilon^2})$$

em que $\omega(y_0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} \omega(x) > 0$. De acordo com (4) do Lema 1.2 e desde que $\mu > 2$ e $f(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow \infty$, concluimos que (t_ε) tem que ser limitado. Assim, a menos de subsequência, $t_\varepsilon \rightarrow t_1 \geq 0$. Por outro lado, desde que $\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla \widehat{\omega}_\varepsilon|^2 + V(\varepsilon x) \widehat{\omega}_\varepsilon^2) dx$ é limitado, por (2.29) temos $t_\varepsilon^2 \geq 2b_\varepsilon/C$ e $b_\varepsilon \geq c_0$ onde $c_0 > 0$ o nível do Passo da Montanha do funcional

$$I_0(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v|^2 + V_0 f^2(v)) dx - \int_{\mathbb{R}^2} H(f(v)) dx, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^2), \quad (2.31)$$

pois $V(z) \geq V_0$ e $K(z, s) \leq H(s)$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e $s \geq 0$. Portanto, $t_\varepsilon^2 \geq 2b_\varepsilon/C \geq 2c_0/C > 0$ e isto implica que $t_1 > 0$. Passando o limite em (2.30), obtemos

$$t_1^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega|^2 dx + \nu_1 \int_{\mathbb{R}^2} f(t_1 \omega) f'(t_1 \omega) t_1 \omega \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} h(f(t_1 \omega)) f'(t_1 \omega) t_1 \omega \, dx. \quad (2.32)$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \omega|^2 dx + \nu_1 \int_{\mathbb{R}^2} f(\omega) f'(\omega) \omega \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} h(f(\omega)) f'(\omega) \omega \, dx. \quad (2.33)$$

De (2.32) e (2.33), obtemos

$$\begin{aligned} & \nu_1 \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{f(t_1 \omega) f'(t_1 \omega)}{t_1 \omega} - \frac{f(\omega) f'(\omega)}{\omega} \right] \omega^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{h(f(t_1 \omega)) f'(t_1 \omega)}{t_1 \omega} - \frac{h(f(\omega)) f'(\omega)}{\omega} \right] \omega^2 dx. \end{aligned}$$

Pela hipótese (h_5) e Corolário 2.3, segue que

$$L_1(s) \doteq \frac{h(f(s)) f'(s)}{s} = \frac{h(f(s))}{f^3(s)} \frac{f^3(s) f'(s)}{s} \quad \text{e} \quad L_2(s) \doteq \frac{f(s) f'(s)}{s}$$

são crescente e decrescente para $s > 0$, respectivamente. Assim, devemos ter $t_1 = 1$.

Ademais,

$$\mathcal{F}_\varepsilon(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) = I_1(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (V(\varepsilon x) - \nu_1) f^2(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) \, dx$$

visto que $\int_{\mathbb{R}^2} K(\varepsilon x, f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon)) dx = \int_{\mathbb{R}^2} H(f(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon)) dx$. Tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e usando a definição de $\widehat{\omega}_\varepsilon$ e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (V(\varepsilon x) - \nu_1) f^2(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

e, portanto,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(t_\varepsilon \widehat{\omega}_\varepsilon) = I_1(\omega) = c_1.$$

■

2.5 Estimativa L^∞ e decaimento uniforme a zero

Observando que $c_\varepsilon = \varepsilon^2 b_\varepsilon$, segue, pelo Lema 2.26, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $c_\varepsilon \leq c_1 < (\mu - 2)\pi/(\mu\alpha_0)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, onde consideramos $r > 1$ de modo que $\beta_0 > 8/(\alpha_0 r^2)$.

Assim, definindo $\vartheta_\varepsilon(x) \doteq v_\varepsilon(z)$, $z = \varepsilon x$, pelo Teorema 2.22, ϑ_ε é um ponto crítico de classe C^2 positivo de $\mathcal{F}_\varepsilon$ (portanto uma solução de (2.25)) no nível

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = b_\varepsilon = \inf_{v \in E_\varepsilon \setminus \{0\}} \max_{t \geq 0} \mathcal{F}_\varepsilon(tv) > 0.$$

O lema, a seguir, mostra a limitação de ϑ_ε em E_ε para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Lema 2.27. *Existe $C > 0$ tal que $\|\vartheta_\varepsilon\|_\varepsilon \leq C$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Prova. Pelo Lema 2.26, temos $\mathcal{F}_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) \leq c_1 + o_\varepsilon(1)$, onde $o_\varepsilon(1) \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Assim

$$\mu \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon) dx \right) \leq \int_{\mathbb{R}^2} 2\mu K(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) dx + 2\mu c_1 + 1 \quad (2.34)$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Ademais, note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon) dx &\geq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f(\vartheta_\varepsilon) f'(\vartheta_\varepsilon) \vartheta_\varepsilon dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) f'(\vartheta_\varepsilon) \vartheta_\varepsilon dx \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) f(\vartheta_\varepsilon) dx, \end{aligned}$$

que juntamente com (k_3) e (2.34), implica que

$$\begin{aligned} &(\mu - 2) \left(\int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 + V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon)] dx \right) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} [2\mu K(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) - k(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) f(\vartheta_\varepsilon)] dx + 2\mu c_1 + 1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon} [2\mu K(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) - k(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) f(\vartheta_\varepsilon)] dx + 2\mu c_1 + 1 \\ &\leq \frac{2(\mu - 1)}{\tau} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon} V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon) dx + 2\mu c_1 + 1. \end{aligned}$$

Como $\tau > 2\mu/(\mu - 2)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 + V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon)] dx \leq C \quad (2.35)$$

para algum $C > 0$. Logo $\|\vartheta_\varepsilon\|_\varepsilon \leq C$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. ■

O próximo resultado diz respeito a regularidade da família (ϑ_ε) e é essencial para a prova do Teorema 2.1. Usaremos a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (veja [49, pag. 31]), a qual afirma que

$$\|u\|_q \leq C(\theta) \|u\|_r^{1-\theta} \|\nabla u\|_2^\theta \quad (2.36)$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2)$, em que $1 \leq r < \infty$, $0 < \theta \leq 1$ e

$$\frac{1}{q} \doteq \frac{1-\theta}{r} \quad (2.37)$$

Proposição 2.28. *As funções ϑ_ε pertencem a $L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Além disso, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $C > 0$ tais que $\|\vartheta_\varepsilon\|_\infty \leq C$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Prova. Tomando $\theta = 1/2$ em (2.37), segue que $q = 2r$ e (2.36) torna-se

$$\|u\|_{2r} \leq C \|u\|_r^{1/2} \|\nabla u\|_2^{1/2}.$$

Agora, pondo $u = f(\vartheta_\varepsilon)$ e $r = \sigma_n \doteq 2^n$, $n \geq 1$, temos

$$\|f(\vartheta_\varepsilon)\|_{\sigma_{n+1}} \leq C \|f(\vartheta_\varepsilon)\|_{\sigma_n}^{1/2}$$

pois $\|\nabla \vartheta_\varepsilon\|_2 \leq C$ e $f'(\vartheta_\varepsilon) \leq 1$. Logo, por iteração, obtemos que

$$\|f(\vartheta_\varepsilon)\|_{\sigma_{n+1}} \leq C^{1+1/2+\dots+1/2^{n-1}} \|f(\vartheta_\varepsilon)\|_2^{1/2^n}.$$

Como $\|f(\vartheta_\varepsilon)\|_2 \leq V_0^{-1/2} [\int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon) dx]^{1/2} \leq C$ e a série $1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-1}$ é convergente, concluimos que

$$\|f(\vartheta_\varepsilon)\|_{L^\infty(B_\rho(x))} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\vartheta_\varepsilon)\|_{L^{\sigma_{n+1}}(B_\rho(x))} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\vartheta_\varepsilon)\|_{\sigma_{n+1}} \leq C$$

onde $\rho > 0$ e $x \in \mathbb{R}^2$ são arbitrários. Assim, como f^{-1} é contínua, segue que

$$\|\vartheta_\varepsilon\|_\infty \leq C \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (2.38)$$

■

Corolário 2.29. *Existe $C_0 > 0$ tal que $\|\vartheta_\varepsilon\|_{1,2} \leq C_0$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Prova. Desde que $\|\vartheta_\varepsilon\|_\infty \leq C$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, usando (9) da Proposição 1.2 temos que

$$f(\vartheta_\varepsilon) \geq C_2 \vartheta_\varepsilon \quad \text{para algum } C_2 > 0. \quad (2.39)$$

Assim, em vista de (2.38) e (V_1) , o resultado segue. $\blacksquare$

Lema 2.30. *Existem uma família $(y_\varepsilon)_{\{0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}}$ em $\mathbb{R}^2$ e constantes positivas R e β tais que*

$$\int_{B_R(y_\varepsilon)} f^2(\vartheta_\varepsilon) \, dx \geq \beta \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Prova. Assuma, ao contrário, que exista uma seqüência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que para todo $R > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \int_{B_R(x)} f^2(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx = 0.$$

Usando o Lema 1.1 em [54], concluímos que $f(\vartheta_{\varepsilon_n}) \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^2)$ para todo $s > 2$. Daí, usando (k_2) , para $\delta > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon_n x, f(\vartheta_{\varepsilon_n})) f(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx &\leq \delta \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\vartheta_{\varepsilon_n}) \exp[(\beta f^4(\vartheta_{\varepsilon_n})) - 1] f(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx \\ &\leq C_1 \delta + C_2 \int_{\mathbb{R}^2} (f(\vartheta_{\varepsilon_n}))^3 \, dx \end{aligned}$$

desde que $\|\vartheta_{\varepsilon_n}\|_\infty \leq C$ e isto mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon_n x, f(\vartheta_{\varepsilon_n})) f(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx \rightarrow 0.$$

Conseqüentemente, por (k_3) , também temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(\varepsilon_n x, f(\vartheta_{\varepsilon_n})) \, dx \rightarrow 0.$$

Desde que $\langle \mathcal{F}'_{\varepsilon_n}(\vartheta_{\varepsilon_n}), \vartheta_{\varepsilon_n} \rangle = 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_{\varepsilon_n}|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon_n x) f^2(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon_n x, f(\vartheta_{\varepsilon_n})) f(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx$$

o que implica que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_{\varepsilon_n}|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon_n x) f^2(\vartheta_{\varepsilon_n}) \, dx \rightarrow 0.$$

Logo,

$$b_{\varepsilon_n} = \mathcal{F}_{\varepsilon_n}(\vartheta_{\varepsilon_n}) \rightarrow 0$$

o que é uma contradição, pois $b_{\varepsilon_n} \geq c_0 > 0$ para todo n , em que c_0 é o nível do Passo da Montanha do funcional (2.31) e o resultado está provado. $\blacksquare$

Lema 2.31. *A família $(\varepsilon y_\varepsilon)_{\{0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}}$ tem a propriedade*

$$\text{dist}(\varepsilon y_\varepsilon, \Omega) \leq \varepsilon R.$$

Prova. Para cada $\delta > 0$, definamos

$$\mathcal{K}_\delta \doteq \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) \leq \delta\}$$

e $\phi_\varepsilon(x) \doteq \phi(\varepsilon x)$, em que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, [0, 1])$ é tal que

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathcal{K}_\delta \\ 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

e $|\nabla \phi| \leq C/\delta$. Note que $|\nabla \phi_\varepsilon| \leq C\varepsilon/\delta$. Pela condição (V_1) , temos

$$V_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau} \right) \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\vartheta_\varepsilon) \phi_\varepsilon \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 \phi_\varepsilon \, dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau} \right) \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon) \phi_\varepsilon \, dx.$$

Por outro lado, desde que $\langle \mathcal{F}'_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon), \vartheta_\varepsilon \phi_\varepsilon \rangle = 0$ e usando (k_3) e o fato que $\phi_\varepsilon(x) = 0$ para $x \in \Omega_\varepsilon$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 \phi_\varepsilon \, dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau} \right) \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f^2(\vartheta_\varepsilon) \phi_\varepsilon \, dx \leq - \int_{\mathbb{R}^2} \vartheta_\varepsilon \nabla \vartheta_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon \, dx.$$

Logo,

$$\begin{aligned} V_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau} \right) \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\vartheta_\varepsilon) \phi_\varepsilon \, dx &\leq - \int_{\mathbb{R}^2} \vartheta_\varepsilon \nabla \vartheta_\varepsilon \nabla \phi_\varepsilon \, dx \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{\delta} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \vartheta_\varepsilon^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{C_1 \varepsilon}{\delta}. \end{aligned}$$

Desta desigualdade, se para alguma sequência de números positivos $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tivermos

$$B_R(y_{\varepsilon_n}) \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon_n x \in \mathcal{K}_\delta\} = \emptyset$$

concluimos que

$$V_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau} \right) \int_{B_R(y_{\varepsilon_n})} f^2(\vartheta_{\varepsilon_n}) dx \leq \frac{C_1 \varepsilon_n}{\delta}.$$

Mas, isto contraria o Lema 2.30. Assim, podemos afirmar que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe um x tal que $\varepsilon x \in \mathcal{K}_\delta$ e $|x - y_\varepsilon| \leq R$, o que implica que $\text{dist}(\varepsilon y_\varepsilon, \Omega) \leq \varepsilon R + \delta$ e então concluimos a prova. $\blacksquare$

Observação 2.32. *Pelo Lema anterior, a família $(\varepsilon y_\varepsilon)_{\{0 < \varepsilon < \varepsilon_0\}}$ pode ser tomada de modo que $\varepsilon y_\varepsilon \in \Omega$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Com efeito, desde que $\text{dist}(\varepsilon y_\varepsilon, \Omega) < 2\varepsilon R$, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe $x_\varepsilon \in \Omega$ satisfazendo $|y_\varepsilon - \varepsilon^{-1}x_\varepsilon| < 2R$. Logo,*

$$0 < \beta \leq \int_{B_R(y_\varepsilon)} f^2(\vartheta_\varepsilon) dx \leq \int_{B_{3R}(\varepsilon^{-1}x_\varepsilon)} f^2(\vartheta_\varepsilon) dx.$$

Trocando R por $3R$ no Lema 2.30, podemos trocar y_ε por $\varepsilon^{-1}x_\varepsilon$.

Para provar o próximo resultado, usaremos o Lema Radial (veja [14, Lema A.IV]) o qual afirma:

$$|u^*(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|} \|u^*\|_2, \quad \forall x \neq 0, \quad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^2), \quad (2.40)$$

em que u^* denota a simetrização de Schwarz de u .

Lema 2.33. *Temos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq R} \vartheta_\varepsilon^2 dx = 0$ uniformemente para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Prova. Sabemos que, para todo $\phi \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \vartheta_\varepsilon \nabla \phi dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f(\vartheta_\varepsilon) f'(\vartheta_\varepsilon) \phi dx = \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) f'(\vartheta_\varepsilon) \phi dx. \quad (2.41)$$

Para $R > 0$, seja ψ_R em $C^\infty(\mathbb{R}^2, [0, 1])$ definida por

$$\psi_R(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leq R \\ 1, & \text{se } |x| \geq 2R \end{cases}$$

e satisfazendo $|\nabla \psi_R| \leq C/R$ para algum $C > 0$. Tomando $\phi = \vartheta_\varepsilon \psi_R$ em (2.41), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_\varepsilon|^2 \psi_R dx + \int_{\mathbb{R}^2} \vartheta_\varepsilon \nabla \vartheta_\varepsilon \nabla \psi_R dx &+ \int_{\mathbb{R}^2} V(\varepsilon x) f(\vartheta_\varepsilon) f'(\vartheta_\varepsilon) \vartheta_\varepsilon \psi_R dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) f'(\vartheta_\varepsilon) \vartheta_\varepsilon \psi_R dx. \end{aligned}$$

Usando (k_2) , temos que

$$k(\varepsilon x, f(\vartheta_\varepsilon)) \leq \frac{V_0}{4} f(\vartheta_\varepsilon) + C f(\vartheta_\varepsilon) [\exp(\beta f^4(\vartheta_\varepsilon)) - 1],$$

que juntamente com a igualdade anterior, (V_1) e (6) do Lema 1.2, implica que

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{2} \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\vartheta_\varepsilon) \psi_R \, dx &\leq - \int_{\mathbb{R}^2} \vartheta_\varepsilon \nabla \vartheta_\varepsilon \nabla \psi_R \, dx + \frac{V_0}{4} \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\vartheta_\varepsilon) \psi_R \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} [\exp(\beta f^4(\vartheta_\varepsilon)) - 1] f(\vartheta_\varepsilon) f'(\vartheta_\varepsilon) \vartheta_\varepsilon \psi_R \, dx. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{V_0}{4} \int_{\mathbb{R}^2} f^2(\vartheta_\varepsilon) \psi_R \, dx \leq \frac{C}{R} \|\vartheta_\varepsilon\|_2 \|\nabla \vartheta_\varepsilon\|_2 + C \int_{\mathbb{R}^2} [\exp(2\beta \vartheta_\varepsilon^2) - 1] \vartheta_\varepsilon^2 \psi_R \, dx.$$

Como $\|\vartheta_\varepsilon\|_2, \|\nabla \vartheta_\varepsilon\|_2 \leq C$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, segue que

$$\frac{V_0}{4} \int_{|x| \geq 2R} f^2(\vartheta_\varepsilon) \, dx \leq \frac{C}{R} + C \int_{|x| \geq R} [\exp(2\beta \vartheta_\varepsilon^2) - 1] \vartheta_\varepsilon^2 \, dx. \quad (2.42)$$

Em vista de (2.38), temos que

$$f(\vartheta_\varepsilon) \geq C_2 \vartheta_\varepsilon \quad \text{para algum } C_2 > 0. \quad (2.43)$$

Agora, afirmamos que existe $C_3 > 0$ tal que

$$\int_{|x| \geq R} [\exp(2\beta \vartheta_\varepsilon^2) - 1] \vartheta_\varepsilon^2 \, dx \leq \frac{C_3}{R} \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (2.44)$$

Com efeito, pelas propriedades de simetrização de Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} [\exp(2\beta \vartheta_\varepsilon^2) - 1] \vartheta_\varepsilon^2 \, dx &= \int_{|x| \geq R} [\exp(2\beta (\vartheta_\varepsilon^*)^2) - 1] (\vartheta_\varepsilon^*)^2 \, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\beta)^k}{k!} \int_{|x| \geq R} (\vartheta_\varepsilon^*)^{2k+2} \, dx \end{aligned} \quad (2.45)$$

Desde que $\|\vartheta_\varepsilon^*\|_2 = \|\vartheta_\varepsilon\|_2 \leq C$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, de acordo com (2.40), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} (\vartheta_\varepsilon^*)^{2k+2} \, dx &\leq \left(\frac{C}{\sqrt{\pi}} \right)^{2k+2} \int_{|x| \geq R} \frac{1}{|x|^{2k+2}} \, dx \\ &= \pi \left(\frac{C}{\sqrt{\pi}} \right)^{2k+2} \frac{1}{kR^{2k}} \\ &\leq C^2 \left(\frac{C^2}{\pi} \right)^k \frac{1}{R} \quad \text{para todo } k \geq 1, \end{aligned}$$

onde usamos que $R > 1$. Logo, desta estimativa e (2.45), obtemos (2.44). Usando (2.43) e (2.44) na desigualdade (2.42), o lema está provado. $\blacksquare$

Lema 2.34. *As funções ϑ_ε decaem uniformemente para zero quando $|x| \rightarrow \infty$.*

Prova. De (2.38) e (2.41), para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\phi \geq 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \vartheta_\varepsilon \nabla \phi \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \vartheta_\varepsilon \phi \, dx.$$

Usando Teorema 8.17 em [44], para qualquer bola $B_{2r}(x)$ centrada em qualquer $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\sup_{y \in B_r(x)} \vartheta_\varepsilon(y) \leq C \|\vartheta_\varepsilon\|_{L^2(B_{2r}(x))} \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Pelo Lema 2.33, dado $\delta > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que para todo $R \geq R_0$

$$\left(\int_{B_R^c} \vartheta_\varepsilon^2 \, dx \right)^{1/2} < \frac{\delta}{C} \quad \text{para todo } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Assim se $|x| > R_0 + 2r$ obtemos, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, que

$$\vartheta_\varepsilon(x) \leq \sup_{y \in B_r(x)} \vartheta_\varepsilon(y) \leq C \|\vartheta_\varepsilon\|_{L^2(B_{2r}(x))} \leq C \left(\int_{B_{R_0}^c} \vartheta_\varepsilon^2 \, dx \right)^{1/2} < \delta,$$

o que prova o resultado. ■

2.6 Prova do Teorema 2.1

Nesta seção, vamos demonstrar o resultado principal deste capítulo.

2.6.1 O comportamento de concentração

Lema 2.35. *O seguinte limite vale*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V(\varepsilon y_\varepsilon) = \nu_1$$

e $w_\varepsilon(x) \doteq \vartheta_\varepsilon(x + y_\varepsilon)$ converge uniformemente para uma solução não-trivial w do problema (2.27) sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$.

Prova. Consideremos $\varepsilon_n > 0$ tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $y_n \in \mathbb{R}^2$ verificando $\varepsilon_n y_n \in \Omega$. Como $\varepsilon_n y_n \in \overline{\Omega}$, a menos de subsequência, temos que $\varepsilon_n y_n \rightarrow x_0 \in \overline{\Omega}$. Para simplificar a notação,

sejam $\vartheta_n = \vartheta_{\varepsilon_n}$ e $w_n(x) = \vartheta_n(x + y_n)$. Desde que $\|w_n\|_{1,2} = \|\vartheta_n\|_{1,2}$ é limitada, podemos assumir que existe $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$w_n \rightharpoonup w \text{ em } H^1(\mathbb{R}^2) \text{ e } w_n \rightarrow w \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2.$$

Pelo Lema 2.30, temos que $w \neq 0$. Sabemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla w_n \nabla \phi + V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f(w_n) f'(w_n) \phi] \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n)) f'(w_n) \phi \, dx, \end{aligned} \quad (2.46)$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Definamos

$$\chi(x) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_\Omega(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^2$$

e

$$\tilde{k}(x, s) \doteq \chi(x) h(s) + (1 - \chi(x)) \tilde{h}(s).$$

Desde que $\|w_n\|_\infty \leq C$ para todo n , pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} k(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n)) f'(w_n) \phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}(x, f(w)) f'(w) \phi \, dx,$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Tomando o limite em (2.46), segue que w satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla w \nabla \phi + V(x_0) f(w) f'(w) \phi] \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{k}(x, f(w)) f'(w) \phi \, dx,$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Portanto, w é um ponto crítico do funcional dado por

$$\tilde{\mathcal{I}}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla v|^2 + V(x_0) f^2(v)] \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(x, f(v)) \, dx,$$

em que $\tilde{K}(s) = \int_0^s \tilde{k}(t) \, dt$. Se $x_0 \in \Omega$ temos $\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n \in \Omega$ para n suficientemente grande. Assim, $\chi(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e, portanto, w é um ponto crítico do seguinte funcional

$$I_{x_0}(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} [|\nabla v|^2 + V(x_0) f^2(v)] \, dx - \int_{\mathbb{R}^2} H(f(v)) \, dx.$$

Denotando por c_{x_0} o nível do Passo da Montanha associado ao funcional I_{x_0} e por $\tilde{c}$ o nível do Passo da Montanha associado ao funcional $\tilde{\mathcal{I}}$, temos que $c_{x_0} \leq \tilde{c}$, pois $\tilde{K}(x, s) \leq H(s)$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $s \geq 0$. Além disso, também temos que $c_{x_0} \geq c_1$ visto que $V(x_0) \geq \nu_1$. Definamos o conjunto

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n \in \Omega\}.$$

Se $x \in A_n$, usando (k_3) e (h_4) , temos

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f^2(w_n(x)) - V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f(w_n(x)) f'(w_n(x)) w_n(x) \\ & + k(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n(x))) f'(w_n(x)) w_n(x) - \mu K(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n(x))) \\ & \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f^2(w_n(x)) + \frac{1}{2} [h(f(w_n(x))) f(w_n(x)) - 2\mu H(f(w_n(x)))] \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

e se $x \notin A_n$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{2} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f^2(w_n(x)) - V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f(w_n(x)) f'(w_n(x)) w_n(x) \\ & + k(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n(x))) f'(w_n(x)) w_n(x) - \mu K(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n(x))) \\ & \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1 - \frac{\mu}{2\tau}\right) V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f^2(w_n(x)) \geq 0 \end{aligned}$$

desde que $\mu/2 - 1 - \mu/(2\tau) > 0$. Como $\tilde{c} \leq \tilde{\mathcal{I}}(w)$, pelo Lema de Fatou e semi-continuidade da norma, segue que

$$\begin{aligned} \mu c_1 & \leq \mu c_{x_0} \leq \mu \tilde{c} \leq \mu \tilde{\mathcal{I}}(w) = \mu \tilde{\mathcal{I}}(w) - \langle \tilde{\mathcal{I}}'(w), w \rangle \\ & = \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w|^2 dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\mu}{2} V(x_0) f^2(w) - V(x_0) f(w) f'(w) w + \tilde{k}(x, f(w)) f'(w) w - \mu \tilde{K}(x, f(w)) \right] dx \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla w_n|^2 dx \\ & \quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\mu}{2} V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f^2(w_n) - V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f(w_n) f'(w_n) w_n \right. \\ & \quad \left. + k(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n)) f'(w_n) w_n - \mu K(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n)) \right] dx \\ & = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \vartheta_n|^2 dx \\ & \quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{\mu}{2} V(\varepsilon_n x) f^2(\vartheta_n) - V(\varepsilon_n x) f(\vartheta_n) f'(\vartheta_n) \vartheta_n + k(\varepsilon_n x, f(\vartheta_n)) f'(\vartheta_n) \vartheta_n \right. \\ & \quad \left. - \mu K(\varepsilon_n x, f(\vartheta_n)) \right] dx \\ & = \liminf_{n \rightarrow \infty} [\mu \mathcal{F}_{\varepsilon_n}(\vartheta_n) - \langle \mathcal{F}'_{\varepsilon_n}(\vartheta_n), \vartheta_n \rangle] = \mu \liminf_{n \rightarrow \infty} b_{\varepsilon_n} \leq \mu c_1. \end{aligned}$$

o que mostra que $\tilde{I}(w) = c_1$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon = c_1$ e $c_{x_0} = c_1 = \tilde{c}$. Além disso, se $V(x_0) > \nu_1$, o fato que a dependência do nível do Passo da Montanha c_1 em relação ao potencial constante ν_1 é contínuo e crescente (veja, por exemplo, [68]), implicaria que $c_1 < c_{x_0}$ o que é uma contradição. Portanto, devemos ter $V(x_0) = \nu_1$, donde $x_0 \in \Omega$ e, portanto, $\tilde{I} = I_{x_0} = I_1$. Assim, w é uma solução de (2.27). Disto e de (2.46), temos que

$$-\Delta(w_n - w) = K_n \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

onde

$$\begin{aligned} K_n(x) &\doteq \nu_1 f(w(x))f'(w(x)) - V(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n) f(w_n(x))f'(w_n(x)) \\ &\quad + k(\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n, f(w_n(x)))f'(w_n(x)) - h(f(w(x)))f'(w(x)), \end{aligned}$$

Como $w_n \rightarrow w$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, isto implica que $K_n \rightarrow 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Note que para cada subconjunto compacto $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ temos $|K_n|, |w| \leq C_{\mathcal{B}}$ desde que $\|w_n\|_\infty \leq C$ e $|\varepsilon_n x + \varepsilon_n y_n| \leq C_1$ para todo n e $x \in \mathcal{B}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que $K_n \rightarrow 0$ em $L_{loc}^s(\mathbb{R}^2)$ para todo $s \geq 1$. Usando [44, Theorem 9.11] podemos concluir que $w_n \rightarrow w$ em $W_{loc}^{2,s}(\mathbb{R}^2)$ para todo $s \geq 1$ e disto tem-se $w_n \rightarrow w$ em $C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$. Agora, por [44, Theorem 6.2] obtemos $w_n \rightarrow w$ em $C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ para algum $\alpha \in (0, 1)$ e o lema está provado. ■

Agora, vamos proceder à prova do Teorema 2.1. Desde que as funções ϑ_ε decaem uniformemente para zero, existe $R > 0$ tal que $\vartheta_\varepsilon(x) \leq a$ para todo $|x| \geq R$. Escolhendo $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_R \subset \Omega_{\varepsilon_0}$, como ϑ_ε é solução de (2.25) concluímos que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$-\Delta \vartheta_\varepsilon + V(\varepsilon x) f(\vartheta_\varepsilon) f'(\vartheta_\varepsilon) = h(f(\vartheta_\varepsilon)) f'(\vartheta_\varepsilon) \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$-\varepsilon^2 \Delta v_\varepsilon + V(z) f(v_\varepsilon) f'(v_\varepsilon) = h(f(v_\varepsilon)) f'(v_\varepsilon) \quad \text{em } \mathbb{R}^2.$$

e pela Observação 2.2 isto implica que $u_\varepsilon = f(v_\varepsilon)$ é uma solução positiva do problema (P_ε) para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Pela Proposição 2.34, temos que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, w_ε possui um ponto de máximo global $x_\varepsilon \in B_\rho$ para algum $\rho > 0$. Considerando a translação $\tilde{w}_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x + x_\varepsilon)$, podemos

assumir que as funções w_ε atingem seus máximos globais na origem de $\mathbb{R}^2$. Como toda solução v de (2.27) é esfericamente simétrica, $\partial v / \partial r < 0$ para todo $r > 0$ e que w_ε converge a w em $C_{loc}^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, pelo Lema 4.2 em [64] podemos concluir que w_ε não possui nenhum outro ponto crítico a não ser a origem para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Note que o valor máximo de $v_\varepsilon(z) = v_\varepsilon(\varepsilon x) = \vartheta_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x - y_\varepsilon)$ é atingido no ponto $z_\varepsilon = \varepsilon y_\varepsilon \in \Omega$. Como a função f é estritamente crescente, o valor máximo de $u_\varepsilon(z) = f(v_\varepsilon(z))$ é também atingido no ponto $z_\varepsilon = \varepsilon y_\varepsilon \in \Omega$. Desde que $\nabla u_\varepsilon = f'(v_\varepsilon) \nabla v_\varepsilon$, u_ε não possui nenhum ponto crítico a não ser z_ε e o ítem (i) do Teorema 2.1 está provado. O ítem (ii) é uma consequência do Lema 2.35.

2.6.2 Decaimento exponencial das soluções

Para finalizarmos este capítulo, vamos provar o decaimento exponencial das soluções u_ε . Usando o limite $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)f'(s)/s = 1$ e (h_2) , podemos escolher $R_0 > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $|x| \geq R_0$,

$$f(w_\varepsilon(x))f'(w_\varepsilon(x)) \geq \frac{3}{4}w_\varepsilon(x) \quad \text{e} \quad h(f(w_\varepsilon(x))) \leq \frac{\nu_1}{2}f(w_\varepsilon(x)). \quad (2.47)$$

Definamos $\psi(x) \doteq M \exp(-\xi|x|)$ onde ξ e M são tais que $4\xi^2 < \nu_1$ e $M \exp(-\xi R_0) \geq w_\varepsilon(x)$ para todo $|x| = R_0$. Não é difícil checar que

$$\Delta\psi \leq \xi^2\psi, \quad \forall x \neq 0. \quad (2.48)$$

Consideremos a função $\psi_\varepsilon = \psi - w_\varepsilon$. Logo, usando (2.47), (2.48) e que

$$-\Delta w_\varepsilon + V(\varepsilon x + \varepsilon y_\varepsilon)f(w_\varepsilon)f'(w_\varepsilon) = h(f(w_\varepsilon))f'(w_\varepsilon) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2,$$

obtemos

$$-\Delta\psi_\varepsilon + \frac{\nu_1}{4}\psi_\varepsilon \geq 0 \quad \text{em} \quad |x| \geq R_0,$$

$$\psi_\varepsilon \geq 0 \quad \text{em} \quad |x| = R_0,$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi_\varepsilon(x) = 0.$$

Pelo princípio do máximo, temos que $\psi_\varepsilon(x) \geq 0$ para todo $|x| \geq R_0$. Assim, $w_\varepsilon(x) \leq M \exp(-\xi|x|)$ para todo $|x| \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Isto implica que

$$u_\varepsilon(z) = f(v_\varepsilon(z)) \leq v_\varepsilon(z) = \vartheta_\varepsilon\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) = w_\varepsilon\left(\frac{z - z_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \leq C \exp\left(-\xi \left|\frac{z - z_\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)$$

para todo $z \in \mathbb{R}^2$ e o ítem (iii) do Teorema 2.1 está provado. ■

CAPÍTULO 3

Soluções simétricas e não-simétricas para uma equação de Schrödinger quase-linear

Neste capítulo, estabelecemos multiplicidade de soluções para a equação de Schrödinger quase-linear da forma

$$-\Delta u + V(z)u - \Delta(u^2)u = p(u), \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N). \quad (3.1)$$

Mais precisamente, sob condições convenientes sobre as funções V e p , provamos que (3.1) tem duas soluções não-triviais. Além disso, tomando $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$ com $N_1 \geq 0$, $M \geq 2$ e $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$, uma solução é positiva sobre $\mathbb{R}^N$ e radial na segunda variável y e a outra solução muda de sinal e é não-radial em y .

Para uma fácil referência, enunciamos nossas hipóteses de maneira mais precisa.

Assumimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua limitada satisfazendo a condição (V_1) e a seguinte condição de periodicidade e simetria:

(V_4) Existe $T = (T_1, \dots, T_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}$, em que $T_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, N_1$, tal que para todo $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M}$ e $g \in O(\mathbb{R}^{2M})$, temos

$$V(x_1, \dots, x_i + T_i, \dots, x_{N_1}, y) = V(x, g(y)),$$

com $i = 1, \dots, N_1$, $x = (x_1, \dots, x_{N_1})$ e $O(\mathbb{R}^{2M})$ é o grupo ortogonal em $\mathbb{R}^{2M}$.

Além disso, vamos supor que a não-linearidade $p(s)$ seja contínua e satisfaça as seguintes hipóteses:

$$(p_1) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{p(s)}{s} = 0;$$

$$(p_2) \quad |p(s)| \leq C(1 + |s|^r) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \text{ em que } C > 0 \text{ e } 3 < r < 22^* - 1;$$

$$(p_3) \quad \text{Existe } \theta > 4 \text{ tal que } 0 < \theta P(s) \leq sp(s) \text{ para todo } s > 0 \text{ em que } P(s) = \int_0^s p(t)dt;$$

$$(p_4) \quad p(-s) = -p(s) \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Note que (p_3) é também válida para $s < 0$ pois p é ímpar.

Nosso principal resultado neste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.1. *Sob as hipóteses (V_1) , (V_4) , $(p_1) - (p_4)$ e $N \geq 4$, a equação (3.1) tem duas soluções não-triviais em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ademais, uma solução é positiva em $\mathbb{R}^N$ e radial na segunda variável y e a segunda solução muda de sinal e é não-radial em y .*

Desde que não podemos aplicar diretamente os métodos mini-max ao funcional natural associado a (3.1), a saber

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) |\nabla u|^2 \, dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(z) u^2 \, dz - \int_{\mathbb{R}^N} P(u) \, dz,$$

como no *Capítulo 1*, fazemos uso da mudança de variável $v = f^{-1}(u)$ em que f está definida em (1.2). Logo, a partir de $J(u)$ obtemos o funcional

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v) \, dz - \int_{\mathbb{R}^N} P(f(v)) \, dz \quad (3.2)$$

o qual está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e é de classe C^1 sob as hipóteses sobre o potencial $V(z)$ e a não-linearidade $p(s)$. Além disso, os pontos críticos do funcional I são exatamente as soluções fracas da equação semi-linear

$$-\Delta v = f'(v)[p(f(v)) - V(z)f(v)] \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (3.3)$$

Observamos, novamente, veja [25], que se $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I , então a função $u = f(v)$ é uma solução clássica de (3.1).

3.1 Resultados Preliminares

Neste ponto, sabemos que para obtermos uma solução clássica de (3.1), é suficiente obtermos um ponto crítico de classe C^2 do funcional I . Diferentemente dos *Capítulos 1 e 2*, trabalhamos com o espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R}^N)$ munido do produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle \doteq \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla v + V(z)uv] \, dz \quad (3.4)$$

cujas norma correspondente é

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^2 + V(z)u^2] \, dz \right)^{1/2}.$$

Pela limitação do potencial V , esta norma é equivalente a norma usual de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Aqui, usaremos uma combinação de uma versão do Teorema do Passo da Montanha, veja [80, Teorema 2.8] e [28, Teorema 5.7], com o Princípio da Criticalidade Simétrica [80, Teorema 1.28], os quais enunciamos a seguir:

Teorema 3.2 (Teorema do Passo da Montanha). *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Seja S um subconjunto fechado de X que desconecta X . Sejam x_0 e x_1 pontos de X que estão em componentes conexas distintas de $X \setminus S$. Suponha que Φ seja limitado por baixo em S e, de fato, a seguinte condição seja verificada*

$$c \doteq \inf_S \Phi > \max\{\Phi(x_0), \Phi(x_1)\} \doteq a. \quad (3.5)$$

Então, existe uma seqüência (u_n) em X satisfazendo

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, \quad \Phi'(u_n) \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Observação 3.3. *Para ser mais preciso, veja por exemplo [40, pag. 145], podemos obter uma seqüência de Cerami (u_n) para Φ no nível c , isto é, $(u_n) \subset X$ satisfazendo*

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, \quad \|\Phi'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|_X) \rightarrow 0.$$

Teorema 3.4 (Princípio da Criticalidade Simétrica). *Assuma que a ação do grupo topológico G sobre o espaço de Hilbert X seja isométrica. Se $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é G -invariante, isto é, $\Phi \circ g = \Phi$ para todo $g \in G$ e se u é um ponto crítico de Φ restrito a $\text{Fix}(G) = \{u \in X : g.u = u \text{ para todo } g \in G\}$, então u é um ponto crítico de Φ .*

O próximo resultado é uma extensão do Lema 1.21 em [80] e está provado em [60].

Lema 3.5. *Seja $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^{N_1}$ tais que*

$$(a) \quad \mathbb{R}^{N_1} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{A_i} \text{ e } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j;$$

(b) *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$*

$$\|u\|_{L^{2^*}(A_i)} \leq C \|u\|_{H^1(A_i)}, \quad \text{para todo } u \in H^1(A_i).$$

Seja (u_n) uma seqüência limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Se $q \in [2, 2^)$ e*

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \int_{A_i \times \mathbb{R}^{2M}} |u_n|^q dz \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty,$$

então $u_n \rightarrow 0$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $2 < s < 2^$.*

Agora, introduzimos a seguinte definição bem conhecida (veja [80]):

Definição 3.6. *Seja G um subgrupo de $O(\mathbb{R}^{2M})$. Dizemos que $\mathbb{R}^{2M}$ é compatível com G se, para algum $r > 0$,*

$$\lim_{|y| \rightarrow +\infty} m(y, r, G) = +\infty,$$

onde $m(y, r, G) \doteq \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\exists g_1, \dots, g_n \in G : j \neq k \Rightarrow B_r(g_j(y)) \cap B_r(g_k(y)) = \emptyset \}$ e $B_r(g_k(y)) \subset \mathbb{R}^{2M}$ é uma bola aberta de raio r e centro $g_k(y)$.

Observe que $\mathbb{R}^{2M}$ é compatível com $O(\mathbb{R}^{2M})$ e também com $O(\mathbb{R}^M) \times O(\mathbb{R}^M)$.

Se G é um subgrupo de $O(\mathbb{R}^{2M})$, consideremos a ação isométrica induzida de G em $H^1(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$(gu)(x, y) = u(x, g^{-1}y), \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{2M} \text{ e } g \in G.$$

Denotamos o subespaço das funções invariantes $Fix(G)$ por $H_G^1(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$H_G^1(\mathbb{R}^N) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : gu = u \text{ para todo } g \in G\}.$$

Temos o seguinte resultado de imersão compacta, cuja prova se encontra em [60]:

Lema 3.7. *Se $\mathbb{R}^{2M}$ é compatível com G então a imersão*

$$H_G^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\Omega \times \mathbb{R}^{2M})$$

é compacta para qualquer domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^{N_1}$ e para todo $2 < s < 2^$.*

3.2 Geometria do Passo da Montanha

Antes de provar o resultado principal deste capítulo, precisamos provar alguns lemas. O próximo resultado mostra que o funcional I possui a geometria do Passo da Montanha, ou seja, a condição (3.5) do Lema 3.2.

Lema 3.8. *Sob as hipóteses (V_1) e $(p_1) - (p_4)$, o funcional I tem a geometria do Passo da Montanha.*

Prova. Primeiro, mostremos que existe $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$I(t\varphi) \rightarrow -\infty \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (3.7)$$

De fato, consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo $\text{supp}(\varphi) = \overline{B_1}$ e $0 \leq \varphi(z) \leq 1$ para todo $z \in B_1$. Pela hipótese (p_3) , existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$P(s) \geq C_1|s|^\theta - C_2.$$

Logo, para $t > 0$, obtemos

$$I(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - \frac{C_1}{2} \int_{B_1} |f(t\varphi)|^\theta \, dz + \frac{C_2}{2}|B_1|.$$

Pela propriedade (6) do Lema 1.2, segue que $f(s)/s$ é decrescente para $s > 0$. Portanto,

$$f(s) \geq \frac{f(t)}{t}s \quad \text{para todo} \quad 0 < s \leq t.$$

Desde que $0 \leq t\varphi(z) \leq t$ para $z \in B_1$ e $t > 0$, temos que $f(t\varphi(z)) \geq f(t)\varphi(z)$ e isto implica que

$$I(t\varphi) \leq \frac{t^2}{2} \left(\|\varphi\|^2 - C_1 \frac{f(t)^\theta}{t^2} \int_{B_1} \varphi^\theta \, dz + \frac{C_2}{t^2}|B_1| \right).$$

Por (5) do Lema 1.2 e desde que $\theta > 4$, concluimos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)^\theta}{t^2} = +\infty$$

e, portanto, (3.7) está provado.

Como nos *Capítulos 1* e *2*, para $\rho > 0$, definamos

$$S_\rho \doteq \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z)f^2(v) \, dz = \rho^2 \right\}.$$

Desde que $q : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$q(v) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v) \, dz$$

é contínua, S_ρ é um subconjunto fechado e desconecta o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Para $v \in S_\rho$ e $\epsilon > 0$, temos, por (V_1) e $(p_1) - (p_2)$, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} P(f(v)) \, dz &\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^2 \, dz + C \int_{\mathbb{R}^N} |f(v)|^{r+1} \, dz \\ &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C \int_{\mathbb{R}^N} |f^2(v)|^{(r+1)/2} \, dz \\ &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C \left(\int_{\mathbb{R}^N} f^2(v) \, dz \right)^{\alpha(r+1)/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (f^2(v))^{2^*} \, dz \right)^{1-\alpha(r+1)/2} \\ &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C(\rho^2)^{\alpha(r+1)/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(v))|^2 \, dz \right)^{(1-\alpha(r+1)/2)2^*/2}, \end{aligned}$$

em que

$$\alpha = \frac{22^* - (r+1)}{(r+1)(2^* - 1)}.$$

Como $|\nabla(f^2(v))|^2 \leq 2|\nabla v|^2$, segue que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(f^2(v))|^2 \, dz \leq 2\rho^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} P(f(v)) \, dz &\leq \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C\rho^{[2\alpha(r+1)+2^*(2-\alpha(r+1))]/2} \\ &= \frac{\epsilon}{V_0} \rho^2 + C\rho^{(2N+2(r+1))/(N+2)}. \end{aligned}$$

o que implica que

$$I(v) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{V_0} \right) \rho^2 - C\rho^{(2N+2(r+1))/(N+2)}.$$

para $v \in S_\rho$. Escolhendo $\epsilon > 0$ tal que $2\epsilon < V_0$ e observando que

$$\frac{2N+2(r+1)}{N+2} > 2$$

se, e somente se, $r+1 > 2$, concluímos, para $\rho = \rho_0$ suficientemente pequeno, que

$$c_0 \doteq \inf_{S_{\rho_0}} I \geq \delta_0 > 0.$$

Tomando $e = t\varphi$ com t grande, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla e|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(e) \, dz > \rho_0^2$$

e $I(e) < 0$. Portanto, a condição (3.5) está garantida e o resultado segue. ■

Como consequência do Teorema 3.2 e Observação 3.3, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.9. *Sob as hipóteses (V_1) e $(p_1) - (p_4)$, existe uma seqüência de Cerami (v_n) para I no nível c_0 .*

Observação 3.10. *Pela condição (p_3) , em particular, existe $C > 0$ tal que $P(s) \geq Cs^4$ para $|s| \geq 1$.*

Lema 3.11. *Qualquer seqüência de Cerami (v_n) para I é limitada.*

Prova. Primeiro, mostraremos que se uma seqüência (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz \leq C, \quad (3.8)$$

para alguma constante $C > 0$, então ela é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. De fato, precisamos apenas provar que $\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 \, dz$ é limitada.

Por (9) do Lema 1.2 e Observação 3.10, existe $C > 0$ tal que $P(f(s)) \geq Cs^2$ para todo $|s| \geq 1$. Isto implica que

$$\int_{\{|v_n|>1\}} v_n^2 \, dz \leq \frac{1}{C} \int_{\{|v_n|>1\}} P(f(v_n)) \, dz \leq \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^N} P(f(v_n)) \, dz.$$

Pelo comportamento de f no zero, existe também uma constante $C > 0$ tal que $|f(s)| \geq C|s|$ para todo $s \in [-1, 1]$. Portanto,

$$\int_{\{|v_n|\leq 1\}} v_n^2 \, dz \leq \frac{1}{C^2} \int_{\{|v_n|\leq 1\}} f^2(v_n) \, dz \leq \frac{1}{C^2 V_0} \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 \, dz = \int_{\{|v_n|\leq 1\}} v_n^2 \, dz + \int_{\{|v_n|>1\}} v_n^2 \, dz \leq C.$$

Seja, então, (v_n) em $H^1(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência de Cerami para I no nível $c \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz - \int_{\mathbb{R}^N} P(f(v_n)) \, dz &= c + o_n(1) \quad \text{e} \\ \|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|) &= o_n(1) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Para $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\langle I'(v_n), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v_n \nabla \varphi \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f(v_n) f'(v_n) \varphi \, dz - \int_{\mathbb{R}^N} p(f(v_n)) f'(v_n) \varphi \, dz.$$

Tomando $\varphi = \varphi_n = \sqrt{1 + 2f^2(v_n)} f(v_n)$, temos por (6) do Lema 1.2, que $|\varphi_n| \leq 2|v_n|$ e

$$|\nabla \varphi_n| = \left[1 + \frac{2f^2(v_n)}{1 + 2f^2(v_n)} \right] |\nabla v_n| \leq 2|\nabla v_n|.$$

Logo, $\|\varphi_n\| \leq 2\|v_n\|$ e pela segunda condição em (3.9)

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n), \varphi_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{2f^2(v_n)}{1 + 2f^2(v_n)} \right) |\nabla v_n|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} p(f(v_n)) f(v_n) \, dz = o_n(1). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por (3.9) e (3.10), segue que $I(v_n) - 1/\theta \langle I'(v_n), \varphi_n \rangle = c + o_n(1)$, o que implica por (p_3) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{2f^2(v_n)}{1 + 2f^2(v_n)} \right) \right] |\nabla v_n|^2 \, dz + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz \leq c + o_n(1).$$

Assim, desde que $1 + 2f^2(v_n)/(1 + 2f^2(v_n)) \leq 2$, obtemos

$$\left(\frac{\theta - 4}{2\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dz + \left(\frac{\theta - 2}{2\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz \leq c + o_n(1)$$

o que mostra que (3.8) vale e, portanto, (v_n) é limitada. ■

3.3 Prova do Teorema 3.1

3.3.1 Solução não-radial e mudando de sinal

Inicialmente, provaremos a existência de uma solução não-radial em y que muda de sinal. Para isto, seja τ a involução definida em $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ por

$$\tau(x, y_1, y_2) \doteq (x, y_2, y_1).$$

Definamos, também, uma ação do grupo $\mathcal{G} = \{id, \tau\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ por

$$g.u(x, y_1, y_2) \doteq \begin{cases} u(x, y_1, y_2), & \text{se } g = id \\ -u(g^{-1}(x, y_1, y_2)), & \text{se } g = \tau. \end{cases}$$

Observe que $H_G^1(\mathbb{R}^N) \cap H_{O(\mathbb{R}^{2M})}^1(\mathbb{R}^N) = \{0\}$. Consideremos, então, $G = O(\mathbb{R}^M) \times O(\mathbb{R}^M)$ e seja Φ a restrição do funcional I ao espaço de Hilbert $W = H_G^1(\mathbb{R}^N) \cap H_G^1(\mathbb{R}^N)$ munido do produto interno (3.4). Aplicando o Corolário 3.9 e Lema 3.11 ao funcional Φ , existe $c > 0$ e uma seqüência limitada $(v_n) \subset W$ satisfazendo

$$\Phi(v_n) \rightarrow c, \quad \Phi'(v_n) \rightarrow 0.$$

Em particular, (v_n) é limitada em $L^2(\mathbb{R}^N)$. De (6) do Lema 1.2, segue que $f(v_n)f'(v_n)v_n \geq f^2(v_n)/2$, donde temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dz + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f(v_n) f'(v_n) v_n \, dz \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} p(f(v_n)) f'(v_n) v_n \, dz + \|\Phi'(v_n)\|_{W^*} \|v_n\|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por $(p_1) - (p_3)$ e (6) – (7) do Lema 1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \theta \int_{\mathbb{R}^N} P(f(v_n)) \, dz &\leq \int_{\mathbb{R}^N} p(f(v_n)) f(v_n) \, dz \\ &\leq \epsilon \|v_n\|_2^2 + C_\epsilon \|v_n\|_{(r+1)/2}^{(r+1)/2} \\ &\leq \epsilon C_1 + C_2 \|v_n\|_{(r+1)/2}^{(r+1)/2}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

em que $\epsilon > 0$ é arbitrário e C_ϵ é uma constante positiva que depende de ϵ . Afirmamos que (v_n) não converge a zero em $L^{(r+1)/2}(\mathbb{R}^N)$. De fato, se $v_n \rightarrow 0$ em $L^{(r+1)/2}(\mathbb{R}^N)$, por (3.12), obteríamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} P(f(v_n)) \, dz \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} p(f(v_n)) f(v_n) \, dz \rightarrow 0,$$

o que implicaria também que

$$\int_{\mathbb{R}^N} p(f(v_n)) f'(v_n) v_n \, dz \rightarrow 0.$$

Logo, por (3.11),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \, dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f^2(v_n) \, dz \rightarrow 0$$

e, conseqüentemente, $I(v_n) \rightarrow 0$, o que é uma contradição.

A seguir, seja $\{Q_{\mathcal{I}}\}_{\mathcal{I} \in \mathbb{Z}^{N_1}}$ uma seqüência de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^{N_1}$ definida por

$$Q_{\mathcal{I}} = (i_1 T_1, (i_1 + 1) T_1) \times \cdots \times (i_{N_1} T_{N_1}, (i_{N_1} + 1) T_{N_1}),$$

em que $\mathcal{I} = (i_1, \dots, i_{N_1})$ e $T = (T_1, \dots, T_{N_1})$ foi introduzido na condição (V_4) . Pelo Lema 3.5, dado $q \in [2, 2^*)$, existem uma subsequência de (v_n) , a qual denotamos da mesma forma, e um número positivo α tais que

$$\sup_{\mathcal{I} \in \mathbb{Z}^{N_1}} \int_{A_{\mathcal{I}} \times \mathbb{R}^{2M}} |v_n(x, y)|^q \, dz > \alpha.$$

Seja $A_{\mathcal{I}_n}$ satisfazendo

$$\int_{A_{\mathcal{I}_n} \times \mathbb{R}^{2M}} |v_n(x, y)|^q dz > \frac{\alpha}{2}$$

e seja $d_n = (i_{1,n}T_1, \dots, i_{N_1,n}T_{N_1})$ o vértice principal de $A_{\mathcal{I}_n}$. Introduzindo a mudança de variável $x = x' + d_n$, obtemos

$$\int_{A_0 \times \mathbb{R}^{2M}} |v_n(x' + d_n, y)|^q dz' > \frac{\alpha}{2}, \quad z' = (x', y)$$

onde $A_0 = (0, T_1) \times \dots \times (0, T_{N_1})$. Agora, consideremos a seqüência definida por $w_n(x', y) = v_n(x' + d_n, y)$. Logo, obtemos

$$\int_{A_0 \times \mathbb{R}^{2M}} |w_n(x', y)|^q dz' > \frac{\alpha}{2}. \quad (3.13)$$

Observando que os vértices principais d_n são múltiplos do período T , segue que w_n é também uma seqüência do Passo da Montanha e, portanto, é limitada. Logo, $w_n \rightharpoonup w$ em W e pelo Lema 3.7, $w_n \rightarrow w$ em $L^q(A_0 \times \mathbb{R}^{2M})$. Conseqüentemente, por (3.13), $w \neq 0$.

Usando a continuidade de p e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$, segue que

$$\langle \Phi'(w_n), \phi \rangle - \langle \Phi'(w), \phi \rangle \rightarrow 0.$$

Logo, $\langle \Phi'(w), \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$. Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W$ é denso em W , concluímos que w é um ponto crítico de Φ , isto é, w é um ponto crítico de I restrito a W . Pelas hipóteses em V e p , as condições do Teorema 3.4 são satisfeitas e, portanto, w é um ponto crítico de I que, pela definição de W , muda de sinal e não é radial na variável y .

De maneira similar como feito na Proposição 1.10, se V e p são localmente Hölder contínuas então $w \in C_{loc}^{2,\gamma}(\mathbb{R}^N)$, para algum $\gamma \in (0, 1)$.

3.3.2 Solução radial e positiva

A fim de obtermos uma solução positiva e radial em y , podemos supor que $p(s) = 0$ para $s < 0$ e consideramos o funcional I restrito ao espaço $H_{O(\mathbb{R}^{2M})}^1(\mathbb{R}^N)$. Procedendo analogamente ao caso anterior, podemos estabelecer a existência de um ponto crítico não-trivial v de I restrito a $H_{O(\mathbb{R}^{2M})}^1(\mathbb{R}^N)$. Novamente, pelo Teorema 3.4, v é um ponto crítico de I , o qual é radial na variável y . Assim, para todo $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \nabla w dz + \int_{\mathbb{R}^N} V(z) f(v) f'(v) w dz - \int_{\mathbb{R}^N} p(f(v)) f'(v) w dz = 0.$$

Como no *Capítulo 1*, tomando $w = -v^-$, segue que $v = v^+ \geq 0$. Escrevendo a Equação (3.3) na forma

$$-\Delta v + c(z)v = V(z)f'(v)(v - f(v)) + p(f(v))f'(v) \geq 0,$$

em que $c(z) \doteq V(z)f'(v(z)) > 0$ para todo $z \in \mathbb{R}^N$, podemos aplicar o princípio do máximo forte para concluir que $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e a prova está completa. ■

CAPÍTULO 4

Uma equação elíptica quase-linear envolvendo o operador p -laplaciano em $\mathbb{R}^N$

Como dito na *Introdução*, neste capítulo, considerando o operador p -laplaciano, estudamos a seguinte equação elíptica quase-linear

$$-\Delta_p u - \Delta_p(u^2)u + V(x)|u|^{p-2}u = h(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \quad (4.1)$$

com $1 < p \leq N$, que é uma generalização da equação (1).

Uma função $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada uma solução fraca de (4.1) se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ e para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ vale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (1+2^{p-1}|u|^p)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx \\ + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p |u|^{p-2} u \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^{p-2}u \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Neste capítulo, pedimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e satisfaça as seguintes condições:

(V₁) Existe $V_0 > 0$ tal que $V(x) \geq V_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

(V₅) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = V_\infty$ e $V(x) \leq V_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Sobre a função $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, consideramos as seguintes hipóteses:

(H₀) $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{h(s)}{s^{p-1}} = 0$;

(H₁) Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $s \geq 0$

$$h(s) \leq C(1 + s^r),$$

onde $2p - 1 < r < 2p^* - 1$ se $1 < p < N$ e $r > 2p - 1$ se $p = N$;

(H₂) Existe $\theta \geq 2p$ tal que $0 < \theta H(s) \leq sh(s)$ para todo $s > 0$, em que $H(s) = \int_0^s h(t)dt$.

O seguinte teorema contém o resultado principal deste capítulo:

Teorema 4.1. *Seja $1 < p \leq N$. Suponhamos que (V₁), (V₅) e (H₀) – (H₁) valem. Então a Equação (4.1) possui uma solução fraca positiva $u \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ desde que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:*

(a) (H₂) vale com $\theta > 2p$;

(b) (H₂) vale com $\theta = 2p$ e $p - 1 < r < p^* - 1$ se $1 < p < N$ ou $r > p - 1$ se $p = N$ em (H₁).

Além disso, se $1 < p < N$ temos que $u(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow 0$.

Para provarmos o Teorema 4.1, não podemos aplicar diretamente os métodos mini-max, pois o funcional energia associado a (4.1), a saber,

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2^{p-1}|u|^p)|\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) \, dx$$

não está bem definido em geral, por exemplo, em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Se $1 < p < N$ e $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ é definida por

$$u(x) = |x|^{(p-N)/2p} \quad \text{para } x \in B_1 \setminus \{0\}$$

então temos que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entretanto $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p |\nabla u|^p \, dx = +\infty$. Para contornarmos esta dificuldade, generalizamos o argumento usado nos capítulos anteriores para o caso $p = 2$. Introduzimos a mudança de variável $v = f^{-1}(u)$, em que f é definida por

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{(1 + 2^{p-1}|f(t)|^p)^{1/p}} && \text{em } [0, +\infty), \\ f(t) &= -f(-t) && \text{em } (-\infty, 0]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Mais adiante, mostramos algumas propriedades importantes da função f . Daí, obtemos um novo funcional a partir de $J(u)$, mais precisamente,

$$I(v) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v)|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v)) \, dx \quad (4.4)$$

o qual, agora, está bem definido no espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ sob as condições impostas sobre o potencial $V(x)$ e a não-linearidade $h(s)$. A Equação de Euler-Lagrange associada ao funcional I é dada por

$$-\Delta_p v = f'(v)[h(f(v)) - V(x)|f(v)|^{p-2}f(v)], \quad v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \quad (4.5)$$

Na Proposição 4.3 mais adiante, relacionamos as soluções de (4.5) com as soluções de (4.1).

4.1 Resultados preliminares

Nesta seção, obtemos algumas propriedades da mudança de variável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (4.3), bem como um resultado que relaciona as soluções de (4.5) com as soluções de (4.1).

Lema 4.2. *A função $f(t)$ e sua derivada possuem as seguintes propriedades:*

- (1) f é unicamente definida, de classe C^2 e invertível;
- (2) $|f'(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (3) $|f(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (4) $f(t)/t \rightarrow 1$ quando $t \rightarrow 0$;
- (5) $|f(t)| \leq 2^{1/2p}|t|^{1/2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (6) $f(t)/2 \leq tf'(t) \leq f(t)$ para todo $t \geq 0$;

(7) $f(t)/\sqrt{t} \rightarrow a > 0$ quando $t \rightarrow +\infty$;

(8) existe uma constante positiva C tal que

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & |t| \leq 1 \\ C|t|^{1/2}, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Prova. A fim de provarmos (1), é suficiente observarmos que a função

$$y(s) \doteq \frac{1}{(1 + 2^{p-1}|s|^p)^{1/p}}$$

tem derivada limitada. O item (2) segue da definição de f . A desigualdade (3) é uma consequência de (2) e do fato que $f(t)$ é uma função ímpar e côncava para $t > 0$. A seguir, provamos (4). Como consequência do teorema do valor médio para integrais, temos que

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{(1 + 2^{p-1}|f(s)|^p)^{1/p}} ds = t \frac{1}{(1 + 2^{p-1}|f(\xi)|^p)^{1/p}}$$

onde $\xi \in (0, t)$. Desde que $f(0) = 0$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + 2^{p-1}|f(\xi)|^p)^{1/p}} = 1.$$

Para mostrarmos o item (5), integramos $f'(t)(1 + 2^{p-1}|f(t)|^p)^{1/p} = 1$ e obtemos

$$\int_0^t f'(s)(1 + 2^{p-1}|f(s)|^p)^{1/p} ds = t$$

para $t > 0$. Usando a mudança de variável $y = f(s)$, segue que

$$t = \int_0^{f(t)} (1 + 2^{p-1}y^p)^{1/p} dy \geq 2^{(p-1)/p} \frac{(f(t))^2}{2} = 2^{-1/p} (f(t))^2$$

e, assim, (5) está provado para $t \geq 0$. Para $t < 0$, usamos o fato que f é ímpar.

A primeira desigualdade em (6) é equivalente a $2t \geq (1 + 2^{p-1}(f(t))^p)^{1/p} f(t)$. Para mostrá-la, estudamos a função $G : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$G(t) = 2t - (1 + 2^{p-1}(f(t))^p)^{1/p} f(t).$$

Desde que $G(0) = 0$ e usando a definição de f , obtemos para todo $t \geq 0$

$$G'(t) = 1 - \frac{2^{p-1}(f(t))^p}{1 + 2^{p-1}(f(t))^p} = \frac{1}{1 + 2^{p-1}(f(t))^p} = (f'(t))^p > 0,$$

e a primeira desigualdade está provada. A segunda é obtida de maneira análoga. Agora, pelo limite (4) segue que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)/\sqrt{t} = 0$ e a desigualdade (6) implica, para todo $t > 0$, que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{\sqrt{t}} \right) = \frac{2f'(t)t - f(t)}{2t\sqrt{t}} \geq 0.$$

Logo, a função $f(t)/\sqrt{t}$ é não-decrescente para $t > 0$ e isto, juntamente com a estimativa (5), mostra o item (7). O ponto (8) é uma consequência imediata dos limites (4) e (7). ■

Não é difícil mostrar que, sob as hipóteses (V_1) , (V_5) e $(H_0) - (H_2)$, o funcional $I : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ está bem definido e é de classe C^1 em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Ademais, sua derivada de Gateaux é dada por

$$\langle I'(v), w \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v)|^{p-2} f'(v) w \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v)) f'(v) w \, dx$$

para $v, w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Os pontos críticos de I correspondem exatamente as soluções fracas de (4.5). O próximo resultado relaciona as soluções fracas de (4.5) com as soluções fracas de (4.1). Chamamos a atenção que este fato não foi mostrado em nenhum trabalho que abordou a equação (1).

Proposição 4.3. (1) *se $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional I , então $u = f(v) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (4.1);*

(2) *Se v é uma solução clássica de (4.5) então $u = f(v)$ é uma solução clássica de (4.1).*

Prova. Para simplificar a notação vamos denotar $g(x, s) \doteq h(s) - V(x)|s|^{p-2}s$. Primeiramente, provemos o item (1). Temos que $|u|^p = |f(v)|^p \leq |v|^p$ e $|\nabla u|^p = |f'(v)|^p |\nabla v|^p \leq |\nabla v|^p$. Consequentemente, $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como v é um ponto crítico de I , temos para todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, f(v)) f'(v) w \, dx. \quad (4.6)$$

Desde que $(f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$, segue que

$$(f^{-1})'(t) = (1 + 2^{p-1} |f(f^{-1}(t))|^p)^{1/p} = (1 + 2^{p-1} |t|^p)^{1/p} \quad (4.7)$$

o que implica que

$$\nabla v = (f^{-1})'(u) \nabla u = (1 + 2^{p-1} |u|^p)^{1/p} \nabla u. \quad (4.8)$$

Para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$f'(v)^{-1}\varphi = (1 + 2^{p-1}|u|^p)^{1/p}\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$\begin{aligned} \nabla(f'(v)^{-1}\varphi) &= 2^{p-1}(1 + 2^{p-1}|u|^p)^{(1-p)/p}|u|^{p-2}u\varphi\nabla u \\ &\quad + (1 + 2^{p-1}|u|^p)^{1/p}\nabla\varphi \end{aligned} \quad (4.9)$$

Tomando $w = f'(v)^{-1}\varphi$ em (4.6) e usando (4.8) – (4.9), obtemos (4.2) o que mostra que $u = f(v)$ é uma solução fraca de (4.1).

A seguir, provemos o ítem (2). Temos que

$$\begin{aligned} \Delta_p v &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla v|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|(f^{-1})'(u)\nabla u|^{p-2} (f^{-1})'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \end{aligned}$$

e derivando

$$\begin{aligned} \Delta_p v &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) |(f^{-1})'(u)|^{p-2} (f^{-1})'(u) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (|(f^{-1})'(u)|^{p-2} (f^{-1})'(u)) |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Usando (4.7), obtemos

$$\Delta_p v = (1 + 2^{p-1}|u|^p)^{(p-1)/p} \Delta_p u + (p-1)2^{p-1}|u|^{p-2}u \left((1 + 2^{p-1}|u|^p)^{-1/p} |\nabla u|^p \right).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} (1 + 2^{p-1}|u|^p)^{(p-1)/p} \Delta_p u + (p-1)2^{p-1}|u|^{p-2}u \left((1 + 2^{p-1}|u|^p)^{-1/p} |\nabla u|^p \right) \\ = -\frac{1}{(1 + 2^{p-1}|u|^p)^{1/p}} g(x, u), \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_p u + 2^{p-1}|u|^p \Delta_p u + (p-1)2^{p-1}|u|^{p-2}u |\nabla u|^p = -g(x, u)$$

Finalmente, observando que

$$2^{p-1}|u|^p \Delta_p u + (p-1)2^{p-1}|u|^{p-2}u |\nabla u|^p = \Delta_p(u^2)u$$

de onde segue que

$$-\Delta_p u - \Delta_p(u^2)u = g(x, u).$$

■

Neste momento, fica claro que para obtermos uma solução fraca de (4.1), é suficiente obtermos uma solução fraca de (4.5) em $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$, ou equivalentemente, obtermos um ponto crítico do funcional I em $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

4.2 O problema auxiliar

Nesta seção, a fim de provarmos o resultado principal deste capítulo, usamos alguns resultados devidos a do Ó - Medeiros [35] sobre equações da forma

$$-\Delta_p v = k(v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad (4.10)$$

cujo funcional natural associado $\mathcal{F} : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\mathcal{F}(v) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(v) \, dx,$$

em que $K(s) \doteq \int_0^s k(t)dt$. Sob as hipóteses sobre a função $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que exibimos a seguir, o funcional $\mathcal{F}$ está bem definido e é de classe C^1 . Consideramos as seguintes condições sobre a não-linearidade $k(s)$:

(k_0) $k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e é ímpar;

(k_1) Quando $1 < p < N$, assumimos que

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{k(s)}{s^{p^*-1}} = 0;$$

quando $p = N$, assumimos que para qualquer $\alpha > 0$, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que para todo $|s| \geq \delta > 0$

$$|k(s)| \leq C_\alpha [\exp(\alpha|s|^{N/(N-1)}) - S_{N-2}(\alpha_0, s)],$$

em que

$$S_{N-2}(\alpha_0, s) = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\alpha_0^k}{k!} |s|^{kN/N-1};$$

(k_2) Quando $1 < p < N$, suponhamos que

$$-\infty < \liminf_{s \rightarrow 0^+} \frac{k(s)}{s^{p-1}} \leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} \frac{k(s)}{s^{p-1}} = -\nu < 0$$

e para $p = N$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k(s)}{|s|^{N-1}} = -\nu < 0;$$

(k_3) Existe $\zeta > 0$ tal que $K(\zeta) > 0$.

Seja

$$m \doteq \inf\{\mathcal{F}(v) : v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \text{ é uma solução de (4.10)}\}. \quad (4.11)$$

Uma solução v de (4.10) é dita de **energia mínima** (ou solução do tipo “**ground state**”) se atinge o ínfimo m , isto é, $\mathcal{F}(v) = m$. Portanto, se w é um mínimo de (4.11) e v é qualquer solução não-trivial de (4.10) então $\mathcal{F}(w) \leq \mathcal{F}(v)$.

Os seguintes resultados são encontrados em [35] (Teoremas 1.4, 1.6 e 1.8):

Teorema 4.4. *Seja $1 < p \leq N$. Sob as hipóteses $(k_0) - (k_3)$, o problema (4.10) tem uma solução de energia mínima positiva.*

Teorema 4.5. *Seja $1 < p \leq N$ e suponha que $(k_0) - (k_2)$ valem. Então, pondo*

$$\Lambda = \{\gamma \in C([0, 1], W^{1,p}(\mathbb{R}^N)); \gamma(0) = 0 \text{ e } \mathcal{F}(\gamma(1)) < 0\} \text{ e } c \doteq \inf_{\gamma \in \Lambda} \max_{0 \leq t \leq 1} \mathcal{F}(\gamma(t)),$$

temos que $\Lambda \neq \emptyset$ e $c = m$. Além disso, para cada solução de energia mínima w de (4.10), existe um caminho $\gamma \in \Lambda$ tal que $w \in \gamma([0, 1])$ e

$$\max_{t \in [0, 1]} \mathcal{F}(\gamma(t)) = \mathcal{F}(w).$$

Observação 4.6. *Em [35], também é provado que, sob $(k_0) - (k_2)$, existem $\alpha > 0$, $\delta > 0$ tais que*

$$\mathcal{F}(v) \geq \alpha \|v\|_{1,p}^p \text{ se } \|v\|_{1,p} \leq \delta.$$

4.3 Prova do Teorema 4.1

Para provarmos o Teorema 4.1, primeiro mostramos que o funcional I possui a geometria do Passo da Montanha. Para encontrarmos um ponto crítico não-trivial, as principais dificuldades que devemos vencer são a possível não-limitação das seqüências de Palais-Smale e a perda de compacidade.

4.3.1 Geometria do Passo da Montanha

Desde que estamos interessados em soluções positivas, definamos $h(s) = 0$ para $s < 0$. A seguir, mostramos que I tem a geometria do Passo da Montanha.

Lema 4.7. *Sob as hipóteses (V_1) , (V_5) e $(H_0) - (H_1)$, o funcional I possui a geometria do Passo da Montanha.*

Prova. Denotemos por

$$J_0(v) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V_0 |f(v)|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v)) \, dx$$

e

$$J_\infty(v) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty |f(v)|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v)) \, dx$$

os funcionais energia associados as equações $-\Delta_p v = g_0(v)$ e $-\Delta_p v = g_\infty(v)$, em que

$$g_0(v) \doteq f'(v)[h(f(v)) - V_0 |f(v)|^{p-2} f(v)]$$

e

$$g_\infty(v) \doteq f'(v)[h(f(v)) - V_\infty |f(v)|^{p-2} f(v)].$$

Note que $J_0(v) \leq I(v) \leq J_\infty(v)$ para todo $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Não é difícil ver que a não-linearidade g_0 satisfaz as hipóteses $(k_0) - (k_2)$. Assim, pela Observação 4.6, deduzimos que existem $\alpha_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que

$$I(v) \geq J_0(v) \geq \alpha_0 \|v\|_{1,p}^p \quad \text{se} \quad \|v\|_{1,p} \leq \delta_0, \quad (4.12)$$

o que mostra que a origem é um mínimo local estrito para I . Além disso, desde que g_∞ também satisfaz $(k_0) - (k_2)$, aplicando o Teorema 4.5 ao funcional J_∞ , temos que existe

$e \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com $\|e\|_{1,p} > \delta_0$ tal que $J_\infty(e) < 0$ o que implica que $I(e) < 0$. Assim, $\Gamma \neq \emptyset$ em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], W^{1,p}(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } I(\gamma(1)) < 0\} \quad (4.13)$$

e a geometria do Passo da Montanha para I está provada. $\blacksquare$

Observação 4.8. *Pela condição (H_2) , existe $C > 0$ tal que $H(s) \geq Cs^\theta$ para $s \geq 1$. Em particular, obtemos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} H(s)/s^p = +\infty$. Logo, existe $\zeta > 0$ tal que $G_0(\zeta) > 0$ e $G_\infty(\zeta) > 0$ em que*

$$\begin{aligned} G_\infty(s) &= \int_0^s g_\infty(t) dt = H(f(s)) - \frac{V_\infty}{p} |f(s)|^p; \\ G_0(s) &= \int_0^s g_0(t) dt = H(f(s)) - \frac{V_0}{p} |f(s)|^p. \end{aligned}$$

Portanto g_0 e g_∞ também satisfazem (k_3) . Em virtude do Teorema 4.4, as equações

$$-\Delta_p v = g_0(v) \quad \text{e} \quad -\Delta_p v = g_\infty(v) \quad \text{em } \mathbb{R}^N$$

têm soluções de energia mínima em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que são positivas.

4.3.2 Seqüências de Cerami

Relembremos que uma seqüência (v_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é chamada de *Cerami* para I no nível c se

$$I(v_n) \rightarrow c \quad \text{e} \quad \|I'(v_n)\|(1 + \|v_n\|_{1,p}) \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Temos, então, o seguinte lema que dá a limitação das seqüências de Cerami:

Lema 4.9. *Assuma que (V_1) , (V_5) e $(H_0) - (H_1)$ valem. Então toda seqüência de Cerami para I no nível $c > 0$ é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Prova. Primeiramente, afirmamos que se uma seqüência (v_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v_n)|^p dx \leq C \quad (4.14)$$

para alguma constante $C > 0$, então ela é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, basta provarmos que $\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx$ é limitada. Escrevamos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p dx = \int_{\{|v_n| \leq 1\}} |v_n|^p dx + \int_{\{|v_n| > 1\}} |v_n|^p dx.$$

Por (8) do Lema 4.2 e Observação 4.8, existe $C > 0$ tal que $H(f(s)) \geq Cs^p$ para todo $s \geq 1$. Isto implica que

$$\int_{\{|v_n|>1\}} |v_n|^p \, dx \leq \frac{1}{C} \int_{\{|v_n|>1\}} H(f(v_n)) \, dx \leq \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) \, dx.$$

Devido o comportamento de f no zero, existe também uma constante $C > 0$ tal que $|f(s)| \geq C|s|$ para todo $s \in [-1, 1]$. Portanto,

$$\int_{\{|v_n|\leq 1\}} |v_n|^p \, dx \leq \frac{1}{C^p} \int_{\{|v_n|\leq 1\}} |f(v_n)|^p \, dx \leq \frac{1}{C^p V_0} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v_n)|^p \, dx.$$

Estas estimativas provam que (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Agora, seja (v_n) em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma seqüência de Cerami arbitrária para I no nível $c > 0$.

Temos que

$$\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v_n)|^p \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) \, dx = c + o_n(1) \quad (4.15)$$

e para todo $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle I'(v_n), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{|f(v_n)|^{p-2} f(v_n) \varphi}{(1 + 2^{p-1} |f(v_n)|^p)^{1/p}} \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h(f(v_n)) \varphi}{(1 + 2^{p-1} |f(v_n)|^p)^{1/p}} \, dx \end{aligned} \quad (4.16)$$

Considerando a função $\varphi_n(x) \doteq (1 + 2^{p-1} |f(v_n(x))|^p)^{1/p} f(v_n(x))$ e usando (3) e (6) do Lema 4.2, obtemos que $|\varphi_n| \leq 2|v_n|$ e

$$|\nabla \varphi_n| = \left(1 + \frac{2^{p-1} |f(v_n)|^p}{1 + 2^{p-1} |f(v_n)|^p} \right) |\nabla v_n| \leq 2|\nabla v_n|.$$

Assim, $\|\varphi_n\|_{1,p} \leq 2\|v_n\|_{1,p}$. Tomando $\varphi = \varphi_n$ em (4.16) e como (v_n) é uma seqüência de Cerami, concluímos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \frac{2^{p-1} |f(v_n)|^p}{1 + 2^{p-1} |f(v_n)|^p} \right) |\nabla v_n|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v_n)|^p \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n)) f(v_n) \, dx = \langle I'(v_n), \varphi_n \rangle = o_n(1). \end{aligned} \quad (4.17)$$

De (4.15) e (4.17), temos que

$$\begin{aligned} I(v_n) - \frac{1}{\theta} \langle I'(v_n), \varphi_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{2^{p-1} |f(v_n)|^p}{1 + 2^{p-1} |f(v_n)|^p} \right) \right] |\nabla v_n|^p \, dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v_n)|^p \, dx \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^N} [h(f(v_n)) f(v_n) - \theta H(f(v_n))] \, dx \end{aligned}$$

e em virtude de (H_2) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{2^{p-1}|f(v_n)|^p}{1 + 2^{p-1}|f(v_n)|^p} \right) \right] |\nabla v_n|^p \, dx + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n)|^p \, dx \leq c + o_n(1). \quad (4.18)$$

Se $\theta > 2p$, obtemos

$$\left(\frac{\theta - 2p}{p\theta} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n)|^p \, dx \leq c + o_n(1)$$

o que mostra que (4.14) vale e assim (v_n) é limitada. Agora, se $\theta = 2p$, deduzimos de (4.18) que

$$\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla v_n|^p}{1 + 2^{p-1}|f(v_n)|^p} \, dx + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n)|^p \, dx \leq c + o_n(1). \quad (4.19)$$

Denotando $u_n = f(v_n)$, temos que $|\nabla v_n|^p = (1 + 2^{p-1}|f(v_n)|^p)|\nabla u_n|^p$ e (4.19) implica que

$$\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p \, dx + \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u_n|^p \, dx \leq c + o_n(1). \quad (4.20)$$

Por (4.20), segue que (u_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Usando as hipóteses $(H_0) - (H_1)$, obtemos

$$H(s) \leq |s|^p + C|s|^{r+1} \quad (4.21)$$

e pela imersão de Sobolev $\int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} H(u_n) \, dx$ é limitada. Aqui estamos supondo que a condição **(b)** do Teorema 4.1 vale. Logo, usando (4.15) obtemos (4.14). Assim, (v_n) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e isto conclui a prova. ■

Desde que I possui a geometria do Passo da Montanha, sabemos (veja, por exemplo, [28] e [40]) que existe uma seqüência de Cerami para I no nível

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} I(\gamma(t)) > 0,$$

onde Γ foi definido em (4.13). Pelo Lema 4.9, a seqüência (v_n) é limitada. Logo, podemos assumir, a menos de subsequência, que $v_n \rightharpoonup v$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Afirmamos que $I'(v) = 0$. Com efeito, pelo fato de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ser denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, basta mostrarmos que $\langle I'(v), \psi \rangle = 0$

para todo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Observe que

$$\begin{aligned} & \langle I'(v_n), \psi \rangle - \langle I'(v), \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n - |\nabla v|^{p-2} \nabla v) \nabla \psi \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|f(v_n)|^{p-2} f(v_n)}{(1 + 2^{p-1} |f(v_n)|^p)^{1/p}} - \frac{|f(v)|^{p-2} f(v)}{(1 + 2^{p-1} |f(v)|^p)^{1/p}} \right) V(x) \psi \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{h(f(v))}{(1 + 2^{p-1} |f(v)|^p)^{1/p}} - \frac{h(f(v_n))}{(1 + 2^{p-1} |f(v_n)|^p)^{1/p}} \right) \psi \, dx. \end{aligned}$$

Usando que $v_n \rightarrow v$ em $L_{loc}^q(\mathbb{R}^N)$ para $q \in [1, p^*)$ se $1 < p < N$ e $q \geq 1$ se $p = N$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e $(H_0) - (H_1)$, segue que

$$\langle I'(v_n), \psi \rangle - \langle I'(v), \psi \rangle \rightarrow 0.$$

Desde que $I'(v_n) \rightarrow 0$, concluímos que $I'(v) = 0$. Agora, mostremos que $v \neq 0$. Suponhamos, por contradição, que $v = 0$. Observe que a sequência (v_n) é também uma sequência de Cerami para o funcional J_∞ , definido anteriormente. De fato, usando que $V(x) \rightarrow V_\infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$, $v_n \rightarrow 0$ em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ e (3) do Lema 4.2, temos

$$J_\infty(v_n) - I(v_n) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} (V_\infty - V(x)) |f(v_n)|^p \, dx \rightarrow 0.$$

Além disso, pelos mesmos argumentos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \|J'_\infty(v_n) - I'(v_n)\| &= \sup_{\|u\| \leq 1} |\langle J'_\infty(v_n), u \rangle - \langle I'(v_n), u \rangle| \\ &\leq \sup_{\|u\| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^{p-1} |V_\infty - V(x)| |u| \, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(v_n)|^p |V_\infty - V(x)|^{p/(p-1)} \, dx \right)^{(p-1)/p} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, o que implica que

$$\|J'_\infty(v_n)\| (1 + \|v_n\|_{1,p}) \leq \|J'_\infty(v_n) - I'(v_n)\| (1 + \|v_n\|_{1,p}) + \|I'(v_n)\| (1 + \|v_n\|_{1,p}) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. A seguir, provemos a seguinte afirmação:

Afirmção 1. Existem $\alpha > 0$, $R > 0$ e (y_n) em $\mathbb{R}^N$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^p \, dx \geq \alpha.$$

Verificação da Afirmação 1. Suponhamos que a afirmação não seja verdadeira. Portanto, vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} |v_n|^p \, dx = 0 \quad \text{para todo } R > 0.$$

Pelo Lema I.1 em [54], temos que $v_n \rightarrow 0$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $q \in (p, p^*)$ se $1 < p < N$ e $q > p$ se $p = N$. Usando $(H_0) - (H_1)$, para cada $\epsilon > 0$ existe $C_\epsilon > 0$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$h(f(s))f(s) \leq \epsilon |f(s)|^p + C_\epsilon |f(s)|^{r+1}.$$

Desta estimativa e usando (3) e (5) do Lema 4.2, para $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(f(v))f(v) \, dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{r+1} \, dx \quad (4.22)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(f(v))f(v) \, dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v|^p \, dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{(r+1)/2} \, dx. \quad (4.23)$$

Usamos a desigualdade (4.22) quando $\theta = 2p$ e (4.23) quando $\theta > 2p$. Vamos considerar somente o caso $\theta > 2p$, pois o tratamento para o outro é similar. Por (6) do Lema 4.2 e (4.23), vemos que para todo $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n))f'(v_n)v_n \, dx &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n))f(v_n) \, dx \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p \, dx + C_\epsilon \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{(r+1)/2} \, dx \right) \\ &\leq \epsilon \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p \, dx \end{aligned}$$

pois $(r+1)/2 \in (p, p^*)$ se $1 < p < N$ ou $(r+1)/2 > p$ se $p = N$. Então, obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n))f(v_n) \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v_n))f'(v_n)v_n \, dx = 0. \quad (4.24)$$

Desde que $\langle I'(v_n), v_n \rangle \rightarrow 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n)|^{p-2}f(v_n)f'(v_n)v_n \, dx \rightarrow 0.$$

Usando novamente (6) do Lema 4.2, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|f(v_n)|^p \, dx \rightarrow 0.$$

Pelo primeiro limite em (4.24) e (H_2) , concluímos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} H(f(v_n)) \, dx = 0$. Isto implica que $I(v_n) \rightarrow 0$ o que contradiz o fato que $I(v_n) \rightarrow c > 0$. Portanto, a afirmação está

provada.

Agora, seja $\tilde{v}_n$ definida por $\tilde{v}_n(x) = v_n(x + y_n)$. Como (v_n) é uma seqüência de Cerami para J_∞ , não é difícil ver que $\tilde{v}_n$ é também uma seqüência de Cerami para J_∞ . Procedendo como no caso de (v_n) , a menos de subsequência, obtemos $\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v}$ com $J'_\infty(\tilde{v}) = 0$. Como $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v}$ em $L^p(B_R)$, pela Afirmação 1 concluímos que

$$\int_{B_R} |\tilde{v}|^p \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R} |\tilde{v}_n|^p \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_R(y_n)} |v_n|^p \, dx \geq \alpha$$

mostrando que $\tilde{v} \neq 0$. Por (6) do Lema 4.2, para todo n obtemos

$$f^2(\tilde{v}_n) - f(\tilde{v}_n)f'(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n \geq 0$$

o que mostra que

$$|f(\tilde{v}_n)|^p - |f(\tilde{v}_n)|^{p-2}f(\tilde{v}_n)f'(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n \geq 0.$$

Além disso, da condição (H_2) , concluímos para todo n que

$$\frac{1}{p}h(f(\tilde{v}_n))f'(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n - H(f(\tilde{v}_n)) \geq \frac{1}{2p}h(f(\tilde{v}_n))f(\tilde{v}_n) - H(f(\tilde{v}_n)) \geq 0.$$

Assim, usando o Lema de Fatou e desde que $(\tilde{v}_n)$ é uma seqüência de Cerami para J_∞ , obtemos

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[J_\infty(\tilde{v}_n) - \frac{1}{p} \langle J'_\infty(\tilde{v}_n), \tilde{v}_n \rangle \right] \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty [|f(\tilde{v}_n)|^p - |f(\tilde{v}_n)|^{p-2}f(\tilde{v}_n)f'(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n] \, dx \\ &\quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p}h(f(\tilde{v}_n))f'(\tilde{v}_n)\tilde{v}_n - H(f(\tilde{v}_n)) \right] \, dx \\ &\geq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} V_\infty [|f(\tilde{v})|^p - |f(\tilde{v})|^{p-2}f(\tilde{v})f'(\tilde{v})\tilde{v}] \, dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{1}{p}h(f(\tilde{v}))f'(\tilde{v})\tilde{v} - H(f(\tilde{v})) \right] \, dx \\ &= J_\infty(\tilde{v}) - \frac{1}{p} \langle J'_\infty(\tilde{v}), \tilde{v} \rangle = J_\infty(\tilde{v}). \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{v} \neq 0$ é um ponto crítico de J_∞ satisfazendo $J_\infty(\tilde{v}) \leq c$. Daí, deduzimos que o nível de energia mínima m_∞ para J_∞ satisfaz $m_\infty \leq c$. Denotemos por $\tilde{w}$ uma solução de energia mínima da equação $-\Delta_p v = g_\infty(v)$ (a existência desta solução é assegurada pela

Observação 4.8). Aplicando o Teorema 4.5 para o funcional J_∞ , podemos encontrar um caminho $\gamma \in C([0, 1], W^{1,p}(\mathbb{R}^N))$ tal que $\gamma(0) = 0$, $J_\infty(\gamma(1)) < 0$, $\tilde{w} \in \gamma([0, 1])$ e

$$\max_{t \in [0,1]} J_\infty(\gamma(t)) = J_\infty(\tilde{w}).$$

Podemos supor que $V \not\equiv V_\infty$ em (V_5) , caso contrário, não haveria nada a provar. Assim

$$I(\gamma(t)) < J_\infty(\gamma(t)), \quad \forall t \in (0, 1]$$

e isto implica que

$$c \leq \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) < \max_{t \in [0,1]} J_\infty(\gamma(t)) = J_\infty(\tilde{w}) = m_\infty \leq c$$

o que é uma contradição. Portanto, v é um ponto crítico não-trivial de I . Logo, para todo $w \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla w \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |f(v)|^{p-2} f(v) f'(v) w \, dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} h(f(v)) f'(v) w \, dx. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Tomando $w = -v^-$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) \frac{|f(v)|^{p-2} f(v) (-v^-)}{(1 + 2^{p-1} |f(v)|^p)^{1/p}} \, dx \\ = \int_{\{v \geq 0\}} h(f(v)) f'(v) (-v^-) \, dx + \int_{\{v < 0\}} h(f(v)) f'(v) (-v^-) \, dx = 0. \end{aligned}$$

Desde que $f(v)(-v^-) \geq 0$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^-|^2 \, dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(z) |f(v)|^{p-2} f(v) (-v^-)}{(1 + 2^{p-1} |f(v)|^p)^{1/p}} \, dx = 0$$

mostrando que $v^- = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e, portanto, $v = v^+ \geq 0$.

4.3.3 Decaimento a zero no infinito

Vamos assumir que $1 < p < N$. Para cada $k > 0$, definamos

$$v_k = \begin{cases} v & \text{se } v \leq k \\ k & \text{se } v \geq k, \end{cases}$$

$$\vartheta_k = v_k^{p(\beta-1)}v \quad \text{e} \quad w_k = vv_k^{\beta-1}$$

com $\beta > 1$ a ser determinado mais adiante. Tomando ϑ_k como uma função teste em (4.25) e usando que

$$h(f(v)) \leq \frac{V_0}{2}f(v) + Cf(v)^r$$

e a condição (V_1) , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \, dx + p(\beta-1) \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{p(\beta-1)-1} v \nabla v_k \nabla v \, dx \\ \leq C \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^r f'(v) v v_k^{p(\beta-1)} \, dx. \end{aligned}$$

Em virtude da segunda parcela no lado esquerdo da desigualdade anterior ser não-negativa e usando (5) e (6) do Lema 4.2 temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_k^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} v^{(r+1)/2} v_k^{p(\beta-1)} \, dx = C \int_{\mathbb{R}^N} v^{\tilde{r}-p} w_k^p \, dx \quad (4.26)$$

em que $\tilde{r} \doteq (r+1)/2$. Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg e (4.26), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_k^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_k|^p \, dx \\ &\leq C_2 \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \, dx + C_3(\beta-1)^p \int_{\mathbb{R}^N} v^p v_k^{p(\beta-2)} |\nabla v_k|^p \, dx \\ &\leq C_4 \beta^p \int_{\mathbb{R}^N} v_k^{p(\beta-1)} |\nabla v|^p \, dx \\ &\leq C_5 \beta^p \int_{\mathbb{R}^N} v^{\tilde{r}-p} w_k^p \, dx, \end{aligned}$$

onde usamos que $v_k \leq v$, $1 \leq \beta^p$ e $(\beta-1)^p \leq \beta^p$. Em vista da desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} w_k^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} \leq \beta^p C_5 \left(\int_{\mathbb{R}^N} v^{p^*} \, dx \right)^{(\tilde{r}-p)/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} w_k^{pp^*/(p^*-\tilde{r}+p)} \, dx \right)^{(p^*-\tilde{r}+p)/p^*}.$$

Desde que $|w_k| \leq |v|^\beta$, pela continuidade da imersão $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |vv_k^{\beta-1}|^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} \leq \beta^p C_6 \|v\|_{1,p}^{\tilde{r}-p} \left(\int_{\mathbb{R}^N} v^{\beta pp^*/(p^*-\tilde{r}+p)} \, dx \right)^{(p^*-\tilde{r}+p)/p^*}.$$

Escolhendo $\beta = 1 + (p^* - \tilde{r})/p$ temos $\beta pp^*/(p^* - \tilde{r} + p) = p^*$. Assim,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |vv_k^{\beta-1}|^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} \leq \beta^p C_6 \|v\|_{1,p}^{\tilde{r}-p} \|v\|_{\beta\alpha^*}^{p\beta},$$

em que $\alpha^* = pp^*/(p^* - \tilde{r} + p)$. Pelo Lema de Fatou, segue que

$$\|v\|_{\beta p^*} \leq (\beta^p C_6 \|v\|^{\tilde{r}-p})^{1/p\beta} \|v\|_{\beta\alpha^*}. \quad (4.27)$$

Para cada $m = 0, 1, 2, \dots$, definamos $\beta_{m+1}\alpha^* \doteq p^*\beta_m$ com $\beta_0 \doteq \beta$. Usando o argumento anterior para β_1 , por (4.27) temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{\beta_1 p^*} &\leq (\beta_1^p C_6 \|u\|_{1,p}^{\tilde{r}-p})^{1/p\beta_1} \|u\|_{\beta_1 \alpha^*} \\ &\leq (\beta_1^p C_6 \|u\|_{1,p}^{\tilde{r}-p})^{1/p\beta_1} (\beta^p C_6 \|u\|_{1,p}^{r-p})^{1/p\beta} \|u\|_{\beta\alpha^*} \\ &\leq (C_6 \|u\|_{1,p}^{\tilde{r}-p})^{1/p\beta+1/p\beta_1} (\beta)^{1/\beta} (\beta_1)^{1/\beta_1} \|u\|_{p^*}. \end{aligned}$$

Observando que $\beta_m = \chi^m \beta$, em que $\chi = p^*/\alpha^*$, por iteração obtemos

$$\|u\|_{\beta_m p^*} \leq (C_6 \|u\|_{1,p}^{\tilde{r}-p})^{1/p\beta \sum_{i=0}^m \chi^{-i}} \beta^{1/\beta \sum_{i=0}^m \chi^{-i}} \chi^{1/\beta \sum_{i=0}^m i\chi^{-i}} \|u\|_{p^*}.$$

Como $\chi > 1$ e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{p\beta} \sum_{i=0}^m \chi^{-i} = \frac{1}{p^* - \tilde{r}},$$

podemos tomar o limite quando $m \rightarrow \infty$ para concluir que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|v\|_\infty \leq C_7 \|v\|_{1,p}^{(p^*-p)/(p^*-\tilde{r})}.$$

No caso $p = N$, usando o Teorema 1 em [71], podemos concluir que v é localmente limitada em $\mathbb{R}^N$. Assim, se $1 < p < N$ ou $p = N$, como uma consequência de um resultado devido a Tolksdorff [77], obtemos que $v \in C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in (0, 1)$. Além disso, por uma desigualdade do tipo Harnack (veja [79, Teorema 1]) e um argumento de conexidade, devemos ter $v > 0$ em $\mathbb{R}^N$.

A seguir, para $1 < p < N$, provemos que $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Desde que $v \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, usando (V_1) , propriedade (6) do Lema 4.2 e (4.25), podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^N} v \varphi \, dx$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$. Logo, pelo Teorema 1.3 em [79], temos para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\sup_{y \in B_1(x)} v(y) \leq C \|v\|_{L^p(B_2(x))}.$$

Em particular, $v(x) \leq C\|v\|_{L^p(B_2(x))}$ e desde que

$$\|v\|_{L^p(B_2(x))} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty$$

concluimos que $v(x) \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Do ítem (1) da Proposição 4.3, obtemos que $u = f(v)$ é uma solução fraca positiva de (4.1) em $C_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e como $u = f(v) \leq v$, segue que

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

A prova do Teorema 4.1 está agora completa.

CAPÍTULO 5

Multiplicidade de soluções para uma equação quase-linear com termos côncavos e convexos em $\mathbb{R}$

Este capítulo trata uma equação do tipo (4.1) no caso unidimensional e quando a não-linearidade $h(s)$ possui termos côncavos e convexos. Mais precisamente, consideramos o seguinte problema:

$$L_p u = \lambda |u|^{q-2} u + \mu |u|^{r-2} u, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad (5.1)$$

em que

$$L_p u \doteq -(|u'|^{p-2} u')' + V(x) |u|^{p-2} u - (|(u^2)'|^{p-2} (u^2)')' u,$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $1 < q < p$ e $r > 2p$. Aqui, requeremos que o potencial $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seja localmente limitado, não-negativo e cumpra as seguintes condições:

(U₁) Para algum $0 < R_0 < \frac{1}{2p}$, $V(x) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > R_0$;

(U₂) $\int_{|x| \geq R_0} V(x)^{-1/(p-1)} dx < \infty$.

Aqui, trabalhamos com o seguinte espaço de funções:

$$X = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} V(x) |u|^p dx < \infty \right\}$$

o qual é um espaço de Banach separável e reflexivo quando munido da norma

$$\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}} |u'|^p \, dx + \int_{\mathbb{R}} V(x) |u|^p \, dx.$$

Note que (5.1) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) = \frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{2^{p-1}}{p} \int_{\mathbb{R}} |u'|^p |u|^p \, dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}} |u|^q \, dx - \frac{\mu}{r} \int_{\mathbb{R}} |u|^r \, dx.$$

Pelo resultado de imersão que obtemos mais adiante, veja Proposição 5.2, o funcional $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ está bem definido sobre o espaço de Banach X e, com isso, estudamos a existência de soluções de (5.1) como sendo os pontos críticos do funcional $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$. Nosso principal resultado neste capítulo é enunciado como segue:

Teorema 5.1. *Sob as hipóteses $(U_1) - (U_2)$ e supondo $1 < p < \infty$, $1 < q < p$ e $r > 2p$, temos que*

- (a) *para cada $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, a equação (5.1) tem uma seqüência de soluções (u_k) tal que $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u_k) \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.*
- (b) *para cada $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, a equação (5.1) tem uma seqüência de soluções (v_k) tal que $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(v_k) < 0$ e $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(v_k) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$;*

Depois dos resultados bem conhecidos de Ambrosetti-Brezis-Cerami [6], problemas envolvendo equações elípticas com não-linearidades do tipo côncava e convexa têm sido estudados por vários autores, veja, por exemplo [4], [10], [22], [29] para problemas semi-lineares e [5], [78] para problemas quase-lineares.

O estudo do problema (5.1) foi em parte motivado pelos trabalhos de Bartsch-Willem [10], Poppenberg-Schmitt-Wang [66] e Ambrosetti-Wang [7]. Equações do tipo (5.1) também foram abordadas em [3].

As características especiais desta classe de problemas, tratada neste capítulo, são que ela envolve o operador p -Laplaciano e o termo não-linear $(|(u^2)'|^{p-2}(u^2)')'u$, está definida em toda a reta real e envolve não-linearidades do tipo côncava e convexa. Aqui, adaptamos alguns argumentos desenvolvidos por Poppenberg-Schmitt-Wang [66].

5.1 Resultados preliminares

Aqui, estabelecemos algumas propriedades do espaço X e do funcional $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$. Pela condição (U_1) , segue que a imersão $X \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ é contínua. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}} |u'|^p dx + \int_{-R_0}^{R_0} |u|^p dx + \alpha^{-1} \int_{|x|>R_0} V(x)|u|^p dx \\ &\leq \max\{1, \alpha^{-1}\} \|u\|^p + 2R_0 \|u\|_{\infty}^p. \end{aligned}$$

Desde que $\|u\|_{\infty}^p \leq p \|u\|_{1,p}^p$, veja por exemplo Brezis [17], concluimos que

$$\|u\|_{1,p} \leq \left(\frac{\max\{1, \alpha^{-1}\}}{1 - 2pR_0} \right)^{1/p} \|u\|.$$

Temos o seguinte resultado de imersão:

Proposição 5.2. *Sob as hipóteses $(U_1) - (U_2)$, a imersão de X em $L^s(\mathbb{R})$ é contínua para $1 \leq s \leq \infty$ e compacta para $1 \leq s < \infty$.*

Prova. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R_0} |u| dx &\leq \left(\int_{|x| \geq R_0} V(x)|u|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{|x| \geq R_0} V(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{p/(p-1)} \\ &\leq C \|u\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|u\|_1 = \int_{-R_0}^{R_0} |u| dx + \int_{|x| > R_0} |u| dx \leq 2R_0 \|u\|_{\infty} + C \|u\| \leq C_1 \|u\|.$$

Desde que X está imerso continuamente em $L^{\infty}(\mathbb{R})$, podemos concluir por interpolação que a imersão de X em $L^s(\mathbb{R})$ é contínua para $1 \leq s \leq \infty$.

Seja (u_n) uma seqüência em X satisfazendo $\|u_n\| \leq C$. Logo, a menos de subsequência,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em } X.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $u_0 = 0$. Mostremos que $u_n \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R})$. Dado $\epsilon > 0$, para $R > 0$ suficientemente grande, obtemos

$$\int_{|x| \geq R} V(x)^{-1/(p-1)} dx < \left(\frac{\epsilon}{2C} \right)^{p/(p-1)}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq R} |u_n| dx &\leq \left(\int_{|x| \geq R} V(x) |u_n|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{|x| \geq R} V(x)^{-1/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} \\ &< \frac{\epsilon}{2C} \|u_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como a imersão $W^{1,p}(I_R) \hookrightarrow L^1(I_R)$ é compacta, existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$

$$\int_{-R}^R |u_n| dx < \frac{\epsilon}{2}.$$

Logo, para todo $n \geq n_0$

$$\|u_n\|_1 = \int_{-R}^R |u_n| dx + \int_{|x| \geq R} |u_n| dx < \epsilon$$

e isto implica que $u_n \rightarrow 0$ em $L^1(\mathbb{R})$. Desta convergência, se $1 < s < \infty$ obtemos

$$\|u_n\|_s^s = \int_{\mathbb{R}} |u_n|^{s-1} |u_n| dx \leq \|u_n\|_\infty^{s-1} \|u_n\|_1 \leq C \|u_n\|_1 \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

e, conseqüentemente,

$$u_n \rightarrow 0 \text{ em } L^s(\mathbb{R}) \text{ para } 1 \leq s < \infty$$

e a prova está completa. ■

Lema 5.3. *O funcional $\mathcal{F}_{\lambda,\mu} : X \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 em X e para $u, v \in X$*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}'_{\lambda,\mu}(u), v \rangle &= \int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-2} u' v' dx + \int_{\mathbb{R}} V(x) |u|^{p-2} u v dx + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |u|^p |u'|^{p-2} u' v' dx \\ &\quad + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |u'|^p |u|^{p-2} u v dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^{q-2} u v dx - \mu \int_{\mathbb{R}} |u|^{r-2} u v dx. \end{aligned}$$

Prova. Será suficiente mostrar que $\Phi(u) \doteq \int_{\mathbb{R}} |u'|^p |u|^p dx$ é de classe C^1 em X , pois, para as outras parcelas, a prova é padrão.

Existência da derivada de Gateaux: Sejam $u, v \in X$ e $0 \neq t \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\frac{\Phi(u + tv) - \Phi(u)}{t} = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} [|u' + tv'|^p (|u + tv|^p - |u|^p) + (|u' + tv'|^p - |u'|^p) |u|^p] dx. \quad (5.2)$$

Agora, para $x \in \mathbb{R}$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, existem $\lambda, \theta \in (0, 1)$ tais que

$$\begin{aligned} \frac{||u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p|}{|t|} &= p |u(x) + \lambda tv(x)|^{p-1} |v(x)| \\ &\leq p (|u(x)| + |v(x)|)^{p-1} |v(x)| \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{||u'(x) + tv'(x)|^p - |u'(x)|^p|}{|t|} &= p|u'(x) + \theta tv'(x)|^{p-1}|v'(x)| \\ &\leq p(|u'(x)| + |v'(x)|)^{p-1}|v'(x)|. \end{aligned}$$

Como $(|u| + |v|)^{p-1}|v|, |u|^p \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $(|u'| + |v'|)^p, (|u'| + |v'|)^{p-1}|v'| \in L^1(\mathbb{R})$, segue de (5.2) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\langle \Phi'(u), v \rangle = p \int_{\mathbb{R}} |u|^p |u'|^{p-2} u' v' dx + p \int_{\mathbb{R}} |u'|^p |u|^{p-2} u v dx.$$

Continuidade da derivada de Gateaux: Escolhamos uma sequência $u_n \rightarrow u$ em X e $v \in X$ com $\|v\| \leq 1$. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} |\langle \Phi'(u_n), v \rangle - \langle \Phi'(u), v \rangle| &\leq p \int_{\mathbb{R}} \left| |u_n|^p |u'_n|^{p-2} u'_n - |u|^p |u'|^{p-2} u' \right| |v| dx \\ &\quad + p \int_{\mathbb{R}} \left| |u'_n|^p |u_n|^{p-2} u_n - |u'|^p |u|^{p-2} u \right| |v| dx \\ &\leq p \left(\int_{\mathbb{R}} \left| |u_n|^p |u'_n|^{p-2} u'_n - |u|^p |u'|^{p-2} u' \right|^{p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p} \\ &\quad + pC \left(\int_{\mathbb{R}} \left| |u'_n|^p |u_n|^{p-2} u_n - |u'|^p |u|^{p-2} u \right|^{p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p}. \end{aligned}$$

Em virtude do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o lado direito tende a zero a 0 uniformemente para $\|v\| \leq 1$. Logo, $\Phi' : X \rightarrow X'$ é contínua. ■

Consideremos a condição abaixo:

(A₁) O grupo compacto G age isometricamente sobre o espaço de Banach $X = \overline{\bigoplus_{j=0}^{\infty} X_j}$, os espaços X_j são invariantes e existe um espaço de dimensão finita V tal que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $X_j \simeq V$ e a ação de G sobre V é admissível, isto é, toda aplicação contínua equivariante $\partial U \rightarrow V^{k-1}$, onde U é uma vizinhança aberta limitada equivariante de 0 em $V^k, k \geq 2$, tem um zero.

De agora em diante, usaremos as seguintes notações:

$$Y_k \doteq \bigoplus_{j=0}^k X_j, \quad Z_k \doteq \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} X_j}.$$

Para provar o item **(a)** do Teorema 5.1, usaremos o Teorema da Fonte de T. Bartsch [10] como dado em [80, Teorema 3.6]:

Lema 5.4 (Teorema da Fonte). *Sob a hipótese (A_1) , seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional invariante. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existem $\rho_k > r_k > 0$ tais que*

$$(A_2) \quad a_k \doteq \max_{u \in Y_k, \|u\|=\rho_k} I(u) \leq 0;$$

$$(A_3) \quad b_k \doteq \min_{u \in Z_k, \|u\|=r_k} I(u) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty;$$

$$(A_4) \quad I \text{ satisfaz a condição } (PS)_c \text{ para cada } c > 0,$$

então I tem uma seqüência não-limitada de valores críticos.

Para o item (b), aplicaremos uma versão dual do Teorema da Fonte, veja [10, Teorema 2] ou [80, teorema 3.18].

Lema 5.5 (Teorema da Fonte Dual). *Sob a hipótese (A_1) , seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional invariante. Além disso, suponha que I satisfaz as seguintes condições*

$$(B_1) \quad \text{para cada } k \geq k_0, \text{ existe } R_k > 0 \text{ tal que } I(u) \geq 0 \text{ para cada } u \in Z_k \text{ com } \|u\| = R_k;$$

$$(B_2) \quad b_k \doteq \inf_{u \in Z_k, \|u\| \leq R_k} I(u) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty;$$

$$(B_3) \quad \text{para cada } k \geq 1, \text{ existem } r_k \in (0, R_k) \text{ e } d_k < 0 \text{ tais que } I(u) \leq d_k \text{ para cada } u \in Y_k \text{ com } \|u\| = r_k;$$

$$(B_4) \quad \text{toda seqüência } (u_n) \subset Y_n \text{ com } I(u_n) < 0 \text{ limitada e } (I|_{Y_n})'(u_n) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tem uma subseqüência que converge a um ponto crítico de } I.$$

Então, para cada $k \geq k_0$, I tem um valor crítico $c_k \in [b_k, d_k]$ e $c_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$.

Observe que (B_2) e (B_3) implicam que $b_k \leq d_k < 0$.

5.2 A condição de Palais-Smale

Inicialmente, provemos que as seqüências de Palais-Smale do funcional $\mathcal{F}_{\lambda, \mu}$ são limitadas.

Lema 5.6. *Qualquer seqüência $(PS)_c$ em X , isto é, satisfazendo $\mathcal{F}_{\lambda, \mu}(u_n) \rightarrow c$ e $\mathcal{F}'_{\lambda, \mu}(u_n) \rightarrow 0$ é limitada.*

Prova. Temos, para n grande, que

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{r} \langle \mathcal{F}'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \rangle \leq \|u_n\| + c + 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u_n) - \frac{1}{r} \langle \mathcal{F}'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n \rangle &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|^p + 2^{p-1} \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{r} \right) \int_{\mathbb{R}} |u'_n|^p |u_n|^p \, dx \\ &\quad + \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}} |u_n|^q \, dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_n\| + c + 1 \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) \|u_n\|^p - C \|u_n\|^q,$$

e isto mostra que (u_n) é limitada, pois $r > 2p$ e $p > q$. ■

Lema 5.7. *O funcional $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Prova. Seja (u_n) em X satisfazendo $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow c$ e $\mathcal{F}'_{\lambda,\mu}(u_n) \rightarrow 0$. Mostraremos que (u_n) tem uma subsequência convergente. Pelo Lema 5.6, (u_n) é limitada. Assim, passando a uma subsequência se necessário, $u_n \rightharpoonup u$ em X e usando a Proposição 5.2, $u_n \rightarrow u$ em $L^q(\mathbb{R})$ e em $L^s(\mathbb{R})$. Portanto, a desigualdade de Hölder implica que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} |u_n|^{r-2} u_n (u_n - u) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Temos que

$$\begin{aligned} o_n(1) &= \langle \mathcal{F}'_{\lambda,\mu}(u_n), u_n - u \rangle + \lambda \int_{\mathbb{R}} |u_n|^{q-2} u_n (u_n - u) \, dx \\ &\quad + \mu \int_{\mathbb{R}} |u_n|^{r-2} u_n (u_n - u) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u'_n|^{p-2} u'_n (u'_n - u') \, dx + \int_{\mathbb{R}} V(x) |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) \, dx \\ &\quad + 2^{p-1} \left[\int_{\mathbb{R}} |u_n|^p |u'_n|^{p-2} u'_n (u'_n - u') \, dx + \int_{\mathbb{R}} |u'_n|^p |u_n|^{p-2} u_n (u_n - u) \, dx \right] \end{aligned}$$

e desde que $\int_{\mathbb{R}} |u'|^{p-2} u' (u'_n - u') \, dx = o_n(1)$ e $\int_{\mathbb{R}} V(x) |u|^{p-2} u (u_n - u) \, dx = o_n(1)$ quando

$n \rightarrow \infty$, a igualdade anterior pode ser reescrita como segue

$$\begin{aligned}
o_n(1) &= \int_{\mathbb{R}} (|u'_n|^{p-2}u'_n - |u'|^{p-2}u')(u'_n - u')dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)(u_n - u)dx \\
&+ 2^{p-1} \left[\underbrace{\int_{-R}^R |u_n|^p |u'_n|^{p-2}u'_n(u'_n - u')dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{|x|>R} |u_n|^p |u'_n|^{p-2}u'_n(u'_n - u')dx}_{I_2} \right] \\
&+ 2^{p-1} \left[\underbrace{\int_{-R}^R |u'_n|^p |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{|x|>R} |u'_n|^p |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)dx}_{I_4} \right].
\end{aligned}$$

Como $|u|^p, |u'|^p \in L^1(\mathbb{R})$, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{|x|>R} |u|^p dx < \epsilon^p \quad \text{e} \quad \int_{|x|>R} |u'|^p dx < \epsilon^p. \quad (5.4)$$

Pela convergência

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^p |u'|^{p-2}u'(u'_n - u') dx \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-R}^R (|u_n|^p |u'_n|^{p-2}u'_n - |u|^p |u'|^{p-2}u')(u'_n - u')dx + o_n(1) \\
&= \int_{-R}^R (|u_n|^p - |u|^p) |u'|^{p-2}u'(u'_n - u')dx \\
&+ \int_{-R}^R |u_n|^p (|u'_n|^{p-2}u'_n - |u'|^{p-2}u')(u'_n - u')dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y \rangle \geq \begin{cases} C_p |x - y|^p, & \text{se } p \geq 2 \\ C_p \frac{|x - y|^2}{(|x| + |y|)^{2-p}}, & \text{se } 1 < p < 2 \end{cases} \quad (5.5)$$

em que $x, y \in \mathbb{R}^N$, $C_p > 0$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno padrão em $\mathbb{R}^N$ (veja Simon [72]), a segunda parcela em I_1 é não-negativa e aplicando o teorema do Valor Médio ao integrando da primeira integral, obtemos

$$I_1 \geq \int_{-R}^R |\xi_n|^{p-2} \xi_n (u_n - u) |u'|^{p-2}u'(u'_n - u')dx + o_n(1),$$

em que

$$\min\{u_n, u\} \leq \xi_n \leq \max\{u_n, u\}.$$

Note que para todo n e para algum $C > 0$, $|\xi_n| \leq C$ quase sempre em $\mathbb{R}$ desde que (u_n) é limitada em $L^\infty(\mathbb{R})$. Observe que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-R}^R |\xi_n|^{p-2} \xi_n (u_n - u) |u'|^{p-2} u' (u'_n - u') dx \right| \\ & \leq \int_{-R}^R |\xi_n|^{p-1} |u_n - u| |u'|^{p-1} |u'_n - u'| dx \\ & \leq C \|u_n - u\|_{L^\infty(I_R)} \int_{-R}^R |u'|^{p-1} |u'_n - u'| dx \\ & \leq C \|u_n - u\|_{L^\infty(I_R)} \left(\int_{-R}^R |u'|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{-R}^R |u'_n - u'|^p dx \right)^{1/p} \\ & \leq C \|u_n - u\|_{L^\infty(I_R)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pelo fato da imersão $W^{1,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(I_R)$ ser compacta. Logo, $I_1 \geq o_n(1)$. Em seguida, nosso objetivo é estimar a integral I_2 . Temos que

$$I_2 = \int_{|x|>R} |u_n|^p |u'_n|^p dx - \int_{|x|>R} |u_n|^p |u'_n|^{p-2} u'_n u' dx \geq - \int_{|x|>R} |u_n|^p |u'_n|^{p-2} u'_n u' dx.$$

Por (5.4), podemos concluir que

$$\left| \int_{|x|>R} |u_n|^p |u'_n|^{p-2} u'_n u' dx \right| \leq \|u_n\|^p \left(\int_{|x|>R} |u'_n|^p dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{|x|>R} |u'|^p dx \right)^{1/p} \leq C\epsilon.$$

Portanto, $I_2 \geq -C\epsilon$. Para a integral I_3 , temos

$$\begin{aligned} |I_3| & \leq \int_{-R}^R |u'_n|^p |u_n|^{p-1} |u_n - u| dx \leq \|u_n - u\|_{L^\infty(I_R)} \|u_n\|_\infty^{p-1} \|u_n\| \\ & \leq C \|u_n - u\|_{L^\infty(I_R)} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Escrevendo a integral I_4 da seguinte maneira,

$$I_4 = \int_{|x|>R} |u'_n|^p |u_n|^p dx - \int_{|x|>R} |u'_n|^p |u_n|^{p-2} u_n u dx,$$

analogamente a I_2 , podemos concluir que $I_4 \geq -C\epsilon$, onde $\epsilon > 0$ foi fixado anteriormente.

Resumindo, obtemos

$$\begin{aligned} 2^p C\epsilon + o_n(1) & \geq \int_{\mathbb{R}} (|u'_n|^{p-2} u'_n - |u'|^{p-2} u') (u'_n - u') dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} V(x) (|u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u) (u_n - u) dx \end{aligned}$$

e pela desigualdade (5.5), segue que

$$2^p C_p \epsilon + o_n(1) \geq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} |u'_n - u'|^p dx + \int_{\mathbb{R}} V(x) |u_n - u|^p dx, & \text{se } p \geq 2 \\ \int_{\mathbb{R}} \frac{|u'_n - u'|^2}{(|u'_n| + |u'|)^{2-p}} dx + \int_{\mathbb{R}} V(x) \frac{|u_n - u|^2}{(|u_n| + |u|)^{2-p}} dx, & \text{se } 1 < p < 2. \end{cases}$$

Assim, se $p \geq 2$ deduzimos que $\|u_n - u\|^p \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ pois $\epsilon > 0$ foi arbitrário. Portanto, $u_n \rightarrow u$ em X . Se $1 < p < 2$, também temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u'_n - u'|^2}{(|u'_n| + |u'|)^{2-p}} dx = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} V(x) \frac{|u_n - u|^2}{(|u_n| + |u|)^{2-p}} dx = 0. \quad (5.6)$$

Usando a desigualdade de Hölder e a limitação de (u_n) , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u'_n - u'|^p dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|u'_n - u'|^2}{(|u'_n| + |u'|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (|u'_n| + |u'|)^p dx \right)^{(2-p)/2} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|u'_n - u'|^2}{(|u'_n| + |u'|)^{2-p}} dx \right)^{p/2} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Um argumento similar ao usado no segundo limite em (5.6) fornece

$$\int_{\mathbb{R}} V(x) |u_n - u|^p dx \rightarrow 0.$$

Logo, $\|u_n - u\|^p \rightarrow 0$ e a prova está completa. ■

5.3 Prova do Teorema 5.1

Agora, estamos prontos para provar o resultado principal deste capítulo. Começamos pelo item **(a)**. Vamos nos certificar que no Lema 5.4, as condições $(A_1) - (A_4)$ são válidas. Desde que X é um espaço de Banach separável e reflexivo, fixemos uma base de Schauder $(e_j)_{j=0}^{\infty}$ para X . Logo, $X = \overline{\bigoplus_{j=0}^{\infty} X_j}$ em que $X_j = \mathbb{R}e_j$ e, sobre X , consideremos a ação antípoda de $\mathbb{Z}_2$ a qual verifica a condição (A_1) . Defina

$$\beta_k \doteq \sup_{u \in Z_k \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_r}{\|u\|}.$$

Por um argumento análogo como em [80, Lema 3.8], temos que $\beta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Sobre Z_k , obtemos

$$\mathcal{F}_{\lambda, \mu}(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{|\lambda|}{q} \|u\|_q^q - \frac{\mu}{r} \|u\|_r^r \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{|\lambda|}{q} C \|u\|_q^q - \frac{\mu}{r} \beta_k^r \|u\|_r^r.$$

Desde que $q < p$, temos

$$\frac{|\lambda|}{q} C \|u\|^q \leq \frac{1}{2p} \|u\|^p$$

para $\|u\| \geq R$, $R > 0$ grande. Logo, para $\|u\| \geq R$, obtemos

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) \geq \frac{1}{2p} \|u\|^p - \frac{\mu}{r} \beta_k^r \|u\|^r.$$

Escolhendo $r_k := (\mu \beta_k^r)^{1/(p-r)}$, segue que $r_k \rightarrow \infty$. Assim, existe k_0 tal que $r_k \geq R$ para todo $k \geq k_0$. Logo, se $u \in Z_k$ e $\|u\| = r_k$ com $k \geq k_0$, obtemos

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) \geq \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{r} \right) (\mu \beta_k^r)^{p/(p-r)}$$

e, desde que $\beta_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, a relação (A_3) está provada. O funcional $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}$ é par e satisfaz

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) &\leq \frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{2^{p-1}}{p} C \|u\|_\infty^p \|u\|^p - \frac{\lambda}{q} \|u\|_q^q - \frac{\mu}{r} \|u\|_r^r \\ &\leq \frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{2^{p-1}}{p} C \|u\|^{2p} - \frac{\lambda}{q} \|u\|_q^q - \frac{\mu}{r} \|u\|_r^r \\ &\leq \frac{1}{p} \|u\|^p + \frac{2^{p-1}}{p} C \|u\|^{2p} - \frac{\lambda}{q} C \|u\|^q - \frac{\mu}{r} C \|u\|^r \end{aligned}$$

pois, em espaços de dimensão finita Y_k , todas as normas são equivalentes. Como $r > 2p$, a relação (A_2) é satisfeita para cada $\rho_k > r_k > 0$ suficientemente grande.

A condição (A_4) vale pelo Lema 5.7. É suficiente então usar o Teorema da Fonte e o item **(a)** está provado. Na sequência, provemos **(b)**. A fim de verificarmos (B_1) do Lema 5.5, seja

$$\alpha_k \doteq \sup_{u \in Z_k \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_q}{\|u\|}.$$

Segue, facilmente da Proposição 5.2, que $\alpha_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Para $u \in Z_k$, obtemos

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{q} \alpha_k^q \|u\|^q - \frac{|\mu|}{r} C \|u\|^r.$$

Desde que $r > p$, temos

$$\frac{|\mu|}{r} C \|u\|^r \leq \frac{1}{2p} \|u\|^p$$

para $\|u\| \leq R$, $R > 0$ pequeno. Logo,

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) \geq \frac{1}{2p} \|u\|^p - \frac{\lambda}{q} \alpha_k^q \|u\|^q.$$

Pondo $R_k \doteq \left(\frac{2p\lambda\alpha_k^q}{q} \right)^{1/(p-q)}$, obtemos

$$\frac{1}{2p}R_k^p = \frac{\lambda}{q}\alpha_k^q R_k^q.$$

Claramente $R_k \rightarrow 0$, de modo que existe k_0 com $R_k \leq R$ quando $k \geq k_0$. Assim, se $u \in Z_k, k \geq k_0$ e satisfaz $\|u\| = R_k$, temos

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) \geq \frac{1}{2p}\|u\|^p - \frac{\lambda}{q}\alpha_k^q\|u\|^q = 0.$$

Isto prova (B_1) . Em seguida, (B_2) é obtida imediatamente do fato que $R_k \rightarrow 0$. Para checarmos (B_3) , sabemos que, sobre o espaço de dimensão finita Y_k , todas as normas são equivalentes. Conseqüentemente,

$$\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) \leq \frac{1}{p}\|u\|^p + C\|u\|^{2p} - \frac{\lambda}{q}C\|u\|^q - \frac{\mu}{r}C\|u\|^r.$$

Como $q < p < r$, tomando r_k suficientemente pequeno, (B_3) é válida. Este é precisamente o ponto onde entra que $\lambda > 0$. Finalmente, a condição (B_4) é provada de maneira análoga ao Lema 5.7. ■

Para finalizarmos, vamos fazer algumas observações sobre o comportamento das soluções com respeito aos parâmetros λ e μ .

Observação 5.8. (a) Para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu \leq 0$, não existe solução com energia positiva. Além disso,

$$\inf \{ \|u\| : u \text{ soluciona (5.1), } \mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) > 0 \} \rightarrow \infty \text{ quando } \mu \rightarrow 0^+.$$

(b) Para $\mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda \leq 0$, não existe solução com energia negativa. Além disso,

$$\sup \{ \|u\| : u \text{ soluciona (5.1), } \mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) < 0 \} \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow 0^+.$$

Prova de (a): Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Desde que $\mathcal{F}'_{\lambda,\mu}(u) = 0$, obtemos

$$\lambda\|u\|_q^q = -\mu\|u\|_r^r + \|u\|^p + 2^p \int_{\mathbb{R}} |u|^p |u'|^p \, dx.$$

Se $\mathcal{F}_{\lambda,\mu}(u) \geq 0$, temos

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \|u\|^p + \mu \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) \|u\|_r^r + 2^p \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{q} \right) \int_{\mathbb{R}} |u|^p |u'|^p \, dx \geq 0.$$

Como $1 < q < p$ e $r > 2p$, vemos imediatamente que para $\mu \leq 0$, somente $u = 0$ é uma solução com energia não-negativa. Agora, se $\mu > 0$, então existem constantes $c_1, c_2 > 0$ verificando

$$-c_1\|u\|^p + \mu c_2\|u\|^r \geq 0.$$

Logo,

$$\|u\|^{r-p} \geq \mu^{-1} c_1/c_2 \rightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad \mu \rightarrow 0^+,$$

e o resultado segue. ■

Prova de (b): Fixemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Analogamente, de $\mathcal{F}'_{\lambda, \mu}(u) = 0$ obtemos

$$\mu\|u\|_r^r = -\lambda\|u\|_q^q + \|u\|^p + 2^p \int_{\mathbb{R}} |u|^p |u'|^p \, dx.$$

Logo, se $\mathcal{F}_{\lambda, \mu}(u) \leq 0$ temos

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) \|u\|^p + \lambda \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right) \|u\|_q^q + 2^p \left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{r}\right) \int_{\mathbb{R}} |u|^p |u'|^p \, dx \leq 0.$$

Isto implica que para $\lambda \leq 0$, somente $u = 0$ é uma solução com energia não-positiva. Para $\lambda > 0$, existem constantes $c_3, c_4 > 0$ tais que

$$c_3\|u\|^p - \lambda c_4\|u\|^q \leq 0.$$

Assim,

$$\|u\|^{p-q} \leq \lambda c_4/c_3 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \lambda \rightarrow 0^+.$$

■

Observação 5.9. Para $\lambda > 0$ pequeno, é fácil ver que o funcional $\mathcal{F}_{\lambda, \mu}$ possui a geometria do Passo da Montanha. Logo, pelo Teorema do Passo da Montanha (veja [80], Teorema 2.10), a equação (5.1) tem uma solução do tipo passo da montanha. Esta solução é não-negativa. De fato, é suficiente trabalharmos com o funcional

$$J_{\lambda, \mu}(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p + \frac{2^{p-1}}{p} \int_{\mathbb{R}} |u'|^p |u|^p \, dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}} (u^+)^q \, dx - \frac{\mu}{r} \int_{\mathbb{R}} (u^+)^r \, dx$$

e como $\langle J'_{\lambda, \mu}(u), v \rangle = 0$ para todo $v \in X$, pondo $v = u^-$, obtemos $u^- = 0$. Logo, $u = u^+ \geq 0$.

REFERÊNCIAS

- [1] Adimurth, *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the N -Laplacian*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **17** (1990), 393-413.
- [2] C. O. Alves, J. M. do Ó, O. H. Miyagaki, *On nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth*, Nonlinear Anal. **56** (2004), 781-791.
- [3] M. J. Alves, P. C. Carrião, O. H. Myiagaki, *Soliton solutions to a class of quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}$* , preprint.
- [4] A. Ambrosetti, J. Azorero, I. Peral, *Elliptic variational problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, J. Funct. Anal. **168**, (2000), 10-32.
- [5] A. Ambrosetti, J. Azorero, I. Peral, *Multiplicity results for some nonlinear elliptic equations*, J. Funct. Anal. **137**, (1996), 219-242.
- [6] A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122**, (1994), 519-543.
- [7] A. Ambrosetti, Z. Q. Wang, *Positive solutions to a class of quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}$* , Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), 55-68.
- [8] J. Aubin, I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis. Pure and Applied Mathematics (New York)*, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1984.

- [9] M. Badiale, F. Dobarro, *Some existence results for sublinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$* , Funkcial. Ekvac. **39** (1996), 183–202.
- [10] T. Bartsch, M. Willem, *On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities*, Proc. Amer. Math. Soc. **123**, (1995), 3555–3561.
- [11] T. Bartsch, Z. Q. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$* , Comm. Partial Differential. Equation **20**, (1995) 1725–1741.
- [12] F. Bass, N. N. Nasanov, *Nonlinear electromagnetic spin waves*. Phys. Reports **189**, (1990), 165–223.
- [13] H. Berestyki, T. Gallouet, O. Kavian, *Equations de Champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math **297**, (1983), 307–310.
- [14] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I: existence of a ground state*. Arch. Rational Mech. Anal. **82**, (1983), 313–346.
- [15] A. Borovskii, A. Galkin, *Dynamical modulation of an ultrashort high-intensity laser pulse in matter*. JETP **77**, (1983), 562–573.
- [16] H. Brandi, C. Manus, G. Mainfray, T. Lehner, G. Bonnaud, *Relativistic and ponderomotive self-focusing of a laser beam in a radially inhomogeneous plasma*. Phys. Fluids **B5**, (1993), 3539–3550.
- [17] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [18] H. Brezis, S. Kamin, *Sublinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$* , Manuscripta Math. **74**, (1992), 87–106.
- [19] J. Chabrowski, *Variational methods for potential operator equations. With applications to nonlinear elliptic equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, **24**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1997.
- [20] P. C. Carrião, J. V. Gonçalves, O. H. Miyagaki, *Existence and λ -behavior of positive solutions of the equation $-\Delta u + a(x)u = \lambda u^q + u^p$ in $\mathbb{R}^N$* , Comm. Appl. Nonlinear Anal. **6** (1999), 19–37.

- [21] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^2$* , Comm. Partial Differential Equation **17** (1992), 407-435.
- [22] J. Chabrowski, J. M. do Ó, *On semilinear elliptic equations involving concave and convex nonlinearities*. Math. Nachr. **233/234** (2002), 55-76.
- [23] J. Chen, B. Guo, *Multiple nodal bound states for a quasilinear Schrödinger equation*. J. Math. Phys. **46**, (2005), 123502 (11 pages).
- [24] X. L. Chen, R. N. Sudan, *Necessary and sufficient conditions for self-focusing of short ultraintense laser pulse*. Phys. Review Letters **70**, (1993), 2082-2085.
- [25] M. Colin, L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach*, Nonlinear Anal. **56**, (2004), 213-226.
- [26] A. De Bouard, N. Hayashi, J. Saut, *Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation*. Comm. Math. Phys. **189**, (1997), 73-105.
- [27] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. Partial Differential Equations **3** (1995), 139–153.
- [28] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. Lectures notes*, College on Variational Problem in Analysis, Trieste (1988).
- [29] D. G. de Figueiredo, J. Gossez, P. Ubilla, *Local superlinearity and sublinearity for indefinite semilinear elliptic problems*. J. Funct. Anal. **199** (2003), 452–467.
- [30] M. del Pino, P. L. Felmer, *Local mountain-pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121-137.
- [31] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*, Vol. I. Elliptic equations. Research Notes in Mathematics, 106. Pitman, Boston, MA, 1985.
- [32] G. Dinca, P. Jebelean, J. Mawhin, *Variational and topological methods for Dirichlet problems with p -Laplacian*, Portugal. Math. (N.S.) **58** (2001), 339-378.
- [33] J. M. do Ó, *N -Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Abstract Appl. Anal. **2** (1997), 301-315.

- [34] J. M. do Ó, *Semilinear Dirichlet problems for the N -Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with nonlinearities in critical growth range*, Differential and Integral Equations, 9, 5 (1996), 967-979.
- [35] J. M. do Ó, E. S. Medeiros, *Remarks on least energy solutions for quasilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$* . Electron. J. Differential Equations, **83**, (2003), 14 pp.
- [36] J. M. do Ó, O. Miyagaki, S. Soares, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: the critical exponential case*, Nonlinear Anal. **67**, (2007), 3357-3372.
- [37] J. M. do Ó, M. A. Souto, *On a class of nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth*, J. Differential Equations, **174**, (2001), 289-311.
- [38] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in R^n* , Mathematical analysis and applications, Part A, pp. 369-402, Adv. in Math. Suppl. Stud., 7a, Academic Press, New York-London, 1981.
- [39] P. Drábek, A. Kufner, F. Nicolosi *Quasilinear elliptic equations with degenerations and singularities*. de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 5. Walter de Gruyter Co., Berlin, 1997. 219 pp.
- [40] I. Ekeland, *Convexity methods in Hamiltonian Mechanics*, Springer, Berlin, 1990.
- [41] L. C. Evans, W. Gangbo, *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Mem. Amer. Math. Soc. **137**, (1999), 653, viii+66 pp.
- [42] A. Floer, A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the packets for the cubic Schrodinger with a bounded potential*. J. Funct. Anal. **69**, (1986), 397-408.
- [43] R. Glowinski, J. Rappaz, *Approximation of a nonlinear elliptic problem arising in a non-Newtonian fluid flow model in glaciology*, Math. Model. Numer. Anal. **37**, (2003), 175-186.
- [44] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equation of second order*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [45] N. Ghoussoub, *Duality and perturbation methods in critical point theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [46] R. W. Hasse, *A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equation*. Z. Phys. B **37**, (1980), 83-87.
- [47] U. Janfalk, *On Certain Problem Concerning the p -Laplacian Operator*, Likping Studies in Sciences and Technology, Dissertations, vol. 326 (1993).
- [48] L. Jeanjean, K. Tanaka, *A positive solution for a nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^N$* . Indiana Univ. Math. **54** (2005), 443-464.
- [49] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques & Applications, 13. Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [50] V. Kondratiev, M. Shubin, *Discreteness of spectrum for the Schrödinger operators on manifolds of bounded geometry*, Operator Theory: Advances and Applications **110** (1999), 185-226.
- [51] A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, A. S. Kovalev, *Magnetic solitons in superfluid films*. J. Phys. Soc. Japan **50**, (1981), 3262-3267.
- [52] S. Kurihura, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluids films*. J. Phys. Soc. Japan **50**, (1981), 3262-3267.
- [53] E. Laedke, K. Spatschek, *Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions*. J. Math. Phys. **24**, (1963), 2764-2769.
- [54] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Part II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **1**, (1984), 223-283.
- [55] C. Liu, *Weak solutions for a viscous p -Laplacian operator*, Electron. J. Differential Equations (63) (2003), 1-13.
- [56] Z. Liu, Z.-Q. Wang, *Schrödinger equations with concave and convex nonlinearities*. Z. Angew. Math. Phys. **56** (2005), 609-629.
- [57] J. Liu, Z. Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations I*, Proc. Amer. Math. Soc. **131**, 2, (2002), 441-448.

- [58] J. Liu, Y. Wang, Z. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*. J. Differential Equations **187**, (2003), 473-493.
- [59] J. Liu, Y. Wang, Z. Q. Wang, *Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations via the Nehari Method*, Comm. Partial Differential Equation, **29**, (2004) 879-901.
- [60] S. Lorca, P. Ubilla, *Symmetric and nonsymmetric solutions for an elliptic equation on $\mathbb{R}^N$* , Nonlinear Anal. **58** (2004), 961-968.
- [61] I. Ly, D. Seck, *Isoperimetric inequality for an interior free boundary problem with p -Laplacian operator*, Electron. J. Differential Equations **109** (2004), 1-12.
- [62] V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin, *Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory*. Phys. Reports **104**, (1984), 1-86.
- [63] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971), 1077-1092.
- [64] W. M. Ni, I. Takagi, *On the shape of least-energy solutions to semilinear Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math. **14**, (1991), 819-851.
- [65] S. Oruganti, J. Shi, R. Shivaji, *Diffusive logistic equation with constant yield harvesting*, Abstr. Appl. Anal. **9**, (2002), 3601-3619.
- [66] M. Poppenberg, K. Schmitt, Z. Q. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **14**, (2002), 329-344.
- [67] G. R. W. Quispel, H. W. Capel, *Equation of motion for the Heisenberg spin chain*. Phys. A **110**, (1982), 41-80.
- [68] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew Math. Phys., **43** (1992), 272-291.
- [69] M. Ramaswamy, R. Shivaji, *Multiple positive solutions for classes of p -Laplacian equations*, Differential Integral Equations **17** (11-12) (2004) 1255-1261.
- [70] B. Ritchie, *Relativistic self-focusing and channel formation in laser-plasma interactions*. Phys. Rev. E **50**, (1994), 687-689.

- [71] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasi-linear equations*, Acta Math. 111 (1964), 247-302.
- [72] J. Simon, *Regularité de la solution d'une equation non lineaire dans $\mathbb{R}^N$* , Lectures Notes in Math. No. 665 P. Benilan editors Springer Verlag, 1978.
- [73] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149–162.
- [74] W. A. Strauss, *Mathematical aspects of classical nonlinear field equations*, Lecture Notes in Physics, 98, Springer, Berlin-New York, 1979.
- [75] M. Struwe, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Third edition. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [76] S. Takeno, S. Homma, *Classical planar Heisenberg ferromagnet, complex scalar fields and nonlinear excitations*. Progr. Theoret. Physics **65**, (1981), 172-189.
- [77] P. Tolksdorff *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, **51** (1984), 126-150.
- [78] E. Tonkes, *A semilinear elliptic equation with convex and concave nonlinearities*. Topol. Methods Nonlinear Anal. **13** (1999), 251-271.
- [79] N. S. Trudinger, *On the imbedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473-484.
- [80] M. Willem, *Minimax Theorems*. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser 1996.