

**Universidade Estadual de Campinas**

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

---

Tese de Doutorado

**Controlabilidade de sistemas de controle  
em grupos de Lie simples e a topologia  
das variedades flag**

por

**Ariane Luzia dos Santos** <sup>†</sup>

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin**

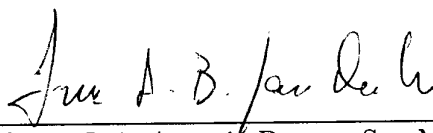
<sup>†</sup>Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.



# Controlabilidade de sistemas de controle em grupos de Lie simples e a topologia das variedades flag

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ariane Luzia dos Santos** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 31 de Outubro de 2011.



---

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin  
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin.

Prof. Dr. Marcos Martins Alexandrino da Silva.

Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto.

Prof. Dr. Carlos José Braga Barros.

Profa. Dra. Elizabeth Terezinha Gasparim.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica, UNICAMP  
como requisito parcial para obtenção do título de  
**Doutor em Matemática.**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

Sa59c Santos, Ariane Luzia dos  
Controlabilidade de sistemas de controle em grupos de Lie simples e a topologia das variedades flag / Ariane Luzia dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Luiz Antonio Barrera San Martin.  
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria do controle. 2. Lie, Grupos de.  
3. Semigrupos. 4. Espaços homogêneos.  
5. Variedades (Matemática). I. San Martin, Luiz Antonio Barrera, 1955-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Controllability of control systems simple Lie groups and the topology of flag manifolds

**Palavras-chave em inglês:**

Control theory

Lie groups

Semigroups

Homogeneous spaces

Manifolds (Mathematics)

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Doutor em Matemática

**Banca examinadora:**

Luiz Antonio Barrera San Martin [Orientador]

Marcos Martins Alexandrino da Silva

Maria do Carmo Carbinatto

Carlos José Braga Barros

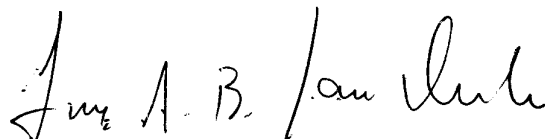
Elizabeth Terezinha Gasparim

**Data da defesa:** 31-10-2011

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

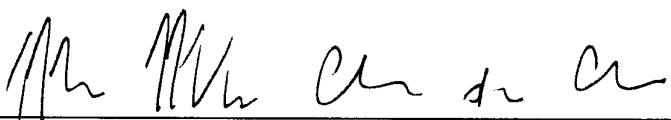
**Tese de Doutorado defendida em 31 de outubro de 2011 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN**



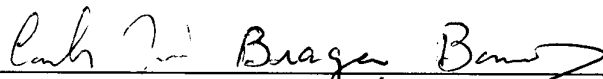
---

**Prof(a). Dr(a). MARCOS MARTINS ALEXANDRINO DA SILVA**



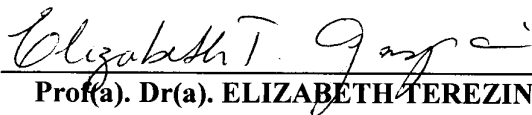
---

**Prof(a). Dr(a). MARIA DO CARMO CARBINATTO**



---

**Prof(a). Dr(a). CARLOS JOSÉ BRAGA BARROS**



---

**Prof(a). Dr(a). ELIZABETH TEREZINHA GASPARIM**



*Aos meus pais,  
Celeste e Antonio*





# Agradecimentos

A Deus, agradeço por dar-me força e sabedoria para a conclusão deste trabalho.

Aos meus pais, agradeço por acreditarem em mim, por me apoiarem em todos os momentos difíceis e pelo amor incondicional.

Ao meu amor Ederson, agradeço pelo amor, cuidado e paciência em todo meu período de TPD (tensão pré-defesa).

À minha família, agradeço pelo apoio e pela torcida.

Ao meu orientador, Luiz San Martin, agradeço pela atenção, paciência e excelente trabalho de orientação. Muito obrigada!

Aos membros da banca, os professores Carlos Braga, Elizabeth Gasparim, Maria do Carmo e Marcos Alexandrino, agradeço por gentilmente terem aceito o convite para compor a banca examinadora.

Aos amigos que encontrei na UNICAMP, em especial, Janete, Fernando, Jair e Juliana, agradeço pelos momentos de alegria e descontração que passamos juntos.

Aos funcionários do IMECC-UNICAMP, agradeço pela atenção.

Ao CNPq, agradeço pelo suporte financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.



# Resumo

Seja  $S$  um semigrupo com interior não vazio de um grupo de Lie simples  $G$ , conexo, complexo ou real. No caso em que o grupo  $G$  é real também considere-o não compacto, com centro finito e cuja álgebra de Lie é uma forma real, normal de uma álgebra clássica. Seja  $G(\alpha)$  o subgrupo gerado por  $\exp \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ , onde  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  é o espaço de raízes associado à raiz  $\alpha$ . Dessa forma,  $G(\alpha)$  é isomorfo a  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$  no caso complexo, a  $\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}/D$  no caso real, onde  $D$  é um subgrupo discreto central e  $\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}$  é o recobrimento universal de  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ . O objetivo principal desta tese é provar que  $S$  é o próprio grupo  $G$  quando  $S$  contém um subgrupo  $G(\alpha)$ . A prova desse resultado usa os seguintes fatos: o conjunto de controle invariante pela ação de  $S$  é contrátil em alguma variedade flag se  $S$  é próprio (resultado provado anteriormente); várias órbitas de  $G(\alpha)$  são esferas,  $S^2$  no caso complexo,  $S^1$  no caso real, homotopicamente não nulas. O resultado de que  $S$  não é próprio quando contém algum  $G(\alpha)$  é aplicado para revisar um teorema de controlabilidade e obter algumas melhorias.



# Abstract

Let  $S$  be a semigroup with nonempty interior of a complex or real connected simple Lie group  $G$ . In the case the group  $G$  is real also assume that  $G$  is non-compact, with finite center, whose algebra is a normal real form of a classic algebra. Let  $G(\alpha)$  be the subgroup spanned by  $\exp \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ , where  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  is the root space associated to the root  $\alpha$ . In this way,  $G(\alpha)$  is isomorphic to  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$  in the complex case, to  $\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}/D$  in the real case, where  $D$  is a central discrete subgroup and  $\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}$  is the universal covering of  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ . The main goal in this thesis is to prove that  $S$  is the whole group  $G$  whenever  $S$  contains a subgroup  $G(\alpha)$ . The proof of this result exploits the following facts: the  $S$ -invariant control set is contractible in some flag manifold if  $S$  is proper (result previously proved); several orbits of  $G(\alpha)$  are spheres,  $S^2$  in the complex case,  $S^1$  in the real case, not null-homotopic. The result that guarantees that  $S$  is not proper whenever it contains a  $G(\alpha)$  is applied to revisit a controllability theorem and get some improvements.

# Sumário

Agradecimentos . . . . .	vii
Resumo . . . . .	ix
Abstract . . . . .	x
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
<b>2 Transitividade de semigrupos nos grupos de Lie simples complexos</b>	<b>11</b>
<b>3 Grupos de Lie simples complexos - outra abordagem topológica</b>	<b>21</b>
<b>4 Transitividade de semigrupos nos grupos de Lie simples reais</b>	<b>31</b>
4.1 Álgebras excepcionais . . . . .	49
<b>5 Teorema de controlabilidade</b>	<b>55</b>
<b>6 Grupo Fundamental das variedades flag</b>	<b>61</b>
6.1 Álgebra de Lie simples complexa . . . . .	62
6.2 Forma real tipo $AI$ . . . . .	62
6.3 Forma real tipo $AII$ . . . . .	65
6.4 Forma real tipo $AIII.1$ . . . . .	65

6.5	Forma real tipo $AIII.2$ . . . . .	66
6.6	Forma real tipo $BDI$ . . . . .	66
6.6.1	Forma real normal da álgebra $B_l$ . . . . .	68
6.6.2	Forma real normal da álgebra $D_l$ . . . . .	69
6.7	Forma real tipo $DIII$ . . . . .	70
6.8	Forma real tipo $CI$ . . . . .	71
6.9	Forma real tipo $CII$ . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Segundo grupo de homotopia das variedades flag</b>	<b>75</b>
7.1	Forma real normal de $A_l$ . . . . .	76
7.2	Forma real normal de $B_l$ . . . . .	76
7.3	Forma real normal de $C_l$ . . . . .	77
7.4	Forma real normal de $D_l$ . . . . .	79
7.5	Álgebra de Lie simples complexa . . . . .	81
7.6	Forma real normal . . . . .	81
7.7	Forma real do tipo $AII$ . . . . .	81
7.8	Forma real do tipo $AIII.1$ . . . . .	81
7.9	Forma real do tipo $AIII.2$ . . . . .	82
7.10	Forma real do tipo $DIII$ . . . . .	82
7.11	Forma real do tipo $CII$ . . . . .	83
<b>A</b>	<b>Fibrados</b>	<b>85</b>
<b>B</b>	<b>Álgebra semissimples</b>	<b>89</b>
B.1	Decomposições de Cartan e de Iwasawa . . . . .	91

B.2	Variedades flag . . . . .	93
B.3	Subálgebra de Cartan . . . . .	95
B.4	Álgebras clássicas . . . . .	96
B.4.1	Álgebra $A_l$ . . . . .	97
B.4.2	Álgebra $B_l$ . . . . .	98
B.4.3	Álgebra $C_l$ . . . . .	99
B.4.4	Álgebra $D_l$ . . . . .	99
B.5	Álgebras excepcionais . . . . .	100
B.5.1	Álgebras do tipo $G_2$ . . . . .	100
B.5.2	Álgebras do tipo $E_8$ . . . . .	101
B.5.3	Álgebras do tipo $E_7$ . . . . .	102
B.5.4	Álgebras do tipo $E_6$ . . . . .	102
B.5.5	Álgebras do tipo $F_4$ . . . . .	103
B.6	Grupos de Weyl . . . . .	104
B.7	Forma real . . . . .	106
B.7.1	Forma real compacta . . . . .	107
B.7.2	Forma real normal . . . . .	108
B.7.3	Álgebras reais clássicas . . . . .	108
B.7.4	Álgebras excepcionais . . . . .	112
<b>C</b>	<b>Conjuntos de controle</b>	<b>113</b>
<b>D</b>	<b>Sistema de controle</b>	<b>115</b>
<b>E</b>	<b>Forma de Kähler nas variedades flag</b>	<b>117</b>







# Introdução

Neste trabalho é apresentado um método, fundamentado na topologia algébrica das variedades flag, para estudar a controlabilidade dos sistemas de controle bilineares e sistemas de controle invariantes em grupos de Lie simples ou semissimples.

Esse método é baseado na geometria dos conjuntos de controle invariantes nas variedades flag, como descrito inicialmente em [23], [27] e [31] e posteriormente em [3], [5], [25], [28], [29] e [30].

Em particular, é empregado aqui que se  $S$  é um semigrupo com interior não vazio do grupo de Lie simples  $G$ , então existe pelo menos uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  tal que o único conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta \subset \mathbb{F}_\Theta$  está contido em um subconjunto  $\mathcal{E} \subset \mathbb{F}_\Theta$ , o qual é difeomorfo ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^N$ ; veja Teorema 1.4 abaixo. Isso implica que qualquer curva fechada  $\gamma$  contida em  $C_\Theta$  é homotópica, em  $\mathbb{F}_\Theta$ , a um ponto e assim representa um elemento trivial do grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ . Da mesma forma, qualquer esfera de dimensão maior  $S^n \subset C_\Theta$  representa a identidade do grupo de homotopia  $\pi_n(\mathbb{F}_\Theta)$ . Com isso é possível provar que  $S = G$ , mostrando que os conjuntos de controle  $S$ -invariantes  $C_\Theta$  em todas as variedades flag  $\mathbb{F}_\Theta$  não são topologicamente triviais, por exemplo, contém uma curva ou uma esfera não homotópica, na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ , a um ponto.

Seja  $G$  um grupo de Lie simples, conexo, complexo ou real com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . No caso em que o grupo  $G$  é real também considere-o não compacto, com centro finito e cuja álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal de uma álgebra clássica  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ , ou seja  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra tal que seu posto coincide com seu posto real.

Seja  $G(\alpha)$  o subgrupo gerado por  $\exp \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ , onde  $\mathfrak{g}_\alpha$  é o espaço de raízes associado à raiz  $\alpha$ . Então,  $G(\alpha)$  é isomorfo a  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$  no caso complexo, a  $\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}/D$  no caso real, onde  $D$  é um subgrupo discreto central e  $\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}$  é o recobrimento universal de  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})$ .

Os resultados principais desta tese, Teorema 2.1 no caso complexo e Teorema 4.1 no caso real, dizem que um semigrupo  $S$  de interior não vazio é o próprio grupo  $G$  se  $G(\alpha) \subset S$  para alguma raiz  $\alpha$ .

A prova desses teoremas consiste em:

- i) verificar que várias  $G(\alpha)$ -órbitas são esferas,  $S^2$  no caso complexo,  $S^1$  no caso real, não homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ ; e
- ii) verificar que algumas dessas órbitas estão contidas no único conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta$ . Assim, se essas  $G(\alpha)$ -órbitas não são homotópicas a um ponto em toda variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ , então  $C_\Theta$  não está contido em um subconjunto contrátil e, desse modo,  $S$  é o próprio  $G$ .

Como aplicação do método apresentado neste trabalho obtém-se a controlabilidade em  $G$  de um sistema de controle invariante em  $G$  que satisfaz a condição do posto da álgebra de Lie e que, para alguma raiz  $\alpha$ , o subgrupo  $G(\alpha)$  está contido no semigrupo de controle  $S$  associado ao sistema de controle invariante. Isso é possível aplicando esse método para o semigrupo de controle  $S$ , pois mostrando que o semigrupo de controle  $S$  é transitivo em  $G$ , ou seja,  $S = G$ , tem-se que o sistema de controle invariante é controlável em  $G$ .

Sabe-se que se  $A, B \in \mathfrak{sl}(2)$ , então o semigrupo de controle  $S$  gerado por  $\{A, \pm B\}$  não é transitivo em  $\mathrm{Sl}(2)$ , ou seja, o sistema de controle não é controlável em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  se, e somente se,  $\det[A, B] \geq 0$ ; veja [4, Theorem 5.3]. Em particular, se  $A$  e  $B$  são matrizes simétricas, então o sistema não é controlável em  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ; veja [16, Section III].

A inspiração para pensar no grupo  $G(\alpha)$  provém de uma série de artigos iniciada com Jurdjevic-Kupka [15], [16], seguida por outros como Gauthier-Kupka-Sallet [10] e referencias lá citadas, e finalizada com o resultado de El Assoudi-Gauthier-Kupka [1]. Um dos principais tópicos abordados nesses artigos é que o semigrupo de controle  $S$  contém um elemento regular e  $G(\mu)$  quando  $\mu$  é a raiz máxima.

Dessa forma, os Teoremas 2.1 e 4.1, respectivamente, para os casos complexo e real, fornecem uma prova alternativa do teorema principal de [1]. Isso porque os resultados desta tese são para uma raiz arbitrária  $\alpha$ , e não apenas para raiz máxima. Essa melhoria é apresentada no Capítulo 5, em particular, no Teorema 5.3.

No caso em que o grupo  $G$  é complexo as  $G(\alpha)$ -órbitas a serem consideradas têm dimensão zero ou dois em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Para verificar que várias dessas  $G(\alpha)$ -órbitas são esferas  $S^2$  não homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$  estuda-se a cohomologia de De Rham  $H_{\text{DeR}}^2(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{R})$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ . Isso é feito no Capítulo 2.

Utilizando uma outra abordagem topológica, é possível verificar que várias dessas  $G(\alpha)$ -órbitas são esferas  $S^2$  não homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Tal verificação é feita através do estudo do segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ ; para isso usa-se a teoria de representação de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e a teoria de fibrados em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Mas vale ressaltar que com essa abordagem topológica, o resultado é um pouco mais fraco, pois em alguns casos a raiz  $\alpha$  não é uma raiz qualquer. Isso é tratado no Capítulo 3.

No caso em que o grupo  $G$  é real, não compacto, com centro finito e cuja álgebra de Lie é uma forma real normal de uma álgebra clássica, então as  $G(\alpha)$ -órbitas que interessam têm dimensão zero ou um na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ . Vale ressaltar, que os métodos utilizados para um grupo de Lie simples, conexo, complexo não funcionam para o grupo de Lie simples, conexo, real.

Assim, para verificar que várias dessas  $G(\alpha)$ -órbitas são esferas  $S^1$  não homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ , estuda-se o grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade

flag  $\mathbb{F}_\Theta$ . Uma contribuição desta tese é a apresentação de um método algébrico para calcular o grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  para uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  arbitrária. Isso é feito no Capítulo 4. Além disso, nesse mesmo capítulo, apresenta-se a prova do Teorema 4.1 para o caso que a álgebra  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal das álgebras excepcionais  $G_2$  e  $E_8$ .

Seja  $\tilde{G}$  o recobrimento universal do grupo de Lie simples  $G$ . Considere  $\tilde{K} \subset \tilde{G}$  o grupo compacto com álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ . Nesse método algébrico para calcular o grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  utiliza-se informações sobre o centralizador  $\tilde{M}$  de  $\mathfrak{a}$  em  $\tilde{K}$  e em Johnson [14],  $\tilde{M}$  é calculado para algumas álgebras de Lie. Assim, no Capítulo 6 é apresentado, explicitamente, o  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  das variedades flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de algumas álgebras de Lie. Com isso nota-se que uma variedade  $\mathbb{F}_\Theta$  é simplesmente conexa se, e somente se,  $\tilde{M}$  é conexo.

No Capítulo 7, para essas mesmas álgebras de Lie, um outro método algébrico é apresentado para calcular o segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  das variedades flag  $\mathbb{F}_\Theta$ . Assim, observa-se que os termos  $\mathbb{Z}_2$  que aparecem no  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  não aparecem no  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$ . No caso do  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  quando não é trivial aparecem apenas os termos  $\mathbb{Z}$ .

No capítulo 1 são apresentados notações e resultados clássicos utilizados durante este texto. Uma maior abordagem desses assuntos é feita nos apêndices.

Vale ressaltar que neste texto os resultados estão enunciados para grupos de Lie simples. Uma vez que todo grupo de Lie semissimples pode ser decomposto em componentes simples, os resultados aqui contidos podem ser aplicados para cada uma dessas componentes e, portanto, estendidos para o caso em que o grupo de Lie é semissimples.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo são apresentados o conjunto de notações, definições e também resultados clássicos usados neste texto para um grupo de Lie  $G$  semissimples, conexo, com centro finito e com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ :

- $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan, cujo conjunto de raízes é denotado por  $\Pi$ .  $\Pi^+$  é o conjunto de raízes positivas com  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \Pi^+$  o correspondente sistema simples de raízes. Tem-se  $\Pi = \Pi^+ \dot{\cup} (-\Pi^+)$  e qualquer  $\alpha \in \Pi^+$  é uma combinação linear  $\alpha = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$  com  $n_i \geq 0$  inteiros. O suporte de  $\alpha$ ,  $\text{supp}(\alpha)$ , é o subconjunto de  $\Sigma$  onde  $n_i > 0$ .
- A forma de Cartan-Killing  $\mathfrak{g}$  é denotada por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Se  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , então  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$  é definida por  $\alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$  e  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle$ . O subespaço gerado sobre  $\mathbb{R}$  por  $H_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ , é denotado por  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e gera  $\mathfrak{h}$ .
- Escreve-se  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+ = \{H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} : \forall \alpha \in \Pi^+, \alpha(H) > 0\}$  para câmara de Weyl definida por  $\Pi^+$ .
- O espaço de uma raiz  $\alpha$  é  $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{h}, [H, X] = \alpha(H)X\}$ . Tem-se que  $\dim_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}_\alpha = 1$ , onde  $\mathbb{K}$  é o corpo de escalares.
- Para uma raiz  $\alpha$ ,  $\mathfrak{g}(\alpha)$  é a subálgebra gerada por  $\mathfrak{g}_\alpha$  e  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Então,

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \text{span}_{\mathbb{K}}\{H_\alpha\} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}).$$

$G(\alpha)$  é o subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\alpha)$ , que é isomorfo a  $\widetilde{\text{Sl}(2, \mathbb{K})}/D$ , onde  $D$  é um subgrupo discreto central e  $\widetilde{\text{Sl}(2, \mathbb{K})}$  é o recobrimento universal de  $\text{Sl}(2, \mathbb{K})$ .

- Se  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie complexa,  $\mathfrak{u}$  é uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$  e  $U = \langle \exp \mathfrak{u} \rangle$  é o subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{u}$ . Sabe-se que  $U$  é semissimples compacto e compacto maximal em  $G$ .
- Se  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal de uma álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  então em qualquer decomposição de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  existe em  $\mathfrak{s}$  uma subálgebra  $\mathfrak{h}$  de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , onde a subálgebra compacta  $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}$  e o subespaço  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$ . Nesse caso,  $K = \langle \exp \mathfrak{k} \rangle$  é subgrupo fechado de  $U$  e subgrupo compacto de  $G$ .
- $\mathcal{W}$  é o grupo de Weyl. Duas formas equivalentes de se definir  $\mathcal{W}$  são:  $\mathcal{W}$  é o grupo gerado por reflexões  $r_{\alpha}$  com  $\alpha \in \Pi$ , onde  $r_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$ ;  $\mathcal{W} = M^*/T$  onde  $T$  é o toro dado por  $U \cap \exp \mathfrak{h}$  e  $M^* = \text{Norm}_U(\mathfrak{h}) = \{g \in U : \text{Ad}(g)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\}$  é o normalizador  $\mathfrak{h}$  em  $U$ , se  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie complexa.  $\mathcal{W} = M^*/M$  onde  $M^* = \text{Norm}_K(\mathfrak{h})$  e  $M = \{g \in K : \text{Ad}(g)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}$  é o centralizador de  $\mathfrak{h}$  em  $K$ , se  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal.
- $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{\alpha}$  e  $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ .
- Uma raiz  $\mu$  é uma raiz máxima se  $\mathfrak{n}^+ \mathfrak{g}_{\mu} = 0$ .
- Dados  $\mathfrak{h}$  e  $\Pi^+$ , ou  $\mathfrak{h}$  e  $\Sigma$ , existe uma subálgebra de Borel, a parabólica minimal  $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ . Um subconjunto  $\Theta \subset \Sigma$  define uma subálgebra parabólica por

$$\mathfrak{p}_{\Theta} = \mathfrak{p} + \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

onde  $\langle \Theta \rangle = \{\alpha \in \Pi : \text{supp}(\alpha) \subset \Theta \text{ ou } \text{supp}(-\alpha) \subset \Theta\}$  é o conjunto de raízes gerado por  $\Theta$ . Observe que  $\mathfrak{p}_{\emptyset} = \mathfrak{p}$ .



- Para  $\Theta \subset \Sigma$ , o normalizador de  $\mathfrak{p}_\Theta$ , denotado por  $P_\Theta$ , é um subgrupo parabólico com álgebra de Lie  $\mathfrak{p}_\Theta$ :

$$P_\Theta = \text{Norm}_G(\mathfrak{p}_\Theta) = \{g \in G : \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta \subset \mathfrak{p}_\Theta\}.$$

- Uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$  é independente do grupo  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . A origem de  $G/P_\Theta$ , o elemento  $1 \cdot P_\Theta$ , é denotada por  $b_\Theta$ .

Agora, seja  $S \subset G$  um semigrupo com interior não vazio, ou seja,  $\text{int}(S) \neq \emptyset$ . Aqui, são lembrados alguns resultados de [23], [27] e [31] que são a base para a abordagem topológica para a controlabilidade em  $G$ .

Considere  $S$  agindo na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ , pela restrição da ação de  $G$ . Um conjunto de controle  $S$ -invariante em  $\mathbb{F}_\Theta$  é um subconjunto  $C \subset \mathbb{F}_\Theta$  tal que  $\text{cl}(Sx) = C$  para todo  $x \in C$ , onde  $Sx = \{gx \in \mathbb{F}_\Theta : g \in S\}$  e  $\text{cl}(Sx)$  representa o fecho do conjunto  $Sx$ . Uma vez que  $\text{int}(S) \neq \emptyset$  um conjunto de controle invariante  $C$  é fechado, tem interior não vazio e é de fato invariante, isto é,  $gx \in C$  se  $g \in S$  e  $x \in C$ .

**Lema 1.1** ([27, Theorem 3.1]) *Em qualquer variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  existe um único conjunto de controle  $S$ -invariante denotado por  $C_\Theta$ .*

Para apresentar a propriedade geométrica de  $C_\Theta$  usada neste texto é preciso estudar a dinâmica dos campos de vetores  $\tilde{H}$  na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  cujo fluxo é  $\exp(tH)$ , com  $H$  no fecho  $\text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  da câmara de Weyl  $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+$ . Sabe-se que  $\tilde{H}$  é um campo do vetor gradiente com relação a alguma métrica Riemanniana em  $\mathbb{F}_\Theta$ ; veja Duistermat-Kolk-Varadarajan [8] e Ferraiol-Patrão-Seco [9].

Assim, as órbitas de  $\tilde{H}$  ou são pontos fixos ou trajetórias de fluxos entre conjuntos de pontos fixos. Além disso,  $\tilde{H}$  tem um único conjunto de pontos fixos atratores, denotado por  $\text{att}_\Theta(H)$ , que tem uma variedade estável e aberta  $\sigma_\Theta(H)$ ; veja [8] e

[9]. Isso significa que se  $x \in \sigma_\Theta(H)$ , então seu conjunto  $\omega$ -limite  $\omega(x)$  está contido em  $\text{att}_\Theta(H)$ . Esse atrator tem as seguintes expressões algébricas

$$\text{att}_\Theta(H) = Z_H \cdot b_\Theta = U_H \cdot b_\Theta;$$

veja [8] e [9]. Aqui  $Z_H = \{g \in G : \text{Ad}(g)H = H\}$  é o centralizador de  $H$  em  $G$  e  $U_H = Z_H \cap U$  é o centralizador em  $U$ , se  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie complexa e  $\text{att}_\Theta(H) = Z_H \cdot b_\Theta = K_H \cdot b_\Theta$ , onde  $K_H = Z_H \cap K$ , se  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal. Seu conjunto estável  $\sigma_\Theta(H)$  também é escrito algebricamente por

$$\sigma_\Theta(H) = N_H^- Z_H \cdot b_\Theta,$$

onde  $N_H^- = \exp(\mathfrak{n}_H^-)$  e  $\mathfrak{n}_H^- = \sum_{\gamma(H) < 0} \mathfrak{g}_\gamma$ .

Em particular, se  $H$  é regular, ou seja,  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  e  $\alpha(H) > 0$  para  $\alpha \in \Pi^+$ , então  $Z_H$  reduz-se ao subgrupo de Cartan  $\exp \mathfrak{h}$ , o qual fixa  $b_\Theta$ . Assim,

$$\text{att}_\Theta(H) = Z_H \cdot b_\Theta = \{b_\Theta\}, \quad \forall H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}.$$

Na verdade, no caso regular, os pontos fixos são isolados, pois  $\tilde{H}$  é o gradiente de uma função de Morse; veja [8] e [9]. Também  $\mathfrak{n}_H^- = \mathfrak{n}^-$ , como na notação acima, e o conjunto estável  $N^- \cdot b_\Theta$  é uma célula aberta de Bruhat.

O seguinte resultado, sobre a decomposição de Bruhat das variedades flag, é bem conhecido; veja [8], [17], [34].

**Proposição 1.2** *Em qualquer variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  a célula aberta de Bruhat  $N^- \cdot b_\Theta$  é difeomorfa ao espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^d$ . O difeomorfismo é  $X \in \mathfrak{n}_\Theta^- \mapsto \exp(X) \cdot b_\Theta$ , onde  $\mathfrak{n}_\Theta^- = \sum \{\mathfrak{g}_\alpha : \alpha < 0 \text{ e } \alpha \notin \langle \Theta \rangle\}$ .*

Seja  $h = \exp(H)$ , com  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^+$ . Segue da propriedade gradiente de  $\tilde{H}$  que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h^n x = b_\Theta$  para qualquer  $x \in N^- \cdot b_\Theta$ .

Um elemento  $g \in G$  é denominado *regular real* se é um conjugado  $g = aha^{-1}$  de  $h = \exp H$ ,  $H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^+$  com  $a \in G$ . Então, escreve-se  $\sigma_\Theta(g) = g \cdot \sigma_\Theta(H)$  e chama-se

de conjunto estável de  $g$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ . A razão para esse nome é clara:  $g^n = (aha^{-1})^n = ah^n a^{-1}$  e assim, se  $x \in \sigma_\Theta(g)$ , então  $g^n x \rightarrow gb_\Theta$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ .

O seguinte lema foi usado em [27] para provar o Lema 1.1.

**Lema 1.3** ([27, Lemma 3.2]) *Existe um regular real  $g \in \text{int}(S)$ .*

O seguinte resultado fornece a base da abordagem de controlabilidade deste trabalho.

**Proposição 1.4** ([31, Proposition 4.3]) *Suponha que  $S \neq G$ . Então existe uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  tal que o conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta$  está contido em  $\sigma_\Theta(g)$  para todo regular real  $g \in \text{int}(S)$ .*

**Corolário 1.5** *Se  $S \neq G$ , então existe uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  tal que o conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta$  está contido num subconjunto  $\mathcal{E}_\Theta \subset \mathbb{F}_\Theta$ , o qual é difeomorfo a um espaço Euclidiano.*

**Corolário 1.6** *Existe uma variedade flag minimal  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$  tal que o conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_{\Theta(S)}$  está contido em  $\sigma_{\Theta(S)}(g)$  para todo regular real  $g \in \text{int}(S)$ .*

**Corolário 1.7** *Existe uma variedade flag minimal  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$  tal que o conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_{\Theta(S)}$  está contido num subconjunto  $\mathcal{E}_\Theta \subset \mathbb{F}_{\Theta(S)}$ , o qual é difeomorfo a um espaço Euclidiano.*

Essa variedade flag  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$  é chamada de *tipo parabólico* de  $S$ .

**Exemplo:** Sejam  $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$  e  $S = \text{Sl}^+(n, \mathbb{R})$  o semigrupo de  $G$  formado por matrizes cujas entradas são não negativas.  $S$  é um subsemigrupo com interior não vazio em  $G$ .  $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$  age transitivamente no espaço projetivo  $\mathbb{P}^{n-1}$  pela ação  $\text{Sl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  dada por  $g[v] \mapsto [gv]$ , onde  $[v]$  é o espaço gerado por  $v$ . Nesse caso,  $\mathbb{P}^{n-1} = \text{Sl}(n, \mathbb{R})/P_\Theta = \mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}^n(1)$ .

O conjunto  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}; x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$  que corresponde ao octante positivo em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto de controle  $S$ -invariante. De fato, sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  com  $x_i$  e  $y_i$  estritamente positivos para qualquer  $i$ , ou seja,  $[x]$  e  $[y] \in \text{int}(C)$ . Considere  $g = \sigma \text{diag}(y_1/x_1, \dots, y_n/x_n)$  com  $\sigma = x_1, \dots, x_n/y_1, \dots, y_n$ . Dessa forma,  $g \in S$  e  $g[x] = [gx] = \sigma[y] = [y]$ , ou seja,  $[y] \in S[x]$ . Assim, para  $[x] \in \text{int}(C)$ ,  $\text{cl}(S[x]) = C$ . Como para todo  $[x] \in C$ , existe  $g \in S$  tal que  $g[x] \in \text{int}(C)$  tem-se que  $\text{cl}(S[x]) = C$ , para todo  $[x] \in C$ . Uma vez que  $C$  é fechado,  $C$  é de fato um conjunto de controle  $S$ -invariante.  $C$  é o único conjunto de controle  $S$ -invariante em  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Além disso,  $\text{Sl}^+(n, \mathbb{R})$  é o semigrupo de compressão do conjunto  $C$ , ou seja,  $\text{Sl}^+(n, \mathbb{R}) = \{g \in \text{Sl}(n, \mathbb{R}); gC \subset C\}$ . Assim,  $\mathbb{P}^{n-1}$  é o tipo parabólico de  $\text{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ .

# Capítulo 2

## Transitividade de semigrupos nos grupos de Lie simples complexos

Neste capítulo é apresentado um dos resultados principais deste trabalho, o Teorema 2.1, que trata da transitividade de determinados semigrupos de um grupo de Lie simples, conexo, complexo  $G$ .

Vale ressaltar que um grupo de Lie complexo sempre tem centro finito. Além disso, é importante lembrar que é usada a notação  $\mathfrak{g}(\alpha) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{H_\alpha\} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e  $G(\alpha) = \langle \exp \mathfrak{g}(\alpha) \rangle$ . Dessa forma  $G(\alpha)$  é um subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\alpha)$ , o qual é isomorfo a  $\text{Sl}(2, \mathbb{C})$ , grupo simplesmente conexo, cujo centro é  $Z = \{\pm \text{id}\}$ .

**Teorema 2.1** *Sejam  $G$  um grupo de Lie simples, conexo, complexo e  $S \subset G$  um semigrupo com  $\text{int}(S) \neq \emptyset$ . Se existe uma raiz  $\alpha$  tal que  $G(\alpha) \subset S$ , então  $S = G$ .*

Para provar esse teorema é usado o fato que a subálgebra  $\mathfrak{g}(\alpha)$  é isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , e assim a única variedade flag do subgrupo  $G(\alpha)$  é uma esfera  $S^2$ . Com isso em mente prova-se que em qualquer variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  existem várias  $G(\alpha)$ -órbitas que são esferas  $S^2$ . Então, assegura-se que algumas dessas órbitas estão contidas no conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta$  na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ . Finalmente, usa-se a cohomologia de De Rham da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  para provar que tais órbitas, esferas  $S^2$ , não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Portanto,  $C_\Theta$  não está contido

em um conjunto contrátil de  $\mathbb{F}_\Theta$  e o teorema segue do Corolário 1.5.

O primeiro passo para demonstrar o Teorema 2.1 é o lema a seguir, o qual reduz a prova para algumas raízes específicas.

**Lema 2.2** *Sejam  $\gamma$  e  $\beta$  raízes tais que  $\beta = w\gamma$  com  $w \in \mathcal{W}$ . Se o Teorema 2.1 vale para  $\gamma$  então vale também para  $\beta$ .*

**Demonstração:** Tome um representante  $\bar{w}$  de  $w$  no normalizador  $M^*$  de  $\mathfrak{h}$  em  $U$ . Então,  $\beta = w\gamma$  implica que  $G(\beta) = \bar{w}G(\gamma)\bar{w}^{-1}$ . Agora, se  $G(\beta) \subset S$ , então  $G(\gamma)$  está contido no semigrupo  $\bar{w}S\bar{w}^{-1}$  que tem interior não vazio, pois  $S$  tem interior não vazio. Como o Teorema 2.1 vale para raiz  $\gamma$ , então  $\bar{w}S\bar{w}^{-1} = G$  e isso implica que  $S = G$ . Portanto, o Teorema 2.1 é válido também para  $\beta$ .  $\square$

A afirmação que o grupo  $G$  é simples assegura o seguinte fato sobre a ação do grupo de Weyl  $\mathcal{W}$  no conjunto de raízes  $\Pi$ : ele é transitivo para os diagramas de Dynkin  $A_l$ ,  $D_l$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  e  $E_8$ , os quais têm apenas ligações simples. Para os outros diagramas  $B_l$ ,  $C_l$ ,  $F_4$  e  $G_2$  existem duas órbitas, as quais são dadas pela raiz longa e pela raiz curta, respectivamente.

Por outro lado,  $\mathcal{W}$  age transitivamente no conjunto das câmaras de Weyl. Logo, para qualquer  $\alpha \in \Pi$  existe uma única raiz  $\mu$  na órbita  $\mathcal{W}\alpha$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . Portanto, para os diagramas de Dynkin existe uma ou existem duas raízes com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . Pelo lema acima é suficiente provar o teorema para essas raízes.

Se  $\alpha$  é uma raiz para os diagramas de Dynkin com ligações simples ou  $\alpha$  é uma raiz longa nos outros diagramas de Dynkin, então a raiz  $\mu$  na órbita  $\mathcal{W}\alpha$  com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  é a raiz máxima. Em qualquer caso, tem-se a propriedade seguinte.

**Proposição 2.3** *Se  $\mu$  é uma raiz com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , então  $\text{supp}(\mu) = \Sigma$ .*

**Demonstração:** Se  $\{H_1, \dots, H_l\}$  é a base dual de  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ , então tem-se que  $\alpha = \alpha(H_1)\alpha_1 + \dots + \alpha(H_l)\alpha_l$  para qualquer  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ . Em particular,

$\mu = \mu(H_1)\alpha_1 + \dots + \mu(H_l)\alpha_l$ . O fecho  $\text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$  da câmara de Weyl é um cone poliedral gerado por  $H_1, \dots, H_l$ . Pela Proposição 2.4 a seguir,  $\langle A, B \rangle > 0$  para  $A, B$  não nulos no  $\text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ . Portanto, se  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ , então os coeficientes  $\mu(H_i)$  satisfazem  $\mu(H_i) = \langle H_\mu, H_i \rangle > 0$  para  $i = 1, \dots, l$  e isso implica que  $\text{supp}(\mu) = \Sigma$ .  $\square$

**Proposição 2.4**  $\langle A, B \rangle > 0$  para quaisquer  $A, B$  não nulos em  $\text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ .

**Demonstração:** Seja  $\{H_1, \dots, H_l\}$  a base dual de  $\Sigma$ . O produto interno por um elemento dessa base dá um peso fundamental de uma representação de dimensão finita. Dado  $H \in \text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ , o produto interno com  $H_i$  é um múltiplo positivo do maior autovalor de  $H$  na representação irredutível. Como o traço de  $H$  nessa representação é zero, esse maior autovalor é estritamente positivo, a menos que  $H = 0$ . Portanto,  $\langle H, H_i \rangle > 0$ . Isso implica que o produto interno entre dois  $H_i$ 's é positivo. Como a base dual gera a câmara de Weyl, o produto interno  $\langle A, B \rangle > 0$  para quaisquer  $A, B$  não nulos no  $\text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ .  $\square$

A partir deste ponto e até o fim deste capítulo,  $\mu$  representa uma das raízes com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ .

Para o próximo passo da prova do Teorema 2.1 vale lembrar a notação do capítulo anterior:  $b_\Theta$  é a origem de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$ ; seja  $\widetilde{H}_\mu$  um campo de vetores na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  cujo fluxo é  $\exp(tH_\mu)$  com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ .  $\text{att}_\Theta(H_\mu)$  é o conjunto de pontos fixos atratores de  $\widetilde{H}_\mu$  e  $\sigma_\Theta(H_\mu)$  é o conjunto estável.

Seja  $C_\Theta$  o único conjunto de controle  $S$ -invariante em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Ele é fechado,  $S$ -invariante e tem interior não vazio. Logo, encontra o conjunto denso  $\sigma_\Theta(H_\mu)$ .

**Lema 2.5** Se  $G(\mu) \subset S$ , então  $C_\Theta \cap \text{att}_\Theta(H_\mu) \neq \emptyset$ .

**Demonstração:** Sabe-se que  $C_\Theta \cap \sigma_\Theta(H_\mu) \neq \emptyset$ , então tome  $x \in C_\Theta \cap \sigma_\Theta(H_\mu)$ . Se  $x \in C_\Theta$ , então seu  $\omega$ -limite com relação a  $\widetilde{H}_\mu$ ,  $\omega(x)$ , está contido em  $C_\Theta$  pois

$\{\exp(tH_\mu) : t \in \mathbb{R}\} \subset G(\mu) \subset S$  e  $C_\Theta$  é  $S$ -invariante. Além disso, se  $x \in \sigma_\Theta(H_\mu)$ , então  $\omega(x) \subset \text{att}_\Theta(H_\mu)$ . Isso implica que  $\emptyset \neq \omega(x) \subset C_\Theta \cap \text{att}_\Theta(H_\mu)$ .  $\square$

Dessa forma, é apresentado a seguir um estudo sobre as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y \in \text{att}_\Theta(H_\mu) = Z_{H_\mu} \cdot b_\Theta$ . Primeiro, para o ponto  $y = b_\Theta$  tem-se o resultado seguinte.

**Lema 2.6** *Sejam  $b_\Theta$  a origem de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  e  $\beta$  uma raiz positiva. Então,  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  ou reduz-se a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Se  $\beta \notin \langle \Theta \rangle$ , então  $\dim(G(\beta) \cdot b_\Theta) = 2$ . Em particular,  $\dim(G(\mu) \cdot b_\Theta) = 2$  se  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .*

**Demonstração:** A ideia principal é que a órbita  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  é igual a  $b_\Theta$  ou identifica-se à única variedade flag de  $G(\beta)$  que é a mesma variedade flag de  $\text{Sl}(2, \mathbb{C})$ , a qual é uma esfera  $S^2$ , pois  $\mathfrak{g}(\beta) \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Para ver isso, denote por  $\mathfrak{g}(\beta)_{b_\Theta}$  a subálgebra de isotropia em  $b_\Theta$  para a ação de  $G(\beta)$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Ela contém a subálgebra  $\mathfrak{p}_\beta = \text{span}\{H_\beta\} \oplus \mathfrak{g}_\beta$ , a qual é uma subálgebra parabólica de  $\mathfrak{g}(\beta)$ . Isso implica que o subgrupo de isotropia em  $b_\Theta$  contém a componente da identidade do subgrupo parabólico  $P_\beta = \text{Norm}_{G(\beta)} \mathfrak{p}_\beta \subset G(\beta)$ . Mas qualquer subgrupo parabólico do grupo complexo  $G(\beta)$  é conexo, logo  $P_\beta$  está no subgrupo de isotropia em  $b_\Theta$  pela ação de  $G$ . Isso mostra que  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  ou reduz-se a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Agora, se  $\beta \notin \langle \Theta \rangle$ , então  $\mathfrak{g}_{-\beta}$  não intercepta a álgebra de isotropia  $\mathfrak{p}_\Theta$  em  $b_\Theta$ , a qual é a soma da subálgebra de Cartan com espaço de raízes. Isso implica que  $\mathfrak{g}(\beta)_{b_\Theta} = \mathfrak{p}_\beta$ , e como um subgrupo de isotropia normaliza a subálgebra de isotropia, segue que  $P_\beta$  é exatamente o subgrupo de isotropia em  $b_\Theta$  pela ação de  $G(\beta)$ . Portanto,  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  identifica-se a  $G(\beta)/P_\beta = S^2$ .

Em particular, pela Proposição 2.3, se  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , então  $\text{supp}(\mu) = \Sigma$ . Ou seja,  $\mu \notin \langle \Theta \rangle$  e assim,  $\dim(G(\mu) \cdot b_\Theta) = 2$ .  $\square$



Quando ao estudo das  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y = g \cdot b_\Theta$ ,  $g \in Z_{H_\mu}$ , escreve-se

$$G(\mu) \cdot y = g (g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta).$$

Dessa forma,  $G(\mu) \cdot y$  é difeomorfa à órbita  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$ . O grupo de Lie  $g^{-1}G(\mu)g$  tem álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\mu)^g = \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}(\mu))$ , a qual também é isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Como  $\text{Ad}(g)(H_\mu) = H_\mu$ , então

$$\mathfrak{g}(\mu)^g = \langle H_\mu \rangle \oplus \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu) \oplus \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_{-\mu}).$$

**Lema 2.7** *Sejam  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  e  $g \in Z_{H_\mu}$ . Então,  $\text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu) \subset \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$ .*

**Demonstração:** Como  $\text{Ad}(g)(H_\mu) = H_\mu$ , segue que  $\text{Ad}(g)$  comuta com  $\text{ad}(H_\mu)$  e aplica os autoespaços de  $\text{ad}(H_\mu)$  neles mesmos. Uma vez que  $\mathfrak{g}_\mu$  está contida no autoespaço de  $\text{ad}(H_\mu)$  associado a  $\mu(H_\mu)$ , segue que  $\text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu)$  está contida no mesmo autoespaço de  $\text{ad}(H_\mu)$  que contém  $\mathfrak{g}_\mu$ . Por outro lado, a hipótese  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  implica que  $\mu(H_\mu) = \langle \mu, \mu \rangle > 0$  e que os autoespaços de  $\text{ad}(H_\mu)$  associados aos autovalores positivos estão contidos em  $\mathfrak{n}^+$ . Portanto,  $\text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu) \subset \mathfrak{n}^+$ .  $\square$

**Observação:** Se  $\mu$  é a raiz máxima, então o lema acima tem um resultado mais preciso: se  $g \in Z_{H_\mu}$ , então  $g$  centraliza  $\mathfrak{g}(\mu)$  e  $G(\mu)$ ; veja Proposição 3.4 no próximo capítulo. Uma vez que  $g$  centraliza  $\mathfrak{g}(\mu)$  e  $G(\mu)$  tem-se que  $g^{-1}G(\mu)g = G(\mu)$ ,  $G(\mu) \cdot y = g(G(\mu) \cdot b_\Theta)$  e tais fatos simplificam as provas dos Lemas 2.8 e 2.9 e, conseqüentemente, do Teorema 2.1.

**Lema 2.8** *Sejam  $b_\Theta$  a origem da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  e  $\mu$  uma raiz tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . Então, para  $g \in Z_{H_\mu}$ , a órbita  $G(\mu) \cdot y = g(g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta)$  é uma esfera  $S^2$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ .*

**Demonstração:** A subálgebra  $\mathfrak{p}_\mu = \langle H_\mu \rangle \oplus \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu)$  é uma subálgebra parabólica de  $\text{Ad}(g)(\mathfrak{g}(\mu))$ . Como na prova do Lema 2.6 é suficiente verificar que  $\mathfrak{p}_\mu$  está contida na subálgebra de isotropia  $\mathfrak{g}(\mu)_{b_\Theta}^g$  pela ação de  $g^{-1}G(\mu)g$  em  $b_\Theta$ . Tem-se que

$H_\mu \in \mathfrak{g}(\mu)_{b_\Theta}^g$ . Por outro lado, pelo lema anterior  $\text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu) \subset \mathfrak{n}^+$  está contida na subálgebra de isotrofia em  $b_\Theta$  pela ação de  $G$ . Portanto,  $\mathfrak{p}_\mu \subset \mathfrak{g}(\mu)_{b_\Theta}^g$ , o que conclui a demonstração do lema.  $\square$

O lema anterior mostra que cada órbita  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$  induz uma aplicação de  $G(\mu)/P_\mu = S^2$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Denote essa aplicação por  $\sigma_{g,\mu} : S^2 \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$ .

O próximo e último passo para provar o Teorema 2.1 é verificar que as esferas  $S^2$  que aparecem no lema anterior, pelo menos uma grande parte delas, não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

A ideia é exibir uma 2-forma diferencial  $\Omega$  em  $\mathbb{F}_\Theta$  com  $d\Omega = 0$ , ou seja,  $\Omega$  é uma forma diferencial fechada, tal que o pull-back  $\nu = \sigma_{g,\mu}^* \Omega$  é uma forma volume, não nula, em  $S^2$ . Isso prova que a aplicação  $\sigma_{g,\mu}^* : H_{\text{DeR}}^2(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{R}) \rightarrow H_{\text{DeR}}^2(S^2, \mathbb{R})$  induzida na cohomologia por  $\sigma_{g,\mu}$  não é trivial, e assim,  $\sigma_{g,\mu}$  não é homotópica a uma aplicação constante.

De fato, uma forma volume  $\nu$  não nula na variedade orientável  $S^2$  é um gerador de sua cohomologia de De Rham  $H_{\text{DeR}}^2(S^2, \mathbb{R})$ , ou seja,  $d\nu = 0$  e  $\nu$  não é  $d\eta$  para uma 1-forma  $\eta$ , isto é,  $\nu$  é uma forma fechada, mas não é uma forma exata. Se  $\nu = \sigma_{g,\mu}^* \Omega$ , então  $\Omega$  também não é exata, de outra forma  $\Omega = d\omega$  implicaria que  $\nu = \sigma_{g,\mu}^* d\omega = d\sigma_{g,\mu}^* \omega$  e  $\nu$  também seria exata. Assim,  $\Omega$  representa um elemento não nulo na cohomologia de De Rham  $H_{\text{DeR}}^2(\mathbb{F}_\Theta, \mathbb{R})$  e a imagem de sua classe de cohomologia em  $\sigma_{g,\mu}^*$  é a classe de cohomologia  $[\nu] \neq 0$ .

Uma 2-forma  $\Omega$  em  $\mathbb{F}_\Theta$  que desempenha esse trabalho é uma forma simplética  $U$ -invariante associada a uma métrica Hermitiana  $U$ -invariante em  $\mathbb{F}_\Theta$  e a uma estrutura complexa em  $\mathbb{F}_\Theta$ , ou seja, uma forma de Kähler. A construção desses objetos geométricos vem de Borel [2]. Para defini-los segue-se [26].

Primeiro, para definir uma 2-forma  $\Omega$  em  $\mathbb{F}_\Theta$  é preciso uma base especial do espaço tangente  $T_{b_\Theta} \mathbb{F}_\Theta$  na origem  $b_\Theta$ . Para isso, considere uma base de Weyl de  $\mathfrak{g}$

composta por elementos  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ , com as seguintes propriedades: para cada raiz  $\alpha$ ,  $X_\alpha$  é um gerador do espaço de raízes  $\mathfrak{g}_\alpha$  satisfazendo  $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$ ; além disso, para  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,  $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}$ , onde  $m_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R}$ ,  $m_{-\alpha, -\beta} = -m_{\alpha, \beta}$  e  $m_{\alpha, \beta} = 0$  se  $\alpha + \beta$  não é raiz.

Assim, para cada raiz positiva  $\alpha$ , defina  $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ ,  $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$  e  $\mathfrak{u}_\alpha = \text{span}\{A_\alpha, S_\alpha\}$ .  $A_\alpha$  e  $S_\alpha$  pertencem a  $\mathfrak{u}$ , a forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ , a qual é a álgebra de Lie do grupo  $U$ . Pela ação transitiva de  $U$  em  $\mathbb{F}_\Theta$  consegue-se induzir campos de vetores  $\tilde{A}_\alpha$  e  $\tilde{S}_\alpha$ . Então, o conjunto  $\tilde{\mathfrak{u}}_\alpha = \{\tilde{A}_\alpha(b_\Theta), \tilde{S}_\alpha(b_\Theta) : \alpha \notin \langle \Theta \rangle\}$  é uma base real de  $T_{b_\Theta} \mathbb{F}_\Theta$ .

Agora, a 2-forma  $\Omega$  é definida em  $\mathbb{F}_\Theta$  especificando seu valor  $\Omega_0$  na origem  $b_\Theta$  e estendendo-a para todo  $\mathbb{F}_\Theta$  pela ação de  $U$ . A extensão é possível se  $\Omega_0$  é invariante pela representação de isotropia de  $U_\Theta$  em  $T_{b_\Theta} \mathbb{F}_\Theta$  com  $U_\Theta = P_\Theta \cap U$ , onde  $P_\Theta$  é o subgrupo parabólico de  $G$ . Para obter  $\Omega_0$  escolhe-se, primeiro, números reais  $\lambda_\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \Pi^+$ , satisfazendo:

1.  $\lambda_{\alpha+\beta} = \lambda_\alpha + \lambda_\beta$  se  $\alpha, \beta$  e  $\alpha + \beta$  são raízes positivas;
2.  $\lambda_{\alpha+\gamma} = \lambda_\alpha$  se  $\alpha, \gamma$  e  $\alpha + \gamma$  são raízes com  $\gamma \in \langle \Theta \rangle$ .

**Observação:** Note que os números  $\lambda_\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \Pi^+$ , definem um produto interno em  $T_{b_\Theta} \mathbb{F}_\Theta$ , o qual, pela segunda condição, é  $U_\Theta$ -invariante. Assim esse produto interno pode ser estendido, tornando-se uma métrica Riemanniana  $g$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ . A primeira condição assegura que a métrica Hermitiana construída a partir de  $g$  e de uma estrutura complexa  $J$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ , tem uma forma Kähler, a qual é simplética; veja [26, Section 2.4].

Defina  $\Omega_0$  da seguinte forma:

- se  $X = \tilde{\mathfrak{u}}_\alpha$ ,  $Y = \tilde{\mathfrak{u}}_\beta$  e  $\beta \neq -\alpha$ , então  $\Omega_0(X, Y) = 0$ ;
- se  $\alpha \in \Pi^+$ , então  $\Omega_0(\tilde{A}_\alpha(b_\Theta), \tilde{S}_\alpha(b_\Theta)) = \lambda_\alpha$ .

A condição 2 acima assegura que  $\Omega_0$  é uma 2-forma em  $T_{b_\Theta} \mathbb{F}_\Theta$   $U_\Theta$ -invariante, e assim, por translação, define uma 2-forma  $\Omega$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Por outro lado, pela condição 1, tem-se  $d\Omega = 0$ ; veja [26, Proposition 2.1].

Agora é possível provar que determinadas  $G(\mu)$ -órbitas contidas em  $C_\Theta$  são esferas  $S^2$  não homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

**Lema 2.9** *Seja  $\mu$  uma raiz positiva tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , denote por  $Z_{H_\mu}$  o centralizador de  $H_\mu$  em  $G$  e escreva  $U_{H_\mu} = Z_{H_\mu} \cap U$ . Considere  $\mathbb{F}_\Theta$  uma variedade flag de  $G$ . Então, existe um subconjunto  $V \subset \text{att}_\Theta(H_\mu) = U_{H_\mu} \cdot b_\Theta$  aberto e denso em  $\text{att}_\Theta(H_\mu)$  tal que, para todo  $y \in V$ , a órbita  $G(\mu) \cdot y$  é uma esfera  $S^2$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .*

**Demonstração:** Para qualquer  $y \in \text{att}_\Theta(H_\mu)$ , escreve-se  $y = g \cdot b_\Theta$ , onde  $g \in U_{H_\mu}$ . Considerando  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , pela Proposição 2.3,  $\text{supp}(\mu) = \Sigma$  e pelo Lema 2.6,  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$ . Assim seu espaço tangente  $T_{b_\Theta}(G(\mu) \cdot b_\Theta)$  tem a base real  $\{\tilde{A}_\mu(b_\Theta), \tilde{S}_\mu(b_\Theta)\}$ . Da mesma forma, pelo Lema 2.8,  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  e o espaço tangente de  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$  em  $b_\Theta$ , o qual é denotado simplesmente por  $T^g$ , é gerado por  $\{\tilde{A}_\mu^g(b_\Theta), \tilde{S}_\mu^g(b_\Theta)\}$ , onde  $A_\mu^g = \text{Ad}(g)(A_\mu)$  e  $S_\mu^g = \text{Ad}(g)(S_\mu)$ . Os vetores  $\tilde{A}_\mu^g(b_\Theta)$  e  $\tilde{S}_\mu^g(b_\Theta)$  são nulos ou formam uma base de  $T^g$ .

Fazendo o pull-back da forma simplética não nula  $\Omega$  para  $T^g$ , define-se a função  $\phi : U_{H_\mu} \cdot b_\Theta \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(g \cdot b_\Theta) = \Omega \left( \tilde{A}_\mu^g(b_\Theta), \tilde{S}_\mu^g(b_\Theta) \right), \quad g \in U_{H_\mu},$$

a qual é bem definida. De fato, qualquer  $g \in U_{H_\mu}$  deixa  $\Omega$  invariante e  $g \cdot b_\Theta = g_1 \cdot b_\Theta$  implica que  $\{\tilde{A}_\mu^g(b_\Theta), \tilde{S}_\mu^g(b_\Theta)\}$  e  $\{\tilde{A}_\mu^{g_1}(b_\Theta), \tilde{S}_\mu^{g_1}(b_\Theta)\}$  geram o mesmo subespaço, ou seja,  $T^g = T^{g_1}$ . Logo,  $\Omega \left( \tilde{A}_\mu^g(b_\Theta), \tilde{S}_\mu^g(b_\Theta) \right) = \Omega \left( \tilde{A}_\mu^{g_1}(b_\Theta), \tilde{S}_\mu^{g_1}(b_\Theta) \right)$ .

A função  $\phi$  é analítica, pois a aplicação  $g \mapsto \text{Ad}(g)$  é analítica. A função  $\phi$  não é identicamente nula. De fato, pelo Lema 2.6 tem-se

$$\phi(b_\Theta) = \Omega \left( \tilde{A}_\mu(b_\Theta), \tilde{S}_\mu(b_\Theta) \right) = \lambda_\mu \neq 0.$$

Logo, o subconjunto  $V = \{y \in U_{H_\mu} \cdot b_\Theta : \phi(y) \neq 0\}$  é aberto e denso em  $U_{H_\mu} \cdot b_\Theta$ . Além disso, pelo Lema 2.8, para qualquer  $y \in V$ , a órbita  $G(\mu) \cdot y$  é uma esfera  $S^2$ . E pela definição de  $V$ ,  $\phi(y) = \phi(g \cdot b_\Theta) = \Omega\left(\tilde{A}_\mu^g(b_\Theta), \tilde{S}_\mu^g(b_\Theta)\right) \neq 0$ , com  $g \in U_{H_\mu}$ . Assim  $\Omega$  é invariante por  $(g^{-1}G(\mu)g) \cap U$  e esse grupo age transitivamente em  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$ . Portanto, o pull-back de  $\Omega$  para  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$  é uma forma volume não nula, o que mostra que  $S^2 \approx g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$  é não homotópica a um ponto, se  $g \cdot b_\Theta = y \in V$ . Assim, para todo  $y \in V$ ,  $G(\mu) \cdot y = g(g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta)$  é não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .  $\square$

**Fim da prova do Teorema 2.1:** Seja  $x = ng \cdot b_\Theta \in \sigma_\Theta(H_\mu)$  com  $n \in N^-$  e  $g \in Z_{H_\mu}$ . Então  $(\exp(tH_\mu))ng \cdot b_\Theta = (\exp(tH_\mu))n(\exp(-tH_\mu))g \cdot b_\Theta$ , pois  $(\exp(-tH_\mu))g = g(\exp(-tH_\mu))$  e  $(\exp(-tH_\mu)) \cdot b_\Theta = b_\Theta$ . Como  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\exp(tH_\mu))n(\exp(-tH_\mu)) = 1$ , segue-se que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu))ng \cdot b_\Theta = g \cdot b_\Theta.$$

Seja  $V$  um subconjunto aberto e denso de  $Z_{H_\mu} \cdot b_\Theta$  satisfazendo as propriedades fornecidas pelo Lema 2.9. Então,  $N_\mu^- \cdot V$  é aberto e denso em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Como  $C_\Theta$  tem interior não vazio, pode-se encontrar  $x \in C_\Theta$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu))x = y \in C_\Theta \cap V.$$

Logo, a órbita  $G(\mu) \cdot y$  é uma esfera  $S^2$  contida em  $C_\Theta$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Isso mostra que  $C_\Theta$  não pode estar contido em um subconjunto contrátil de  $\mathbb{F}_\Theta$ . Como  $\Theta$  foi arbitrário, tem-se que  $S = G$ . Em vista do Lema 2.2, isso termina a prova do Teorema 2.1.  $\square$

**Corolário 2.10** *Seja  $S \subset G$  um semigrupo como no Teorema 2.1. Então, para qualquer  $\Theta \subset \Sigma$ ,  $S$  não tem tipo parabólico  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ .*

**Demonstração:** No tipo parabólico  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ , o conjunto de controle invariante  $C_{\Theta(S)}$  está contido num subconjunto contrátil de  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ ; veja Corolário 1.7. Assim,  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$

não pode ser projetado em nenhuma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ , onde seu conjunto de controle invariante  $C_\Theta$  não está contido num subconjunto contrátil de  $\mathbb{F}_\Theta$ . Como isso acontece para qualquer  $\Theta \subset \Sigma$ ,  $S$  não tem tipo parabólico.  $\square$

# Capítulo 3

## Grupos de Lie simples complexos - outra abordagem topológica

Neste capítulo o estudo da transitividade de alguns semigrupos de um grupo de Lie simples, conexo, complexo, visto no capítulo anterior, é feito com uma abordagem topológica diferente. Agora ao invés de usar Cohomologia de De Rham, usa-se o segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  e para isso utiliza-se a teoria de representação de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e a teoria de fibrados em variedade flag.

O resultado é um pouco mais fraco e é preciso fazer uma separação para analisar melhor o que acontece.

**Teorema 3.1** *Seja  $G$  um grupo de Lie simples, conexo, complexo com álgebra do tipo  $A_l, D_l, E_6, E_7$  e  $E_8$ . Considere  $S \subset G$  um semigrupo com  $\text{int}S \neq \emptyset$ . Então  $S = G$ , se existe uma raiz  $\alpha$  tal que  $G(\alpha) \subset S$ .*

**Teorema 3.2** *Seja  $G$  um grupo de Lie simples, conexo, complexo com álgebra do tipo  $B_l, C_l, F_4$  e  $G_2$ . Considere  $S \subset G$  um semigrupo com  $\text{int}S \neq \emptyset$ . Então  $S = G$ , se  $G(\alpha) \subset S$ , para  $\alpha$  uma raiz longa.*

Como no capítulo anterior a demonstração consiste em mostrar que em qualquer variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  existem várias  $G(\alpha)$ -órbitas que são esferas  $S^2$  contidas no conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta$  as quais não são homotópicas a um ponto em

$\mathbb{F}_\Theta$ . Além disso, o primeiro passo para demonstrar o Teorema 3.1 e o Teorema 3.2 é reduzir a prova para uma raiz  $\mu$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .

Se  $\alpha$  é uma raiz para os diagramas de Dynkin com ligações simples:  $A_l, D_l, E_6, E_7$  e  $E_8$  ou uma raiz longa para os diagramas com ligações duplas:  $B_l, C_l, F_4$  e  $G_2$ , então a raiz  $\mu$  na órbita  $\mathcal{W}\alpha$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  é a raiz máxima. Dessa forma, a prova do Teorema 3.1 e do Teorema 3.2 é reduzida apenas para a raiz máxima  $\mu$ .

**Observação:** Note que no capítulo anterior a prova é feita para uma raiz  $\mu$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . E foi usado o pull-back da forma simplética não nula  $\Omega$  para mostrar que as  $G(\mu)$ -órbitas não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Aqui, com a abordagem topológica que é utilizada, a princípio, só é possível fazer para  $\mu$  raiz máxima. No capítulo anterior se  $\mu$  é a raiz máxima, então as provas ficam mais rápidas.

A partir daqui até o fim deste capítulo  $\mu$  é a raiz máxima.

Para o próximo passo é lembrada a notação:  $b_\Theta$  é a origem de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$ ; seja  $\tilde{H}_\mu$  um campo de vetores na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  cujo fluxo é  $\exp(tH_\mu)$  com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .  $\text{att}_\Theta(H_\mu)$  é o conjunto de pontos fixos atratores de  $\tilde{H}_\mu$  e  $\sigma_\Theta(H_\mu)$  é o conjunto estável;  $C_\Theta$  é o único conjunto de controle  $S$ -invariante em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Além disso,  $C_\Theta$  encontra o conjunto denso  $\sigma_\Theta(H_\mu)$ . E isso implica que se  $G(\mu) \subset S$ , então  $C_\Theta \cap \text{att}_\Theta(H_\mu) \neq \emptyset$ ; veja Lema 2.5.

Dessa forma, como no capítulo anterior, estuda-se as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y \in \text{att}_\Theta(H_\mu) = Z_{H_\mu} \cdot b_\Theta$ . Primeiro, para o ponto  $y = b_\Theta$  tem-se o seguinte resultado.

**Lema 3.3** *Sejam  $b_\Theta$  a origem de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  e  $\mu$  a raiz máxima. Então  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ .*

**Demonstração:** A prova segue do Lema 2.6 e do fato que a raiz máxima  $\mu \notin \langle \Theta \rangle$  e assim,  $\dim(G(\mu) \cdot b_\Theta) = 2$ . □



Quanto ao estudo das  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y = g \cdot b_\Theta$ ,  $g \in Z_{H_\mu}$ , escreve-se

$$G(\mu) \cdot y = g (g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta).$$

Dessa forma,  $G(\mu) \cdot y$  é difeomorfa à órbita  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$ . O grupo de Lie  $g^{-1}G(\mu)g$  tem álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\mu)^g = \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}(\mu))$ , a qual também é isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

A próxima proposição diz respeito àquilo que foi observado, no capítulo anterior, logo após a demonstração do Lema 2.7. Observe que essa proposição assegura que para a raiz máxima  $gG(\mu)g^{-1} = G(\mu)$ ,  $g \in Z_{H_\mu}$  e o conjunto  $V$  do Lema 2.9 é  $\text{att}_\Theta(H_\mu)$ .

**Proposição 3.4** *Seja  $\mu$  a raiz máxima e suponha que  $g \in G$  centraliza  $H_\mu$ , ou seja,  $\text{Ad}(g)(H_\mu) = H_\mu$ . Então,  $g$  normaliza  $G(\mu)$ . Na verdade,  $g$  comuta com todo  $h \in G(\mu)$ .*

**Demonstração:** Seja  $Z_{H_\mu}$  o centralizador de  $H_\mu$  em  $G$ . O grupo  $Z_{H_\mu}$  é um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{z}_{H_\mu} = \ker \text{ad}(H_\mu)$ , o centralizador de  $H_\mu$  em  $\mathfrak{g}$ . Pela decomposição de espaço de raízes tem-se que

$$\mathfrak{z}_{H_\mu} = \mathfrak{h} + \sum_{\beta(H_\mu)=0} \mathfrak{g}_\beta.$$

Escreva  $\Theta_{H_\mu} = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H_\mu) = 0\}$ . Então, a raiz  $\beta$  anula  $H_\mu$  se, e somente se,  $\text{supp}(\beta) \subset \Theta_{H_\mu}$ . Isso segue do fato que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , ou seja, se  $\alpha \notin \Theta_{H_\mu}$ , então  $\alpha(H_\mu) > 0$ .

Tome a raiz  $\beta$  com  $\beta(H_\mu) = \langle \beta, \mu \rangle = 0$ . Então,  $\mu \pm \beta$  não são raízes. De fato, se  $\beta > 0$ , então  $\mu + \beta$  não é raiz. Assim, pela fórmula de Killing, a ortogonalidade  $\langle \beta, \mu \rangle = 0$  implica que  $\mu - \beta$  não é uma raiz. Tem-se também que  $-\mu \pm \beta$  não são raízes. Portanto, se  $\beta(H_\mu) = 0$ , então  $[\mathfrak{g}_{\pm\mu}, \mathfrak{g}_\beta] = 0$  e, como  $\mathfrak{h}$  é abeliano conclui-se que  $[X, \mathfrak{g}(\mu)] = 0$  se  $X \in \mathfrak{z}_{H_\mu}$ .

Como o grupo  $G$  é complexo, tem-se que  $Z_{H_\mu}$  é conexo. Assim, a comutatividade entre  $\mathfrak{z}_{H_\mu}$  e  $\mathfrak{g}(\mu)$  implica que  $\text{Ad}(g)(Y) = Y$  para qualquer  $Y \in \mathfrak{z}_{H_\mu}$ . Isso implica

que os elementos de  $Z_{H_\mu}$  comutam com os elementos de  $G(\mu)$ . □

**Corolário 3.5** *Seja  $\mu$  a raiz máxima e denote por  $Z_{H_\mu}$  o centralizador de  $H_\mu$  em  $G$ . Considere  $\mathbb{F}_\Theta$  uma variedade flag de  $G$ . Então, para qualquer  $g \in Z_{H_\mu}$ , a órbita  $G(\mu) \cdot gb_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ .*

O próximo e último passo para provar o Teorema 3.1 e o Teorema 3.2 é verificar que essas esferas  $S^2$  não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Note que provando que a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ , pelo Corolário 3.5, tem-se que para qualquer  $g \in Z_{H_\mu}$ , a órbita  $G(\mu) \cdot gb_\Theta = g(G(\mu) \cdot b_\Theta)$  é uma esfera  $S^2$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Para mostrar que a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ , verifica-se que a aplicação  $\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$  não é homotópica a uma aplicação constante, ou seja,  $\varphi$  é um elemento não trivial do segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Para verificar que  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  não é homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ , a ideia é construir um fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$  sobre  $\mathbb{F}_\Theta$  cuja restrição de  $Q$  a  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  não é trivial. Dessa forma,  $\pi|_{S^2}$  será um fibrado principal não trivial e assim,  $\pi|_{S^2}$  será um elemento não trivial em  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$ . Uma maneira de fazer isso é construindo um fibrado vetorial  $\eta : V \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$  sobre  $\mathbb{F}_\Theta$ , cujo fibrado das bases é um fibrado principal não trivial.

Nesse caso, basta considerar os fibrados vetoriais complexos de dimensão 1, ou seja, os fibrados de retas complexas. Note que o fibrado das bases de um fibrado deste tipo é um fibrado principal cujo grupo estrutural é o grupo abeliano conexo  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Para prosseguir é necessário apresentar um resultado clássico.

**Proposição 3.6** *Seja  $L$  um grupo de Lie conexo. Então as classes de equivalência dos fibrados principais sobre  $S^2$  cujo grupo estrutural é  $L$  estão em bijeção com o grupo fundamental  $\pi_1(L)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\phi : P \rightarrow S^2$  um  $L$ -fibrado, ou seja, o grupo  $L$  age livre e continuamente em  $P$  de modo que as fibras de  $P$  são as órbitas de  $L$  em  $P$ .

Tome dois pontos  $P_1$  e  $P_2$  em  $S^2$ , por exemplo o polo norte e o polo Sul. Então  $S^2 \setminus \{P_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , é difeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ . Assim, restringindo  $P$  a  $S^2 \setminus \{P_i\}$ ,  $i = 1, 2$ , tem-se que  $\phi|_{S^2 \setminus \{P_i\}} : S^2 \setminus \{P_i\} \rightarrow P$  é um fibrado trivial. Logo, existem seções  $\chi_i : S^2 \setminus \{P_i\} \rightarrow P$ ,  $i = 1, 2$ .

Agora tome  $x$  no equador, um  $S^1$ , que está na interseção dos domínios das seções e considere a função característica do fibrado  $a : S^1 \rightarrow L$ . Então pode-se escrever  $\chi_1(x) = \chi_2(x) \cdot a(x)$ , uma vez que o grupo  $L$  age livre e continuamente em  $P$ .

Portanto, a classe de homotopia  $[a]$  determina a classe de equivalência do fibrado principal  $\phi : P \rightarrow S^2$ . □

Assim, a proposição anterior diz que as classes de equivalência dos fibrados de retas complexas sobre  $S^2$ , cujo grupo estrutural é  $\mathbb{C}^*$ , estão em bijeção com o grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$ .

Por outro lado, fibrados de retas sobre  $\mathbb{F}_\Theta$  podem ser obtidos via representações. De fato, seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie do grupo  $G$ . Sejam  $\lambda = n_1\lambda_1 + \dots + n_l\lambda_l$ , com  $n_i \geq 0$  um peso máximo de  $\mathfrak{g}$  e  $V_\lambda = \{v \in V, Hv = \lambda(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$  subespaço associado ao peso  $\lambda$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de dimensão finita.

Considere a representação fiel  $\rho_\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V_\lambda)$ . Tome  $v \in V_\lambda$  um vetor de peso máximo, ou seja  $\rho_\lambda(H)v = \lambda(H)v$  e  $\rho_\lambda(\mathfrak{n}^+)V_\lambda = 0$ , onde  $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$ . Denote por  $G_\lambda$  o grupo linear conexo cuja álgebra de Lie é  $\rho_\lambda(\mathfrak{g})$ . Como a representação  $\rho_\lambda$  é fiel, então  $\rho_\lambda(\mathfrak{g}) \approx \mathfrak{g}$ . Ou seja,  $G_\lambda$  é um grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Como o grupo  $G_\lambda$  age em  $V_\lambda$  temos que  $G_\lambda$  age no espaço projetivo complexo  $\mathbb{P}V_\lambda$  de  $V_\lambda$ . Assim, pode-se considerar a órbita projetiva  $G_\lambda \cdot [v]$  e tem-se o seguinte resultado.

**Proposição 3.7** *Seja  $G_\lambda$  grupo de Lie com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . A órbita projetiva  $G_\lambda \cdot [v]$  se identifica à variedade flag  $\mathbb{F}_{\Theta_\lambda}$ , onde*

$$\Theta_\lambda = \{\alpha_i \in \Sigma : n_i = 0\}$$

e o peso máximo é  $\lambda = n_1\lambda_1 + \dots + n_l\lambda_l$ .

**Demonstração:** A álgebra de isotropia em  $[v]$  contém  $\mathfrak{p}_{\Theta_\lambda}$  que é uma subálgebra parabólica de  $\mathfrak{g}$ . Então o grupo de isotropia em  $[v]$  contém a componente conexa de um  $P_{\Theta_\lambda}$  subgrupo parabólico do grupo  $G_\lambda$ . Como o grupo  $G(\lambda)$  é complexo, um subgrupo parabólico  $P_{\Theta_\lambda}$  é conexo. Logo, o subgrupo de isotropia é um subgrupo parabólico  $P_{\Theta_\lambda}$ . Portanto, a órbita projetiva  $G_\lambda \cdot [v]$  se identifica à variedade flag  $\mathbb{F}_{\Theta_\lambda}$ .  $\square$

Uma representação  $\rho_\lambda$  da forma acima induz um fibrado de retas complexos sobre  $\mathbb{F}_{\Theta_\lambda}$ . Para isso, basta tomar o fibrado tautológico  $V_\lambda \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}V_\lambda$  sobre o espaço projetivo  $\mathbb{P}V_\lambda$  cuja fibra sobre  $x \in \mathbb{P}V_\lambda$  é o próprio subespaço  $x$  dentro de  $V_\lambda$ .

Em particular, cada representação complexa irredutível de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  induz um fibrado de retas sobre  $S^2$ . De fato, as representações de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  são parametrizadas por  $\mathbb{Z}_+$ , pois existe um único peso fundamental  $\Phi = \{\lambda = \lambda_1\}$  e todos os pesos máximos são dados por  $\lambda_n = n\lambda, n \in \mathbb{Z}_+$ . Tem-se que a representação com peso máximo  $n \geq 0$  tem dimensão  $n + 1$ . Além disso, a órbita projetiva de cada vetor de peso máximo  $[v]$  é a única variedade flag de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , isto é,  $S^2$ . Assim, cada representação complexa irredutível de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  dada por  $\mathbb{Z}_+$  define um fibrado de retas sobre  $S^2$ .

Para continuar a prova precisa-se de outro resultado, o qual já é conhecido.

**Proposição 3.8** *Se a representação não é trivial, isto é, se tem dimensão  $n \geq 1$ , então o fibrado de retas sobre  $S^2$  induzido na órbita do peso máximo não é trivial. De fato, o fibrado de retas é dado pela classe de homotopia  $n \in \pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.6, a classe de homotopia da função característica  $a : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$  determina a classe de equivalência do fibrado de retas complexas  $\phi : P \rightarrow S^2$  sobre  $S^2$ .

Então a demonstração consiste em construir a aplicação característica  $a : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$  que determina o fibrado de retas dado pela representação de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  do peso máximo.

Considere

$$\left\{ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

a base de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Seja  $\rho_n : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  a representação irredutível de peso máximo  $n$  e dimensão  $n + 1$ . Então seja  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  base do espaço vetorial  $V$  tal que  $\rho_n(H)v_i = (n - 2i)v_i$ ,  $\rho_n(Y)v_i = v_{i+1}$  e  $\rho_n(X)v_i = a_i v_{i-1}$  com  $a_i > 0$ , onde  $v_0$  é o vetor de peso máximo e  $v_n$  é o vetor de peso mínimo.

O elemento  $Y$  da base de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  gera a subálgebra nilpotente  $\mathfrak{n}^-$ . Assim, o conjunto  $\{[(\exp(z\rho_n(Y)))v_0] \in S^2, \mathbb{Z} \in \mathbb{C}\}$  é uma célula aberta de Bruhat. Portanto, esse conjunto é aberto e denso e difeomorfo a um espaço euclidiano. Na verdade, esse conjunto é  $S^2 \setminus \{[v_n]\}$ , pois  $[v_n]$  é o vetor de peso mínimo.

Além disso, tem-se o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{[v_n]\} \\ z &\longmapsto [(\exp(z\rho_n(Y)))v_0]. \end{aligned}$$

Usando esse difeomorfismo obtém-se a seguinte seção do fibrado tautológico sobre  $S^2 \setminus \{[v_n]\}$

$$\chi_1 : \begin{array}{ccc} S^2 \setminus [v_n] & \longrightarrow & S^2 \setminus \{v_n\} \\ [(\exp(z\rho_n(Y)))v_0] & \longmapsto & (\exp(z\rho_n(Y)))v_0. \end{array}$$

Da mesma forma, a aplicação

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{C} &\longrightarrow S^2 \setminus \{[v_0]\} \\ z &\longmapsto [(\exp(z\rho_n(X)))v_n]\end{aligned}$$

é um difeomorfismo e tem-se a seguinte seção sobre  $S^2 \setminus \{[v_0]\}$

$$\begin{aligned}\chi_2 : S^2 \setminus [v_0] &\longrightarrow S^2 \setminus \{v_0\} \\ [(\exp(z\rho_n(X)))v_n] &\longmapsto (\exp(z\rho_n(X)))v_n.\end{aligned}$$

Retirando o zero dos domínios de  $\phi$  e  $\psi$  tem-se o difeomorfismo mudança de base  $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Pela forma das matrizes de  $\rho_n(Y)$  e  $\rho_n(X)$  na base dada, segue que

$$(\exp(z\rho_n(Y)))v_0 = \left(1, z, \frac{z^2}{2!}, \dots, \frac{z^n}{n!}\right)$$

$$(\exp(z\rho_n(X)))v_n = (P_n(z), \dots, P_2(z), P_1(z), 1)$$

onde cada  $P_i(z)$ , para  $i = 2, \dots, n$ , é um polinômio com coeficientes positivos,  $P_1(z) = a_n z$ , onde  $a_n > 0$  é o mesmo que aparece na matriz  $\rho_n(X)$ .

Assim, dois elementos  $(x_1, \dots, x_n, 1)$  e  $(y_1, \dots, y_n, 1)$  definem o mesmo elemento no espaço projetivo se, e somente se,  $x_i = y_i$ . Dessa forma, a mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  é dada por  $z \longmapsto \frac{n}{a_n z}$ . Restrita ao círculo  $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ , essa mudança de coordenadas é dada por  $z \longmapsto \frac{n}{a_n} \bar{z} = \frac{n}{z}$ .

Em termos da primeira parametrização as seções  $\chi_1$  e  $\chi_2$  restritas a  $S^1$  são dadas da seguinte forma:

$$\chi_1 \left[ \left(1, z, \frac{z^2}{2!}, \dots, \frac{z^n}{n!}\right) \right] = \left(1, z, \frac{z^2}{2!}, \dots, \frac{z^n}{n!}\right);$$

e

$$\chi_2 \left[ \left(1, z, \frac{z^2}{2!}, \dots, \frac{z^n}{n!}\right) \right] = \frac{1}{z^n/n!} \left(1, z, \frac{z^2}{2!}, \dots, \frac{z^n}{n!}\right),$$

pois a função de mudança de coordenadas é dada por divisão por  $z^n/n!$ . Assim existe uma função  $a : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^*$  tal que  $\chi_1(x) = \chi_2(x) \cdot a(x)$ . A função  $a$  é a função característica do fibrado e é dada por  $a(z) = z^n/n!$ , com  $|z| = 1$ , cuja classe de

homotopia é  $n$ . □

**Fim da prova do Teorema 3.1 e do Teorema 3.2:** Seja  $\mathbb{F}_\Theta$  uma variedade flag de  $G$  e considere uma representação  $\rho_\lambda : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \approx \mathfrak{g}(\mu) \rightarrow V_\lambda$  cuja órbita projetiva do vetor de peso máximo  $v_\lambda$  seja exatamente  $\mathbb{F}_\Theta$ . Então o elemento  $[v_\lambda]$  é a origem da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  e a órbita projetiva  $G(\mu) \cdot [v_\lambda]$  é  $S^2$ .

O fibrado tautológico sobre o espaço projetivo  $\mathbb{P}V_\lambda$  de  $V_\lambda$  induz um fibrado sobre  $\mathbb{F}_\Theta$ , o qual induz um fibrado de retas complexas  $\varphi_1 : E \rightarrow S^2$  sobre a órbita  $S^2 = G(\mu) \cdot [v_\lambda]$ . Para terminar a demonstração, basta verificar que o fibrado  $\varphi_1 : E \rightarrow S^2$  não é trivial. Para isso, verifica-se que o fibrado  $\varphi_1$  vem de uma representação irreduzível e não trivial, como afirma a Proposição 3.8.

Assim, sejam  $X_{\pm\mu} \in \mathfrak{g}_{\pm\mu}$  e  $H_\mu$  vetores que formam uma base para  $\mathfrak{g}(\mu)$  que é isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , onde  $\mu$  é a raiz máxima. Seja  $v_\lambda \in V_\lambda$  o vetor de peso máximo. Então  $\rho_\lambda(H_\mu)v_\lambda = \lambda(H_\mu)v_\lambda$  e  $\rho_\lambda(X_\mu)v_\lambda = 0$ .

O subespaço cíclico  $W \subset V_\lambda$  gerado por

$$v_\lambda, \rho_\lambda(X_{-\mu})v_\lambda, \rho_\lambda(X_{-\mu})^2v_\lambda, \dots, \rho_\lambda(X_{-\mu})^k v_\lambda, \dots$$

é invariante por  $\rho_\lambda(\mathfrak{g}(\mu))$  e a representação  $\rho_{\lambda_W} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \approx \mathfrak{g}(\mu) \rightarrow W$  é irreduzível.

Além disso,  $v_\lambda \in W \subset V_\lambda$  também é vetor de peso máximo para a representação  $\rho_{\lambda_W}$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot v_\lambda$  fica dentro do subespaço cíclico  $W$  e isso garante que a órbita projetiva  $G(\mu) \cdot [v_\lambda]$  fica dentro do espaço projetivo  $\mathbb{P}W$ .

Então o fibrado tautológico sobre  $\mathbb{P}W$  induz um fibrado de retas complexas sobre  $S^2$ . Assim, o fibrado  $\varphi_1 : E \rightarrow S^2$  não é trivial pois vem da representação não trivial  $\rho_{\lambda_W} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \approx \mathfrak{g}(\mu) \rightarrow W$ . Note que a representação  $\rho_{\lambda_W}$  não é trivial pois a órbita  $G(\mu) \cdot [v_\lambda]$  é  $S^2$ , como afirma o Lema 3.3. Portanto, o fibrado de retas  $\varphi_1 : E \rightarrow S^2$  sobre a órbita  $S^2 = G(\mu) \cdot [v_\lambda]$  não é trivial.

Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^2$  contida em  $C_\Theta$  não homotópica a um

ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Seja  $x = ng \cdot b_\Theta \in \sigma_\Theta(H_\mu)$  com  $n \in N^-$  e  $g \in Z_{H_\mu}$ . Então,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu)) ng \cdot b_\Theta = g \cdot b_\Theta.$$

Como  $C_\Theta$  tem interior não vazio, pode-se encontrar  $x \in C_\Theta$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu)) x = gb_\Theta \in C_\Theta \cap \text{att}_\Theta(H_\mu).$$

Logo, para  $g \in Z_{H_\mu}$  a órbita  $G(\mu) \cdot gb_\Theta = g(G(\mu) \cdot b_\Theta)$  é uma esfera  $S^2$  contida em  $C_\Theta$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Isso mostra que  $C_\Theta$  não está contido em um subconjunto contrátil de  $\mathbb{F}_\Theta$ . Como  $\Theta$  foi arbitrário, tem-se que  $S = G$ . Isso termina a prova do Teorema 3.1 e do Teorema 3.2.  $\square$

**Corolário 3.9** *Seja  $S \subset G$  um semigrupo como no Teorema 3.1 e no Teorema 3.2. Então, para qualquer  $\Theta \subset \Sigma$ ,  $S$  não tem tipo parabólico  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ .*

**Demonstração:** Prova semelhante à prova do corolário 3.9.  $\square$

**Observação:** Note que no capítulo anterior a prova do Teorema 3.1 e do Teorema 3.2 foi feita sem considerar que  $\mu$  é a raiz máxima e apenas usando o fato que  $\mu$  é uma raiz tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , mas com essa abordagem topológica, para uma raiz  $\mu$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , a qual não é a máxima, não é possível concluir que  $G(\mu) \cdot gb_\Theta$  com  $g \in Z_{H_\mu}$  não é homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Por esse motivo que o Teorema 3.2 foi enunciado apenas para  $\alpha$  uma raiz longa, pois para uma raiz curta dos diagramas  $B_l$ ,  $C_l$ ,  $F_4$  e  $G_2$ , a prova do Teorema 3.2 teria que ser reduzida para uma uma raiz  $\mu$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  e não para a raiz máxima.



# Capítulo 4

## Transitividade de semigrupos nos grupos de Lie simples reais

Neste capítulo é apresentado um outro resultado importante deste trabalho, o Teorema 4.1, que trata da transitividade de alguns semigrupos de um grupo de Lie  $G$  simples real, conexo, não compacto, com centro finito e cuja álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal de uma álgebra clássica. Esse resultado é semelhante ao Teorema 2.1, ao Teorema 3.1 e ao Teorema 3.2 vistos nos capítulos anteriores que tratam da transitividade de certos semigrupos de um grupo de Lie simples complexo.

É importante dizer que aqui é empregada a notação  $\mathfrak{g}(\alpha) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{H_\alpha\} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  e  $G(\alpha) = \langle \exp \mathfrak{g}(\alpha) \rangle$ . Dessa forma,  $G(\alpha)$  é um subgrupo de Lie conexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\alpha)$ , o qual é isomorfo a  $\widetilde{\text{Sl}}(2, \mathbb{R})/D$ , onde  $D$  é um subgrupo discreto central e  $\widetilde{\text{Sl}}(2, \mathbb{R})$  é recobrimento universal de  $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$ .

**Teorema 4.1** *Seja  $G$  um grupo de Lie simples real, conexo, não compacto, com centro finito e cuja álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal de uma álgebra de Lie clássica  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . Além disso, seja  $S \subset G$  um semigrupo com  $\text{int}(S) \neq \emptyset$ . Se existe uma raiz  $\alpha$  tal que  $G(\alpha) \subset S$ , então  $S = G$ .*

Para provar esse teorema usa-se o fato que  $\mathfrak{g}(\alpha)$  é isomorfo a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , e assim, a única variedade flag de  $G(\alpha)$  é uma esfera  $S^1$ . Dessa forma, prova-se que em qualquer variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  existem várias  $G(\alpha)$ -órbitas que são  $S^1$ . Então,

assegura-se que algumas dessas órbitas estão contidas no conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Finalmente, aplica-se um método algébrico para encontrar um representante não trivial dessas órbitas no grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$ . E com isso, prova que tais órbitas, que são esferas  $S^1$ , não são homotópicas a um ponto. Então,  $C_\Theta$  não está contido num conjunto contrátil e o teorema segue pelo Corolário 1.5.

Vale ressaltar que os métodos utilizados, nos capítulos anteriores, para um grupo de Lie simples complexo não funciona para o grupo de Lie real. De fato, o método do capítulo 2 que utiliza a cohomologia de De Rham não funciona no caso real, pois não existem  $p$ -formas diferenciais não nulas em  $S^1$  para  $p > 1$ . Assim, a cohomologia de De Rham  $H_{\text{DeR}}^p(S^1, \mathbb{R}) = 0$  para  $p > 1$ .

O método do capítulo 3 que utiliza fibrados pode ser usado no caso real para fibrados de dimensão real um, mas não soluciona o problema de mostrar, para todos os casos que várias  $G(\alpha)$ -órbitas não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . De fato, as representações irredutíveis de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  também são dadas por  $n \in \mathbb{Z}_+$ , como no caso complexo, e em cada uma delas a órbita projetiva do peso máximo é uma esfera  $S^1$ . Além disso, as funções características desses fibrados são determinados da mesma maneira que na Proposição 3.8 e assim, vale que a função característica do fibrado é  $a(x) = x^n/n!$ , com  $|x| = 1$ .

A diferença é que no caso real, se  $n$  é par, então o fibrado é trivial, uma vez que  $x^2 > 0$ , e assim não é possível concluir que as órbitas  $S^1$  não são homotópicas a um ponto. Então, no caso real se for considerar as representações de dimensão finita, como foi feito no caso complexo, sempre vão aparecer representações de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  par, quando o peso máximo  $n$  for par, e isso não ajuda mostrar que várias  $G(\alpha)$ -órbitas são esferas  $S^1$  não homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Da mesma forma que no caso do grupo de Lie simples complexo, o primeiro passo para demonstrar o Teorema 4.1 é reduzir a prova para uma raiz  $\mu$  tal que

$H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .

Se  $\alpha$  é uma raiz para os diagramas de Dynkin com ligações simples ou é uma raiz longa para os outros diagramas de Dynkin, então a raiz  $\mu$  na órbita  $\mathcal{W}\alpha$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  é a raiz máxima. Mas para todos os diagramas de Dynkin, uma raiz  $\mu$  com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  tem suporte total, ou seja,  $\text{supp}(\mu) = \Sigma$ ; veja Proposição 2.3.

A partir desse ponto até o fim deste capítulo,  $\mu$  representa uma das raízes com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .

Para o próximo passo é lembrada a notação:  $b_\Theta$  é a origem de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$ ; seja  $\tilde{H}_\mu$  um campo de vetores na variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  cujo fluxo é  $\exp(tH_\mu)$  com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .  $\text{att}_\Theta(H_\mu)$  é o conjunto de pontos fixos atratores de  $\tilde{H}_\mu$  e  $\sigma_\Theta(H_\mu)$  é o conjunto estável;  $C_\Theta$  é o único conjunto de controle  $S$ -invariante em  $\mathbb{F}_\Theta$  e encontra o conjunto denso  $\sigma_\Theta(H_\mu)$ . Além disso, se  $G(\mu) \subset S$ , então  $C_\Theta \cap \text{att}_\Theta(H_\mu)$ ; veja Lema 2.5.

Dessa forma, como no caso dos grupos de Lie simples complexos, estuda-se as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y \in \text{att}_\Theta(H_\mu) = Z_{H_\mu} \cdot b_\Theta = K_{H_\mu} \cdot b_\Theta$ , onde  $Z_{H_\mu}$  é o centralizador de  $H_\mu$  em  $G$  e  $K_{H_\mu} = Z_{H_\mu} \cap K$  onde  $K$  é o subgrupo compacto de  $G$ . Primeiro, para o ponto  $y = b_\Theta$  tem-se o seguinte resultado.

**Lema 4.2** *Sejam  $b_\Theta$  a origem de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  e  $\beta$  uma raiz positiva. Então,  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  ou reduz-se a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Se  $\beta \notin \langle \Theta \rangle$ , então  $\dim(G(\beta) \cdot b_\Theta) = 1$ . Em particular,  $\dim(G(\mu) \cdot b_\Theta) = 1$  se  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .*

**Demonstração:** A prova é semelhante ao caso do grupo de Lie simples complexo; veja Lema 2.6. Mas neste caso, a órbita  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  é igual a  $b_\Theta$  ou é a única variedade flag de  $G(\beta)$ . Como  $\mathfrak{g}(\beta) \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , a única variedade flag de  $G(\beta)$  é a mesma variedade flag de  $\text{Sl}(2, \mathbb{R})$ , a qual é  $S^1$ .

Se  $\beta \notin \langle \Theta \rangle$ , então  $\mathfrak{g}(\beta)_{b_\Theta}$  é a subálgebra de isotropia em  $b_\Theta$  para a ação de  $G(\beta)$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ , a qual é  $\mathfrak{p}_\beta$ , uma subálgebra parabólica de  $\mathfrak{g}(\beta)$ .

A diferença é que no caso real, o subgrupo de isotropia não é necessariamente um subgrupo parabólico de  $G(\beta)$ , pois o subgrupo parabólico não é necessariamente conexo. De qualquer forma, o subgrupo de isotropia contém a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico de  $G(\beta)$ . Então, a órbita  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  é um recobrimento do flag de  $\mathfrak{g}(\beta)$ , o qual é uma esfera  $S^1$ .

Uma vez que o centro do grupo  $G$  é finito, o centro do grupo  $G(\beta)$  também é finito, e assim, o subgrupo parabólico tem um número finito de componentes conexas, e isso implica que a órbita  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  é um recobrimento finito para  $S^1$ . Logo,  $G(\beta) \cdot b_\Theta$  identifica-se a  $G(\beta)/P_\beta = S^1$ .

Em particular, se  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , então  $\mu \notin \langle \Theta \rangle$  e  $\dim(G(\mu) \cdot b_\Theta) = 1$ .  $\square$

Agora, estuda-se as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y = g \cdot b_\Theta$ ,  $g \in Z_{H_\mu}$ . Para isso, considere  $(K_{H_\mu})_0$  a componente conexa de  $K_{H_\mu}$ .

A órbita  $Z_{H_\mu} \cdot b_\Theta$  de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  também coincide com a órbita  $(K_\mu)_0 \cdot b_\Theta$ , ou seja,  $Z_{H_\mu} \cdot b_\Theta = (K_{H_\mu})_0 \cdot b_\Theta$ . Assim, ao invés de estudar as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y = g \cdot b_\Theta$ ,  $g \in Z_{H_\mu}$ , estuda-se nos pontos  $b = u \cdot b_\Theta$  com  $u \in (K_{H_\mu})_0$ . Tem-se que

$$G(\mu) \cdot b = u (u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta.$$

O grupo  $u^{-1}G(\mu)u$  é isomorfo a  $G(\mu)$  e sua álgebra de Lie  $\text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}(\mu)$  é isomorfa a  $\mathfrak{g}(\mu)$ , isto é,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Como  $u$  centraliza  $H_\mu$ , a decomposição de  $\text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}(\mu)$  em espaços de raízes é dada por

$$\text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}(\mu) = \langle H_\mu \rangle \oplus \text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}_\mu \oplus \text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}_{-\mu}$$

e o isomorfismo com  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  associa  $H_\mu$  com

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

O subespaço  $\mathfrak{p}_u = \langle H_\mu \rangle \oplus \text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}_\mu$  é uma subálgebra parabólica de  $\text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}(\mu)$ . Denote por  $P_u$  o subgrupo parabólico correspondente.

**Proposição 4.3** *O subgrupo  $P_u$  está contido no subgrupo de isotropia de  $b_\Theta$  pela ação do grupo  $u^{-1}G(\mu)u$ .*

**Demonstração:** Tem-se que  $\langle H_\mu \rangle$  está contido na álgebra de isotropia, pois  $b_\Theta$  é ponto fixo de  $\exp(tH_\mu)$ . Para ver que o mesmo ocorre com  $\text{Ad}(u^{-1})(\mathfrak{g}_\mu)$ , observe que se  $X \in \text{Ad}(u^{-1})(\mathfrak{g}_\mu)$  então,  $\text{ad}(H_\mu)(X) = \mu(H_\mu)X$  com  $\mu(H_\mu) = \langle \mu, \mu \rangle > 0$ . Então,  $\exp(t)\text{ad}(H_\mu)(X) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , o que implica que se  $n = \exp(X)$  então  $e^{tH_\mu}ne^{-tH_\mu} \rightarrow 1$  se  $t \rightarrow -\infty$ . Esse limite implica que  $e^{tH_\mu}nb_\Theta \rightarrow b_\Theta$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , o que significa que  $nb_\Theta$  pertence à variedade instável de  $b_\Theta$  em relação ao fluxo  $e^{tH_\mu}$ .

Porém, o fluxo  $e^{tH_\mu}$  é o fluxo de um campo gradiente em que  $b_\Theta$  pertence a uma componente atratora, já que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . Isso significa que a variedade instável se reduz a  $b_\Theta$ . Daí que  $nb_\Theta = b_\Theta$ , o que implica que  $\text{Ad}(u^{-1})(\mathfrak{g}_\mu)$  está contido na álgebra de isotropia, mostrando que  $\mathfrak{p}_u$  está contida na álgebra de isotropia.

Portanto, a componente conexa da identidade  $(P_u)_0$  de  $P_u$  está contida no subgrupo de isotropia. No grupo real, o subgrupo  $P_u$  pode não ser conexo, mas o centro  $Z(G(\mu))$  está contido no centralizador  $M$  da subálgebra  $\mathfrak{a}$  em  $K$ ; veja Proposição 4.5 abaixo, isto é,  $Z(G(\mu))$  está contido no subgrupo de isotropia. Como  $P_u = Z(G(\mu))(P_u)_0$ , segue que  $P_u$  está contido no grupo de isotropia.  $\square$

O seguinte lema implica que  $(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ , uma vez que pelo Lema 4.2,  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

**Lema 4.4** *A órbita  $(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  é homotópica à órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$ , por uma homotopia que fixa  $b_\Theta$ .*

**Demonstração:** Seja  $u_t \in (K_{H_\mu})_0$ ,  $t \in [0, 1]$ , uma curva contínua tal que  $u_0 = 1$  e  $u_1 = u$ . Defina a função contínua  $\psi : [0, 1] \times G(\mu) \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$  por

$$\psi(t, g) = u_t^{-1}gu_t \cdot b_\Theta.$$

Essa função passa ao quociente

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times G(\mu) & \longrightarrow & \mathbb{F}_\Theta \\ \downarrow & \nearrow & \\ [0, 1] \times (G(\mu)/P_\mu) & & \end{array}$$

definindo uma função contínua  $\phi : [0, 1] \times (G(\mu)/P_\mu) \rightarrow \mathbb{F}_\Theta$  por  $\phi(t, gP_\mu) = \psi(t, g)$ . De fato,  $\phi$  é bem definida pois se  $h \in P_\mu$  então  $(u_t^{-1}hu_t) \cdot b_\Theta = b_\Theta$  pois  $u_t^{-1}hu_t \in P_{u_t}$ , como na notação acima, que fixa  $b_\Theta$  pela proposição anterior. Daí que

$$\psi(gh) = u_t^{-1}gu_t(u_t^{-1}hu_t) \cdot b_\Theta = u_t^{-1}gu_t \cdot b_\Theta$$

mostrando que  $\phi$  é bem definida. A função  $\phi$  é contínua e se  $b_\mu$  denota a origem de  $G(\mu)/P_\mu$  então, usando novamente pela proposição anterior, verifica-se que para todo  $t \in [0, 1]$ , vale  $\phi(t, b_\mu) = b_\Theta$ . Portanto, olhando  $G(\mu)/P_\mu$  como uma esfera  $S^1$  com o ponto distinguido  $b_\mu$ , vê-se que  $\phi$  é uma homotopia entre  $\phi(0, \cdot)$  cuja imagem é  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  e  $\phi(1, \cdot)$  cuja imagem é  $(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$ . Essa homotopia fixa  $b_\Theta$ .  $\square$

**Observação:** Note que no caso do grupo de Lie complexo  $G$ , o grupo  $u^{-1}G(\mu)u$  também é isomorfo a  $G(\mu)$  e sua álgebra de Lie  $\text{Ad}(u^{-1})\mathfrak{g}(\mu)$  é isomorfa a  $\mathfrak{g}(\mu)$ , isto é,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Assim, vale a Proposição 4.3. Vale ressaltar que o fato que a componente conexa da identidade  $(P_u)_0$  de  $P_u$  está contida no subgrupo de isotropia demonstra de imediato a proposição pois no caso complexo  $P_u$  é conexo. E vale também o Lema 4.4, olhando  $G(\mu)/P_\mu$  como uma esfera  $S^2$  com o ponto distinguido  $b_\mu$ .

**Proposição 4.5** *Sejam  $G(\mu)$  um grupo com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\mu) \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  e  $M$  o centralizador da subálgebra  $\mathfrak{a}$  em  $K$ . Então o centro  $Z(G(\mu))$  de  $G(\mu)$  está contido em  $M$ .*

**Demonstração:** Seja  $\widetilde{G} = \widetilde{\text{Sl}(2, \mathbb{R})}$  o recobrimento universal. Denote por  $\widetilde{\exp} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \widetilde{\text{Sl}(2, \mathbb{R})}$  a aplicação exponencial de  $\widetilde{\text{Sl}(2, \mathbb{R})}$  e tome a base  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O centro  $Z\left(\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}\right)$  de  $\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}$  é o núcleo de sua representação adjunta  $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ . Isso porque a imagem de  $\widetilde{\mathrm{Ad}}$  é o grupo  $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$  dos automorfismos internos de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , que não tem centro, o que implica que  $\mathrm{Aut}_0(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) = \widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}/Z\left(\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}\right) = \widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}/\ker \widetilde{\mathrm{Ad}}$ . Esse núcleo é dado explicitamente por

$$Z\left(\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}\right) = \{\widetilde{\exp}(k\pi A) : k \in \mathbb{Z}\} \approx \mathbb{Z},$$

pois o centro está contido no grupo a um parâmetro  $\widetilde{\exp}(tA)$  e  $\widetilde{\mathrm{Ad}}(\widetilde{\exp}(tA)) = \mathrm{id}$  se, e somente se,  $t \in k\pi\mathbb{Z}$ .

Como  $G(\mu)$  é um grupo com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\mu) \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , ele é dado por  $G(\mu) = \widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}/D$  com  $D \subset Z\left(\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}\right)$ . Daí que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$D = \{\widetilde{\exp}(kn_0\pi A) : k \in \mathbb{Z}\} \approx n_0\mathbb{Z}$$

e o centro  $Z(G(\mu))$  é dado por  $Z\left(\widetilde{\mathrm{Sl}(2, \mathbb{R})}\right)/D \approx \mathbb{Z}_{n_0}$ .

Para encontrar  $n_0$  deve-se usar o isomorfismo  $\mathfrak{g}(\mu) \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , que é dado por  $H \leftrightarrow H_\mu^\vee = \frac{2H_\mu}{\langle \mu, \mu \rangle}$ ,  $A \leftrightarrow A_\mu = X_\mu - X_{-\mu}$  e  $S \leftrightarrow S_\mu = X_\mu + X_{-\mu}$ , com  $\langle X_\mu, X_{-\mu} \rangle = 1$ . Com isso,

$$n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > 0, \mathrm{Ad}(\exp(n\pi A)) = \exp(n\pi)\mathrm{ad}(A) = \mathrm{id}\}.$$

Complexificando tudo e fazendo contas em  $\mathrm{Sl}(2, \mathbb{C})$ , verifica-se que  $\exp(n\pi)\mathrm{ad}(A_\mu) = \exp(in\pi)\mathrm{ad}(H_\mu^\vee)$ , cujos auto-valores são dados por  $\exp(in\pi)\alpha(H_\mu^\vee)$ , com  $\alpha$  variando no conjunto das raízes. Esses auto-valores são  $\pm 1$ , dependendo se

$$\alpha(H_\mu^\vee) = \frac{2\langle \alpha, \mu \rangle}{\langle \mu, \mu \rangle}$$

é par ou ímpar. Portanto,  $n_0 = 2$  a menos que  $\alpha(H_\mu^\vee)$  seja par para toda raiz  $\alpha$

De qualquer forma,  $\exp(in\pi)\mathrm{ad}(H_\mu^\vee) \in M$  o que mostra que  $Z(G(\mu)) \subset M$ .  $\square$

**Observação:** Pela prova acima tem-se que  $Z(G(\mu))$  está no grupo de isotropia da ação de  $G(\mu)$  em  $b_\Theta$ . Como a variedade flag  $\mathbb{F}$  de  $G(\mu)$  é  $\mathbb{P}^1 = G(\mu)/Z(G(\mu))AN =$

$K_{H_\mu}/Z(G(\mu))$ , segue que para qualquer  $\Theta$  a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é a própria variedade flag de  $G(\mu)$ , isto é,  $S^1$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Os lemas acima mostram que cada  $G(\mu)$ -órbita induz uma aplicação da variedade flag  $G(\mu)/P_\mu = S^1$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

O próximo e último passo para provar o Teorema 4.1 é verificar que pelo menos uma grande parte das esferas  $S^1$  que aparecem nos lemas acima não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Para isso, obtém-se um representante não trivial dessas órbitas no grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Um outro resultado importante deste trabalho é o teorema a seguir. Ele apresenta um método algébrico para determinar o grupo fundamental das variedades flag. Em particular, esse é um argumento importante para prova do Teorema 4.1.

Sejam  $\tilde{G}$  o recobrimento universal do grupo de Lie  $G$  com álgebra de Lie simples  $\mathfrak{g}$  e  $\tilde{K} \subset \tilde{G}$  o grupo compacto com álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ .

**Teorema 4.6** *Seja  $\tilde{M}$  o centralizador da subálgebra  $\mathfrak{a}$  em  $\tilde{K}$ . Considere  $\tilde{P}_\Theta$  um subgrupo parabólico de  $\tilde{G}$  associado a  $\Theta \subset \Sigma$  e  $(\tilde{P}_\Theta)_0$  a componente conexa da identidade de  $\tilde{P}_\Theta$ . Então, o grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  é dado por*

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \tilde{M}/(\tilde{M} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0).$$

**Demonstração:** O subgrupo parabólico  $\tilde{P}_\Theta$  pode ser escrito como  $\tilde{P}_\Theta = \tilde{M} \cdot (\tilde{P}_\Theta)_0$ . Considere a fibração  $\varphi : \tilde{G}/(\tilde{P}_\Theta)_0 \rightarrow \tilde{G}/\tilde{P}_\Theta = \mathbb{F}_\Theta$ . Essa fibração é um recobrimento. De fato,  $\tilde{P}_\Theta/(\tilde{P}_\Theta)_0$  é discreto. Além disso,  $(\tilde{P}_\Theta)_0$  é conexo e  $\tilde{G}$  é um grupo simplesmente conexo. Então  $\tilde{G}/(\tilde{P}_\Theta)_0$  também é simplesmente conexo. Dessa forma, a fibração  $\varphi$  é um recobrimento universal da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  e sua fibra é  $\tilde{P}_\Theta/(\tilde{P}_\Theta)_0$ . Assim, usando o fato que o grupo fundamental da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  pode ser dado como núcleo da aplicação  $\varphi$ , conclui-se que  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \tilde{P}_\Theta/(\tilde{P}_\Theta)_0 = \tilde{M}/(\tilde{M} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0)$ .  $\square$



Neste ponto já é possível provar que as  $G(\mu)$ -órbitas que interessam, esferas  $S^1$ , não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

**Fim da prova do Teorema 4.1.** Para mostrar que cada  $G(\mu)$ -órbita não é homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$  exibe-se um representante não trivial dessa órbita no grupo fundamental da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Na verdade, basta encontrar um representante não trivial da órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$ . De fato, se  $\mu$  é uma raiz tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , pelo Lema 4.4, tem-se que se a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  não é homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ , então para  $u \in (K_{H_\mu})_0$ , a órbita  $(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  não reduz-se a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Considere  $M$  o centralizador da subálgebra  $\mathfrak{a}$  no subgrupo compacto  $K$  e tome  $(P_\Theta)_0$  a componente conexa da identidade do subgrupo parabólico  $P_\Theta$  do grupo  $G$ .

**Para o diagrama  $A_l$ :** a forma real normal associada é a álgebra  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  com  $n = l + 1$ . A raiz máxima  $\mu = \lambda_1 - \lambda_n$  é a única raiz com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . A seguir é exibido um representante não trivial da órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  no grupo fundamental da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ . Seja  $E_{i,j}$  a matriz  $n \times n$  com entrada 1 na posição  $i, j$  e zero nas outras posições. Aqui  $n = l + 1$ . Então, a subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica

$$A = E_{n,1} - E_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para todo  $t$ ,

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & \dots & 0 & -\text{sen}(t) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ \text{sen}(t) & 0 & \dots & 0 & \cos(t) \end{pmatrix}$$

está contida no subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$ . Sabe-se que o subgrupo compacto  $K_\mu \subset G(\mu)$  age transitivamente no flag de  $G(\mu)$ .

Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta = \{\exp(tA) \cdot b_\Theta : t \in \mathbb{R}\}$ . Essa órbita fecha-se pela primeira vez quando  $\exp(tA) \cdot b_\Theta = b_\Theta$  e isso ocorre quando  $\text{sen}(t) = 0$ , ou seja, em

$t = \pi$ . Então, o elemento

$$m = \exp(\pi A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

pertence ao centralizador  $M$ . Por outro lado,  $m \notin (P_\Theta)_0$  pois  $m$  tem determinante negativo, igual a  $-1$ , quando restrito ao subespaço  $\eta_k^+$  gerado pelos  $k$ -primeiros vetores da base canônica com  $k \leq l < n$ . É possível fazer esta restrição pois dado  $P_\Theta$ , existe  $k$  tal que  $P_\Theta$  deixa invariante o subespaço  $\eta_k^+$ , com  $k \leq l < n$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Isso segue da seguinte proposição.

Considere o espaço homogêneo  $G/L$  e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$  uma curva com  $\gamma(0), \gamma(1) \in L$ , de tal forma que a projeção  $\bar{\gamma}$  de  $\gamma$  em  $G/L$  é uma curva fechada. Seja  $L_0$  a componente conexa da identidade de  $L$ .

**Proposição 4.7** *Se  $\gamma(0) = 1$  e  $\gamma(1) \notin L_0$ , então  $\bar{\gamma}$  não é homotópica a um ponto em  $G/L$ .*

**Demonstração:**  $G/L_0 \rightarrow G/L$  é recobrimento e o levantamento de  $\bar{\gamma}$  a  $G/L_0$  é a curva  $\bar{\bar{\gamma}}$  projeção de  $\gamma$  em  $G/L_0$ . Como  $\bar{\bar{\gamma}}$  não é fechada, então  $\bar{\gamma}$  não é homotópica a um ponto em  $G/L$ .  $\square$

**Para o diagrama  $B_l$ :** a forma real normal associada é a álgebra  $\mathfrak{so}(l, l+1)$ . A raiz  $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$  é a raiz máxima. A subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica  $A = E_{l+2,3} - E_{2,l+3} + E_{3,l+2} - E_{l+3,2}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & 0 & \end{pmatrix}.$$

Então,  $\exp(tA)$  pertence ao subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$  e a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é dada por  $\{\exp(tA) \cdot b_\Theta : t \in \mathbb{R}\}$ . Assim, o elemento

$$m = \exp(\pi A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix}$$

pertence a  $M$ , onde  $D = (-1, -1, \dots, 1, 1)$ . Como o determinante de  $D$  é positivo, igual a 1,  $m \in (P_\Theta)_0$ . Então, nesse caso, precisa-se trabalhar no recobrimento universal do grupo  $G$  para encontrar os elementos de  $\widetilde{M}$  que não estão na componente conexa da identidade do subgrupo parabólico  $(\widetilde{P}_\Theta)_0$ . A parte compacta da álgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{1,2} \\ 0 & A_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $A_{1,2}$  é uma matriz antissimétrica com entradas não nulas apenas na posição 1, 2. Tome  $\{e_0, e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l\}$  a base canônica  $\mathbb{R}^{2l+1}$ . Em termos da álgebra de Clifford, a parte compacta da álgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \frac{e_1 f_2 - e_2 f_1}{2}.$$

Como  $e_1 f_2$  comuta com  $e_2 f_1$ , então para todo  $t$ ,

$$\exp(tZ_\mu) = \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e_1 f_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) - e_2 f_1 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

Em particular para  $t = \pi$ ,

$$\widetilde{m} = \exp(\pi Z_\mu) = -e_1 e_2 f_1 f_2.$$

Tem-se que  $\tilde{m} \in \tilde{M}$ . Nesse caso,  $\tilde{M} \subset \tilde{K}$  é o grupo  $\mathcal{D}_l = \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}, 1 \leq i_1 \leq i_{2k} \leq l\}$ , o qual é formado por produtos pares de elementos da base canônica  $\mathbb{R}^l$ ; veja [14]. Falta verificar se  $\tilde{m} \in (\tilde{P}_\Theta)_0$ , que é o mesmo que verificar se  $\tilde{m} \in (\tilde{K}_\Theta)_0$ .

1. Se  $\lambda_l \notin \Theta$ , então a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elemento do tipo  $e_i e_j$ .
2. Se  $\lambda_l \in \Theta$ , então a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos dos três seguintes tipos: a)  $e_i e_j$  com  $i \geq 2$  e  $j \geq 3$ , b)  $e_i f_j - e_j f_i$  com  $i \geq 2$  e  $j \geq 3$ ; c)  $d e_j$  com  $j \geq 2$ .

Em ambos os casos não é possível gerar  $\tilde{m} = -e_1 e_2 f_1 f_2$  quando exponencia-se elementos da subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$ . De fato, se  $\lambda_l \notin \Theta$ , então nas exponenciais nunca aparece  $f_i$  com  $i \geq 1$ . Se  $\lambda_l \in \Theta$ , então nas exponenciais nunca aparece  $e_1$ . Logo,  $\tilde{m} \notin (\tilde{K}_\Theta)_0$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Além da raiz máxima, a raiz  $\mu = \lambda_1 + \lambda_3$  é uma outra raiz tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ .

Usando a mesmo procedimento, conclui-se que o elemento

$$\tilde{m} = \exp(\pi Z_\mu) = \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e_1 f_3 \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) - e_3 f_1 \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right) = -e_1 e_3 f_1 f_3$$

não pertence a  $(\tilde{K}_\Theta)_0$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

**Para o diagrama  $C_l$ :** a forma real normal associada é a álgebra  $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$ . A raiz  $\mu = 2\lambda_1$  é a raiz máxima. A subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica

$$A = E_{l+1,1} - E_{1,l+1} = \begin{pmatrix} & & & & & \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & 0 & & & & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & & \end{pmatrix}.$$

Para todo  $t$ ,  $\exp(tA)$  está contida no subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$  e a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta = \{\exp(tA) \cdot b_\Theta : t \in \mathbb{R}\}$ . O elemento

$$m = \exp(\pi A) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

pertence ao subgrupo  $M$ , onde  $D = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ , mas  $m \notin (P_\Theta)_0$ . De fato, considere  $\eta_k^+$  o subespaço gerado pelos  $k$ -primeiros vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^{2l}$ , com  $1 \leq k \leq l$ . Tem-se que  $m$  restrito a  $\eta_k^+$  tem determinante negativo, igual a  $-1$ . Logo,  $m \notin (P_\Theta)_0$ . Assim, pela Proposição 4.7, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Observe que como aconteceu para o diagrama  $A_l$ , nesse caso também não precisa subir para o recobrimento  $\tilde{G}$  do grupo  $G$ .

A raiz  $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$  é a outra raiz, além da raiz máxima, tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . A subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica  $A = E_{2,l+1} - E_{1,l+2} + E_{l+2,1} - E_{l+1,2}$

$$A = \begin{pmatrix} & & & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & 0 & & & & \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Para todo  $t$ ,  $\exp(tA)$  está contida no subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$ . O elemento  $m = \exp(\pi A) = \text{diag}(D, D) \in M$ , onde  $D = \text{diag}(-1, -1, 1, \dots, 1)$  e  $m \in (P_\Theta)_0$  pois tem determinante positivo igual a 1. Então, nesse caso, precisa-se ir para o recobrimento universal  $\tilde{G}$  para encontrar os elementos de  $\tilde{M}$  que não estão em  $(\tilde{P}_\Theta)_0$ .

Seja  $\{e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{2l}$ . Em termos da álgebra de Clifford, a parte compacta da álgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \frac{e_1 f_2 - e_2 f_1}{2}.$$

Tem-se que

$$\tilde{m} = \exp(\pi Z_\mu) = -e_1 e_2 f_1 f_2 \in \tilde{M}.$$

Nesse caso, o subgrupo  $\tilde{M} = \{(k, itJ) \in \text{SU}(l) \times \exp_{\tilde{G}}(z_k)\} = M_{\text{SU}} \times \overline{M} = \mathbb{Z}^{l-1} \times \mathbb{Z}$ ; veja [14]. Falta verificar se  $\tilde{m} \in (\tilde{P}_\Theta)_0$ , que é o mesmo que verificar se  $\tilde{m} \in (\tilde{K}_\Theta)_0$ .

1. Se  $2\lambda_l \notin \Theta$ , então a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos do tipo  $e_i e_j$ .
2. Se  $2\lambda_l \in \Theta$ , então a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos dos três tipos seguintes: a)  $e_i e_j$  com  $i \geq 2$  e  $j \geq 3$ , b)  $e_i f_j - e_j f_i$  com  $i \geq 2$  e  $j \geq 3$ ; c)  $e_l f_l$ .

Em ambos os casos, não é possível gerar  $\tilde{m} = -e_1 e_2 f_1 f_2$  quando exponencia-se os elementos da álgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$ . De fato, se  $2\lambda_l \notin \Theta$ , então nas exponenciais nunca aparece  $f_i$  com  $i \geq 1$ . Se  $2\lambda_l \in \Theta$ , então nas exponenciais nunca aparece  $e_1$ . Logo,  $\tilde{m} \notin (\tilde{K}_\Theta)_0$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

**Para o diagrama  $D_l$ :** a forma real normal associada é a álgebra  $\mathfrak{so}(l, l)$ . A raiz máxima  $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$  é a única raiz com  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . A subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica  $A = E_{l+1,2} - E_{1,l+2} + E_{l+1,2} - E_{l+2,1}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} & & & & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & 0 & & & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Para todo  $t$ ,  $\exp(tA)$  pertence ao subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$ . Então as órbitas são dadas por  $G(\mu) \cdot b_\Theta = \{\exp(tA) \cdot b_\Theta : t \in \mathbb{R}\}$ . O elemento

$$m = \exp(\pi A) = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

pertence a  $M$ , onde  $D = \{-1, -1, \dots, 1\}$ . Como  $D$  tem determinante positivo, igual a 1, tem-se que  $m \in (P_\Theta)_0$ . Novamente é preciso trabalhar com o recobrimento universal para encontrar os elementos de  $\widetilde{M}$  que não estão em  $(\widetilde{P}_\Theta)_0$ . A parte compacta da álgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -A_{1,2} \\ A_{1,2} & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $A_{1,2}$  é uma matriz antissimétrica com entradas não nula apenas na posição 1, 2.

Considere  $\{e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{2l}$ . Em termos da álgebra de Clifford, a parte compacta da álgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \frac{e_1 f_2 - e_2 f_1}{2}.$$

Como  $e_1 f_2$  comuta com  $e_2 f_1$ , para todo  $t$ , tem-se que

$$\exp(tZ_\mu) = \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e_1 f_2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) - e_2 f_1 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

Em particular para  $t = \pi$ ,

$$\widetilde{m} = \exp(\pi Z_\mu) = -e_1 e_2 f_1 f_2.$$

Tem-se que  $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ . Nesse caso, o grupo  $\widetilde{M} = \mathcal{D}_l = \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}, 1 \leq i_1 \leq i_{2k} \leq l\}$  é formado por produtos em número par de elementos da base canônica de  $\mathbb{R}^l$ ; veja [14].

Falta verificar que  $\widetilde{m} \in (\widetilde{P}_\Theta)_0$ , que é o mesmo que verificar se  $\widetilde{m} \in (\widetilde{K}_\Theta)_0$ .

1. Se  $\lambda_l \notin \Theta$ , então  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos do tipo  $e_i e_j$ .
2. Se  $\lambda_l \in \Theta$ , então  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos dos dois tipos seguintes: a)  $e_i e_j$  com  $i \geq 2, j \geq 3$ ; c)  $e_i f_j - e_j f_i$  com  $i \geq 2, j \geq 3$ .

Em ambos os casos, não é possível gerar  $\widetilde{m} = -e_1 e_2 f_1 f_2$  quando exponencia-se os elementos da subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$ . De fato, se  $\lambda_l \notin \Theta$ , então nas exponenciais nunca

aparece  $f_i$  com  $i \geq 1$ . Se  $\lambda_i \in \Theta$ , então nas exponenciais nunca aparece  $e_1$ . Logo,  $\tilde{m} \notin (\tilde{K}_\Theta)_0$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Para forma real normal das álgebras clássicas  $A_l, B_l, C_l$  e  $D_l$ , cada órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  analisada acima é uma esfera  $S^1$  contida em  $C_\Theta$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Pelo Lema 4.4, para  $u \in (K_{H_\mu})_0$ , cada órbita  $(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  também não reduz-se a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Seja  $x = nu \cdot b_\Theta \in \sigma_\Theta(H_\mu)$  com  $n \in N^-$  e  $u \in (K_{H_\mu})_0 \subset K_{H_\mu} \subset Z_{H_\mu}$ . Então,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu)) nu \cdot b_\Theta = u \cdot b_\Theta.$$

Como  $C_\Theta$  tem interior não vazio, pode-se encontrar  $x \in C_\Theta$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu)) x = u \cdot b_\Theta \in C_\Theta \cap \text{att}_\Theta(H_\mu).$$

Logo, para  $u \in (K_{H_\mu})_0 \subset K_{H_\mu} \subset Z_{H_\mu}$ , a órbita  $G(\mu) \cdot u \cdot b_\Theta = u(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  contida em  $C_\Theta$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Isso mostra que  $C_\Theta$  não está contido em um subconjunto contrátil de  $\mathbb{F}_\Theta$ . Uma vez que  $\Theta$  foi arbitrário, conclui-se que  $S = G$ . Isso termina a prova do Teorema 4.1.  $\square$

Uma vez que para cada  $\Theta$ ,  $C_\Theta$  não está contido em um subconjunto contrátil de  $\mathbb{F}_\Theta$  tem-se também no caso real o seguinte corolário.

**Corolário 4.8** *Seja  $S \subset G$  um semigrupo como no Teorema 4.1. Então, para qualquer  $\Theta \subset \Sigma$ ,  $S$  não tem tipo parabólico  $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ .*

**Observação:** Note que, como no caso complexo, pode-se estudar diretamente as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y = g \cdot b_\Theta$ ,  $g \in Z_{H_\mu}$  na prova do Teorema 4.1, com isso tem-se

$$G(\mu) \cdot y = g(g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta).$$

Desse modo, a órbita  $G(\mu) \cdot y$  é difeomorfa a  $g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta$ . O grupo de Lie  $g^{-1}G(\mu)g$  tem álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(\mu)^g = \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}(\mu))$ , a qual é isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .



Como  $\text{Ad}(g)(H_\mu) = H_\mu$ , existe uma decomposição de espaço de raízes

$$\mathfrak{g}(\mu)^g = \langle H_\mu \rangle \oplus \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu) \oplus \text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_{-\mu}).$$

O Lema 2.7 continua valendo neste capítulo, ou seja,  $\text{Ad}(g)(\mathfrak{g}_\mu) \subset \mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$  se  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$  e  $g \in Z_{H_\mu}$ .

No caso real também continua valendo que se  $\mu$  é a raiz máxima e  $g \in Z_{H_\mu}$ , então  $g$  centraliza  $\mathfrak{g}(\mu)$  e  $G(\mu)$ ; veja Proposição 4.10 abaixo. Uma vez que  $g$  centraliza  $\mathfrak{g}(\mu)$  e  $G(\mu)$  tem-se que  $g^{-1}G(\mu)g = G(\mu)$  e  $G(\mu) \cdot y = g(G(\mu) \cdot b_\Theta)$  e tais fatos simplificam a prova do Lema 4.9.

**Lema 4.9** *Sejam  $b_\Theta$  a origem de uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  de  $G$  e  $\mu$  uma raiz tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+)$ . Então, para  $g \in Z_{H_\mu}$ , a órbita  $G(\mu) \cdot y = g(g^{-1}G(\mu)g \cdot b_\Theta)$  é uma esfera  $S^1$  em  $\mathbb{F}_\Theta$ .*

**Demonstração:** Veja a demonstração do Lema 2.8. □

Como no caso complexo, a seguinte proposição assegura que para a raiz máxima  $\mu$  tem-se que  $gG(\mu)g^{-1} = G(\mu)$  para  $g \in Z_{H_\mu}$ . A diferença é que no grupo real,  $Z_{H_\mu}$  pode não ser conexo.

**Proposição 4.10** *Seja  $\mu$  a raiz máxima e suponha que  $g \in G$  centraliza  $H_\mu$ . Então  $g$  normaliza  $G(\mu)$ . Na verdade,  $g$  comuta com todo  $h \in G(\mu)$ .*

**Demonstração:** Essa prova é semelhante à prova do grupo complexo; veja Proposição 3.4. Mas trabalhando com o grupo real  $G$ ,  $Z_{H_\mu}$  pode não ser conexo. Assim, é preciso trabalhar na componente conexa  $(Z_{H_\mu})_0$  da identidade de  $Z_{H_\mu}$ . Nesse caso a comutatividade entre  $\mathfrak{z}_{H_\mu}$  e  $\mathfrak{g}(\mu)$  garante que  $\text{Ad}(h)(Y) = Y$  para  $h \in (Z_{H_\mu})_0$  e  $Y \in \mathfrak{z}_{H_\mu}$ . Isso implica que os elementos de  $(Z_{H_\mu})_0$  comutam com os elementos de  $G(\mu)$ . Como  $M = Z_{\mathfrak{a}}(K)$  determina todas as outras componentes de  $Z_{H_\mu}$  tem-se

que os elementos de  $Z_{H_\mu}$  comutam com os elementos de  $G(\mu)$ .  $\square$

Depois de ter mostrado que  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Tem-se o seguinte resultado.

**Corolário 4.11** *Seja  $\mu$  a raiz máxima e denote por  $Z_{H_\mu}$  o centralizador de  $H_\mu$  em  $G$ . Seja  $\mathbb{F}_\Theta$  uma variedade flag de  $G$  com origem  $b_\Theta$ . Então para qualquer  $g \in Z_{H_\mu}$  a órbita  $G(\mu) \cdot gb_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .*

Para finalizar a observação, note que no caso real estudando diretamente as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $y = g \cdot b_\Theta$ ,  $g \in Z_{H_\mu}$ , para concluir a demonstração do Teorema 4.1 é preciso mostrar que o corolário anterior vale também para uma outra raiz  $\mu$ , a qual não é a máxima, tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ ; veja, por exemplo, a Proposição 4.12 abaixo. Por isso, optou-se por estudar as  $G(\mu)$ -órbitas nos pontos  $b = u \cdot b_\Theta$ ,  $u \in K_{H_\mu}$  onde o Lema 4.4 aplica-se para uma raiz positiva  $\mu$  tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , em particular, para raiz máxima.

**Proposição 4.12** *Para o diagrama  $C_l$ , seja  $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$  a raiz não máxima tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$  e denote por  $Z_{H_\mu}$  o centralizador de  $H_\mu$  em  $G$ . Considere  $\mathbb{F}_\Theta$  uma variedade flag de  $G$ . Então, para qualquer  $g \in Z_{H_\mu}$ , a órbita  $G(\mu) \cdot gb_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .*

**Demonstração:** Escreva  $\Theta_{H_\mu} = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H_\mu) = 0\}$ . Então, a raiz  $\beta$  anula  $H_\mu$  se, e somente se,  $\text{supp}(\beta) \subset \Theta_{H_\mu}$ . Isso segue do fato que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , ou seja, se  $\alpha \notin \Theta_{H_\mu}$ , então  $\alpha(H_\mu) > 0$ .

Tome a raiz  $\beta$  com  $\beta(H_\mu) = \langle \beta, \mu \rangle = 0$ . Para o diagrama  $C_l$ ,  $\beta = \alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$  é a raiz curta tal que  $\beta + \mu$  é raiz. Nesse caso  $\beta + \mu$  é a raiz máxima  $2\lambda_1$ .

O centralizador  $\mathfrak{z}_{H_\mu}$  de  $H_\mu$  em  $\mathfrak{g}$  se decompõe em  $\mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{z}_2$  onde  $\mathfrak{z}_1$  é a raiz curta  $\beta = \alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$  e  $\mathfrak{z}_2$  é a componente gerada pelos espaços de raízes de  $\alpha_3, \dots, \alpha_l$ . Considere o flag minimal  $\mathbb{F}_\Theta$  com  $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_i, i > 1\}$ .

Denote por  $Z = (Z_{H_\mu})_0$  a componente conexa da identidade de  $Z_{H_\mu}$ . Então  $Z$  é o produto  $Z_1 Z_2$  com cada  $Z_i = \langle \exp(\mathfrak{z}_i) \rangle$ . Logo, um elemento  $z \in Z$  é dado por  $z = z_1 z_2$ , com cada  $z_i \in Z_i$ . Assim,  $z \cdot b_\Theta = z_1 z_2 \cdot b_\Theta = z_2 z_1 \cdot b_\Theta = b_\Theta$ . Então,  $G(\mu) \cdot g b_\Theta = G(\mu) \cdot b_\Theta$  com  $g \in (Z_{H_\mu})_0$ .

Como o grupo  $M = Z_{\mathfrak{a}}(K)$  determina as outras componentes de  $Z_{H_\mu}$  tem-se que para  $g \in Z_{H_\mu}$ ,  $G(\mu) \cdot g b_\Theta = G(\mu) \cdot b_\Theta$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot g b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Se  $\Theta = \Sigma \setminus \{\alpha_1\}$ , então o flag minimal  $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{P}^{2n-1}$ . Nesse caso estudar a órbita  $G(\mu) \cdot g b_\Theta$  no espaço projetivo  $\mathbb{P}^{2n-1}$  é o mesmo que estudar a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  em  $\mathbb{P}^{2n-1}$ . Portanto,  $G(\mu) \cdot g b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .  $\square$

## 4.1 Álgebras excepcionais

Posteriormente, a ideia é fazer o Teorema 4.1 para um grupo de Lie simples real, conexo, não compacto, com centro finito e cuja álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é a forma real normal de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ . Como o Teorema 4.1 foi feito acima para forma real normal das álgebras clássicas agora falta fazer para a forma real normal das álgebras excepcionais.

Neste trabalho apresenta-se apenas a demonstração do Teorema 4.1 para forma real normal das álgebras excepcionais  $G_2$  e  $E_8$ , para as demais álgebras excepcionais o estudo ainda está em andamento.

Como acontece para a forma real normal das álgebras clássicas, várias  $G(\mu)$ -órbitas são esferas  $S^1$  em  $C_\Theta$ . Para mostrar que essas  $G(\mu)$ -órbitas não são homotópicas a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ , exibe-se um representante não trivial dessas órbitas no grupo fundamental da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Na verdade, basta encontrar um representante não trivial da órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$ . De fato, se  $\mu$  é uma raiz tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ , pelo Lema 4.4, tem-se que se a órbita

$G(\mu) \cdot b_\Theta$  não é homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ , então para  $u \in K_{H_\mu}$ , a órbita  $(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  não reduz-se a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

**Para o diagrama  $G_2$ :** a forma real normal associada é a álgebra  $\mathfrak{g}_{(2)(2)} = \mathfrak{sl}(3) \oplus V \oplus V^*$  onde  $V$  é um espaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$  e  $V^*$  o seu espaço dual. Seja  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$  a subálgebra compacta de  $\mathfrak{g}_{(2)(2)}$ .

Considere que o primeiro termo de  $\mathfrak{k}$  é gerado pelas raízes longas  $\lambda_i - \lambda_j$ , com  $i \neq j$  e  $i, j = 1, 2, 3$ , cujos subespaços de raízes estão contidos em  $\mathfrak{sl}(3)$  e que o segundo termo de  $\mathfrak{k}$  é gerado pelas raízes curtas  $\lambda_i$ , com  $i = 1, 2$ , cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V$  e pela raiz curta  $-\lambda_3$ , cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V^*$ .

Considere a representação da álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2) = \text{Im}\mathbb{H}$  em  $\mathbb{R}^3$  dada pelas matrizes

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para o diagrama  $G_2$ , a raiz  $\mu = \lambda_1 - \lambda_3$  é a raiz máxima, cujo subespaço de raízes está contido em  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ . A subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica

$$A = E_{3,1} - E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}j.$$

Para todo  $t$ ,  $\exp(tA)$  está contida no subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$  e a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta = \{\exp(tA) \cdot b_\Theta : t \in \mathbb{R}\}$ . Nesse caso, precisa-se ir para o recobrimento universal  $\tilde{G}$  para encontrar os elementos de  $\tilde{M}$  que não estão em  $(\tilde{P}_\Theta)_0$ . Na subálgebra  $\mathfrak{k}$ , a parte compacta  $Z_\mu$  de  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \left( -\frac{1}{2}j, 0 \right).$$

Logo,

$$\exp(tZ_\mu) = \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) - j \sin\left(\frac{t}{2}\right), 1 \right).$$

Em particular para  $t = \pi$ ,

$$\tilde{m} = \exp(\pi Z_\mu) = (-j, 1).$$

Tem-se que  $\tilde{m} \in \tilde{M}$ . Nesse caso,  $\tilde{M} = \mathcal{D}_3 = \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}, 1 \leq i_1 \leq i_{2k} \leq 3\}$  é formado por produtos em número par de elementos da base canônica de  $\mathbb{R}^3$ ; veja [14].

Falta verificar que  $\tilde{m} \in (\tilde{P}_\Theta)_0$ , que é o mesmo que verificar se  $\tilde{m} \in (\tilde{K}_\Theta)_0$ .

1. Se  $\lambda_2 \notin \Theta$ , então  $\Theta = \lambda_1 - \lambda_2$  e  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos do tipo  $(-\frac{1}{2}k, 0)$ .
2. Se  $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \Theta$ , então  $\Theta = \lambda_2$  e  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos do tipo  $(0, \frac{1}{2}i)$ .

Em ambos os casos, não é possível gerar  $\tilde{m} = (-j, 1)$  quando exponencia-se os elementos da subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$ . De fato, nas exponenciais nunca aparece  $j$  na primeira coordenada. Logo,  $\tilde{m} \notin (\tilde{K}_\Theta)_0$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Além da raiz máxima, a raiz  $\mu = \lambda_2 - \lambda_3$  é uma outra raiz tal que  $H_\mu \in \text{cl}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^+)$ . A subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica

$$A = E_{3,2} - E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}i.$$

Para todo  $t$ ,  $\exp(tA)$  está contida no subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$  e a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta = \{\exp(tA) \cdot b_\Theta : t \in \mathbb{R}\}$ . Então, nesse caso, precisa-se ir para o recobrimento universal  $\tilde{G}$  para encontrar os elementos de  $\tilde{M}$  que não estão em  $(\tilde{P}_\Theta)_0$ . Na subálgebra  $\mathfrak{k}$ , a parte compacta  $Z_\mu$  de  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \left( \frac{1}{2}i, 0 \right).$$

Logo,

$$\exp(tZ_\mu) = \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) + i \sin\left(\frac{t}{2}\right), 1 \right).$$

Em particular, para  $t = \pi$ ,

$$\tilde{m} = \exp(\pi Z_\mu) = (i, 1).$$

Tem-se que  $\tilde{m} \in \tilde{M}$ . Usando o mesmo procedimento verifica-se que não é possível gerar  $\tilde{m} = (i, 1)$  quando exponencia-se os elementos da subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$ . De fato, nas

exponenciais nunca aparece  $i$  na primeira coordenada. Logo,  $\tilde{m} \notin (\tilde{K}_\Theta)_0$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

**Para o diagrama  $E_8$ :** a forma real normal associada é a álgebra  $\mathfrak{e}_{(8)(8)} = \mathfrak{sl}(9) \oplus V \oplus V^*$  onde  $V$  é um espaço vetorial de  $\bigwedge^3 \mathbb{R}^9$  e  $V^*$  o seu espaço dual. Considere  $\{e_1, \dots, e_9\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^9$ . Uma base para  $V$  é dada por  $\{e_i \wedge e_j \wedge e_k : i < j < k\}$ . Seja  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_9\}$  a base dual. Uma base para o dual  $V^*$  é dada por  $\{\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \wedge \varepsilon_k : i < j < k\}$ .

Seja  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(16)$  a subálgebra compacta de  $\mathfrak{e}_{(8)(8)}$ . Tem-se que  $\mathfrak{k}$  é gerada pelas raízes positivas:  $\lambda_i - \lambda_j$ , com  $1 \leq i < j \leq 9$ , cujos subespaços de raízes estão contidos em  $\mathfrak{sl}(9)$ ;  $\lambda_1 + \lambda_j + \lambda_k$ , com  $1 < j < k \leq 9$ , cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V$ ;  $-(\lambda_1 + \lambda_j + \lambda_k)$ , com  $1 < i < j < k \leq 9$ , cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V^*$ .

Para o diagrama  $E_8$ , a raiz  $\mu = \lambda_1 - \lambda_9$  é a raiz máxima, cujo subespaço de raízes está contido em  $\mathfrak{sl}(9, \mathbb{R})$ . A subálgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  contém a matriz antissimétrica

$$A = E_{9,1} - E_{1,9} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para todo  $t$ ,  $\exp(tA)$  está contida no subgrupo compacto  $K_\mu$  do grupo  $G(\mu)$  e a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta = \{\exp(tA) \cdot b_\Theta : t \in \mathbb{R}\}$ . Então, nesse caso, precisa-se ir para o recobrimento universal  $\tilde{G}$  para encontrar os elementos de  $\tilde{M}$  que não estão em  $(\tilde{P}_\Theta)_0$ . Na subálgebra  $\mathfrak{k}$ , a parte compacta  $Z_\mu$  de  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere  $\{e_1, \dots, e_8, e_9, f_2, \dots, f_8\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{2l}$ , onde  $l = 8$ . Em termos da álgebra de Clifford, a parte compacta da álgebra  $\mathfrak{g}(\mu)$  é dada por

$$Z_\mu = -\frac{e_1 e_9}{2}.$$

Para todo  $t$ , tem-se que

$$\exp(tZ_\mu) = \left( \cos\left(\frac{t}{2}\right) - e_1 e_9 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \right).$$

Em particular, para  $t = \pi$ ,

$$\tilde{m} = \exp(\pi Z_\mu) = -e_1 e_9.$$

Tem-se que  $\tilde{m} \in \tilde{M}$ . Falta verificar que  $\tilde{m} \in (\tilde{P}_\Theta)_0$ , que é o mesmo que verificar se  $\tilde{m} \in (\tilde{K}_\Theta)_0$ .

1. Se  $\alpha_8 \notin \Theta$ , então  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos dos seguintes tipos: a)  $e_i e_j$ , com  $2 \leq i \leq 8, 3 \leq j \leq 8$ ; b)  $e_i f_1$ , com  $2 \leq i \leq 8$ .
2. Se  $\alpha_8 \in \Theta$ , então  $\mathfrak{k}_\Theta$  é gerada por elementos dos seguintes tipos: a)  $e_i e_j$ , com  $2 \leq i \leq 8, 3 \leq j \leq 8$ ; b)  $e_i f_1$ , com  $2 \leq i \leq 8$ ; c)  $\varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4$ .

Em ambos os casos, não é possível gerar  $\tilde{m} = -e_1 e_9$  quando exponencia-se os elementos da subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$ . De fato, nas exponenciais nunca aparecem  $e_1$  e  $e_9$ . Logo,  $\tilde{m} \notin (\tilde{K}_\Theta)_0$ . Assim, a órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Para forma real normal das álgebras excepcionais  $G_2$  e  $E_8$ , cada órbita  $G(\mu) \cdot b_\Theta$  analisada acima é uma esfera  $S^1$  contida em  $C_\Theta$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Pelo Lema 4.4, para  $u \in (K_{H_\mu})_0$ , cada órbita  $(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  também não reduz-se a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Seja  $x = nu \cdot b_\Theta \in \sigma_\Theta(H_\mu)$  com  $n \in N^-$  e  $u \in (K_{H_\mu})_0 \subset K_{H_\mu} \subset Z_{H_\mu}$ . Então,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu)) nu \cdot b_\Theta = u \cdot b_\Theta.$$

Como  $C_\Theta$  tem interior não vazio, pode-se encontrar  $x \in C_\Theta$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\exp(tH_\mu)) x = u \cdot b_\Theta \in C_\Theta \cap \text{att}_\Theta(H_\mu).$$

Logo, para  $u \in (K_{H_\mu})_0 \subset K_{H_\mu} \subset Z_{H_\mu}$ , a órbita  $G(\mu) \cdot u \cdot b_\Theta = u(u^{-1}G(\mu)u) \cdot b_\Theta$  é uma esfera  $S^1$  contida em  $C_\Theta$  não homotópica a um ponto em  $\mathbb{F}_\Theta$ . Isso mostra que  $C_\Theta$  não está contido em um subconjunto contrátil de  $\mathbb{F}_\Theta$ . Uma vez que  $\Theta$  foi arbitrário, conclui-se que  $S = G$ . Isso termina a prova do Teorema 4.1 para forma real normal das álgebras excepcionais  $G_2$  e  $E_8$ .  $\square$



# Capítulo 5

## Teorema de controlabilidade

Como foi mencionado na introdução, a inspiração para os Teoremas 2.1 e 4.1 são os resultados para controlabilidade de sistemas de controle de [1], [10], [15], [16]. O ponto inicial na prova desses resultados é mostrar que para a raiz máxima  $\mu$ , o subgrupo  $G(\mu)$  está contido no semigrupo de controle. As hipóteses desses resultados são adaptadas para assegurar a inclusão de  $G(\mu)$  no semigrupo de controle. Os Teoremas 2.1 e 4.1, respectivamente, provam para um grupo de Lie  $G$  simples complexo, conexo e um grupo de Lie  $G$  simples real, conexo, não compacto e cuja álgebra de Lie é uma forma real normal de uma álgebra clássica, o teorema final de [1] sem insistir em trabalhar com a raiz máxima.

Seja

$$\dot{g} = (A + u(t)B)g, \quad u(t) \in \mathbb{R} \quad (5.1)$$

um sistema de controle invariante à direita com controles sem restrições onde  $A, B \in \mathfrak{g}$  com  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie simples do grupo de Lie simples, conexo  $G$ . Seja  $S$  o semigrupo do sistema gerado por  $\exp(t(A + uB))$ ,  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , e denote por

$$\Gamma = \{X \in \mathfrak{g} : \forall t \geq 0, \exp(tX) \in \text{cl}(S)\}$$

seu cone de Lie.  $\Gamma$  é um cone convexo fechado invariante por  $\exp(t \text{ad}(X))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , se  $\pm X \in \Gamma$ ; veja Hilgert-Hofmann-Lawson [13]. Além disso, diz-se que  $A$  e  $B$  satisfazem a condição do posto da álgebra de Lie se  $A$  e  $B$  geram  $\mathfrak{g}$ .

Uma vez que o sistema (5.1) é com controles sem restrição, o seguinte argumento mostra que  $\pm B \in \Gamma$ . De fato, tem-se que  $A + uB \in \Gamma$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . Então tomando  $u > 0$ ,  $(1/u)A + B \in \Gamma$ . Assim,  $B = \lim_{u \rightarrow +\infty} ((1/u)A + B) \in \Gamma$ . De forma semelhante,  $-B \in \Gamma$ , fazendo  $u \rightarrow -\infty$ .

Agora tome  $B$  na subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  e escreva

$$A = A_0 + \sum_{\alpha \in \Pi} A_\alpha \quad (5.2)$$

para a decomposição do espaço de raízes de  $A$ , onde  $A_0 \in \mathfrak{h}$  e  $A_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ .

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie simples complexa ou  $\mathfrak{g}$  uma forma real normal de uma álgebra clássica  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 5.1** *No sistema de controle (5.1) tome  $B \in \mathfrak{h}$ . Então o sistema é controlável em  $G$  se*

1.  $A$  e  $B$  geram  $\mathfrak{g}$  e
2. existe uma raiz  $\alpha$  tal que  $G(\alpha) \subset S$ .

**Demonstração:** Basta aplicar o Teorema 2.1, no caso complexo e o Teorema 4.1, no caso real. □

Se  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie simples complexa, a subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  decompõe-se como  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , onde  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  é o subespaço real onde as raízes assumem valores reais. Para uma raiz  $\beta$ , tem-se que  $\beta(H) \in \mathbb{R}$  se  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e  $\beta(H)$  é imaginário se  $H \in i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

Em particular, escreve-se  $B = B_{\text{Re}} + B_{\text{Im}} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e o resultado de controlabilidade é apresentado em dois casos:  $\text{ad}(B)$  tem autovalores puramente imaginários, ou seja,  $B_{\text{Re}} = 0$ ; o outro caso é  $B_{\text{Re}} \neq 0$ . As provas seguem quase imediatamente do Teorema 2.1 e de [1, Lema 2.3] no caso complexo. Para deixar claro, essas provas são aqui apresentadas.

**Teorema 5.2** *No sistema de controle (5.1) tome  $B \in \mathfrak{h}$  e suponha que  $\text{ad}(B)$  tem autovalores puramente imaginários. Então o sistema é controlável em  $G$  se*

1.  $A$  e  $B$  geram  $\mathfrak{g}$  e
2. existe uma raiz  $\alpha$  tal que  $\alpha(B) \neq 0$ ,  $A_\alpha \neq 0 \neq A_{-\alpha}$  e  $\alpha(B) \neq \beta(B)$  para qualquer raiz  $\beta \neq \alpha$  com  $A_\beta \neq 0$ .

**Demonstração:** Tem-se que  $\exp(t \text{ad}(B)(A)) \in \Gamma$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e

$$\exp(t \text{ad}(B)(A)) = \sum_{\beta \in \Pi} e^{t\beta(B)} A_\beta.$$

Assim,  $A_\eta(t) = (1 + \eta \cos t\alpha(B)) \exp(t \text{ad}(B)(A)) \in \Gamma$  se  $|\eta| < 1$ . Como  $\beta(B) \neq \alpha(B)$  é puramente imaginário tem-se que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (1/T) \int_0^T e^{t\beta(B)} (1 + \eta \cos t\alpha(B)) dt = 0.$$

Tomando o limite,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} (1/T) \int_0^T A_\eta(t) = (\eta/2)A_\alpha$ ; veja [15] e [1, Lema 2.3]. Logo  $A_\alpha \neq 0$  pertence a  $\Gamma$ . Assim,  $\exp(t \text{ad}(B)(A_\alpha)) \in \Gamma$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Por outro lado,  $\exp(t \text{ad}(B)(A_\alpha)) = e^{t\alpha(B)} A_\alpha$ . Uma vez que  $\alpha(B) \neq 0$ , então o subespaço complexo gerado por  $A_\alpha$  está contido em  $\Gamma$ , ou seja,  $\mathfrak{g}_\alpha \subset \Gamma$ . Da mesma maneira, tem-se que  $\mathfrak{g}_{-\alpha} \subset \Gamma$ . Assim,  $\mathfrak{g}(\alpha) \subset \Gamma$ . Isso implica que  $G(\alpha) \subset S$  e  $S = G$ , pelo Teorema 2.1 no caso complexo.  $\square$

**Observação:** Em [1] e [15] o resultado acima é provado com a hipótese que  $B$  é fortemente regular, ou seja,  $\alpha(B) \neq 0$  para qualquer raiz  $\alpha$  e  $\alpha(B) \neq \beta(B)$  para raízes  $\alpha \neq \beta$ . Com a regularidade forte é possível provar que  $\mathfrak{g}(\alpha) \subset \Gamma$  para várias raízes  $\alpha$  e conclui-se que  $\Gamma = \mathfrak{g}$ . Aplicando o Teorema 2.1 no caso complexo é suficiente ter  $\mathfrak{g}(\alpha) \subset \Gamma$  para apenas uma raiz  $\alpha$ .

**Teorema 5.3** *No sistema de controle (5.1) tome  $B \in \mathfrak{h}$  com  $B_{\text{Re}} \neq 0$ . Então o sistema é controlável em  $G$  se  $A$  e  $B$  geram  $\mathfrak{g}$  e existe uma raiz  $\alpha$  tal que*

1.  $\text{Im}\alpha(B) \neq 0$ .
2. Se  $\beta \neq \alpha$  é uma raiz positiva tal que  $\text{Re}\beta(B) \leq \text{Re}\alpha(B)$  então,  $\text{Re}\beta(B) < \text{Re}\alpha(B)$ .
3.  $A_{\pm\alpha} \neq 0$  e  $A_\gamma = 0$  no caso em que  $\text{Re}\gamma(B) > \text{Re}\alpha(B)$  ou  $\text{Re}\gamma(B) < -\text{Re}\alpha(B)$ .

**Demonstração:** Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\pm t\text{Re}(\alpha(B))} \exp(t \text{ad}(B)(A)) \in \Gamma$ . Pela terceira condição

$$\exp(t \text{ad}(B)(A)) = \sum e^{t\gamma(B)} A_\gamma$$

com a soma estendida  $\gamma$  com  $-\text{Re}\alpha(B) \leq \text{Re}\gamma(B) \leq \text{Re}\alpha(B)$ . Mas, pela segunda condição

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t\text{Re}(\alpha(B))} \exp(t \text{ad}(B)(A)) = A_\alpha \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{t\text{Re}(\alpha(B))} \exp(t \text{ad}(B)(A)) = A_{-\alpha}.$$

Assim,  $A_{\pm\alpha} \in \Gamma$ . Como  $\exp(t \text{ad}(B)(A_{\pm\alpha})) = e^{t\alpha(B)} A_{\pm\alpha}$  e  $\alpha(B) \neq 0$ , então  $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subset \Gamma$ . Assim  $\mathfrak{g}(\alpha) \subset \Gamma$  e isso implica que  $G(\alpha) \subset S$ . Então o resultado segue do Teorema 2.1 no caso complexo.  $\square$

**Observação:** Em [1] e [15] o teorema acima é provado tomando  $\alpha$  a raiz máxima, assumindo  $A_{\pm\alpha} \neq 0$  e com  $B$  fortemente regular. Vale observar que sob essas hipóteses  $\alpha$  satisfaz as 3 condições do teorema anterior. De fato, se  $B_{\text{Re}} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+$ , o que pode ser assumido sem perda de generalidade, e se  $\alpha$  é a raiz máxima, então a segunda condição e a segunda parte da terceira condição são válidas automaticamente.

A primeira condição é satisfeita sempre que  $B$  é fortemente regular. De fato, quando  $B$  é fortemente regular a dimensão de  $\ker \text{ad}(B)$  é o posto de  $\mathfrak{g}$  e os autovalores da complexificação  $\text{ad}(B)_{\mathbb{C}}$  de  $\text{ad}(B)$  são simples. No caso da álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}$  complexifica sua realificação. Então os autovalores de  $\text{ad}(B)_{\mathbb{C}}$  são os de  $\text{ad}(B)$  junto com seus conjugados complexos. Assim os autovalores de  $\text{ad}(B)_{\mathbb{C}}$  são simples se, e somente se, nenhum autovalor de  $\text{ad}(B)$  é real. Portanto,  $\text{Im}\beta(B) \neq 0$  para qualquer raiz  $\beta$ .

Agora, se  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal de uma álgebra clássica  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ , a subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  é o subespaço real  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  onde as raízes assumem valores reais. Para uma raiz  $\beta$ , tem-se que  $\beta(H) \in \mathbb{R}$  e  $\text{Im}\beta(H) = 0$  se  $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

Em particular, escreve-se  $B = B_{\text{Re}} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e o resultado de controlabilidade é apresentado no caso em que  $B_{\text{Re}} \neq 0$ . A prova segue quase imediatamente do Teorema 4.1 e de [1, Lema 2.3] no caso real. Para deixar claro, essa prova é aqui apresentada.

**Teorema 5.4** *No sistema de controle (5.1) tome  $B \in \mathfrak{h}$  com  $B_{\text{Re}} \neq 0$ . Então o sistema é controlável em  $G$  se  $A$  e  $B$  geram  $\mathfrak{g}$  e existe uma raiz  $\alpha$  tal que*

1. *Se  $\beta \neq \alpha$  é uma raiz positiva tal que  $\text{Re}\beta(B) \leq \text{Re}\alpha(B)$  então,  $\text{Re}\beta(B) < \text{Re}\alpha(B)$ .*
2.  *$A_{\pm\alpha} \neq 0$  e  $A_{\gamma} = 0$  no caso em que  $\text{Re}\gamma(B) > \text{Re}\alpha(B)$  ou  $\text{Re}\gamma(B) < -\text{Re}\alpha(B)$ .*

**Demonstração:** Para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e^{\pm t\text{Re}(\alpha(B))} \exp(t \text{ad}(B)(A)) \in \Gamma$ . Pela terceira condição

$$\exp(t \text{ad}(B)(A)) = \sum e^{t\gamma(B)} A_{\beta}$$

com a soma estendida  $\gamma$  com  $-\alpha(B) \leq \gamma(B) \leq \alpha(B)$ . Mas, pela segunda condição

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t\text{Re}(\alpha(B))} \exp(t \text{ad}(B)(A)) = A_{\alpha} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{t\text{Re}(\alpha(B))} \exp(t \text{ad}(B)(A)) = A_{-\alpha}.$$

Assim,  $A_{\pm\alpha} \in \Gamma$ . Como  $\exp(t \text{ad}(B)(A_{\pm\alpha})) = e^{\pm t\alpha(B)} A_{\pm\alpha}$  e  $\alpha(B) \neq 0$ , então  $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subset \Gamma$ . Assim  $\mathfrak{g}(\alpha) \subset \Gamma$  e isso implica que  $G(\alpha) \subset S$ . Então o resultado segue do Teorema 4.1 no caso em que  $\mathfrak{g}$  é uma forma real normal de uma álgebra clássica  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ . □

**Observação:** Em [1] e [16] o teorema acima é provado tomando  $\alpha$  a raiz máxima, assumindo  $A_{\pm\alpha} \neq 0$  e com  $B$  fortemente regular real. Vale observar que sob essas

hipóteses  $\alpha$  satisfaz as 2 condições do teorema anterior. De fato, se  $B_{\text{Re}} \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+$ , o que pode ser assumido sem perda de generalidade, e se  $\alpha$  é a raiz máxima, então a segunda condição e a segunda parte da terceira condição são válidas automaticamente.

A condição que  $\text{Im}\beta(B) = 0$  é satisfeita sempre que  $B$  é real fortemente regular real. De fato, quando  $B$  é fortemente regular real,  $B$  é regular, os autovalores de  $\text{ad}(B)$  são reais e os autoespaços associados são unidimensionais. Portanto,  $\text{Im}\beta(B) = 0$  para qualquer raiz  $\beta$ .

# Capítulo 6

## Grupo Fundamental das variedades flag

Nesse capítulo é calculado o grupo fundamental das variedades flag de uma álgebra de Lie simples complexa e das formas reais. Para isso é usado o Teorema 4.6, o qual determina o grupo fundamental das variedades flag através de um método algébrico. Mais explicitamente, esse teorema consiste em quocientar o centralizador  $\widetilde{M}$  pelo seus elementos que estão na componente conexa da identidade  $(\widetilde{P}_\Theta)_0$  de  $\widetilde{P}_\Theta$ .

Outra ferramenta utilizada é a seguinte proposição; veja Johnson[14].

**Proposição 6.1**  *$\widetilde{M}$  é conexo se, e somente se, toda raiz branca do diagrama de Satake é adjacente a uma raiz preta ou está ligada a outra raiz branca.*

**Observação:** Seja  $\mathbb{F}$  a variedade flag maximal de  $\mathfrak{g}$ . Em [14], conclui-se que  $\pi_1(\mathbb{F}) = \pi_0(\widetilde{M})$  e assim,  $\mathbb{F}$  é simplesmente conexa se, e somente se,  $\widetilde{M}$  é conexo. E pela proposição anterior é possível verificar se  $\widetilde{M}$  é conexo apenas olhando o diagrama de Satake.

Usando o Teorema 4.6 também conclui-se que a variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  é simplesmente conexa se, e somente se,  $\widetilde{M}$  é conexo.

## 6.1 Álgebra de Lie simples complexa

Em uma álgebra de Lie simples complexa as variedades flag são variedades complexas. Nesse caso, as variedades flag são simplesmente conexas. De fato, o grupo  $M$  é conexo pois é um toro complexo com álgebra de Lie  $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , logo  $\widetilde{M}$  é conexo e então

$$\pi_1(\mathbb{F}_{\Theta}) = \widetilde{M} / \left( \widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_{\Theta})_0 \right) = \{e\}.$$

## 6.2 Forma real tipo $AI$

$$AI, l \geq 1 \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l$$

A forma real tipo  $AI$  é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , a qual é a forma real normal de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  com  $n = l + 1$ . Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  com a subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  e  $\mathfrak{s}$  o subespaço das matrizes simétricas em  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ .

Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . A álgebra  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  se realiza na álgebra de Clifford  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  como o espaço gerado pelos produtos  $u \cdot v$  com  $u, v \in \mathbb{R}^n$  ortogonais:

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \text{span}\{u \cdot v \in \mathcal{C} : u, v \in \mathbb{R}^n, \langle u, v \rangle = 0\}.$$

A representação de  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$  em  $\mathbb{R}^n$  dá-se por comutação em  $\mathcal{C}$ .

Sejam  $\widetilde{G}$  o recobrimento universal do grupo  $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$  e  $\widetilde{K}$  o grupo compacto maximal de  $\widetilde{G}$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ . Nesse caso,  $\widetilde{K}$  é o grupo  $\text{Spin}(n)$ , o qual se realiza como o grupo dos elementos inversíveis de ordem par na álgebra de Clifford  $\mathcal{C}$ .

O grupo  $\text{Spin}(n)$  é um recobrimento duplo de  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ . O homomorfismo de recobrimento  $\gamma$  é dado pela representação em  $\mathbb{R}^n$ , que é definida por conjugação:



$u \in \text{Spin}(n)$  define a aplicação  $\gamma(u) : v \in \mathbb{R}^n \mapsto uvu^{-1} \in \mathbb{R}^n$ . O núcleo desse homomorfismo é  $\{\pm 1\}$ , escalares em  $\mathcal{C}$ .

O grupo  $\widetilde{M} \subset \widetilde{K}$  é o grupo  $\mathcal{D}_n$  o qual é formado pelos produtos de quantidade par de elementos da base canônica

$$\widetilde{M} = \mathcal{D}_n = \{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} : 1 \leq i_1, \dots, i_{2k} \leq n\};$$

veja [14, Proposition 17.1].

A imagem de  $\mathcal{D}_n$  pelo homomorfismo de recobrimento é um subgrupo de matrizes diagonais em  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ , isto é,

$$\gamma(\mathcal{D}_n) = \{\text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} : \varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = 1\} = M = \mathbb{Z}_2^{n-1}.$$

**Proposição 6.2** *Seja  $\widetilde{G}$  o recobrimento universal do grupo  $G = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ . Seja  $\widetilde{P}_\Theta$  um subgrupo parabólico não minimal de  $\widetilde{G}$ . Então,  $-1 \in (\widetilde{P}_\Theta)_0$ , isto é,  $\text{Ker}\gamma \subset (\widetilde{P}_\Theta)_0$ .*

**Demonstração:** Considere a aplicação exponencial na álgebra de Clifford  $\exp : \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Spin}(n)$  dada por

$$\exp(u) = \sum_{k \geq 0} \frac{u^k}{k!}.$$

Para todo índice  $j = 1, \dots, n-1$  tem-se que

$$\exp(te_j e_{j+1}) = \cos(t) + \text{sen}(te_j e_{j+1}).$$

Em particular para  $t = \pi$ ,  $\exp(\pi e_j e_{j+1}) = 1$ . Por outro lado, se uma subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_\Theta$  não é minimal, então existe  $j = 1, \dots, n-1$  tal que  $e_j e_{j+1} \in \mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta \cap \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ . Logo,  $-1 \in \exp(\mathfrak{k}_\Theta) \subset (\widetilde{P}_\Theta)_0$ .  $\square$

**Corolário 6.3** *Seja  $M$  o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $K \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$  e  $P_\Theta$  um subgrupo parabólico não minimal de  $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ . Então*

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \widetilde{M} / \left( \widetilde{M} \cap (\widetilde{P}_\Theta)_0 \right) = M / (M \cap (P_\Theta)_0).$$

**Demonstração:** Pela Proposição 6.2,  $\text{Ker}\gamma \subset (\tilde{P}_\Theta)_0$ . Então

$$\tilde{M}/(\tilde{M} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0) = (\tilde{M}/\text{Ker}\gamma)/(\tilde{M} \cap (P_\Theta)_0 \cap \text{Ker}\gamma) = M/(M \cap (P_\Theta)_0)$$

e o resultado está provado.  $\square$

**Corolário 6.4** *Um elemento  $e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \in \mathcal{D}_n$  pertence à componente conexa  $(\tilde{P}_\Theta)_0$  se, e somente se, o número de índices que aparecem dentro de cada um dos blocos que define  $\mathfrak{p}_\Theta$  é par.*

**Demonstração:** Se  $\tilde{P}_\Theta$  não é minimal, então  $e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \in \mathcal{D}_n$  pertence a  $(\tilde{P}_\Theta)_0$  se, e somente se,  $\gamma(e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}) \in (P_\Theta)_0$ , onde  $P_\Theta$  é o subgrupo parabólico correspondente no grupo  $Sl(n, \mathbb{R})$ . Por outro lado, um elemento  $\text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \subset M \subset Sl(n, \mathbb{R})$  se, e somente se, a quantidade de  $-1$  que está dentro de cada bloco que define  $P_\Theta$  é par, pois assim o determinante de cada bloco é  $+1$ . Se  $\tilde{P}_\Theta$  é minimal o resultado é direto.  $\square$

As variedades flag de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  são variedades flag  $\mathbb{F}^n(d_1, \dots, d_k)$  formadas por subespaços  $(V_1 \subset \dots \subset V_k)$  com  $\dim V_k = d_k$ . Cada uma dessas variedades flag é da forma  $\mathbb{F}_\Theta$ , onde  $\Theta$  é um conjunto de raízes simples. A relação entre as dimensões  $d_1, \dots, d_k$  e  $\Theta$  é dada da seguinte forma: ordene as raízes do diagrama de Dynkin da esquerda para direita. Então,  $\mathbb{F}^n(d_1, \dots, d_k) = \mathbb{F}_\Theta$  onde as dimensões  $d_i$  são os índices das raízes que não pertence a  $\Theta$ ; veja [24].

Seja  $\mathbb{F}^n(d_1, \dots, d_k) = \mathbb{F}_\Theta = Sl(n, \mathbb{R})/P_\Theta$  a variedade flag de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  determinada por blocos de tamanhos  $n_1, \dots, n_k$ , onde  $n_1 + \dots + n_k = n$  com  $n_1 = d_1$  e  $n_i = d_i - d_{i-1}, 1 < i \leq k$ .

Então,

$$M \cap (P_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} = \mathbb{Z}_2^{n-k}$$

sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ . Portanto,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = M / (M \cap (P_\Theta)_0) = \mathbb{Z}_2^{n-1} / \mathbb{Z}_2^{n-k} \approx \mathbb{Z}_2^{k-1}$$

onde  $k$  é o número de blocos de  $(P_\Theta)_0$ .

### 6.3 Forma real tipo $AII$



A forma real tipo  $AII$  é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H})$ . Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n) \oplus \mathfrak{s}$  onde  $\mathfrak{s}$  são matrizes hermitianas da forma

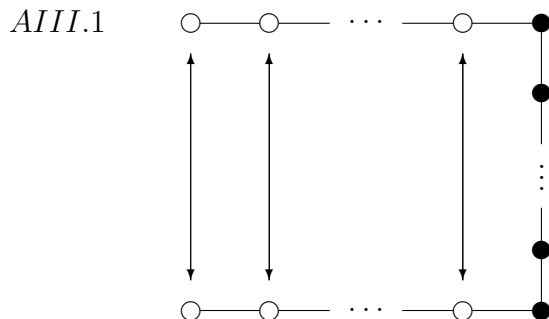
$$\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

com  $z_1$  e  $z_2$  matrizes complexas  $n \times n$ . Assim, o subgrupo  $\tilde{K} = \text{Sp}(n)$ .

Toda raiz branca do diagrama de Satake dessa álgebra é adjacente a uma raiz preta, então, pela Proposição 6.1,  $\tilde{M}$  é conexo. Nesse caso,  $\tilde{M} = (\text{Sp}(1))^n$ ; veja [14, Proposition 17.2]. Logo,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \{e\}.$$

### 6.4 Forma real tipo $AIII.1$

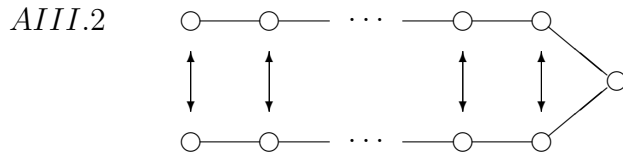


A forma real tipo *AIII.1* é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p, q)$ , com  $p \leq q$ . Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  com  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus z$  onde  $z$  é o centro. Assim, o subgrupo  $\widetilde{K} = \mathrm{SU}(p) \times \mathrm{SU}(q) \times \mathbb{R}H$ .

No diagrama de Satake da álgebra  $\mathfrak{g}$ , toda raiz branca está ligada a outra raiz branca ou é adjacente a uma raiz preta. Assim, pela Proposição 6.1,  $\widetilde{M}$  é conexo. Nesse caso,  $\widetilde{M} = (S^1)^{p-1} \times \mathrm{SU}(q-p) \times \mathbb{R}$ ; veja [14, Proposition 17.3]. Então,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \{e\}.$$

## 6.5 Forma real tipo *AIII.2*

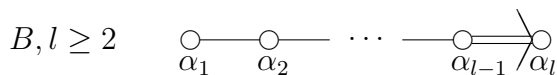


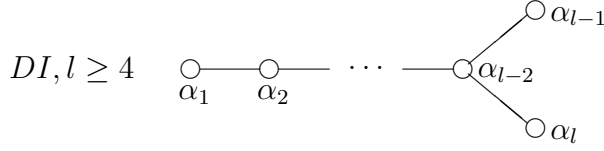
A forma real tipo *AIII.2* é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p, p)$ , com  $p \geq 2$ . Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{u}(p)$ . Assim, o subgrupo  $\widetilde{K} = \mathrm{SU}(p) \times \mathrm{SU}(p) \times \mathbb{R}$ .

No diagrama de Satake da álgebra  $\mathfrak{g}$ , toda raiz branca está ligada a outra raiz branca. Assim, pela Proposição 6.1,  $\widetilde{M}$  é conexo. Nesse caso,  $\widetilde{M} \approx (S^1)^{p-1} \times \mathbb{Z}$ ; veja [14, Proposition 17.4]. Então,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \{e\}.$$

## 6.6 Forma real tipo *BDI*





A forma real tipo  $BDI$  é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(l, n - l)$ , a qual é a forma real normal das álgebras tipo  $B_l$ , quando  $n = 2l + 1$  e das álgebras tipo  $D_l$ , quando  $n = 2l$ .

Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l) \oplus \mathfrak{so}(n - l)$  com  $n = 2l + 1$  ou  $2l$ . Assim, o subgrupo  $\tilde{K} = \text{Spin}(l) \times \text{Spin}(n - l)$  com  $n = 2l + 1$  ou  $2l$ .

Nesse caso,  $\tilde{M} = \mathcal{D}_l \times \text{Spin}(n - 2l) = \mathcal{D}_l = \{e_{i_1} \dots e_{i_{2l}} : 1 \leq e_{i_1}, \dots, e_{i_{2l}} \leq l\}$ ; veja [14, Proposition 17.5].

Já foi visto que  $\text{Spin}(l)$  é um recobrimento duplo de  $\text{SO}(l, \mathbb{R})$ . E o homomorfismo de recobrimento foi dado pela aplicação  $\gamma$ . Tome  $\varphi$ , o homomorfismo de recobrimento de  $\text{SO}(n - l, \mathbb{R})$  com  $n = 2l + 1$  ou  $2l$ , dado também por conjugação.

Então  $\text{Spin}(l) \times \text{Spin}(n - l)$  com  $n = 2l + 1$  ou  $2l$  é um recobrimento duplo de  $\text{SO}(l, \mathbb{R}) \times \text{SO}(n - l, \mathbb{R})$  com  $n = 2l + 1$  ou  $2l$ . E o núcleo deste homomorfismo é dado por  $(\{\pm 1\}, \{\pm 1\})$ .

**Proposição 6.5** *Seja  $\tilde{G}$  o recobrimento do grupo  $G = (\text{SO}(n, n - l))_0$ , com  $n = 2l$  ou  $2l + 1$ . Seja  $\tilde{P}_\Theta$  um subgrupo parabólico não minimal de  $\tilde{G}$ . Então,  $-1 \in (\tilde{P}_\Theta)_0$ , isto é,  $\text{Ker}(\gamma \circ \varphi) \subset (\tilde{P}_\Theta)_0$ .*

**Demonstração:** Basta aplicar a Proposição 6.2 em cada componente. □

**Corolário 6.6** *Seja  $M$  o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $K \subset (\text{SO}(l, n - l))_0$ , com  $n = 2l$  ou  $2l + 1$ . Então*

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \tilde{M} / \left( \tilde{M} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0 \right) = M / (M \cap (P_\Theta)_0).$$

**Demonstração:** Prova semelhante à prova do Corolário 6.3.  $\square$

**Corolário 6.7** *Um elemento  $e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \in \mathcal{D}_l$  pertence à componente conexa  $(\tilde{P}_\Theta)_0$  se, e somente se, o número de índices que aparecem dentro de cada um dos blocos que define  $\mathfrak{p}_\Theta$  é par.*

**Demonstração:** Prova semelhante à prova do corolário 6.4.  $\square$

Seja  $V_k$  um subespaço isotrópico, isto é, um subespaço em que as formas bilineares correspondentes se anulam. As variedades flag de  $\mathfrak{so}(l, n-l)$  são formadas por subespaços isotrópicos  $(V_1 \subset \dots \subset V_k)$  com  $\dim V_k = d_k$ .

As variedades flag de espaços isotrópicos são denotados por  $\mathbb{F}^I(d_1, \dots, d_k)$  com  $1 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k \leq l$ . Essas variedades flag também são da forma  $\mathbb{F}_\Theta$ . Com exceção de alguns casos da álgebra do tipo  $D_l$ , o subconjunto  $\Theta$  é definido de tal forma que as dimensões  $d_1, \dots, d_k$  sejam os índices das raízes  $\alpha_i$  que não estão em  $\Theta$ ; veja [24].

A seguir, o grupo fundamental das variedades flag da forma real normal das álgebras  $B_l$  e  $D_l$  são calculados separadamente.

### 6.6.1 Forma real normal da álgebra $B_l$

Se  $\alpha_l = \lambda_l$  não pertence ao subconjunto  $\Theta$ . Então,  $\langle \Theta \rangle$ , o gerado por  $\Theta$ , só contém raízes do tipo  $\lambda_i - \lambda_j$ . Nesse caso, a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}(n_k)$ , com  $n_i$  o tamanho dos blocos que aparecem em  $\mathfrak{p}_\Theta$ . Cada  $n_i$  é dado em termos das raízes simples pelas diferenças dos índices  $d_i$ , ou seja,  $n_1 = d_1$ ,  $n_i = d_i - d_{i-1}$ , com  $1 < i \leq k$  e  $n_1 + \dots + n_k = l$ . Assim,

$$M \cap (P_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k}$$

sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ . Portanto,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = M / (M \cap (P_\Theta)_0) = \mathbb{Z}_2^{l-1} / \mathbb{Z}_2^{l-k} \approx \mathbb{Z}_2^{k-1}$$

onde  $k$  é o número de blocos de  $(P_\Theta)_0$ .

**Se  $\alpha_l$  pertence ao subconjunto  $\Theta$ :** existem duas possibilidades para subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$ .

1. Se  $\alpha_{l-1} = \lambda_{l-1} - \lambda_l \in \Theta$ , então

$$\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}(n_k) \oplus \mathfrak{so}(l - d_k) \oplus \mathfrak{so}(l - d_k + 1)$$

onde  $n_1 = d_1$ ,  $n_i = d_i - d_{i-1}$ ,  $1 < i \leq k$ ; veja [24]. Então,

$$M \cap (P_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} \times \mathbb{Z}_2^{l-d_k-1} \times \mathbb{Z}_2^{l-d_k+1-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k+2x-1}$$

com  $x = l - d_k > 1$ , sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ . Portanto,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = M / (M \cap (P_\Theta)_0) = \mathbb{Z}_2^{l-1} / \mathbb{Z}_2^{l-k+2x-1} \approx \mathbb{Z}_2^{k-2x}$$

onde  $x = l - d_k > 1$  e  $k$  é o número de blocos de  $(P_\Theta)_0$ .

2. Se  $\alpha_{l-1} \notin \Theta$ , então

$$\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}(n_k) \oplus \mathfrak{so}(2)$$

com  $n_1 = d_1$ ,  $n_i = d_i - d_{i-1}$ ,  $1 < i \leq k$ . Então,

$$M \cap (P_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} \times \mathbb{Z}_2^{2-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k+1}$$

sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ . Portanto,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = M / (M \cap (P_\Theta)_0) = \mathbb{Z}_2^{l-1} / \mathbb{Z}_2^{l-k+1} \approx \mathbb{Z}_2^{k-2}$$

onde  $k$  é o número de blocos de  $(P_\Theta)_0$ .

### 6.6.2 Forma real normal da álgebra $D_l$

**Se  $\alpha_l = \lambda_{l-1} + \lambda_l$  não pertence ao subconjunto  $\Theta$ .** Então  $\langle \Theta \rangle$  só contém raízes do tipo  $\lambda_i - \lambda_j$ . Assim, a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{so}(n_k)$  com  $n_i + \cdots + n_k = l$  e  $n_1 = d_1$ ,  $n_i = d_i - d_{i-1}$ ,  $1 < i \leq k$ ; veja [24]. Então,

$$M \cap (P_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k}$$

sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ . Portanto,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = M/(M \cap (P_\Theta)_0) = \mathbb{Z}_2^{l-1}/\mathbb{Z}_2^{l-k} \approx \mathbb{Z}_2^{k-1}$$

onde  $k$  é o número de blocos de  $(P_\Theta)_0$ .

**Se  $\alpha_l$  pertence ao  $\Theta$ .** Existem duas possibilidades:

1. Se  $\alpha_{l-1} = \lambda_{l-1} - \lambda_l \in \Theta$ . Então,  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}(n_k) \oplus \mathfrak{so}(l-d_k) \oplus \mathfrak{so}(l-d_k)$ .

Assim,

$$M \cap (P_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} \times \mathbb{Z}_2^{l-d_k-1} \times \mathbb{Z}_2^{l-d_k-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k+2x}$$

com  $x = l - d_k - 1 > 0$ , sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ .

Portanto,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = M/(M \cap (P_\Theta)_0) = \mathbb{Z}_2^{l-1}/\mathbb{Z}_2^{l-k+2x} \approx \mathbb{Z}_2^{k-1-2x}$$

onde  $x = l - d_k - 1 > 0$  e  $k$  é o número de blocos de  $(P_\Theta)_0$ .

2. Se  $\alpha_{l-1} \notin \Theta$ , então  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}(n_k) \oplus \mathfrak{so}(1) \oplus \mathfrak{so}(1)$ . Então,

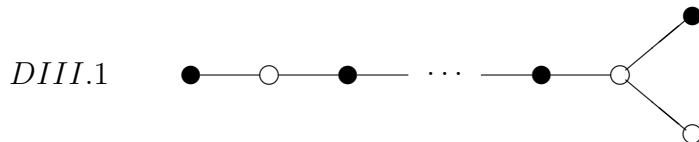
$$M \cap (P_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k}$$

sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ . Portanto,

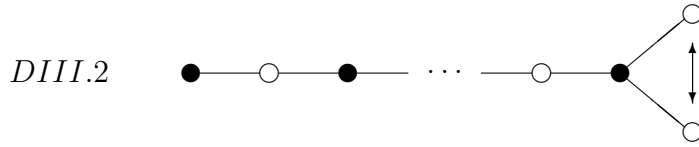
$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = M/(M \cap (P_\Theta)_0) = \mathbb{Z}_2^{l-1}/\mathbb{Z}_2^{l-k} \approx \mathbb{Z}_2^{k-1}$$

onde  $k$  é o número de blocos de  $(P_\Theta)_0$ .

## 6.7 Forma real tipo *DIII*





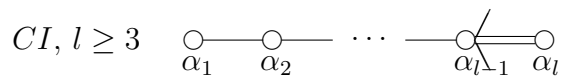


A forma real tipo *DIII* é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{H}) \cap \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$ . Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(2n) \cap \mathfrak{sp}(n) = \mathfrak{u}(n)$ . Então o subgrupo  $\tilde{K} = \text{SU}(n) \times \mathbb{R}H$ .

No diagrama de Satake da álgebra  $\mathfrak{g}$  toda raiz branca está ligada a outra raiz branca ou é adjacente a uma raiz preta. Assim, pela Proposição 6.1,  $\tilde{M}$  é conexo. Nesse caso,  $\tilde{M} = \text{SU}(2)^k \times \mathbb{R}$ , se  $n = 2k + 1$  e  $\tilde{M} = \text{SU}(2)^k \times \mathbb{Z}$ , se  $n = 2k$ . Então,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \{e\}.$$

## 6.8 Forma real tipo *CI*



A forma real tipo *CI* é a álgebra simplética real  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ , a qual é a forma real normal da álgebra  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$  com  $n = l$ . Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde  $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n)$  enquanto  $\mathfrak{s}$  é o subespaço das matrizes simétricas em  $\mathfrak{g}$ . O subgrupo  $\tilde{K} = \text{SU}(n) \times \mathbb{R}$ . Nesse caso,  $\tilde{M} = M_{\text{SU}} \times \bar{M} = \mathbb{Z}_2^{n-1} \times \mathbb{Z}$ ; veja [14, Proposition 17.7].

1.  $M_{\text{SU}}$  são as matrizes diagonais reais em  $\text{SU}(n)$ . Os elementos de  $\text{SU}(n)$ , como matrizes  $2n \times 2n$ , são

$$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

onde  $\Lambda = \text{diag}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  com  $\varepsilon_i = \pm 1$  e  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = 1$ . Esse grupo é  $\mathbb{Z}_2^{n-1}$ .

2.  $\bar{M} = \{(k, itJ) \in \text{SU}(n) \times (\exp \mathfrak{z}K)_{\tilde{G}} : k(\exp itJ)_G = \text{diag}\{1, \dots, 1, \pm 1\}\}$ .

As variedades flag de  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  são variedades flag  $\mathbb{F}^l(d_1, \dots, d_k) = \mathbb{F}_\Theta$ , com  $1 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k \leq n$ , formadas por subespaços isotrópicos ( $V_1 \subset \dots \subset V_k$ ) com  $\dim V_k = d_k$ . O subconjunto  $\Theta$  é definido de tal forma que as dimensões  $d_1, \dots, d_k$  sejam os índices das raízes  $\alpha_i$  que não estão em  $\Theta$ ; veja [24].

Seja  $\mathbb{F}^n(d_1, \dots, d_k) = \mathbb{F}_\Theta = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})/P_\Theta$  a variedade flag de  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  determinada por blocos de tamanhos  $n_1, \dots, n_k$  onde  $n_1 + \dots + n_k = n = l$  e com  $n_1 = d_1$  e  $n_i = d_i - d_{i-1}, 1 \leq i \leq k$ .

**Se  $\alpha_l = 2\lambda_l$  não pertence a  $\Theta$ .** Então  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1, \mathbb{R}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}(n_k, \mathbb{R})$ . Nesse caso  $\mathfrak{k}_\Theta$  é uma subálgebra de  $\mathfrak{so}(l)$  e  $(K_\Theta)_0 \subset \mathrm{SO}(n) \subset \mathrm{SU}(n)$ . Portanto, no grupo  $\tilde{K} = \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}$  tem-se que  $(\tilde{K}_\Theta)_0 \subset \mathrm{SU}(n)$ . Por outro lado, os elementos não triviais de  $\overline{M}$  têm componente trivial na direção de  $\mathbb{R}$ , na decomposição  $\overline{M} \subset \mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}$ . Logo,  $\{1\} = \overline{M} \cap (\tilde{K}_\Theta)_0 = \overline{M} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0$ .

Então

$$M_{\mathrm{SU}} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k}.$$

Assim, o grupo fundamental é dado por

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = (\mathbb{Z}_2^{l-1}/\mathbb{Z}_2^{l-k}) \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2^{k-1} \times \mathbb{Z}.$$

**Se  $\alpha_l$  pertence a  $\Theta$ .** Considere  $B = \mathrm{diag}\{0, \dots, 0, 1\}$ . Então a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_\Theta.$$

Assim  $\exp_{\tilde{G}}(tX) \in (\tilde{P}_\Theta)_0$ . Como  $\exp_{\tilde{G}}(\pi X)$  é o gerador de  $\overline{M}$ , então  $\overline{M} \subset (\tilde{P}_\Theta)_0$ .

Analisa-se duas possibilidades:

1. Se  $\alpha_{l-1} = \lambda_{l-1} - \lambda_l \in \Theta$ , então  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1, \mathbb{R}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}(n_k, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{u}(l - d_k)$ .

$$M_{\mathrm{SU}} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} \times \mathbb{Z}^{l-d_k-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k} \times \mathbb{Z}$$

sendo uma componente para cada bloco de  $(P_\Theta)_0$ . Assim, o grupo fundamental é dado por

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \mathbb{Z}_2^{l-1} \times \mathbb{Z} / (\mathbb{Z}_2^{l-k} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2^{k-1}.$$

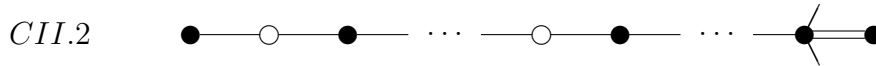
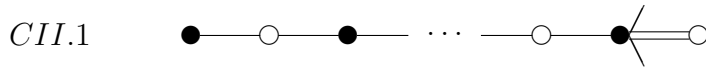
2. Se  $\alpha_{l-1} \notin \Theta$ , então  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{so}(n_1, \mathbb{R}) \oplus \dots \oplus \mathfrak{so}(n_k, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(2)$ .

$$M_{\text{SU}} \cap (\tilde{P}_\Theta)_0 = \mathbb{Z}_2^{n_1-1} \times \dots \times \mathbb{Z}_2^{n_k-1} \times \mathbb{Z}_2^{2-1} = \mathbb{Z}_2^{l-k+1}.$$

Assim, o grupo fundamental é dado por

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \mathbb{Z}_2^{l-1} / \mathbb{Z}_2^{l-k+1} = \mathbb{Z}_2^{k-2}.$$

## 6.9 Forma real tipo *CII*



A forma real tipo *CII* é álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p, q)$  das matrizes em  $\mathfrak{sp}(p + q, \mathbb{C})$ . Considere uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde  $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(p) \times \mathfrak{sp}(q)$ . Então o subgrupo  $\tilde{K} = \text{Sp}(p) \times \text{Sp}(q)$ .

No diagrama de Satake da álgebra  $\mathfrak{g}$  toda raiz branca está ligada a outra raiz branca ou é adjacente a uma raiz preta. Assim, pela Proposição 6.1,  $\tilde{M}$  é conexo. Nesse caso,  $\tilde{M} \approx (\text{Sp}(1))^p \times \text{Sp}(q - p)$ . Então,

$$\pi_1(\mathbb{F}_\Theta) = \{e\}.$$

**Observação:** Note que  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  não é trivial apenas para as variedades flag  $\mathbb{F}_\Theta$  das formais reais normais. Na verdade,  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  depende apenas das raízes reais, as quais por sua vez geram uma álgebra de Lie que é uma forma real normal.



# Capítulo 7

## Segundo grupo de homotopia das variedades flag

Nesse capítulo é calculado o segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  das variedades flag  $\mathbb{F}_\Theta$  para as formas reais normais das álgebras clássicas e o segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F})$  da variedade flag maximal  $\mathbb{F}$  de algumas outras álgebras.

Seja  $K$  o subgrupo compacto maximal do grupo  $G$ . Sejam  $\tilde{G}$  o recobrimento universal do grupo  $G$  e  $\tilde{K}$  o subgrupo de  $\tilde{G}$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{k}$ , que é o recobrimento universal do subgrupo  $K$ .

**Proposição 7.1** *Sejam  $\tilde{P}_\Theta$  um subgrupo parabólico do grupo  $\tilde{G}$  e  $\tilde{K}_\Theta$  o subgrupo de  $\tilde{G}$  que tem álgebra  $\mathfrak{k}_\Theta = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}_\Theta$ . Então*

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \pi_1(\tilde{K}_\Theta).$$

**Demonstração:** Considere a fibração

$$\tilde{K} \rightarrow \tilde{K}/\tilde{K}_\Theta = \mathbb{F}_\Theta$$

que induz a seguinte sequência exata de homotopia

$$\dots \rightarrow \pi_2(\tilde{K}_\Theta) \rightarrow \pi_2(\tilde{K}) \rightarrow \pi_2(\mathbb{F}_\Theta) \rightarrow \pi_1(\tilde{K}_\Theta) \rightarrow \pi_1(\tilde{K}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{F}_\Theta) \rightarrow \dots$$

Tem-se que  $\pi_1(\tilde{K}) = \{e\}$ , pois  $\tilde{K}$  é simplesmente conexo e  $\pi_2(\tilde{K}) = \{e\}$ , pois  $\pi_2$

de qualquer grupo de Lie é trivial. Então

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \pi_1(\tilde{K}_\Theta),$$

como desejado. □

## 7.1 Forma real normal de $A_l$

$$A_l, l \geq 1 \quad \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \cdots \text{---} \alpha_{l-1} \text{---} \alpha_l$$

Considere a subálgebra compacta  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$  com  $n = l+1$ . O subgrupo compacto associado a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$  é  $K_\Theta = \text{SO}(n_1) \times \dots \times \text{SO}(n_k)$  com  $n_1 + \dots + n_k = n$ .

O grupo  $\text{Spin}(n)$ , com  $n \geq 3$ , é o grupo simplesmente conexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ . O grupo  $\text{Spin}(2) = \text{U}(1) = S^1$ .

Tomando o recobrimento duplo de cada  $\text{SO}(n_i)$ , tem-se que o subgrupo  $\tilde{K}_\Theta = \text{Spin}(n_1) \times \dots \times \text{Spin}(n_k)$  com  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2 \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

## 7.2 Forma real normal de $B_l$

$$B_l, l \geq 2 \quad \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \cdots \text{---} \alpha_{l-1} \text{---} \alpha_l$$

Considere a subálgebra compacta  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l+1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(l, \mathbb{R})$ . O grupo compacto maximal é  $K = \text{SO}(l) \times \text{SO}(l+1)$ . Para calcular o segundo grupo de homotopia das variedades flag analisa-se dois casos:

Se  $\alpha_l$  não pertence a  $\Theta$ . O subgrupo associado a subálgebra  $\mathfrak{k}_\Theta$  é o subgrupo  $K_\Theta = \text{SO}(n_1) \times \dots \times \text{SO}(n_k)$  com  $n_1 + \dots + n_k = l$ .

Tomando o recobrimento duplo de cada  $\text{SO}(n_i)$  tem-se que o subgrupo  $\tilde{K}_\Theta = \text{Spin}(n_1) \times \dots \times \text{Spin}(n_k)$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2 \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

Se  $\alpha_l$  pertence a  $\Theta$ . Nesse caso, tem-se duas possibilidades:

1. Se  $\alpha_{l-1}$  pertence a  $\Theta$ , então  $K_\Theta = \text{SO}(n_1) \times \dots \times \text{SO}(n_k) \times \text{SO}(l - d_k) \times \text{SO}(l - d_k + 1)$  onde  $n_i = d_i - d_i - 1$  com  $1 \leq i \leq k$ . Nesse caso, tomando o recobrimento duplo de cada  $\text{SO}(n_i)$  tem-se que  $\tilde{K}_\Theta = \text{Spin}(n_1) \times \dots \times \text{Spin}(n_k) \times \text{Spin}(l - d_k) \times \text{Spin}(d_k + 1)$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2 \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

2. Se  $\alpha_{l-1}$  não pertence a  $\Theta$ , então  $K_\Theta = \text{SO}(n_1) \times \dots \times \text{SO}(n_k) \times \text{SO}(2)$ .

Então,

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2 \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

### 7.3 Forma real normal de $C_l$

$$C_l, l \geq 3 \quad \alpha_1 \text{---} \alpha_2 \text{---} \dots \text{---} \alpha_{l-1} \text{---} \alpha_l$$

Considere a subálgebra compacta  $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(n)$  com  $n = l$ . O grupo compacto maximal é  $K = U(n)$  com  $n = l$ . Para calcular o segundo grupo de homotopia das variedades flag analisa-se dois casos:

**Se  $\alpha_l$  não pertence a  $\Theta$ .** Então  $K_\Theta = SO(n_1) \times \dots \times SO(n_k)$ , com  $n_1 + \dots + n_k = l$ . Tomando o recobrimento duplo de cada  $SO(n_i)$  tem-se que  $\tilde{K}_\Theta = Spin(n_1) \times \dots \times Spin(n_k)$ . Então,

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2 \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

**Se  $\alpha_l$  pertence a  $\Theta$ .** Aqui tem-se dois casos:

1. Se  $\alpha_{l-1}$  pertence a  $\Theta$ , então o subgrupo  $K_\Theta = SO(n_1) \times \dots \times SO(n_k) \times U(l-d_k)$ . Nesse caso, tomando o recobrimento duplo de cada  $SO(r_i)$  e sabendo que o recobrimento de  $U(r_k)$  é  $SU(r_k) \times \mathbb{R}$  tem-se que  $\tilde{K}_\Theta = Spin(r_1) \times \dots \times Spin(r_{k-1}) \times SU(r_k) \times \mathbb{R}$ .

Então,

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2, \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

2. Se  $\alpha_{l-1}$  não pertence a  $\Theta$ , então o subgrupo  $K_\Theta = SO(r_1) \times \dots \times SO(r_k) \times SO(2)$ .

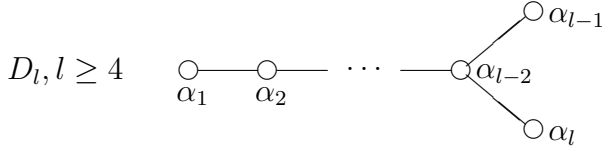
Então,

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2, \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .



## 7.4 Forma real normal de $D_l$



Considere a subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(l, \mathbb{R})$ . O grupo compacto maximal é  $K = \text{SO}(l) \times \text{SO}(l+1)$ . Também aqui para calcular o segundo grupo de homotopia das variedades flag tem-se duas possibilidades:

**Se  $\alpha_l$  não pertence a  $\Theta$ .** Então o subgrupo  $K_\Theta = \text{SO}(n_1) \times \dots \times \text{SO}(n_k)$ , com  $n_1 + \dots + n_k = l$ . Tomando o recobrimento duplo de cada  $\text{SO}(n_i)$  tem-se que  $\tilde{K}_\Theta = \text{Spin}(n_1) \times \dots \times \text{Spin}(n_k)$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2, \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

**Se  $\alpha_l$  pertence a  $\Theta$ .** Então tem-se duas possibilidades:

1. Se  $\alpha_{l-1}$  pertence a  $\Theta$ , então  $K_\Theta = \text{SO}(n_1) \times \dots \times \text{SO}(n_k) \times \text{SO}(l - d_k) \times \text{SO}(l - d_k)$ . Tomando o recobrimento duplo de cada  $\text{SO}(n_i)$  tem-se que  $\tilde{K}_\Theta = \text{Spin}(n_1) \times \dots \times \text{Spin}(n_k) \times \text{Spin}(l - d_k) \times \text{Spin}(l - d_k)$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2, \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

2. Se  $\alpha_{l-1}$  não pertence a  $\Theta$ , então o subgrupo  $K_\Theta = \text{SO}(n_1) \times \dots \times \text{SO}(n_k) \times \text{SO}(1) \times \text{SO}(1)$ . Tomando o recobrimento duplo de cada  $\text{SO}(n_i)$  tem-se que  $\tilde{K}_\Theta = \text{Spin}(n_1) \times \dots \times \text{Spin}(n_k)$ .

Então

$$\pi_2(\mathbb{F}_\Theta) = \begin{cases} \{e\}, & \text{se } n_i \neq 2 \text{ para qualquer } i \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_s, & \text{se } n_i = 2, \text{ para algum } i \end{cases}$$

onde  $s$  é o número de vezes que  $n_i = 2$ .

**Observação:** Note que para forma real normal de  $B_l$  e de  $C_l$ , se  $\alpha_l$  pertence a  $\Theta$  e  $\alpha_{l-1}$  não pertence a  $\Theta$ , então a não trivialidade do  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  é garantida com a presença de pelo menos um  $\mathbb{Z}$ . Além disso, no segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  não aparece  $\mathbb{Z}_2$  como acontece no grupo fundamental  $\pi_1(\mathbb{F}_\Theta)$  da variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$ .

Agora é apresentado um outro método algébrico para calcular o segundo grupo de homotopia da variedade flag maximal.

**Proposição 7.2** *Sejam  $\tilde{K}$  um subgrupo compacto de  $\tilde{G}$  e  $\tilde{M}$  o centralizador de  $\mathfrak{a}$  em  $\tilde{K}$ . Considere  $\mathbb{F}$  a variedade flag maximal de  $\tilde{G}$ . Então*

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\tilde{M}).$$

**Demonstração:** A variedade flag maximal  $\mathbb{F}$  pode ser dada por  $\mathbb{F} \approx \tilde{K}/\tilde{M}$ . Então considere a fibração

$$\tilde{K} \rightarrow \tilde{K}/\tilde{M} = \mathbb{F}$$

que induz a seguinte sequência exata de homotopia

$$\dots \rightarrow \pi_2(\tilde{M}) \rightarrow \pi_2(\tilde{K}) \rightarrow \pi_2(\mathbb{F}) \rightarrow \pi_1(\tilde{M}) \rightarrow \pi_1(\tilde{K}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{F}) \rightarrow \dots$$

Tem-se que  $\pi_1(\tilde{K}) = \{e\}$ , pois  $\tilde{K}$  é simplesmente conexo e  $\pi_2(\tilde{K}) = \{e\}$ , pois  $\pi_2$  de qualquer grupo de Lie é trivial. Então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\tilde{M}),$$

como desejado. □

Aqui são usados os resultados de [14] sobre o grupo  $\tilde{M}$  para calcular  $\pi_2(\mathbb{F})$ .

## 7.5 Álgebra de Lie simples complexa

Nesse caso o grupo  $\widetilde{M}$  é um toro complexo, ou seja,  $\widetilde{M} = T^l$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\widetilde{M}) = \pi_1(T^l) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_l.$$

## 7.6 Forma real normal

Nesse caso o grupo  $\widetilde{M}$  é discreto, pois  $\widetilde{M}_0 = \{1\}$ . Logo,  $\pi_1(\widetilde{M}) = \{e\}$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\widetilde{M}) = \{e\}.$$

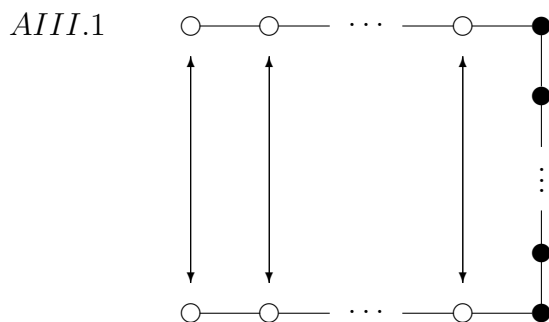
## 7.7 Forma real do tipo $AII$



Nesse caso  $\widetilde{M} = (\text{Sp}(1))^n$ . Sabendo que  $\text{Sp}(1) \approx S^3$ , então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\widetilde{M}) = \{e\}.$$

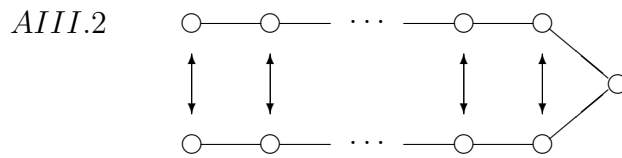
## 7.8 Forma real do tipo $AIII.1$



Nesse caso  $\widetilde{M} = (S^1)^{p-1} \times \text{SU}(q-p) \times \mathbb{R}$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\widetilde{M}) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{p-1}.$$

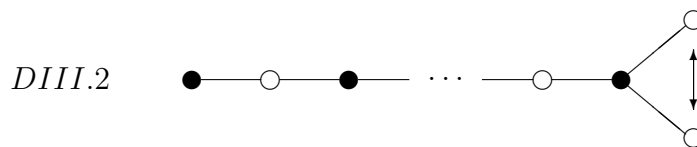
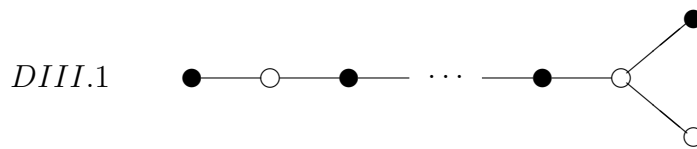
## 7.9 Forma real do tipo *AIII.2*



Nesse caso  $\widetilde{M} \approx (S^1)^{p-1} \times \mathbb{Z}$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\widetilde{M}) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{p-1}.$$

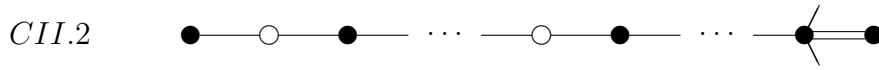
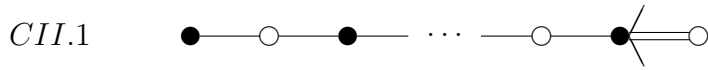
## 7.10 Forma real do tipo *DIII*



Nesse caso  $\widetilde{M} = (\text{SU}(2))^k \times \mathbb{R}$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\widetilde{M}) = \{e\}.$$

## 7.11 Forma real do tipo $CII$



Nesse caso  $\widetilde{M} = (\mathrm{Sp}(1))^p \times \mathrm{Sp}(q - p)$ . Então

$$\pi_2(\mathbb{F}) = \pi_1(\widetilde{M}) = \{e\}.$$

**Observação:** Note que para forma real normal o segundo grupo de homotopia  $\pi_2(\mathbb{F})$  da variedade flag maximal  $\mathbb{F}$  é sempre trivial, pois  $\widetilde{M}$  é discreto. Nos outros casos  $\pi_2(\mathbb{F})$  pode ser trivial ou  $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_k$  com  $k \geq 1$ .



# Apêndice A

## Fibrados

Um *grupo topológico* é um espaço topológico e um grupo abstrato onde as operações de multiplicação e inversa são aplicações contínuas. Um *semigrupo*  $S$  em um grupo  $G$  é um subconjunto invariante pela multiplicação de  $G$ .

A *ação à esquerda* de um grupo  $G$  num conjunto  $X$  é uma aplicação  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  que satisfaz

1.  $gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ ;
2.  $1 \cdot x = x$ .

para todos  $g, h \in G$  e  $x \in X$ , onde  $1 \in G$  é a identidade do grupo  $G$ . Da mesma forma, a *ação à direita* de um grupo  $G$  num conjunto  $X$  é uma aplicação  $\cdot : X \times G \rightarrow X$  que satisfaz

1.  $x \cdot gh = (x \cdot g) \cdot h$ ;
2.  $x \cdot 1 = x$

para todos  $g, h \in G$  e  $x \in X$ , onde  $1 \in G$  é a identidade do grupo  $G$ .

Para cada  $g \in G$ , a aplicação  $g : X \rightarrow X$  dada por  $g(x) = g \cdot x$ , para todo  $x \in X$  é uma bijeção com a inversa  $g^{-1} : X \rightarrow X$ .

A *órbita* pela ação do grupo  $G$  de um ponto  $x \in X$  é dada por

$$Gx = \{g \cdot x : g \in G\}$$

e o *subgrupo de isotropia* de  $G$  em  $x$  é dado por

$$G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

A ação de  $G$  em  $X$  é *transitiva* se a órbita pela ação de  $G$  de algum  $x \in X$  é todo o conjunto  $X$ . Tem-se que  $G$  *age livremente* em  $X$  se a isotropia  $G_x$  é trivial para todos  $x \in X$ .

Se  $G$  é um grupo topológico, um conjunto  $X$  é um *espaço homogêneo* de  $G$  se  $G$  age transitivamente em  $X$  e a isotropia  $G_x$  é um subgrupo fechado em  $G$ , para algum, e portanto para todo,  $x \in X$ . Se  $X$  também é um espaço topológico e a ação  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  é uma aplicação contínua, diz-se que  $G$  *age continuamente* em  $X$ . Nesse caso, para cada  $g \in G$ , a aplicação  $g : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo.

Se  $M$  é uma variedade diferenciável, um grupo de Lie  $G$  *age diferenciavelmente* em  $M$  se a ação  $\cdot : G \times M \rightarrow M$  é uma aplicação diferenciável. Nesse caso, para cada  $g \in G$ , a aplicação  $g : M \rightarrow M$  é um difeomorfismo.

Uma *fibração* é uma aplicação contínua e sobrejetora  $\pi : Q \rightarrow X$  do espaço topológico  $Q$ , chamado de *espaço total*, no espaço topológico  $X$ , chamado de *espaço base*. Denota-se por  $Q_x$  a *fibra*  $\pi^{-1}(x)$  de  $Q$  sobre  $x \in X$  e a *fibra*  $\pi^{-1}(\pi(q))$  de  $Q$  através de  $q \in Q$  é denotada por  $Q_q$ .

Uma fibração  $\pi : Q \rightarrow X$  é um *fibrado principal* se um grupo topológico  $G$  age livre e continuamente à direita no espaço total, tal que as fibras de  $Q$  são as órbitas de  $G$  em  $Q$ . O grupo  $G$  é chamado de *grupo estrutural* de  $Q$ .

O *fibrado principal trivial* com base  $X$  e grupo estrutural  $G$  é a projeção na primeira coordenada  $\text{pr}_1 : X \times G \rightarrow X$ , onde a ação de  $G$  em  $X \times G$  é dada por

$$(x, g)a = (x, ga)$$



onde  $x \in X$  e  $g, a \in G$ .

Um fibrado principal  $\pi : Q \rightarrow X$  é *localmente trivial* se existe uma cobertura aberta  $\{U_i : i \in I\}$  do espaço base, chamada de *cobertura trivializante*, tal que, para cada  $i \in I$ , o fibrado principal  $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$  é isomorfo ao fibrado principal trivial com base  $U_i$  e grupo estrutural  $G$ .

De maneira mais precisa, existe uma família de homeomorfismos

$$\{\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G\}_{i \in I}$$

chamada de trivializações locais, onde  $\psi_i = (\pi, g_i)$  para uma aplicação contínua  $g_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow G$  que satisfaz

$$g_i(qa) = g_i(q)a,$$

onde  $qa$  denota a ação de  $a \in G$  sobre  $q \in \pi^{-1}(U_i)$ . A família  $\Psi = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  é um *atlas* de  $Q$ .

A trivialidade local implica que a projeção  $\pi$  é uma aplicação aberta. A aplicação  $i_q : G \rightarrow Q_q$  dada por

$$i_q : a \in G \mapsto qa$$

é um homeomorfismo.

Associada a cada trivialização local, sua *seção local* é a aplicação  $\chi_i : U_i \rightarrow Q$  definida por  $\chi_i(x) = \psi_i^{-1}(x, 1)$ , onde  $1$  é o elemento neutro de  $G$ . Tem-se que  $\pi \circ \chi_i = \text{id}_{U_i}$  e, para todo  $x \in U_i$  e  $a \in G$ ,

$$\psi_i(\chi_i(x)a) = (x, a).$$

Se  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , então

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_{ij} \times G \rightarrow U_{ij} \times G$$

é tal que

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(xa) = \psi_j(\chi_i(x)a) = (x, a_{ij}(x)a)$$

onde  $a_{ij} = g_j \circ \chi_i : U_{ij} \rightarrow G$  é chamada de *função de transição*. Além disso, como

$$\psi_j(\chi_i(x)) = (x, a_{ij}(x)) = \psi_j(\chi_j(x)a_{ij}(x))$$

tem-se que  $\chi_i(x) = \chi_j(x)a_{ij}(x)$ .

# Apêndice B

## Álgebra semissimples

Neste capítulo é apresentado alguns conceitos e resultados da teoria de álgebras e grupos de Lie semissimples. As principais referências usadas foram Helgason [12] Knapp [17], San Martin [22] e Warner [34].

Um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  munido de um produto, colchete ou comutador, bilinear e antissimétrico  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  que satisfaz a *identidade de Jacobi*  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ , para  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$  é uma *álgebra de Lie*.

Seja  $V$  um espaço vetorial e  $\mathfrak{gl}(V)$  a álgebra de Lie das transformações lineares de  $V$ . Seja também  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma *representação* de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é um homomorfismo  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

Uma representação é chamada de *fiel* se  $\ker \rho = \{0\}$ . Nas representações fieis,  $\mathfrak{g} \approx \text{im} \rho$  e assim, a álgebra de Lie de dimensão finita pode ser vista como uma subálgebra de transformações lineares ou matrizes.

Uma representação  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$  em  $V$  é chamada de *irredutível* se os únicos subespaços invariantes por  $\rho$  são os triviais  $\{0\}$  e  $V$ .

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ . Um *peso* de  $\rho$  é um funcional linear  $\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$  tal que o subespaço  $V_\lambda$  de  $V$  definido por

$$V_\lambda = \{v \in V : \forall X \in \mathfrak{g}, \exists n \geq 1, (\rho(X) - \lambda(X))^n v = 0\}$$

é não nulo. O subespaço  $V_\lambda$  é chamado de *subespaço de pesos* associados a  $\lambda$ . A dimensão de  $V_\lambda$  é chamada de *multiplicidade* de  $\lambda$ .

A *representação adjunta* da álgebra  $\mathfrak{g}$ ,  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ , é definida por  $\text{ad}(X)(Y) = [X, Y]$  com  $X, Y \in \mathfrak{g}$  onde  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  é a álgebra de Lie das transformações lineares de  $\mathfrak{g}$ . Denota-se por  $\text{Int}(\mathfrak{g})$  o grupo dos automorfismos de  $\mathfrak{g}$  gerado pelas exponenciais de adjuntas de elementos de  $\mathfrak{g}$ . O núcleo da representação adjunta é chamado de *centro* de  $\mathfrak{g}$  e é dado por

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)(Y) = [X, Y] = 0, \text{ para todo } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

A *forma de Cartan-Killing* de  $\mathfrak{g}$  é definida pela forma bilinear

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(\text{ad}(X), \text{ad}(Y)), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é semissimples se, e somente se, sua forma de Cartan-Killing é não degenerada; veja [22, Teorema 3.8]. Nesse caso, o centro  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  é trivial; veja [12, Corolary 6.2].

Seja  $G$  um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie semissimples  $\mathfrak{g}$ . A representação  $I : G \rightarrow \text{Int}(G)$  do grupo  $G$  no grupo dos seus automorfismos internos  $\text{Int}(G)$  é dada por  $I(g)h = ghg^{-1}$ . A *representação adjunta* de  $G$  é dada por  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$ ,  $\text{Ad}(g)(X) = d(I_g)_1 X$ , onde  $g \in G$ ,  $X \in \mathfrak{g}$  e  $1$  é a identidade em  $G$ . Considerando  $\exp \mathfrak{g} \rightarrow G$  a aplicação exponencial do grupo  $G$ , tem-se que

$$\exp(\text{Ad}(g)(X)) = I(g) \exp(X) = g \exp(X) g^{-1}, \quad g \in G, X \in \mathfrak{g}.$$

Além disso, seja  $e : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Gl}(\mathfrak{g})$  a aplicação exponencial do grupo linear  $\text{Gl}(\mathfrak{g})$ . Uma vez que  $d(\text{Ad})_1 X = \text{ad}(X)$ , então

$$\text{Ad}(\exp(X)) = e^{\text{ad}(X)}, \quad X \in \mathfrak{g};$$

veja [12, Section 2.5].

## B.1 Decomposições de Cartan e de Iwasawa

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semissimples real. Considere  $\theta$  um automorfismo involutivo de  $\mathfrak{g}$ , ou seja,  $\theta^2 = \theta \circ \theta = 1$ , onde 1 é o automorfismo identidade de  $\mathfrak{g}$ . Denote por  $\mathfrak{k}$  e  $\mathfrak{s}$  os autoespaços associados aos autovalores 1 e  $-1$  de  $\theta$ , respectivamente. Esses autoespaços satisfazem  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ ,  $[\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$ ,  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{k}$ . Assim,  $\mathfrak{k}$  é uma subálgebra de  $\mathfrak{g}$ . Define-se a forma bilinear não-degenerada associada a  $\theta$  por

$$\langle X, Y \rangle_\theta = -\langle X, \theta(Y) \rangle.$$

Quando  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$  é um produto interno,  $\theta$  é uma *involução de Cartan*. Nesse caso,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

é uma *decomposição de Cartan* de  $\mathfrak{g}$ ; veja [22, Proposição 12.21].

Além disso, os subespaços  $\mathfrak{k}$  e  $\mathfrak{s}$  são ortogonais em relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ . Para  $X \in \mathfrak{k}$   $\text{ad}(X)$  é antissimétrica com relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$  e para  $Y \in \mathfrak{s}$   $\text{ad}(Y)$  é simétrica com relação a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$ ; veja [22, Proposição 12.22].

Dada uma decomposição de Cartan  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ , considere  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$  uma subálgebra abeliana maximal. Para cada funcional linear  $0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}^*$  defina o subespaço

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \forall H \in \mathfrak{a}, [H, X] = \alpha(H) X\}.$$

Um funcional não-nulo  $\alpha \in \mathfrak{a}^*$  tal que o subespaço  $\mathfrak{g}_\alpha$  é não-nulo é chamado de *raiz associada ao par*  $(\theta, \mathfrak{a})$  e assim,  $\mathfrak{g}_\alpha$  é chamado *espaço de raízes associado à raiz*  $\alpha$ . Denote por  $\Pi = \Pi(\theta, \mathfrak{a})$  o conjunto de raízes associado ao par  $(\theta, \mathfrak{a})$ .

Denotando por  $K = \exp(\mathfrak{k})$ , o subgrupo compacto de  $G$ , e por  $S = \exp(\mathfrak{s})$ , segue que

$$G = KS$$

é uma *decomposição de Cartan* do grupo  $G$ .

Considere

$$M = \{k \in K : \text{Ad}(k)(H) = H, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\}$$

o *centralizador* de  $\mathfrak{a}$  em  $K$  e

$$M^* = \{k \in K : \text{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$$

o *normalizador* de  $\mathfrak{a}$  em  $K$ . Note que  $M$  é um subgrupo normal de  $M^*$ . O *grupo de Weyl analítico* associado ao par  $(\theta, \mathfrak{a})$  é o grupo quociente  $\mathcal{W} = M^*/M$ , que coincide com o grupo gerado pelas reflexões  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ ,  $r_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha$ ; veja [17, section 4.6].

O subconjunto de  $\mathfrak{a}$ ,

$$\{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \text{ para todo } \alpha \in \Pi\},$$

é o conjunto dos *elementos regulares* em  $\mathfrak{a}$ . Esse conjunto é aberto e denso em  $\mathfrak{a}$ . Uma componente conexa desse conjunto é chamada de *câmara de Weyl*.

Escolha uma câmara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ . Defina-se

$$\Pi^+ = \{\alpha \in \Pi : \alpha(H) > 0, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}^+\}$$

o *conjunto de raízes positivas* associadas a  $\mathfrak{a}^+$ . O *conjunto de raízes negativas* é dado por  $\Pi^- = -\Pi^+$ .

Dada a escolha da câmara de Weyl  $\mathfrak{a}^+$ , as subálgebras

$$\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

são nilpotentes. Assim, tem-se que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

é a *decomposição de Iwasawa* de  $\mathfrak{g}$  com relação ao terno  $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$ . Essa decomposição é única a menos de conjugação por  $\text{Int}(g)$ .

Sejam  $A = \exp a$  e  $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$  subgrupos conexos de  $G$ . Então

$$G = KAN$$

é a *decomposição de Iwasawa* do grupo  $G$ .

## B.2 Variedades flag

Fixe  $(\theta, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}^+)$  e  $\Sigma \subset \Pi^+$  o sistema simples de raízes associado a  $\mathfrak{a}^+$ . Dado um subconjunto  $\Theta \subset \Sigma$ , denote por

$$\langle \Theta \rangle = \{\alpha \in \Pi : \text{supp}(\alpha) \subset \Theta \text{ ou } \text{supp}(-\alpha) \subset \Theta\}$$

o conjunto de todas as raízes em  $\Pi$  que são combinações lineares de raízes em  $\Theta$ , onde  $\text{supp}(\alpha)$  é o suporte da raiz  $\alpha$ , e por  $\langle \Theta \rangle^+ = \langle \Theta \rangle \cap \Pi^+$ . Considere as seguintes subálgebras nilpotentes

$$\mathfrak{n}^+(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \text{ e } \mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^-} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

A subálgebra

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

é a *subálgebra parabólica minimal* de  $\mathfrak{g}$  associada a  $\mathfrak{a}^+$ , e a *subálgebra parabólica de tipo  $\Theta$*  é dada por

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta).$$

Se  $\Theta = \emptyset$ , então  $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{p}$ .

O *subgrupo parabólico de  $G$  de tipo  $\Theta$* ,  $P_\Theta$ , é o normalizador de  $\mathfrak{p}_\Theta$  em  $G$ :

$$P_\Theta = \text{Norm}_G(\mathfrak{p}_\Theta) = \{g \in G : \text{Ad}(g)\mathfrak{p}_\Theta \subset \mathfrak{p}_\Theta\},$$

com álgebra de Lie  $\mathfrak{p}_\Theta$ .

A *variedade flag de tipo  $\Theta$* , dada pelo espaço homogêneo  $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$ , é realizada como o conjunto  $\{\text{Ad}(g) \cdot \mathfrak{p}_\Theta\}$  das subálgebras parabólicas conjugadas a  $\mathfrak{p}_\Theta$ . Essa identificação é dada por  $g \cdot P_\Theta \leftrightarrow \text{Ad}(g) \cdot \mathfrak{p}_\Theta$ . Assim,  $\mathbb{F}_\Theta$  independente do grupo específico  $G$  com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Se  $\Theta = \emptyset$ , então denota-se por  $\mathbb{F}$  *variedade flag maximal*.

Defina uma subálgebra nilpotente

$$\mathfrak{n}^-_{-\Theta} = \sum_{\alpha \in \Pi^+ \setminus \langle \Theta \rangle} \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

e  $N_{\Theta}^{-} = \exp \mathfrak{n}_{\Theta}^{-}$  o subgrupo conexo. Seja  $b_{\Theta}$  a origem da variedade flag  $\mathbb{F}_{\Theta}$  em relação a  $P_{\Theta}$ . A decomposição de  $\mathbb{F}_{\Theta}$  como união disjunta das órbitas de  $N_{\Theta}^{-}$  é chamada de *decomposição de Bruhat regular*:

$$\mathbb{F}_{\Theta} = \bigcup_{w \in \mathcal{W}/\mathcal{W}_{\Theta}} N_{\Theta}^{-} \cdot \tilde{w}b_{\Theta}$$

onde  $\tilde{w}$  é representante de  $w \in \mathcal{W}$  em  $M^*$  e  $\mathcal{W}_{\Theta}$  é o subgrupo parabólico de tipo  $\Theta$  de  $\mathcal{W}$  gerado pelas reflexões em torno das raízes de  $\Theta$ . A órbita  $N_{\Theta}^{-} \cdot b_{\Theta}$  é aberta e densa em  $\mathbb{F}_{\Theta}$  e os seus conjugados  $g(N_{\Theta}^{-} \cdot b_{\Theta}), g \in G$  são chamados de *células abertas de Bruhat*.

Dado  $H \in \text{cla}^+$ , denote por  $\tilde{H}$  o campo vetorial induzido na variedade flag  $\mathbb{F}_{\Theta}$ , com o fluxo  $\exp(tH), t \in \mathbb{R}$ .  $Z_H = \{g \in G : \text{Ad}(g)H = H\}$  é o centralizador de  $H$  em  $G$  e  $K_H = Z_H \cap K$  é o centralizador em  $K$ . As componentes conexas do conjunto dos pontos fixos de  $\exp(tH)$  são dadas pelas órbitas

$$Z_H \cdot wb_{\Theta} = K_H \cdot wb_{\Theta}, w \in \mathcal{W}$$

que são denotadas por  $\text{fix}_{\Theta}(H, w)$ . Essas componentes são chamadas de *pontos fixos tipo  $w$* . Tem-se que  $\text{fix}_{\Theta}(H, 1)$  é o único atrator. A variedade estável da componente conexa  $\text{fix}_{\Theta}(H, w)$  é dada pelas órbitas

$$\text{st}_{\Theta}(H, w) = N_H^{-} Z_H \cdot wb_{\Theta}$$

com  $N_H^{-} = \exp \mathfrak{n}_H^{-}$  e  $\mathfrak{n}_H^{-} = \mathfrak{n}_{\Theta(H)}^{-}$ , onde  $\Theta(H) = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$  é o *anulador de  $H$*  em  $\Sigma$ . Assim,

$$\mathbb{F}_{\Theta} = \bigcup_{w \in \mathcal{W}_H \setminus \mathcal{W}/\mathcal{W}_{\Theta}} N_H^{-} Z_H \cdot wb_{\Theta} = \bigcup_{w \in \mathcal{W}_H \setminus \mathcal{W}/\mathcal{W}_{\Theta}} \text{st}_{\Theta}(H, w)$$

é a *decomposição de Bruhat generalizada* da variedade flag  $\mathbb{F}_{\Theta}$ .  $\mathcal{W}_H = \{w \in \mathcal{W} : wH = H\}$  é o *subgrupo de isotropia* de  $H$  pelo grupo de Weyl  $\mathcal{W}$ .



## B.3 Subálgebra de Cartan

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma *subálgebra de Cartan* de  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  que satisfaz:  $\mathfrak{h}$  é nilpotente, ou seja,  $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = \{0\}$  para algum  $k \geq 1$ ; se  $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$  então  $X \in \mathfrak{h}$ .

Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semissimples complexa e  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . A álgebra  $\mathfrak{g}$  decompõem-se como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

onde cada  $\alpha$  é peso não-nulo ou raiz da representação adjunta de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}$  e os espaços  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  são os espaços de raízes. Além disso, para  $\alpha$  e  $\beta$  raízes, tem-se que  $[\mathfrak{g}_{\alpha}, \mathfrak{g}_{\beta}] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são duas raízes de  $\mathfrak{h}$ , então para  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  e  $Y \in \mathfrak{g}_{\beta}$  tem-se que  $\langle X, Y \rangle = 0$ , a menos que  $\beta \neq -\alpha$ ; veja [22, Lema 6.3].

Usando o fato que a forma de Cartan-Killing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é não degenerada tem-se que a restrição de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a  $\mathfrak{h}$  é não degenerada. Além disso, se  $\alpha$  é raiz, então  $-\alpha$  também é raiz e para todo  $X \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  existe  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $\langle X, Y \rangle \neq 0$ ; veja [22, Corolário 6.4].

Para todo  $H \in \mathfrak{h}$  e toda raiz  $\alpha$ ,  $\text{ad}(H)|_{\mathfrak{g}_{\alpha}} = \alpha(H)\text{id}$  e as transformações lineares  $\text{ad}(H)$  são simultaneamente diagonalizáveis; veja [22, Proposição 6.5]. Assim,  $\mathfrak{h}$  é abeliana e o conjunto  $\Pi$  das raízes gera o dual  $\mathfrak{h}^*$  de  $\mathfrak{h}$ , isto é, para toda raiz  $\alpha$ , se  $\alpha(H) = 0$ , então  $H = 0$ .

É possível definir o correspondente à forma de Cartan-Killing no dual  $\mathfrak{h}^*$  de  $\mathfrak{h}$ . Como a forma de Cartan-Killing é bilinear, ela define uma aplicação  $\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}$  por

$$H \mapsto \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle.$$

Como a forma de Cartan-Killing é não degenerada quando restrita a  $\mathfrak{h}$ , essa aplicação é um isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}^*$ . Assim, para  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , sua imagem inversa, denotada por  $H_{\alpha}$ , é definida por  $\alpha(H) = \langle H_{\alpha}, H \rangle$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ .

Usando esse isomorfismo, pode-se falar em forma de Cartan-Killing no dual  $\mathfrak{h}^*$  definindo  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha)$ , com  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ .

Dessa forma, as raízes  $\alpha \in \Pi$  definem um número finito de elementos  $H_\alpha$  em  $\mathfrak{h}$ . Assim, como o conjunto  $\Pi$  das raízes gera o dual  $\mathfrak{h}^*$ , então, para  $\alpha \in \Pi$ , o subespaço gerado em  $\mathbb{R}$  por  $H_\alpha$  é denotado por  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  e gera  $\mathfrak{h}$ . Tem-se que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

**Lema B.1** [22, Lema 6.8]

1. Se  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , então  $[X, Y] = \langle X, Y \rangle H_\alpha$ .
2. Para todo  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ , existe  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $[X, Y] = H_\alpha$ .
3. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  raízes. Então  $\langle \beta, \alpha \rangle = q_{\beta\alpha} \langle \alpha, \alpha \rangle$ .
4. Para toda raiz  $\alpha$ ,  $\langle \alpha, \alpha \rangle$  é um racional estritamente positivo. Portanto,  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Q}$  para qualquer par de raízes  $\alpha, \beta$ .
5.  $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ .
6. Os únicos múltiplos inteiros de uma raiz  $\alpha$  que são raízes são  $\alpha$  e  $-\alpha$ .

A partir do lema anterior é possível tomar em  $\mathfrak{g}$  subálgebras isomorfas a  $\mathfrak{sl}(2)$ . Assim, para a raiz  $\alpha$ , tem-se que a subálgebra

$$\mathfrak{g}(\alpha) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{H_\alpha\} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$$

é isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2)$ ; veja [22, Proposição 6.9].

## B.4 Álgebras clássicas

Uma raiz  $\alpha \in \Pi$  é *simples*, em relação a uma ordem lexicográfica fixada se:  $\alpha > 0$ ; não existem  $\beta, \gamma \in \Pi$  tais que  $\beta$  e  $\gamma$  são positivas e  $\alpha = \beta + \gamma$ . O conjunto das raízes simples será denotado por  $\Sigma$ .

Uma raiz  $\alpha$ , com  $\alpha > 0$ , se escreve de maneira única como  $\alpha = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$  onde  $n_i \geq 0$  são inteiros; veja [22, Lema 6.20]. Segue que o conjunto  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  é chamado de *sistema simples de raízes*.

Um *diagrama de Dynkin* é um diagrama definido a partir de um sistema simples de raízes.

O *suporte* de uma raiz  $\alpha$ ,  $\text{supp}(\alpha)$ , é o subconjunto das raízes simples  $\Sigma$  que aparecem com os coeficientes  $n_i$  não nulos na combinação linear de  $\alpha$ . O suporte de toda raiz é um subconjunto conexo do diagrama de Dynkin e todo subconjunto conexo do diagrama de Dynkin é o suporte de alguma raiz. Diz-se que uma raiz  $\alpha$  tem *suporte total* quando seu suporte é todo o diagrama de Dynkin e escreve-se  $\text{supp}(\alpha) = \Sigma$ .

As álgebras semissimples são determinadas pelos diagramas de Dynkin. Assim, uma classificação dos diagramas de Dynkin é também uma classificação das álgebras semissimples. Na verdade, existe uma relação biunívoca que associa a cada classe de equivalência de álgebras semissimples um único diagrama de Dynkin e vice-versa.

As *álgebras clássicas* são os representantes das álgebras associadas aos diagramas de Dynkin  $A_l$  com  $l \geq 1$ ,  $B_l$  com  $l \geq 2$ ,  $C_l$  com  $l \geq 3$  e  $D_l$  com  $l \geq 4$ .

### B.4.1 Álgebra $A_l$

O diagrama

$$A_l, l \geq 1 \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \quad \quad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l$$

está associado à álgebra  $\mathfrak{sl}(l+1) = \{A \in \mathfrak{gl}(l+1) : \text{tr}(A) = 0\}$ , onde  $\text{tr}(A)$  é o traço da matriz  $A$ .

Uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  é a álgebra de matrizes diagonais de traço zero.

Para cada  $i = 1, \dots, l + 1$ , define-se  $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\lambda_i : \text{diag}(a_1, \dots, a_{l+1}) \mapsto a_i.$$

Um conjunto de raízes é dado por

$$\Pi = \{\lambda_i \pm \lambda_j, i \neq j\}.$$

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_l - \lambda_{l+1}\}.$$

## B.4.2 Álgebra $B_l$

O diagrama

$$B_l, l \geq 2 \quad \circ_{\alpha_1} - \circ_{\alpha_2} - \dots - \circ_{\alpha_{l-1}} \begin{array}{c} \nearrow \\ \circ_{\alpha_l} \end{array}$$

está associado à álgebra de matrizes antissimétricas em dimensão ímpar

$$\mathfrak{so}(2l + 1) = \{X \in \mathfrak{sl}(2l + 1) : X^t + X = 0\}$$

onde  $X^t$  é a transposta da matriz  $X$ . Uma matriz  $X \in \mathfrak{so}(2l + 1)$  se, e somente se,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & A & B \\ -\beta^t & C & -A^t \end{pmatrix}$$

onde  $A, B, C$  são matrizes  $l \times l$  com  $B + B^t = C + C^t = 0$  e  $\beta$  e  $\gamma$  são matrizes  $1 \times l$ .

Uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  é a subálgebra de dimensão  $l$  das matrizes diagonais em  $\mathfrak{so}(2l + 1)$ . Para cada,  $i = 1, \dots, l$ , define-se  $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\lambda_i : \text{diag}\{0, a_1, \dots, a_l, -a_1, \dots, -a_l\} \mapsto a_i.$$

Um conjunto de raízes é dado por

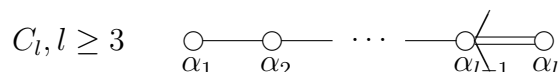
$$\Pi = \{\pm\lambda_i \pm \lambda_j, i \neq j, \pm\lambda_i\}.$$

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}.$$

### B.4.3 Álgebra $C_l$

O diagrama



está associado à álgebra simplética  $\mathfrak{sp}(l)$ , que é a álgebra das matrizes  $2l \times 2l$  escritas em blocos  $l \times l$  do tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

onde  $B$  e  $C$  são matrizes tais que  $B - B^t = C - C^t = 0$ .

Uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  é a álgebra de matrizes diagonais em  $\mathfrak{sp}(l)$ . Defina-se, para cada  $i = 1, \dots, l$ ,  $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_l, -a_1, \dots, -a_l\} \mapsto a_i.$$

Um conjunto de raízes é dado por

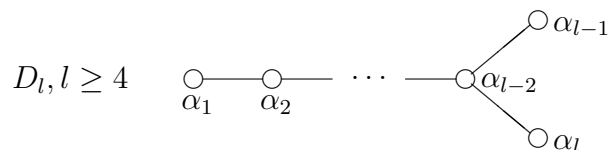
$$\Pi = \{\lambda_i - \lambda_j, i \neq j, \pm(\lambda_i + \lambda_j)\}.$$

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}.$$

### B.4.4 Álgebra $D_l$

O diagrama



esta associado á álgebra de matrizes antissimétricas em dimensão par

$$\mathfrak{so}(2l) = \{X \in \mathfrak{sl}(2l) : X^t + X = 0\}.$$

Uma matriz  $X \in \mathfrak{so}(2l)$  se, e somente se,

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

onde  $B$  e  $C$  são matrizes antissimétricas  $l \times l$ .

Uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  é a álgebra de matrizes diagonais em  $\mathfrak{so}(2l)$ . Defina-se, para cada  $i = 1, \dots, l$ ,  $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_l, -a_1, \dots, -a_l\} \mapsto a_i.$$

Um conjunto de raízes é dado por

$$\Pi = \{\pm\lambda_i \pm \lambda_j, i \neq j\}.$$

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}.$$

## B.5 Álgebras excepcionais

### B.5.1 Álgebras do tipo $G_2$

O diagrama

$$G_2 \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \end{array}$$

está associado a álgebra  $\mathfrak{g}_{(2)} = \mathfrak{sl}(3) \oplus V \oplus V^*$ , onde  $V$  é um espaço vetorial de  $\mathbb{C}^3$  e  $V^*$  o seu espaço dual.

Uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  é a álgebra de matrizes diagonais em  $\mathfrak{sl}(3)$ . Defina-se, para cada  $i = 1, 2, 3$ ,  $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, a_2, a_3\} \mapsto a_i.$$

Um conjunto de raízes de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}_{(2)}$  é dado por

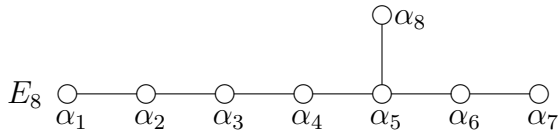
- $\pm(\lambda_i - \lambda_j)$ , com  $i \neq j$  cujos subespaços de raízes estão contidos em  $\mathfrak{sl}(3)$ ;
- $\lambda_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V$ ;
- $-\lambda_i$ , com  $i = 1, 2, 3$  cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V^*$ .

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2\}.$$

## B.5.2 Álgebras do tipo $E_8$

O diagrama



está associado a álgebra  $\mathfrak{e}_{(8)} = \mathfrak{sl}(9) \oplus V \oplus V^*$ , onde  $V$  é o produto exterior  $\bigwedge^3 \mathbb{C}^9$  e  $V^*$  o seu espaço dual.

Uma subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  é a álgebra de matrizes diagonais em  $\mathfrak{sl}(9)$ . Defina-se, para cada  $i = 1, \dots, 9$ ,  $\lambda_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\lambda_i : \text{diag}\{a_1, \dots, a_9\} \mapsto a_i.$$

Um conjunto de raízes de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{e}_{(8)}$  é dado por

- $\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$ , com  $i \neq j$  cujos subespaços de raízes estão contidos em  $\mathfrak{sl}(9)$ ;

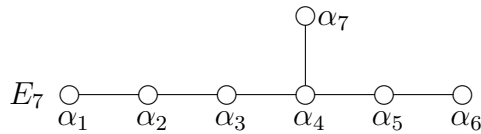
- $\beta_{ijk} = \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k$ , com  $i < j < k$  cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V$ ;
- $-\beta_{ijk} = -(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$ , com  $i < j < k$  cujos subespaços de raízes estão contidos em  $V^*$ .

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_8 - \lambda_9, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

### B.5.3 Álgebras do tipo $E_7$

O diagrama



está associado a álgebra  $\mathfrak{e}_{(7)}$ . A construção da álgebra  $\mathfrak{e}_{(7)}$  pode ser feita a partir da álgebra  $\mathfrak{e}_{(8)}$  ao retirar uma raiz mais à esquerda da base da álgebra  $\mathfrak{e}_{(8)}$ .

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_7 - \lambda_8, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

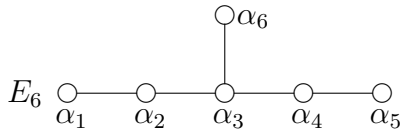
As raízes positivas são dadas por

- $\lambda_i - \lambda_j$ , com  $2 \leq i < j \leq 8$ ;
- $-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$ , com  $2 \leq i < j < k \leq 8$ ;
- $\lambda_1 + \lambda_i + \lambda_9$ , com  $2 \leq i \leq 8$ .

### B.5.4 Álgebras do tipo $E_6$

O diagrama





está associado a álgebra  $\mathfrak{e}_{(6)}$ . A construção da álgebra  $\mathfrak{e}_{(6)}$  pode ser feita a partir da álgebra  $\mathfrak{e}_{(8)}$  ao retirar duas raízes da base da álgebra  $\mathfrak{e}_{(8)}$ .

Um sistema simples de raízes é dado por

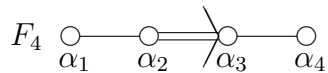
$$\Sigma = \{\lambda_2 - \lambda_3, \dots, \lambda_6 - \lambda_7, -(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\}.$$

As raízes positivas são dadas por

- $\lambda_i - \lambda_j$ , com  $2 \leq i < j \leq 7$ ;
- $-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$ , com  $2 \leq i < j < k \leq 7$ ;
- $\lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_9$

### B.5.5 Álgebras do tipo $F_4$

O diagrama



está associado a álgebra  $\mathfrak{f}_{(4)}$ . A álgebra  $\mathfrak{f}_{(4)}$  pode ser construída como a subálgebra dos pontos fixos de um automorfismo involutivo  $\theta$  da álgebra  $\mathfrak{e}_{(6)}$ .

Um sistema simples de raízes é dado por

$$\Sigma = \left\{ \alpha_6, \alpha_3, \frac{\alpha_2 + \alpha_4}{2}, \frac{\alpha_1 + \alpha_5}{2} \right\}.$$

As raízes positivas fixadas por  $\theta$  são dadas por

- $\lambda_i - \lambda_{\theta(i)}$ , com  $i = 2, 3, 4$ ;

- $-(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k)$  onde nenhum dos índices  $i, j, k$  é a imagem do outro por  $\theta$ ;
- $\lambda_1 + \lambda_8 + \lambda_9$

## B.6 Grupos de Weyl

O grupo de Weyl é o grupo, das transformações lineares da subálgebra de Cartan, gerado pelas reflexões definidas pelas raízes. Assim, é possível fazer um estudo dos sistemas simples em paralelo ao estudo dos grupos de Weyl. A seguir são levados em consideração os sistemas de raízes que apresentam uma abstração das propriedades de um conjunto de raízes de uma subálgebra de Cartan.

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{R}$ . Dado um elemento não nulo  $\alpha \in V$ , uma *reflexão* em relação a  $\alpha$  é uma transformação linear inversível  $r : V \rightarrow V$  que satisfaz:  $r(\alpha) = -\alpha$ ; o conjunto  $\{\alpha \in V : r(\alpha) = \alpha\}$  dos pontos fixos de  $r$  é um hiperplano de  $V$ .

Um conjunto  $\Pi \subset V$  é um *sistema de raízes* se satisfaz

1.  $\Pi$  é finito, gera  $V$  e não contém 0;
2. Para todo  $\alpha \in \Pi$  existe uma reflexão  $r_\alpha$  em relação a  $\alpha$  tal que  $r_\alpha(\Pi) = \Pi$ ;
3. Para todos  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,  $r_\alpha(\beta) - \beta$  é um múltiplo inteiro de  $\alpha$ .

Os elementos de  $\Pi$  são chamados de *raízes*. Um sistema de raízes  $\Pi$  é chamado de *reduzido* se os únicos múltiplos de  $\alpha \in \Pi$  que são raízes são  $\alpha$  e  $-\alpha$ .

O *grupo de Weyl algébrico* de um sistema de raízes  $\Pi$  é o grupo gerado pelo conjunto das reflexões  $r_\alpha, \alpha \in \Pi$ . Este grupo será denotado por  $\mathcal{W}$ . O grupo de Weyl de  $\Pi$  é finito pois  $\mathcal{W}$  é gerado por transformações que deixam  $\Pi$  invariante e como  $\Pi$  é finito então  $\mathcal{W}$  é finito.

Seja  $\mathcal{W}$  um grupo finito de transformações lineares inversíveis de um espaço vetorial real  $V$ . Então, existe em  $V$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  invariante por  $\mathcal{W}$  no

sentido em que todo  $w \in \mathcal{W}$  é uma isometria do produto interno, isto é, para todos  $\alpha, \beta \in V$ ,  $\langle w\alpha, w\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ ; veja [22, Proposição 9.4]. Assim, pode-se fixar um produto interno invariante pelo grupo de Weyl.

O grupo de Weyl permite decompor  $V$  e o sistema de raízes em componentes

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$$

onde cada  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  é um subespaço invariante por  $\mathcal{W}$  e irredutível, ou seja, não existem subespaços próprios não nulos  $U \subset V_i$  que sejam invariantes por  $\mathcal{W}$ .

Assim, se  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$  onde cada  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  é um subespaço invariante por  $\mathcal{W}$  e irredutível e  $\Pi_i = \Pi \cap V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , então  $\Pi_i$  é um sistema de raízes em  $V_i$  e o grupo de Weyl de  $\Pi_i$  coincide com a restrição de  $\mathcal{W}$  a  $V_i$ . Além disso,  $\Pi = \Pi_1 \cup \cdots \cup \Pi_k$ ; veja [22, Proposição 9.5].

Um sistema de raízes é chamado de *irredutível* se ele não é a união de dois subconjuntos disjuntos e ortogonais.

Seja  $\Pi \subset V$  um sistema de raízes. O conjunto

$$\bar{V} = \{\beta \in V : \langle \alpha, \beta \rangle \neq 0 \text{ para todo } \alpha \in \Pi\}$$

é o *conjunto dos elementos regulares* em  $V$ .  $\bar{V}$  é chamado dessa forma pois quando  $\Pi$  é dado por uma subálgebra de Cartan,  $\bar{V}$  coincide com os elementos regulares dentro da subálgebra. Uma *câmara de Weyl*  $C$  é uma componente conexa do conjunto dos elementos regulares.

O grupo de Weyl  $\mathcal{W}$  é transitivo no conjunto das câmaras de Weyl e então, nos sistemas simples de raízes; veja [22, Proposição 9.13]. A transitividade do grupo de Weyl nos sistemas simples de raízes assegura que o diagramas de Dynkin definidos pelos mesmos coincidem. Em relação ao conjuntos das câmaras de Weyl, a transitividade implica que o fecho  $\bar{C}$  de uma câmara  $C$  é um domínio fundamental para ação de  $\mathcal{W}$  em  $V$ , ou seja, dado  $\alpha \in V$ , existe um único  $w \in \mathcal{W}$  tal que  $w\alpha \in \bar{C}$ .

Num sistema de raízes reduzido e irredutível, cujo diagrama é conexo, para duas

raízes  $\alpha$  e  $\beta$  de mesmo comprimento, existe  $w \in \mathcal{W}$  tal que  $w(\alpha) = \beta$ . Em particular, se os diagramas são  $A_l, D_l$  ou os excepcionais  $E_6, E_7$  ou  $E_8$ , então o grupo de Weyl é transitivo no conjunto das raízes. Para os demais diagramas, existem duas órbitas pela ação do grupo de Weyl no conjunto das raízes; veja [22, Proposição 9.15].

## B.7 Forma real

Se  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  o *realificado* de  $V$  é o espaço vetorial real  $V^{\mathbb{R}}$  obtido por restrição dos escalares a  $\mathbb{R}$ . Nesse caso, a dimensão de  $V^{\mathbb{R}}$  é o dobro da dimensão de  $V$ .

Se  $U$  é um espaço vetorial real, uma *estrutura complexa* em  $U$  é uma transformação linear  $J : U \rightarrow U$  que satisfaz  $J^2 = -1$ . O realificado de um espaço vetorial complexo tem uma estrutura complexa canônica. O *complexificado*  $U_{\mathbb{C}}$  de  $U$  é o espaço obtido de  $U$  por extensão de  $\mathbb{R}$  ao corpo dos complexos.

Seja  $U$  um espaço vetorial real e  $U_{\mathbb{C}}$  o seu complexificado. Defini-se a conjugação  $\sigma : U_{\mathbb{C}} \rightarrow U_{\mathbb{C}}$

$$\sigma(u + iv) = \overline{u + iv} = u - iv.$$

Essa conjugação satisfaz  $\sigma^2 = 1$  e é *antilinear* em  $U_{\mathbb{C}}$ , ou seja, é linear sobre os reais e  $\sigma(zw) = \bar{z}w$ ,  $z \in \mathbb{C}$  e  $w \in U_{\mathbb{C}}$ .

Se  $V$  é um espaço vetorial complexo, uma *conjugação* em  $V$  é uma transformação antilinear  $\sigma$  que satisfaz  $\sigma^2 = 1$ .

Na análise dos subespaços reais de uma álgebra de Lie complexa  $\mathfrak{g}$ , as conjugações que interessam são aquelas que satisfazem

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y]. \tag{B.1}$$

Uma transformação antilinear e inversível de  $\mathfrak{g}$  que satisfaz (B.1) é chamada de *antiautomorfismo*. Um antiautomorfismo de  $\mathfrak{g}$  é um automorfismo da realificada  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ . Além disso, o subespaço real dos pontos fixos para um antiautomorfismo é uma

subálgebra do realificado de  $\mathfrak{g}$ . De fato, se  $\sigma(x) = x$  e  $\sigma(y) = y$ , então por (B.1),  $\sigma[x, y] = [\sigma x, \sigma y] = [x, y]$ . Assim, dado um antiautomorfismo em  $\mathfrak{g}$ , a álgebra real

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$$

tem como complexificada a álgebra  $\mathfrak{g}$ .

Se  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie complexa, uma *forma real* de  $\mathfrak{g}$  é uma subálgebra  $\mathfrak{g}_0$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ , que é o subespaço dos pontos fixos de uma conjugação  $\sigma$  que satisfaz (B.1). Se isso ocorre,  $\mathfrak{g}$  é o complexificado de  $\mathfrak{g}_0$ .

### B.7.1 Forma real compacta

Uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$  é dita *compacta* se sua forma de Cartan-Killing é negativa definida.

Seja  $\mathfrak{g}$  uma de Lie complexa semissimples e  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Cartan. Denote por  $\Pi$  o conjunto de raízes de  $\mathfrak{h}$  e  $\Sigma$  um sistema simples de raízes em  $\Pi$ . Uma forma real compacta  $\mathfrak{u}$  pode ser construída a partir de uma base de Weyl de  $\mathfrak{g}$ . Uma *base de Weyl* de  $\mathfrak{g}$  é formada por  $H_\alpha$  com  $\alpha \in \Sigma$  e  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  com  $\alpha \in \Pi$ , que satisfaz

1.  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ ;
2.  $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$  com  $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$  tal que  $m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta}$  e se  $\alpha + \beta$  não é raiz, então  $m_{\alpha,\beta} = 0$ .

Dessa forma,  $\mathfrak{u}$  é o subespaço real gerado por

$$\{iH_\alpha, X_\alpha - X_{-\alpha}, i(X_\alpha + X_{-\alpha})\}$$

com  $\alpha$  percorrendo o conjunto  $\Pi^+$  das raízes positivas. Particularmente,  $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  é uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{u}$ .

Essa construção da forma real compacta de  $\mathfrak{g}$  a partir dessa base de Weyl de  $\mathfrak{g}$  faz sentido porque é garantida a existência dessa base de Weyl associada uma

subálgebra de Cartan. Ou seja, existem  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \Pi$  com  $\langle X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle = 1$  tais que se  $m_{\alpha,\beta}$  é definido por

$$[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta},$$

então  $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$ ; veja [22, Lema 12.14].

## B.7.2 Forma real normal

Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra semissimples real e  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  uma decomposição de Cartan. Seja  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$  uma subálgebra abeliana maximal. Então, existe uma subálgebra abeliana maximal  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  que contém  $\mathfrak{a}$ . A subálgebra  $\mathfrak{h}$  é de Cartan; veja [22, Proposição 12.25].

Duas subálgebras  $\mathfrak{a}$  e  $\mathfrak{a}'$  abelianas maximais de  $\mathfrak{s}$  são conjugadas entre si, ou seja, existe  $k \in K$  tal que  $k\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$ , onde  $K$  é o grupo de automorfismo gerado pelas exponenciais das adjuntas de elementos em  $\mathfrak{k}$ ; veja [22, Proposição 12.26].

O *posto real* de uma álgebra semissimples real é a dimensão comum das álgebras abelianas maximais contidas em  $\mathfrak{s}$ .

Em geral, o posto real de uma álgebra de Lie é menor que o seu posto, já que as subálgebras abelianas maximais em  $\mathfrak{s}$  nem sempre são subálgebras de Cartan. Essa diferença entre o posto e o posto real permite distinguir uma classe especial de formas reais, a forma real normal.

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra semissimples complexa. Uma forma real  $\mathfrak{g}_0$  de  $\mathfrak{g}$  é *normal* se para qualquer decomposição de Cartan  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  existe em  $\mathfrak{s}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$ . Em outras palavras, uma forma real é normal se o seu posto coincide com o seu posto real.

## B.7.3 Álgebras reais clássicas

As álgebras reais clássicas são as álgebras semissimples reais que aparecem nas álgebras de matrizes. A seguir, será apresentado algumas formas reais das álgebras

de Lie complexas clássicas.

### Formas reais de $A_l$

A forma real compacta é  $\mathfrak{su}(l+1)$ .

**Tipo AI** A forma real é álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$  com  $l \geq 1$ , que é a forma real normal de  $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ . Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  é dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde a subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l+1, \mathbb{R})$  enquanto  $\mathfrak{s}$  é o subespaço das matrizes simétricas em  $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{R})$ .

**Tipo AII** A forma real é a álgebra,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{H})$ , das matrizes quaterniônicas, ou seja das matrizes que estão em  $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ , do tipo

$$\begin{pmatrix} Z_1 & -\bar{Z}_2 \\ Z_2 & Z_1 \end{pmatrix}$$

com  $Z_1$  e  $Z_2$  matrizes complexas  $(l+1) \times (l+1)$ . Essas álgebras só ocorrem em dimensão complexa par, isto é, como forma real de  $\mathfrak{sl}(2(l+1), \mathbb{C})$ . Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  é dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde a subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(l+1)$  enquanto  $\mathfrak{s}$  é o subespaço formado pelas matrizes hermitianas da forma acima.

**Tipo AIII** As formas reais são  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(p, q)$ ,  $p \leq q$ , as quais são as álgebras das matrizes escritas em blocos  $p \times p$  e  $q \times q$  como

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B}^t & C \end{pmatrix},$$

onde  $A$  e  $C$  são anti-hermitiana e  $\text{tr}(A + C) = 0$ .

Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  é dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ e } \mathfrak{s} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta}^t & \gamma \end{pmatrix}.$$

A subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathfrak{z}$ , onde  $\mathfrak{z}$  é o centro. Nesse caso,  $\mathfrak{k}$  não é simissimples.

### Formas reais de $B_l$ e $D_l$

A forma real compacta é a álgebra  $\mathfrak{so}(l)$ ,  $l \geq 5$ .

**Tipo BDI** A forma real é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(p, q)$  com  $p \leq q$ , que é a álgebra das matrizes reais escritas em blocos  $p \times p$  e  $q \times q$  como

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & C \end{pmatrix},$$

onde  $A$  e  $C$  são antissimétricas.

- Se  $q = p + 1$ , então  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(l, l + 1)$  é a forma real normal das álgebras do tipo  $B_l$ .

Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  é dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \beta \\ -\beta^t & A & B \\ -\beta^t & B & A \end{pmatrix}$$

com  $A + A^t = B + B^t = 0$  e

$$\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\beta \\ \beta^t & A & B \\ -\beta^t & -B & -A \end{pmatrix}$$

com  $A - A^t = B - B^t = 0$ . A subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l + 1, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(l, \mathbb{R})$ .

- Se  $q = p$ , então  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(l, l)$  é a forma real normal das álgebras do tipo  $D_l$ .

Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  é dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

com  $A + A^t = B + B^t = 0$  e

$$\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix}$$

com  $A - A^t = B + B^t = 0$ . A subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(l, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(l, \mathbb{R})$ .

**Tipo DIII** A forma real é a interseção  $\mathfrak{sl}(l, \mathbb{H}) \cap \mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$ , que é a álgebra das matrizes complexas da forma

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

com  $z_1$  antissimétrica e  $z_2$  hermitiana.



## Formas reais de $C_l$

A forma real compacta é  $\mathfrak{sp}(l) = \mathfrak{sp}(l, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2l)$ .

**Tipo CI** A forma real normal de  $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C})$  é a álgebra simplética real  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(l, \mathbb{R})$  com  $l \geq 3$ , que é a álgebra das matrizes reais  $2l \times 2l$  escritas em blocos  $l \times l$  do tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

com  $B - B^t = C - C^t = 0$ .

Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  é dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

com  $A + A^t = B - B^t = 0$  e

$$\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

com  $A - A^t = B - B^t = 0$ . A subálgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(l)$ .

**Tipo CII** A forma real é a álgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(p, q)$  das matrizes em  $\mathfrak{sp}(p+q, \mathbb{C})$  que satisfazem

$$AK_{p,q} + K_{p,q}\bar{A}^t = 0,$$

onde  $K_{p,q} = \begin{pmatrix} 1_p & & & \\ & -1_q & & \\ & & -1_p & \\ & & & 1_q \end{pmatrix}$ .

Uma decomposição de Cartan de  $\mathfrak{g}$  é dada por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  onde

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} X & 0 & W & 0 \\ 0 & Y & 0 & Z \\ -\bar{X} & 0 & \bar{X} & 0 \\ 0 & -\bar{Z} & 0 & \bar{Y} \end{pmatrix}$$

com  $X \in \mathfrak{u}(p)$ ,  $Y \in \mathfrak{u}(q)$  e  $W, Z$  matrizes simétricas sobre  $\mathbb{C}$  e

$$\mathfrak{s} = \begin{pmatrix} 0 & X & 0 & Y \\ \bar{X}^t & 0 & Y^t & 0 \\ 0 & \bar{Y} & 0 & -\bar{X} \\ \bar{Y}^t & 0 & -X^t & 0 \end{pmatrix}$$

com  $X, Y$  matrizes  $p \times q$  sobre  $\mathbb{C}$ . A álgebra  $\mathfrak{k} = \mathfrak{sp}(p) \times \mathfrak{sp}(q)$ .

### B.7.4 Álgebras excepcionais

A forma real normal das álgebras do tipo  $\mathfrak{g}_{(2)}$  é a álgebra  $\mathfrak{g}_{(2)(2)} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}) \oplus V \oplus V^*$ , onde  $V = \mathbb{R}^3$ . A subálgebra  $\mathfrak{k}$  é isomorfa a  $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$ .

A forma real normal das álgebras do tipo  $\mathfrak{e}_{(8)}$  é a álgebra  $\mathfrak{e}_{(8)(8)} = \mathfrak{sl}(9, \mathbb{R}) \oplus V \oplus V^*$ , onde  $V = \bigwedge^3 \mathbb{R}^9$ . A subálgebra  $\mathfrak{k}$  é isomorfa a  $\mathfrak{so}(16)$ .

A forma real normal das álgebras do tipo  $\mathfrak{e}_{(7)}$  é a álgebra  $\mathfrak{e}_{(7)(7)}$ . A subálgebra  $\mathfrak{k}$  é isomorfa a  $\mathfrak{su}(8)$ .

A forma real normal das álgebras do tipo  $\mathfrak{e}_{(6)}$  é a álgebra  $\mathfrak{e}_{(6)(6)}$ . A subálgebra  $\mathfrak{k}$  é isomorfa a  $\mathfrak{sp}(4)$ .

A forma real normal das álgebras do tipo  $\mathfrak{f}_{(4)}$  é a álgebra  $\mathfrak{f}_{(4)(4)}$ . A subálgebra  $\mathfrak{k}$  é isomorfa a  $\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$ .

# Apêndice C

## Conjuntos de controle

Nesse capítulo são lembrados alguns resultados da teoria da ação de semigrupos de grupos de Lie nas variedades flag. As principais referências usadas são San Martin [23], [27] e San Martin-Tonelli [31].

Sejam  $G$  um grupo de Lie e  $S \subset G$  um semigrupo com interior não vazio. Considere  $M$  um espaço homogêneo de  $G$  onde  $S$  age como semigrupos de difeomorfismo.

Um *conjunto de controle invariante* pela ação de  $S$  em  $M$  é um subconjunto  $C \subset M$  tal que

1.  $\text{int}(C) \neq \emptyset$ ,
2.  $\text{cl}(Sx) = \text{cl}(C)$  para todo  $x \in C$  e
3.  $C$  é maximal com essas propriedades.

Uma vez que  $\text{int}(S) \neq \emptyset$  tal conjunto é um conjunto fechado e é de fato  $S$ -invariante em  $M$ , ou seja,  $gx \in C$  se  $g \in S$  e  $x \in C$ .

Nem toda ação de um semigrupo  $S$  em  $M$  admite um conjunto de controle  $S$ -invariante. Por exemplo, o semigrupo  $\{\varphi_t(x) = x+t, t > 0\}$  agindo em  $\mathbb{R}$  não admite conjunto de controle  $S$ -invariante. Mas quando  $M$  é compacta sempre existem conjuntos de controle  $S$ -invariante. De fato, é possível mostrar que  $\text{cl}(Sx)$  contém um conjunto de controle invariante para qualquer  $x \in K$ , um conjunto compacto

de controle  $S$ -invariante; veja [31]. Pela transitividade de  $G$  em  $M$  e pela existência de pontos no interior de  $S$ , esses conjuntos de controle são em números finitos e fechados. Na verdade, se  $C = \bigcap_{x \in M} \text{cl}(Sx)$ , então  $C$  é o único conjunto de controle  $S$ -invariante em  $M$ ; veja [31, Proposition 2.2].

Agora seja  $G$  um grupo de Lie não compacto, conexo e com centro finito. Seja  $S \subset G$  um semigrupo com  $\text{int}S \neq \emptyset$ , então em qualquer variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  existe um único conjunto de controle  $S$ -invariante, denotado por  $C_\Theta$ ; veja [27, Theorem 3.1].

Existe uma decomposição de Iwasawa  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}^+$  da álgebra  $\mathfrak{g}$  e  $H \in \mathfrak{a}$  tal que  $h = \exp H \in \text{int}(S)$ . Além disso,  $H$  pode ser escolhido como regular no sentido que  $\alpha(H) \neq 0, \forall$  raiz  $\alpha$  de  $\mathfrak{a}$ ; veja [27, Lemma 3.2]. Ou seja, existe um elemento regular  $H \in \text{int}(S)$ .

Se  $S \neq G$ , então existe uma variedade flag  $\mathbb{F}_\Theta$  tal que o conjunto de controle  $S$ -invariante  $C_\Theta$  está contido em um subconjunto  $\sigma_\Theta(g)$  para todo real regular  $g \in \text{int}(S)$ . O subconjunto  $\sigma_\Theta(g)$  é difeomorfo a um espaço Euclidiano; veja [31, Proposition 4.3].

Pode ser provado que existe um minimal  $\Theta_S$  satisfazendo a condição da Proposição [31, Proposition 4.3]. Esse  $\Theta_S$ , ou melhor a variedade flag  $\mathbb{F}_{\Theta_S}$ , é chamada o tipo flag de  $S$  ou tipo parabólico de  $S$ , a segunda em virtude do subgrupo parabólico  $P_{\Theta_S}$ . Várias propriedades de  $S$  são derivadas desse tipo flag, por exemplo: o tipo de homotopia de  $S$  como em [25]; as componentes conexas de  $S$  como em [5].

# Apêndice D

## Sistema de controle

Um *sistema de controle* é uma família  $\mathfrak{F}$  de campos de vetores em uma variedade  $M$   $n$ -dimensional.

Uma *trajetória* de  $\mathfrak{F}$  é uma curva contínua  $x : [0, t] \rightarrow M$  tal que para alguma partição  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$  existem campos de vetores  $X_1, \dots, X_n$  em  $\mathfrak{F}$  tais que em cada intervalo  $[t_{i-1}, t_i)$ ,  $x$  é uma curva integral de  $X_i$ .

O *conjunto de acessibilidade* de  $\mathfrak{F}$  em  $q \in M$  é o conjunto de todos os pontos  $w \in M$  tais que existe uma trajetória  $x$  de  $\mathfrak{F}$  tal que  $x(0) = q$  e  $x(t) = w$ .

O sistema de controle é *transitivo ou controlável* se o conjunto de acessibilidade de  $\mathfrak{F}$  em cada ponto  $q \in M$  é igual a  $M$ .

Quando  $\mathfrak{F}$  uma família de campos de vetores invariantes à direita ou à esquerda em um grupo de Lie  $G$ , o conjunto de acessibilidade de  $\mathfrak{F}$  na identidade é um semigrupo  $S(\Gamma)$  gerado por  $\bigcup_{M \in \Gamma} \{e^{Mt} : t \leq 0\}$ , onde  $\Gamma$  é um subconjunto da álgebra de Lie de  $G$  formado por valores dos elementos de  $\mathfrak{F}$  na identidade.

Se  $S(\Gamma) = G$ , então  $\mathfrak{F}$  é transitivo ou controlável em  $G$ .

Em particular, seja

$$\dot{g} = (A + u(t)B)g, \quad u(t) \in \mathbb{R} \tag{D.1}$$

um sistema de controle invariante à direita com controles sem restrições com  $A, B \in \mathfrak{g}$  onde  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie do grupo de Lie  $G$ . Seja  $S$  o semigrupo do sistema

gerado por  $\exp t(A + uB)$ ,  $t \geq 0$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .

A controlabilidade global em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  do sistema de controle D.1 é a possibilidade de atingir, a partir de um ponto inicial, qualquer ponto final de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  através de interações do sistema.

O sistema de controle D.1 é controlável em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  se, e somente se, o semigrupo de controle  $S \subset G$  é transitivo em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , ou seja, existe  $g \in S$  tal que  $gx = y$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Se  $S$  tem interior não vazio,  $S$  é transitivo em  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  se e somente se  $S = G$ . Assim, provar a controlabilidade do sistema de controle D.1 é o mesmo que mostrar que o semigrupo de controle  $S$  é todo o grupo  $G$ .

# Apêndice E

## Forma de Kähler nas variedades flag

Nesse capítulo são apresentados resultados sobre uma estrutura quase Hermitiana invariante nas variedades flag. Esse resultados são baseados em [26].

Seja  $G$  um grupo de Lie simples complexo com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Considere  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  e denote por  $\Pi$  um conjunto de raízes de  $\mathfrak{h}$ . Seja  $\mathfrak{u}$  uma forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ . Pode-se tomar  $\mathfrak{u}$  o subespaço gerado por  $i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ,  $A_{\alpha}$  e  $iS_{\alpha}$ , com  $\alpha \in \Pi$ , onde  $A_{\alpha} = X_{\alpha} - X_{-\alpha}$  e  $S_{\alpha} = X_{\alpha} + X_{-\alpha}$ .

Denote por  $U$  a forma real compacta de  $G$  correspondente a  $\mathfrak{u}$ . Pela ação transitiva de  $U$  na variedade flag maximal  $\mathbb{F}$ , escreve-se  $\mathbb{F} = U/T$ , onde  $T = P \cap U$  é o toro maximal de  $U$  e  $P$  é um subgrupo minimal de  $G$ . A álgebra de Lie de  $T$  é o subespaço real  $\mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ .

Denote por  $b_0$  a origem de  $\mathbb{F}$ . O espaço tangente de  $\mathbb{F}$  em  $b_0$  identifica-se com o subespaço  $\mathfrak{q}$  gerado por  $A_{\alpha}$  e  $iS_{\alpha}$ , com  $\alpha \in \Pi$ . Da mesma forma o espaço tangente complexo de  $\mathbb{F}$  é identificado por  $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ . A ação adjunta de  $T$  em  $\mathfrak{g}$  deixa  $\mathfrak{q}$  invariante.

Uma métrica Riemanniana  $ds^2$   $U$ -invariante em  $\mathbb{F}$  é completamente determinada pelo seu valor na origem, ou seja, pelo produto interno em  $\mathfrak{q}$  que é invariante pela ação adjunta de  $T$ . Esse produto interno é da forma

$$(\cdot, \cdot)_{\Lambda} = -\langle \Lambda X, Y \rangle$$

onde  $\Lambda : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$  é positiva definida com relação a forma de Cartan-Killing.

O produto interno  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  admite uma extensão natural a forma bilinear simétrica em  $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ . Pela  $T$ -invariância de  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  tem-se que os elementos da base  $A_\alpha$  e  $iS_\alpha$  com  $\alpha \in \Pi$  são autovetores de  $\Lambda$  para o mesmo autovalor. Assim, no espaço tangente complexo tem-se que

$$\Lambda(X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha$$

com  $\lambda_\alpha > 0$  e  $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$ . Denota-se por  $ds^2_\Lambda$  a métrica invariante dada por  $\Lambda$ .

Uma estrutura complexa  $U$ -invariante para em  $\mathbb{F}$  é completamente determinada pelo seu valor  $J : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$  no espaço tangente à origem. A aplicação  $J$  satisfaz  $J^2 = -1$  e comuta com ação adjunta de  $T$  em  $\mathfrak{q}$ . Denota-se também por  $J$  sua extensão a  $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ .

Pela invariância de  $J$  tem-se que, para  $\alpha \in \Pi$ ,  $J(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$ , os autovalores de  $J$  são  $\pm i$  e os autovetores em  $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$  são  $X_\alpha$ . Assim,

$$J(X_\alpha) = i\varepsilon_\alpha X_\alpha,$$

onde  $\varepsilon_\alpha = \pm 1$  e  $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$ .

Uma métrica  $ds^2_\Lambda$   $U$ -invariante em  $\mathbb{F}$  é quase Hermitiana com relação a  $J$ , ou seja,  $ds^2_\Lambda(JX, JY) = ds^2_\Lambda(X, Y)$ . Define-se por

$$\Omega(X, Y) = ds^2_\Lambda(X, JY) = -\langle \Lambda X, JY \rangle$$

a *forma de Kähler*. Denota-se por  $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$ . Essa forma estende-se a uma 2-forma  $U$ -invariante em  $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$ , a qual também é denotada por  $\Omega$ . O valor de  $\Omega$  nos vetores da base são

$$\Omega(X_\alpha, Y_\beta) = -i\lambda_\alpha\varepsilon_\beta\langle \Lambda X_\alpha, Y_\beta \rangle.$$

Como  $\langle \Lambda X_\alpha, Y_\beta \rangle = 0$ , a menos que  $\beta = -\alpha$ , então  $\Omega$  é não nula apenas nos pares  $(X_\alpha, Y_\alpha)$  e  $\Omega(X_\alpha, Y_\alpha) = i\lambda_\alpha\varepsilon_\alpha$ .



Pela invariância de  $\Omega$ , tem-se que se  $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$  são campos de vetores em  $\mathbb{F}$ , a diferencial exterior  $d\Omega$  de  $\Omega$  na origem é dada por

$$-\frac{1}{3}d\Omega(X, Y, Z) = -d\Omega([X, Y], Z) + d\Omega([X, Z], Y) - d\Omega([Y, Z], X).$$

Além disso, se  $\alpha, \beta, \gamma$  são raízes, a diferencial exterior  $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$  é nula a menos que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ; veja [26, Proposition 2.1].



# Apêndice F

## Cohomologia de De Rham

Uma  $P$ -forma  $\Omega$  em uma variedade diferenciável  $M$  é *fechada* se  $d\Omega = 0$ . Uma  $P$ -forma  $\Omega$  é *exata* se existe uma  $(P - 1)$ -forma  $\Psi$  tal que  $\Omega = d\Psi$ . Uma vez que  $d^2 = 0$ , então toda forma fechada é exata.

O espaço quociente de um espaço vetorial real de  $P$ -formas fechadas módulo subespaço de  $P$ -formas exatas é o  $P$ -ésimo grupo de cohomologia de De Rham de  $M$ .

$$H^P_{\text{De Rham}}(M) = \frac{\{P - \text{formas fechadas}\}}{\{P - \text{formas exatas}\}}.$$

**Exemplo:** Para  $P > 1$ , não existem  $P$ -formas não nulas em  $S^1$ , então

$$H^P_{\text{De Rham}}(S^1) = e,$$

exceto para  $P = 0, 1$ .

Não existem 0-formas exatas em  $S^1$  e uma 0-forma fechada em uma variedade conexa é uma função constante. Então,

$$H^0_{\text{De Rham}}(S^1) = \mathbb{R}.$$

A função coordenada polar  $\theta$  em  $S^1$  não está bem definida globalmente, uma vez que está definida apenas até um múltiplo inteiro de  $2\pi$ . Mas sua diferencial  $d\theta$  é uma 1-forma bem definida e não nula em  $S^1$ . De fato,  $d\theta$  é uma forma volume da métrica Riemanniana natural que  $S^1$  herda de  $\mathbb{R}^2$ .

A 1-forma  $d\theta$  não é exata, pois se fosse sua integral sobre  $S^1$  seria 0 e não  $2\pi$ . Todas as 1-formas em  $S^1$  são fechadas. Na verdade, uma 1-forma em  $S^1$  difere de um múltiplo real de  $d\theta$  por uma forma exata. Então,

$$H^1_{\text{De Rham}}(S^1) = \mathbb{R}.$$

# Bibliografia

- [1] Assoudi, R. El, Gauthier, J. P. e Kupka, I., *On subsemigroups of semisimple Lie groups*, Annales de l'H. P., section C, vol. 13, n. 1, 117-133 (1996).
- [2] Borel, A., *Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. 40, 1147-1151 (1954).
- [3] Braga Barros, C. J. e San Martin, L.A.B., *Controllability of Discrete-time Control Systems on the Symplectic Group*, Systems & Control Letters 42, 95-100 (2001).
- [4] Braga Barros, C. J., Ribeiro Gonçalves, J., do Rocio, O. G. e San Martin, L.A.B., *Controllability of two-dimensional bilinear Systems*, Rev. Proyecciones 15, 111-139 (1996).
- [5] do Rocio, O. G. e San Martin, L.A.B., *Connected components of open semi-groups in semi-simple Lie groups*, Semigroup Forum 69, 1-29, (2004).
- [6] dos Santos, A. L. e San Martin, L.A.B. , *Controllability of control systems on simple groups and the topology of flag manifolds*, submetido.
- [7] dos Santos, A. L. e San Martin, L.A.B. , *Controllability of control systems on real simple groups and the topology of flag manifolds*, em preparação.
- [8] J.J. Duistermat, J.A.C. Kolk and V.S. Varadarajan, *Functions, flows and oscillatory integral on flag manifolds*, Compos. Math. 49, 309-398 (1983).

- [9] Ferraiol, T., Patrão, M. e Seco, L., *Jordan decomposition and dynamics on flag manifolds*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 26, 923-947 (2010).
- [10] Gauthier, J.P., Kupka, I. e Sallet, G., *Controllability right invariant systems on real of simple Lie groups*, Systems & Control Letters 5, 187-190 (1984).
- [11] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
- [12] Helgason, S., *Differential Geometry, Lie Groups and symmetric spaces*, Academic Press, New York (1979).
- [13] Hilgert, J., K. H. Hofmann, and J. D. Lawson *Lie Groups, Convex Cones and Semigroups*, Academic Press, New York (1989)
- [14] Johnson, K. D., *The structure of parabolic subgroups*, J. of Lie Theory, vol.14, 287-316, (2004).
- [15] Jurdjevic, V., e Kupka, I., *Control systems on semi-simple Lie groups and their homogeneous spaces*, Ann. Inst. Fourier 31, n.4, 151-179, (1981).
- [16] Jurdjevic, V., e Kupka, I., *Control systems subordinate to a group action: accessibility*. J. of Diff. Eq. 39, 186-211, (1981).
- [17] Knapp, A.W., *Lie groups beyond an introduction*, Second edition, Birkhäuser, Boston (2004).
- [18] Lima, E.L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, Segunda edição, Impa, Rio de Janeiro (1998).
- [19] Onishchik, A.L, e Vinberg, E.B, *Lie groups and algebraic groups*, Springer-Verlag, Berlin (1990)
- [20] Patrão, M., *Semigrupos em Fibrados Flag e seus Semigrupos de Sombreamento*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas (2006).

- [21] Porteous, I.R., *Clifford algebras and the classical groups*, Cambridge studies in advanced mathematics 50, Cambridge University Press (1995).
- [22] San Martin, L.A.B., *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp, Campinas (2010).
- [23] San Martin, L.A.B., *Control Sets and Semigroups in Semisimple Lie Groups*, Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis. Gruyter Expositions in Mathematics, vol.20, 275-291 (1995).
- [24] San Martin, L.A.B *Flags de formas reais normais clássicas e  $SO(p, q)$* , em preparação.
- [25] San Martin, L.A.B. e Santana, A. J., *Homotopy type of Lie semigroups in semi-simple Lie groups*, Monats. Math. 136, 151-173, (2002).
- [26] San Martin, L.A.B., e Negreiros, C.J.C., *Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds*, Adv. Math. 178, 277-310, (2003).
- [27] San Martin, L.A.B., *Invariant Control Sets on Flag Manifolds*, Math. Control Signals Systems 6, 41-61, (1993).
- [28] San Martin, L.A.B., *Maximal semigroups in semi-simple Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc., vol.353, n.12, 5165-5184, (2001).
- [29] San Martin, L.A.B., *On global controllability of discrete-time control systems*, Math. Control Signals Systems 8, 279-297, (1995).
- [30] San Martin, L.A.B., *Order and Domains of Attraction of Control Sets in Flag Manifolds*, Journal of Lie Theory 8, 335-350, (1998).
- [31] San Martin, L.A.B. e Tonelli, P.A., *Semigroup actions on homogeneous spaces*, Semigroups Forum 50, 59-88, (1995).
- [32] Steenrod, N., *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press, Princeton (1974).

- [33] Varadarajan, V.S, *Lie Groups, Lie algebras and their representations*, Springer-Verlag (1984).
- [34] Warner, G., *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin, (1972).