

INDICADORES DE ERRO A POSTERIORI NA
APROXIMAÇÃO DE FUNCIONAIS DE SOLUÇÕES DE
PROBLEMAS ELÍPTICOS NO CONTEXTO DO MÉTODO DE
GALERKIN DESCONTÍNUO *HP*-ADAPTATIVO

João Luis Gonçalves

Doutorado em Matemática Aplicada

Dra. Sônia Maria Gomes

Orientadora

Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Coorientador

Dr. Igor Mozolevski

Coorientador

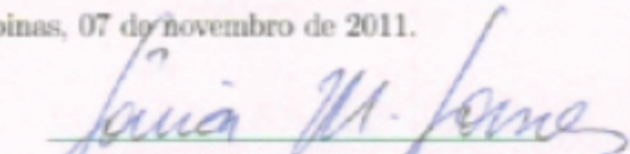
Tese de doutorado pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
UNICAMP.

Este trabalho teve o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São
Paulo - FAPESP, através do processo 2007/00072-0.

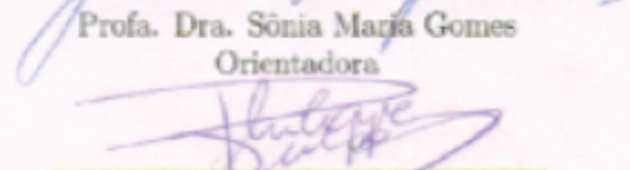
**INDICADORES DE ERRO A POSTERIORI NA
APROXIMAÇÃO DE FUNCIONAIS DE SOLUÇÕES DE
PROBLEMAS ELÍPTICOS NO CONTEXTO DO MÉTODO DE
GALERKIN DESCONTÍNUO *HP*-ADAPTATIVO**

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **João Luis Gonçalves** e aprovada pela comissão julgadora.

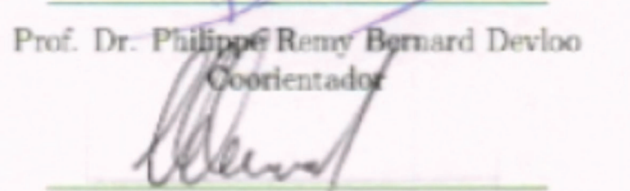
Campinas, 07 de novembro de 2011.



Prof. Dra. Sônia Maria Gomes
Orientadora



Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
Coorientador



Prof. Dr. Igor Mozolevski
Coorientador

Banca examinadora:

1. Profa. Dra. Sônia Maria Gomes
2. Prof. Dr. Eduardo Cardoso de Abreu
3. Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
4. Prof. Dr. Abimael Fernando Dourado Loula
5. Prof. Dr. Paulo Rafael Bösing

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

G586i Gonçalves, João Luis, 1982-
Indicadores de erro a posteriori na aproximação de funcionais de soluções de problemas elípticos no contexto do método de Galerkin descontínuo hp-adaptativo / João Luis Gonçalves. – Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Sônia Maria Gomes.
Coorientador: Philippe Remy Bernard Devloo.
Coorientador: Igor Mozolevski.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise de erros (Matemática). 2. Galerkin, Métodos de.
3. Equações diferenciais elípticas – Soluções numéricas.
4. Análise de erros a posteriori. I. Gomes, Sônia Maria, 1952-. II. Devloo, Philippe Remy Bernard, 1958-. III. Mozolevski, Igor. IV. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. V. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: A posteriori error indicators in the approximation of functionals of elliptic problems solutions in the context of hp-adaptive discontinuous Galerkin method

Palavras-chave em inglês:

Error analysis (Mathematics)

Galerkin methods

Differential equations, Elliptic - Numerical solutions

Posteriori error analysis

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Sônia Maria Gomes [Orientador]

Eduardo Cardoso de Abreu

Marcelo Martins dos Santos

Abimael Fernando Dourado Loula

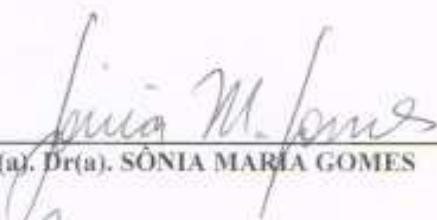
Paulo Rafael Bösing

Data da defesa: 30-09-2011

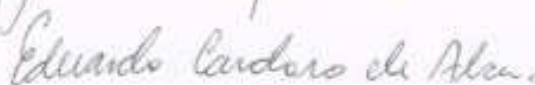
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 30 de setembro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). SÔNIA MARIA GOMES



Prof(a). Dr(a). EDUARDO CARDOSO DE ABREU



Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS



Prof(a). Dr(a). ABIMAEL FERNANDO DOURADO LOULA



Prof(a). Dr(a). PAULO RAFAEL BÖSING

Agradecimentos

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

À UNICAMP, ao IMECC e ao LABMEC, pela infraestrutura oferecida.

Aos meus amigos, por compartilharem os bons e maus momentos.

Aos meus orientadores, Sônia, Philippe e Igor, por seus ensinamentos.

Aos meus pais, Erondina e Darci, e meus irmãos, Jandir e Jaison, pelo amor incondicional.

À Mael, por tudo.

Resumo

Neste trabalho, estudamos indicadores *a posteriori* para o erro na aproximação de funcionais das soluções das equações biharmônica e de Poisson obtidas pelo método de Galerkin descontínuo. A metodologia usada na obtenção dos indicadores é baseada no problema dual associado ao funcional, que é conhecida por gerar os indicadores mais eficazes. Os dois principais indicadores de erro com base no problema dual já obtidos, apresentados para problemas de segunda ordem, são estendidos neste trabalho para problemas de quarta ordem. Também propomos um terceiro indicador para problemas de segunda e quarta ordem. Estudamos as características dos diferentes indicadores na localização dos elementos com as maiores contribuições do erro, na caracterização da regularidade das soluções, bem como suas consequências na eficiência dos indicadores. Estabelecemos uma estratégia *hp*-adaptativa específica para os indicadores de erro em funcionais. Os experimentos numéricos realizados mostram que a estratégia *hp*-adaptativa funciona adequadamente e que o uso de espaços de aproximação *hp*-adaptados resulta ser eficiente para a redução do erro em funcionais com menor número de graus de liberdade. Além disso, nos exemplos estudados, a qualidade dos resultados varia entre os indicadores, dependendo do tipo de singularidade e da equação tratada, mostrando a importância de dispormos de uma maior diversidade de indicadores.

Palavras-chave: *hp*-adaptatividade, erro em funcionais, método de Galerkin descontínuo, indicadores de erro *a posteriori*

Abstract

In this work we study *goal-oriented a posteriori* error indicators for approximations by the discontinuous Galerkin method for the biharmonic and Poisson equations. The methodology used for the indicators is based on the dual problem associated with the functional, which is known to generate the most effective indicators. The two main error indicators based on the dual problem, obtained for second order problems, are extended to fourth order problems. We also propose a third indicator for second and fourth order problems. The characteristics of the different indicators are studied for the localization of the elements with the greatest contributions of the error, and for the characterization of the regularity of the solutions, as well as their consequences on indicators efficiency. We propose an *hp*-adaptive strategy specific for *goal-oriented* error indicators. The performed numerical experiments show that the *hp*-adaptive strategy works properly, and that the use of *hp*-adapted approximation spaces turns out to be efficient to reduce the error with a lower number of degrees of freedom. Moreover, in the examples studied, a comparison of the quality of results for the different indicators shows that it may depend on the type of singularity and of the equation treated, showing the importance of having a wider range of indicators.

key words: *hp*-adaptivity, goal-oriented error, discontinuous Galerkin method, *a posteriori* error indicators

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Notação	7
1.2 Espaços de Elementos Finitos	10
1.3 Resultados de aproximação	11
2 Equação de Difusão-Advecção-Reação	15
2.1 Problema modelo e formulação fraca	15
2.1.1 Consistência	18
2.2 O método <i>hp</i> -DGFEM	18
2.2.1 Estabilidade	19
2.2.2 Estimativa de erro <i>a priori</i>	20
3 Equação biharmônica	23
3.1 Problema modelo e formulação fraca	23
3.1.1 Consistência	25
3.2 O método <i>hp</i> -DGFEM	26
3.2.1 Estabilidade	26
3.2.2 Estimativa de erro <i>a priori</i>	28
4 Erro em funcionais	29
4.1 Representação do erro	29
4.2 Consistência dos problemas duais	32
4.2.1 Equação de segunda ordem	32
4.2.2 Equação biharmônica	34
4.3 Estimativas <i>a priori</i> em funcionais	34
4.3.1 Estimativas <i>a priori</i> para a equação de difusão-advecção-reação	35
4.3.2 Estimativas <i>a priori</i> para a equação biharmônica	36

5	Análise <i>a posteriori</i> do erro em funcionais	39
5.1	Indicadores para a equação de Difusão-Advecção-Reação	40
5.1.1	Indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS}	42
5.1.2	Nova proposta de indicador μ_k	44
5.2	Indicadores para a equação biharmônica	47
5.2.1	Indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS}	49
5.2.2	Indicador μ_k	51
5.3	Exemplos ilustrativos	52
5.3.1	Resultados para a equação de Difusão-Advecção-Reação	54
5.3.2	Resultados para a equação Biharmônica	76
6	Aproximações recuperadas	97
6.1	Recuperação de aproximações DGFEM	98
6.2	O método de Uzawa	99
6.3	Exemplos	101
6.3.1	Exemplo 1	102
6.3.2	Exemplo 2	103
6.3.3	Exemplo 3	105
6.3.4	Exemplo 4	110
7	Algoritmo <i>hp</i>-adaptativo	115
7.1	Onde adaptar	115
7.2	Como adaptar	116
7.2.1	Exemplo 1	118
7.2.2	Exemplo 2	123
7.3	Algoritmo Adaptativo	124
8	Experimentos Adaptativos	127
8.1	Equação biharmônica	127
8.1.1	Fluxo de um fluido viscoso ao redor de uma placa plana	127
8.1.2	Placa presa e engastada sob carga pontual em seu centro	140
8.2	Equação de Poisson	153
9	Conclusões	163
	Referências Bibliográficas	167

Introdução

O método de elementos finitos de Galerkin descontínuo é um dos métodos numéricos que apresentaram maior crescimento nas últimas décadas. Vamos abreviar método de elementos finitos de Galerkin descontínuo por DGFEM, do seu nome em inglês Discontinuous Galerkin Finite Element Method. O DGFEM foi introduzido no início da década de 70 por W. H. Reed e T. R. Hill, [63], para solução da equação de transporte de neutrons. Desde então, a gama de problemas que usam o DGFEM aumentou muito. Como exemplo, podemos citar problemas hiperbólicos lineares e não lineares, problemas de difusão com termos convectivos dominantes e problemas elípticos de segunda e quarta ordem. A evolução do método, exemplos de diversas aplicações, análises em vários contextos e valiosas referências foram compiladas no livro [21].

Um aspecto imprescindível da resolução numérica de equações diferenciais parciais é a estimação e o controle do erro das aproximações obtidas. As estimativas de erro *a priori* são aquelas que usam alguma informação do problema que, em geral, é desconhecida, como, por exemplo, as propriedades da própria solução exata do problema. Uma das principais funções das estimativas *a priori* é mostrar as taxas de convergência do método.

A magnitude e a forma como o erro está distribuído são informações fundamentais para tornar um método numérico eficaz em seu propósito. Em particular para o DGFEM, em que a adequação do espaço de aproximação é o cerne do método, essas informações podem ser muito vantajosas. As estimativas de erro que usam apenas a própria aproximação e as informações disponíveis do problema são chamadas estimativas *a posteriori*. Em geral, estimativas *a posteriori* são toda a informação que dispomos ao tratarmos um problema. Portanto, o maior interesse é controlar o erro usando estimativas *a posteriori*, ou estudar sua distribuição, através de indicadores de erro, também *a posteriori*.

Outro aspecto fundamental de uma estimativa ou indicador é qual erro ele está estimando, pois o erro pode ser medido de muitas formas, por exemplo em diferentes normas. De particular interesse são as estimativas chamadas de *goal-oriented*. Essas estimativas tratam do erro de aproximação de quantidades de interesse, ao invés do erro em alguma norma. A relevância desse tipo de estimativa está no fato que muitas quantidades que são importantes para a compreensão de fenômenos físicos não são representadas pela solução do problema que

o modelo e sim obtidos a partir de funcionais aplicados nessas soluções. Porém, pensando em métodos de elementos finitos, o espaço de aproximação adaptado que leva à melhor aproximação do modelo, com o menor número de graus de liberdade possível, nem sempre é o espaço que levará à melhor aproximação das quantidades de interesse, com o menor número de graus de liberdade possível. As quantidades de interesse, em geral, são representadas ou aproximadas por funcionais lineares e limitados.

Proposta da tese

Neste trabalho examinamos três indicadores de erro *a posteriori goal-oriented*, para aproximações obtidas pelo DGFEM para equações de segunda e quarta ordem, sendo um deles uma proposta nova dessa tese. As estimativas e indicadores *a posteriori goal-oriented* podem ser classificadas em dois tipos. O primeiro tipo requer a resolução de um problema dual associado à quantidade de interesse. No segundo tipo estão os indicadores que não dependem de uma aproximação dual. Os indicadores do primeiro tipo apresentam melhores resultados que os do segundo tipo, conforme comprovado nos trabalhos de R. Hartmann e P. Houston [40] e [41], para problemas hiperbólicos e elípticos, respectivamente. Os indicadores examinados nesse trabalho são todos do primeiro tipo.

Um dos indicadores foi proposto por K. Harrimann, P. Houston, B. Senior e E. Süli, em [37] e o outro foi proposto por K. Harriman, D. J. Gavaghan e E. Süli, em [35], ambos para equações de segunda ordem. As diferenças entre essas duas formas de indicadores ficam mais evidentes quando estendemos esses formatos para equações de quarta ordem, e nos instigaram a aprofundar o estudo no aspecto da eficiência dos indicadores.

Desse estudo, propomos um novo indicador, [34], também do primeiro tipo, usando a aproximação dual, com a mesma eficiência global dos dois primeiros, porém com características que visam melhorar a eficiência local do indicador.

Uma vez estabelecidos os indicadores de erro, propomos um algoritmo *hp*-adaptativo, baseado nesses indicadores através do qual adaptaremos o espaço de aproximação. Este algoritmo toma duas decisões importantes, ambas baseadas nos indicadores de erro. A primeira é quantos e quais elementos adaptar. A segunda, e mais delicada, é como adaptar os elementos. A segunda decisão é chamada de critério *hp* e propomos um critério específico para o contexto do erro em quantidades de interesse, inspirado nas ideias apresentadas em [3].

Objetivos

Os objetivos desse trabalho são:

- Estender os indicadores de erro *a posteriori* propostos em [37] e [35] para equações de quarta ordem.
- Desenvolver um novo indicador de erro *a posteriori goal-oriented*, μ_k , para aproximações DGFEM de equações de segunda e quarta ordem.
- Construir aproximações recuperadas e aplicá-las aos indicadores estudados.
- Desenvolver um algoritmo *hp*-adaptativo específico para o controle do erro em quantidades de interesse, baseado nos indicadores de erro *a posteriori*.
- Implementar no ambiente PZ, veja [23], [25] e [24], as classes e métodos necessários para o cálculo dos indicadores propostos.
- Fazer um estudo comparativo do desempenho dos diferentes indicadores.
- Aplicar os indicadores em problemas modelo.

Trabalhos anteriores

A revisão bibliográfica está dividida em quatro partes, cada uma abrangendo um dos temas fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

DGFEM

Como já mencionamos, o DGFEM teve sua origem no início da década de 70 com o trabalho [63]. A primeira análise do método foi apresentada por P. LeSaint e P. A. Raviart [49], para equações hiperbólicas.

Os DGFEM, com penalização interior, para equações elípticas e parabólicas começaram seu desenvolvimento ainda na década de 70 e começo da década de 80, com os trabalhos [26], [13] e [4], para equações de segunda ordem, obtendo as primeiras estimativas ótimas em normas de H^1 e L^2 . A partir desses trabalhos, novas versões do DGFEM surgiram. Uma descrição e comparação entre as diversas versões de DGFEM é apresentada em [5].

Para a resolução de equações diferenciais de alta ordem, os métodos de elementos finitos conformes requerem que o espaço de aproximação pertença a um espaço com maior nível de regularidade, por exemplo $H^2(\Omega)$ no caso da equação biarmônica, sendo necessário a

construção de elementos de classe C^1 . Desta forma, a construção do espaço de interpolação torna-se muito complexa e raramente é realizada. Essa dificuldade foi contornada por [26], [13] e [20] usando o método de elementos finitos e penalizando as descontinuidades das derivadas convenientes.

Em [28] foi proposta a resolução de problemas elípticos de quarta ordem, combinando método de Galerkin contínuo e descontínuo e usando técnicas de estabilização. Em [52] e [70] foram apresentadas as formulações simétrica, não-simétrica e semi-simétricas do DGFEM para a equação biharmônica, assim como as estimativas *a priori* do erro. Para equações de segunda ordem é bem maior, a quantidade de trabalhos dedicados ao DGFEM, abordando aplicações, análise e estimativas de erro. Veja por exemplo as referências [71], [42] e [5].

Abordagem Goal-Oriented

A abordagem *goal-oriented* tem sua origem nos trabalhos de Louis [50] e de Babuška e Miller [8], [9] e [10]. Estimativas *goal-oriented* foram propostas inicialmente para o método de elementos finitos contínuos. Esse início em um método já bem estabelecido foi muito importante pois permitiu o surgimento de diversas formas de estimativa, usando ou não os argumentos de dualidade. Permitiu também que a abordagem *goal-oriented* fosse levada a um grande número de equações e problemas, e, finalmente, fomentou o surgimento de uma série de ferramentas, principalmente para a análise das estimativas e questões da adaptatividade. O capítulo 8 do livro [1] e os trabalhos [59], [60], [58], [57] e [61] dão um apanhado geral desse desenvolvimento.

Depois desse desenvolvimento inicial, as estimativas *goal-oriented* chegaram aos métodos DGFEM e encontraram um terreno muito fértil, pois suas características favorecem a adaptatividade, além da crescente quantidade de problemas tratados. O nicho criado pela junção de DGFEM e estimativas *goal-oriented* tem sua evolução e importância refletidas no grande número de trabalhos publicados. Veja, por exemplo, [37], [36], [53], [47], [38], [30], [39] e [48] e suas referências para uma visão geral sobre o tema. Alguns pontos desse campo de pesquisa podem evoluir ainda mais, como o desenvolvimento de indicadores de erros mais eficientes.

Em [36], foi discutida e comprovada a importância da consistência adjunta para se obter taxas ótimas na aproximação de funcionais. Em particular, [53] apresentou estimativas *goal-oriented a priori* para o DGFEM simétrico com penalização interior para a equação biharmônica e experimentos numéricos que comprovam taxa de convergência ótima, com respeito ao tamanho da malha, $\mathcal{O}(h^{2p-2})$, devido à consistência adjunta, e taxa subótima com respeito ao grau polinomial da aproximação. Para equações de segunda ordem, estimativas *a priori* foram apresentadas em [37]. Estas estimativas são ótimas para o método simétrico, devido à consistência adjunta, por exemplo, $\mathcal{O}(h^{2p-2})$ no caso elíptico. Para o método não-

simétrico, devido à inconsistência adjunta, essas estimativas são subótimas, por exemplo, no caso elíptico, $\mathcal{O}(h^p)$ para p par e $\mathcal{O}(h^{p+1})$ para p ímpar.

Aproximações recuperadas

Estimativas *a posteriori* usando operadores de recuperação têm sido propostos em diversos contextos, veja por exemplo [29], [69], [73], [2] e [31].

De forma geral, os operadores de recuperação usam macroelementos como uma forma de aumentar o número de graus de liberdade necessários para as continuidades desejadas, e então resolvem problemas auxiliares usando os graus de liberdade adicionais. Estes operadores, em geral, requerem o uso de um espaço de aproximação cuja base seja nodal, pois muitos dos graus de liberdades são determinados em termos dos graus de liberdade que estão no mesmo ponto.

Algoritmos *hp*-adaptativos

Foi provado em [7] que a combinação adequada de h e p -refinamentos faz com que o método de elementos finitos convirjam exponencialmente. Esse resultado foi comprovado numericamente em [51] e [67]. Desde então, a busca por algoritmos que realizem a *hp* adaptação dos espaços de aproximação de forma ótima tem sido tema recorrente nos trabalhos envolvendo o método de elementos finitos. Além de um algoritmo ótimo também seria interessante que esse algoritmo fosse automático, ou seja que decida sozinho como, quantos e quais elementos adaptar. Um dos primeiros trabalhos nessa direção foi [22].

A automação do algoritmo adaptativo está diretamente relacionada com indicadores de erro *a posteriori* e com um critério *hp*. Esses dois temas têm sido objeto de muitos trabalhos, [3], [64], [65], [44], [46], [30], [56] e [43]. O critério *hp* que propomos nesse trabalho é inspirado em [3], mas desenvolvido aqui especificamente para o contexto do erro em quantidades de interesse.

Estrutura do texto

No Capítulo 1 estabelecemos as notações, necessárias à descrição dos problemas e métodos, e apresentamos resultados de aproximação que são usados nas estimativas tratadas nos capítulos seguintes.

Nos Capítulos 2 e 3 estabelecemos os problemas, formulações fracas e o DGFEM que são usados no decorrer do trabalho. Além disso, apresentamos os principais resultados de estabilidade e convergência para os DGFEM apresentados.

A análise, a representação e estimativas *a priori* para o erro em funcionais são apresentados no Capítulo 4. Além disso, introduzimos os problemas duais e analisamos as suas consistências com os respectivos problemas adjuntos.

O Capítulo 5 é o principal capítulo da tese, em que apresentamos os indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} propostos em [37] e [35], respectivamente, para equações de segunda ordem e os estendemos para a equação biharmônica. Além disso, propomos um indicador de erros, μ_k , para ambas as equações. Também explicitamos as características de cada indicador e as ilustramos através de exemplos.

Todos os indicadores de erro *goal-oriented* baseados nos argumentos de dualidade precisam de aproximações auxiliares e a suavidade dessas aproximações pode ser importante para a eficiência dos indicadores. No Capítulo 6, introduzimos um algoritmo para suavizar aproximações DGFEM, usadas como aproximações auxiliares.

O algoritmo adaptativo que aplicamos nos experimentos é descrito no Capítulo 7, inclusive com detalhes da estratégia usada para decidir entre h e p -adaptação.

Finalmente, no Capítulo 8, apresentamos os resultados adaptativos em problemas modelos, usando os indicadores discutidos ao longo do trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estabelecemos as definições e notações necessárias à introdução do método de elementos finitos de Galerkin descontínuo para a equações diferenciais parciais de segunda ordem, com forma característica não-negativa, e para a equação biharmônica. Além disso, apresentamos os resultados da teoria de aproximação polinomial, veja [11], [12], [19], [67], [62] e [18], que são usados na análise do DGFEM.

1.1 Notação

O domínio sobre o qual assumimos válidas as equações é denotado por Ω , e assumimos que este é poligonal, aberto e limitado. Além disso, como os problemas tratados estão no espaço bidimensional, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

O método de elementos finitos tem como um de seus princípios a construção de um espaço de aproximação baseado na divisão do domínio Ω em uma quantidade finita de elementos, sobre os quais é construída a base do espaço de aproximação. À essa divisão do domínio chamamos de partição. Neste trabalho denotamos por \mathcal{T} uma partição do domínio Ω e desta partição exigimos que decomponha Ω em elementos quadrilaterais abertos k , tais que

$$\cup_{k \in \mathcal{T}} \bar{k} = \bar{\Omega}. \quad (1.1)$$

Também precisamos definir a notação para o contorno de Ω , pois este é fundamental para a imposição das condições de contorno. Denotamos a união das faces abertas de $\bar{\Omega}$ por $\partial\Omega$. De forma análoga, a união das faces abertas de \bar{k} é denotada por ∂k .

Além das condições que caracterizam a partição \mathcal{T} , exigimos que \mathcal{T} seja regular, no sentido que exista alguma limitação na razão entre os lados dos elementos da partição.

Para cada $k \in \mathcal{T}$ definimos a função diâmetro $h_k = \text{diam}(k)$, como a maior distância

entre dois pontos de \bar{k} . Para cada partição \mathcal{T} definimos a função $h_{\mathcal{T}}(x) = h_k$, para $x \in k$. Observe que $h_{\mathcal{T}}$ é constante por partes e dependente da partição. Definimos o parâmetro h como o máximo entre os diâmetros dos elementos da partição, $h = \max_{k \in \mathcal{T}} h_k$, e chamamos h de diâmetro da partição.

Chamamos de \mathcal{F} o conjunto de todas as faces unidimensionais abertas de \bar{k} , $k \in \mathcal{T}$, e definimos o diâmetro para uma face γ , como $h_{\gamma} = \text{diam}(\gamma)$, a maior distância entre dois pontos de $\bar{\gamma}$. Sobre \mathcal{F} definimos $h_{\mathcal{F}}(x) = h_{\gamma}$, para $x \in \gamma$, observando que $h_{\mathcal{F}}$ também é constante por partes.

Uma família de partições $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ é um conjunto de partições de um mesmo domínio que estão ordenadas pelo índice i . Uma família de partições é obtida, por exemplo, da h -adaptação de uma partição inicial, sendo que cada iteração desse processo fornece uma partição correspondente.

Definição 1. *Uma partição \mathcal{T} é dita κ -regular se para qualquer $k \in \mathcal{T}$ e para qualquer $\gamma \in \partial k$ temos $\kappa h_k \leq h_{\gamma} \leq h_k$.*

Definição 2. *Uma família de partições $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ é regular se existe uma constante positiva κ , chamada constante de regularidade da partição, independente de h , tal que para qualquer $i \in I$, \mathcal{T}_i é κ -regular.*

Assim como a regularidade da partição \mathcal{T} , uma restrição sobre a ordem polinomial das funções que formam o espaço de aproximação é importante para garantir resultados de aproximação.

Definição 3. *O vetor $\mathbf{p} = (p_k)$, com $p_k \geq 1$ para cada $k \in \mathcal{T}$, é dito de variação local limitada se existe uma constante $\rho \geq 1$ tal que para cada par de elementos k e k' , cuja interseção de seus fechos forma uma face $(d-1)$ -dimensional ($\Omega \in \mathbb{R}^d$), temos que*

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{p_k}{p_{k'}} \leq \rho. \quad (1.2)$$

Dada uma função vetorial $\mathbf{b}(x)$, definimos a entrada de fluxo de k , $\partial_- k$, como a parte de ∂k , em que

$$\mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0, \quad x \in \partial k,$$

e a saída de fluxo de k , $\partial_+ k$, como a parte de ∂k , em que

$$\mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0, \quad x \in \partial k,$$

em que $\mathbf{n}(x)$ é o vetor normal unitário exterior a k .

Agora vamos abordar as definições que envolvem as faces interiores. Começamos introduzindo o conjunto \mathcal{F}_0 de todas as faces interiores,

$$\mathcal{F}_0 = \{\gamma \in \mathcal{F} : \gamma \subset \Omega\},$$

o conjunto \mathcal{F}_∂ de todas as faces de fronteira,

$$\mathcal{F}_\partial = \{\gamma \in \mathcal{F} : \gamma \subset \partial\Omega\},$$

e o conjunto $\tilde{\mathcal{F}}_k$ de todas as faces que formam ao menos um vértice com o elemento k .

Para um inteiro não-negativo m , definimos a média dos graus polinomiais locais sobre as faces interiores por

$$\{p^m\}_{\mathcal{F}}(x) = \{p^m\} = (p_{k_i}^m + p_{k_j}^m)/2, \quad \forall x \in \gamma \in \mathcal{F},$$

em que $\gamma \in \mathcal{F}_0$ e os elementos k_i e k_j formam a face γ . Para $\gamma \in \mathcal{F}_\partial$ esta definição é estendida como $\{p^m\}_\gamma(x) = p_k^m$.

Além disso, definimos

$$\Gamma_{int} = \{x \in \Omega : x \in \gamma \text{ para algum } \gamma \in \mathcal{F}_0\}$$

e

$$\Gamma = \Gamma_{int} \cup \partial\Omega.$$

Para $u, v \in L^2(\Gamma)$, denotamos o produto interno por $\langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)}$ e a respectiva norma por $\|u\|_{L^2(\Gamma)}$.

Para cada face $\gamma \in \mathcal{F}_0$, existem índices i e j , únicos, com $i > j$, tais que os elementos k_i e k_j formam a face γ . Definimos o salto e o valor médio de uma função u em γ por

$$[u] = u|_{\partial k_i \cap \gamma} - u|_{\partial k_j \cap \gamma} \quad \text{e} \quad \{u\} = 0.5 (u|_{\partial k_i \cap \gamma} + u|_{\partial k_j \cap \gamma}), \quad (1.3)$$

respectivamente. Por conveniência estendemos a definição de salto e média a uma face $\gamma \in \mathcal{F}_\partial$ por

$$[u] = u|_\gamma \quad \text{e} \quad \{u\} = u|_\gamma. \quad (1.4)$$

Para cada face $\gamma \in \mathcal{F}_0$, associamos o vetor unitário normal a γ , de k_i para k_j , denotado por \mathbf{n} . Logo $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{k_i} = -\mathbf{n}_{k_j}$, onde \mathbf{n}_{k_i} e \mathbf{n}_{k_j} denotam os vetores normais unitários e exteriores a k_i e k_j , respectivamente. Para cada $\gamma \in \mathcal{F}_\partial$, associamos o vetor unitário normal exterior $\mathbf{n} = \mathbf{n}_k$.

Para o tratamento do termo advectivo na equação de segunda ordem precisamos definir

$$\Gamma_0 := \{x \in \partial\Omega : \mathbf{n}(x)^T \mathbf{a} \mathbf{n}(x) > 0\},$$

onde \mathbf{a} é um tensor simétrico, cujas entradas são funções reais, contínuas por partes e limitadas, definidas sobre $\overline{\Omega}$. Considerando um fluxo $\mathbf{b}(x)$, definimos os conjuntos

$$\Gamma_- := \{x \in \Gamma_0 : \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}, \quad \Gamma_+ := \{x \in \Gamma_0 : \mathbf{b}(x) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\},$$

que representam as partes da fronteira onde há entrada e saída de fluxo, respectivamente. Observamos que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_- \cup \Gamma_+$.

Ainda no caso de equações que tenham um termo convectivo, se Γ_0 não for vazio ele poderá ser dividido em dois subconjuntos disjuntos Γ_D e Γ_N , com Γ_D não-vazio, em que são impostas as condições de fronteira de Dirichlet e Neumann, respectivamente. Adotamos também a hipótese, fisicamente razoável, de que $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ em Γ_N , quando esse for não vazio.

Além da exigência de regularidade da partição, assumimos que cada elemento da partição \mathcal{T} é a imagem de um elemento mestre predeterminado e fixo \widehat{k} , por uma aplicação afim F_k , isto é, $k = F_k(\widehat{k})$. O elemento mestre \widehat{k} em \mathbb{R}^2 que usamos será o quadrilátero $(-1, 1) \times (-1, 1)$.

1.2 Espaços de Elementos Finitos

Para um inteiro não-negativo p denotamos por $Q_p(\widehat{k})$ o conjunto de todos os polinômios de duas variáveis obtidos do produto dos polinômios de grau menor ou igual a p na variável x , por os polinômios análogos na variável y , ou seja um produto tensorial entre bases polinomiais unidimensionais em cada coordenada, sobre o elemento mestre. Desta forma, $Q_p(\widehat{k})$ tem dimensão $(p+1)^2$.

A cada elemento $k \in \mathcal{T}$ atribuímos um inteiro não-negativo p_k , que chamamos de grau polinomial local, e um inteiro não-negativo s_k , chamado de índice do espaço de Sobolev local. Agrupamos os inteiros p_k e s_k , e as aplicações afins F_k nos vetores $\mathbf{p} = (p_k, k \in \mathcal{T})$, $\mathbf{s} = (s_k, k \in \mathcal{T})$ e $\mathbf{F} = (F_k, k \in \mathcal{T})$, respectivamente.

Agora estabelecemos a notação para a norma nos espaços de Sobolev. Para u uma função real em $H^s(\Omega)$, denotamos a respectiva norma por $\|u\|_{s,\Omega}$, de forma análoga a semi-norma é denotada por $|u|_{s,\Omega}$. O produto interno de $L^2(\Omega)$, de u e v em $L^2(\Omega)$, denotamos por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v \, dx. \tag{1.5}$$

Com essas notações, introduzimos o espaço de Sobolev particionado

$$H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T}) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_k \in H^{s_k}(k) \, \forall k \in \mathcal{T}\}, \tag{1.6}$$

associados com a partição \mathcal{T} , cujas norma e semi-norma são

$$\|u\|_{s,\mathcal{T}} = \left(\sum_{k \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{s_k,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad |u|_{s,\mathcal{T}} = \left(\sum_{k \in \mathcal{T}_h} |u|_{s_k,k}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Os espaços de elementos finitos particionados $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) \subset H^s(\Omega, \mathcal{T})$ são definidos por

$$S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : F_k^{-1}(u|_k) \in Q_{p_k}(\widehat{k}) \right\}. \quad (1.7)$$

Observamos que as funções do espaço $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ podem ser descontínuas, ou seja, trata-se de um espaço de elementos finitos descontínuo.

Para funções $v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ definimos o gradiente particionado de v , $\nabla_{\mathcal{T}}v$, por

$$(\nabla_{\mathcal{T}}v)|_k = \nabla(u|_k), \quad \forall k \in \mathcal{T}. \quad (1.8)$$

1.3 Resultados de aproximação

Consideramos Π_p um projetor ortogonal de $L_2(\Omega)$ sobre $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$. Dada $u \in L_2(\Omega)$ definimos $\Pi_p u$ por

$$(u - \Pi_p u, v) = 0 \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (1.9)$$

Seguindo [42] enunciamos o Lema 1, sobre as estimativas para o erro de projeção sobre cada elemento da partição.

Lema 1. *Suponha $k \in \mathcal{T}$, um quadrilátero de diâmetro h_k e que $u|_k \in H^{\kappa_k}(k)$, $\kappa_k \geq 0$. Então valem os seguintes resultados de aproximação*

$$\|u - \Pi_p u\|_{L_2(k)} \leq C \frac{h_k^{s_k}}{p_k^{\kappa_k}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)}, \quad (1.10)$$

$$\|u - \Pi_p u\|_{L_2(\partial k)} \leq C \frac{h_k^{s_k - \frac{1}{2}}}{p_k^{\kappa_k - \frac{1}{2}}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)}, \quad (1.11)$$

$$|u - \Pi_p u|_{H^1(k)} \leq C \frac{h_k^{s_k - 1}}{p_k^{\kappa_k - \frac{3}{2}}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)}, \quad (1.12)$$

$$\|u - \Pi_p u\|_{H^1(\partial k)} \leq C \frac{h_k^{s_k - \frac{3}{2}}}{p_k^{\kappa_k - \frac{5}{2}}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)}, \quad (1.13)$$

em que $1 \leq s_k \leq \min(p_k + 1, \kappa_k)$ e a constante C depende apenas da dimensão e da regularidade da partição \mathcal{T} .

O Lema 2, apresentado em [11] e [12], garante a existência de um projetor do espaço de Sobolev particionado sobre o espaço de elementos finitos, cujas estimativas do erro de projeção são ótimas, sobre o elemento e sobre suas faces.

Lema 2. *Sejam \mathcal{T} uma partição regular de Ω , em quadriláteros, com diâmetro h e \mathbf{p} o vetor de ordens polinomiais. Existe um projetor*

$$\pi_{\mathbf{p}}^h : H^s(\Omega, \mathcal{T}) \longrightarrow S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) \quad (1.14)$$

$$\varphi \longmapsto (\pi_{\mathbf{p}}^h \varphi)|_k = \pi_{\mathbf{p}}^h(\varphi|_k) \quad (1.15)$$

tal que

$$\|\varphi - \pi_{\mathbf{p}}^h \varphi\|_{q,k} \leq C \frac{h_k^{\mu-q}}{p_k^{s_k-q}} \|\varphi\|_{s_k,k} \quad \forall k \in \mathcal{T} \quad e \quad s_k \geq 0 \quad (1.16)$$

e

$$\|\varphi - \pi_{\mathbf{p}}^h \varphi\|_{q,\gamma} \leq C \frac{h_k^{\mu-1/2-q}}{p_k^{s_k-1/2-q}} \|\varphi\|_{s_k,k} \quad \forall k \in \mathcal{T} \quad e \quad s_k \geq \frac{1}{2} + q, \quad (1.17)$$

em que $0 \leq q \leq s_k$, $\mu = \min(p_k + 1, s_k)$, $h_k = \text{diam}(k)$, $\gamma \subset \partial k$ e C é uma constante que depende apenas de Ω e da regularidade da partição \mathcal{T} .

As estimativas tratadas nos Lemas 3 e 4, comumente chamadas de desigualdades inversas, estabelecem relações entre as normas associadas ao espaço de elementos finitos, normas sobre faces e norma sobre elementos. A demonstração desses resultados podem ser encontradas nos livros [19] e [67].

Lema 3. *Seja $k \in \mathcal{T}$ e $\varphi \in S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$. Então, existem constantes c_0 e c_1 independentes de k e p_k , tais que,*

$$\|\varphi\|_{0,\partial k}^2 \leq c_0 \frac{p_k^2}{h_k} \|\varphi\|_{0,k}^2 \quad (1.18)$$

e

$$\|\nabla \varphi\|_{0,\partial k}^2 \leq c_1 \frac{p_k^6}{h_k^3} \|\varphi\|_{0,k}^2 \quad (1.19)$$

Lema 4. *Supomos que \mathcal{T} é formada por d -paralelepípedos. Então, $\forall \varphi \in Q_p(k)$, $p \geq 1$, a seguinte desigualdade inversa vale*

$$\|\varphi\|_{0,\partial k} \leq \chi_1 \left(\frac{A(\partial k)}{V(k)} \right)^{1/2} \|\varphi\|_k \quad (1.20)$$

em que

$$\chi_1 = d \left(\frac{p(p+1)}{2} \left(2 + \frac{1}{p} \right)^d \right)^{1/2}, \quad (1.21)$$

sendo $A(\partial k)$ a área da fronteira de k e $V(k)$ o volume de k , com a convenção de $A(\partial k) = 1$ se $d = 1$.

A desigualdade inversa estabelecida no Lema 5 foi provada em [18].

Lema 5. *Seja k um d -paralelepípedo de diâmetro h , em \mathbb{R}^d . Então, para $\varphi \in Q_p(k)$, $p \geq 1$, vale a seguinte desigualdade inversa*

$$\|\nabla\varphi\|_{0,k} \leq \chi_2 \|\varphi\|_{0,k}, \quad (1.22)$$

em que

$$\chi_2 = \frac{2 d p \sqrt{(p+1)(p+1/2)}}{h}. \quad (1.23)$$

Como assumimos apenas partições do domínio em quadriláteros, os Lemas 4 e 5 serão usados no caso particular $d = 2$.

Finalmente, apresentamos o Lema 6 que relaciona as norma dos traços sobre as fronteiras de um elemento com uma norma sobre o elemento, para funções no espaço de Sobolev. Esse resultado é denominado desigualdade múltipla do traço e sua demonstração pode ser encontrada em [62].

Lema 6. *Seja k um elemento, triângulo ou quadrilátero, de uma partição regular. Então, para todo $\psi \in H^1(\Omega)$*

$$\|\psi\|_{0,\partial k}^2 \leq C \left(\frac{1}{h_k} \|\psi\|_{0,k}^2 + \|\psi\|_{0,k} \|\nabla\psi\|_{0,k} \right) \quad (1.24)$$

em que C é uma constante positiva independente do diâmetro de k , h_k .

Capítulo 2

Equação de Difusão-Advecção-Reação

A equação que estudamos nesse capítulo descreve fenômenos de difusão, advecção e reação. Casos particulares dessa equação, em que apenas o fenômeno difusivo é considerado, são as conhecidas equações de Laplace e Poisson.

O objetivo desse capítulo é apresentar o método de Galerkin descontínuo com penalização interior e fazer uma breve análise sobre sua estabilidade e convergência. Este método já está bem estabelecido e amplamente estudado para as equações de segunda ordem, por exemplo veja os trabalhos [26], [13], [4] e [5]. Seguimos a descrição do DGFEM apresentada em [37].

2.1 Problema modelo e formulação fraca

Sobre Ω consideramos válida a equação de Difusão-Advecção-Reação dada por

$$-\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla u) + \nabla \cdot (\mathbf{b}u) + cu = f, \quad (2.1)$$

assumindo que $f \in L_2(\Omega)$, $c \in L_\infty(\Omega)$ são funções reais. Além disso, $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1}^d$ é uma função vetorial cujas entradas b_i são funções reais, Lipschitz contínuas em $\bar{\Omega}$, \mathbf{a} é um tensor, simétrico, definido-positivo sobre $\bar{\Omega}$, e cada entrada de \mathbf{a} é uma função real contínua por partes.

Para estabelecermos um problema de valor de contorno, complementamos a equação (2.1) com as condições de contorno de Dirichlet e Neumann,

$$u = g_D \quad \text{em } \Gamma_D \cup \Gamma_-, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{a}\nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{em } \Gamma_N. \quad (2.3)$$

Além disso, assumimos que para quase todo ponto (q.t.p.) $x \in \Omega$ é válida a hipótese de

positividade: existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ tal que

$$c(x) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}(x) + \mathbf{b}(x) \cdot \xi > 0. \quad (2.4)$$

Para simplificar a apresentação, assumimos que (2.4) vale com $\xi \equiv \mathbf{0}$ e, com base nesta hipótese, definimos a função positiva c_0 como segue:

$$(c_0(x))^2 = c(x) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b}(x) \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \quad (2.5)$$

Assim o problema de valor de contorno é encontrar $u \in H^2(\Omega)$, chamada de solução forte, que satisfaz (2.1), (2.2) e (2.3). A existência e unicidade da solução desse problema de valor de contorno é abordada em [42] e [45].

Estabelecido o problema de valor de contorno, procedemos com a formulação variacional ou fraca, que é a base para o DGFEM.

Sobre cada elemento k da partição \mathcal{T} , multiplicamos (2.1) por uma função teste $v \in H^2(k)$ e usamos as seguintes identidades, obtidas usando o Teorema de Green e integração por partes,

$$\int_k v \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u \, dx = - \int_k \mathbf{a} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial k} \mathbf{a} \nabla u \cdot \mathbf{n}_k \, v \, ds, \quad (2.6)$$

e

$$\int_k \nabla \cdot (\mathbf{b}u) \, v \, dx = - \int_k u \mathbf{b} \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial k} \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k \, v \, u \, ds. \quad (2.7)$$

Somamos os resultados obtidos de todos os elementos da partição e aplicamos algumas manipulações. A primeira das manipulações é usar as definições de salto e média dos traços e a seguinte fórmula de decomposição de fluxos sobre as faces dos elementos

$$\sum_{k \in \mathcal{T}} \int_{\partial k} (\mathbf{a} \nabla u \cdot \mathbf{n}_k) \, v \, ds = \int_{\Gamma} [v] \{ \mathbf{a} \nabla u \cdot \mathbf{n} \} \, ds + \int_{\Gamma_{int}} \{ v \} [\mathbf{a} \nabla u \cdot \mathbf{n}] \, ds, \quad (2.8)$$

que é baseada na identidade

$$v^L u^L - v^R u^R = \frac{1}{2} (v^L - v^R) (u^L + u^R) + \frac{1}{2} (v^L + v^R) (u^L - u^R). \quad (2.9)$$

A segunda é a adição do termo,

$$\theta \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_D} \{ \mathbf{a} \nabla v \cdot \mathbf{n} \} [u] \, ds \quad (2.10)$$

associado à parte elíptica, sobre as faces internas e de contorno do tipo Dirichlet, de forma que a soma das integrais associadas à parte elíptica da equação,

$$\theta \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_D} \{\mathbf{a} \nabla v \cdot \mathbf{n}\} [u] ds - \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_D} \{\mathbf{a} \nabla u \cdot \mathbf{n}\} [v] ds \quad (2.11)$$

possa ser simétrica, dependendo da escolha do parâmetro θ . Observe que a adição deste termo não impede que a solução forte satisfaça a formulação fraca, pois os saltos da solução forte são nulos.

A terceira e última manipulação é a adição do termo de penalidade interior

$$\int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u][v] ds, \quad (2.12)$$

que penaliza o salto da aproximação sobre as faces interiores. O objetivo desse termo é forçar a continuidade da aproximação.

Juntamos todas as integrais na forma bilinear $B_2(\cdot, \cdot)$, a qual é decomposta em quatro partes. A primeira parte é denotada por $B_{\mathcal{T}}$ e diz respeito às integrais da parte difusiva da equação, sobre o interior dos elementos. A segunda parte usa a forma bilinear B_{γ} , e trata dos termos da parte difusiva da equação sobre as faces. Os termos da parte advectiva e reativa da equação estão na forma bilinear $B_{\mathbf{b}}$ e são a terceira parte de B_2 . A quarta e última parte de B_2 é a forma bilinear B_{σ} , que faz a penalização do método.

Com isso fica estabelecida a seguinte formulação fraca: encontrar u_{hp} em $H^2(\Omega, \mathcal{T})$ tal que

$$B_2(u_{hp}, v) = l(v), \quad (2.13)$$

para qualquer $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$.

A forma bilinear $B_2(\cdot, \cdot)$, como descrevemos, é definida por:

$$B_2(u, v) = B_{\mathcal{T}}(u, v) + B_{\mathbf{b}}(u, v) + \theta B_{\gamma}(v, u) - B_{\gamma}(u, v) + B_{\sigma}(u, v), \quad (2.14)$$

sendo

$$B_{\mathcal{T}}(u, v) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k \mathbf{a} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad (2.15)$$

$$B_{\mathbf{b}}(u, v) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \left\{ - \int_k (u \mathbf{b} \cdot \nabla v - cvv) dx + \int_{\partial_+ k} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k) u^+ v^+ ds + \int_{\partial_- k \setminus \partial \Omega} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k) u^- v^+ ds \right\}, \quad (2.16)$$

$$B_\gamma(u, v) = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \{(\mathbf{a}\nabla u) \cdot \mathbf{n}\}[v] ds, \quad (2.17)$$

$$B_\sigma(u, v) = \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma[u][v] ds, \quad (2.18)$$

e o funcional linear $l(\cdot)$ é dado por

$$\begin{aligned} l(v) = & \sum_{k \in \mathcal{T}} \left(\int_k f v dx - \int_{\partial_- k \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k) g_D v^+ ds + \int_{\partial k \cap \Gamma_D} \theta g_D (\mathbf{a}\nabla v \cdot \mathbf{n}_k) ds \right. \\ & \left. + \int_{\partial k \cap \Gamma_N} g_N v ds + \int_{\partial k \cap \Gamma_D} \sigma g_D v ds \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

O parâmetro σ é chamado de parâmetro de penalização descontínuo e é definido sobre cada face γ por

$$\sigma|_\gamma = C_\sigma \frac{\{p^2\}}{\{h\}} \text{ para } \gamma \subset \Gamma_{int} \cup \Gamma_D, \quad (2.20)$$

com C_σ uma constante positiva, chamada de constante de penalização.

2.1.1 Consistência

Dizemos que a formulação fraca descontínua (2.13) é consistente com o problema (2.1), (2.2), (2.3) se a solução forte $u \in H^2(\Omega)$ também é solução dessa formulação. Neste sentido estabelecemos o Lema 7.

Lema 7. *Se $u \in H^2(\Omega)$ é solução forte do problema de valor de contorno (2.1), (2.2), (2.3), então u é solução da formulação fraca descontínua (2.13).*

A demonstração segue do fato de que $u \in H^2(\Omega)$, portanto $[u] = [\mathbf{a}\nabla u \cdot \mathbf{n}] = 0$ sobre as faces internas, conforme o Lema 3.4 de [68], de que u satisfaz (2.1) sobre cada $k \in \mathcal{T}$ e de que u satisfaz as condições de contorno. Com isso, mostra-se que $B_2(u, v) - l(v) = 0$ para toda função $v \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$.

2.2 O método hp -DGFEM

O método hp -DGFEM é baseado na formulação fraca (2.13) usando os espaços $S^p(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, como espaço de aproximação e de funções teste. Assim o DGFEM é definido como: encontrar

u_{DG} em $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ tal que

$$B_2(u_{DG}, v) = l(v), \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (2.21)$$

Escolhendo o parâmetro $\theta = 1$, obtemos o método com penalização interior não-simétrico,[15], abreviado por DGFEM-NIP, enquanto que para $\theta = -1$ temos o método com penalização interior simétrico, [71], [37], abreviado por DGFEM-SIP. Observamos que, em geral, a forma bilinear B_2 não é simétrica, mesmo quando escolhemos $\theta = -1$, devido aos termos advectivos, que são não-simétricos. Portanto a nomenclatura, simétrico e não-simétrico, faz referência à parte elíptica do problema.

O DGFEM-SIP é mais interessante para tratarmos estimativas em funcionais devido às propriedades de consistência entre a formulação dual e o operador adjunto do operador da equação primal, conforme analisado em [36], o qual é estudado com mais detalhes no Capítulo 4.

Uma consequência do Lema 7 é a ortogonalidade de Galerkin,

$$B_2(u - u_{DG}, v) = 0, \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (2.22)$$

2.2.1 Estabilidade

Agora vamos apresentar o resultado sobre a coercividade da forma bilinear sobre os espaços de elementos finitos $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$. Primeiramente, introduzimos a norma DG, $\|\cdot\|_{DG}$ como:

$$\begin{aligned} \|u\|_{DG}^2 = & \sum_{k \in \mathcal{T}_h} (\|\sqrt{\mathbf{a}} \nabla u\|_{L_2(k)}^2 + \|c_0 u\|_{L_2(k)}^2 + \frac{1}{2} \|u^+\|_{\partial_- k \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)}^2 + \frac{1}{2} \|u^+ - u^-\|_{\partial_- k \setminus \partial \Omega}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|u^+\|_{\partial_+ k \cap \partial \Omega}^2) + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [u]^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle (\mathbf{a} \nabla u) \cdot \mathbf{n} \rangle^2 ds, \end{aligned} \quad (2.23)$$

em que $\|\cdot\|_{\gamma}$, $\gamma \subset \partial k$, denota a (semi)norma associada com o (semi)produto interno

$$(v, u)_{\gamma} = \int_{\gamma} |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}| v u ds, \quad (2.24)$$

e c_0 está definida como em (2.5).

Esse tipo de norma contém alguns termos que simplificam a obtenção dos resultados desejados, na análise dos DGFEM. Normas dessa forma foram consideradas em diversos trabalhos, veja por exemplo [42], [15], [55] e [14].

O Teorema 1 garante a coercividade para a forma bilinear $B_2(\cdot, \cdot)$ sobre $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) \times$

$S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, com relação a norma DG.

Teorema 1. *Com σ definido como em (2.20), existe uma constante positiva C , a qual depende apenas da dimensão d e da regularidade da forma de \mathcal{T} , tal que*

$$B_2(v, v) \geq C \|v\|_{DG}^2 \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}), \quad (2.25)$$

desde que a constante C_σ que surge na definição do parâmetro de penalização descontínuo σ seja escolhida tal que $C_\sigma > 0$ quando $\theta = 1$ e $C_\sigma > C'_\sigma$ quando $\theta = -1$, em que C'_σ é uma constante positiva suficientemente grande.

Para a demonstração desse teorema veja [37] e as referências indicadas.

O Teorema 1 indica que o esquema DGFEM-NIP é coercivo sobre $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) \times S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, para qualquer escolha da constante $C_\sigma > 0$ na definição do parâmetro de penalização σ , enquanto o esquema DGFEM-SIP é coercivo apenas se C_σ é escolhido suficientemente grande. Esse resultado garante a unicidade da solução DGFEM no espaço $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$.

2.2.2 Estimativa de erro *a priori*

Nesta seção apresentamos um resultado sobre a convergência das aproximações DGFEM na norma DG.

Decompomos o erro em dois termos,

$$u - u_{DG} = (u - \Pi_{\mathbf{P}}u) + (\Pi_{\mathbf{P}}u - u_{DG}) = \eta + \xi. \quad (2.26)$$

Lema 8. *Sob a hipótese (2.4), assumindo que $\mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathcal{T}}v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, $\forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, e usando a notação $\beta_1|_k = \|c/c_0^2\|_{L_\infty(k)}$, temos*

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{DG}^2 \leq C & \left(\sum_{k \in \mathbf{T}} (\|\sqrt{a} \nabla \eta\|_{L_2(k)}^2 + \beta_1^2 \|c_0 \eta\|_{L_2(k)}^2 + \|\eta^+\|_{\partial_{+k} \Gamma}^2 + \|\eta^-\|_{\partial_{-k} \Gamma}^2) \right. \\ & \left. + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \frac{1}{\sigma} \langle a \nabla \eta \cdot \mathbf{n} \rangle^2 ds + \int_{\Gamma_{int} \cup \Gamma_D} \sigma [\eta]^2 ds \right), \end{aligned}$$

em que C é uma constante dependente apenas da dimensão d e da regularidade de \mathcal{T} .

A demonstração desse lema parte da ortogonalidade de B_2 . Segue usando a coervidade da forma bilinear e conclui-se usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição de $\|\cdot\|_{DG}$. Essa demonstração é apresentada, de forma detalhada, em [42] e [33].

Como consequência desse resultado segue a seguinte estimativa.

Teorema 2. *Sob as hipóteses do Lema 8, e supondo que o vetor das ordens polinomiais \mathbf{p} possui variação local limitada, temos que*

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{DG}^2 \leq C \sum_{k \in \mathcal{T}} \left(\alpha \frac{h_k^{2(s_k-1)}}{p_k^{2(k_k-3/2)}} + \beta_2 \frac{h_k^{2s_k}}{p_k^{2k_k}} + \gamma \frac{h_k^{2(s_k-1/2)}}{p_k^{2(k_k-1/2)}} \right) \|u\|_{H^{r_k(k)}}^2, \quad (2.27)$$

em que $\alpha|_k = \bar{a}_{\tilde{k}}$, $\beta_2|_k = (\beta_1|_k)^2 \|c_0\|_{L^\infty(k)}^2$, $\gamma|_k = \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(k)}$ e C é uma constante positiva que depende apenas de d , do parâmetro ρ na variação local de \mathbf{p} e da regularidade de \mathcal{T} .

A demonstração desse teorema segue da combinação do resultado do Lema 8 com o do Lema 1 e a definição do parâmetro de penalização descontínuo.

Capítulo 3

Equação biharmônica

Neste capítulo apresentamos a equação biharmônica, sua formulação fraca, diferentes versões do DGFEM e estudamos a estabilidade e estimativas *a priori* dessas formulações. Este estudo está baseado nos trabalhos [53], [18], [52] e [70], em que essas formulações foram propostas e receberam uma detalhada análise de sua estabilidade e convergência.

3.1 Problema modelo e formulação fraca

A equação biharmônica é dada por,

$$\Delta^2 u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (3.1)$$

em que $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ e $f \in L^2(\Omega)$. Para obtermos um problema de valor de contorno, complementamos a equação biharmônica com as seguintes condições,

$$u = g_0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (3.2)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = g_1 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (3.3)$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal exterior à $\partial\Omega$ e assumimos g_0 e $g_1 \in L^2(\partial\Omega)$.

Portanto, na formulação clássica, o problema de valor de contorno é encontrar $u \in H^4(\Omega)$ que satisfaça (3.1)-(3.3), denominada solução forte. A existência e unicidade desse problema de valor de contorno em domínios poligonais é estudada em [17].

Com condições de contorno homogêneas (i.e., $g_0 = g_1 = 0$) esse problema descreve, por exemplo, o deslocamento de uma placa fina Ω , cujo contorno $\partial\Omega$ está preso e engastado, sob a ação de uma força externa f , [72]. Outro fenômeno descrito por esse problema é o fluxo bidimensional de um fluido incompressível, na formulação da função corrente, [32].

Estabelecido o problema (3.1)-(3.3) como problema modelo, procedemos à derivação de sua formulação fraca. Supomos que u seja a solução forte de (3.1)-(3.3). Multiplicando a equação (3.1) por uma função teste $v \in H^2(k)$ integrando em um elemento $k \in \mathcal{T}$ usando duas vezes a integração por partes (2.6), obtemos

$$\int_k \Delta u \Delta v dx = \int_k \Delta^2 u v dx - \int_{\partial k} (\mathbf{n}_k \cdot \nabla(\Delta u)) v ds + \int_{\partial k} \Delta u (\mathbf{n}_k \cdot \nabla v) ds \quad \forall k \in \mathcal{T}. \quad (3.4)$$

Somando o resultado obtido em todos os elementos k da partição \mathcal{T} e usando a decomposição de fluxos análoga à (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k \Delta u \Delta v dx &= \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k \Delta^2 u v dx - \int_{\Gamma^0} (\{ \mathbf{n} \cdot \nabla \Delta u \} [v] + [\mathbf{n} \cdot \nabla \Delta u] \{ v \}) ds \\ &+ \int_{\Gamma^0} (\{ \Delta u \} [\mathbf{n} \cdot \nabla v] + [\Delta u] \{ \mathbf{n} \cdot \nabla v \}) ds \\ &+ \int_{\partial \Omega} (\Delta u (\mathbf{n} \cdot \nabla v) - (\mathbf{n} \cdot \nabla \Delta u) v) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como $u \in H^4(\Omega)$, os saltos $[\mathbf{n} \cdot \nabla \Delta u]$ e $[\Delta u]$ são nulos. Logo as integrais em (3.5) que envolvem esses saltos podem ser descartadas. Para obter uma forma bilinear simétrica, não-simétrica ou semi-simétrica de forma parametrizável, adicionamos os termos

$$\theta_1 \int_{\Gamma} \{ \mathbf{n} \cdot \nabla \Delta v \} [u] ds \quad (3.6)$$

e

$$\theta_2 \int_{\Gamma} \{ \Delta v \} [\mathbf{n} \cdot \nabla u] ds. \quad (3.7)$$

Observe que a adição destas integrais não interfere na consistência da formulação. De fato, para $u \in H^4(\Omega)$ estas integrais sobre as faces interiores são nulas, pois os saltos $[u]$ e $[\mathbf{n} \cdot \nabla u]$ são nulos, e o termo sobre as faces de contorno é compensado com a adição das respectivas condições de contorno, de forma fraca. Sendo assim, introduzimos a forma bilinear

$$B_4(u, v) = B_{\Delta}(u, v) + J_1(u, v) + \theta_1 J_1(v, u) - J_2(u, v) - \theta_2 J_2(v, u) + B_s(u, v), \quad (3.8)$$

em que

$$B_{\Delta}(u, v) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k \Delta u \Delta v dx, \quad (3.9)$$

$$J_1(u, v) = \int_{\Gamma} \{\mathbf{n} \cdot \nabla \Delta u\} [v] ds, \quad (3.10)$$

$$J_2(u, v) = \int_{\Gamma} \{\Delta u\} [\mathbf{n} \cdot \nabla v] ds, \quad (3.11)$$

$$B_s(u, v) = \int_{\Gamma} \alpha [u] [v] ds + \int_{\Gamma} \beta [\mathbf{n} \cdot \nabla u] [\mathbf{n} \cdot \nabla v] ds. \quad (3.12)$$

Os parâmetros θ_1 e θ_2 podem ser números reais no intervalo $[-1, 1]$. Se escolhermos θ_1 e θ_2 como -1, teremos a formulação não-simétrica. Escolhendo $\theta_1 = \theta_2 = 1$, teremos a formulação simétrica, que é a formulação que adotamos neste trabalho. Outras duas escolhas interessantes são $\theta_1 = -\theta_2 = 1$ e $\theta_1 = -\theta_2 = -1$ que determinam as formulações semi-simétricas.

As funções α e β usadas para penalizar os saltos de u e $\mathbf{n} \cdot \nabla u$ são chamadas de parâmetros de penalização descontínuos e são definidos por face como

$$\alpha|_{\gamma} = \alpha_{\gamma}, \quad \beta|_{\gamma} = \beta_{\gamma} \quad \forall \gamma \in \mathcal{F}_0, \quad (3.13)$$

em que α_{γ} e β_{γ} dependem dos parâmetros de discretização h e p . A coercividade da forma bilinear B_4 sobre $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ varia com o tipo de formulação e depende da escolha dos parâmetros α e β , conforme especificado mais adiante.

Consideramos também o funcional linear $l(v) = l_{\mathcal{T}}(v) + l_s(v)$, em que

$$l_{\mathcal{T}}(v) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k f v dx + \theta_1 \int_{\partial\Omega} g_0 \mathbf{n} \cdot \nabla (\Delta v) ds - \theta_2 \int_{\partial\Omega} g_1 \Delta v ds, \quad (3.14)$$

$$l_s(v) = \int_{\partial\Omega} \alpha g_0 v ds + \int_{\partial\Omega} \beta g_1 \mathbf{n} \cdot \nabla v ds. \quad (3.15)$$

Sendo assim, a formulação fraca descontínua do problema de valor de contorno para a equação biarmônica é: encontrar $u_{hp} \in H^4(\Omega, \mathcal{T})$ tal que

$$B_4(u_{hp}, v) = l(v), \quad \forall v \in H^4(\Omega, \mathcal{T}). \quad (3.16)$$

3.1.1 Consistência

Um resultado fundamental é a consistência da formulação fraca (3.16), ou seja, a solução forte é também solução da formulação fraca, conforme o Lema 9, a seguir.

Lema 9. *Se $u \in H^4(\Omega)$ é a solução forte do problema de valor de contorno (3.1)-(3.3), então u é solução da formulação fraca descontínua (3.16) do problema.*

Prova: Usando (3.5) e as definições de $B_4(\cdot, \cdot)$ e $l(\cdot)$, temos que

$$\begin{aligned}
B_4(u, v) - l(v) &= \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_k (\Delta^2 u - f)v dx - \int_{\Gamma_{int}} [\mathbf{n} \cdot \nabla(\Delta u)]\{v\} ds \\
&+ \int_{\Gamma_{int}} [\Delta u]\{\mathbf{n} \cdot \nabla v\} ds - \int_{\Gamma_{int}} [u]\{\mathbf{n} \cdot \nabla(\Delta v)\} ds + \int_{\Gamma_{int}} [\mathbf{n} \cdot \nabla u]\{\Delta v\} ds \\
&- \int_{\partial\Omega} (u - g_0)\mu \cdot \nabla(\Delta u) ds + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{n} \cdot \nabla u - g_1)\Delta v ds - \int_{\partial\Omega} \alpha(u - g_0)v ds \\
&- \int_{\partial\Omega} \beta(\mathbf{n} \cdot \nabla u - g_1)[\mathbf{n} \cdot \nabla v] ds - \int_{\Gamma_{int}} \alpha[u][v] ds - \int_{\Gamma_{int}} \beta[\mathbf{n} \cdot \nabla u][\mathbf{n} \cdot \nabla v] ds
\end{aligned}$$

$\forall v \in H^4(\Omega, \mathcal{T})$. Visto que a solução forte u satisfaz as condições de contorno e a equação sobre cada elemento, os termos sobre $\partial\Omega$ e sobre os elementos k se anulam. E sobre as faces interiores temos que

$$[u]_\gamma = 0, [\mathbf{n} \cdot \nabla u]_\gamma = 0, [\Delta u]_\gamma = 0, [\mathbf{n} \cdot \nabla(\Delta u)]_\gamma = 0 \quad \forall \gamma \in \mathcal{F}_0. \quad (3.17)$$

Logo, os termos sobre as faces interiores também são nulos. Assim a solução forte do problema de valor de contorno (3.1)-(3.3) é solução da formulação fraca (3.16).

3.2 O método hp -DGFEM

Com base na formulação fraca (3.16), definimos o Método de Elementos Finitos de Galerkin Descontínuo com Penalização Interior (DGFEM) por: encontrar $u_{DG} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ tal que

$$B_4(u_{DG}, v) = l(v) \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (3.18)$$

A escolha dos parâmetros θ_1 e θ_2 também determinará o tipo de DGFEM.

Supondo u solução forte para o problema de valor de contorno, asseguramos que u é solução de (3.16) e, portanto, de (3.18). Consequentemente, é válida a propriedade de ortogonalidade de Galerkin

$$B_4(u - u_{DG}, v) = 0 \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (3.19)$$

3.2.1 Estabilidade

Na análise de estabilidade de um método numérico, deseja-se mostrar a existência e unicidade da solução. Nos métodos de elementos finitos isso é feito mostrando que a forma bilinear é contínua e coerciva no espaço da formulação fraca e, então, pelo Teorema de Lax-Milgram

temos a existência e unicidade da solução. Porém, apesar da continuidade de B_4 em $H^4(\Omega, \mathcal{T})$, a coercividade de B_4 é um resultado em aberto. Isso não nos permite usar a sistemática de análise descrita acima.

Sem a coercividade de B_4 em $H^4(\Omega, \mathcal{T})$, não podemos garantir a unicidade da solução de (3.16). Porém é possível mostrar a coercividade de B_4 sobre os espaço de aproximação $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ e, portanto, garantir a unicidade da solução u_{DG} .

Para mostrar a continuidade e coercividade da forma bilinear B_4 , precisamos de normas dos espaços $H^4(\Omega, \mathcal{T})$ e $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$. Para simplificar a obtenção do resultado, escolhemos normas apropriadas, definidas por

$$\|u\|_{DG}^2 = \sum_{k \in \mathcal{T}} \|\Delta u\|_{L^2(k)}^2 + \|\sqrt{\alpha}[u]\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\sqrt{\beta}[\mathbf{n} \cdot \nabla u]\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (3.20)$$

e

$$\| \|u\| \|_{DG}^2 = \|u\|_{DG}^2 + \|\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\{\mathbf{n} \cdot \nabla \Delta u\}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\frac{1}{\sqrt{\beta}}\{\Delta u\}\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (3.21)$$

O Lema 10 afirma que a forma bilinear B_4 é contínua em $H^4(\Omega, \mathcal{T})$ com respeito à norma $\| \| \cdot \| \|_{DG}$.

Lema 10. *Seja $B_4(\cdot, \cdot)$ a forma bilinear definida em (3.8), com θ_1 e $\theta_2 \in [-1, 1]$ e com as funções α e β positivas. Então existe uma constante positiva C , independente de h_k , $\forall k \in \mathcal{T}$, tal que*

$$B_4(u, v) \leq C \| \|u\| \|_{DG} \| \|v\| \|_{DG}, \quad \forall u, v \in H^4(\Omega, \mathcal{T}). \quad (3.22)$$

O Lema 11 estabelece a coercividade da forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ no espaço $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, com escolha apropriada dos parâmetros de penalização, o que garante a unicidade da solução do problema (3.18) no espaço $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$.

Lema 11. *Sejam os parâmetros de penalização, $\alpha_\gamma = \sigma_\alpha \frac{\{p^6\}}{h^3}$ e $\beta_\gamma = \sigma_\beta \frac{\{p^2\}}{h}$, em que $\gamma \in \mathcal{F}_h$. Então existe uma constante positiva $C = C(c_\alpha, c_\beta, \underline{\sigma}_\alpha, \underline{\sigma}_\beta)$ tal que,*

$$B_4(u, u) \geq C \| \|u\| \|_{DG}^2, \quad \forall u \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}),$$

em que c_α , c_β , $\underline{\sigma}_\alpha$ e $\underline{\sigma}_\beta$ são constante positivas escolhidas de forma que $\sigma_\alpha \geq \underline{\sigma}_\alpha$, $\sigma_\beta \geq \underline{\sigma}_\beta$ e

$$\frac{c_\alpha}{\underline{\sigma}_\alpha} + \frac{c_\beta}{\underline{\sigma}_\beta} < 1.$$

As provas dos Lemas 10 e 11 são apresentadas em [53] e [18].

3.2.2 Estimativa de erro *a priori*

Outro resultado fundamental na análise do DGFEM trata-se da convergência do método, ou seja, mostra que, sob certas condições, o erro diminui conforme o espaço de aproximação é enriquecido.

Teorema 3. *Supomos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio poliedral e limitado, e $\{\mathcal{T}\}$ uma família de partições regulares de Ω em d -paralelepípedos. Seja $\mathbf{p} = (p_k, k \in \mathcal{T})$ com $p_k \in \mathbb{N}$ e $p_k \geq 3, \forall k \in \mathcal{T}$, o vetor das ordens polinomiais, com variação local limitada. Para cada face $\gamma \in \mathcal{F}$ assumimos valores para α_γ e β_γ como no Lema 11, garantido assim a coercividade da forma bilinear B_4 . Se u é solução de (3.16) e $u \in H^{\mathbf{s}}(\Omega, \mathcal{T})$, com $\mathbf{s} = (s_k, k \in \mathcal{T})$, $s_k \geq 4 \forall k \in \mathcal{T}$, então para a solução numérica correspondente u_{DG} , solução de (3.18) com $\theta_1, \theta_2 \in [-1, 1]$, vale a seguinte estimativa de erro*

$$\| \|u - u_{DG}\| \|_{DG}^2 \leq C \sum_{k \in \mathcal{T}} \frac{h_k^{2m_k-4}}{p_k^{2s_k-7}} \|u\|_{s_k, k}^2, \quad (3.23)$$

em que $2 \leq m_k \leq \min(p_k + 1, s_k)$, e C é uma constante que depende apenas da dimensão d , da regularidade da partição, da variação local das ordens polinomiais e de $s = \max_{k \in \mathcal{T}} s_k$.

A demonstração desse Teorema é apresentada em [70]. Um estudo mais aprofundado, com estimativas de erro em normas de L_2 e de $H^q(\Omega, \mathcal{T})$ é apresentado em [18].

Capítulo 4

Erro em funcionais

A análise de erro *a posteriori* em funcionais tem como objetivo estimar o erro obtido ao aproximar funcionais da solução u por funcionais da aproximação u_{DG} , isto é $J(u) - J(u_{DG})$, ao invés do erro da própria aproximação em alguma norma, $\|u - u_{DG}\|$. O funcional $J(u)$ representa uma quantidade de interesse de u . Em geral, os modelos não fornecem explicitamente como solução todas as quantidades que são de interesse. Assim, a necessidade de calcular uma aproximação para $J(u)$, e, conseqüentemente, estimar o erro, é uma situação comum em problemas reais.

Os funcionais usados para representar essas quantidades de interesse são, em geral, lineares e limitados. Desta forma, nas formulações fracas descontínuas, assumimos que J pertence ao dual do espaço de Sobolev particionado. O espaço de Sobolev particionado depende do problema em questão, sendo $H^2(\Omega, \mathcal{T})$ para a formulação fraca apresentada para a equação de Difusão-Advecção-Reação e $H^4(\Omega, \mathcal{T})$ para a formulação fraca para a equação biharmônica. Vamos denotar esses espaços de forma geral por $H_{\mathcal{T}}$, para apresentar de forma unificada a teoria para estimativas em funcionais. Na segunda e na terceira seções e no capítulo seguinte consideramos esses espaços de maneira específica para cada equação.

4.1 Representação do erro

De forma geral, seguindo as ideias de [57] e considerando um espaço de Hilbert $H_{\mathcal{T}}$ e uma forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$, o problema primal é: encontrar $u \in H_{\mathcal{T}}$ tal que

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}. \quad (4.1)$$

O DGFEM associado a essa formulação fraca é: encontrar $u_{DG} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ tal que

$$B(u_{DG}, v) = l(v) \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (4.2)$$

E a ortogonalidade de Galerkin é descrita como

$$B(u - u_{DG}, v) = 0 \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (4.3)$$

Usando a linearidade de J e definindo o erro na aproximação primal por $e := u - u_{DG}$, podemos reescrever o erro em J como $J(e)$ e essa é a quantidade que desejamos estimar.

A estratégia *a posteriori* natural para medir quanto uma aproximação falha ao satisfazer a formulação variacional é através do resíduo, o qual podemos ver como um funcional definido por

$$R_{h,p}^u(v) := l(v) - B(u_{DG}, v), \quad v \in H_{\mathcal{T}}.$$

Usando a linearidade de B e que u é solução de (4.1) obtemos que

$$B(e, v) = R_{h,p}^u(v), \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}. \quad (4.4)$$

Da ortogonalidade (4.3) temos também que $R_{h,p}^u(v) = 0, \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$. Além disso, $R_{h,p}^u(\cdot)$ é um elemento do dual de $H_{\mathcal{T}}$.

Considerando que o resíduo é a grande fonte de informações *a posteriori* de que dispomos sobre o erro e , o caminho para uma estimativa *a posteriori* para $J(e)$ passa por relacionar $J(e)$ e $R_{h,p}^u$. Com essa idéia em mente, vamos supor que existe um funcional linear w que representa essa relação da seguinte forma:

$$J(e) = w(R_{h,p}^u). \quad (4.5)$$

O funcional w é chamado de função de influência, pois seu objetivo é indicar a influência do resíduo em $J(e)$. Como w atua sobre o dual de $H_{\mathcal{T}}$, temos que w é um elemento do bidual de $H_{\mathcal{T}}$. Como $H_{\mathcal{T}}$ é um espaço de Hilbert, e portanto reflexivo, pelo Teorema de Riesz, podemos reescrever (4.5) como

$$J(e) = R_{h,p}^u(w), \quad (4.6)$$

em que w representa agora um elemento de $H_{\mathcal{T}}$. Usando (4.4), concluímos que w deve satisfazer

$$J(e) = B(e, w). \quad (4.7)$$

Como o erro $e \in H_{\mathcal{T}}$, (4.7) é necessariamente satisfeita quando $w \in H_{\mathcal{T}}$ for solução de

$$B(v, w) = J(v), \quad \forall v \in H_{\mathcal{T}}. \quad (4.8)$$

Este problema é denominado problema dual associado ao problema primal (4.1) e ao funcional J . É importante observar que a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ é a mesma do problema primal, porém a posição da solução e da função teste mudam.

De (4.7), temos uma forma de relacionar o erro no funcional com o resíduo do problema primal. O único problema dessa relação, ao menos globalmente, é que w é desconhecida, em geral, e terá que ser aproximada. A qualidade dessa relação aproximada depende apenas da qualidade da aproximação de w , pois todas as outras funções envolvidas são conhecidas ou podem ser expressas na forma de resíduo.

A igualdade (4.7) é a base para todas as estimativas *goal-oriented* classificadas como do primeiro tipo. Os principais trabalhos que tratam de estimativas em funcionais costumam usar a ortogonalidade (4.3) para definir seus estimadores e indicadores. O uso da ortogonalidade está baseado no seguinte lema.

Lema 12. *Se $w_{h,p} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ é uma aproximação de w tal que*

$$B(v, w_{h,p}) = J(v), \quad \forall v \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}), \quad (4.9)$$

então,

$$J(e) = B(e, \varepsilon), \quad (4.10)$$

em que $\varepsilon = w - w_{h,p}$.

A prova do Lema 12 segue de subtrair $R_{hp}^u(w_{hp}) = 0$ de (4.7) e usar a bilinearidade de $B(\cdot, \cdot)$.

O uso da representação (4.10) por muitos pesquisadores, ao invés de apenas (4.7), é creditado à importância da seguinte relação

$$J(e) = B(e, \varepsilon) = l(\varepsilon). \quad (4.11)$$

Globalmente, estimativas obtidas da igualdade (4.7) ou do Lema 12 devem ser iguais, e mostraremos que, de fato, isso acontece. Porém, localmente, dependendo da decomposição da relação (4.7) ou da relação (4.10) apresentada no Lema 12, podem ser gerados diferentes indicadores de erro.

O Lema 12 e a igualdade (4.7) são o primeiro passo para a construção das estimativas e indicadores que apresentamos. O segundo passo consiste em decompor o resíduo em

contribuições η_k , relativas a cada elemento $k \in \mathcal{T}$, de forma que

$$J(e) = \sum_k \eta_k. \quad (4.12)$$

Esse é o assunto do próximo capítulo, em que construímos os indicadores de erro *a posteriori*.

4.2 Consistência dos problemas duais

Como apresentado em [37], para equações de segunda ordem, e em [53] para a equação biharmônica, a consistência entre o problema dual e o operador adjunto da equação garante maior suavidade à solução dual e, conseqüentemente, melhores taxas de convergência do erro $J(e)$.

Mostramos, assim como nos trabalhos [37] e [53], que as formulações simétricas dos DG-FEM são consistentes com os problemas adjuntos, e, por essa razão, usamos apenas formulações simétricas, nos próximos capítulos.

Consideramos nas duas próximas seções que o funcional de interesse $J(u)$ tem a seguinte forma

$$J(u) = \int_{\Omega} \Psi u d\Omega. \quad (4.13)$$

Funcionais que podem tomar essa forma são os mais comuns, porém outros que não podem ser escritos dessa forma também são importantes. O funcional valor pontual, $J(u) = u(x_0)$, pode ser escrito na forma acima usando a função delta de Dirac, e portanto admite a mesma análise. Já funcionais que envolvem as derivadas exigem uma análise mais criteriosa e, possivelmente, o uso de um funcional modificado no problema dual, sem acarretar prejuízo ao cálculo do funcional original, para tornar o problema dual sem inconsistências.

4.2.1 Equação de segunda ordem

Para a equação de Difusão-Advecção-Reação, o problema dual, como descrito na seção anterior, é: encontrar $w \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$ tal que

$$B_2(v, w) = J(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}). \quad (4.14)$$

Usando as identidades (2.6) e (2.7) sobre o problema dual, no sentido de fazer o caminho

inverso do percorrido para obter a formulação fraca, temos que w deverá satisfazer

$$-\nabla \cdot (\mathbf{a}\nabla w) - \mathbf{b} \cdot \nabla w + cw = \Psi \text{ em } k, \forall k \in \mathcal{T}. \quad (4.15)$$

Observe que o lado esquerdo de (4.15) é exatamente o operador diferencial adjunto ao operador diferencial da equação primal.

Entretanto surgem condições para w nas faces interiores

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)[w] + (1 + \theta)\{(\mathbf{a}\nabla w) \cdot \mathbf{n}_k\} + \sigma[w] = 0, \text{ em } \partial_+ k \setminus \Gamma, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (4.16)$$

$$(1 + \theta)\{(\mathbf{a}\nabla w) \cdot \mathbf{n}_k\} + \sigma[w] = 0, \text{ em } \partial_- k \setminus \Gamma, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (4.17)$$

$$[w] = 0, \text{ em } \partial k \cap \Omega_{\mathbf{a}}, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (4.18)$$

e nas faces de contorno

$$w = 0 \text{ em } \partial k \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_+), \forall k \in \mathcal{T}, \quad (4.19)$$

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)w + (\mathbf{a}\nabla w) \cdot \mathbf{n}_k = 0 \text{ em } \partial k \cap \Gamma_N, \forall k \in \mathcal{T}, \quad (4.20)$$

$$(1 + \theta)(\mathbf{a}\nabla w) \cdot \mathbf{n}_k = 0 \text{ em } \partial k \cap \Gamma_D, \forall k \in \mathcal{T}. \quad (4.21)$$

O problema nas condições sobre as faces interiores e de contorno está nos termos que envolvem $(\mathbf{a}\nabla w) \cdot \mathbf{n}_k$, pois sem esses termos restariam apenas os termos envolvendo os saltos de $[w]$ nas condições sobre as faces interiores, que seriam satisfeitos devido a continuidade de w , e restaria apenas uma condição de contorno sobre Γ_D .

Observe que se tomarmos $\theta = -1$, ou seja formulação simétrica, os termos problemáticos são anulados e, pelo argumento anterior, o problema torna-se independente da malha e com condições de contorno adequadas.

No caso $\theta = 1$, teríamos duas condições de contorno sobre Γ_D , $w = 0$ e $(\mathbf{a}\nabla w) \cdot \mathbf{n}_k = 0$. Além disso, sobre as faces interiores, considerando que a continuidade de w no domínio de elipticidade $\Omega_{\mathbf{a}}$ seja satisfeita, surge a condição

$$(\mathbf{a}\nabla w)|_{\partial k_L \cap \gamma} \cdot \mathbf{n}_k = -(\mathbf{a}\nabla w)|_{\partial k_R \cap \gamma} \cdot \mathbf{n}_k, \quad (4.22)$$

e todas essas condições podem não ser satisfeitas simultaneamente.

4.2.2 Equação biharmônica

Para o problema biharmônico temos o seguinte problema dual: encontrar $w \in H^4(\Omega, \mathcal{T})$ tal que

$$B_4(v, w) = J(v) \quad \forall v \in H^4(\Omega, \mathcal{T}). \quad (4.23)$$

Usando a identidade (3.4) no problema dual, no sentido contrário do que fizemos para obter a formulação fraca do problema primal (3.16), obtemos que a solução dual w deve satisfazer as seguintes condições

$$\Delta^2 w = \Psi \text{ em } k, \quad \forall k \in \mathcal{T}, \quad (4.24)$$

$$-(1 - \theta_1)\{\mathbf{n}_k \cdot \nabla \Delta w\} + (1 - \theta_2)\{\Delta w\} + \alpha[w] + \beta[\nabla w \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad (4.25)$$

$$[\nabla w \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad (4.26)$$

$$[w] = 0 \quad (4.27)$$

em $\partial k \setminus \Gamma$, $\forall k \in \mathcal{T}$, e em $\partial k \cap \partial\Omega$,

$$-(1 - \theta_1)\mathbf{n}_k \cdot \nabla \Delta w + (1 - \theta_2)\Delta w = 0, \quad (4.28)$$

$$\nabla w \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4.29)$$

$$w = 0. \quad (4.30)$$

De forma análoga, e até mais simples pela ausência de termos de advecção e apenas condições de contorno essenciais, temos que a escolha da formulação simétrica, $\theta_1 = \theta_2 = 1$, deixa o problema independente da malha. Dessa forma, como o operador diferencial em questão é auto-adjunto, o problema dual é adjunto consistente.

Também, de forma análoga ao caso da equação de segunda ordem, temos que as demais formulações geram inconsistências.

4.3 Estimativas *a priori* em funcionais

Devido à consistência do problema dual, quando considerada a formulação simétrica e inconsistências no problema dual para a formulação não-simétrica, apenas a formulação simétrica é usada.

4.3.1 Estimativas *a priori* para a equação de difusão-advecção-reação

Estimativas *a priori* considerando as formulações simétricas e não-simétricas podem ser obtidas no contexto da equação de difusão-advecção-reação, reescrevendo a identidade $J(e) = B_2(e, \varepsilon)$ em termos apenas de w .

Como consideramos apenas as formulações simétricas, isto é $\theta = -1$, esse procedimento não é necessário e a dedução das estimativas é simplificada.

Teorema 4. *Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^d$ um domínio poliedral, \mathcal{T} uma partição regular de Ω em d -paralelepípedos e \mathbf{p} o vetor das ordens polinomiais, o qual assumimos como tendo variação local limitada. Então, assumindo a hipótese de positividade (2.4), que o tensor \mathbf{a} é constante sobre cada elemento da partição, que $\mathbf{b} \cdot \nabla_{\mathcal{T}} v \in S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, que $u|_k \in H^{\kappa_k}(k)$, $\kappa_k \geq 2$, e $w|_k \in H^{l_k}(k)$, $l_k \geq 2$, para $k \in \mathcal{T}$, temos que a aproximação $u_{DG} \in S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ satisfaz o seguinte limitante para o erro no funcional,*

$$\begin{aligned} |J(u) - J(u_{DG})|^2 &\leq C \sum_{k \in \mathcal{T}} \left(\alpha \frac{h_k^{2(s_k-1)}}{p_k^{2(\kappa_k-3/2)}} + \beta_3 \frac{h_k^{2s_k}}{p_k^{2\kappa_k}} + \gamma \frac{h_k^{2(s_k-1/2)}}{p_k^{2(\kappa_k-1/2)}} \right) \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)}^2 \\ &\quad \times \sum_{k \in \mathcal{T}} \left(\alpha \frac{h_k^{2(t_k-1)}}{p_k^{2(l_k-3/2)}} + \beta_3 \frac{h_k^{2t_k}}{p_k^{2l_k}} + \gamma \frac{h_k^{2(t_k-1/2)}}{p_k^{2(l_k-1)}} \right) \|w\|_{H^{l_k}(k)}^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

para $1 \leq s_k \leq \min(p_k + 1, \kappa_k)$, $1 \leq t_k \leq \min(p_k + 1, l_k)$, $p_k \geq 1$, $k \in \mathcal{T}$, em que $\alpha|_k = \bar{\mathbf{a}}_k$, $\beta_3|_k = (1 + (\beta_1|_k)^2) \|c_0\|_{L^\infty(k)}^2$, $\beta_1|_k = \|c(x)/(c_0(x))^2\|_{L^\infty(k)}$, $\beta_4|_k = \|(c + \nabla \cdot \mathbf{b})/c_0\|_{L^\infty(k)}^2$, $\gamma|_k = \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(k)}$ e C é uma constante que depende da dimensão, da regularidade da partição e da variação local das ordens polinomiais.

Esse teorema é um caso particular, para a formulação simétrica, do resultado provado em [37]. A demonstração desse resultado é feita considerando a decomposição do erro em $u - u_{DG} = (u - \Pi_p u) + (\Pi_p u - u_{DG}) = \eta + \xi$ e usando o problema dual (4.14), para chegar à igualdade

$$J(u) - J(u_{DG}) = B_2(\eta, w - w_{hp}) + B_2(\xi, w - w_{hp}), \quad \forall w_{hp} \in S^{\mathbf{p}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (4.32)$$

Cada um dos termos do lado direito é estimado assumindo $w_{hp} = \Pi_{\mathbf{p}} w$ e usando os Lemas 1 e 6.

Considere o caso particular em que temos ordens polinomiais locais, índices de Sobolev locais e diâmetros constantes para os espaços dos problemas primal e dual, $p_k = p$, $s_k = s$, $t_k = t$, $\kappa_k = \kappa$, $l_k = l$ e $h_k = h, \forall k \in \mathcal{T}$. Nessa situação, se temos difusão dominante, a

estimativa do Teorema 4 toma a forma

$$|J(u) - J(u_{DG})| \leq C \frac{h^{s+t-2}}{p^{k+l-3}} p \|u\|_{k,\Omega} \|w\|_{l,\Omega} \quad (4.33)$$

em que $1 \leq s \leq \min(p+1, k)$ e $1 \leq t \leq \min(p+1, l)$. Observe que a taxa de convergência em $J(\cdot)$ é o dobro da taxa observada no Teorema 2, para o erro na norma $\|\cdot\|_{DG}$.

4.3.2 Estimativas *a priori* para a equação biharmônica

Vamos supor nesta seção que J é um funcional linear e limitado, definido sobre $H^4(\Omega, \mathcal{T})$, para que o problema dual esteja bem definido. Partindo de (4.8) e considerando o problema dual (4.23), temos

$$J(u) - J(u_{DG}) = B_4(u - u_{DG}, w - w_{hp}), \quad (4.34)$$

em que u é a solução de (3.16), u_{DG} é solução de (3.18), w é solução do problema dual (4.23) e $w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$.

O Teorema 5 fornece a estimativa para o erro na aproximação de funcionais de u , por funcionais de u_{DG} .

Teorema 5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um domínio poliedral limitado, $\{\mathcal{T}\}$ uma família de partições regulares em d -paralelepípedos e $\mathbf{p} = (p_k, k \in \mathcal{T})$ com $p_k \in \mathbb{N}$, $p_k \geq 3 \forall k \in \mathcal{T}$ o vetor das ordens polinomiais, com variação local limitada. Assumimos que $u \in H^s(\Omega, \mathcal{T})$, $w \in H^t(\Omega, \mathcal{T})$, com $s_k \geq 4$ e $t_k \geq 4 \forall k \in \mathcal{T}$, são as soluções de (3.16) e (4.23), respectivamente. Então vale a seguinte estimativa de erro para o funcional linear e limitado $J(\cdot)$ de $u_{DG} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, solução de (3.18)*

$$|J(u) - J(u_{DG})|^2 \leq C \left(\sum_{k \in \mathcal{T}} \frac{h_k^{2m_k-4}}{p_k^{2s_k-7}} \|u\|_{s_k,k}^2 \right) \times \left(\sum_{k \in \mathcal{T}} \frac{h_k^{2n_k-4}}{p_k^{2s_k-7}} \|w\|_{t_k,k}^2 \right) \quad (4.35)$$

em que $2 \leq m_k \leq \min(p_k+1, s_k)$, $2 \leq n_k \leq \min(p_k+1, t_k)$ e C é uma constante que independe de h_k e p_k .

Prova: Esse resultado foi provado em [53] e [18], mas vamos reproduzi-lo aqui. Considerando o projetor definido pelo Lema 2, $\pi_h^{\mathbf{P}}$, adotamos mais um vez a decomposição de erro

$$u - u_{DG} = (u - \pi_h^{\mathbf{P}} u) + (\pi_h^{\mathbf{P}} u - u_{DG}) = \eta + \xi. \quad (4.36)$$

Da definição da norma $\|\cdot\|_{DG}$, da decomposição do erro (4.36), da ortogonalidade (3.19),

e da continuidade de B_4 , temos

$$\begin{aligned}
|||\xi|||_{DG}^2 &= B_4(\xi, \xi) \\
&= B_4(-\eta + u - u_{DG}, \xi) \\
&= -B_4(\eta, \xi) + B_4(u - u_{DG}, \xi) \\
&= -B_4(\eta, \xi) \\
&\leq |||\eta|||_{DG} |||\xi|||_{DG}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Logo $|||\xi|||_{DG} \leq |||\eta|||_{DG}$. Como (4.34) vale para qualquer $w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, tomamos $w_{hp} = \pi_h^{\mathbf{P}} w$. Usando o Lema 2 e que $|||\xi|||_{DG} \leq |||\eta|||_{DG}$, chegamos ao resultado desejado.

Em particular quando as ordens polinomiais e os índices de Sobolev locais são iguais para todos os elementos, $p_k = p$, $s_k = s$, $t_k = t$, $m_k = m$, $n_k = n \quad \forall k \in \mathcal{T}$ e os diâmetros de cada elemento são iguais, $h_k = h \quad \forall k \in \mathcal{T}$, a estimativa do Teorema 5 fica na forma

$$|J(u) - J(u_{DG})| \leq C \frac{h^{m+n-4}}{p^{s+t-7}} \|u\|_{0,s} \|w\|_{0,t}. \tag{4.38}$$

Observamos que a ordem de convergência é o dobro da ordem em norma energia, Teorema 3, de forma análoga às estimativas de erro em funcionais obtidas para a equação de segunda ordem.

Capítulo 5

Análise *a posteriori* do erro em funcionais

Neste capítulo estudamos as estimativas e indicadores de erro *a posteriori goal-oriented* de aproximações DGFEM para as equações biharmônica e de difusão-advecção-reação. Três diferentes formas de indicadores, associados à mesma estimativa, são considerados para as duas equações tratadas. O primeiro indicador estudado foi proposto em [37] para a equação de difusão-advecção-reação, o qual é estendido para a equação biharmônica. O segundo indicador foi apresentado em [35], também para equações de segunda ordem, mas sem advecção. Também estendemos esse indicador para aproximações DGFEM da equação biharmônica.

Propomos um terceiro indicador, que mantém a mesma estimativa de erro dos dois primeiros, mas que localmente é diferente. As diferenças entre os três indicadores de erro está no tratamento dado aos termos sobre as faces interiores. Mais especificamente, o que os diferencia é a distribuição dos termos calculados sobre as faces entre os elementos que formam cada face.

Para a formulação dos indicadores e das estimativa propostas em [37], introduzimos as notações, η_k^{HHSS} e η^{HHSS} , respectivamente, em menção ao sobrenome dos autores. De forma análoga, denotamos o indicador e a estimativa proposta em [35] por η_k^{HGS} e η^{HGS} . O novo indicador que propomos e sua respectiva estimativa são denotados por μ_k e μ .

Para evidenciar as diferenças e simplificar a apresentação de cada indicador de erro η_k , vamos expressá-lo como a soma de três partes, cada uma associada a um tipo de região de integração, denotadas pelos sobrescritos i , b e f , precisamente

$$\eta_k = \eta_k^i + \eta_k^b + \eta_k^f. \quad (5.1)$$

A parcela η_k^i refere-se aos termos sobre o interior dos elementos, η_k^b está associada aos

termos sobre faces do elemento que estão na fronteira do domínio e η_k^f representa os termos sobre as faces interiores de k . Nos três indicadores, as parcelas η_k^i e η_k^b são iguais, como já mencionamos o que os diferencia são as parcelas sobre as faces, η_k^f .

5.1 Indicadores para a equação de Difusão-Advecção-Reação

Com base no estudo apresentado no Capítulo 4, começamos a construção das estimativas e dos indicadores de erro *a posteriori goal-oriented* para a equação de difusão-advecção-reação lembrando o problema dual ao problema (2.13): encontrar $w \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$ tal que

$$B_2(v, w) = J(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}). \quad (5.2)$$

A consistência do problema (5.2) depende apenas da escolha do funcional $J(\cdot)$ pois usa a mesma forma bilinear de (2.13). Vamos assumir que $J(\cdot)$ é linear e limitado e, portanto, um elemento do dual de $H^2(\Omega, \mathcal{T})$.

Sobre cada elemento $k \in \mathcal{T}$ é possível determinar o resíduo da aproximação. Esse resíduo serve para medir o quanto u_{DG} falha em satisfazer a equação diferencial sobre os elementos k . Chamamos esses resíduos de resíduos internos e os definimos como,

$$R_{int}(u_{DG})|_k = (f + \nabla \cdot \mathbf{a} \nabla u_{DG} - \nabla \cdot (\mathbf{b} u_{DG}) - c u_{DG})|_k, \quad \forall k \in \mathcal{T}. \quad (5.3)$$

As condições de contorno (2.2) e (2.3) fornecem os valores que a solução forte ou seu gradiente normal às faces de contorno devem satisfazer na fronteira de Ω , porém u_{DG} aproxima apenas de maneira fraca as condições de contorno. Assim, existem resíduos das aproximações sobre as fronteiras Γ_D e Γ_N e os definimos como

$$R_D(u_{DG})|_{\partial k \cap \Gamma_D} = (g_D - u_{DG})|_{\partial k \cap (\Gamma_D \cup \Gamma_-)} \quad (5.4)$$

e

$$R_N(u_{DG})|_{\partial k \cap \Gamma_N} = (g_N - (\mathbf{a} \nabla u_{DG}) \cdot \mathbf{n})|_{\partial k \cap \Gamma_N}. \quad (5.5)$$

Usando a definição do problema dual (5.2), denotando por w sua solução, usando a bilinearidade e a definição de $B_2(\cdot, \cdot)$ e dos resíduos acima, além das fórmulas (2.6) e (2.7), obtemos a seguinte representação para o erro em $J(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
J(e) &= B_2(u - u_{DG}, w) = B_2(u, w) - B_2(u_{DG}, w) = l(w) - B_2(u_{DG}, w) \\
&= \sum_k \int_k R_{int}(u_{DG})w dx + \int_{\Gamma_N} R_N(u_{DG})w ds + \int_{\Gamma_D} (-\mathbf{a}\nabla w \cdot \mathbf{n} + \sigma w)R_D(u_{DG})ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_{int}} \{w\}[\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}]ds - \int_{\Gamma_{int}} (-\{\mathbf{a}\nabla w \cdot \mathbf{n}\} + \sigma[w])[u_{DG}]ds \\
&\quad + \sum_k \left(- \int_{\partial_- k \cap \partial\Omega} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})R_D(u_{DG})w^+ ds + \int_{\partial_- k \cap \Gamma_{int}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)[u_{DG}]w^+ ds \right). \tag{5.6}
\end{aligned}$$

De forma análoga, usando a ortogonalidade de Galerkin $B_2(u - u_{DG}, w_{DG}) = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
J(e) &= \sum_k \int_k R_{int}(u_{DG})(w - w_{DG})dx \\
&\quad + \int_{\Gamma_N} R_N(u_{DG})(w - w_{DG})ds + \int_{\Gamma_D} (-\mathbf{a}\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n} + \sigma(w - w_{DG}))R_D(u_{DG})ds \\
&\quad - \int_{\Gamma_{int}} \{w - w_{DG}\}[\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}]ds - \int_{\Gamma_{int}} (-\{\mathbf{a}\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}\} + \sigma[w - w_{DG}])[u_{DG}]ds \\
&\quad + \sum_k \left(- \int_{\partial_- k \cap \partial\Omega} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})R_D(u_{DG})(w - w_{DG})^+ ds + \int_{\partial_- k \cap \Gamma_{int}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)[u_{DG}](w - w_{DG})^+ ds \right). \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Como a dependência da solução forte u foi eliminada no lado direito de (5.6) e de (5.7), dependemos apenas de w para determinar o erro no funcional. Se w fosse conhecida *a priori*, o erro $J(e)$ seria conhecido exatamente. Porém, não conhecemos w e, assim, temos a opção de aproximar w de alguma forma e obter uma estimativa para o erro no funcional $J(\cdot)$. É importante observar que a aproximação de w usada para obter a estimativa não pode estar contida em $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, devido à ortogonalidade (2.22).

Para transformar essa estimativa em indicadores de erro, precisamos decompor o erro $J(e)$ em contribuições η_k associadas a cada elemento k , de forma que

$$J(e) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \eta_k. \tag{5.8}$$

Como já mencionamos, cada indicador η_k será expresso como a soma de três partes associadas aos três tipos de região de integração possíveis, ou seja,

$$\eta_k = \eta_k^i + \eta_k^b + \eta_k^f. \quad (5.9)$$

Usando a representação (5.7), as escolhas de η_k^i e η_k^b são evidentes, pelo tipo de região de integração,

$$\eta_k^i(u_{DG}, w - w_{DG}) = \int_k R_{int}(u_{DG})(w - w_{DG})dx, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \eta_k^b(u_{DG}, w - w_{DG}) &= \int_{\partial k \cap \Gamma_N} R_N(u_{DG})(w - w_{DG})ds - \int_{\partial_{-k} \cap \partial\Omega} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})R_D(u_{DG})(w - w_{DG})^+ ds \\ &+ \int_{\partial k \cap \Gamma_D} (-\mathbf{a}\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n} + \sigma(w - w_{DG}))R_D(u_{DG})ds. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Observa-se em (5.7), e analogamente em (5.6), que, com exceção das integrais envolvendo o termo convectivo, as integrais sobre Γ_{int} têm como integrandos as médias de $w - w_{DG}$ ou de $\mathbf{a}\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}$, multiplicadas por saltos de $\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}$ ou de u_{DG} . A decomposição dessas integrais é que determina a forma de cada indicador. Como a soma sobre todos os elementos não depende da decomposição aplicada a essas integrais, as estimativas obtidas da soma dos indicadores de erro resultam iguais para todos os indicadores.

5.1.1 Indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS}

O indicador apresentado em [37], que denotamos pelo sobreescrito *HHSS*, decompõe essas integrais da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{int}} \{w - w_{DG}\} [\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] ds &= \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_{\partial k \cap \Gamma_{int}} \frac{1}{2}(w - w_{DG})|_k [\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] ds, \\ \int_{\Gamma_{int}} \{\mathbf{a}\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}\} [u_{DG}] ds &= \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_{\partial k \cap \Gamma_{int}} \frac{1}{2}(\mathbf{a}\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n})|_k [u_{DG}] ds. \end{aligned}$$

Além disso, a integral relativa a penalização é decomposta como descrito abaixo

$$\int_{\Gamma_{int}} \sigma[w - w_{DG}][u_{DG}]ds = \sum_{k \in \mathcal{T}} \int_{\partial k \cap \Gamma_{int}} \sigma(w - w_{DG})[u_{DG}](\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k)ds.$$

Dessa forma, a parcela sobre as faces interiores do indicador η_k^{HHSS} é

$$\begin{aligned}
\eta_k^{f,HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG}) = & \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cap \partial k} \left(- \int_{\gamma} \frac{1}{2} (w - w_{DG}) \Big|_k [\mathbf{a} \nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] ds \right. \\
& + \int_{\gamma} \frac{1}{2} (\mathbf{a} \nabla (w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}) \Big|_k [u_{DG}] ds \\
& \left. - \int_{\gamma} \sigma \frac{1}{2} (w - w_{DG}) \Big|_k [u_{DG}] ds \right) \\
& + \int_{\partial_{-k} \cap \Gamma_{int}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k) [u_{DG}] (w - w_{DG}) \Big|_k ds. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Portanto, o indicador $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG})$ é definido como

$$\begin{aligned}
\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG}) = & \eta_k^i(u_{DG}, w - w_{DG}) + \eta_k^b(u_{DG}, w - w_{DG}) \\
& + \eta_k^{f,HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG}). \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Embora tenhamos focado na forma como os termos sobre as faces interiores são distribuídos para apresentar o indicador η_k^{HHSS} , não foi a forma de distribuição desses termos que motivou esse formato para o indicador e sim a manutenção da ortogonalidade como uma propriedade local, sobre cada elemento, além de global.

O segundo indicador que estudamos, apresentado em [35], e que denotamos por η_k^{HGS} , aplica a equidistribuição das integrais sobre as faces interiores, exceto as que envolvem o termo convectivo, entre os elementos que formam cada face. Assim metade do valor da integral é atribuído a cada um dos elementos que formam a face, como descrito abaixo

$$\begin{aligned}
\eta_k^{f,HGS}(u_{DG}, w - w_{DG}) = & \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cap \partial k} \left(- \frac{1}{2} \int_{\gamma} \{(w - w_{DG})\} [\mathbf{a} \nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] ds \right. \\
& + \frac{1}{2} \int_{\gamma} \{\mathbf{a} \nabla (w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}\} [u_{DG}] ds \\
& \left. - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \sigma [w - w_{DG}] [u_{DG}] ds \right) \\
& + \int_{\partial_{-k} \cap \Gamma_{int}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k) [u_{DG}] (w - w_{DG}) \Big|_k ds. \tag{5.14}
\end{aligned}$$

Assim, o indicador η_k^{HGS} é definido por

$$\begin{aligned} \eta_k^{HGS}(u_{DG}, w - w_{DG}) &= \eta_k^i(u_{DG}, w - w_{DG}) + \eta_k^b(u_{DG}, w - w_{DG}) \\ &\quad + \eta_k^{f,HGS}(u_{DG}, w - w_{DG}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

A decomposição dos termos sobre as faces interiores aplicada no indicador η_k^{HGS} é a opção mais simples possível e envolve o traço das soluções e aproximações, primal e dual, de todos os elementos que formam a face, ou seja, o indicador η_k^{HGS} tem grande dependência dos elementos vizinhos de k .

No indicador η_k^{HHSS} essa dependência ocorre apenas com relação à aproximação primal, u_{DG} . Inclusive, este fato é o motivo da manutenção local da ortogonalidade de Galerkin em η_k^{HHSS} , pois a ortogonalidade vale globalmente, isto é,

$$\sum_{k \in \mathcal{T}} \eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{hp}) = 0, \quad \forall w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) \quad (5.16)$$

e sobre cada elemento $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{hp})$ depende apenas dos valores de w_{hp} e suas derivadas sobre k . Logo

$$\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{hp}) = 0 \quad \forall k \in \mathcal{T} \text{ e } \forall w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \quad (5.17)$$

Assim, a filosofia por trás do indicador η_k^{HHSS} é que se $J(e) = B_2(e, w - w_{hp})$ e B_2 satisfaz a ortogonalidade de e com o espaço $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, então o indicador de erro deve manter essa propriedade.

Em [37], os autores usam a aproximação w_{DG} em seu indicador, o que representa um custo computacional desnecessário, uma vez que a ortogonalidade vale localmente.

Dessa argumentação, fica evidente que a ortogonalidade não é válida como uma propriedade local para o indicador η_k^{HGS} , embora continue válida globalmente.

5.1.2 Nova proposta de indicador μ_k

Propomos uma terceira forma de distribuição para os termos de interface que conduz a um novo indicador de erros, o qual denotamos por μ_k . Antes de apresentar o novo indicador, vamos fazer algumas observações que são importantes em sua dedução.

Em uma situação ótima, w pertence a $H^2(\Omega)$ e temos a continuidade de w e de $\nabla w \cdot \mathbf{n}_\gamma$ sobre cada face interior γ . Logo, as médias que surgem nos termos sobre as faces interiores, discutidos anteriormente, perdem seu significado e passam a ser as próprias funções. Observamos ainda que, sob essa condição ótima de w , as estimativas $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w)$ tornam-se iguais.

Sob essa ótica, parece interessante que as médias de w e $\nabla w \cdot \mathbf{n}$ sejam mantidas na decomposição do indicador, pois o ótimo seria ter a continuidade de w e $\nabla w \cdot \mathbf{n}$, mas caso essas continuidades não sejam verificadas sobre as faces, w e $\nabla w \cdot \mathbf{n}$ são aproximados pelas médias de seus respectivos traços.

A segunda observação é que, embora a solução dual w seja fundamental nas identidades (5.6) e (5.7), que são a base das estimativas e indicadores de erro, o erro que se mede é um erro na aproximação do problema primal. Apesar disso, em nenhum momento os indicadores η_k^{HSS} e η_k^{HGS} tomam o cuidado de distribuir os erros associados à u_{DG} de forma precisa entre os elementos. Os saltos de u_{DG} e de $\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}$ sobre as faces interiores contém informação sobre o erro de, no mínimo, dois elementos.

A terceira e última observação combina as duas anteriores. Isto é, na condição ideal de suavidade de w devemos decompor as integrais entre os elementos

$$\int_{\Gamma_{int}} w [\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] ds \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_{int}} \mathbf{a}\nabla w \cdot \mathbf{n} [u_{DG}] ds. \quad (5.18)$$

As possibilidades para isso são dividir os termos em alguma proporção, como η_k^{HGS} , ou decompor os saltos somando e subtraindo uma função.

O novo indicador de erros que propomos considera a distribuição dos termos abrindo os saltos em questão. Vamos considerar mais uma situação ideal, apenas para dar forma ao indicador, em que a solução primal u é conhecida sobre as faces interiores. Somando e subtraindo u e $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ nos saltos temos

$$[u_{DG}] = (u_{DG}|_{k_i} - u_{DG}|_{k_j}) = (u_{DG}|_{k_i} - u) + (u - u_{DG}|_{k_j}) \quad (5.19)$$

e

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] &= (\mathbf{a}\nabla(u_{DG})|_{k_i} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{a}\nabla u \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{a}\nabla u \cdot \mathbf{n} - \mathbf{a}\nabla(u_{DG})|_{k_j} \cdot \mathbf{n}) \\ &= (\mathbf{a}\nabla(u - u_{DG})|_{k_i} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{a}\nabla(u - u_{DG})|_{k_j} \cdot \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Assim, propomos a seguinte distribuição para os termos sobre as faces interiores, com excessão dos termos que envolvem a advecção,

$$\int_{\Gamma_{int}} \{w\} [\mathbf{a}\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}_\gamma] ds = - \sum_k \int_{\partial k \cap \Gamma_{int}} \{w\} (\mathbf{a}\nabla(u - u_{DG}|_k) \cdot \mathbf{n}_k) ds, \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_{int}} (-\{\mathbf{a}\nabla w \cdot \mathbf{n}\} + \sigma[w])[u_{DG}]ds &= \sum_k \int_{\partial k \cap \Gamma_{int}} \{\mathbf{a}\nabla w \cdot \mathbf{n}_k\}(u - u_{DG})|_k ds \\
&\quad - \int_{\partial k \cap \Gamma_{int}} \sigma[w](u - u_{DG})|_k (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k) ds. \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Observe que o ajuste de sinais é feito usando os vetores normais às faces dependentes da numeração dos elementos e os vetores normais exteriores a cada elemento.

Assim, a parte do indicador μ_k que diz respeito às faces interiores é definido por

$$\begin{aligned}
\mu_k^f(u_{DG}, u, w) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cap \partial k} \left(- \int_{\gamma} \{w\} \nabla(u_{DG}|_k - u) \cdot \mathbf{n}_k ds \right. \\
&\quad + \int_{\gamma} \{\nabla(w) \cdot \mathbf{n}_k\} (u_{DG}|_k - u) ds \\
&\quad - \int_{\gamma} \sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k)[w](u_{DG}|_k - u) ds \Big) \\
&\quad + \int_{\partial_{-k} \cap \Gamma_{int}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k)[u_{DG}](w)^+ ds. \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Consequentemente, o indicador de erros μ_k é definido por

$$\mu_k(u_{DG}, u, w) = \eta_k^i(u_{DG}, w) + \eta_k^b(u_{DG}, w) + \mu_k^f(u_{DG}, u, w). \tag{5.24}$$

Como a manutenção da ortogonalidade não foi relevante para a dedução de μ_k , e para simplificar a apresentação, usamos apenas w nos termos discutidos. Porém, a versão com a ortogonalidade é totalmente análoga e resulta no indicador $\mu_k(u_{DG}, u, w - w_{DG})$.

A exemplo de η_k^{HGS} , o indicador μ_k não preserva a ortogonalidade sobre cada elemento, característica da a forma bilinear.

A estratégia por trás da formulação do indicador μ_k pode ser entendida no seguinte resultado.

Teorema 6. *Sejam $w \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$ solução do problema dual, $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T})$ solução do problema primal, u_{DG} aproximação DGFEM do problema primal e $J(\cdot)$ é um funcional linear e limitado da forma $J(u) = \int_{\Omega} \Psi u d\Omega$. Se $w \in H^2(\Omega)$, então*

$$(J(u) - J(u_{DG}))|_k = \mu_k(u_{DG}, u, w). \tag{5.25}$$

A demonstração do Teorema 6, segue de verificar que se considerarmos cada elemento k

como se fora todo o domínio a forma da estimativa para $J(u) - J(u_{DG})$ é igual ao indicador μ_k . Em particular a solução u faz o papel de condição de contorno para o indicador μ_k . Esse resultado significa que o indicador $\mu_k(u_{DG}, u, w)$ é localmente eficiente na estimação do erro $J(e)$.

Obviamente, a solução u não é conhecida *a priori*, assim como w . Portanto, ambas precisam ser substituídas por aproximações u^+ e w^+ , em que w^+ não pode pertencer a $S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$.

5.2 Indicadores para a equação biharmônica

Nesta seção apresentamos três indicadores de erros, que mantêm os formatos análogos aos indicadores apresentados na seção anterior e, para os quais, adotamos as mesmas notações, η_k^{HHSS} , η_k^{HGS} e μ_k .

Como a equação biharmônica é elíptica de forma pura, sem advecção ou reação, não são definidas faces de entrada e saída de fluxo no elemento, deixando a apresentação dos termos mais simples. Por outro lado, como se trata de uma equação de quarta ordem, a quantidade de termos sobre as faces é maior, assim como a ordem das derivadas envolvidas nos integrandos desses termos.

A descrição dos indicadores é simplificada graças à analogia com a descrição dos indicadores para a equação de difusão-advecção-reação, da seção anterior.

Com base na teoria apresentada no Capítulo 4, estabelecemos o seguinte problema dual: encontrar $w \in H^4(\Omega, \mathcal{T})$ tal que

$$B_4(v, w) = J(v) \quad \forall v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}). \quad (5.26)$$

Para que o problema dual (5.26) tenha as mesmas condições de consistência que o problema primal, assumimos que o funcional $J(\cdot)$ é linear e limitado e portanto um elemento do dual de $H^4(\Omega, \mathcal{T})$.

Os resíduos da aproximação primal sobre os elementos da partição são definidos por

$$R_{int}(u_{DG})|_k = (f - \Delta^2 u_{DG})|_k, \quad \forall k \in \mathcal{T}. \quad (5.27)$$

Lembramos que o problema de valor de contorno associado à equação biharmônica, com condições de contorno essenciais, impõe duas condições sobre cada face de contorno. Como essas condições são impostas de forma fraca, definimos os seguintes resíduos sobre as faces da fronteira

$$R_{D1}(u_{DG})|_{\partial k \cap \Gamma} = (g_0 - u_{DG})|_{\partial k \cap \Gamma} \quad (5.28)$$

e

$$R_{D2}(u_{DG})|_{\partial k \cap \Gamma} = (g_1 - \mathbf{n} \cdot \nabla u_{DG})|_{\partial k \cap \Gamma}. \quad (5.29)$$

Usando o problema dual (5.26), sendo w sua solução, as fórmulas (3.4) e (3.5) e a relação (4.7), obtemos:

$$\begin{aligned} J(e) = & \sum_k \int_k R_{int}(u_{DG}) w \, dx + \int_{\Gamma_{int}} [\nabla \Delta u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \{w\} \, ds - \int_{\Gamma_{int}} [\Delta u_{DG}] \{\nabla w \cdot \mathbf{n}\} \, ds \\ & - \int_{\Gamma_{int}} \{\nabla \Delta w \cdot \mathbf{n}\} [u_{DG}] \, ds + \int_{\partial \Omega} \nabla \Delta w \cdot \mathbf{n} R_{D1}(u_{DG}) \, ds + \int_{\Gamma_{int}} \{\Delta w\} [\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \, ds \\ & - \int_{\partial \Omega} \Delta w R_{D2}(u_{DG}) \, ds - \int_{\Gamma} \alpha [u_{DG}] [w] \, ds - \int_{\Gamma} \beta [\mathbf{n} \cdot \nabla u_{DG}] [\mathbf{n} \cdot \nabla w] \, ds. \end{aligned} \quad (5.30)$$

De forma análoga, porém usando (4.10) ao invés de (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} J(e) = & \sum_k \int_k R_{int}(u_{DG}) (w - w_{DG}) \, dx + \int_{\Gamma_{int}} [\nabla \Delta u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \{w - w_{DG}\} \, ds \\ & - \int_{\Gamma_{int}} [\Delta u_{DG}] \{\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}\} \, ds - \int_{\Gamma_{int}} \{\nabla \Delta(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}\} [u_{DG}] \, ds \\ & + \int_{\partial \Omega} \nabla \Delta(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n} R_{D1}(u_{DG}) \, ds + \int_{\Gamma_{int}} \{\Delta(w - w_{DG})\} [\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \, ds \\ & - \int_{\partial \Omega} \Delta(w - w_{DG}) R_{D2}(u_{DG}) \, ds - \int_{\Gamma} \alpha [u_{DG}] [w - w_{DG}] \, ds \\ & - \int_{\Gamma} \beta [\mathbf{n} \cdot \nabla u_{DG}] [\mathbf{n} \cdot \nabla(w - w_{DG})] \, ds. \end{aligned} \quad (5.31)$$

As identidades (5.30) e (5.31) são a base para as estimativas e indicadores que propomos para a equação biharmônica.

Assim como observamos para a equação de difusão-advecção-reação, com excessão dos termos envolvendo advecção, os termos sobre as faces interiores são integrais de médias de w ou de suas derivadas multiplicados pelos saltos de u_{DG} ou de suas derivadas. Logo, as formas de distribuir esses termos entre os elementos, que deram origem aos três indicadores, da seção anterior, podem ser estendidas de forma análoga para esta seção.

A exemplo da seção anterior, vamos considerar os indicadores como a soma de três partes, relativas aos diferentes tipos de contribuição: η_k^i , relativa às integrais sobre o elemento k , η_k^b relativa às integrais sobre faces de contorno que pertençam a ∂k , e η_k^f que diz respeito às

integrais sobre faces interiores que pertençam a ∂k .

As duas primeiras partes estão bem caracterizadas, pois os termos sobre cada uma dessas regiões estão estritamente relacionados a apenas um elemento k . Logo, os termos η_k^i e η_k^b são os mesmos para todos os indicadores e são definidos como

$$\eta_k^i(u_{DG}, w - w_{DG}) = \int_k R_{int}(u_{DG}) (w - w_{DG}) dx \quad (5.32)$$

e

$$\begin{aligned} \eta_k^b(u_{DG}, w - w_{DG}) &= \int_{\partial\Omega \cap \partial k} \nabla \Delta(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n} R_{D1}(u_{DG}) ds \\ &\quad - \int_{\partial\Omega \cap \partial k} \Delta(w - w_{DG}) R_{D2}(u_{DG}) ds \\ &\quad - \int_{\partial\Omega \cap \partial k} \alpha R_{D1}(u_{DG}) [w - w_{DG}] ds \\ &\quad - \int_{\partial\Omega \cap \partial k} \beta R_{D2}(u_{DG}) [\mathbf{n} \cdot \nabla(w - w_{DG})] ds. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Conforme já mencionamos, os indicadores que apresentamos diferem pela forma como distribuímos os termos sobre as faces interiores entre os elementos que formam cada face.

5.2.1 Indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS}

Estendendo o indicador apresentado em [37], de problemas de segunda ordem para a problemas de quarta ordem, consideramos o indicador

$$\begin{aligned} \eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG}) &= \eta_k^i(u_{DG}, w - w_{DG}) + \eta_k^b(u_{DG}, w - w_{DG}) \\ &\quad + \eta_k^{f,HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG}) \end{aligned} \quad (5.34)$$

em que

$$\begin{aligned}
\eta_k^{f,HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG}) &= \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [\nabla \Delta u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \frac{1}{2} (w - w_{DG})|_k ds \\
&- \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [\Delta u_{DG}] \frac{1}{2} \nabla (w - w_{DG})|_k \cdot \mathbf{n} ds \\
&- \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [u_{DG}] \frac{1}{2} \nabla \Delta (w - w_{DG})|_k \cdot \mathbf{n} ds \\
&+ \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \frac{1}{2} \Delta (w - w_{DG})|_k ds \\
&- \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \alpha [u_{DG}] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k) (w - w_{DG})|_k ds \\
&- \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \beta [\mathbf{n} \cdot \nabla u_{DG}] (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k) \mathbf{n} \cdot \nabla (w - w_{DG})|_k ds. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

Observamos que, valendo a ortogonalidade $B_4(e, w_{hp}) = 0, \forall w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, temos que

$$\sum_{k \in \mathcal{T}} \eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{hp}) = 0, \forall w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}). \tag{5.36}$$

E como $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{hp})$ só depende de valores de w_{hp} sobre o elemento k , concluímos que

$$\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{hp}) = 0, \forall w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) \text{ e } \forall k \in \mathcal{T}. \tag{5.37}$$

Assim, a exemplo do que acontece para a equação de difusão-advecção-reação, o indicador η_k^{HHSS} mantém a ortogonalidade da forma bilinear, local e globalmente.

O segundo indicador que apresentamos, denotado por η_k^{HGS} , é a extensão do indicador apresentado em [35], de equações de segunda ordem para equações de quarta ordem. Conforme discutimos na seção anterior, o que caracteriza η_k^{HGS} é a equidistribuição dos termos sobre as faces interiores, entre os indicadores dos elementos que formam a face.

Definimos η_k^{HGS} por

$$\begin{aligned}
\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w - w_{DG}) &= \eta_k^i(u_{DG}, w - w_{DG}) + \eta_k^{bc}(u_{DG}, w - w_{DG}) \\
&+ \eta_k^{f,HGS}(u_{DG}, w - w_{DG}) \tag{5.38}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\eta_k^{f,HGS}(u_{DG}, w - w_{DG}) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [\nabla \Delta u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \{w - w_{DG}\} ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [\Delta u_{DG}] \{\nabla(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}\} ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [u_{DG}] \{\nabla \Delta(w - w_{DG}) \cdot \mathbf{n}\} ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} [\nabla u_{DG} \cdot \mathbf{n}] \{\Delta(w - w_{DG})\} ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \alpha [u_{DG}] [w - w_{DG}] ds \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \beta [\mathbf{n} \cdot \nabla u_{DG}] [\mathbf{n} \cdot \nabla(w - w_{DG})] ds. \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Observamos que se $w \in H^4(\Omega)$ então

$$\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w) = \eta_k^{HGS}(u_{DG}, w), \quad \forall k \in \mathcal{T}. \tag{5.40}$$

Porém, para $w_{hp} \in S^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ em geral

$$\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{hp}) \neq \eta_k^{HGS}(u_{DG}, w_{hp}). \tag{5.41}$$

Ou seja, na situação ideal, em que a solução forte do problema dual w é conhecida, os indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} são idênticos. Porém, as formas como são feitas a manutenção da ortogonalidade são diferentes, fato esse que os diferencia.

5.2.2 Indicador μ_k

Seguindo as idéias que nos conduzem ao novo indicador apresentado na Seção 5.1, propomos aqui um novo indicador de erros, denotado também por μ_k , para a aproximação de funcionais da equação biharmônica. Supondo que u , $\nabla u \cdot \mathbf{n}$, Δu e $\nabla \Delta u \cdot \mathbf{n}$ têm traços contínuos sobre as faces interiores, definimos o indicador por

$$\mu_k(u_{DG}, u, w) = \eta_k^i(u_{DG}, w) + \eta_k^b(u_{DG}, w) + \mu_k^f(u_{DG}, u, w) \tag{5.42}$$

em que

$$\begin{aligned}
\mu_k^f(u_{DG}, u, w) = & - \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \nabla \Delta(u - u_{DG})|_k \cdot \mathbf{n}_k \{w\} ds + \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \Delta(u - u_{DG})|_k \{\nabla w \cdot \mathbf{n}_k\} ds \\
& + \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} (u - u_{DG})|_k \{\nabla \Delta w \cdot \mathbf{n}_k\} ds - \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \nabla(u - u_{DG})|_k \cdot \mathbf{n}_k \{\Delta w\} ds \\
& + \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k)(u - u_{DG})|_k [w] ds + \int_{\Gamma_{int} \cap \partial k} \beta \mathbf{n}_k \cdot \nabla(u - u_{DG})|_k [\mathbf{n} \cdot \nabla w] ds.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Observe que os sinais são ajustados usando \mathbf{n} e \mathbf{n}_k e que a dependência do indicador de u ocorre apenas sobre as faces interiores.

Teorema 7. *Sejam $w \in H^4(\Omega, \mathcal{T})$ solução do problema dual, $u \in H^4(\Omega, \mathcal{T})$ solução do problema primal, u_{DG} aproximação DGFEM do problema dual e $J(\cdot)$ um funcional linear e limitado da forma $J(u) = \int_{\Omega} \Psi u d\Omega$. Se $w \in H^4(\Omega)$, então*

$$|J(u) - J(u_{DG})|_k = \mu_k(u_{DG}, u, w), \quad \forall k \in \mathcal{T}. \tag{5.44}$$

Esse resultado mostra que, embora u e w não sejam conhecidas *a priori*, o formato de μ_k sugere a obtenção de eficiência local.

Teorema 8. *Seja $w \in H^4(\Omega, \mathcal{T})$ solução do problema dual e u_{DG} é a aproximação DGFEM para o problema primal. Se $w \in H^4(\Omega)$, então*

$$\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w) = \mu_k(u_{DG}, \{u_{DG}\}, w), \quad \forall k \in \mathcal{T}. \tag{5.45}$$

5.3 Exemplos ilustrativos

Nesta seção apresentamos resultados numéricos de experimentos, construídos de forma que as soluções exatas sejam conhecidas, com o objetivo de exemplificar as propriedades, diferenças e semelhanças dos indicadores de erro apresentados nas duas seções anteriores.

Para cada indicador de erro definido podemos estabelecer uma estimativa de erro. O tradicional é que a estimativa apresentada seja uma cota superior para o erro. Nesse sentido, considerando um indicador η_k , as estimativas mais comuns são das formas

$$|J(e)| \leq \sum_{k \in \mathcal{T}} |\eta_k| \quad \text{ou} \quad |J(e)| \leq \left(\sum_{k \in \mathcal{T}} |\eta_k|^2 \right)^{1/2}. \tag{5.46}$$

Como a norma 2 de \mathbb{R}^n é menor ou igual que a norma 1, a segunda estimativa é mais precisa.

Porém, como os indicadores que apresentamos dependem de w e, na prática, w é substituído por uma aproximação w^+ , não podemos mais garantir que estas estimativas são cotas superiores, pois passam a depender de w^+ e do funcional $J(\cdot)$, além dos outros dados do problema.

Assim optamos por tomar estimativas na forma,

$$J(e) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \eta_k(u_{DG}, w) \approx \sum_{k \in \mathcal{T}} \eta_k(u_{DG}, w^+), \quad (5.47)$$

que, a exemplo das estimativas tradicionais, pode não ser uma cota superior na prática. Assim definimos as seguintes estimativas para o erro $J(e)$,

$$J(e) \approx \eta^{HHSS}(u_{DG}, w^+) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+), \quad (5.48)$$

$$J(e) \approx \eta^{HGS}(u_{DG}, w^+) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+), \quad (5.49)$$

e

$$J(e) \approx \mu(u_{DG}, u^+, w^+) = \sum_{k \in \mathcal{T}} \mu_k(u_{DG}, u^+, w^+). \quad (5.50)$$

A eficiência de uma estimativa η é analisada através do índice de eficiência, definido pela razão

$$IE = \frac{\eta}{J(e)}. \quad (5.51)$$

Nos experimentos apresentados nessa seção usamos aproximações DGFEM obtidas sobre espaços com graus polinomiais iguais para todos os elementos, ou seja p -uniforme. As aproximações w^+ e u^+ , que substituem w e u , são aproximações DGFEM obtidas em espaços com mesma malha que os espaços de u_{DG} e w_{DG} , porém com graus polinomiais enriquecidos com relação aos graus desses espaços.

Estabelecemos a notação $\eta_k(p, q)$ para o indicador η_k cujas aproximações u_{DG} e w^+ foram obtidas em espaços de aproximação de ordens p e q , respectivamente. No caso do indicador μ_k , que requer uma aproximação u^+ , a notação será $\mu_k(p, r, q)$, com p e q associados as aproximações u_{DG} e w^+ , enquanto o segundo parâmetro, r , diz respeito à ordem polinomial da aproximação u^+ . Lembramos que u^+ é usada apenas sobre as faces interiores. Como u^+ é uma aproximação DGFEM, pode ser descontínua nas faces interiores, logo tomamos sua

média. Precisamente, o termo μ_k^f em (5.23) se transforma em

$$\begin{aligned}
\mu_k^f(u_{DG}, u^+, w) = & \sum_{\gamma \in \Gamma_{int} \cap \partial k} \left(- \int_{\gamma} \{w\} \mathbf{a} \nabla (u_{DG}|_k - \{u^+\}) \cdot \mathbf{n}_k ds \right. \\
& + \int_{\gamma} \{\mathbf{a} \nabla(w) \cdot \mathbf{n}_k\} (u_{DG}|_k - \{u^+\}) ds \\
& - \int_{\gamma} \sigma(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_k) [w] (u_{DG}|_k - \{u^+\}) ds \Big) \\
& + \int_{\partial_{-k} \cap \Gamma_{int}} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_k) [u_{DG}] (w)^+ ds. \tag{5.52}
\end{aligned}$$

Observamos que essa substituição de u pela média $\{u^+\}$ não afeta a eficiência global de μ_k , pois os termos correspondentes são somados e subtraídos em cada face.

Analogamente, o mesmo tipo de correção é feito no termo de face do indicador para a equação Biharmônica.

Nos indicadores, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, que usam a propriedade de ortogonalidade na sua dedução, o grau polinomial associado a w_{DG} é p , obviamente. Porém, para diferenciar o uso ou não da função w_{DG} , indicamos o grau $q - p$, na posição associada ao grau dos espaços usados para as aproximações duais.

5.3.1 Resultados para a equação de Difusão-Advecção-Reação

Experimento 1

Nesse experimento consideramos a equação de Poisson,

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, \tag{5.53}$$

que é um caso particular da equação de segunda ordem discutida neste trabalho, em que assumimos $\mathbf{a}(x)$ como o tensor identidade, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ e $c(x) = 0$.

O domínio é $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, com condições de contorno de Dirichlet e a função de carga f correspondentes a solução exata $u = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y)$. Em todos os testes apresentados os espaços de aproximação são de grau polinomial constante, sendo que u_{DG} é de grau 2 e u^+ e w^+ variam entre os graus 4, 5 e 6.

A quantidade de interesse é a média da solução primal u sobre todo o domínio Ω , ponde-

rada por Δw , a qual representamos pelo funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} \Delta(w)u \, dx dy, \quad (5.54)$$

em que $w = \sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y)$. Desta forma, o problema dual associado a J , com condições de contorno Dirichlet homogêneas, tem w como solução exata e é consistente com o problema primal.

A Figura 5.1 mostra o comportamento do erro e de suas estimativas, em função do número de graus de liberdade, para diferentes configurações das funções enriquecidas u^+ e w^+ . Vemos que todas as estimativas são muito próximas e muito eficientes ao estimar o erro $J(e)$, globalmente. Essa proximidade e grande eficiência das estimativas são consequência da suavidade das soluções.

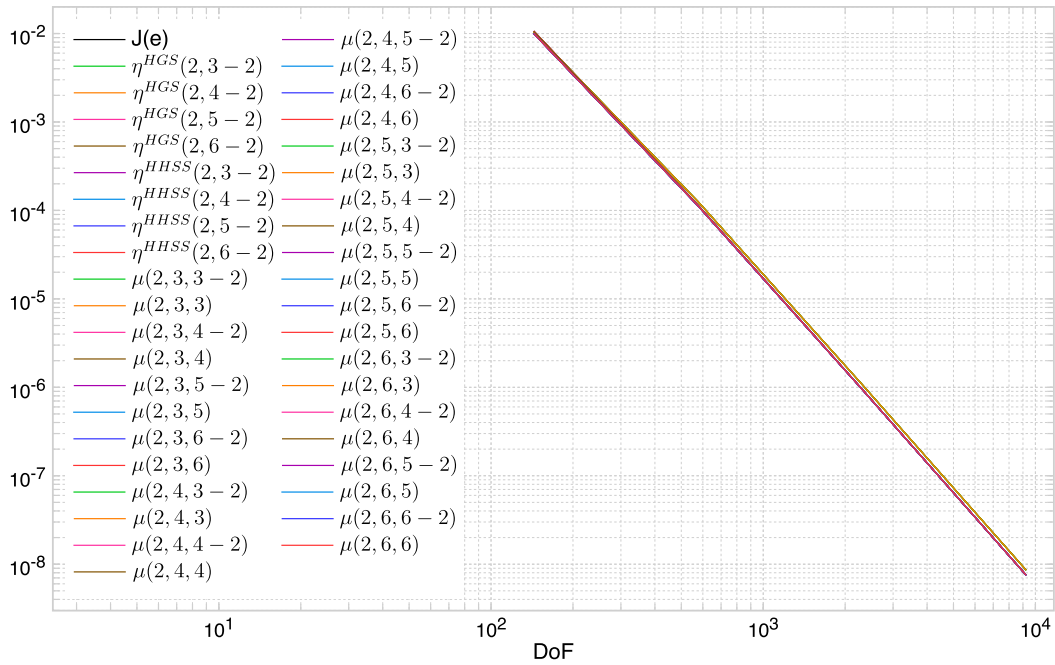


Figura 5.1: Erro $J(e)$ e as estimativas η^{HHSS} , η^{HGS} e μ com diversas configurações para w^+ e u^+ .

Definindo o erro sobre cada elemento

$$J(e)|_k = \int_k \Delta w(u - u_{DG}) dk, \quad (5.55)$$

fazemos a seguir uma análise mais direta comparando esses valores com os indicadores em cada elemento, com o objetivo de avaliar melhor as propriedades de cada indicador.

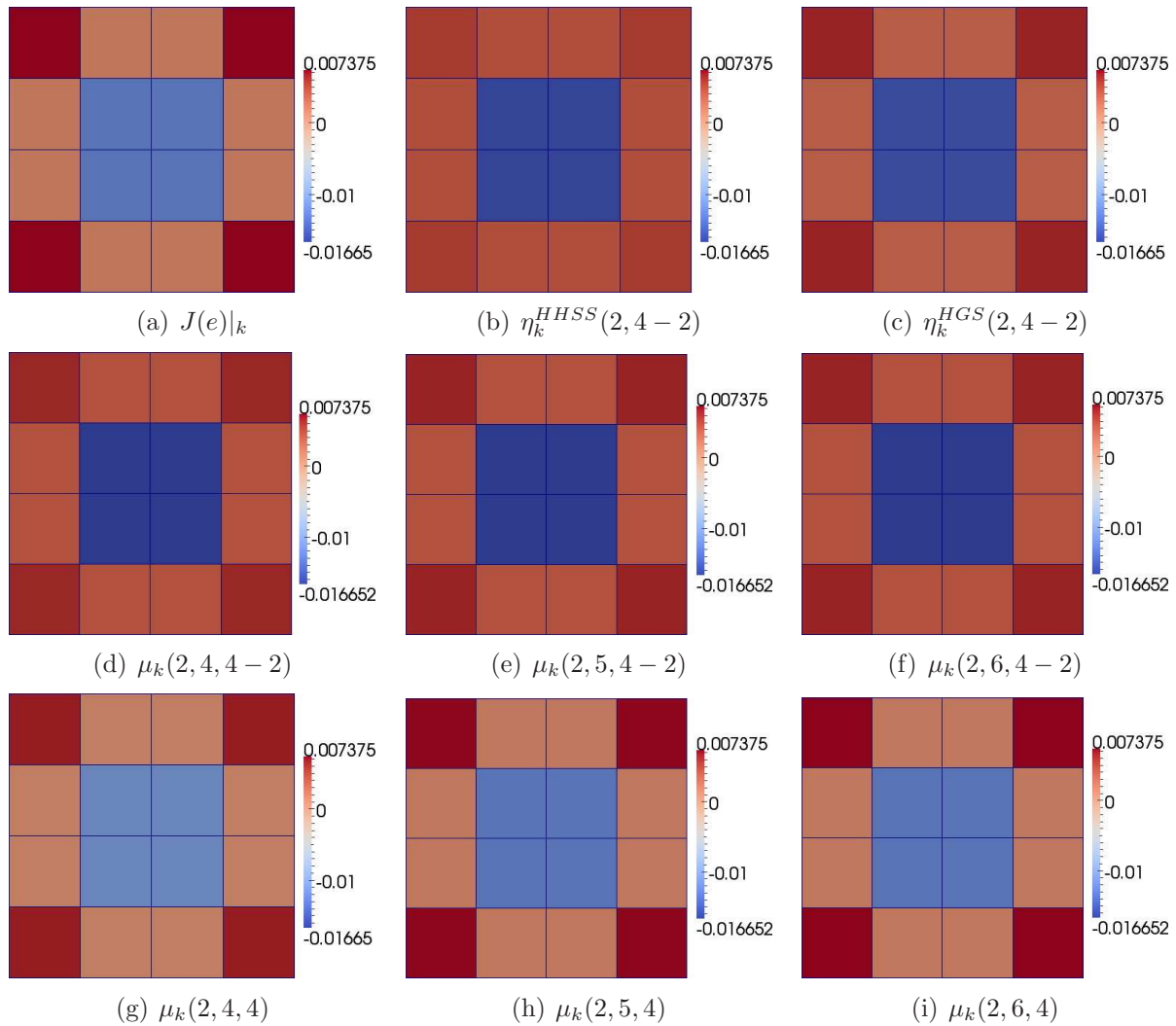


Figura 5.2: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 4 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

Nas Figuras 5.2- 5.13, comparamos o erro local e os indicadores de erro em quatro níveis de refinamento uniforme e em várias configurações para as aproximações w^+ e u^+ , lembrando que a solução u_{DG} é de grau polinomial constante 2.

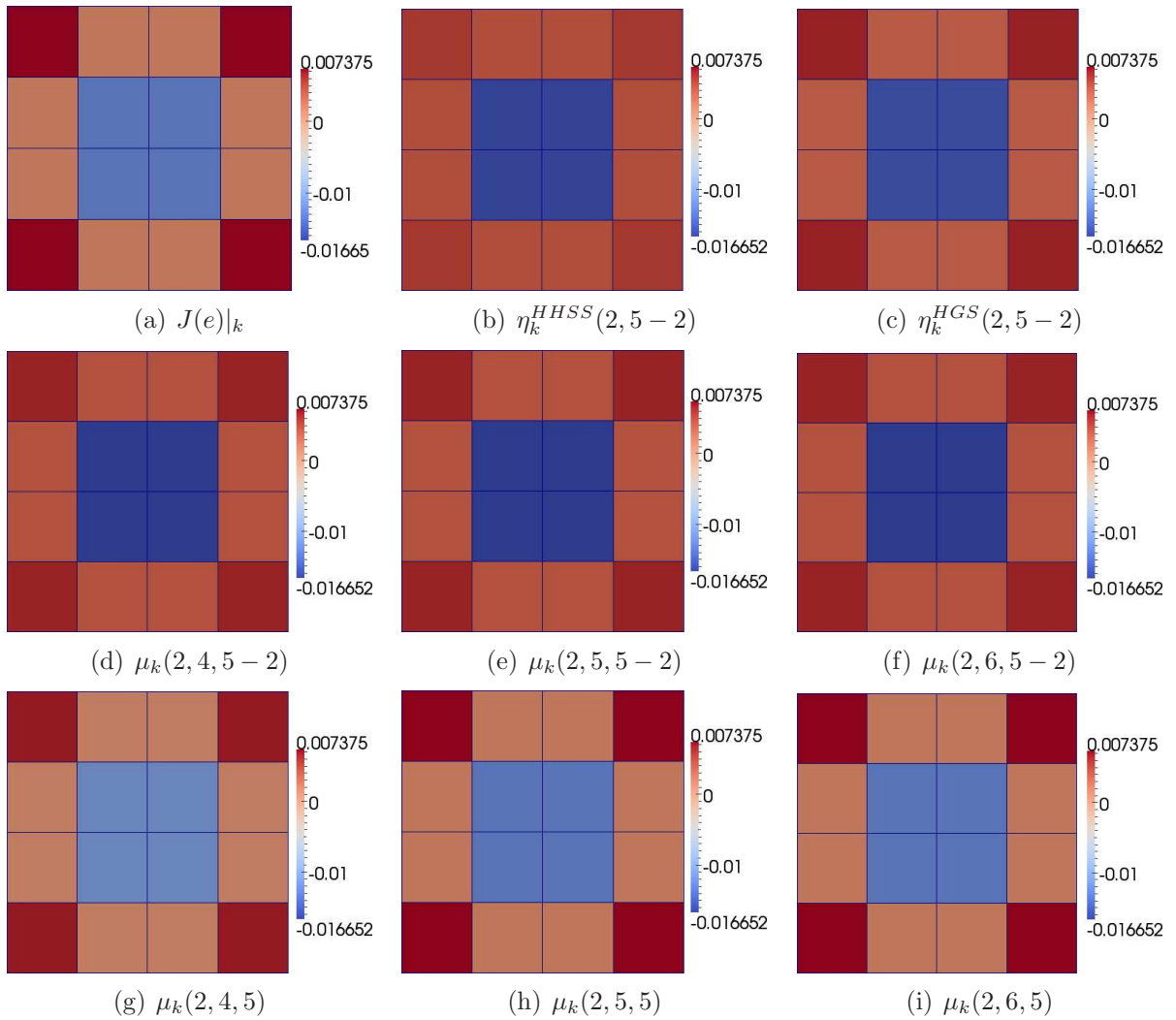


Figura 5.3: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

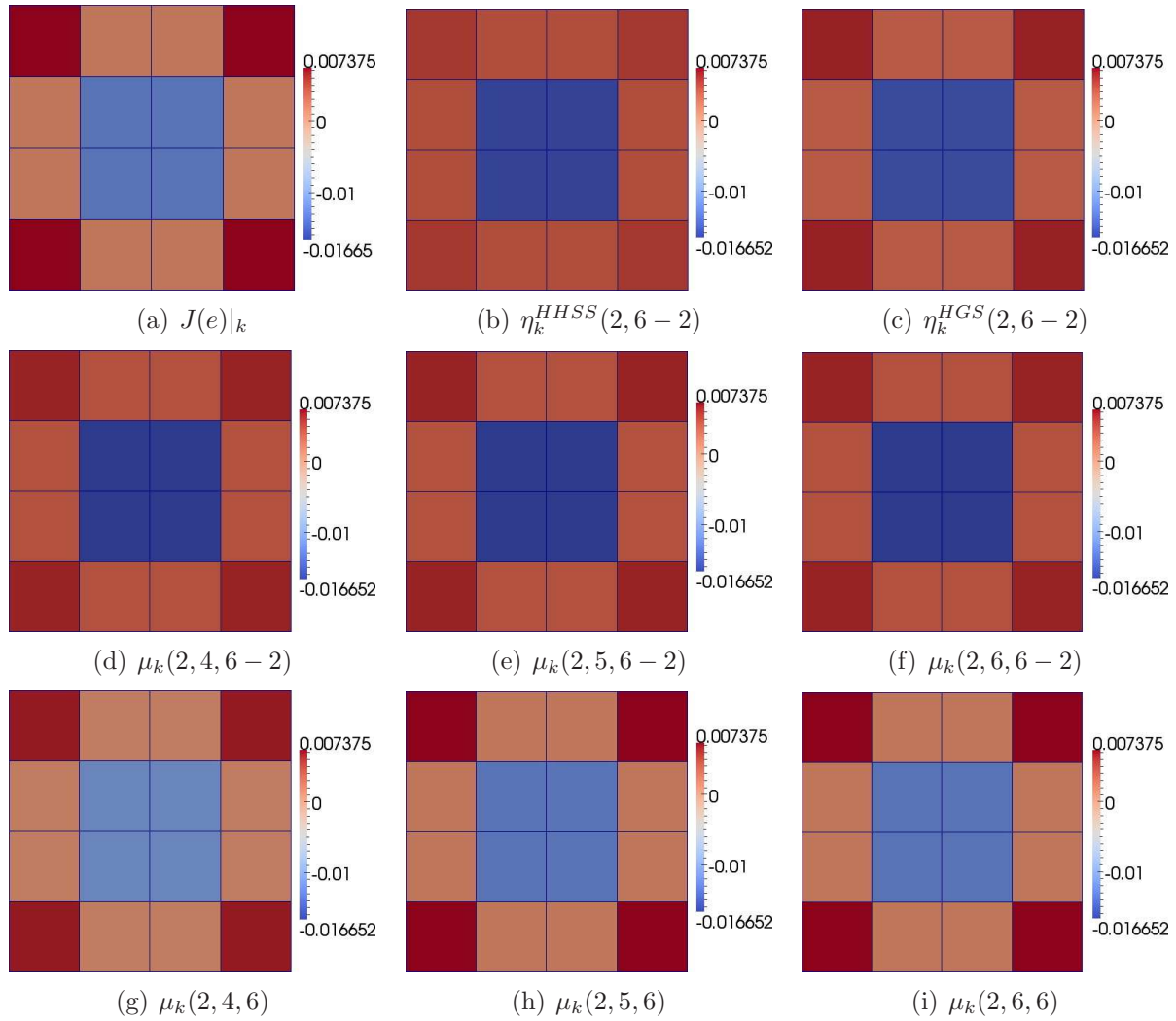


Figura 5.4: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

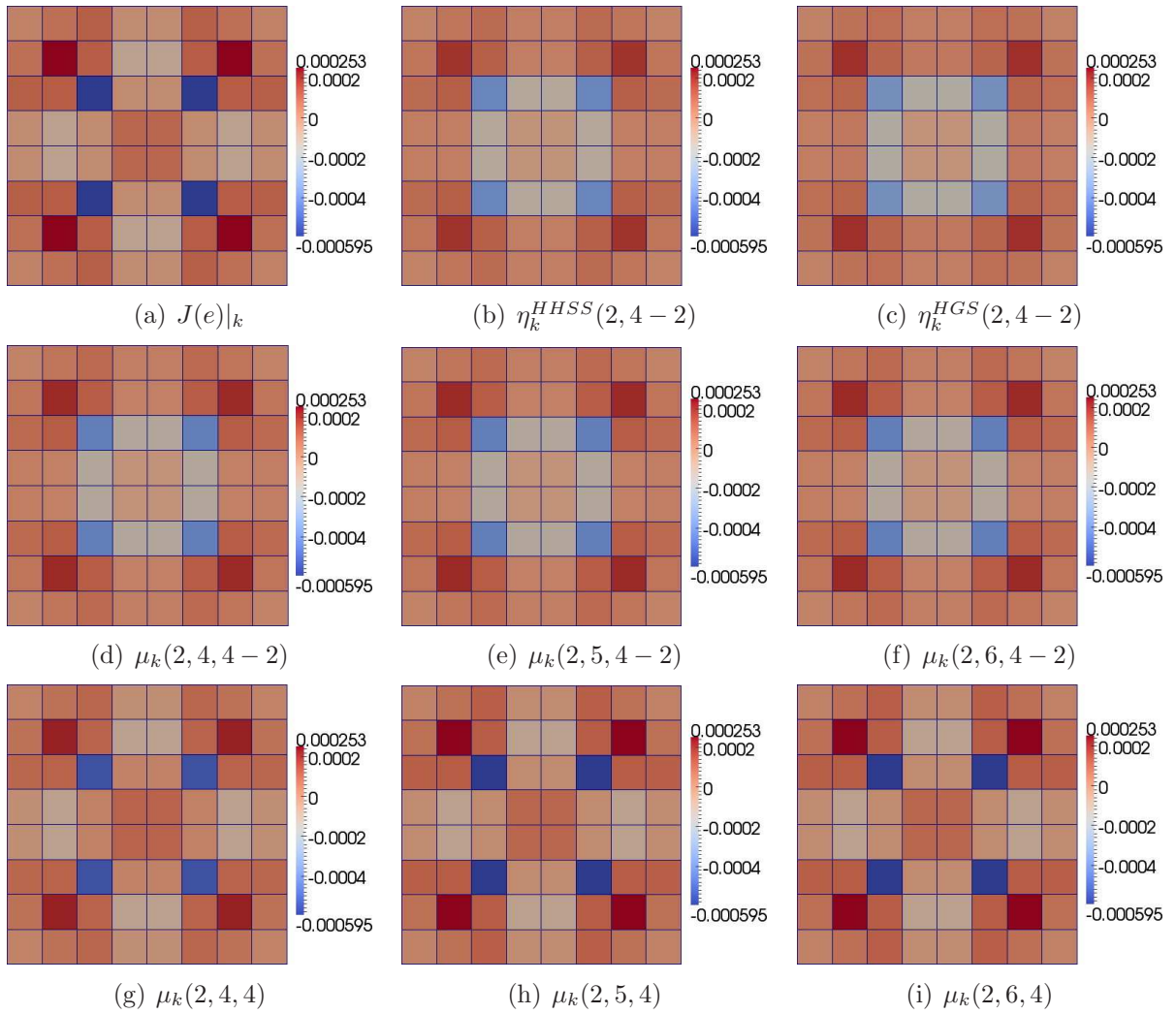


Figura 5.5: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 4 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

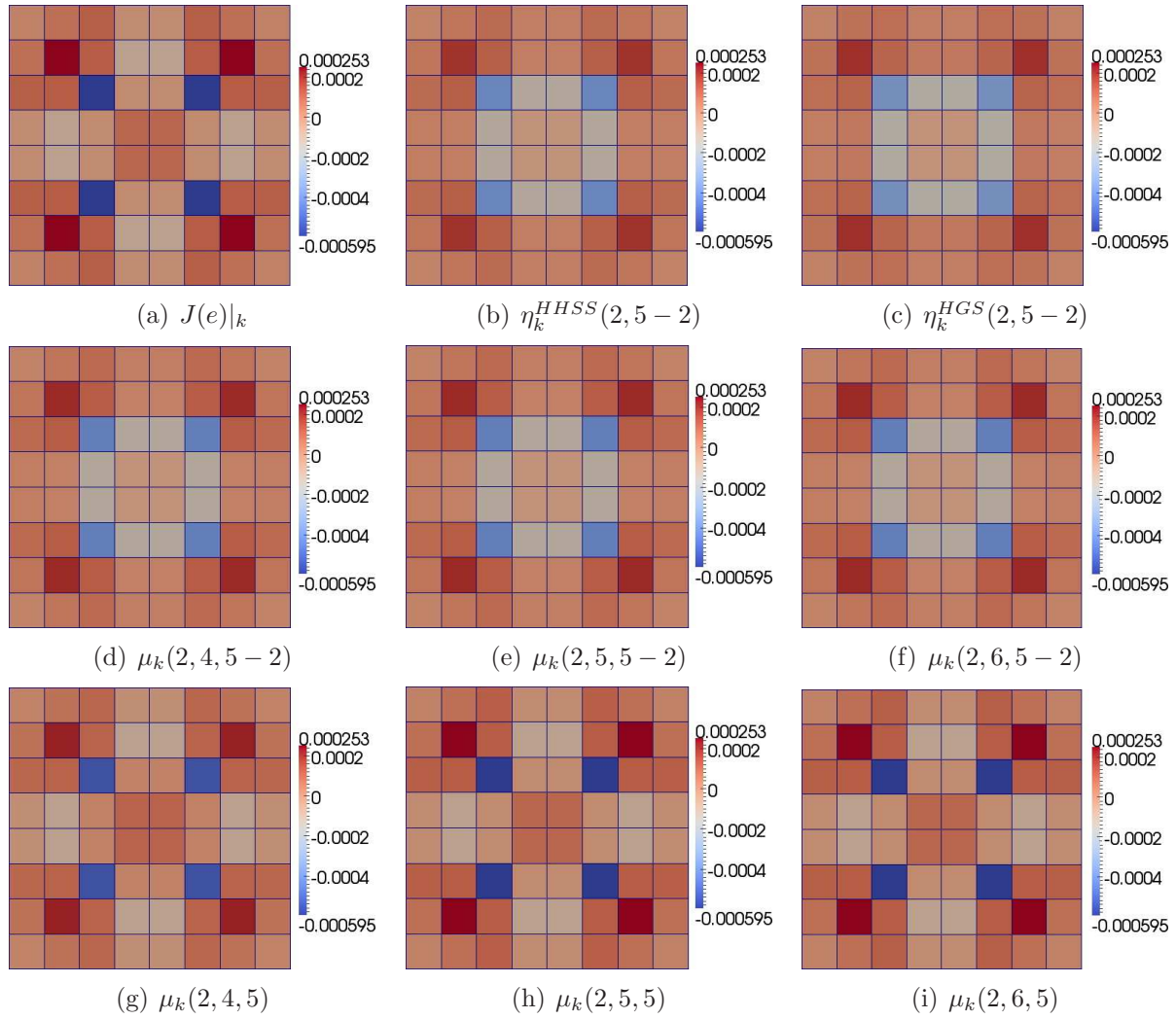


Figura 5.6: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

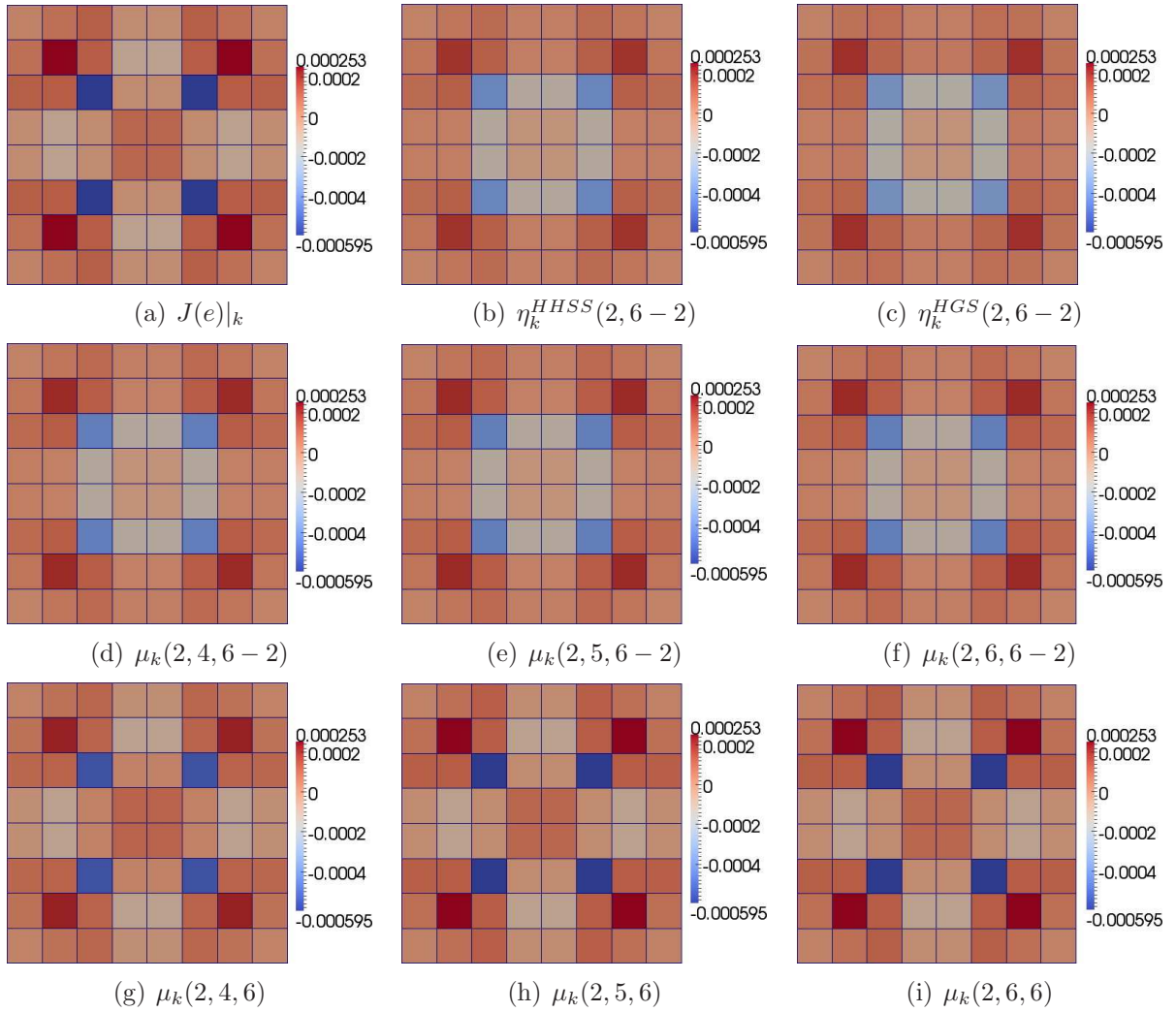


Figura 5.7: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

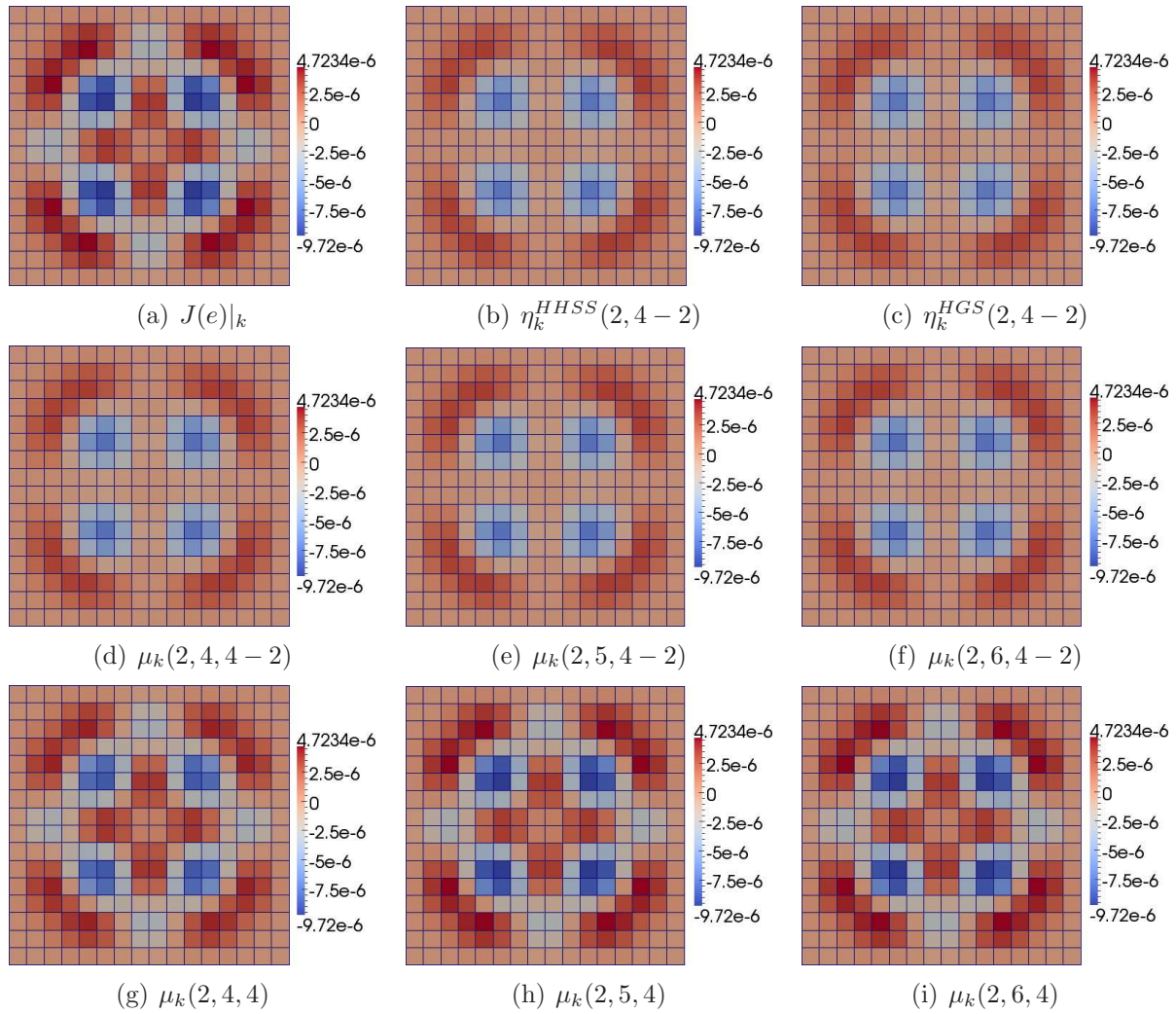


Figura 5.8: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 4 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

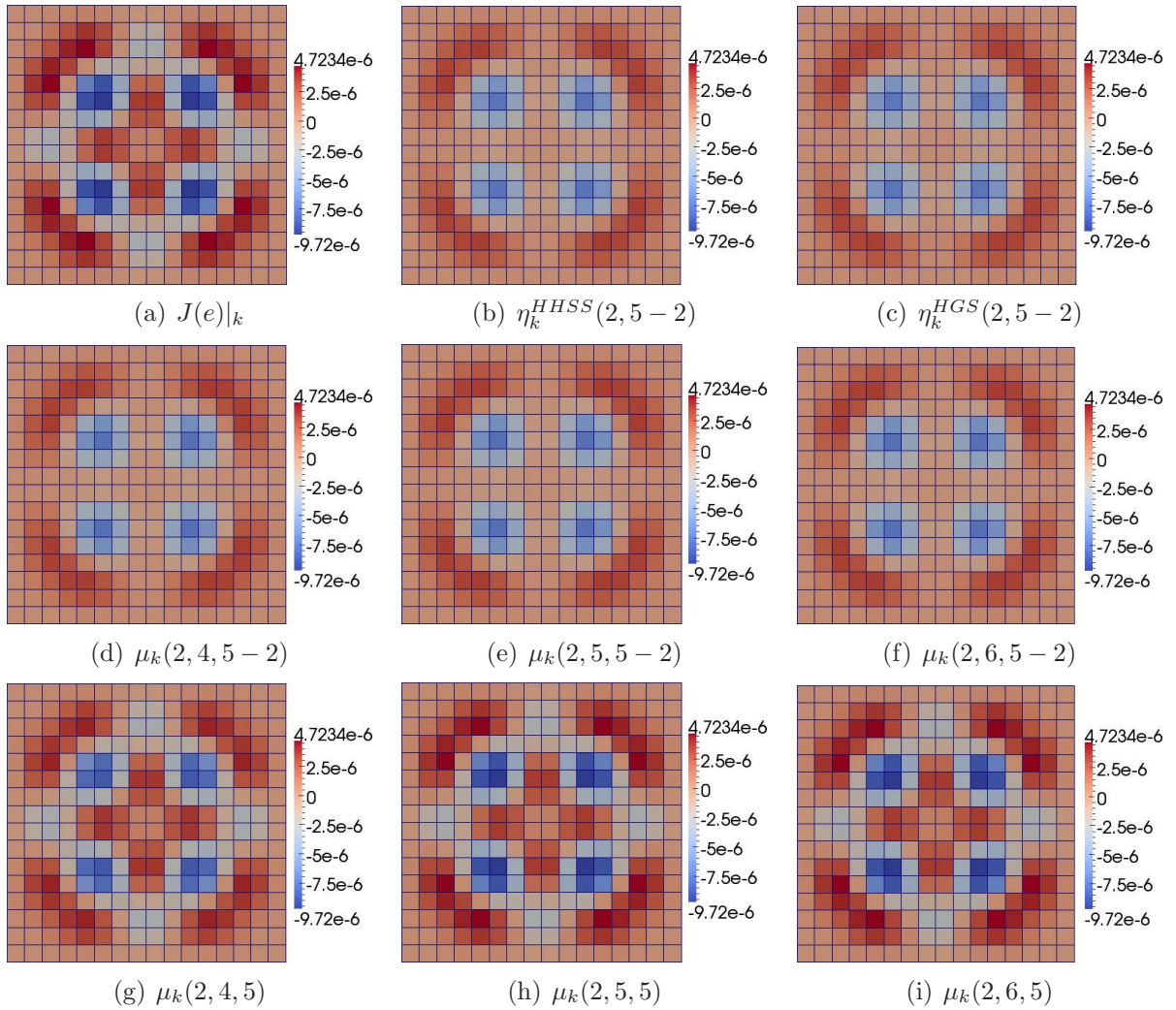


Figura 5.9: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

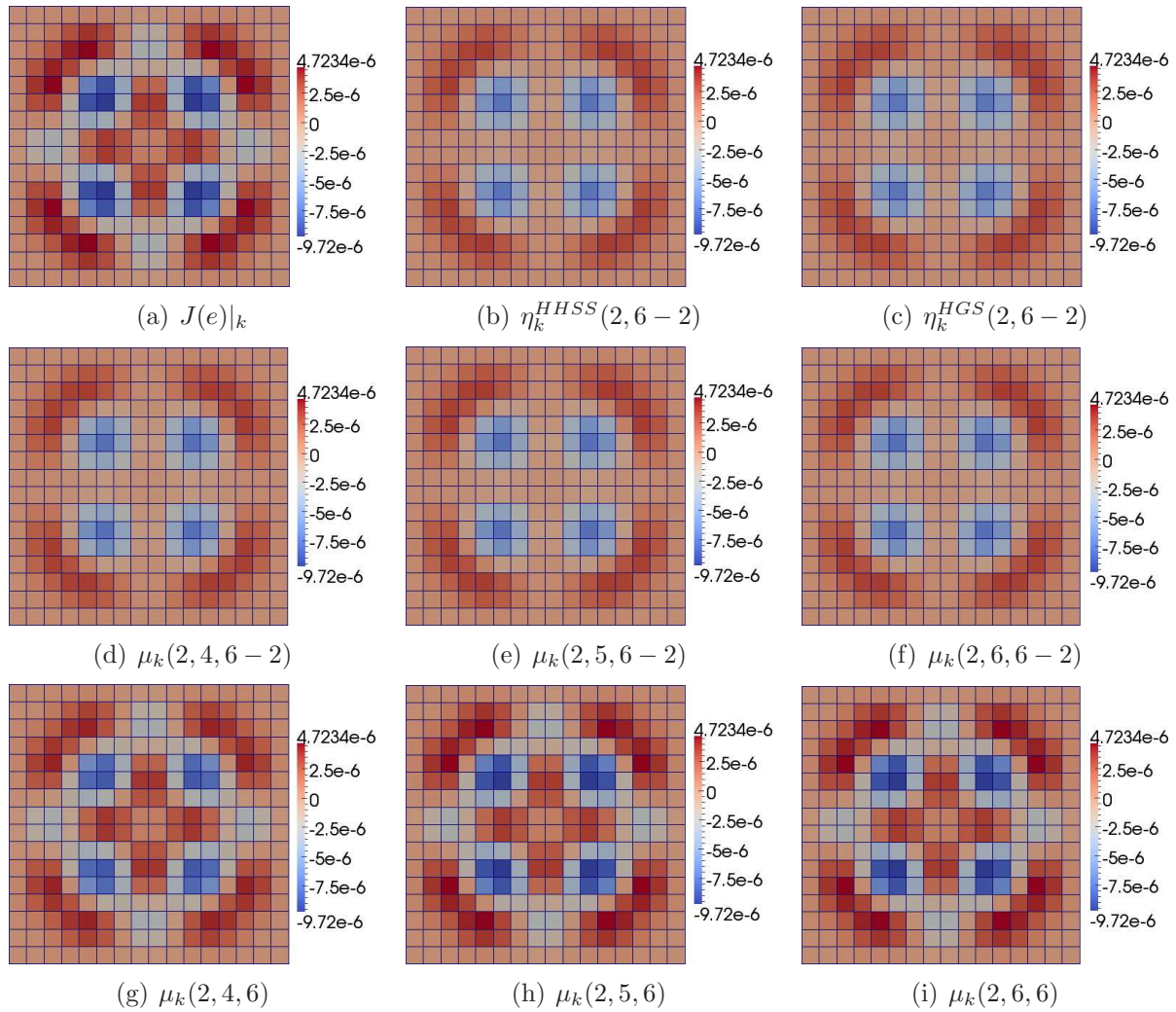


Figura 5.10: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

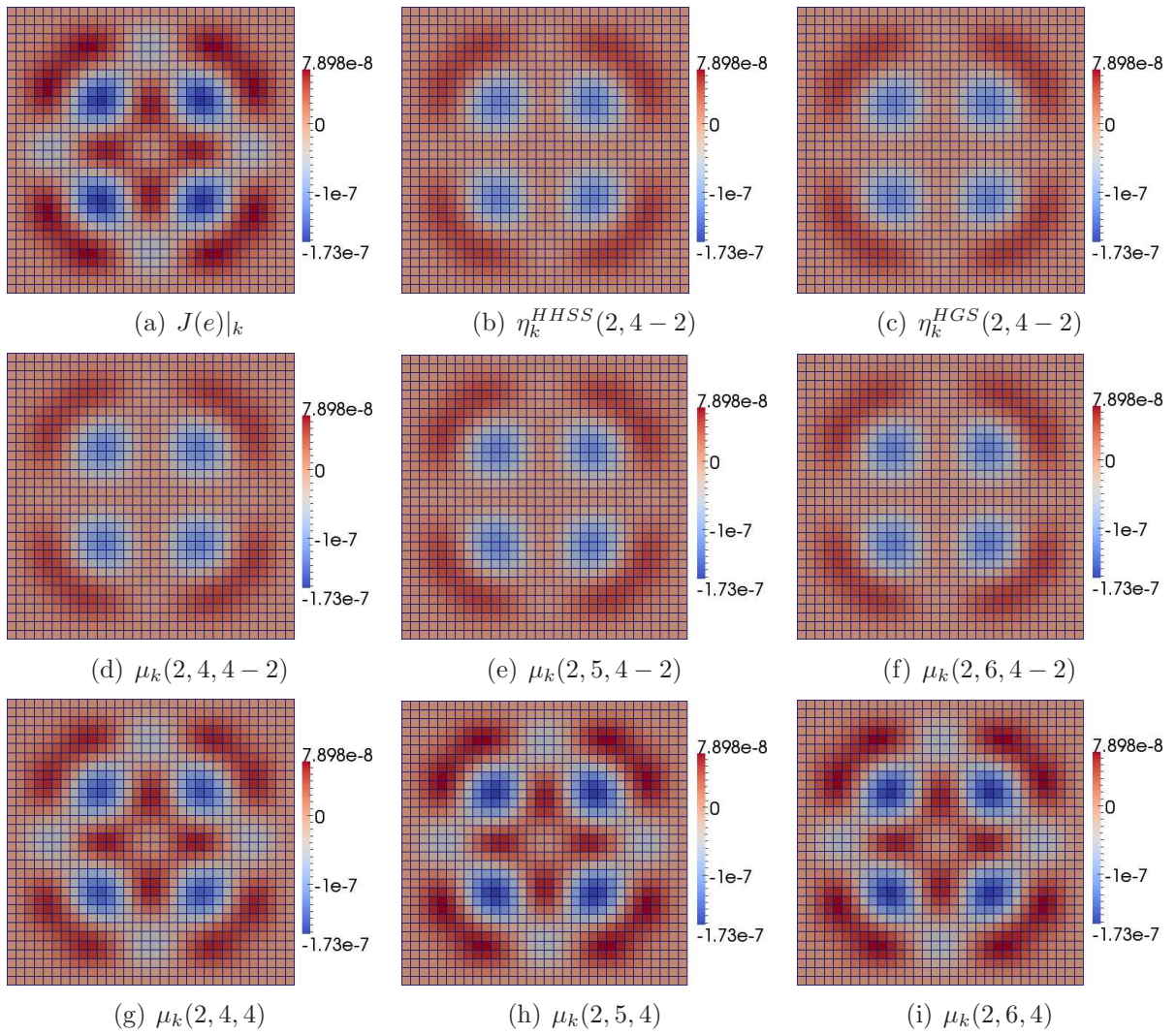


Figura 5.11: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 1024 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 4 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

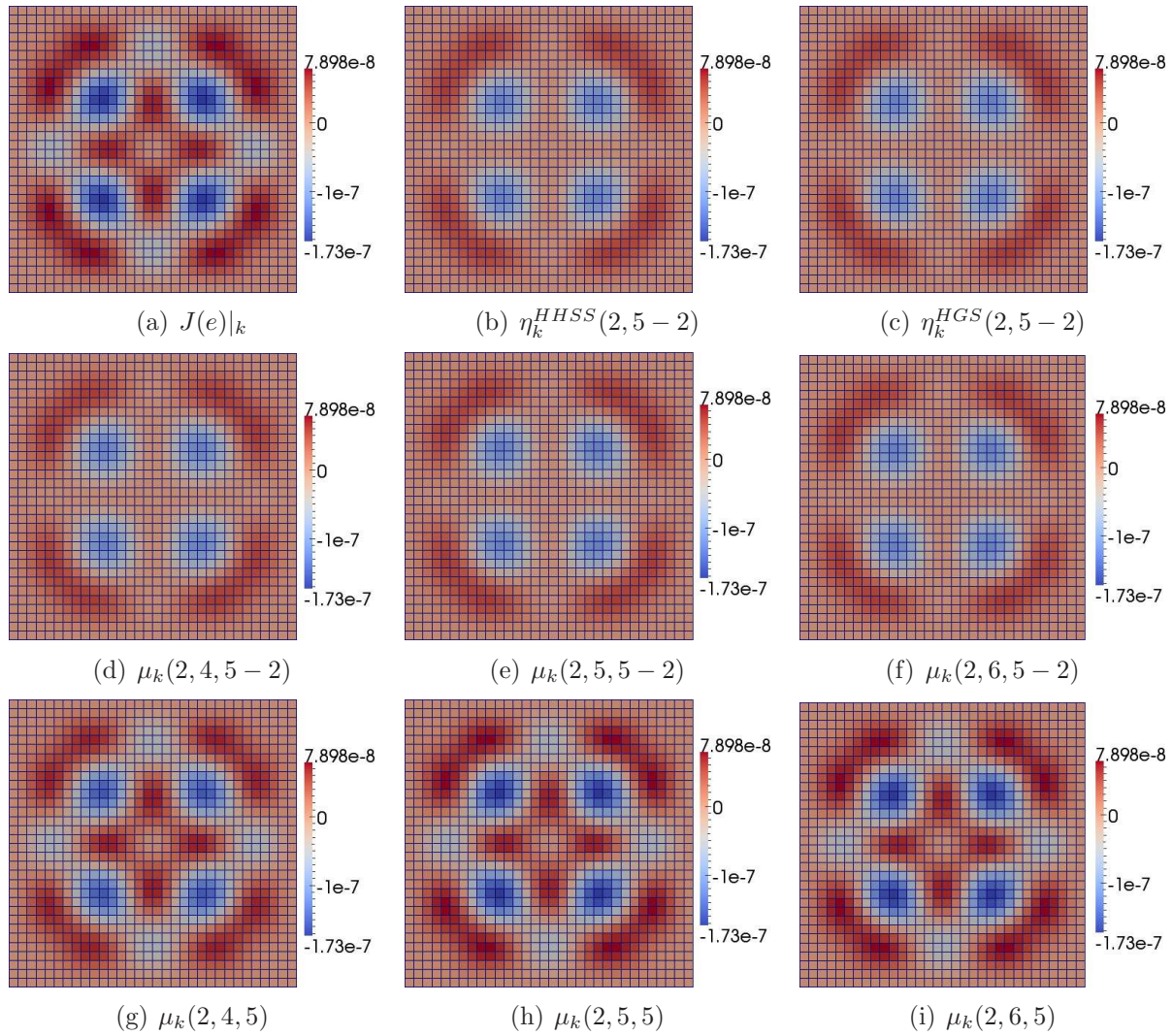


Figura 5.12: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 1024 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

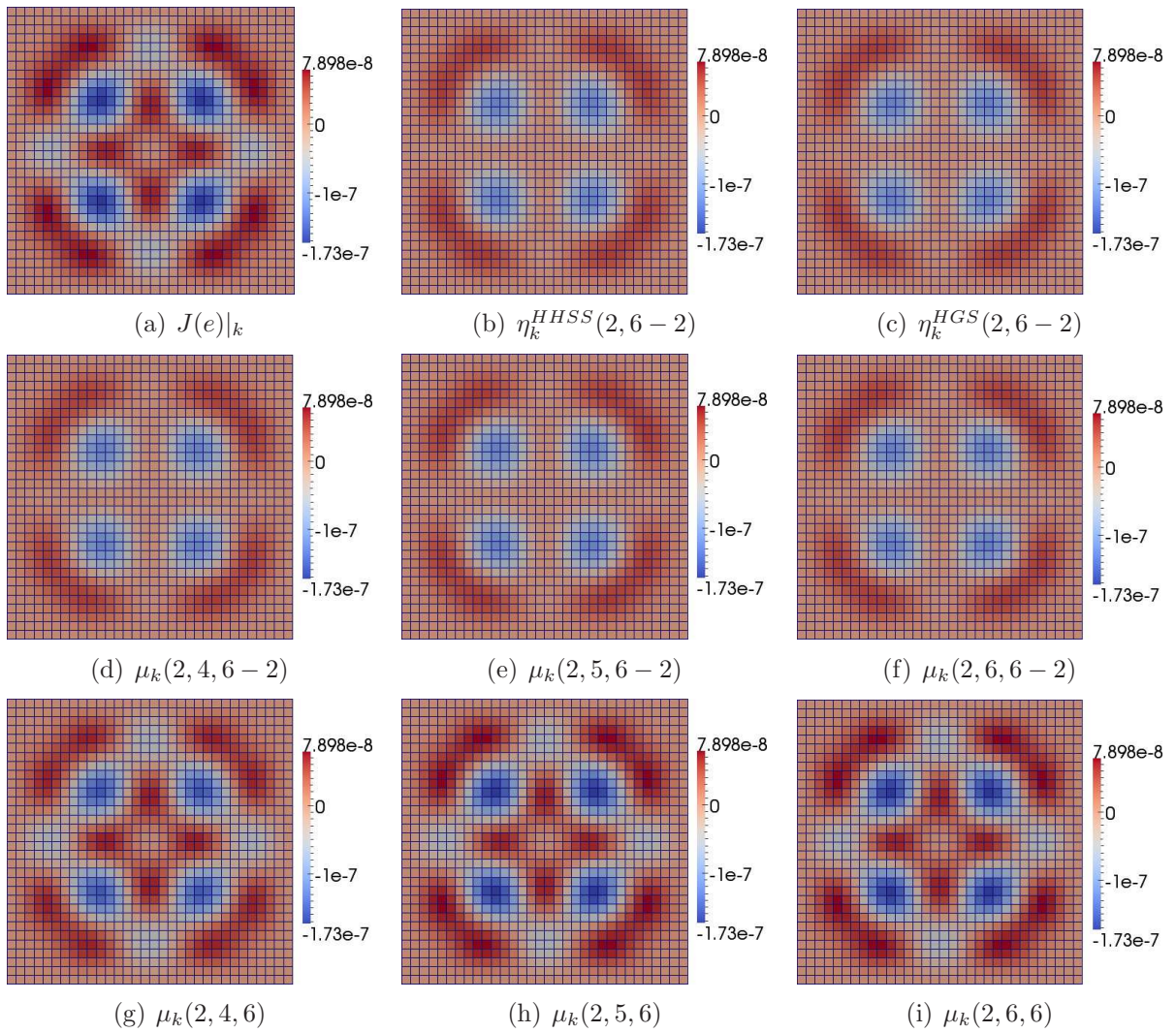


Figura 5.13: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 1024 elementos, com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 4, 5 e 6 para u^+ .

Na Figura 5.2 , para uma malha regular de 16 elementos, apresentamos na primeira linha o erro em cada elemento $J(e)|_k$ à esquerda (Figura 5.2(a)) e os indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} em 5.2(b) e 5.2(c), respectivamente, em que w^+ é de grau 4. Podemos ver que com uma malha ainda bastante grosseira e enriquecimento em w^+ de dois graus acima com relação a u_{DG} , os indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} não aproximam o erro em cada elemento com muita precisão. O mesmo comportamento pode ser observado nos indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, com u^+ sendo aproximações DGFEM de graus polinomiais constantes 4, 5 e 6, nas Figuras 5.2(d), 5.2(e) e 5.2(f), respectivamente. Já os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, com aproximações DGFEM u^+ de graus 4, 5 e 6, apresentam uma concordância melhor com o erro em cada elemento, como indicado nas Figuras 5.2(g), 5.2(h) e 5.2(i).

As Figuras 5.3 e 5.4 também consideram uma malha uniforme de 16 elementos, porém com w^+ de graus 5 e 6, correspondente a 3 e 4 graus acima do grau de u_{DG} , respectivamente. Podemos notar que o comportamento dos indicadores não se altera com relação ao observado na Figura 5.2.

Nas Figuras 5.5 - 5.13, analisamos o efeito do refinamento espacial nas malhas de 64, 256 e 1024 elementos. Observamos que o mesmo padrão de comportamento dos indicadores se mantém. Podemos verificar que, mesmo nas malhas mais finas, os indicadores η_k^{HHSS} , η_k^{HGS} e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$ não aproximam o erro em cada elemento tão bem quanto a suavidade das soluções e os níveis de enriquecimento de w^+ permitem. Diferentemente, μ_k mantém uma boa aproximação do erro $J(e)|_k$ em cada elemento, como observado nas sub-figuras das terceiras linhas, (g)-(i), em comparação com as sub-figuras (a).

Assim, podemos concluir que o indicador de erro $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$ é uma boa alternativa para a aproximação do erro em cada elemento, com eficiência dependendo principalmente dos níveis de enriquecimento de u^+ e w^+ .

Lembramos que, devido à ortogonalidade e à definição dos indicadores e usando apenas w_{DG} como aproximação dual, temos a relação

$$\begin{aligned}
0 &= B_{DG}(e, w_{DG}) \\
&= \sum_k \eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{DG}) \\
&= \sum_k \eta_k^{HGS}(u_{DG}, w_{DG}) \\
&= \sum_k \mu_k(u_{DG}, u^+, w_{DG}). \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Na Figura 5.14, mostramos a distribuição os indicadores $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w_{DG})$ sobre cada elemento. Assim podemos analisar como a distribuição do

erro de cada indicador atua sobre uma aproximação dual obtida do espaço cujo erro e é ortogonal com relação a $B_{DG}(\cdot, \cdot)$.

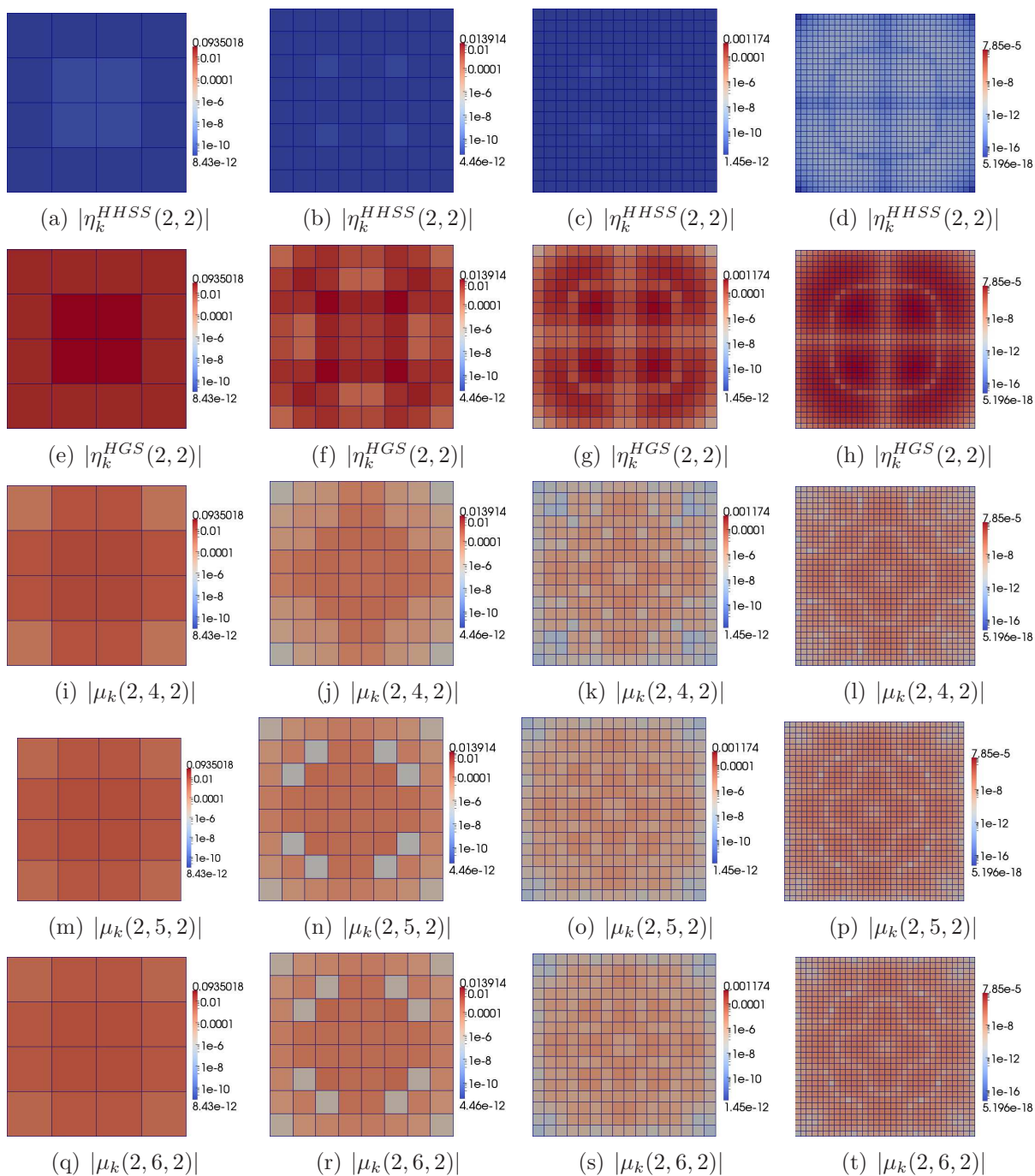


Figura 5.14: Indicadores $\eta^{HHSS}(u_{DG}, w_{DG})$, primeira linha, $\eta^{HGS}(u_{DG}, w_{DG})$, segunda linha, e $\mu(u_{DG}, u^+, w_{DG})$, com u^+ de grau 4, 5 e 6 da terceira à quinta linha, respectivamente. Estas figuras mostram como cada indicador se comporta quando a aproximação dual é ortogonal com o erro e com relação a forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$.

Como foi observado nas Seções 5.1.1 e 5.2.1, a ortogonalidade se mantém localmente para o indicador $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{DG})$, como podemos ver nas Figuras 5.14(a)-5.14(d). O mesmo não acontece para os indicadores η_k^{HGS} e μ_k , embora, globalmente, sobre todo o domínio, a ortogonalidade continue válida.

Experimento 2

Nesse experimento consideramos novamente a equação de Poisson, porém com dados tais que as soluções não tenham as simetrias do experimento anterior. Os dados são tais que a solução primal é

$$u(x, y) = \frac{(1+x)^2}{4} \sin(2\pi xy), \quad (5.57)$$

a solução dual é

$$w(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-(x+y)}, \quad (5.58)$$

e o funcional de interesse é

$$J(u) = \int_{\Omega} u \Delta w d\Omega, \quad (5.59)$$

em que $\Omega = (0, 1)^2$.

Da mesma forma que no experimento anterior, as estimativas são excelentes devido as boas propriedades do problema e da solução. Afirmamos anteriormente que quanto melhor a aproximação w^+ melhor é a estimativa e vamos confirmar isso nesse experimento.

Na Figura 5.15 apresentamos o quanto diferem do índice ótimo 1 os índices de eficiência das estimativas η^{HHSS} , η^{HGS} e μ com w^+ sendo aproximações DGFEM em espaços com diferentes níveis de enriquecimento. Este resultado confirma duas de nossas observações na dedução das estimativas e dos indicadores. A primeira é que as estimativas obtidas a partir dos diferentes indicadores são iguais. A segunda é que a eficiência local depende fundamentalmente da aproximação de w^+ , que aumenta significativamente com o maior enriquecimento do grau polinomial dos espaços de aproximação.

A pequena diferença entre as estimativas quando w^+ é calculada com grau polinomial 5 deve-se ao fato das integrais calculadas serem diferentes e envolverem uma função a mais, u^+ , mas principalmente à proximidade do limite para a precisão numérica.

Na Figura 5.16 corroboramos a observação, feita na dedução do indicador μ_k , de que a aproximação u^+ não afeta a eficiência global da estimativa μ , desde que u^+ tenha traço contínuo sobre as faces interiores.

Para uma comparação local, apresentamos os indicadores de erro para aproximações obtidas em malhas uniformes e com grau polinomial igual a 2, nas Figuras 5.17 - 5.21. A notação para cada indicador nestas figuras é a mesma usada nas figuras do experimento anterior.

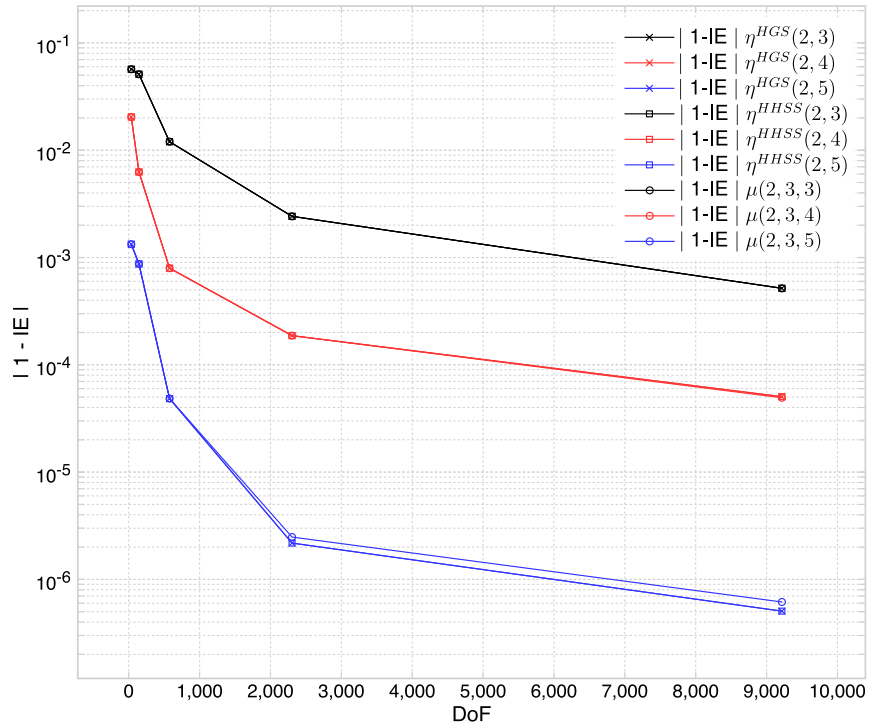


Figura 5.15: Eficiência das estimativas η^{HSS} , η^{HGS} e μ com w^+ de grau 3, 4 e 5 e u^+ de grau 3, por graus de liberdade.

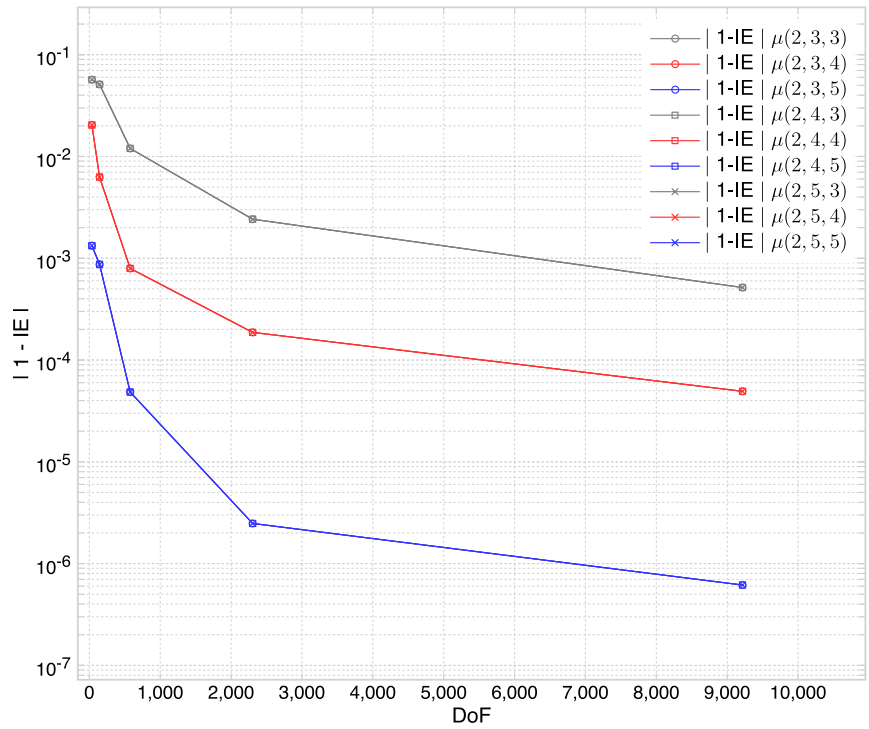


Figura 5.16: Eficiência das estimativas μ com w^+ e u^+ de grau 3, 4 e 5, por graus de liberdade.

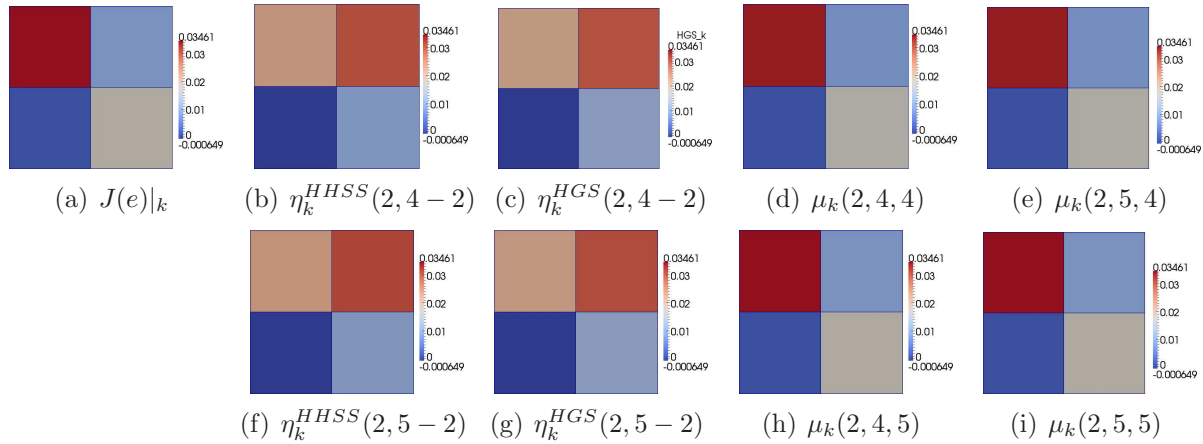


Figura 5.17: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 4 elementos, com grau polinomial constantes para w^+ , 4 na primeira linha e 5 na segunda linha, e para u^+ , 4 na quarta coluna e 5 na quinta coluna.

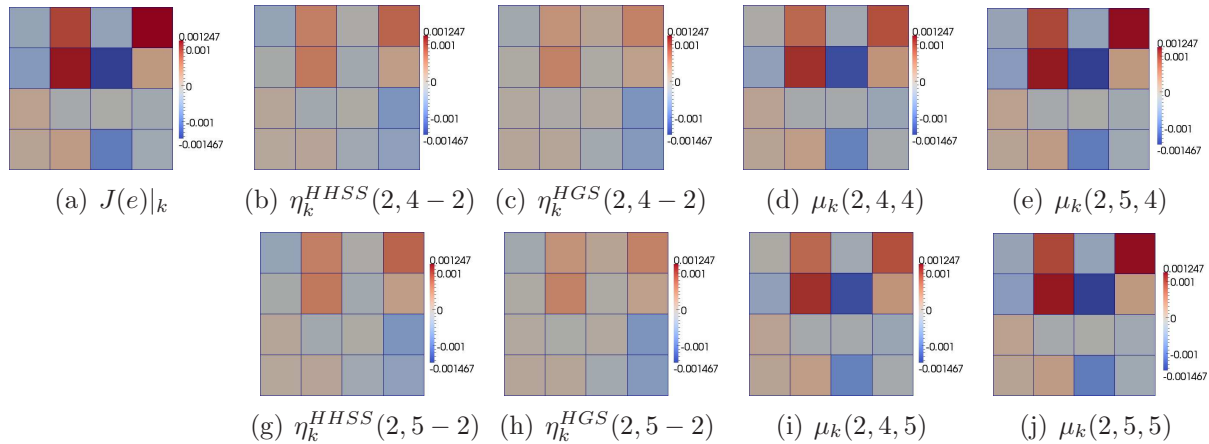


Figura 5.18: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos, com grau polinomial constantes para w^+ , 4 na primeira linha e 5 na segunda linha, e para u^+ , 4 na quarta coluna e 5 na quinta coluna.

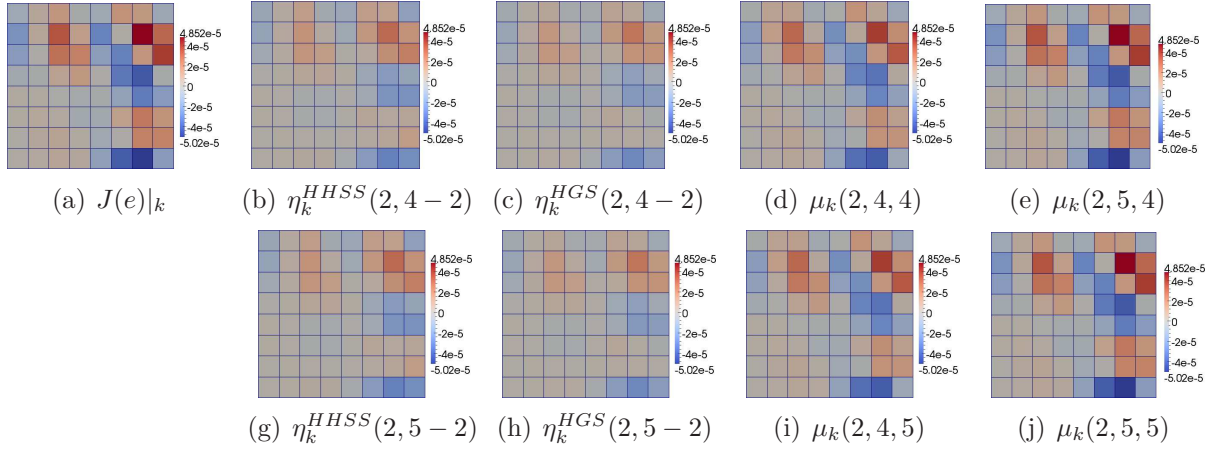


Figura 5.19: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos, com grau polinomial constantes para w^+ , 4 na primeira linha e 5 na segunda linha, e para u^+ , 4 na quarta coluna e 5 na quinta coluna.

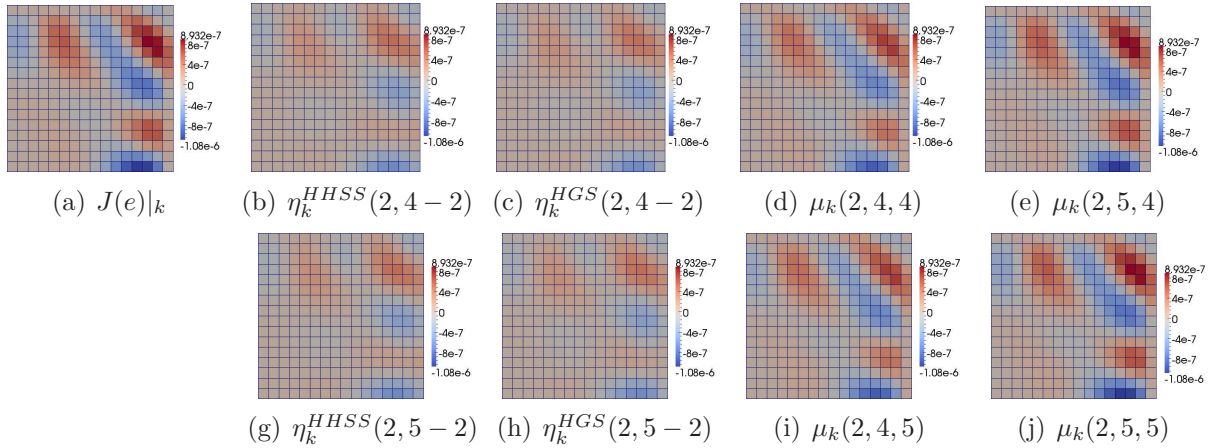


Figura 5.20: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos, com grau polinomial constantes para w^+ , 4 na primeira linha e 5 na segunda linha, e para u^+ , 4 na quarta coluna e 5 na quinta coluna.

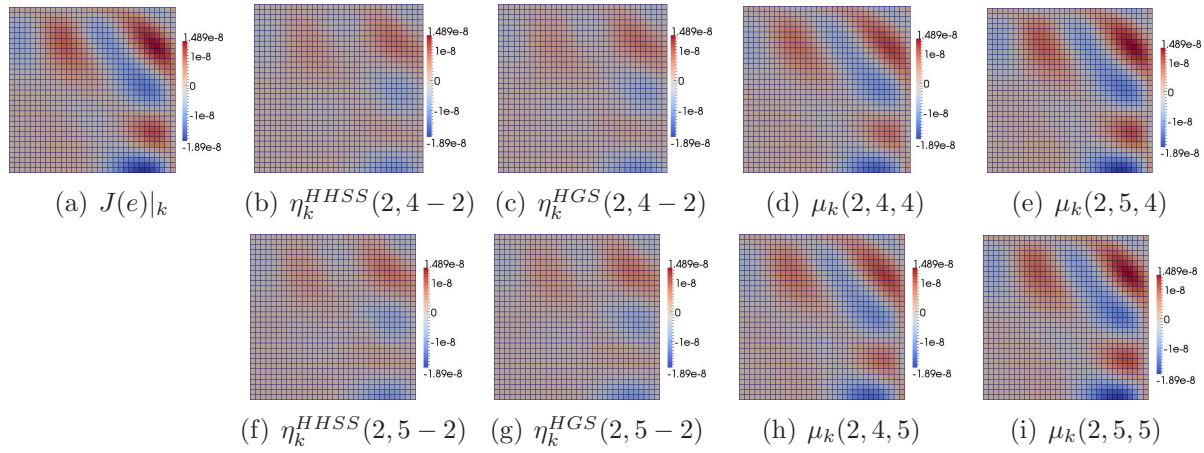


Figura 5.21: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 1024 elementos, com grau polinomial constantes para w^+ , 4 na primeira linha e 5 na segunda linha, e para u^+ , 4 na quarta coluna e 5 na quinta coluna.

Assim como no experimento anterior, fica claro nas Figuras 5.17 - 5.21 que o indicador μ_k é melhor que os outros indicadores ao aproximar o erro em cada elemento. Principalmente, nas malhas mais finas, Figuras 5.18 - 5.21, também podemos ver que quanto melhor é a w^+ melhor é a eficiência local dos indicadores μ_k .

Observamos que, apesar de não termos simetrias nas soluções desse experimento, o comportamento dos indicadores manteve-se consistente, com $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$ aproximando o erro $J(e)|_k$ melhor que os demais indicadores. Da mesma forma, cada indicador decompõe a ortogonalidade de uma forma diferente, como observamos na Figura 5.22. Em particular, nas sub-figuras 5.22(a) - 5.22(d) vemos que os indicadores η_k^{HHSS} mantêm a ortogonalidade localmente, ao contrário dos indicadores η_k^{HGS} e μ_k que, embora mantendo a ortogonalidade global, perdem essa propriedade localmente, como podemos ver nas Figuras 5.22(e) - 5.22(p).

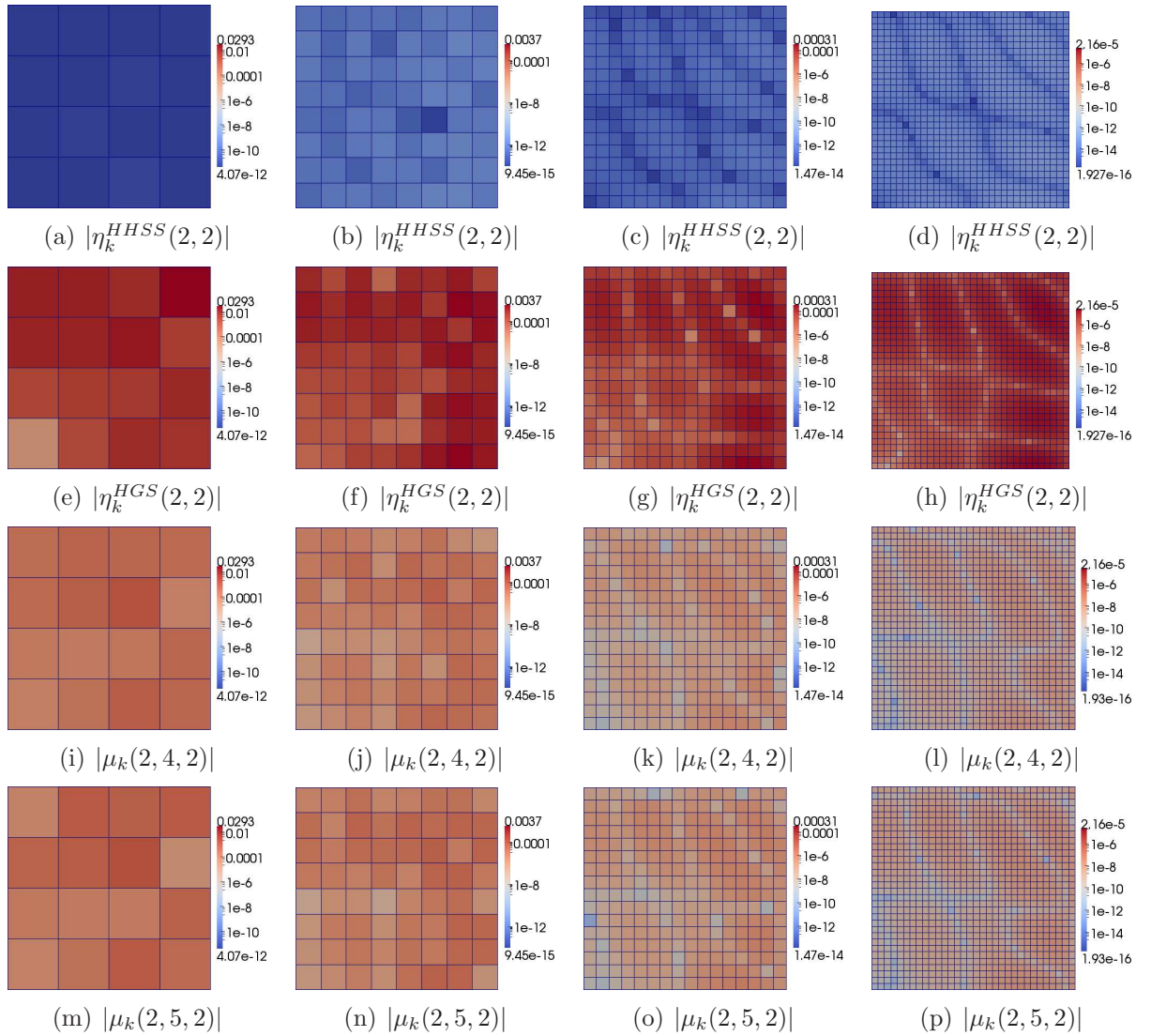


Figura 5.22: Ortogonalidade dos indicadores

5.3.2 Resultados para a equação Biharmônica

Para observar o comportamento dos indicadores e também entender, na prática, algumas diferenças entre estimativas/indicadores para equações de segunda e quarta ordem, estabelecemos um experimento para a equação biharmônica muito próximo ao que apresentamos para a equação de Poisson, na subseção anterior.

Experimento 1

Consideramos a equação biharmônica,

$$\Delta(\Delta u) = f \text{ em } \Omega. \quad (5.60)$$

em que o domínio é $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, com condições de contorno de Dirichlet e função de carga f de forma que a solução exata seja $u = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y)$.

A quantidade de interesse é a média da solução primal u sobre todo o domínio Ω , ponderada por $\Delta(\Delta w)$, a qual representamos pelo funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} \Delta(\Delta w)u \, dx dy, \quad (5.61)$$

em que $w = \sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y)$. Desta forma, o problema dual associado a J , com condições de contorno Dirichlet homogêneas, tem w como solução exata e é consistente com o problema primal.

Globalmente, as estimativas η^{HHSS} , η^{HGS} e μ , com ou sem o uso da ortogonalidade, são iguais, a menos de um erro numérico, que pode variar para cada indicador, devido às diferentes integrais calculadas. De fato, fica claro na Figura 5.23, que a eficiência das estimativas é muito boa, para esse experimento.

Nas Figuras 5.24 - 5.32 comparamos diferentes indicadores em quatro níveis de refinamento uniforme, com várias configurações para as aproximações w^+ e u^+ . Precisamente, as Figuras 5.24-5.29 são para 16 elementos, as Figuras 5.27-5.29 para 64 elementos e as Figuras 5.30-5.32 para 256 elementos.

Podemos perceber que o enriquecimento do grau polinomial de w^+ não é determinante para o desempenho local dos indicadores $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, como indicado nas sub-figuras (b)-(f). Da mesma forma, nesse experimento, o enriquecimento do grau polinomial de w^+ não parece afetar significativamente a forma como μ_k aproxima $J(e)|_k$, conforme mostram as sub-figuras (g)-(i) se comparadas para diferentes níveis de enriquecimento de w^+ . Porém, a forma de μ_k modifica-se bastante

conforme u^+ é enriquecida, conforme podemos observar nas sub-figuras (g)-(i) se comparadas no mesmo nível de enriquecimento de w^+ .

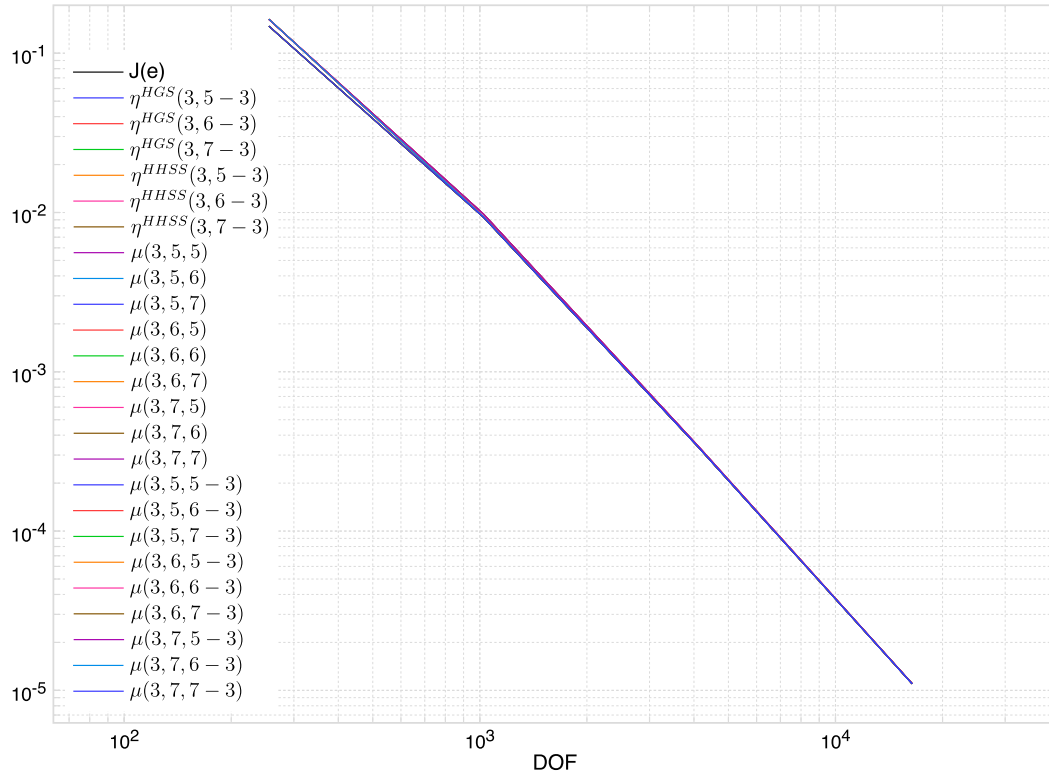


Figura 5.23: Erro $J(e)$ e estimativas η^{HHSS} , η^{HGS} e μ com várias configurações de u^+ e w^+ .

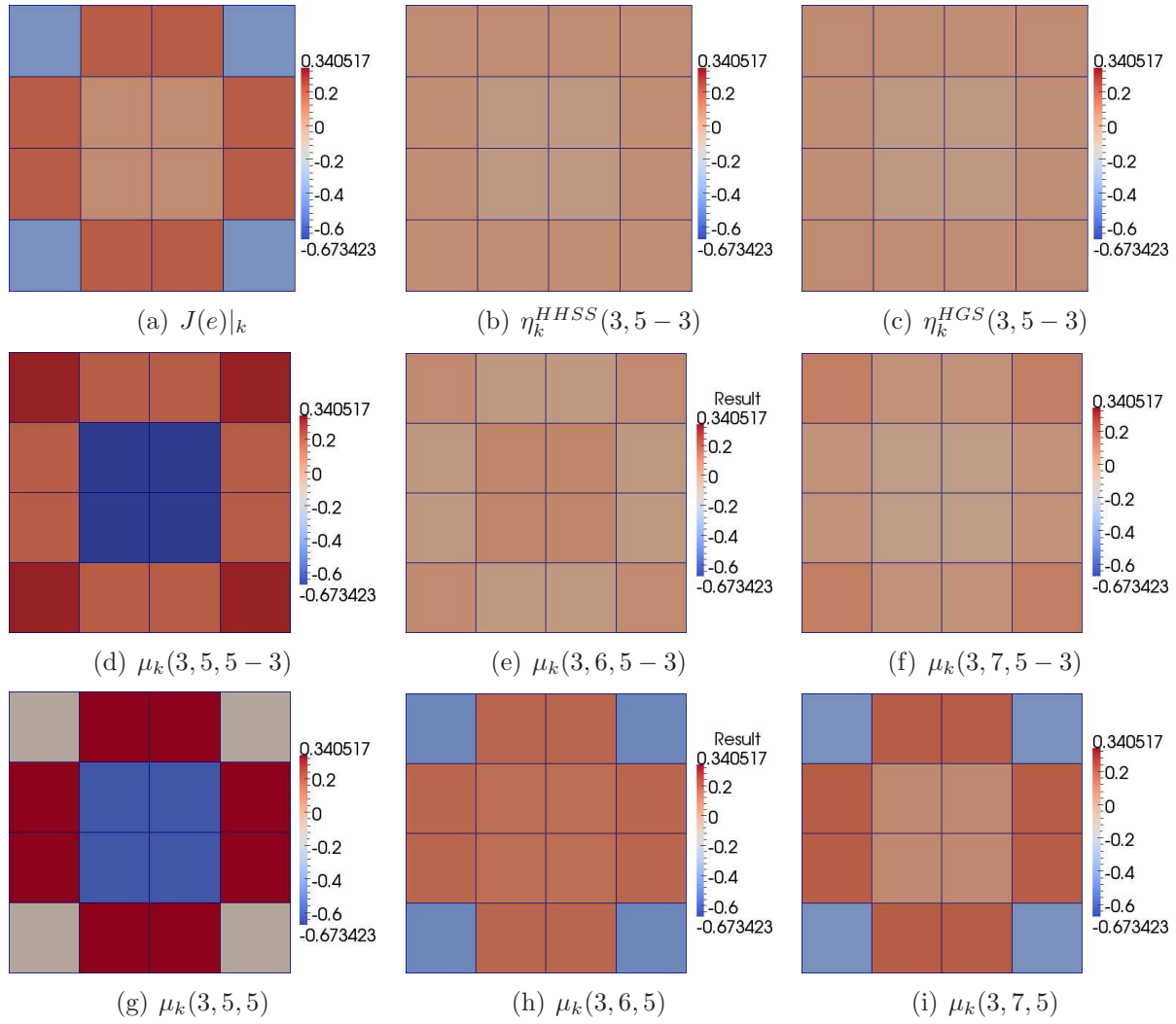


Figura 5.24: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

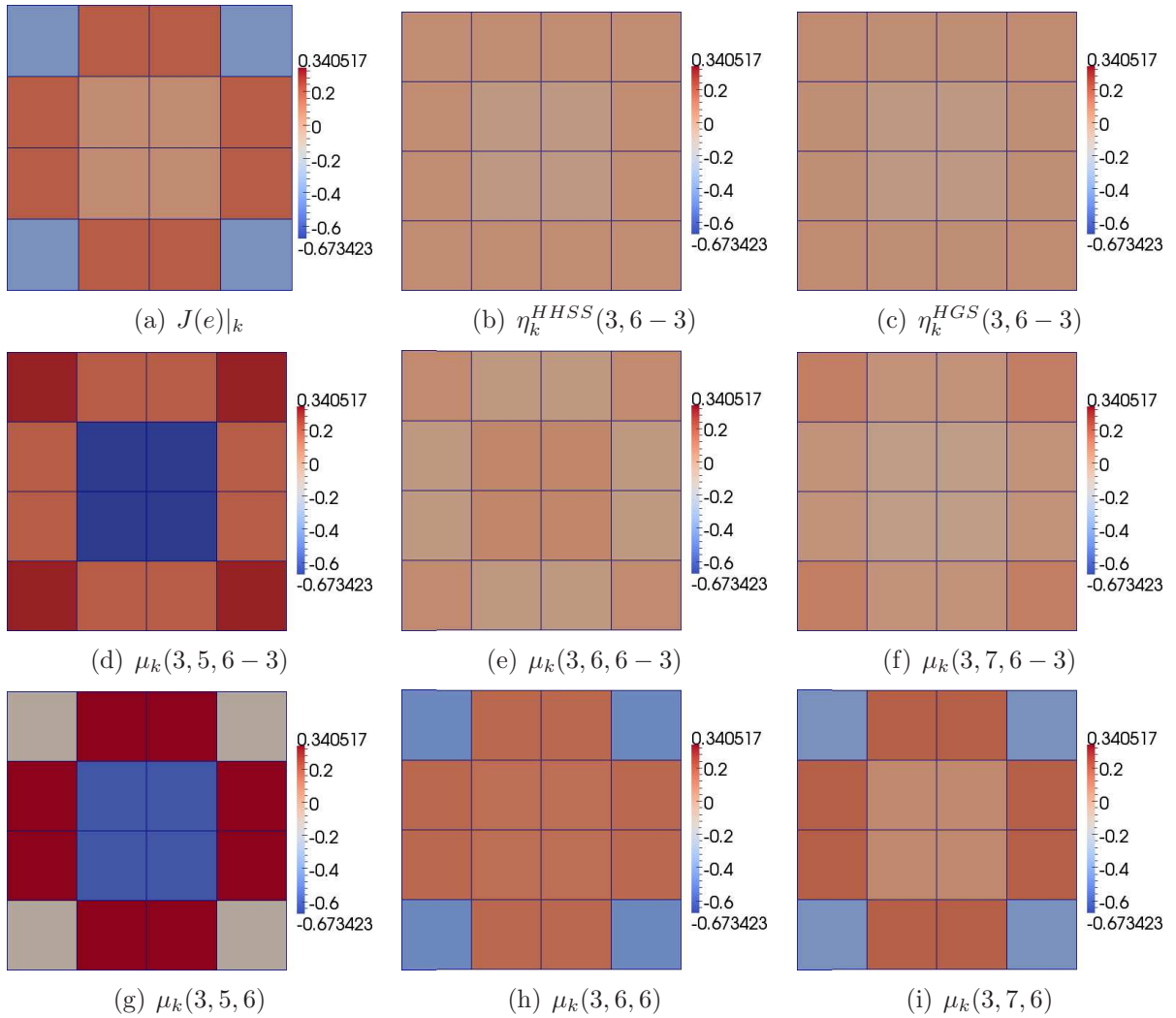


Figura 5.25: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

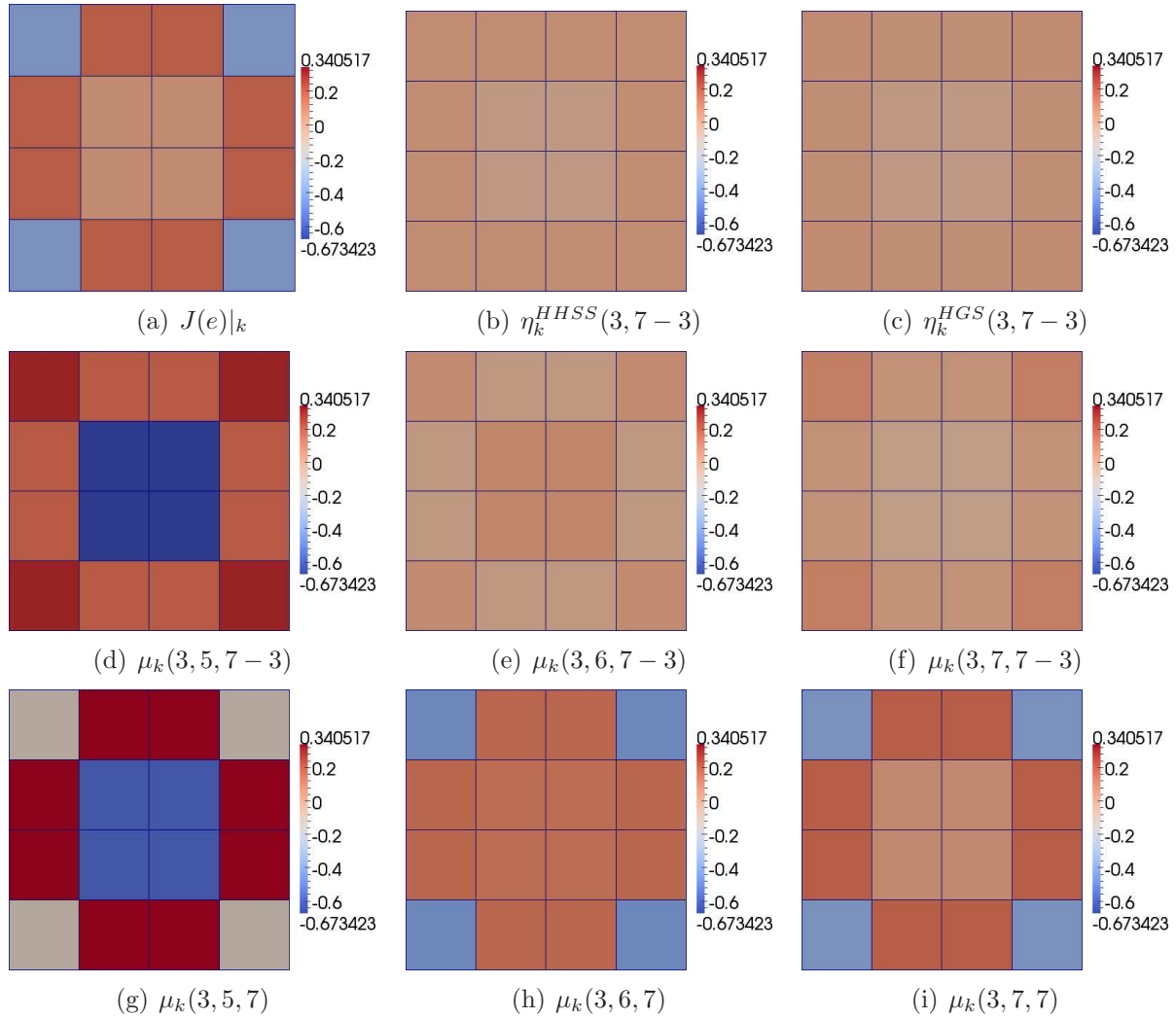


Figura 5.26: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 7 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

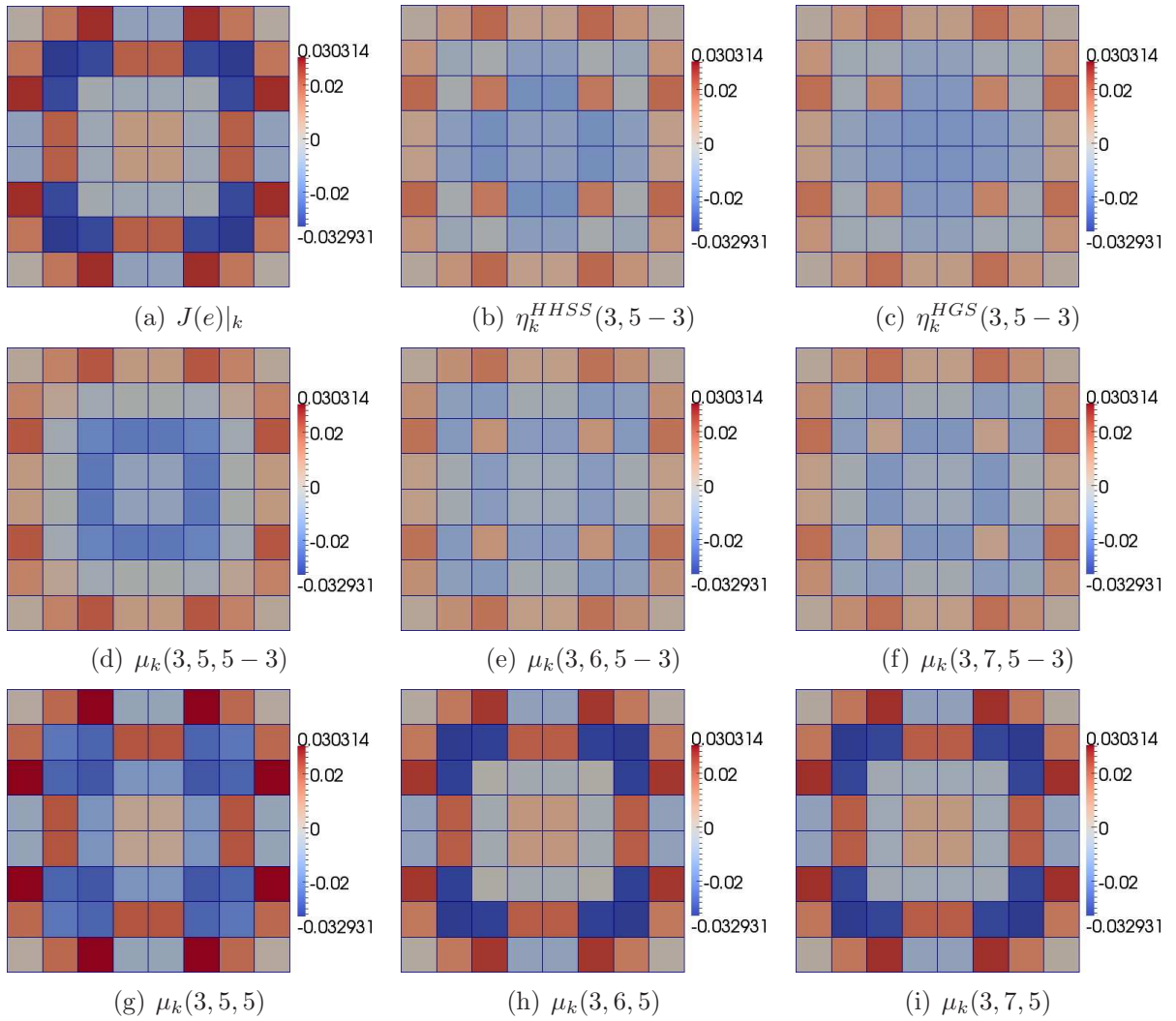


Figura 5.27: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

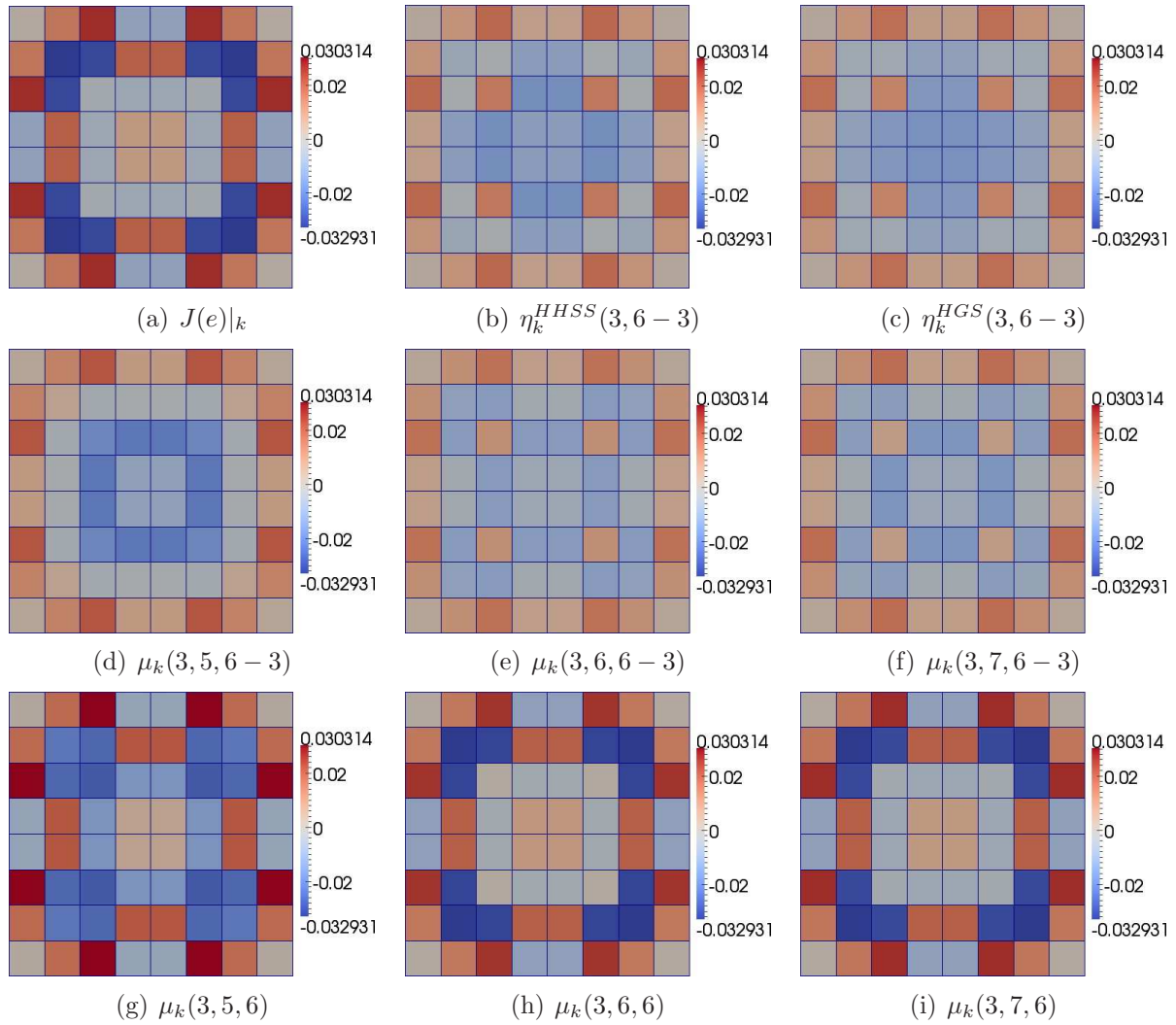


Figura 5.28: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

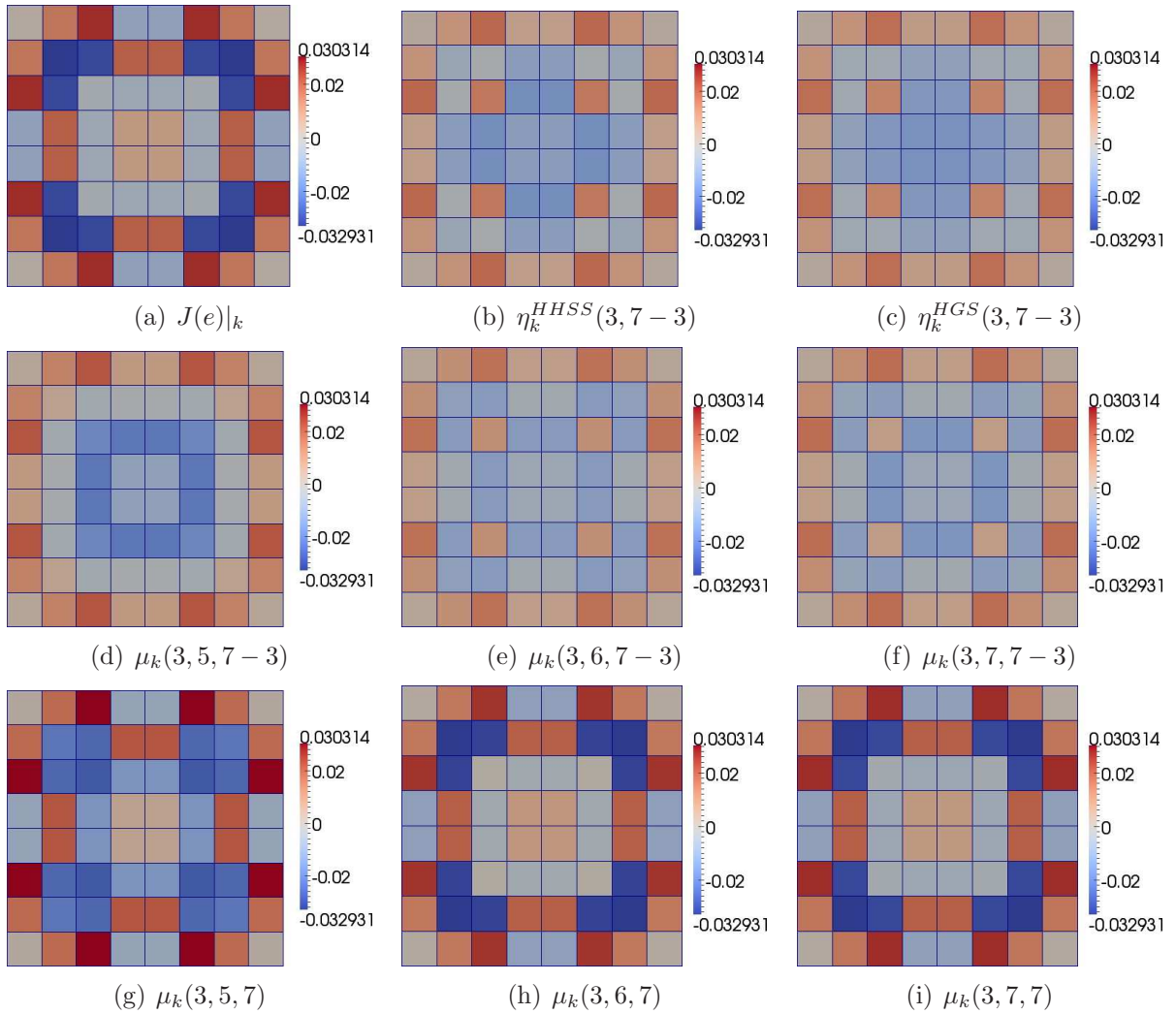


Figura 5.29: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 7 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

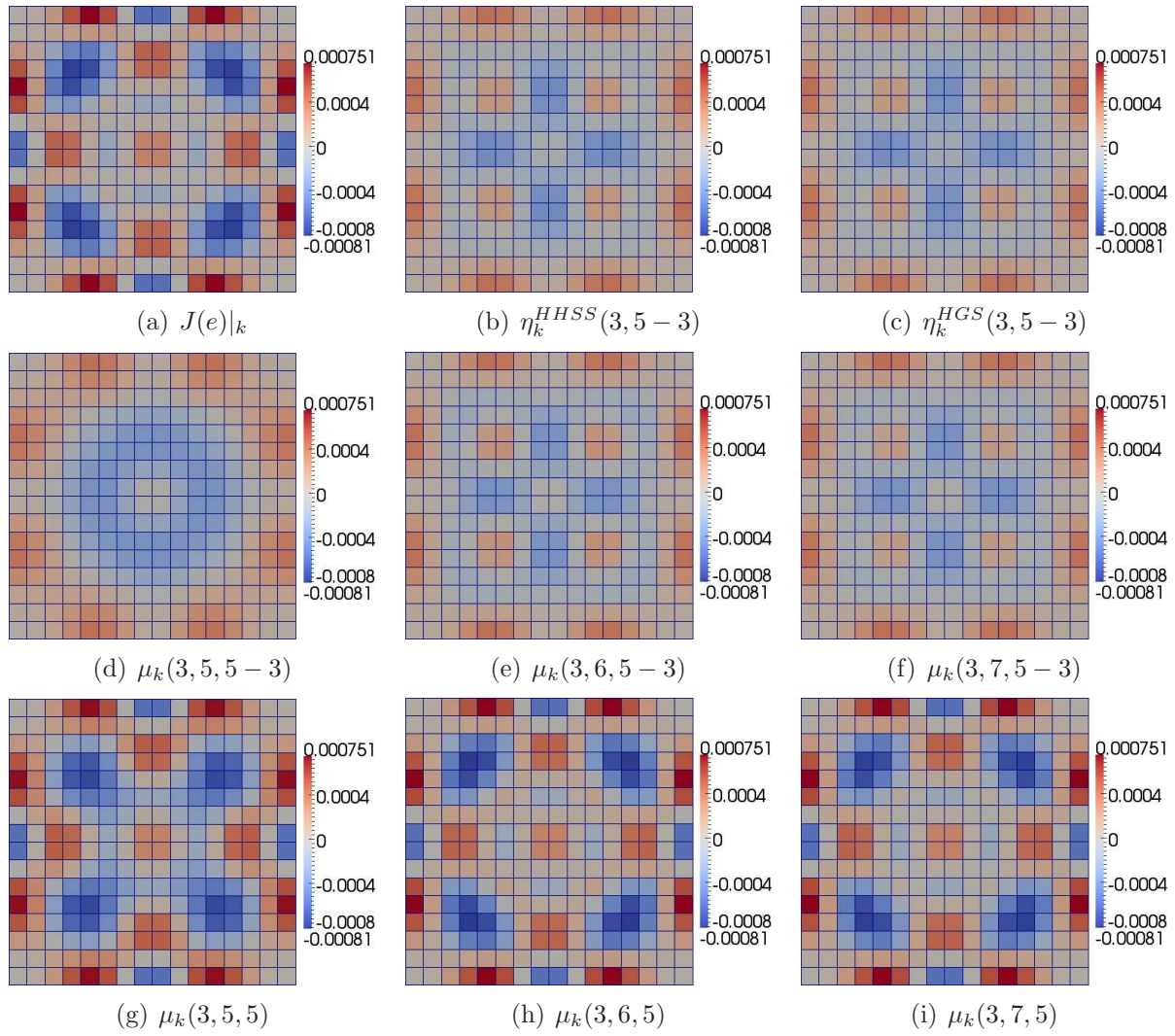


Figura 5.30: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

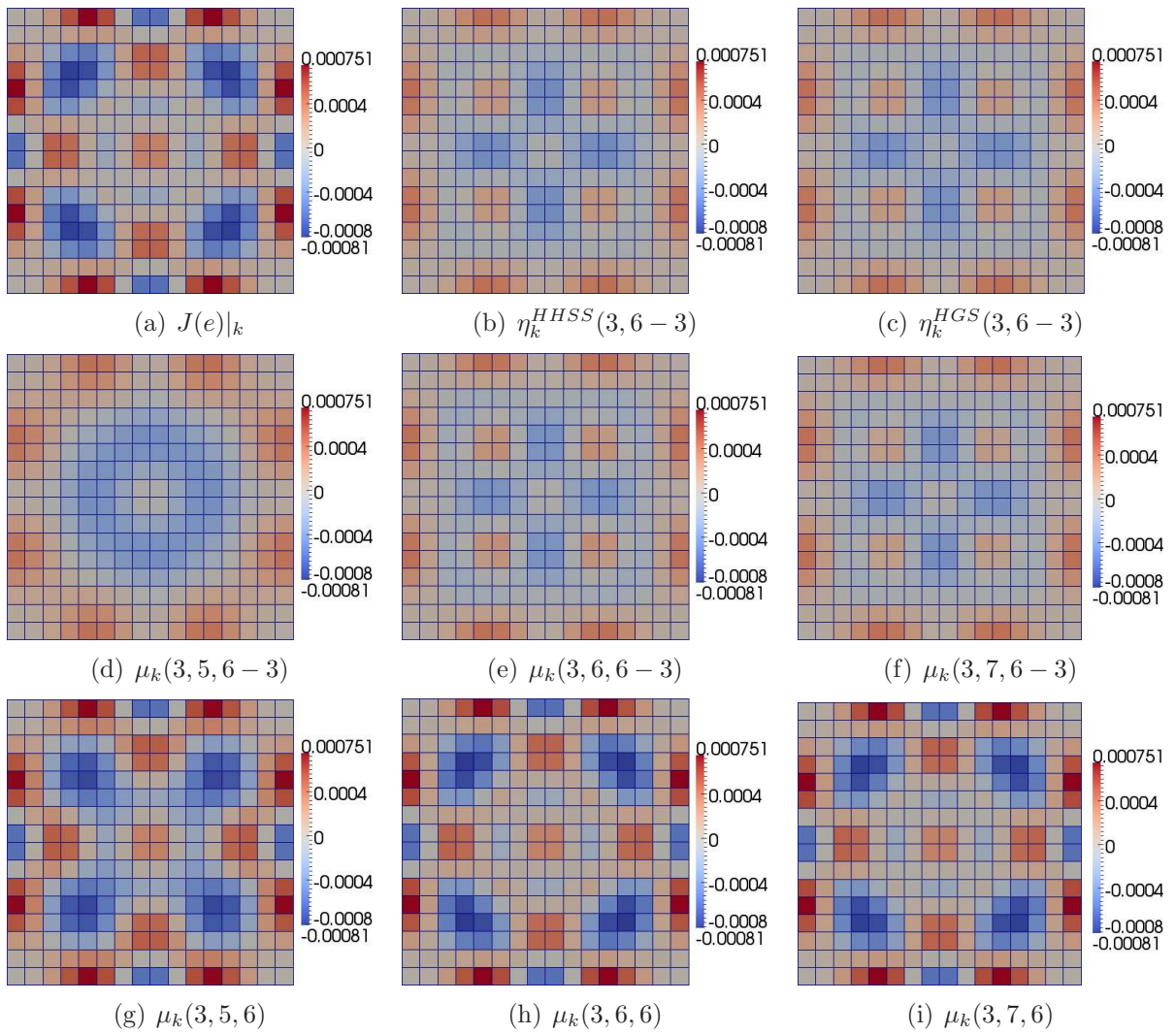


Figura 5.31: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

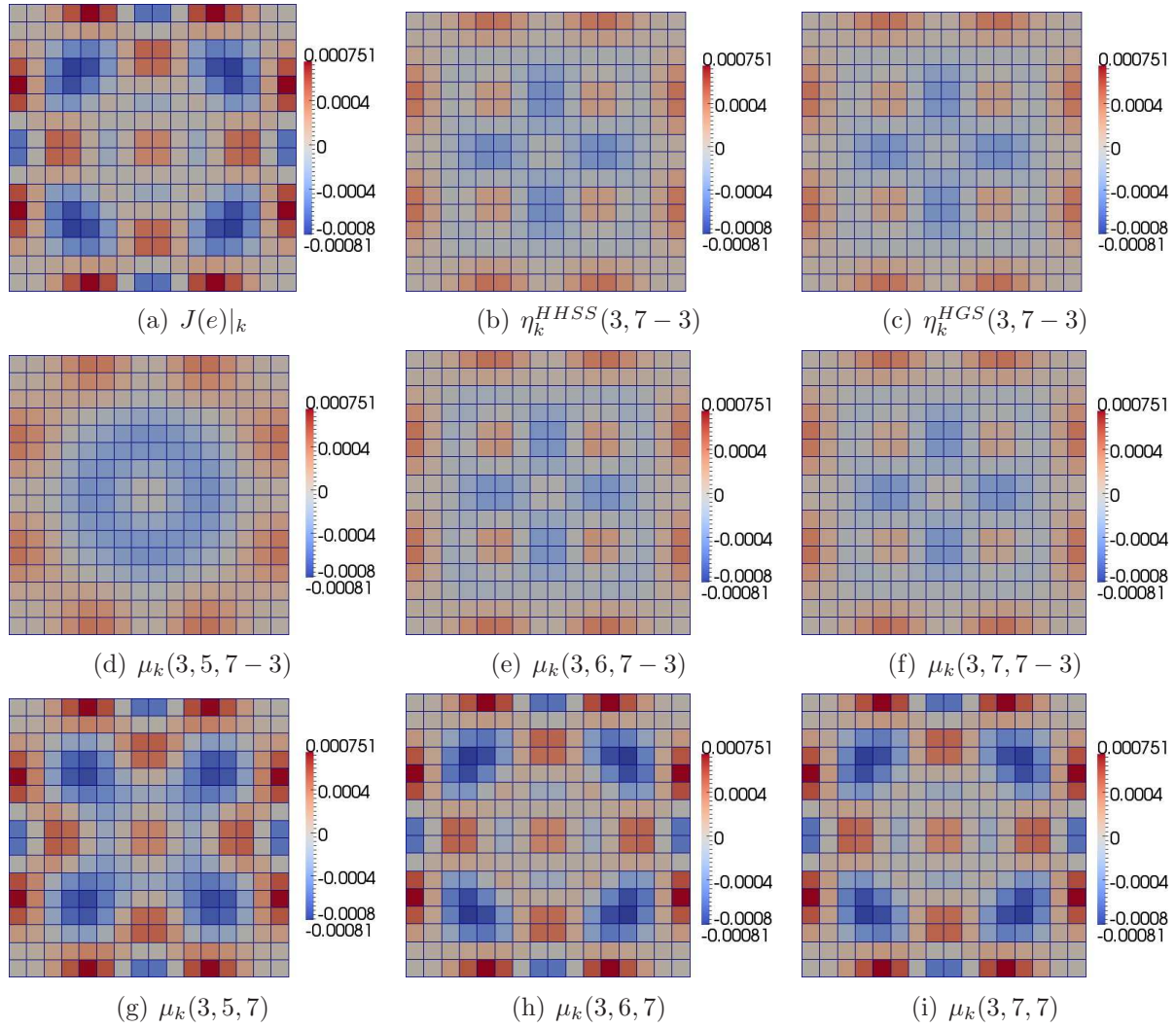


Figura 5.32: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 7 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

Podemos concluir desses resultados que o indicador $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$ apresenta melhor eficiência local que os demais, e essa eficiência depende muito da qualidade da aproximação u^+ .

Em comparação com os resultados do Experimento 1, para a equação de Poisson, podemos perceber que, devido ao número de termos e a ordem das derivadas envolvidas nos termos de cada indicador serem maiores para a equação biharmônica, a diferença entre os indicadores η_k^{HHSS} , η_k^{HGS} e μ_k é muito maior. Assim, para a equação biharmônica, os indicadores de erro são mais sensíveis a diferentes distribuições dos erros entre os elementos.

A Figura 5.33 mostra como os indicadores η_k^{HHSS} , η_k^{HGS} e μ_k , decompõem a propriedade de ortogonalidade entre os elementos para esse experimento. Concluímos, a exemplo dos experimentos para a equação de Poisson, que o indicador η_k^{HHSS} mantém a ortogonalidade localmente, ou seja $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{DG})$ é numericamente zero para todos os elementos k . Também de forma análoga aos experimentos anteriores, os indicadores μ_k e η_k^{HGS} não mantêm a ortogonalidade como uma propriedade local.

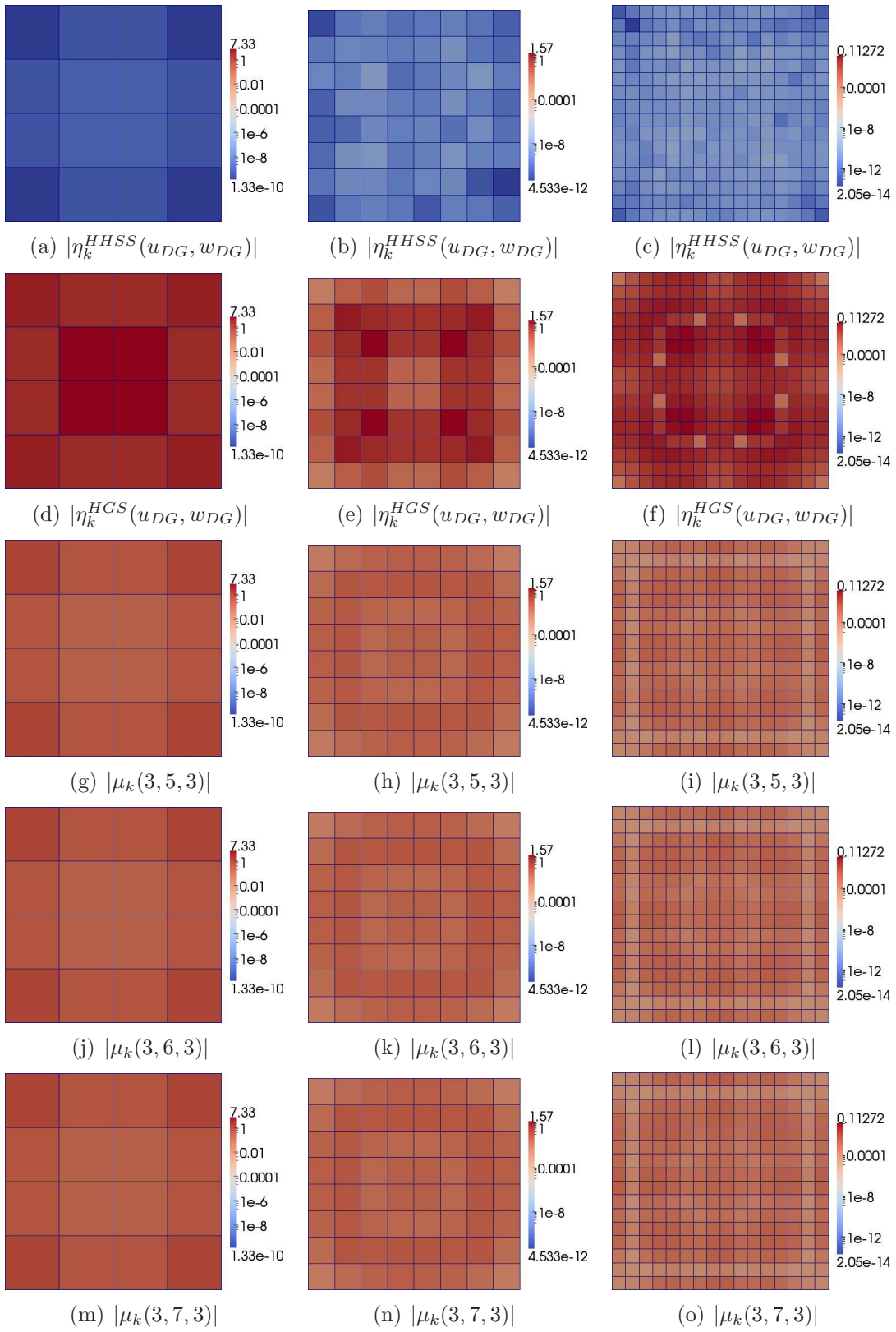


Figura 5.33: Indicadores $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{DG})$, na primeira linha, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w_{DG})$, na segunda linha, e $\mu(u_{DG}, u^+, w_{DG})$, com u^+ de grau 4, 5 e 6, nas linhas 3, 4 e 5, respectivamente.

Experimento 2

Assim como no experimento anterior, consideramos o domínio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e o problema de valor de contorno

$$\Delta^2(u) = f \quad \text{em } \Omega,$$

com

$$u = g_0 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (5.62)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = g_1 \quad \text{em } \partial\Omega \quad (5.63)$$

em que as funções f , g_0 e g_1 são impostas de forma que a solução seja $u = \frac{(1+x)^2}{4} \sin(2\pi xy)$. O funcional de interesse nesse experimento é $J(u) = \int_{\Omega} u \Delta^2(w) d\Omega$, em que w é a solução do problema dual associado, $w = \sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y) e^{-(x+y)}$. Desta forma, não temos as mesmas simetrias que as soluções do experimento anterior.

Nas Figuras 5.34 - 5.42 comparamos o erro no funcional restrito a cada elemento e os indicadores de erros discutidos, com várias configurações de espaços de aproximação.

Nas sub-figuras (b) e (c) das Figuras 5.34 - 5.42 vemos que os indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} aproximam razoavelmente o erro local, porém os indicadores μ_k , nas sub-figuras (d)-(f), são melhores nesta aproximação. Também fica claro que é necessário um certo nível de enriquecimento de u^+ para que os indicadores μ_k aproximem bem o erro localmente, o que fica mais evidente principalmente em malhas mais grossas, como mostrado nas Figuras 5.34, 5.37 e 5.40.

Assim, como nos demais experimentos, podemos ver na Figura 5.43 que o indicador η_k^{HHSS} mantém a ortogonalidade localmente, e os indicadores η_k^{HGS} e μ_k não mantêm a ortogonalidade localmente, embora a mantenham globalmente.

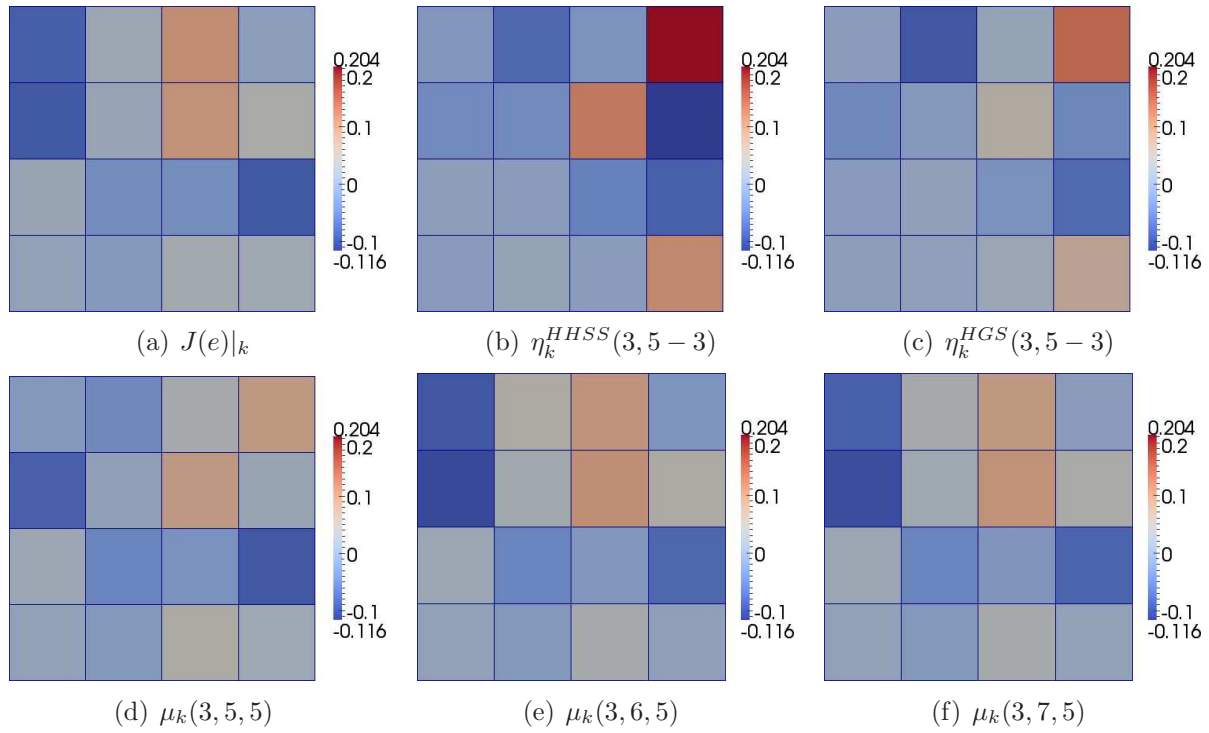


Figura 5.34: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

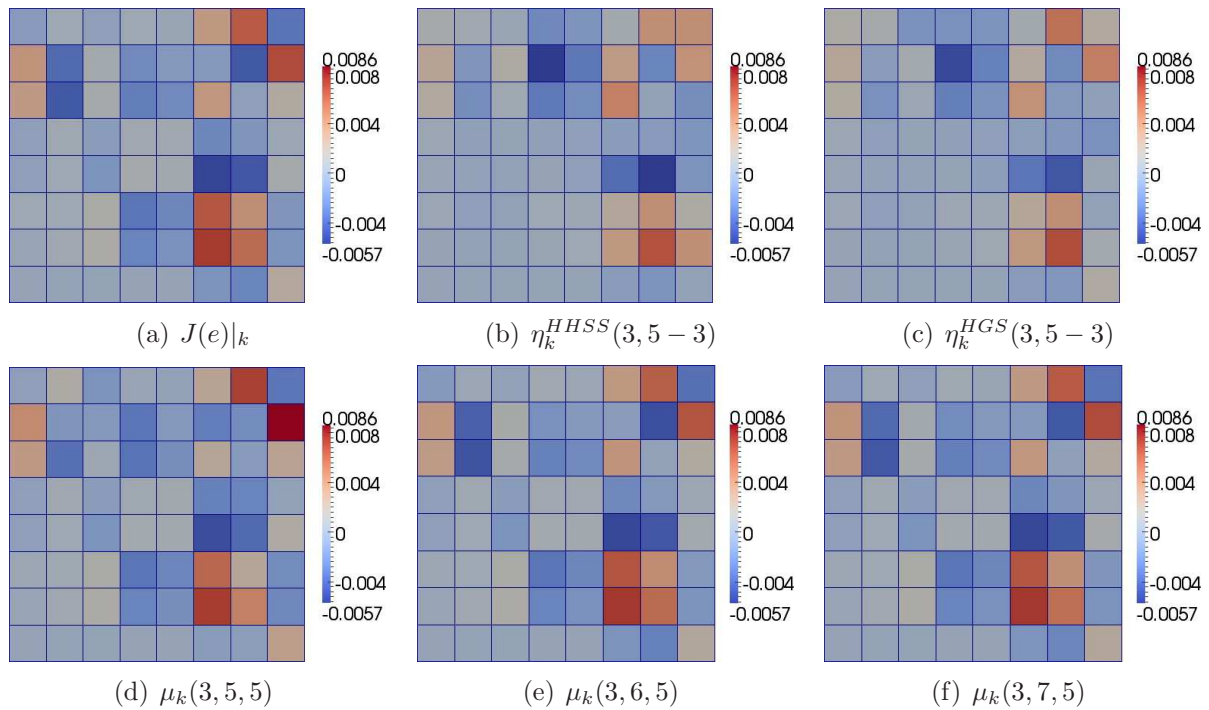


Figura 5.35: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

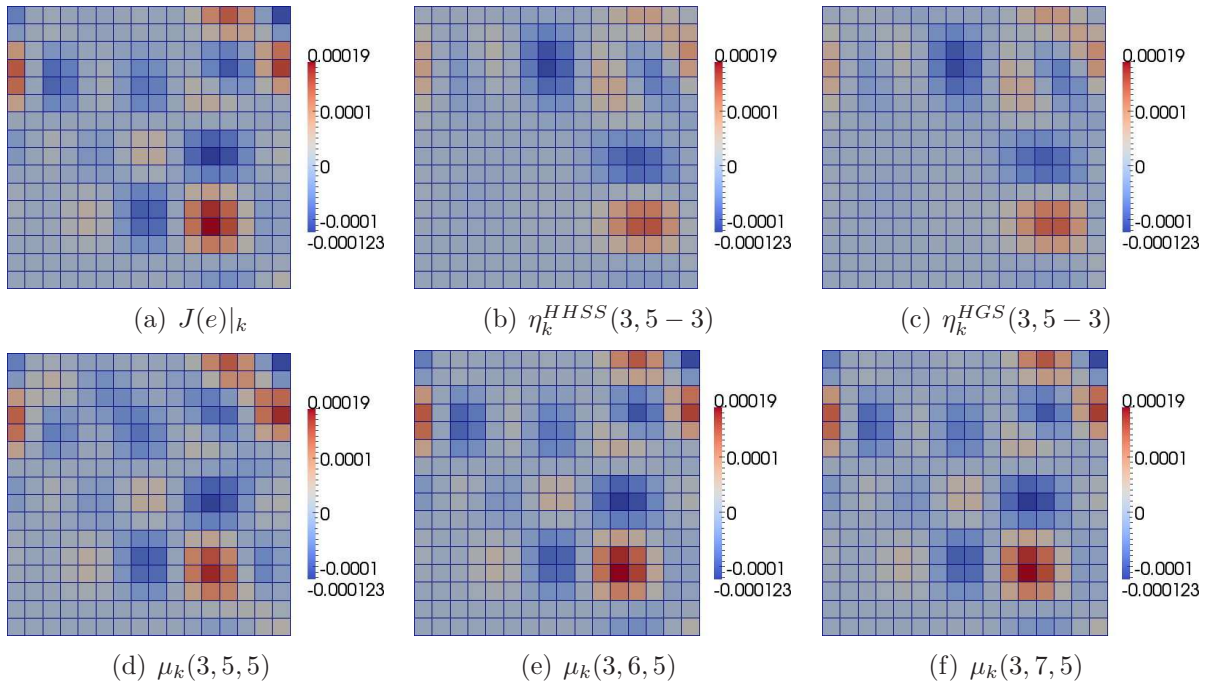


Figura 5.36: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 5 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

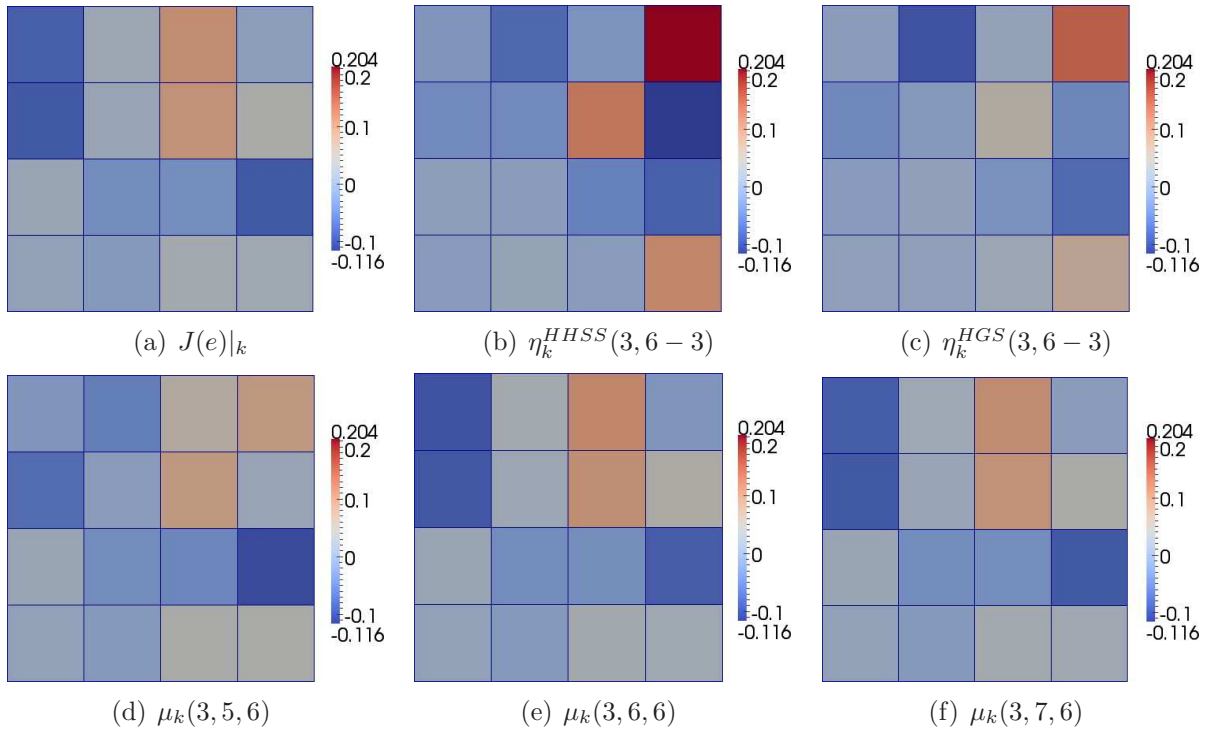


Figura 5.37: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

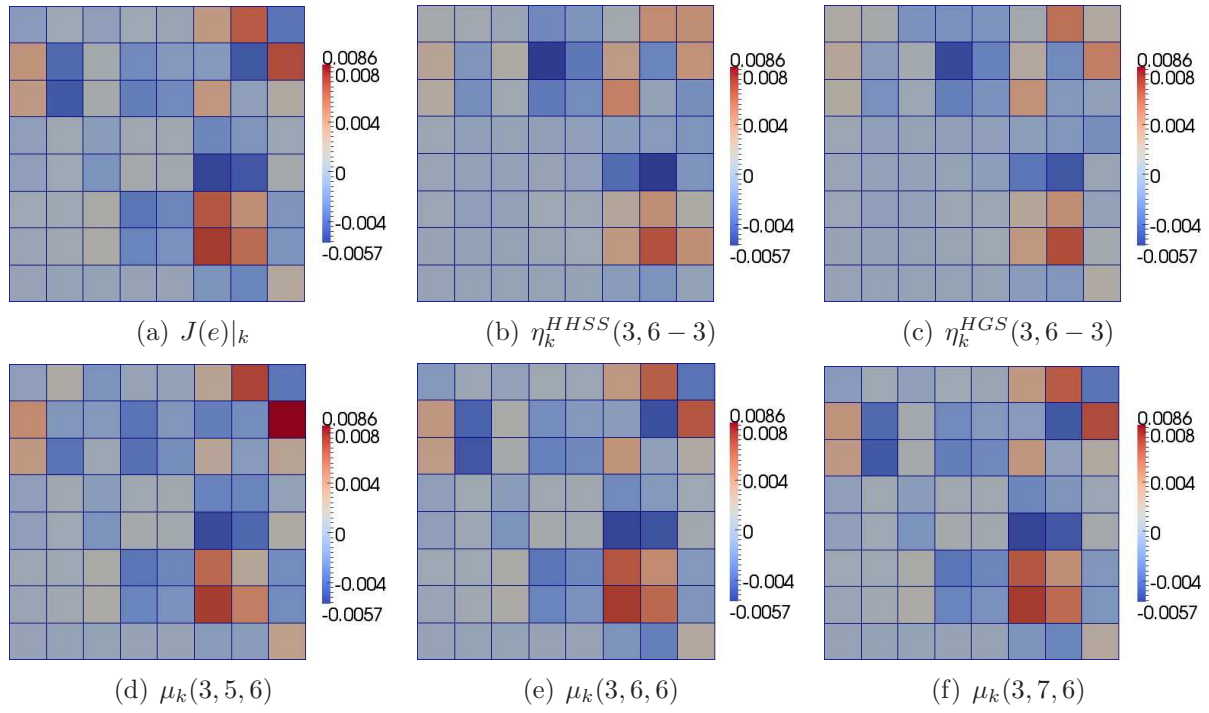


Figura 5.38: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

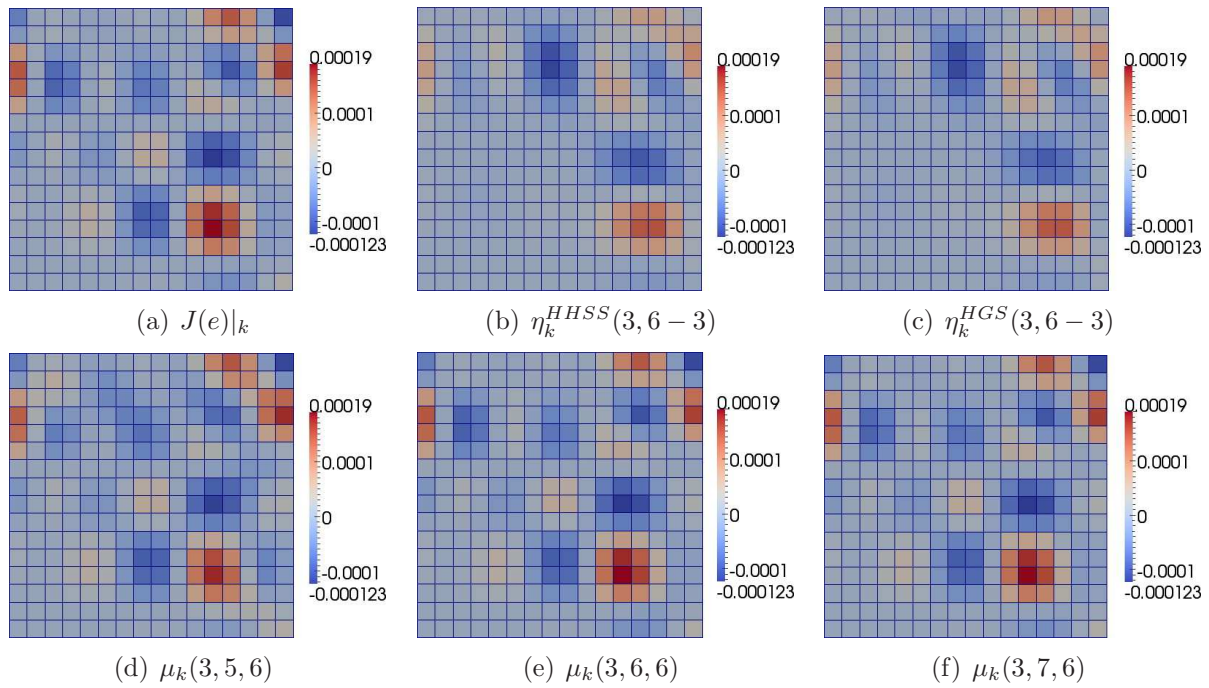


Figura 5.39: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 6 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

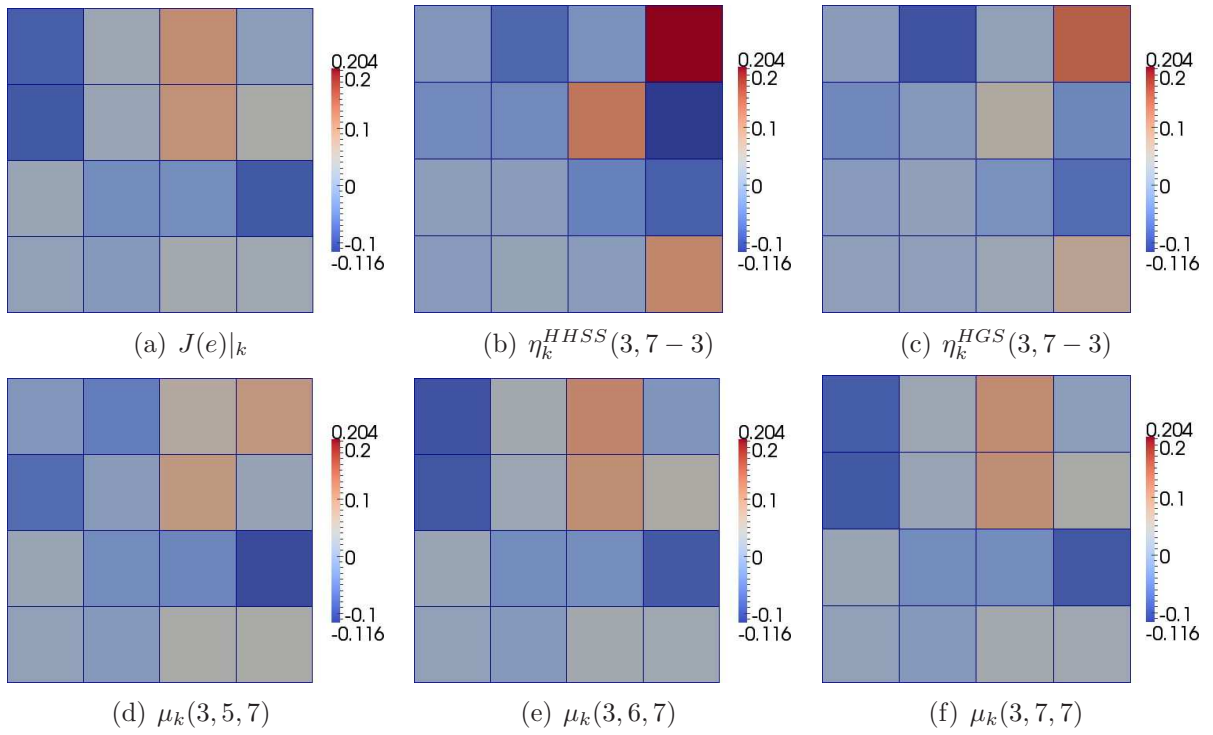


Figura 5.40: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 7 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

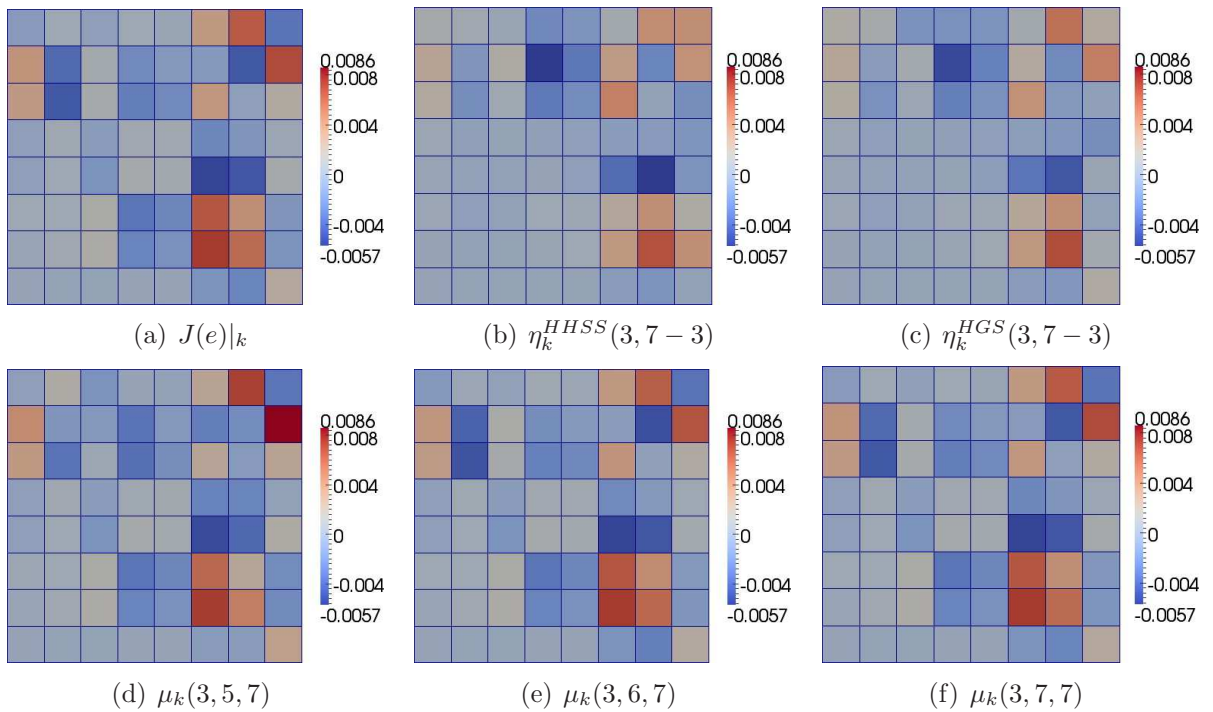


Figura 5.41: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 7 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

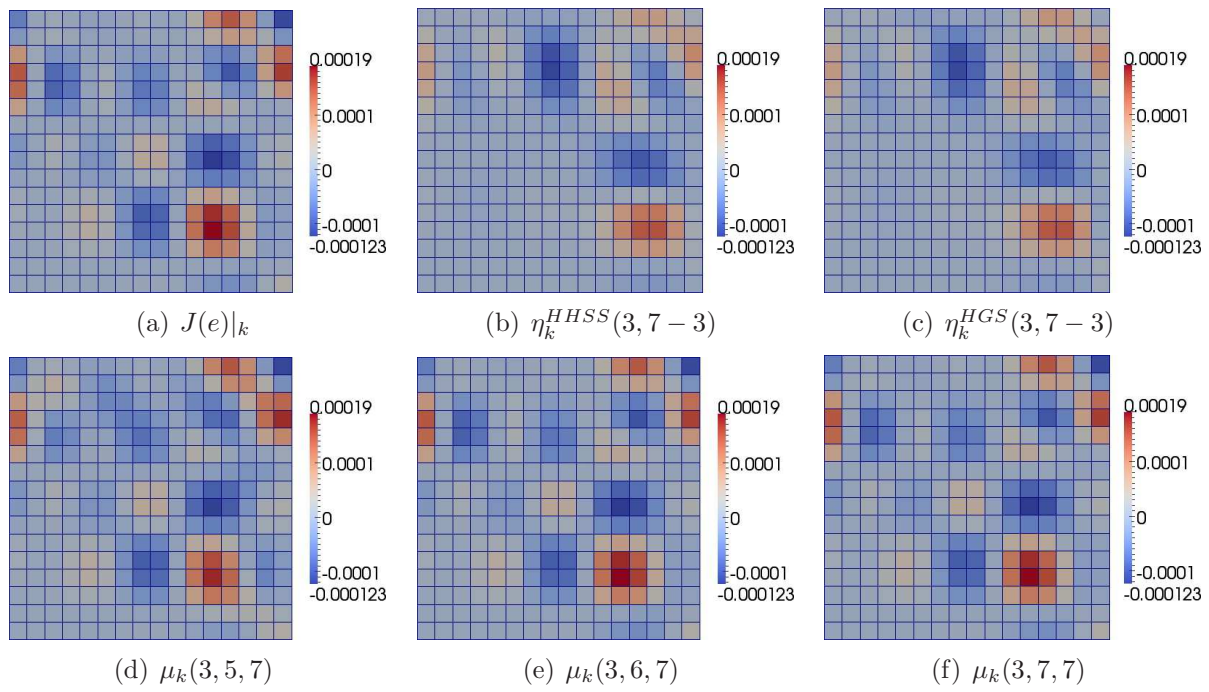


Figura 5.42: Erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos com aproximações DGFEM de grau constante 7 para w^+ e 5, 6 e 7 para u^+ .

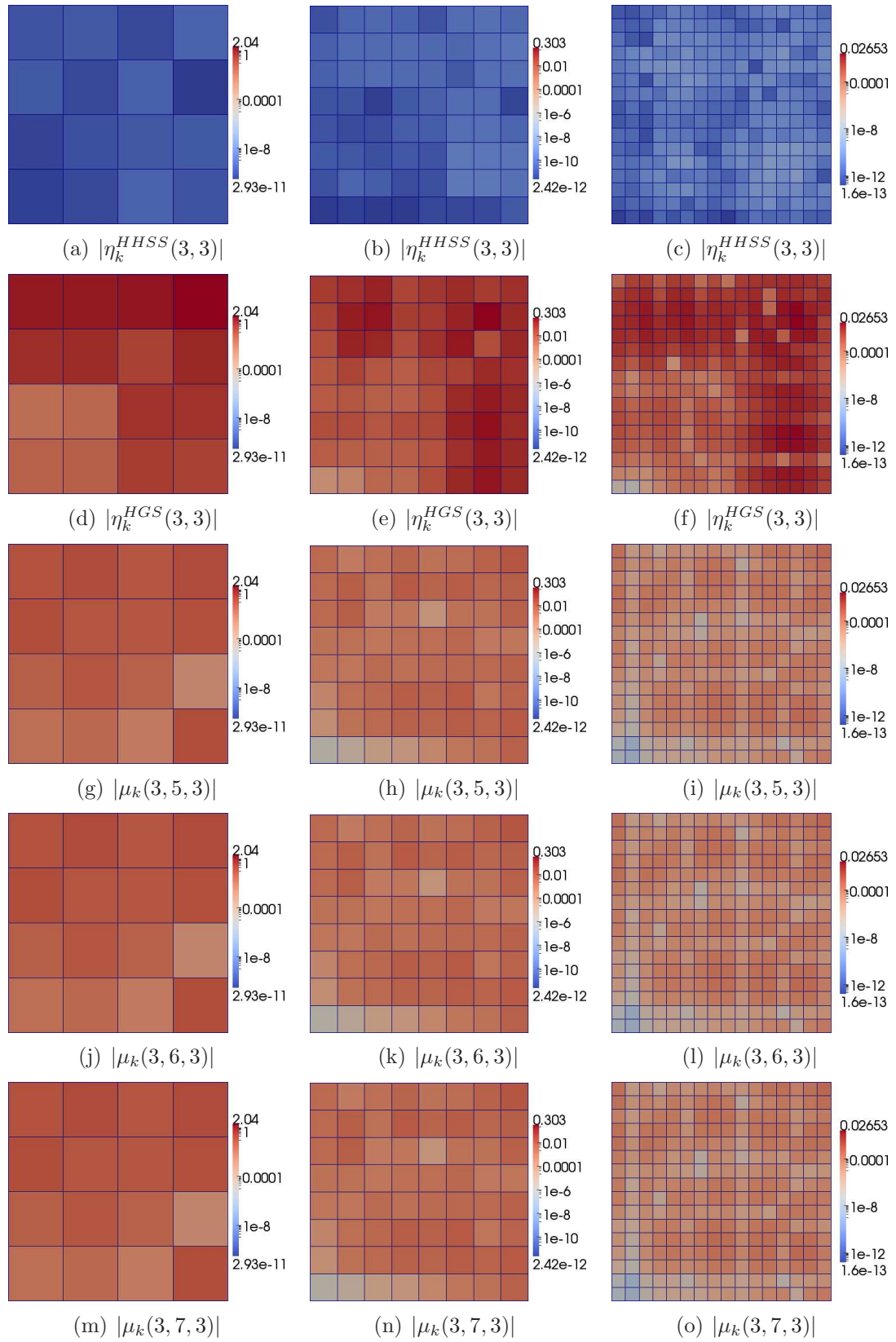


Figura 5.43: Indicadores de erro $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w_{DG})$, na primeira linha, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w_{DG})$, na segunda linha, e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w_{DG})$, com u^+ de grau 5, 6 e 7 nas linhas 3, 4 e 5, respectivamente.

Capítulo 6

Aproximações recuperadas

Os indicadores de erro *goal-oriented* baseados em argumentos de dualidade, como os apresentados nos capítulos anteriores, necessitam de uma função w que, idealmente, deveria ser a solução exata do problema dual. Mas, em geral, é tomada como uma aproximação DGFEM w^+ da solução dual em um espaço que não esteja contido no espaço de aproximação primal, devido à ortogonalidade. A alternativa mais simples é w^+ ser uma aproximação DGFEM em um espaço p -enriquecido em relação ao espaço de aproximação usado para o problema primal.

Das identidades (4.7) e (4.10), temos que o erro, $J(e)$, difere da soma dos indicadores de erro, $\sum_k \eta_k^{HHSS} = \sum_k \eta_k^{HGS} = \sum_k \mu_k$, apenas porque os indicadores usam w^+ ao invés de w . Assim podemos concluir que a eficiência global da estimativa depende apenas da qualidade de w^+ enquanto aproximação de w .

A função u^+ , que é usada no indicador de erro μ_k , tem um contexto diferente. Lembramos que u^+ só é utilizada sobre as faces interiores, com o objetivo de dividir, com precisão, os saltos de u_{DG} e suas derivadas na faces entre os elementos, visando melhorar a eficiência local do indicador.

Idealmente, como mostrado nos Teoremas 6 e 7, se u^+ é igual a u sobre todas as faces interiores, então a eficiência local é ótima. Ou seja, $\mu_k(u_{DG}, u, w) = J(e)$. Observamos que a utilização da média dos traços de uma aproximação DGFEM p -enriquecida u^+ não afeta a eficiência global do indicador $\mu(u_{DG}, u^+, w)$.

É evidente que, em geral, as soluções exatas dos problemas primal e dual são desconhecidas e as aproximações DGFEM p -enriquecidas u^+ e w^+ , para um nível de enriquecimento suficientemente grande, cumprem seu papel de aproximar as soluções exatas melhor que as aproximações u_{DG} e w_{DG} . Porém, a falta de continuidade de w^+ e u^+ , mesmo que imperceptível a olho nu, poderia afetar a eficiência dos indicadores. Nas suas derivadas, principalmente aquelas que não são penalizadas, essas discontinuidades são mais acentuadas e o

efeito poderia ser mais significativo. Nesse contexto, poderia ser pertinente a proposta de usar um procedimento para suavizar essas aproximações e suas derivadas, como descrito na continuação.

6.1 Recuperação de aproximações DGFEM

Neste seção apresentamos um algoritmo de pós-processamento para a obtenção das aproximações DGFEM u^+ e w^+ . Esse algoritmo consiste em primeiro obter aproximações enriquecidas DGFEM e, a partir delas, fazer iterações em busca de outras aproximações que minimizem a energia do sistema de rigidez do DGFEM respectivo, fazendo restrições de continuidade das aproximações e/ou de algumas de suas derivadas sobre as faces entre os elementos. Esse algoritmo resulta ser um problema de ponto de sela com boas propriedades e usaremos o método de Uzawa com direções de gradientes conjugadas para resolvê-lo.

Seja $Ax = b$ o sistema algébrico obtido do DGFEM com um espaço de aproximação p -enriquecido, em que A é a matriz de rigidez e b é o vetor de carga. Como a formulação DGFEM considerada é simétrica e consideramos apenas os casos difusivos, a matriz A é simétrica, para as equações de Poisson e biarmônica. Além disso, para uma penalização suficientemente grande, a forma bilinear da formulação DGFEM é coerciva sobre o espaço de aproximação, ou seja A é positiva-definida.

Percorrendo todas as faces da malha e, sobre cada face, impondo as restrições desejadas, construímos a matriz B , em que cada linha representa uma restrição em um ponto de uma face. Observamos que, como as restrições representam a imposição de uma continuidade, elas nunca serão inconsistentes. As restrições desejadas têm a forma

$$Bx = g, \tag{6.1}$$

em que g só será diferente do vetor nulo se as condições de contorno não forem homogêneas.

Resolver o sistema linear $Ax = b$ é equivalente a resolver o problema de minimizar $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$. Desta forma, consideramos o problema de programação quadrático com restrições de igualdade,

$$\text{Minimizar } f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \tag{6.2a}$$

$$\text{sujeito à restrição } Bx = g. \tag{6.2b}$$

Na análise do problema de programação quadrático com restrições de igualdade (6.2), das

condições de otimalidade de primeira ordem, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ g \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Sob as condições descritas para A e B , segundo o Teorema 16.2 de [54], a solução x^* de (6.3) é a única solução de (6.2).

Segundo [16], vamos caracterizar o sistema (6.3). Consideremos um sistema linear 2×2 em blocos da forma,

$$\begin{bmatrix} A & B_1^T \\ B_2 & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ g \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{m \times m} \text{ com } n \geq m. \quad (6.5)$$

Vamos supor que A ou B_1 ou B_2 são não nulas. Segundo [16], a resolução do sistema linear acima é um problema de ponto de sela se seus blocos satisfazem pelo menos uma das seguintes condições:

- C1) A é simétrica: $A = A^T$.
- C2) a parte simétrica de A , $H \equiv \frac{1}{2}(A + A^T)$, é positiva semidefinida.
- C3) $B_1 = B_2 = B$.
- C4) C é simétrico e positivo semidefinido.
- C5) $C = 0$ (matriz zero).

O caso mais simples é quando todas as condições são satisfeitas. Nesta situação, o sistema linear (6.4) toma a forma (6.3). Assim, o passo crucial para a recuperação de aproximações é a resolução de um problema de ponto de sela, cuja forma é a mais simples possível.

6.2 O método de Uzawa

Como o problema de ponto de sela que precisamos resolver tem as melhores características que podemos desejar, vamos usar o método de Uzawa, que funciona muito bem para esse tipo de problema. Consideremos o seguinte problema de ponto de sela: Encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ que seja solução de

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ g \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

em que A é uma matriz $n \times n$, real e positiva-definida, $b \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^m$, $m < n$ e B é uma matriz $m \times n$, real e de posto completo. Para um chute inicial $y_0 \in \mathbb{R}^m$, o algoritmo de Uzawa para tal problema é determinado pela seguinte iteração acoplada

$$\text{Resolva: } Ax_k = b - B^T y_{k-1} \quad (6.7)$$

$$\text{Defina: } y_k = y_{k-1} + \alpha(Bx_k - g), \quad (6.8)$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de relaxação.

Como a matriz A é simétrica e definida positiva, e portanto invertível, podemos multiplicar a equação correspondente à primeira linha de (6.6) por A^{-1} , isolar x nessa equação e substituir na equação correspondente à segunda linha de (6.6). Desta forma obtemos a equação

$$BA^{-1}B^T y = BA^{-1}b - g. \quad (6.9)$$

Como B tem posto completo, a matriz $BA^{-1}B^T$ é simétrica e definida-positiva. Essa matriz é chamada de complemento de Schur da matriz A e a denotamos por S .

Isolando x_k na primeira equação e substituindo na segunda, eliminando x_k da segunda equação, obtemos

$$y_k = y_{k-1} + \alpha(BA^{-1}b - g - BA^{-1}B^T y_{k-1}), \quad (6.10)$$

o que mostra que o método de Uzawa é equivalente à iteração estacionária de Richardson aplicada ao sistema (6.9). Denotando o maior autovalor de S por λ_{max} , [66] mostra que a iteração (6.10) converge se α é tal que

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{max}}. \quad (6.11)$$

Em alguns casos, para contornar a dificuldade de resolver o sistema linear envolvendo A , o método de Arrow-Hurwicz, veja [6], usa direções de gradiente, cuja iteração é

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_2(b - B^T y_{k-1}) \quad (6.12)$$

$$y_k = y_{k-1} + \alpha(Bx_k - g). \quad (6.13)$$

Várias melhorias podem ser agregadas ao método de Arrow-Hurwicz, incluindo precondi-

cionamentos da forma

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_2 Q_A^{-1}(b - B^T y_{k-1}) \quad (6.14)$$

$$y_k = y_{k-1} + \alpha Q_B^{-1}(Bx_k - g). \quad (6.15)$$

Por outro lado, também existem os chamados métodos de Uzawa inexatos, que consistem na resolução do sistema linear envolvendo A através de métodos iterativos. Os métodos que usam subespaço de Krylov são comumente os mais usados nessa combinação com os métodos de Uzawa e Arrow-Hurwicz. Os métodos preconditionados e inexatos são muito próximos e podem, inclusive, ter suas análises feitas de forma unificada.

Uma análise detalhada da convergência dos métodos de Uzawa inexatos é apresentada de forma abstrata em [27]. Nesta análise, mostra-se que, se o método iterativo usado para resolver a iteração interna for modestamente preciso, o algoritmo de Uzawa inexato é convergente, com taxa de convergência próxima à taxa do algoritmo exato.

O algoritmo com direções de gradiente conjugadas é apresentado no Algoritmo 1.

Sejam $y_0 \in \mathbb{R}^m$, x_1 tal que $Au_1 = b - B^T y_0$ e $d_1 = -q_1 = Bx_1 - g$.

Para ($k = 1$; $k < NItMax$; $k++$) faça

$$p_k = B^T d_k$$

$$h_k = A^{-1} p_k$$

$$\alpha_k = \frac{\langle q_k, q_k \rangle}{\langle p_k, h_k \rangle}$$

$$y_k = y_{k-1} - \alpha_k d_k$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k$$

$$q_{k+1} = g - Bx_{k+1}$$

$$\beta_k = \frac{\langle q_{k+1}, q_{k+1} \rangle}{\langle q_k, q_k \rangle}$$

$$d_{k+1} = -q_{k+1} + \beta_k d_k$$

Se o critério de parada é satisfeito **então**

Pare

fim

fim

Algoritmo 1: Algoritmo de Uzawa com direções conjugadas

6.3 Exemplos

Nesta seção apresentamos experimentos numéricos que ilustram os resultados obtidos pelo algoritmo de Uzawa para a obtenção de aproximações recuperadas, conforme apresentadas

anteriormente. O critério de parada para o Algoritmo 1 que utilizamos nesses exemplos é $\frac{\|x_{k+1}-x_k\|_2+\|y_{k+1}-y_k\|_2}{2} < 10e-12$.

6.3.1 Exemplo 1

Consideramos o problema de difusão sobre $\Omega = (0, 1)^2$ com condições de contorno de Dirichlet e vetor de carga tais que a solução exata seja $u(x, y) = \text{sen}^2(\pi x)\text{sen}^2(\pi y)$.

Observamos que este problema não tem qualquer tipo de singularidade e que os dados de entrada também são suaves, o que permite que as aproximações DG produzam seus melhores resultados.

Na Figura 6.1 comparamos as descontinuidades da aproximação DGFEM, da aproximação recuperada e dos respectivos gradientes normais a cada face. As aproximações foram obtidas em uma malha regular de 256 elementos e com grau polinomial constante 3. Cada ponto de 6.1(a) e de 6.1(b) indicam os valores de $\int_{\gamma} |[\tilde{u}]| ds$ e $\int_{\gamma} |[\nabla \tilde{u} \cdot \mathbf{n}]| ds$, respectivamente, para uma interface γ da malha, sendo que os pontos em vermelho são para a aproximação DGFEM e os em azul para a aproximação recuperada.

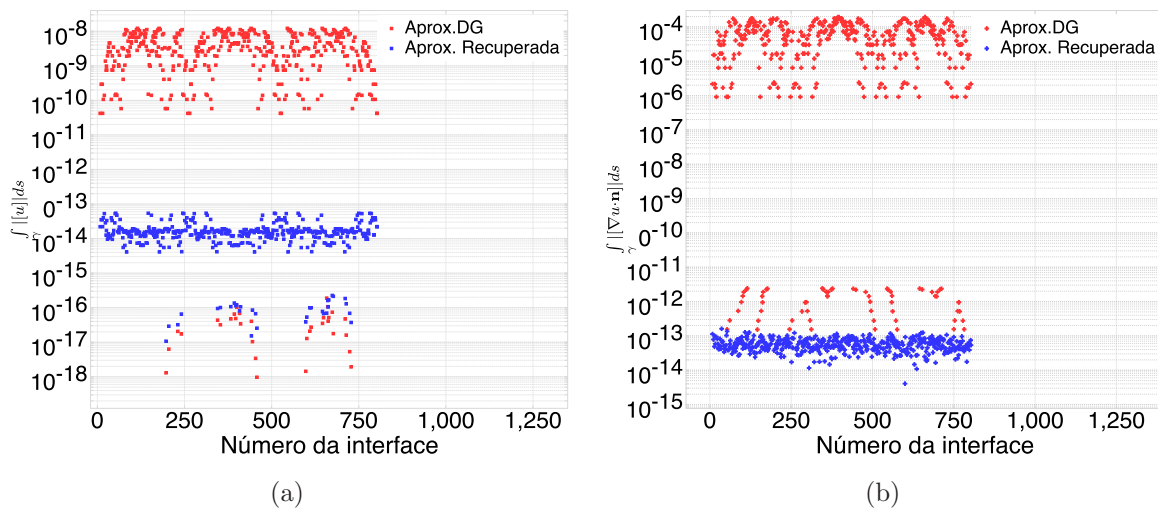


Figura 6.1: Valores de $\int_{\gamma} | [u] | ds$, (6.1(a)), e $\int_{\gamma} | [\nabla u \cdot \mathbf{n}] | ds$, (6.1(b)), por interface da malha regular de 256 elementos, para as aproximações DGFEM e recuperada, ambas de grau polinomial 3.

Podemos observar que a suavização obtida na aproximação recuperada não é gratuita: a aproximação recuperada tem seu erro nas normas $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ um pouco maiores que a aproximação DGFEM. Porém a taxa de convergência da aproximação recuperada é quase a mesma da aproximação DGFEM, como indicado nas Tabelas 6.1 e 6.2.

Núm. de Elem.	Norma H^1 do erro	Norma L^2 do erro	Taxa H^1	Taxa L^2
4	6.70E-02	3.59E-03		
16	2.81E-02	8.71E-04	1.25	2.04
64	4.38E-03	7.70E-05	2.68	3.50
256	6.14E-04	5.79E-06	2.83	3.73
1024	8.07E-05	3.91E-07	2.93	3.89
4096	1.03E-05	2.52E-08	2.97	3.95

Tabela 6.1: Erros e taxas de convergência da aproximação recuperada de grau constante 3.

Núm. de Elem.	Norma H^1 do erro	Norma L^2 do erro	Taxa H^1	Taxa L^2
4	4.78E-02	1.77E-03		
16	2.30E-02	5.67E-04	1.06	1.65
64	2.92E-03	3.72E-05	2.97	3.93
256	3.67E-04	2.38E-06	2.99	3.97
1024	4.59E-05	1.50E-07	3.00	3.99
4096	5.73E-06	9.41E-09	3.00	3.99

Tabela 6.2: Erros e taxas de convergência da aproximação DGFEM de grau constante 3.

O fato do erro das aproximações recuperadas ser um pouco maior do que o das aproximações DGFEM não é tão importante no contexto em que as aproximações recuperadas são usadas. Isto é, como aproximações em espaços enriquecidos em relação ao espaço da aproximação que desejamos estimar o erro. Por exemplo, para estimativas de uma aproximação DGFEM de grau polinomial 1, vemos na Tabela 6.3 que os erros são maiores e as taxas de convergência menores que os da aproximação recuperada de grau 3.

Núm. de Elem.	Norma H^1 do erro	Norma L^2 do erro	Taxa H^1	Taxa L^2
4	8.69E-01	5.31E-02		
16	8.53E-01	4.67E-02	0.03	0.19
64	4.36E-01	1.34E-02	0.97	1.80
256	2.19E-01	3.64E-03	1.00	1.88
1024	1.09E-01	9.45E-04	1.00	1.95
4096	5.46E-02	2.40E-04	1.00	1.97

Tabela 6.3: Erros e taxas de convergência da aproximação DGFEM de grau constante 1.

6.3.2 Exemplo 2

Nesse exemplo consideramos a equação Biharmônica sobre o domínio $\Omega = (0, 1)^2$ e condições de contorno essenciais tais que a solução do problema de valor de contorno seja a função $u(x, y) = \text{sen}^2(\pi x)\text{sen}^2(\pi y)$.

Assim como no exemplo anterior, o problema não tem qualquer tipo de singularidade. Uma diferença importante do exemplo anterior é que as restrições, continuidade da aproximação e da componente normal do seu gradiente, que impomos à aproximação recuperada, também são impostas de forma fraca, através da penalização do DGFEM.

A comparação das discontinuidades das aproximações DGFEM e recuperada são apresentadas na Figura 6.2 que compara $\int_{\gamma} |[\tilde{u}]| ds$, $\int_{\gamma} |[\nabla \tilde{u} \cdot \mathbf{n}]| ds$, $\int_{\gamma} |[\Delta \tilde{u}]| ds$ e $\int_{\gamma} |[\nabla \Delta \tilde{u} \cdot \mathbf{n}]| ds$ sobre cada interface γ , sendo que os pontos em vermelho indicam os valores para a aproximação DGFEM e os em azul da aproximação recuperada.

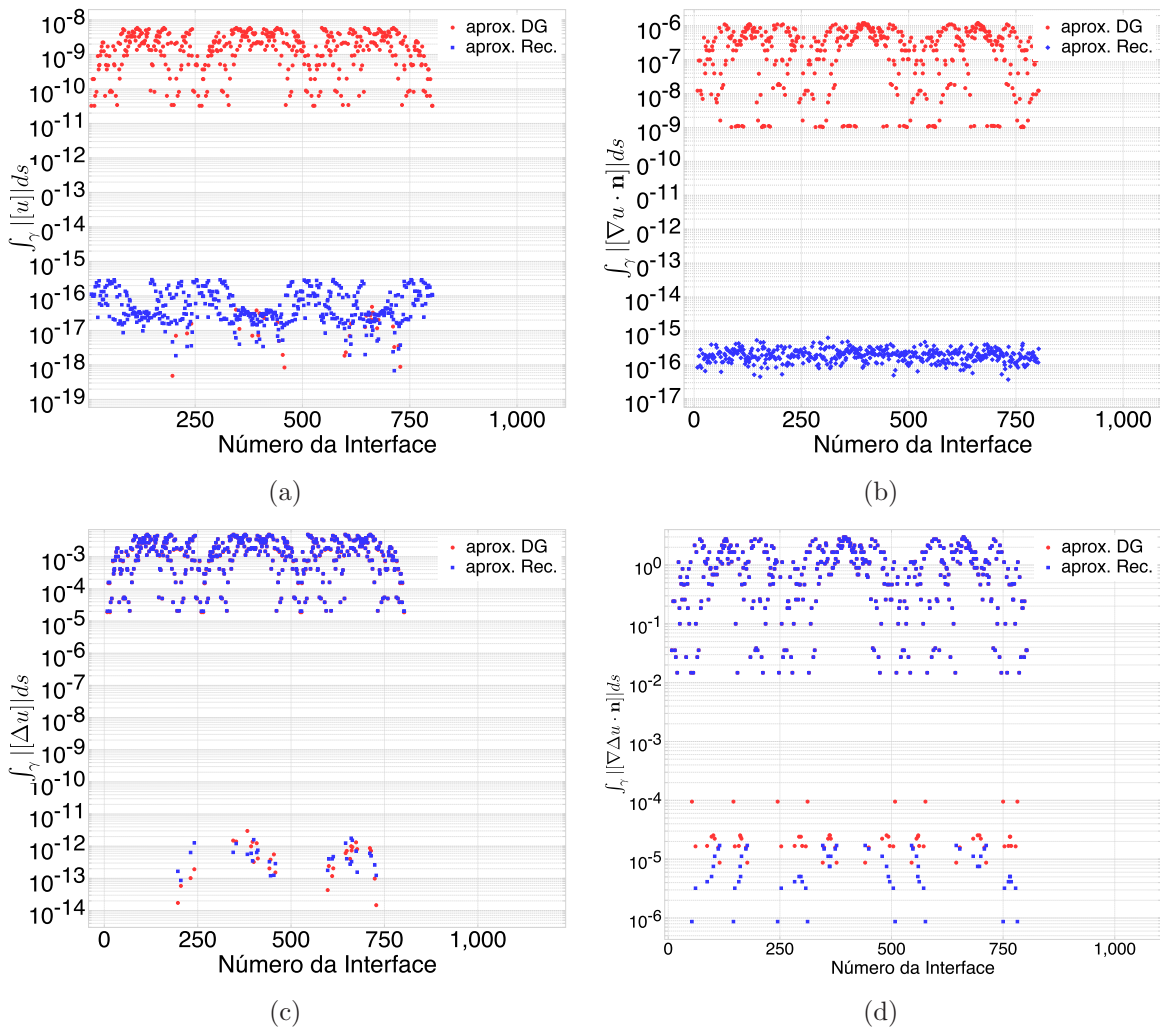


Figura 6.2: Valores de $\int_{\gamma} |u| ds$, (6.2(a)), $\int_{\gamma} |\nabla u \cdot \mathbf{n}| ds$, (6.2(b)), $\int_{\gamma} |\Delta u| ds$, (6.2(c)), e $\int_{\gamma} |\nabla \Delta u \cdot \mathbf{n}| ds$, (6.2(d)), por interface da malha de 256 elementos, sendo u as aproximações DGFEM e recuperada, ambas de grau polinomial 3.

Vemos que as quantidades que receberam a restrição de continuidade na aproximação recuperada, u e $\nabla u \cdot \mathbf{n}$, tornaram-se numericamente contínuas.

As demais quantidades, Δu e $\nabla \Delta u \cdot \mathbf{n}$, apresentadas na Figura 6.2, que não receberam restrições de continuidade, permaneceram com suas descontinuidades muito próximas das obtidas na aproximação DGFEM.

Podemos aplicar as restrições a outras quantidades, desde que o espaço seja suficientemente rico e compatível com a quantidade de restrições.

Devido à grande semelhança entre a aproximação DGFEM e a aproximação recuperada, pois ambas penalizam as mesmas quantidades, a diferença entre os erros e as taxas de convergência são praticamente insignificantes, como podemos ver nas Tabelas 6.4 e 6.5.

Núm. de Elem.	Norma H^1 do erro	Norma L^2 do erro	Taxa H^1	Taxa L^2
4	7.72E-02	5.25E-03		
16	4.01E-02	2.53E-03	0.94	1.05
64	5.28E-03	1.65E-04	2.93	3.94
256	6.68E-04	1.04E-05	2.98	3.99
1024	8.37E-05	6.50E-07	3.00	4.00
4096	1.05E-05	4.07E-08	3.00	4.00

Tabela 6.4: Erros e taxas de convergência da aproximação recuperada de grau constante 3.

Núm. de Elem.	Norma H^1 do erro	Norma L^2 do erro	Taxa H^1	Taxa L^2
4	7.58E-02	4.66E-03		
16	4.00E-02	2.46E-03	0.92	0.92
64	5.26E-03	1.62E-04	2.93	3.93
256	6.64E-04	1.02E-05	2.98	3.98
1024	8.33E-05	6.44E-07	3.00	3.99
4096	1.04E-05	4.03E-08	3.00	4.00

Tabela 6.5: Erros e taxas de convergência da aproximação DGFEM de grau constante 3.

Assim, ilustramos como o algoritmo de recuperação apresentado comporta-se, suavizando as quantidades que receberam a restrição sem comprometer o erro de aproximação.

6.3.3 Exemplo 3

Nesse exemplo vamos comparar o uso das aproximações recuperadas nos indicadores de erro. Repetimos o Experimento 2 da Seção 5.3.1 utilizando as aproximações recuperadas apresentadas nesse capítulo.

O experimento considera a equação de Poisson,

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega, \quad (6.16)$$

sobre $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Além disso as condições de contorno de Dirichlet e função de carga f são tais que a solução exata é $u(x, y) = \frac{(1+x)^2}{4} \sin(2\pi xy)$.

A quantidade de interesse é a média da solução primal u sobre todo o domínio Ω , ponderada por Δw , a qual representamos pelo funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} \Delta(w)u \, dx dy, \quad (6.17)$$

em que $w(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-(x+y)}$.

Nas Figuras 6.3, 6.4 e 6.5, apresentamos os indicadores de erro *goal-oriented* para a aproximação u_{DG} de grau 2 e em que u^+ e w^+ têm graus 4 e 5. Porém o mais importante é que usamos as aproximações recuperadas no papel de u^+ e w^+ . Desta forma, podemos comparar os indicadores de erro usando aproximações DGFEM p -enriquecidas e aproximações p -enriquecidas e recuperadas.

Podemos ver nessas figuras que, para esse experimento, as aproximações recuperadas não afetam significativamente os indicadores. Assim prevaleceu a importância do enriquecimento das aproximações u^+ e w^+ .

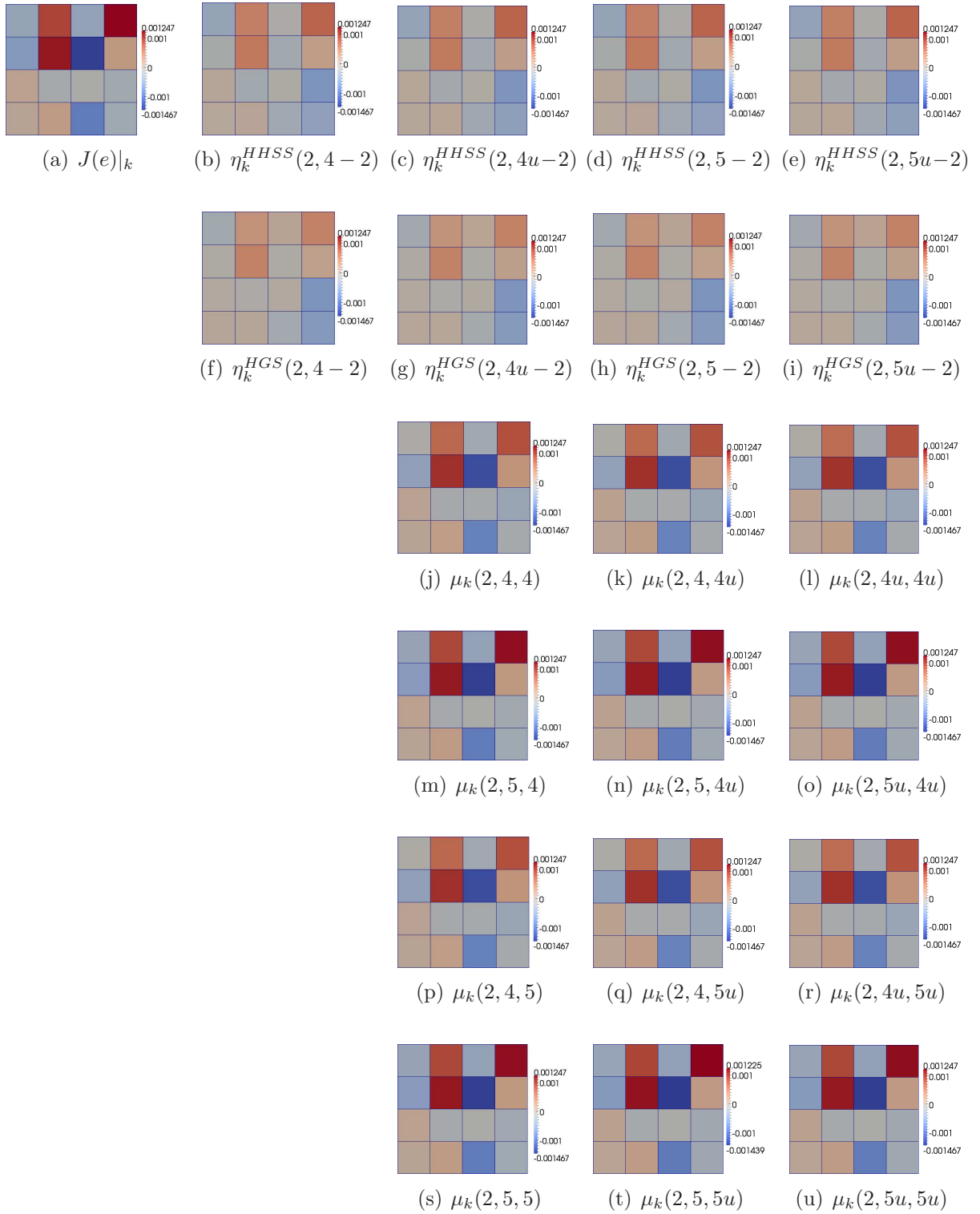


Figura 6.3: Problema de Poisson: erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos, com grau polinomial constante 4 ou 5 para w^+ e u^+ . O uso das aproximações recuperadas é indicado pela letra u após o grau polinomial da respectiva aproximação. Na primeira linha comparamos os indicadores η_k^{HHSS} , na segunda os η_k^{HGS} e nas demais μ_k .

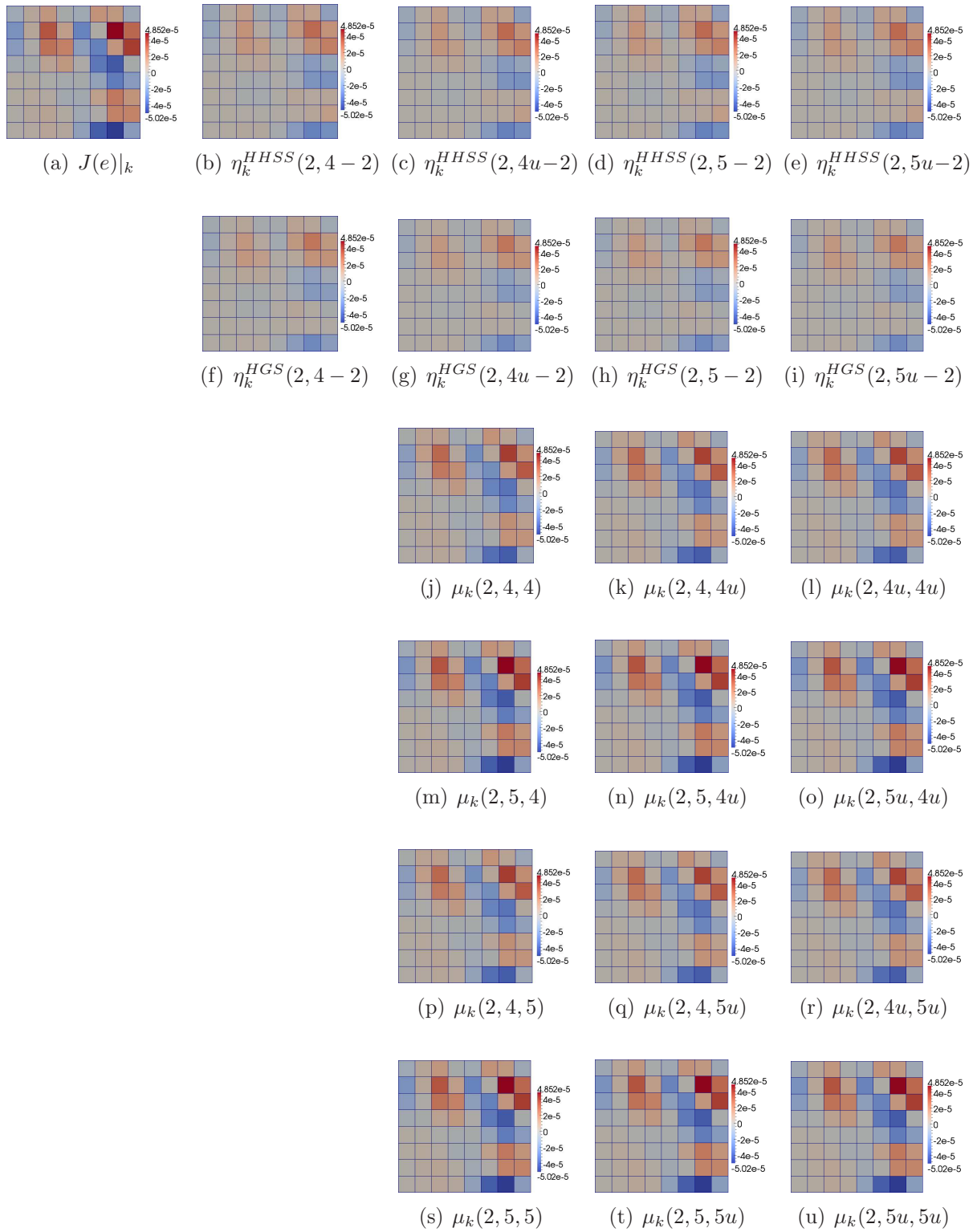


Figura 6.4: Problema de Poisson: erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos, com grau polinomial constante 4 ou 5 para w^+ e u^+ . O uso das aproximações recuperadas é indicado pela letra u após o grau polinomial da respectiva aproximação. Na primeira linha comparamos os indicadores η_k^{HHSS} , na segunda os η_k^{HGS} e nas demais μ_k .

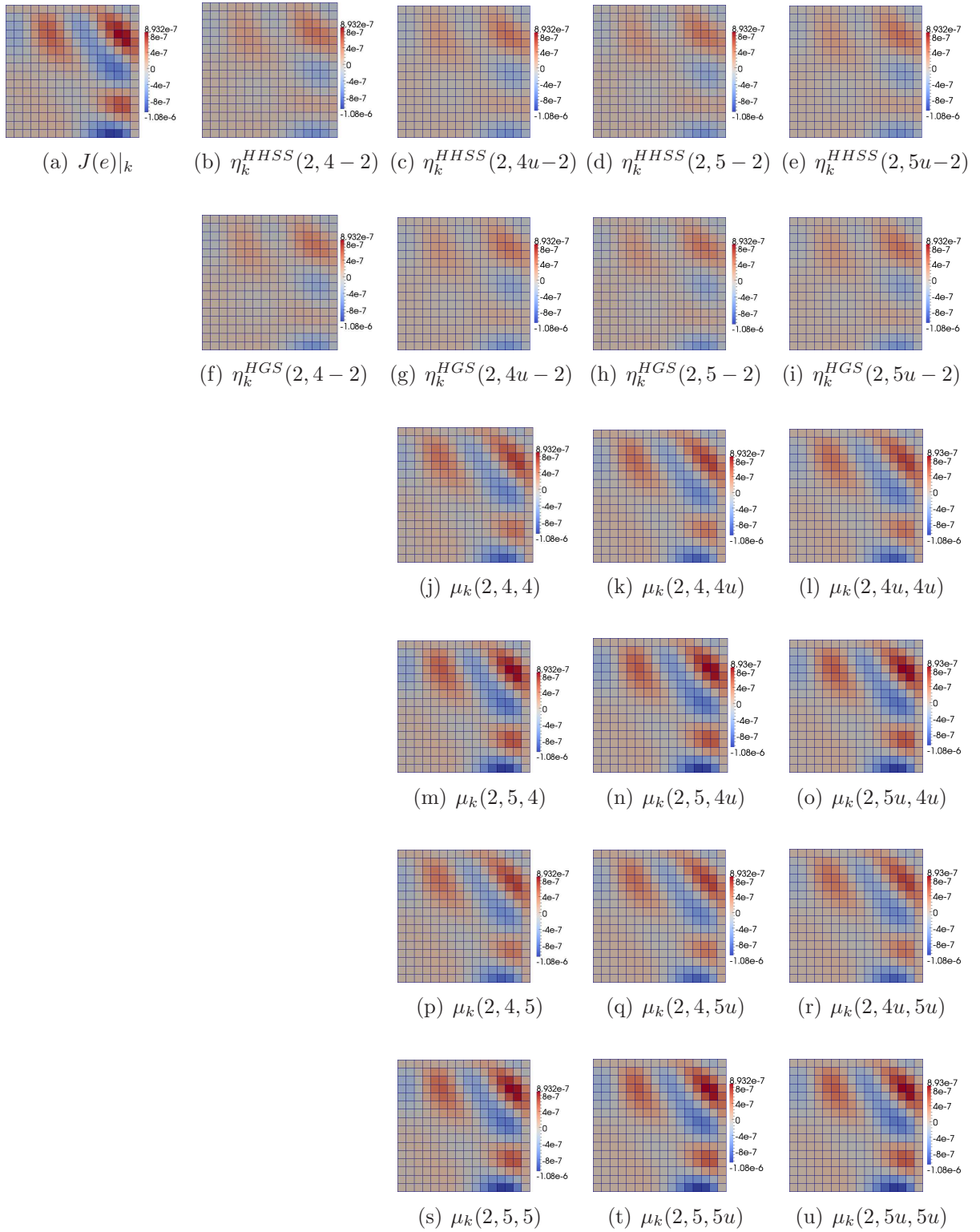


Figura 6.5: Problema de Poisson: erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos, com grau polinomial constante 4 ou 5 para w^+ e u^+ . O uso das aproximações recuperadas é indicado pela letra u após o grau polinomial da respectiva aproximação. Na primeira linha comparamos os indicadores η_k^{HHSS} , na segunda os η_k^{HGS} e nas demais μ_k .

6.3.4 Exemplo 4

Consideramos o domínio $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e o problema de valor de contorno

$$\Delta^2(u) = f \quad \text{em } \Omega,$$

com

$$u = g_0 \quad \text{em } \partial\Omega \tag{6.18}$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = g_1 \quad \text{em } \partial\Omega \tag{6.19}$$

em que as funções f , g_0 e g_1 são impostas de forma que a solução seja $u = \frac{(1+x)^2}{4} \sin(2\pi xy)$. O funcional de interesse nesse experimento é $J(u) = \int_{\Omega} u \Delta^2(w) d\Omega$, em que w é a solução do problema dual associado, $w = \sin^2(2\pi x) \sin^2(2\pi y) e^{-(x+y)}$.

Nas Figuras 6.6, 6.7 e 6.8, apresentamos os indicadores de erro *goal-oriented* para a aproximação u_{DG} de grau 3, em que u^+ e w^+ têm graus 5 e 6 e são aproximações DGFEM ou aproximações DGFEM recuperadas.

Podemos ver nessas figuras, assim como aconteceu no exemplo anterior, que as aproximações recuperadas não afetam significativamente os indicadores. Portanto, novamente, prevalece a importância do enriquecimento das aproximações u^+ e w^+ .

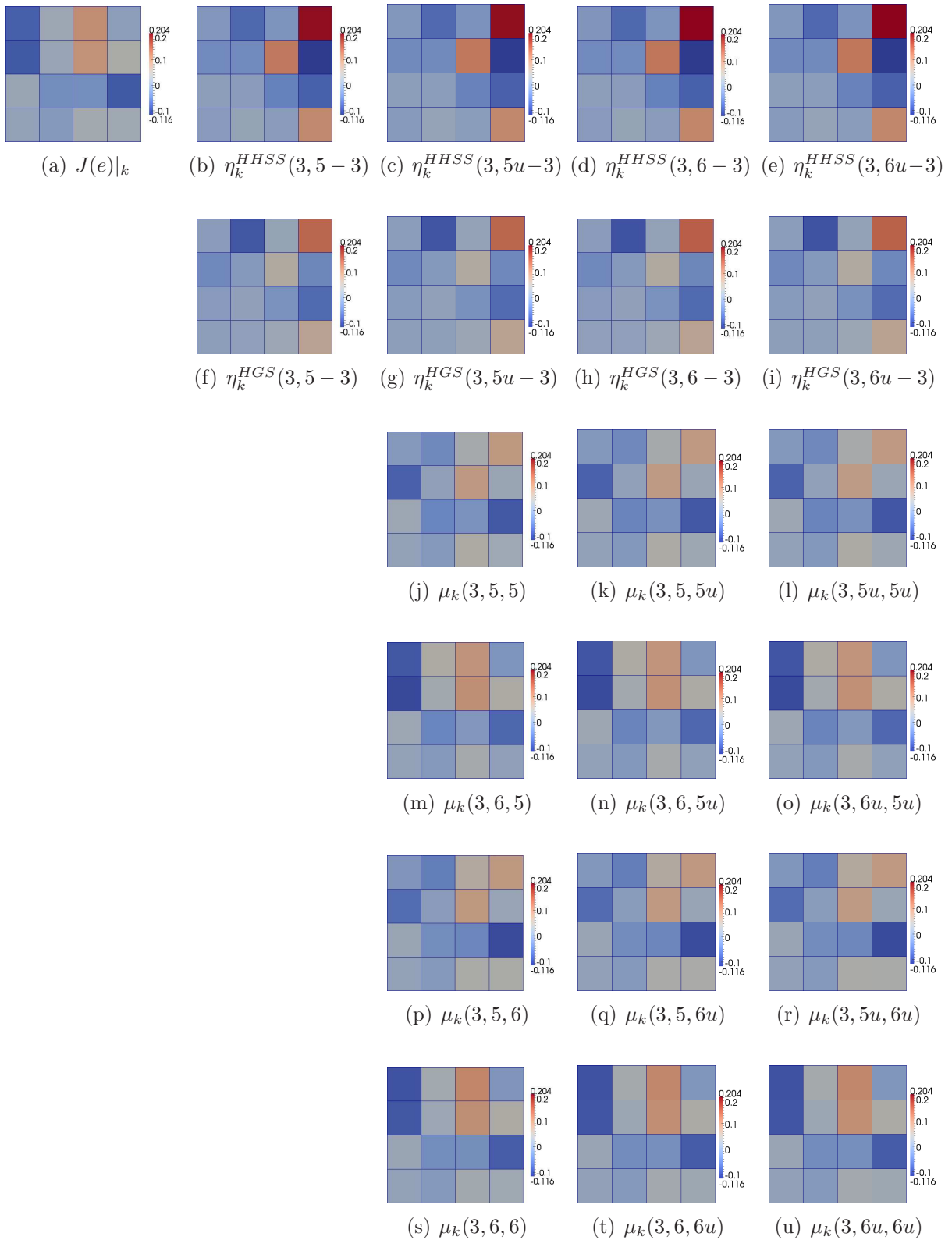


Figura 6.6: Problema Biharmônico : erro e indicadores de erro em malha uniforme de 16 elementos, com grau polinomial constante 5 ou 6 para w^+ e u^+ . O uso das aproximações recuperadas é indicado pela letra u após o grau polinomial da respectiva aproximação. Na primeira linha comparamos os indicadores η_k^{HHSS} , na segunda os η_k^{HGS} e nas demais μ_k .

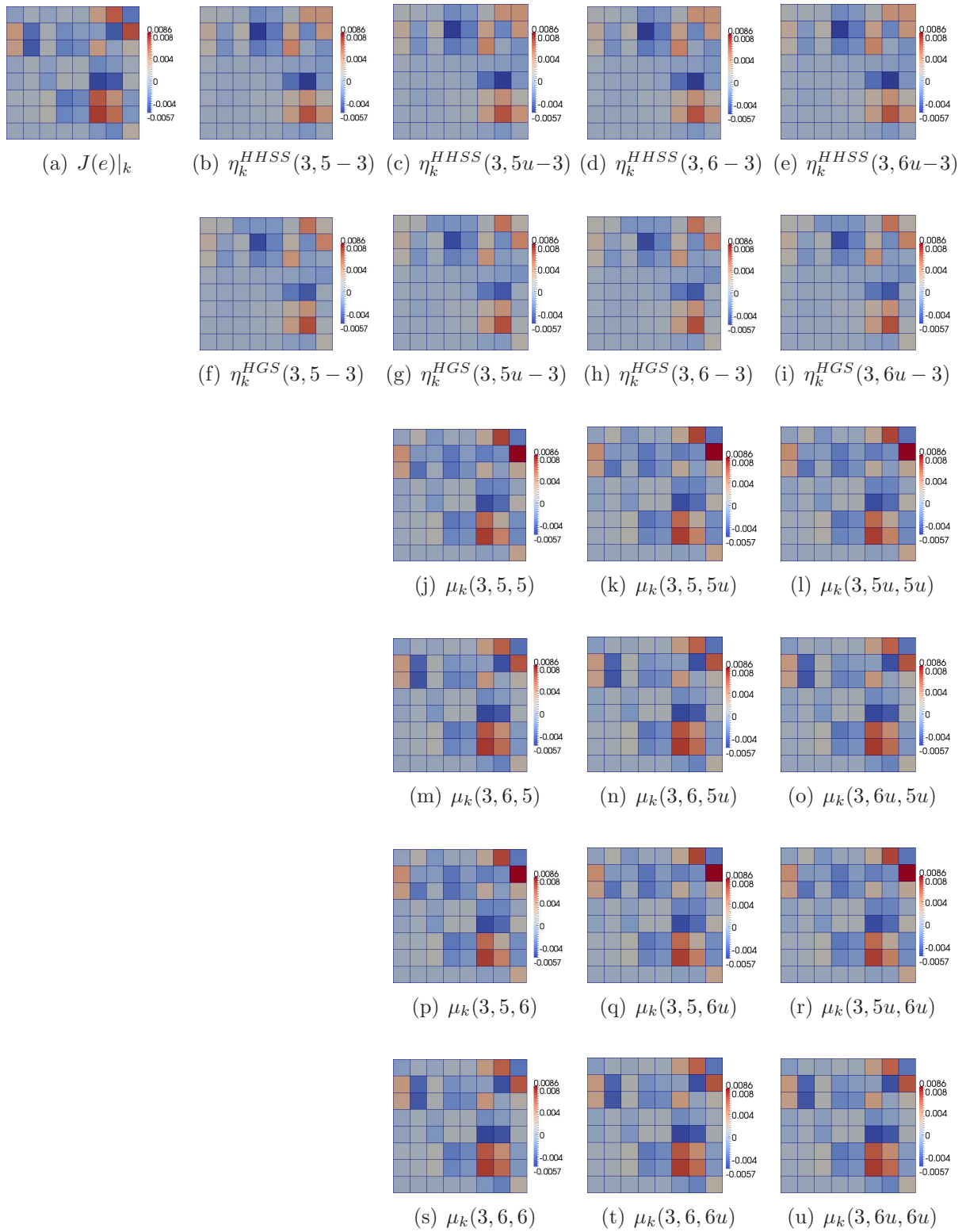


Figura 6.7: Problema Biharmonico : erro e indicadores de erro em malha uniforme de 64 elementos, com grau polinomial constante 5 ou 6 para w^+ e u^+ . O uso das aproximações recuperadas é indicado pela letra u após o grau polinomial da respectiva aproximação. Na primeira linha comparamos os indicadores η_k^{HHSS} , na segunda os η_k^{HGS} e nas demais μ_k .

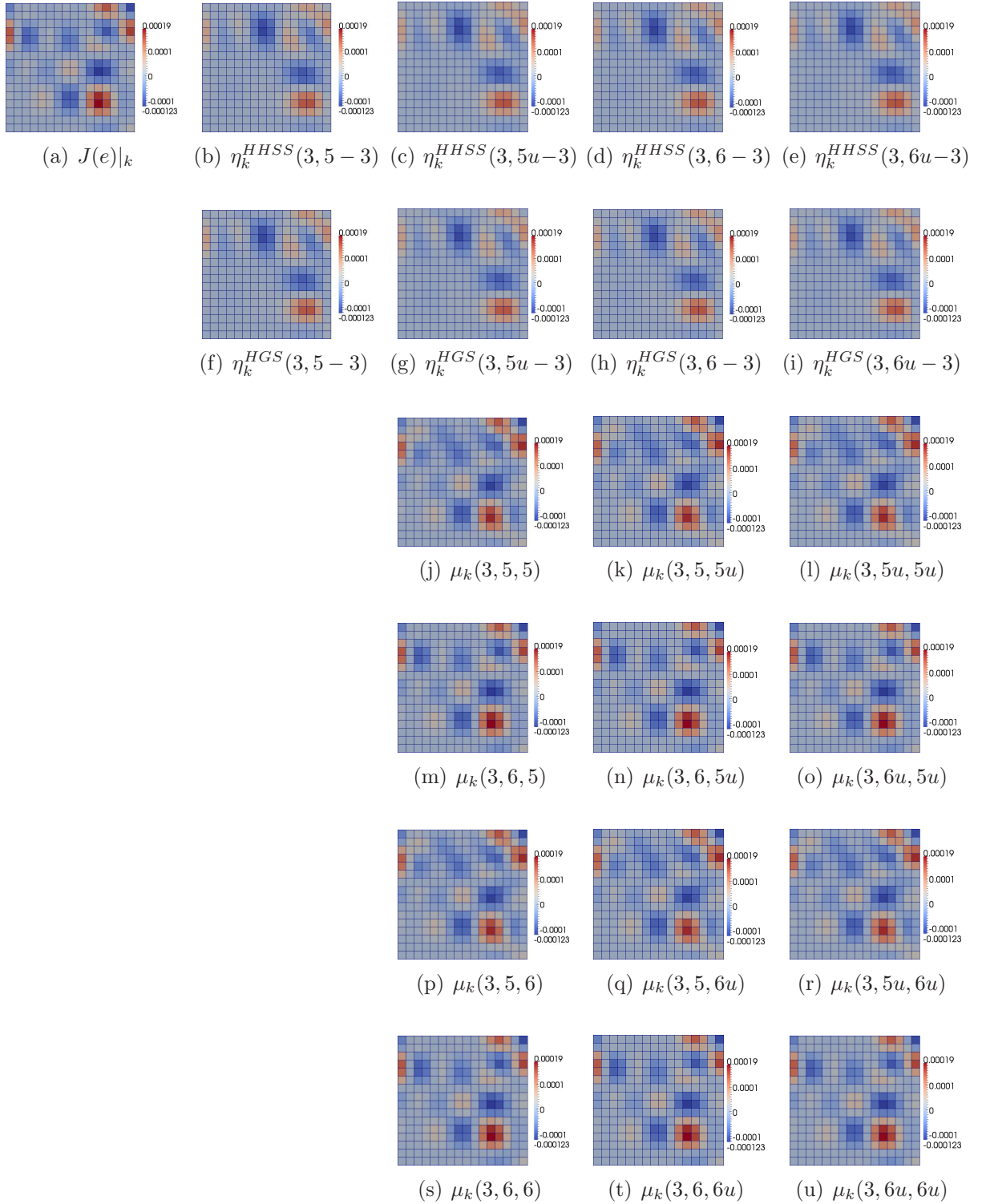


Figura 6.8: Problema Biharmônico : erro e indicadores de erro em malha uniforme de 256 elementos, com grau polinomial constante 5 ou 6 para w^+ e u^+ . O uso das aproximações recuperadas é indicado pela letra u após o grau polinomial da respectiva aproximação. Na primeira linha comparamos os indicadores η_k^{HHSS} , na segunda os η_k^{HGS} e nas demais μ_k .

Capítulo 7

Algoritmo *hp*-adaptativo

O fato das estimativas e indicadores serem adequados ao tipo de erro desejado é tão importante quanto o algoritmo adaptativo juntar essas informações com uma estratégia adaptativa adequada. Assim, para criar espaços de aproximação em que o erro em alguma quantidade de interesse seja o menor para a quantidade de graus de liberdade do espaço, ou seja, para usar da melhor forma possível cada grau de liberdade, precisamos de estimativas e indicadores *goal-oriented* e uma estratégia *hp*-adaptativa também voltada ao controle do erro na quantidade de interesse.

Qualquer algoritmo adaptativo depende, fundamentalmente, de duas decisões. A primeira é onde adaptar e, no caso de elementos finitos, essa questão pode ser reformulada como quais elementos adaptar. A segunda decisão é sobre como adaptar, ou seja, como decidir se àqueles elementos que devem ser adaptados devemos aplicar *h*-refinamento, dividindo o elemento em elementos menores, ou *p*-refinamento, acrescentando funções ao espaço de aproximação, associadas ao elemento. Ambas as alternativas de adaptação aumentam o número de graus de liberdade do espaço de adaptação. Portanto, essa escolha é fundamental para que o espaço adaptado tenha seu número de graus de liberdade minimizado.

7.1 Onde adaptar

Uma vez que dispomos de indicadores que nos mostram os elementos com maior erro, resta apenas definir quantos elementos serão adaptados para concluirmos a primeira decisão do algoritmo adaptativo. A estratégia mais comum é adaptar um percentual dos elementos que tem os maiores indicadores de erro. Um dos problemas dessa estratégia, porém, é que elementos com estimativas de erro próximas podem receber diferentes tratamentos. Outro problema é quando as malhas já estão muito finas e o percentual de elementos a serem adaptados podem representar uma quantidade maior do que o ideal, por exemplo se o erro

estiver concentrado em uma região pequena e exija vários refinamentos naquela região antes de adaptar outra região.

Outra estratégia bastante comum é tomar a decisão de quantos elementos adaptar com base na relação entre o indicador de erro de cada elemento e o indicador de erro máximo. Essa estratégia estabelece um nível de erro para o qual os elementos são adaptados. Na prática, essa estratégia usa um parâmetro γ entre 0 e 1 e marcamos para adaptação os elementos k tais que $\eta_k > \gamma\eta_k^{max}$.

Ambas as estratégias podem ser ajustadas conforme os dados do problema e os resultados obtidos. Mesmo as características do indicador de erro usado devem ser consideradas no ajuste dessas estratégias. Ou seja, todo o conhecimento disponível *a priori* sobre o problema pode ser usado.

7.2 Como adaptar

A segunda decisão, sobre como adaptar, é mais complexa. No contexto de erro *goal-oriented* o ideal é conhecermos as regularidades locais das soluções primal e dual e aplicar p -adaptação nas regiões em que a regularidade não afeta a convergência do erro. Dessa forma, exploramos a convergência espectral do método. Caso a regularidade afete a convergência do erro, usamos a h -adaptação, visando restringir o efeito da baixa regularidade a menor região possível do domínio, permitindo a convergência espectral nas regiões de boa regularidade.

Assim, a decisão sobre como adaptar deve ser a mais próxima possível da decisão ideal descrita acima. Existem algumas estratégias para tomar essa decisão que, embora sejam simples e busquem a decisão ideal, são sub-ótimas. Por exemplo, as estratégias que aplicam h -refinamento na primeira adaptação de cada elemento e a próxima decisão hp é tomada analisando se o erro foi reduzido de forma satisfatória.

A maior dificuldade da estratégia hp ideal é identificar em quais elementos a solução tem baixa regularidade. Portanto, faz-se necessário uma ferramenta que estime a ordem de regularidade local da solução numérica.

Em [3], para um esquema hp -adaptativo na norma energia, foi utilizada uma estimativa *a priori* como base de uma estratégia para estimar o índice de Sobolev local da solução sobre cada elemento, comparando as estimativas *a priori* com a taxa de convergência de indicadores de erro *a posteriori*. Dessa forma, define-se um elemento como *singular* se a regularidade da solução é tal que a taxa de convergência para p fixo e h refinamento uniforme é sub-ótima.

Entretanto, os contextos de [3] e o deste trabalho são diferentes. Neste trabalho tratamos de estimativas *goal-oriented* e não de estimativas em norma energia. Conseqüentemente,

estão envolvidas duas soluções, primal e dual. Com isso, estimar os índices de Sobolev das duas soluções, individualmente, torna-se mais complicado pois são necessários indicadores de erro para a norma energia dos erros primal e dual.

Nos casos elípticos, as estimativas *a priori* em funcionais são da forma

$$|J(u) - J(u_{DG})|^2 \leq C \sum_{k \in \mathcal{T}} \frac{h_k^{2(s_k - a)}}{p_k^{2(\kappa_k - b)}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)}^2 \times \sum_{k \in \mathcal{T}} \frac{h_k^{2(t_k - a)}}{p_k^{2(l_k - b)}} \|w\|_{H^{l_k}(k)}^2, \quad (7.1)$$

em que a e b são conhecidos, $1 \leq s_k \leq \min(p_k + 1, \kappa_k)$ e $1 \leq t_k \leq \min(p_k + 1, l_k)$. Restringindo essa estimativa a um elemento apenas, temos

$$|J(u) - J(u_{DG})|_k \leq C \frac{h_k^{s_k + t_k - 2a}}{p_k^{\kappa_k + l_k - 2b}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)} \|w\|_{H^{l_k}(k)}. \quad (7.2)$$

Portanto, paralelamente à estratégia apresentada em [3], uma alternativa seria usar uma estratégia *hp* usando uma estimativa da soma das regularidades das duas soluções, primal e dual. Nesse sentido, consideramos a seguinte definição de singularidade.

Definição 4. Elemento goal-oriented singular. *Um elemento é dito **goal-oriented singular** se $\kappa_k + l_k < 2(p_k + 1)$, em que κ_k e l_k são os índices de Sobolev locais das soluções primal e dual e p_k é o grau polinomial local da aproximação primal.*

Assim, supondo conhecido $\kappa_k + l_k$, podemos estabelecer um critério para decidir entre h ou p -refinamento.

Definição 5. Critério de *hp*-adaptação. *Suponha k um elemento marcado para adaptação em que $u|_k \in H^{\kappa_k}(k)$, $w|_k \in H^{l_k}(k)$, e seja p_k a ordem polinomial da aproximação DGFEM primal. Se $2(p_k + 2) \leq \kappa_k + l_k$ então aplica-se p -refinamento, caso contrário aplica-se h -refinamento.*

O fato de impormos a condição $2(p_k + 2) \leq \kappa_k + l_k$ para aplicar p -refinamento, ao invés de $2(p_k + 1) \leq \kappa_k + l_k$, deve-se a querermos que o elemento, quando p -adaptado, não seja singular na próxima iteração.

Resta ainda estimarmos $\kappa_k + l_k$ para cada elemento k . O valor de $\kappa_k + l_k$ pode ser obtido a partir da taxa de convergência do erro diante de p -refinamento, porém não dispomos desses erros, em geral. Considerando que a taxa de convergência das estimativas deve aproximar a taxa de convergência do erro, podemos estimar $\kappa_k + l_k$ usando a taxa de convergência das estimativas.

Calculamos as estimativas de erro de uma aproximação cujo vetor de graus polinomiais é \mathbf{p} para o problema primal e \mathbf{d} para o problema dual, $\eta(\mathbf{p}, \mathbf{d}) = \sum_k \eta_k(p_k, d_k)$ e

as estimativas para a aproximação com vetor de graus polinomiais enriquecidos $\mathbf{p}+\mathbf{q}$, $\eta(\mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{d}) = \sum_k \eta_k(p_k + q_k, d_k)$. É importante lembrar que, devido à ortogonalidade, é necessário que $d_k > p_k + q_k$ para todo k . De posse dessas duas estimativas, usamos (7.2) e obtemos $\kappa_k + l_k$, para os elementos k marcados para a adaptação, da seguinte forma

$$\begin{aligned}\eta_k(p_k, d_k) &\approx C \frac{h_k^{s_k+t_k-2a}}{p_k^{\kappa_k+l_k-2b}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)} \|w\|_{H^{l_k}(k)} \\ \eta_k(p_k + q_k, d_k) &\approx C \frac{h_k^{s_k+t_k-2a}}{(p_k + q_k)^{\kappa_k+l_k-2b}} \|u\|_{H^{\kappa_k}(k)} \|w\|_{H^{l_k}(k)}.\end{aligned}$$

Aplicando logaritmo nas duas desigualdades, subtraindo uma equação da outra e fazendo algumas manipulações, obtemos

$$-\frac{\log(\eta_k(p_k, d_k)/\eta_k(p_k + q_k, d_k))}{\log(p_k/(p_k + q_k))} + 2b \approx (\kappa_k + l_k).$$

Assim, temos uma estimativa para a soma dos índices de Sobolev locais da soluções primal e dual. Entretanto, lembramos que se trata de uma estimativa e que, conseqüentemente, existem algumas limitações. Uma das limitações afeta as regiões onde o erro é muito pequeno, pois o decaimento esperado do erro esbarra na limitação de precisão computacional. Entretanto essa limitação não afeta o processo adaptativo pois as regiões de menor erro não têm seus elementos marcados para adaptação, em geral. Outra limitação é a precisão da estimativa, pois usa apenas a comparação de dois indicadores de erro. Porém, essa limitação afeta principalmente as regiões onde a solução é muito suave. Como o critério de *hp*-adaptação está baseado em identificar as regiões de baixa regularidade, uma estimativa razoável para as regiões onde as soluções são suaves é suficiente, para não comprometer o processo adaptativo.

Observamos que, em [3], as estimativas para os índices de Sobolev locais são obtidas através de um ajuste dos dados a um modelo. Mas, como apresentamos, o contexto *goal-oriented* permite a obtenção das estimativas para os índices de Sobolev da forma mais direta e com, essencialmente, os mesmos resultados.

Agora vamos verificar como se comportam essas estimativas em alguns exemplos, para os quais sabemos *a priori* que as soluções têm baixa regularidade em algumas regiões.

7.2.1 Exemplo 1

Nesse problema a perda de regularidade deve-se às condições de contorno. Consideramos o problema elíptico de segunda ordem

$$-\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{em } \Omega = (-1, 1) \times (0, 1). \quad (7.3)$$

Usando o sistema de coordenadas polares, em que a origem coincide com a origem do sistema cartesiano, impomos as seguintes condições de contorno: $u(r, \pi) = 0$ para $0 < r < 1$ e $\nabla u \cdot \mathbf{n} = g$ nas demais faces do contorno de Ω , sendo g tal que a solução seja $u(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(0.5\theta)$.

O funcional de interesse é $J(u) = \int_{\Omega} u d\Omega$. Como a singularidade em questão surge das condições de contorno e os problemas primal e dual possuem condições de contorno do mesmo tipo, a solução dual também terá baixa regularidade na região da origem. Entretanto, o funcional de interesse não é responsável por qualquer perda de regularidade de w .

Como a estimação de $\kappa_k + l_k$ depende, principalmente, dos indicadores de erro, vamos usar todos os indicadores apresentados nos capítulos anteriores nessa estimativa. Como a distribuição do erro é diferente para cada indicador, esperamos que as estimativas também o sejam. Além dos indicadores, vamos usar o erro exato para obter as estimativas para a regularidade, a título de comparação com as demais estimativas.

Nas Figuras 7.1, 7.2 e 7.3 mostramos as estimativas obtidas para $\kappa_k + l_k$, considerando malhas com 32, 128 e 512 elementos e os indicadores como descrevemos anteriormente.

Podemos notar que as estimativas obtidas com o indicador μ_k acompanham o comportamento das estimativas obtidas através dos erros exatos por elemento, $J(e)|_k$, apesar de uma amplitude maior entre a menor e a maior estimativa e de uma melhor percepção da falta de regularidade próximo à origem.

A amplitude das estimativas obtidas usando os indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} são bem maiores que as outras duas estimativas. Porém, essas duas estimativas são bem distintas. As estimativas via η_k^{HGS} indicam a falta de regularidade na região da origem, o que é esperado, e no contorno do domínio, o que não faz muito sentido uma vez que não existe qualquer singularidade nessa região. A estimativa via η_k^{HHSS} demonstra os resultado em maior concordância com o que esperávamos: falta de regularidade na origem e as demais regiões com grau de regularidade de médio à alto.

Contudo, podemos ver que o desempenho da estimativa obtida usando o indicador η_k^{HHSS} foi o melhor, no sentido de captar a falta de regularidade esperada.

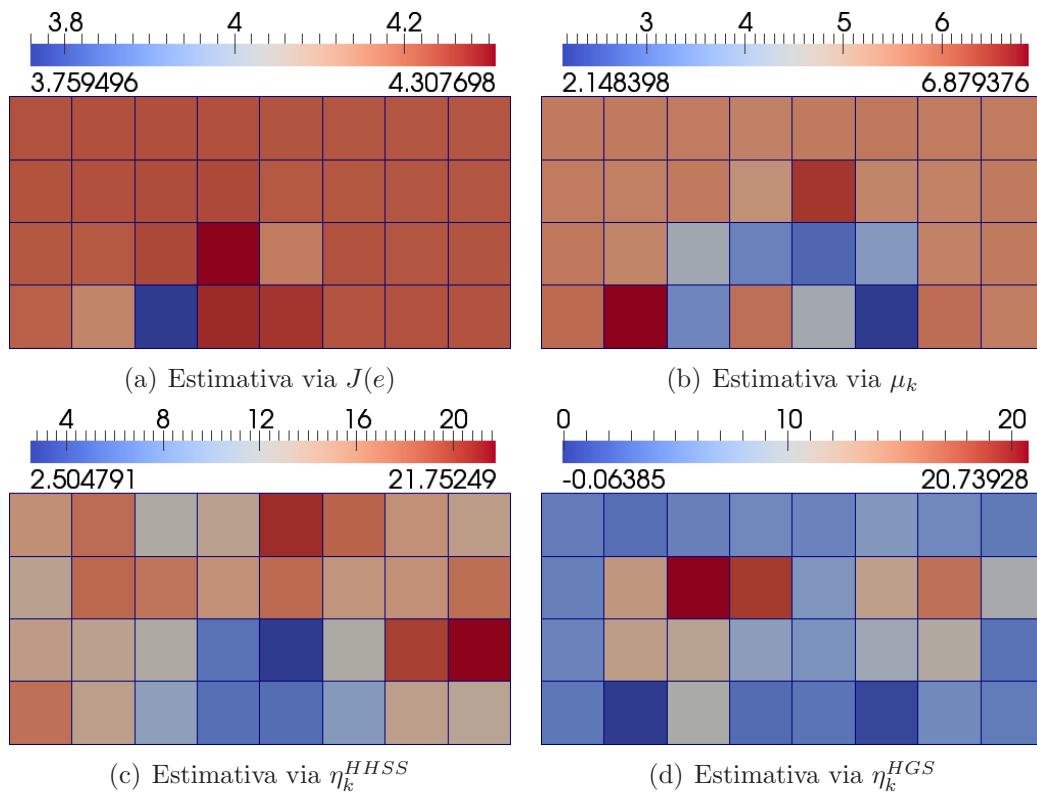


Figura 7.1: Estimativas para $\kappa_k + l_k$ via $J(e)$, μ_k , η_k^{HGS} e η_k^{HHSS} . As aproximações DGFEM primal, u_{DG} , e dual, w_+ , são de graus 2 e 4, respectivamente. O enriquecimento considerado é de 1 grau a mais na ordem polinomial. Para o indicador μ_k a aproximação primal enriquecida, u_+ , é uma aproximação DGFEM de grau 4.

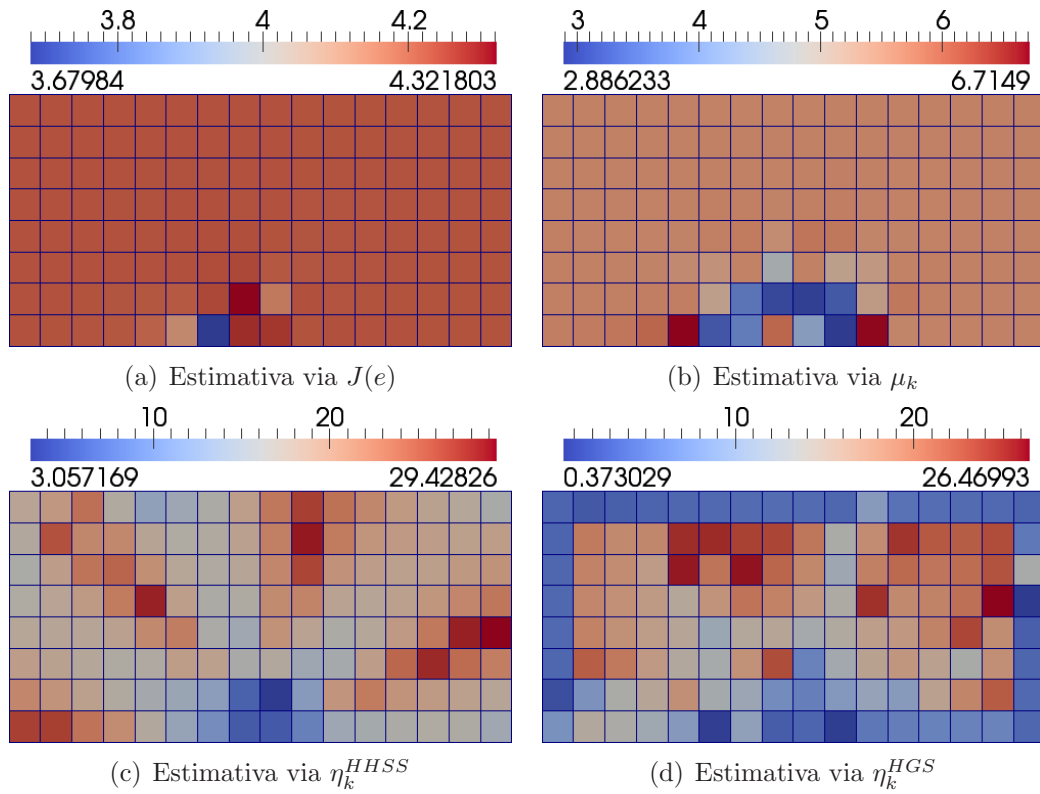


Figura 7.2: Estimativas para $\kappa_k + l_k$ via $J(e)$, μ_k , η_k^{HGS} e η_k^{HHSS} . As aproximações DGFEM primal, u_{DG} , e dual, w_+ , são de graus 2 e 4, respectivamente. O enriquecimento considerado é de 1 grau a mais na ordem polinomial. Para o indicador μ_k a aproximação primal enriquecida, u_+ , é uma aproximação DGFEM de grau 4.

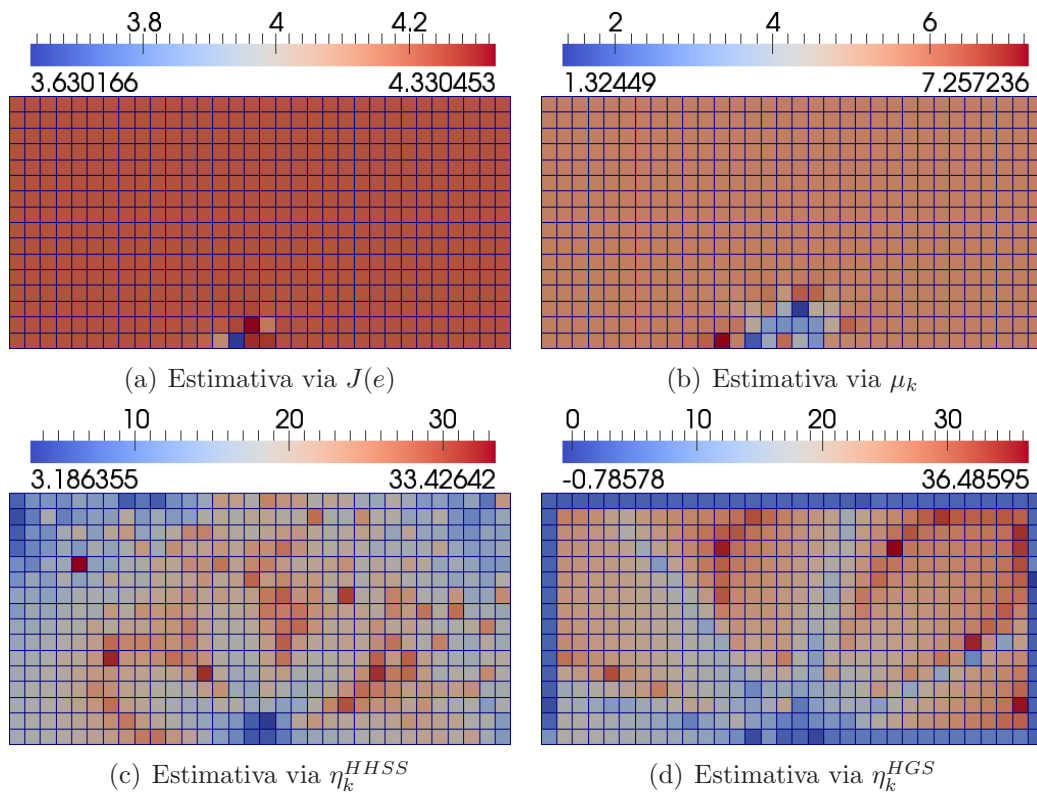


Figura 7.3: Estimativas para $\kappa_k + l_k$ via $J(e)$, μ_k , η_k^{HGS} e η_k^{HHSS} . As aproximações DGFEM primal, u_{DG} , e dual, w_+ , são de graus 2 e 4, respectivamente. O enriquecimento considerado é de 1 grau a mais na ordem polinomial. Para o indicador μ_k a aproximação primal enriquecida, u_+ , é uma aproximação DGFEM de grau 4.

7.2.2 Exemplo 2

Nesse exemplo consideramos o problema de valor de contorno,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{em } \Omega, \\ u &= g & \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

em que $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Além disso, g e f são tais que a solução exata do problema é $u(x, y) = \arctan(\frac{y-2x}{0.05})$.

O funcional de interesse é a média da solução sobre o domínio, isto é $J(u) = \int_{\Omega} u d\Omega$. Dessa forma, temos um problema dual, associado ao funcional J , que é consistente com o problema primal e cuja solução é muito regular.

O objetivo desse exemplo é estudar a estimativa de regularidade, desenvolvida nesse capítulo, para um problema com falta de regularidade no interior do domínio. A solução do problema imita o comportamento da solução de um problema de camada limite interior.

As estimativas para $l_k + \kappa_k$ obtidas pelos indicadores η_k^{HHSS} , η_k^{HGS} e μ_k , além do erro sobre cada elemento, $J(e)|_k$, são apresentadas na Figura 7.4.

Comparando os resultados entre si e com os apresentados em [3], concluímos que para a singularidade do problema desse exemplo as estimativas obtidas através dos indicadores de erro μ_k e η_k^{HGS} são melhores que as obtidas através de η_k^{HHSS} , que apresentou melhores resultados no exemplo anterior. Isso mostra a importância de dispormos de uma variedade maior de indicadores de erro, cada qual com suas características, pois a adequação do indicador ao problema depende das propriedades de ambos.

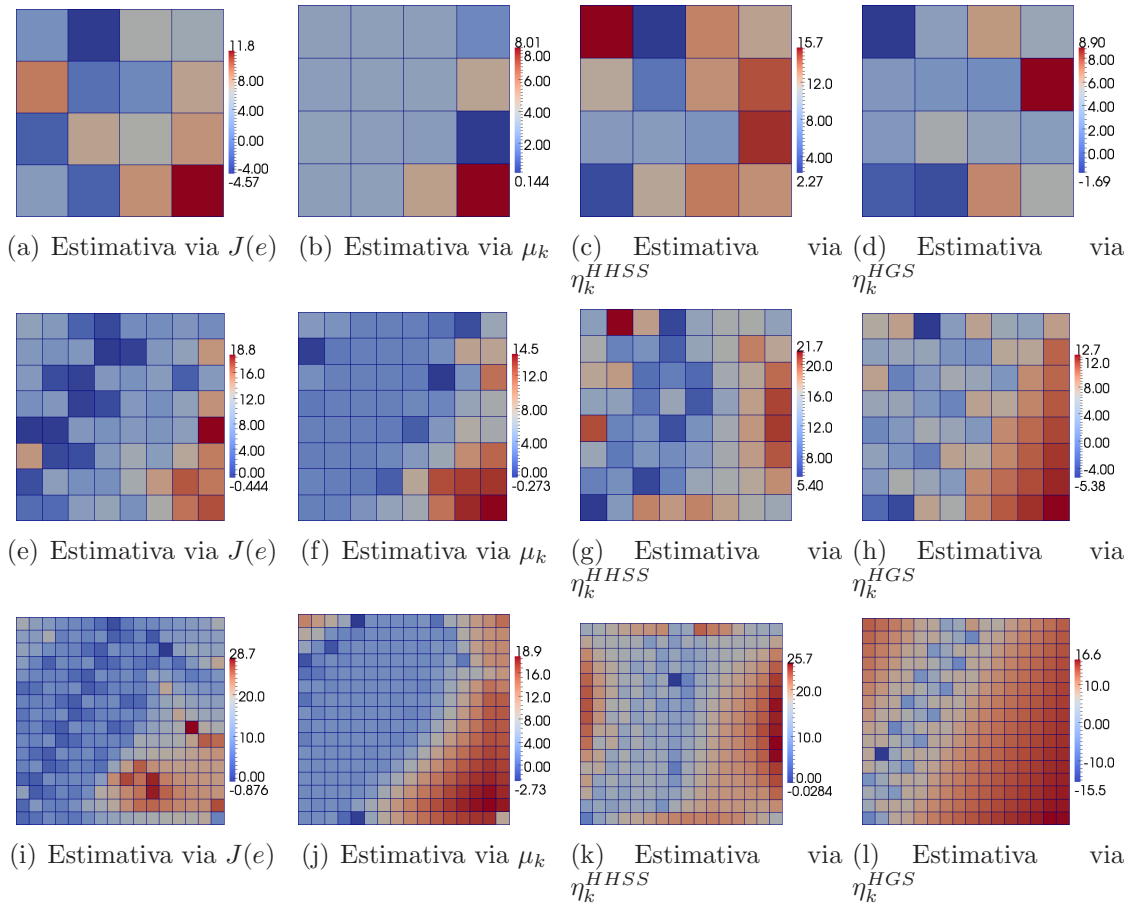


Figura 7.4: Estimativas para $\kappa_k + l_k$ via $J(e)$, μ_k , η_k^{HGS} e η_k^{HHSS} . As aproximações DGFEM primais, u_{DG} , u_+ e dual, w_+ , são de graus 2, 5 e 5, respectivamente. O enriquecimento considerado é de 1 grau a mais na ordem polinomial.

7.3 Algoritmo Adaptativo

Uma vez que estabelecemos formas de tomar todas as decisões que competem à estratégia adaptativa, quanto e como adaptar, vamos descrever essa estratégia através de um algoritmo, o qual chamamos de algoritmo adaptativo. Esse algoritmo é apresentado no Algoritmo 2.

Dados iniciais:

Espaço de aproximação inicial, $S_0^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, tolerância para o erro, Tol, parâmetro de adaptação, γ , e número máximo de iterações, NItMax.

$i=0$;

Enquanto ($i < \text{NItMax}$)

- 1) Calcular as aproximações $u_{DG} \in S_i^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, $w_+ \in S^{\mathbf{P}+\text{inc}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$ e as aproximações auxiliares, conforme o indicador considerado.
- 2) Calcular os indicadores de erro η_k e os indicadores auxiliares, η_k^+ .

Se $\sum_k \eta_k < \text{Tol}$ **então**

$i = \text{NItMax}$.

fim

6) Definir $\eta_k^{\text{max}} := \max_k \eta_k$.

Para k de 1 até número de elementos

Se $\eta_k > \gamma \eta_k^{\text{max}}$ **então**

6.1) Marcar k para ser adaptado.

6.2) Estimar $l_k + \kappa_k$, cuja estimativa denotamos por reg_k .

Se $reg_k > 2(p_k + 1)$ **então**

$p_k = p_k + 1$

Caso contrário

Divide k em subelementos.

fim

fim

fim

Considerando o espaço de aproximação, já adaptado, $S_i^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$, aplicamos as seguintes restrições ao espaço:

- Se k tem no interior de uma de suas faces mais de um vértice de um elemento vizinho, divida k .
- Se k tem um vértice, de um elemento vizinho, no interior de pelo menos 3 de suas faces, divida k .
- Se algum vizinho, por interface, de k tem grau maior que $p_k + 1$, então faça $p_k = p_k + 1$.

7) Defina $S_{i+1}^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F}) := S_i^{\mathbf{P}}(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{F})$

8) $i = i + 1$.

fim

Algoritmo 2: Algoritmo Adaptativo

Capítulo 8

Experimentos Adaptativos

Nos capítulos anteriores apresentamos e caracterizamos três indicadores de erro *goal-oriented*, descrevemos um algoritmo para suavizar aproximações DGFEM visando suprir as necessidades dos indicadores de erro e propomos um algoritmo *hp*-adaptativo, com destaque para o critério de decisão entre *h* e *p*-refinamento moldado, especificamente, para indicadores *goal-oriented*.

Neste capítulo apresentamos os resultados de experimentos em que usamos todas essas ferramentas para fazer a *hp*-adaptação dos espaços de aproximação. Nesses experimentos analisamos os três indicadores de erro em diferentes aspectos e seus efeitos sobre a adaptação do espaço de aproximação e redução do erro.

Os resultados apresentados são para dois experimentos envolvendo o problema biharmônico e um experimento envolvendo o problema de Poisson e estão divididos em duas seções, conforme a equação dos problemas tratados.

8.1 Equação biharmônica

Esta seção trata dos experimentos envolvendo a equação biharmônica. De forma mais específica, consideramos dois casos de estudo. O primeiro é um problema de fluido de Stokes e o segundo trata um problema da teoria de placas finas.

8.1.1 Fluxo de um fluido viscoso ao redor de uma placa plana

Definimos o conjunto $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}$ que representa a projeção de uma placa plana ortogonal ao plano xy . Com essa definição estabelecemos o seguinte domínio, $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus \Gamma_1$, apresentado na Figura 8.1.

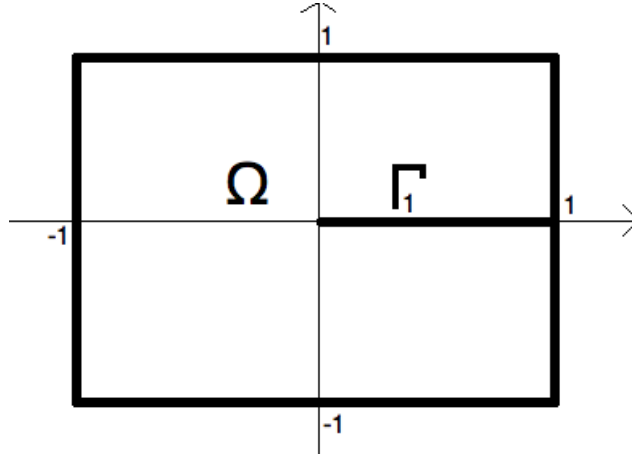


Figura 8.1: Domínio do problema.

Sobre esse domínio estabelecemos o problema de valor de contorno,

$$\Delta^2 u = 0 \text{ em } \Omega, \quad (8.1a)$$

$$u = 0 \text{ em } \Gamma_1, \quad (8.1b)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_1, \quad (8.1c)$$

$$u = g_0 \text{ em } \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \quad (8.1d)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = g_1 \text{ em } \partial\Omega \setminus \Gamma_1, \quad (8.1e)$$

em que g_0 e g_1 são escolhidos de forma que a solução exata de (8.1), em coordenadas polares, seja

$$u = r^{3/2}(\sin(3\theta/2) - 3\sin(\theta/2)). \quad (8.2)$$

Como mostrado em [69], o problema (8.1) corresponde à formulação da função de corrente do problema de fluido de Stokes e descreve o fluxo de um fluido viscoso em torno de uma placa, representada por Γ_1 . Observamos que as condições de contorno sobre Γ_1 surgem das hipóteses de que o fluido não desliza sobre a placa e não penetra a placa, $\nabla u = \mathbf{0}$. Esse problema foi proposto como um problema padrão para a verificação de métodos e algoritmos em problemas de quarta ordem. A solução exata, u e a vorticidade Δu do fluxo em questão são esboçados nas Figuras 8.2(a) e 8.2(b), respectivamente.

Como podemos observar na Figura 8.2(b), a vorticidade é singular na ponta da placa e isso é o que torna esse problema interessante para testar um algoritmo adaptativo.

O funcional de interesse que consideramos é a média da função de corrente sobre o domínio, $J(u) = \int_{\Omega} u \, d\Omega$. Como temos a solução exata, calculamos o valor exato do funcional, $J(u) = -4.7869247393942331$.

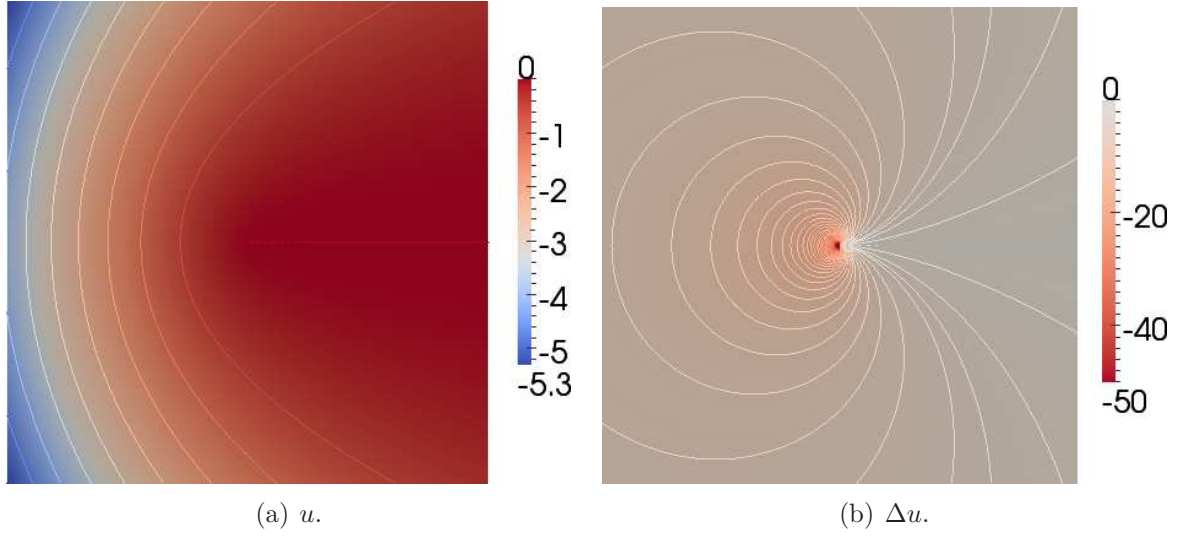


Figura 8.2: Esboço da solução, u , e da vorticidade, Δu .

Refinamento uniforme

Começamos a apresentação dos nossos resultados mostrando na Figura 8.3 erros no funcional $J(e)$ em termos dos graus de liberdade dos espaços de aproximação usando refinamentos uniformes. Observamos que os refinamentos uniformes, h ou p , não conseguem uma redução satisfatória do erro no funcional, mesmo em espaços com muitos graus de liberdade.

Resultados adaptativos

A seguir analisamos os resultados da aplicação do algoritmo adaptativo e vamos dividir essa análise por características analisadas.

Efeito da ortogonalidade

Vamos analisar o efeito da ortogonalidade sobre os indicadores de erro. Os indicadores admitem as configurações, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w)$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w)$ e $\mu_k(u_{DG}, u+, w)$, sem usar a ortogonalidade, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u+, w - w_{DG})$, que usam a ortogonalidade da forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$, subtraindo w_{DG} na segunda componente, conforme discutimos no Capítulo 5.

No algoritmo adaptativo aplicado nos resultados dessa subseção foram considerados o parâmetro $\gamma = 0.01$, que determina quais elementos são adaptados. Para a estimativa de regularidade, necessária no critério hp do algoritmo, cada indicador obtém essa estimativa comparando o próprio indicador com o indicador de mesmo tipo, porém com as aproximações primais p -enriquecidas em uma ordem. Além disso, a aproximação primal inicial u_{DG} tem

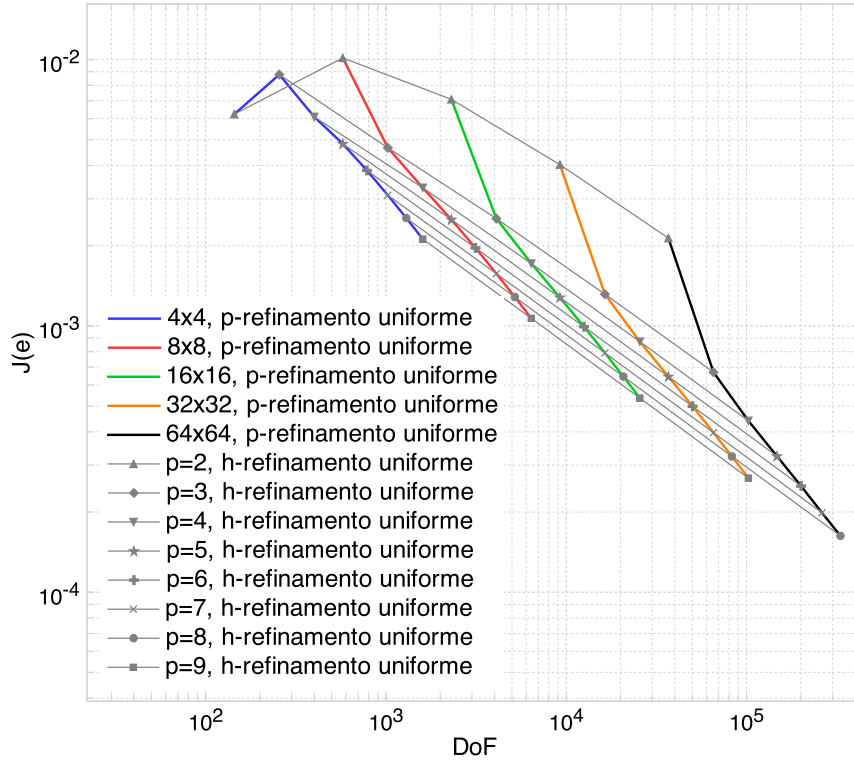


Figura 8.3: Erro de aproximação de $J(u)$ por graus de liberdade, para espaços de aproximação uniformes, com graus polinomiais de 2 a 9 e malhas de 4×4 a 64×64 .

grau polinomial 3 em todos os elementos e malha com 8×8 elementos. Da mesma forma, a aproximação dual inicial w^+ usada é uma aproximação DGFEM com ordem polinomial 5 em todos os elementos. Para o indicador μ_k , u^+ é uma aproximação DGFEM de grau polinomial 4 em todos os elementos.

Na Figura 8.4 mostramos as curvas de erro por graus de liberdade obtidas dos espaços hp -adaptados conforme os indicadores $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w)$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w)$, $\mu_k(u_{DG}, u^+, w)$. Podemos ver que o desempenho do indicador η^{HHSS} é bastante superior aos outros dois indicadores.

Com base na caracterização dos indicadores que apresentamos no Capítulo 5, sabemos que quando a ortogonalidade é verificada numericamente, como é o caso desse experimento, o indicador η_k^{HHSS} é caracterizado por sua independência da subtração ou não da componente de ortogonalidade sobre cada elemento. O mesmo não é necessariamente válido para os indicadores η_k^{HGS} e μ_k , que foram deduzidos visando outras propriedades. Contudo, podemos ainda subtrair desses dois indicadores a componente da ortogonalidade, calculada conforme o tipo do indicador. Os resultados obtidos na hp -adaptação usando os indicadores com e sem a subtração da ortogonalidade são apresentados na Figura 8.5.

Podemos perceber que a diferença de desempenho estava atrelada à questão da ortogona-

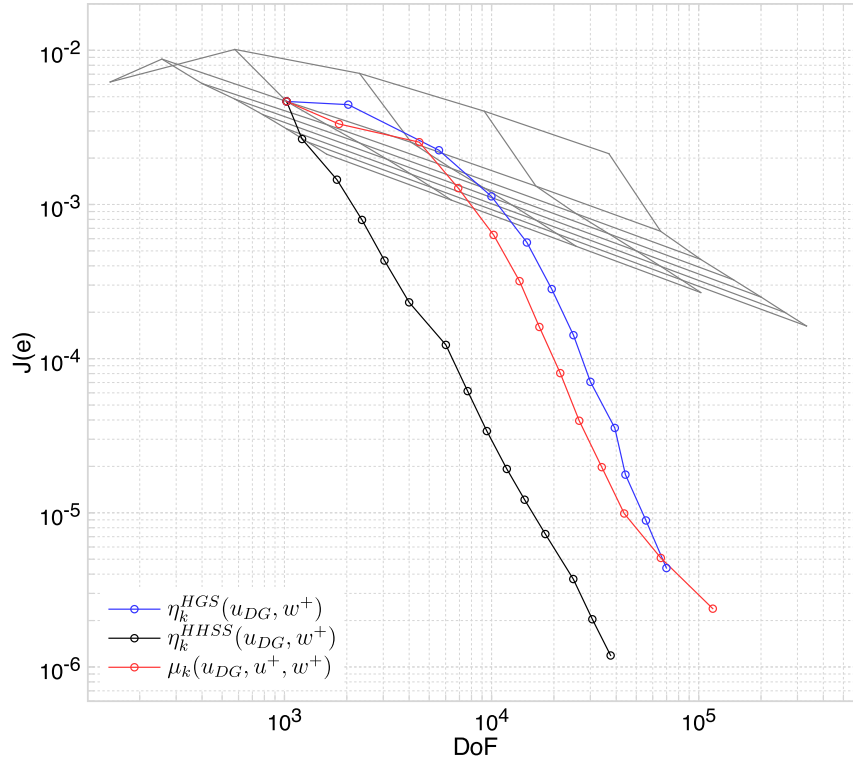


Figura 8.4: Erro de aproximação de $J(u)$ por graus de liberdade, para espaços de aproximação adaptados conforme $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, sem usar a ortogonalidade.

lidade dos indicadores e que, subtraindo as componentes da ortogonalidade dos indicadores η_k^{HHSS} , η_k^{HGS} e μ_k , o indicador η_k^{HHSS} manteve exatamente o mesmo desempenho, comprovando sua independência da ortogonalidade. Para os outros dois indicadores, o desempenho mudou drasticamente, fazendo-os consideravelmente melhores que η_k^{HHSS} .

Efeito da estimativa de regularidade

Um fato passa despercebido se analisamos apenas as curvas do erro por graus de liberdade da Figura 8.5. Os espaços adaptados por η_k^{HHSS} , com ou sem o uso da ortogonalidade, foram quase que exclusivamente h -adaptados, como podemos ver na Figura 8.6.

Esse fato mostra uma deficiência do indicador η_k^{HHSS} para a estimar as regularidades somadas das soluções primal e dual. Portanto, torna-se interessante considerar também a adaptação do espaço de aproximação usando o indicador η_k^{HHSS} , mas usar um dos outros dois indicadores para estimar a regularidade. Os resultados dessa abordagem são apresentados na Figura 8.7 em que o desempenho de η_k^{HHSS} combinado com μ_k e η_k^{HGS} melhora significativamente se comparado o uso simples do indicador η_k^{HHSS} .

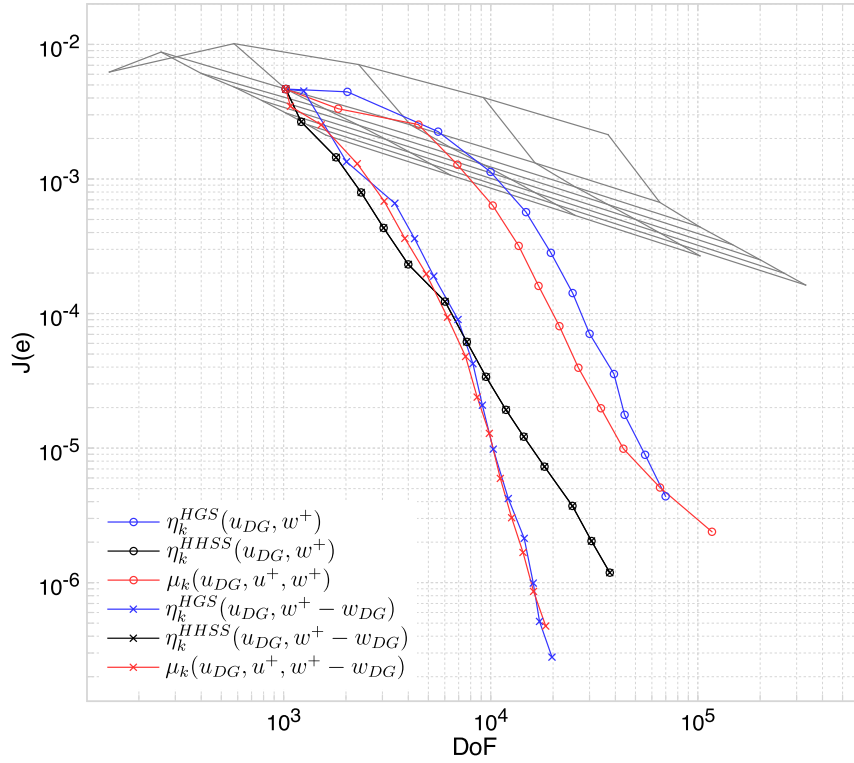


Figura 8.5: Erro de aproximação de $J(u)$ por graus de liberdade, para espaços de aproximação adaptados conforme $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, e com ortogonalidade $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$.

Os espaços de aproximação hp -adaptados das respectivas curvas de erro da Figura 8.7 são apresentados nas Figuras 8.8 e 8.9

Observamos que em todos os casos ocorreu a h -adaptação no centro do domínio que corresponde a ponta da placa, região da singularidade da vorticidade. Além disso, a p -adaptação ocorre nas regiões em que as soluções são mais suaves. Assim, concluímos que o algoritmo adaptativo apresentou o comportamento esperado, identificando as regiões de maior importância para o erro e as regularidades das aproximações, permitindo aplicar o algoritmo hp -adaptativo seguindo as diretrizes pelas quais ele foi concebido: h -adaptação onde as soluções têm baixa regularidade e p -adaptação nas regiões de boa regularidade.

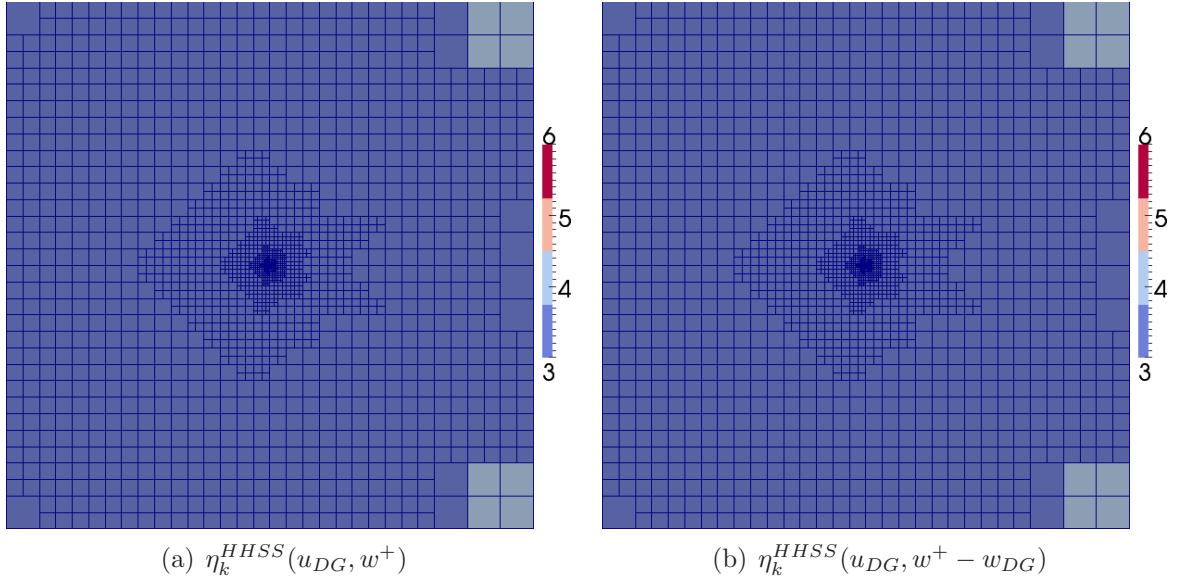


Figura 8.6: Espaços hp -adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$.

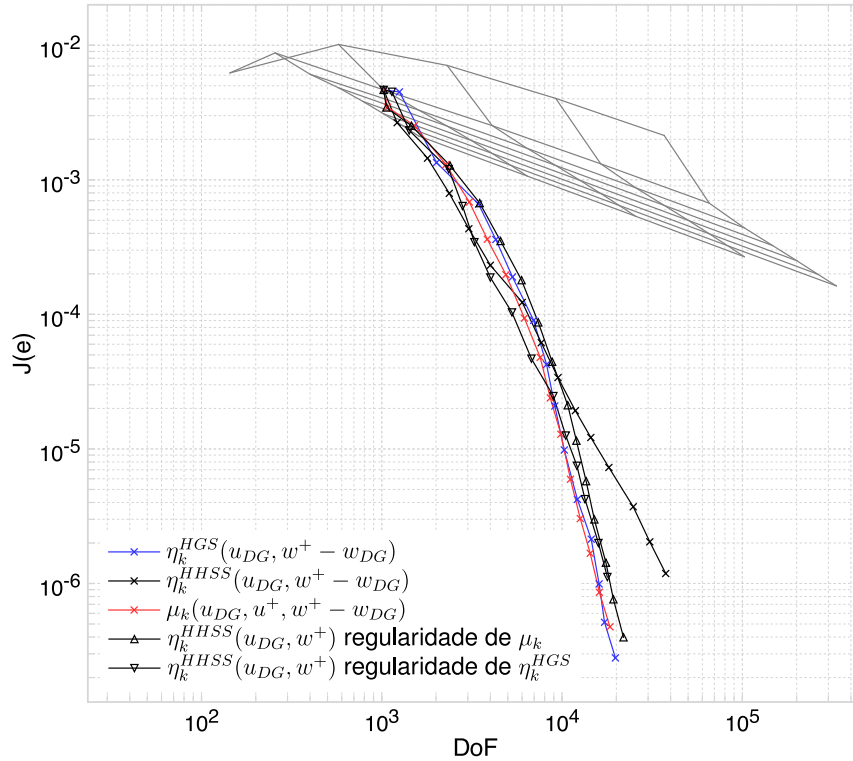


Figura 8.7: Erro de aproximação de $J(u)$ por graus de liberdade, para espaços de aproximação adaptados conforme $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ usando as estimativas de regularidade de $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+ w^+)$.

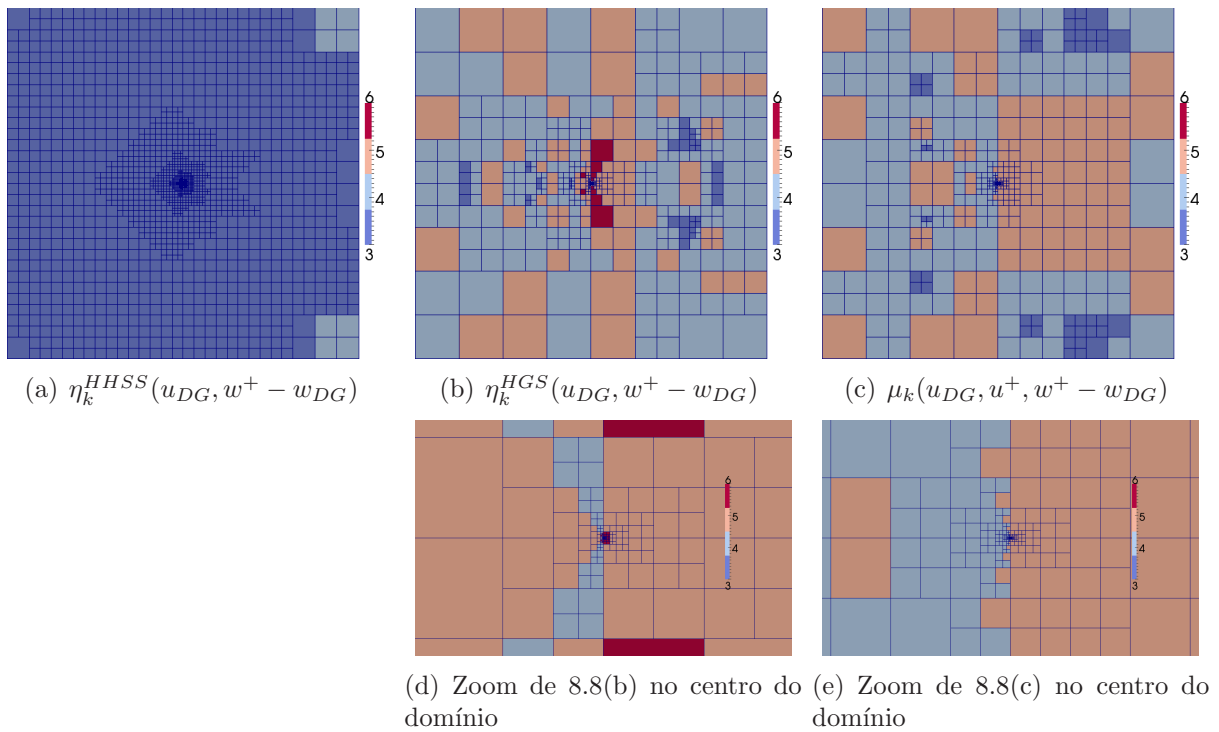
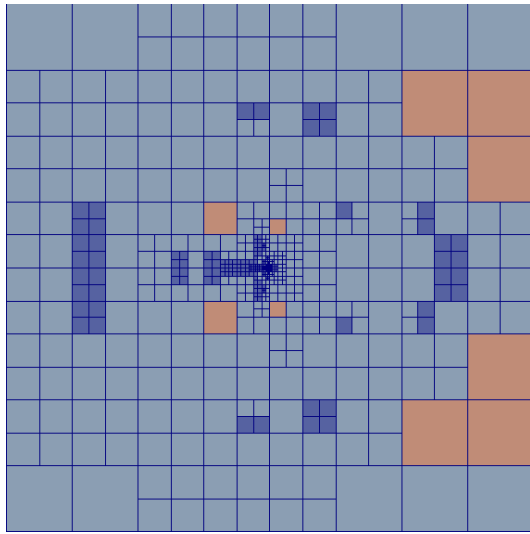
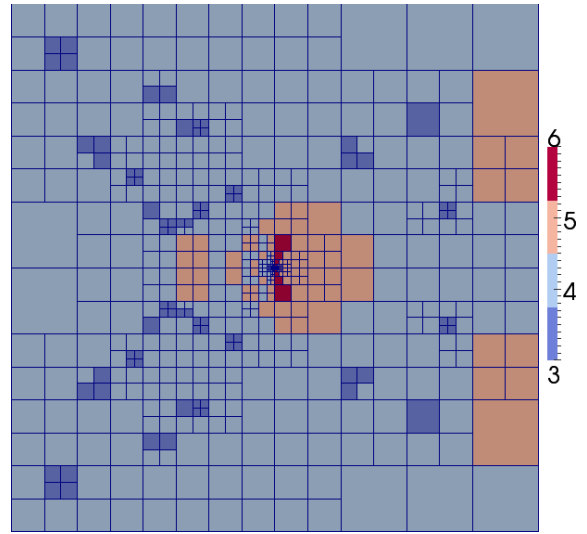


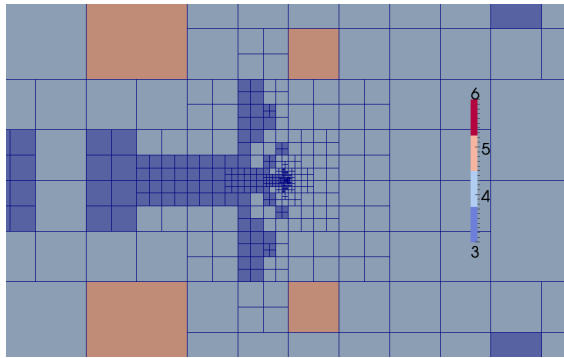
Figura 8.8: Espaços hp -adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, usando a estimativa de regularidade obtida pelo indicador do mesmo tipo, e o zoom no centro do domínio para os espaços obtidos por $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$.



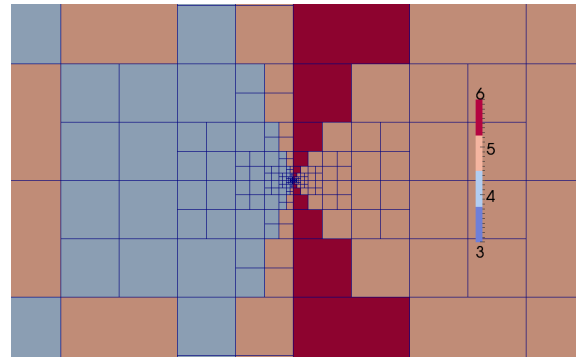
(a) $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ com regularidade obtida por $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$.



(b) $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ com regularidade obtida por $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$.



(c) Zoom de 8.9(a) no centro do domínio.



(d) Zoom de 8.9(b) no centro do domínio.

Figura 8.9: Espaços hp -adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ usando a estimativa de regularidade obtida pelos indicadores $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$.

Efeito da qualidade da aproximação dual

Uma questão que já abordamos no Capítulo 5 é efeito da qualidade da aproximação usada para substituir a solução dual exata, nos indicadores. Na caracterização dos indicadores constatamos que quanto melhor for a aproximação usada melhor será a qualidade dos indicadores de erro.

Nesse contexto aumentamos incremento Δp_{dual} do grau polinomial da aproximação dual enriquecida para 4. Para o indicador μ_k , aumentamos o incremento Δp_{primal} da aproximação primal enriquecida u^+ para 2.

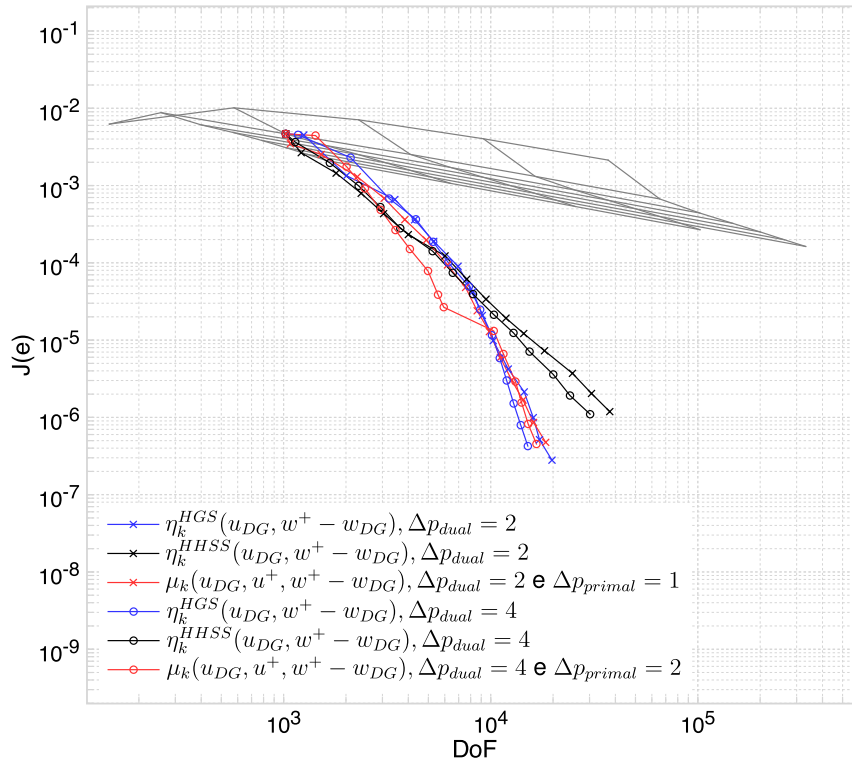


Figura 8.10: Erro de aproximação de $J(u)$ por graus de liberdade, para espaços de aproximação adaptados conforme $\eta_k^{HSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, com incremento $\Delta p_{dual} = 2$ e 4 para a solução dual enriquecida e $\Delta p_{primal} = 1$ e 2 para a solução primal enriquecida.

Como podemos ver na Figura 8.10, o desempenho dos indicadores na adaptação dos espaços de aproximação melhora. Porém, essa melhora não é tão significativa e, comparada ao custo adicional esse enriquecimento da aproximação dual, não se torna tão atraente pelo menos para esse problema específico.

Porém, analisando os espaços adaptados por esses indicadores com aproximação dual mais precisa, conforme Figura 8.11, em comparação com os espaços adaptados apresentados na

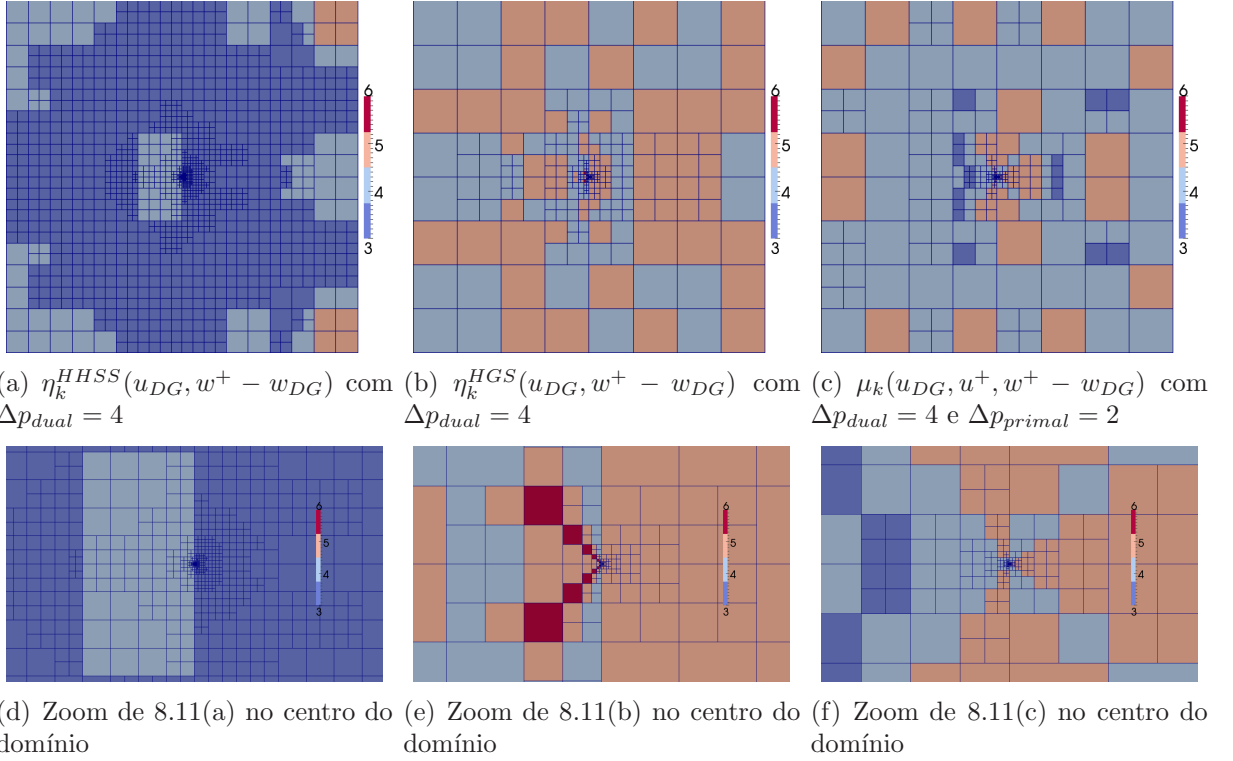


Figura 8.11: Espaços hp -adaptados por $\eta_k^{HHS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, usando a estimativa de regularidade obtida pelo indicador do mesmo tipo, e o zoom no centro do domínio dos respectivos espaços.

Figura 8.8, podemos observar que o padrão de adaptação mudou um pouco. O indicador η_k^{HGS} , apesar de manter a h -adaptação dominante na região à esquerda da ponta da placa, a mesma região foi cercada por elementos de maior ordem. A principal alteração entre os espaços adaptados por μ_k é que, usando aproximações duais melhores, o indicador realizou menos p -adaptações na região da placa, parte positiva do eixo x .

Os espaços adaptados que mais se modificaram pelo enriquecimento da aproximação dual foram os espaços construídos usando η_k^{HHS} . No primeiro momento, quase não havia ocorrido p -adaptação mas o indicador com aproximações duais melhores fez p -adaptação nas regiões mais periféricas do domínio e na região à esquerda da ponta da placa. Observamos que, apesar da mudança nos espaços adaptados pelo indicador η_k^{HHS} com diferentes aproximações duais, o comportamento da curva de erro por graus de liberdade permaneceu o mesmo, indicando que a estimativa de regularidade segundo esse indicador não melhorou significativamente.

Efeito do uso de aproximações recuperadas

O uso das aproximações recuperadas \bar{w}^+ , no papel da aproximação dual enriquecida, não se mostrou vantajoso. Como podemos ver na Figura 8.12, os indicadores de erro mudam muito

pouco e o custo de calcular essas aproximações, principalmente quando os espaços já estão bastante adaptados, mostrou-se muito alto.

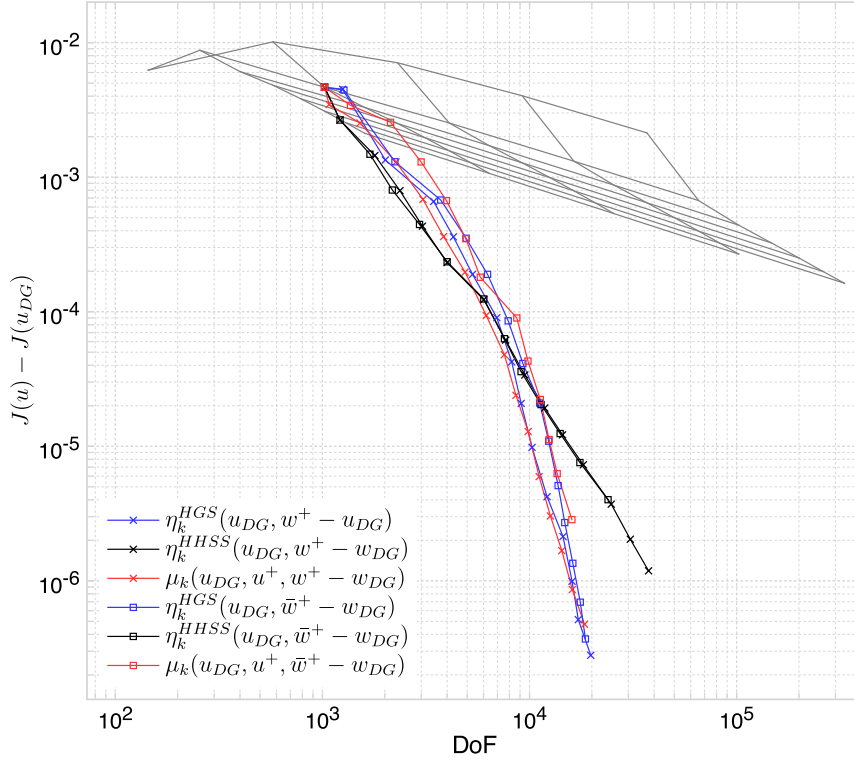


Figura 8.12: Erro por graus de liberdade em espaços hp -adaptados conforme os indicadores μ_k , η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} , com aproximações duais enriquecidas w^+ ou reconstruídas \bar{w}^+ .

A aproximação primal enriquecida, usada no indicador μ_k , teve problemas ao passar pelo processo de recuperação, devido à singularidade na vorticidade, não convergindo após algumas iterações adaptativas. Desta forma não consideramos seu uso nesse experimento.

Efeito do parâmetro γ

O algoritmo proposto no capítulo anterior, seguido nos experimentos desse capítulo, adapta os elementos com maiores indicadores de erro utilizando um parâmetro γ para determinar quais elementos serão adaptados a cada iteração.

O valor de γ usado nos experimentos apresentados até aqui foi $\gamma = 0.01$. Dessa forma foram refinados os elementos cujo indicadores de erro são até duas ordens menores que o maior indicador de erro dentre todos os elementos. Esse parâmetro é escolhido de forma arbitrária e é o único ponto do algoritmo adaptativo proposto que impede que o algoritmo seja completamente automático.

Na Figura 8.13, comparamos os resultados obtidos usando $\gamma = 0.01$ com os resultados

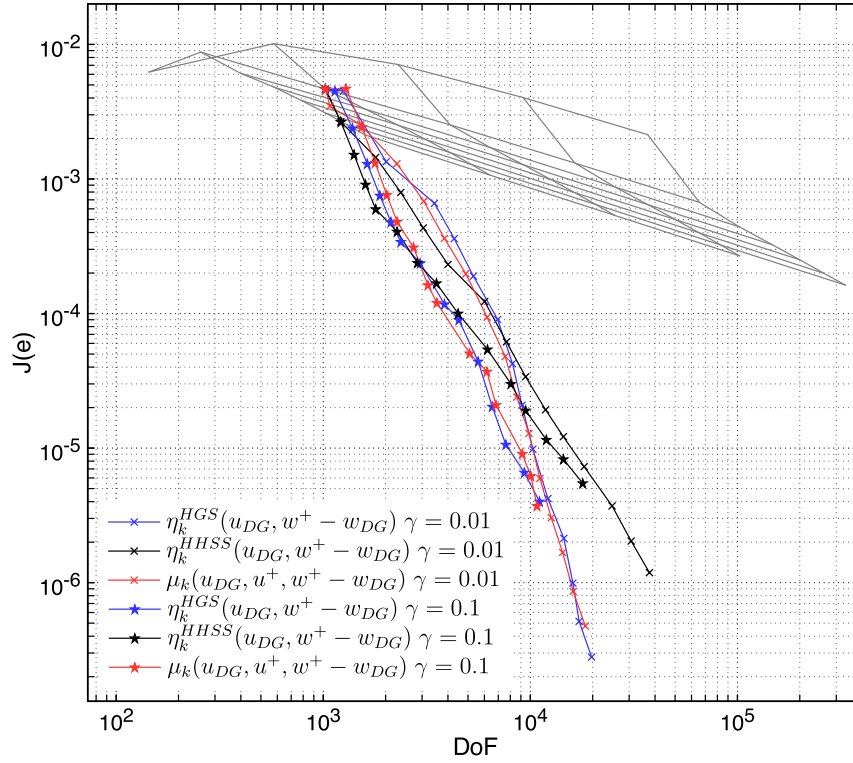


Figura 8.13: Erro por graus de liberdade para espaços hp -adaptados conforme os indicadores μ_k , η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} , com $\gamma = 0.01$ e com $\gamma = 0.1$.

1

usando $\gamma = 0.1$. Notamos que usando $\gamma = 0.1$ (experimentos indicados com \star), adaptando menos elementos a cada iteração, os resultados são melhores do que aqueles obtidos com $\gamma = 0.01$. Porém, ao longo das iterações, as curvas se aproximam. No entanto, com um valor maior de γ o algoritmo favorece a adaptação concentrada em torno da singularidade, onde ocorre principalmente h -adaptação. Conseqüentemente o diâmetro desses elementos fica muito pequeno, afetando a regularidade da malha, prejudicando os cálculos numéricos que afetam o desempenho do algoritmo adaptativo.

Além disso, também após algumas iterações a diferença entre as respectivas curvas de erro por graus de liberdade é muito pequena e como com $\gamma = 0.01$ o número de iterações, sem problemas numéricos é maior, o nível de erro atingido é menor. Ou seja, com $\gamma = 0.01$ conseguimos um espaço de aproximação com baixo nível de erro no funcional e que tem boas características.

Conclusões do experimento

Nesse experimento concluímos que usar adaptatividade foi muito vantajoso. Se fosse computacionalmente viável aplicar refinamento uniforme até que o erro no funcional fosse 3×10^{-7} , obtido com o algoritmo *hp*-adaptativo com menos de 20 mil graus de liberdade, isto é prolongando as curvas da Figura 8.3, o número de graus de liberdade seria superior a 10^8 , isto é 100 milhões de graus de liberdade.

A comparação entre os indicadores mostrou que a ortogonalidade é um aspecto que tem que ser considerado na dedução do indicador de erros e como η_k^{HHSS} o faz ele tem vantagem sobre os demais se os mesmos não usam a ortogonalidade. Contudo a subtração da ortogonalidade de η_k^{HGS} e μ_k é suficiente para equipará-los com η_k^{HHSS} . Com certeza o aspecto da ortogonalidade foi o que teve o maior efeito quantitativo no desempenho dos indicadores na adaptação.

O aspecto que teve maior efeito qualitativo foi a estimativa de regularidade, que é fundamental para o critério *hp*. E sob esse aspecto os indicadores η_k^{HGS} e μ_k mostraram-se muito superiores ao indicador η_k^{HHSS} .

Também concluímos que usar aproximações DGFEM muito enriquecidas, em relação a aproximação que desejamos estimar, ou mesmo o procedimento de recuperação da aproximação DGFEM apresentado no Capítulo 6, não geram grandes mudanças a não ser no custo computacional, que aumenta.

Sobre o parâmetro γ , constatamos que existe uma certa sensibilidade do algoritmo quanto a esse parâmetro e que uma escolha inadequada pode limitar o processo adaptativo. Portanto concluímos que cabe ainda o desenvolvimento de uma estratégia mais robusta pra determinar o γ ótimo para cada problema, talvez com o γ variando ao longo das iterações. Contudo o valor de γ usado foi adequado e produziu espaços adequados.

8.1.2 Placa presa e engastada sob carga pontual em seu centro

Nesse experimento consideramos o problema biarmônico aplicado à teoria de deflexão de placas finas e planas. O problema de valor de contorno que tratamos é

$$\Delta^2 u = f \quad \text{em } \Omega, \quad (8.3a)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (8.3b)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \quad (8.3c)$$

As condições de contorno homogêneas representam que a placa Ω esta presa, $u = 0$, e engastada, $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$, em $\partial\Omega$. As forças atuando sobre a placa são representadas por f .

Consideramos $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ e $f(x, y) = \delta(x - 1/2, y - 1/2)$ e desta forma estamos modelando uma placa presa e engastada sob uma força pontual, no centro da placa.

A quantidade de interesse desse problema é o deslocamento no centro da placa, $J(u) = u(0.5, 0.5)$, que é também o deslocamento máximo da placa. Essa quantidade de interesse faz com que o problema primal seja igual ao problema dual. Assim temos que ambas as soluções estão em $H^{3-\varepsilon}(\Omega)$, como descrito em [53]. Porém, ambas as soluções são contínuas em $(0.5, 0.5)$, logo o funcional está bem definido. Um esboço da solução primal e seu laplaciano são apresentados na Figura 8.14.

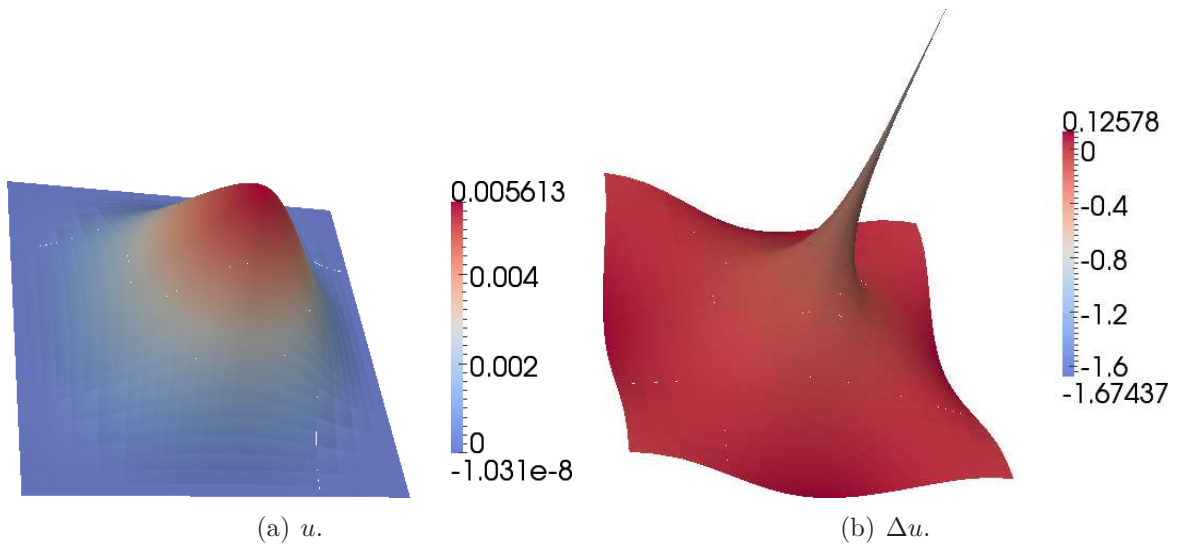


Figura 8.14: Esboço da solução, u , e de seu laplaciano, Δu .

A solução de referência que consideramos para analisar nossos resultados é a solução obtida usando representação por séries, conforme apresentado em [72], em que o princípio da sobreposição é considerado para aplicar as condições de contorno da placa engastada. O valor dessa solução de referência no ponto $(0.5, 0.5)$ é 0.0056120240202320 .

Refinamento uniforme

Se a malha usada no DGFEM tiver uma face ou aresta sobre o ponto $(0.5, 0.5)$, u_{DG} não será necessariamente contínua nesse ponto. Contudo esse é um inconveniente recorrente das aproximações DGFEM. Nos experimentos consideramos dois tipos de malhas uniformes de $n \times n$ elementos. Para n par, o ponto $(0.5, 0.5)$ está sobre o vértice de quatro elementos. Neste caso, $u_{DG}(0.5, 0.5)$ é definido como a média dos traços da solução em cada um dos quatro elementos. Para n ímpar o ponto $(0.5, 0.5)$ está no interior de um dos elementos.

Na Figura 8.15 apresentamos o erro, $J(u) - J(u_{DG})$, para espaços de aproximação com malhas uniformes com $n = 2, 3, 4, 5, 8, 9, 16, 17, 32$ e 33 . Em cada caso os erros são plotados

para ordem polinomial p variando de 2 a 8. Podemos observar que os resultados para malhas pares são significativamente superiores aos resultados para malhas ímpares. Além disso, para as malhas ímpares, observamos que o erro em $J(\cdot)$ não altera significativamente com a variação de p de 4 para 5 e de 6 para 7, apesar de, obviamente, o número de graus de liberdade aumentar.

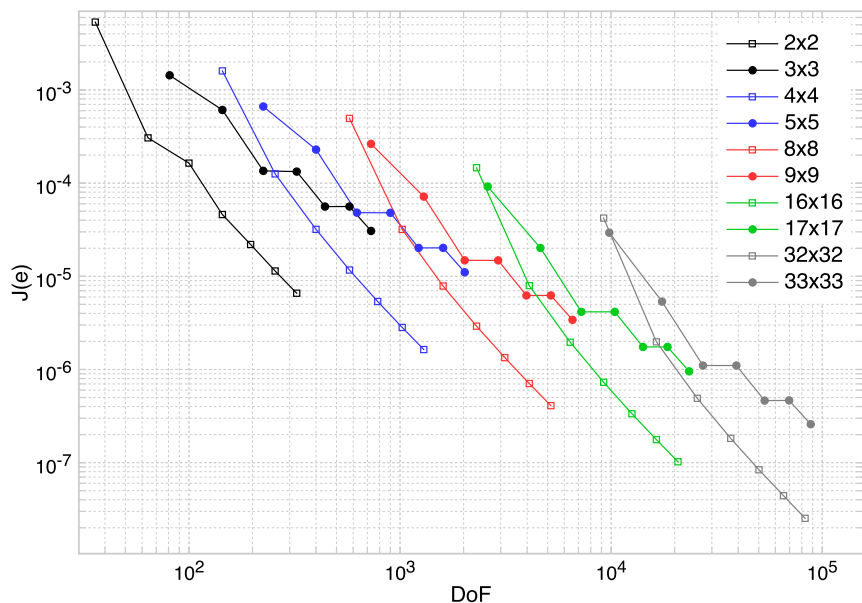


Figura 8.15: Erro de aproximação de $J(u)$, para malhas pares e ímpares, com graus polinomiais constantes de 2 a 8.

Diante dessa análise prévia, vamos considerar apenas as malhas pares nos experimentos a seguir. Sendo assim, destacamos na Figura 8.15 os resultados para malhas pares para efeito de comparação com os esquemas adaptativos. Fica evidente a limitação da taxa de convergência do erro em $J(\cdot)$, tanto no refinamento em h quanto em p , aproximadamente 2 e 4.1, respectivamente. Esse comportamento era esperado, devido à falta de regularidade das aproximações primal e dual.

Resultados adaptativos

Nos resultados que apresentamos a seguir para espaços de aproximação adaptados, manteremos os resultados da Figura 8.16 para facilitar a comparação entre os resultados. O parâmetro γ , necessário no algoritmo adaptativo, é escolhido como $\gamma = 0.01$.

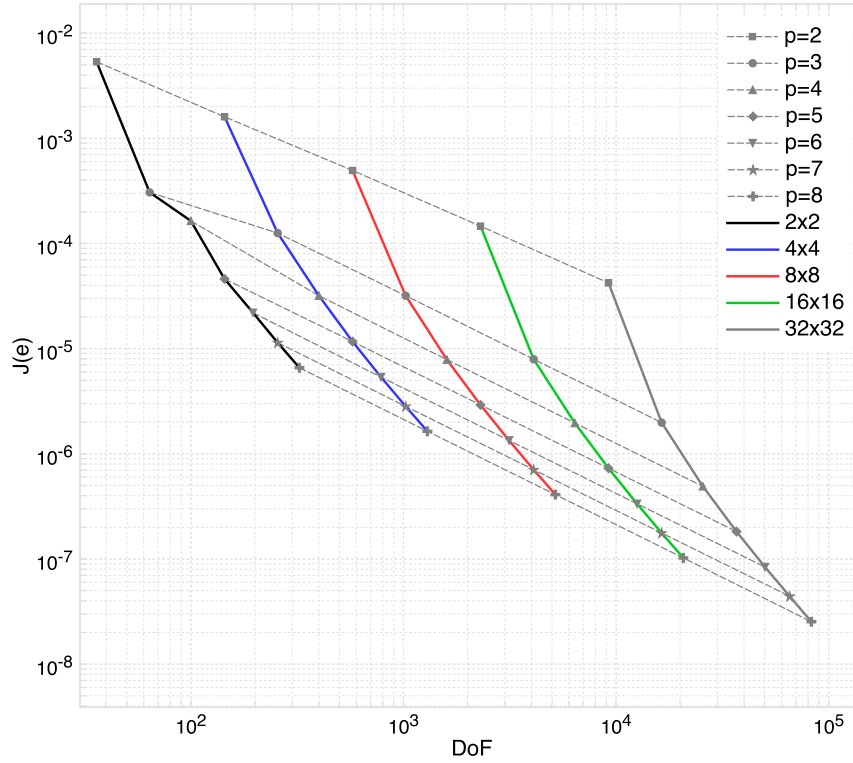


Figura 8.16: Erro de aproximação de $J(u)$, para malhas pares, com graus polinomiais constantes de 2 a 8.

Efeito da ortogonalidade

Na Figura 8.17 apresentamos os erros obtidos com h -adaptação dos espaços de aproximação, guiado pelos indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, partindo de uma malha inicial uniforme de 16 elementos. Foram consideradas aproximações DGFEM de grau 3 e 4 para os problemas primais e as aproximações duais w^+ são DGFEM com $\Delta p_{dual} = 2$.

Da mesma forma, aplicamos p -adaptação guiada pelos indicadores de erro $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, conforme resultados apresentados na Figura 8.18, em que são consideradas duas malhas com 64 (8×8) e 256 (16×16) elementos. Inicialmente a aproximação DGFEM do problema primal tem grau 3 para todos os elementos, com $\Delta p_{dual} = 2$.

Também consideramos hp -adaptação com os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, considerando a malha inicial uniforme de 16 elementos, p inicial 3 para aproximação primal e 5 para a dual. Os resultados são apresentados na Figura 8.19.

Todos os casos de adaptação h , p e hp , para todos os indicadores sem considerar a ortogonalidade, mostraram-se limitados. Os indicadores identificaram um erro no centro da placa muito maior que nas outras regiões, concentrando o refinamento no centro da placa, sem

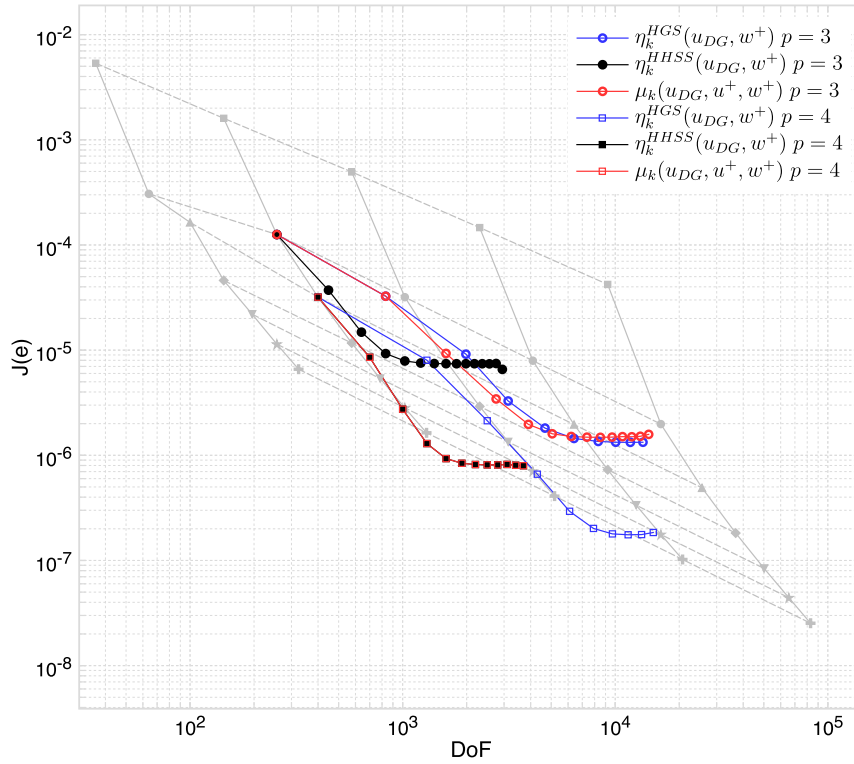


Figura 8.17: Erro por graus de liberdade, em espaços h -adaptados conforme os indicadores, $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, $\eta_k^{HSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, sem usar a ortogonalidade, com $p = 3$ e 4 e $\Delta p_{dual} = 2$.

contribuir para o decrescimento do erro, apesar do aumento de graus de liberdade. Como o erro está associado a um delta de Dirac, diante da adaptação o erro estimado não diminui, apenas se concentra nos elementos que contém o ponto em que o delta de Dirac é aplicado. Desta forma podemos ver claramente que após algumas iterações o erro não decresce mais. Observamos que esse comportamento é pior do que o obtido no caso do problema analisado anteriormente, na Seção 8.1.1, tendo em vista a singularidade mais acentuada que dificulta o cálculo numérico dos indicadores.

A Figura 8.20 mostra as malhas adaptativas no final do processo de h -adaptação. Um detalhe que merece ser comentado é que os indicadores que apresentaram maior redução do erro na h -adaptação, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$ com $p = 3$ (8.20(a)) e com $p = 4$ (8.20(d)), ambos com $\Delta p_{dual} = 2$ além de $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$ com $p = 3$, $\Delta p_{dual} = 2$ e $\Delta p_{primal} = 1$ (8.20(c)) foram aqueles que, além do refinamento no centro da placa, conduziram a um maior refinamento das regiões próximas ao contorno do domínio. Isso nos dá um indício de que não basta adaptar a região central da placa para melhorar o erro.

Agora consideramos os indicadores de erro com a ortogonalidade $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, para as adaptações h e p , conforme mostramos nas Figuras 8.21 e 8.22, respectivamente. Em ambos os casos, verificamos que a

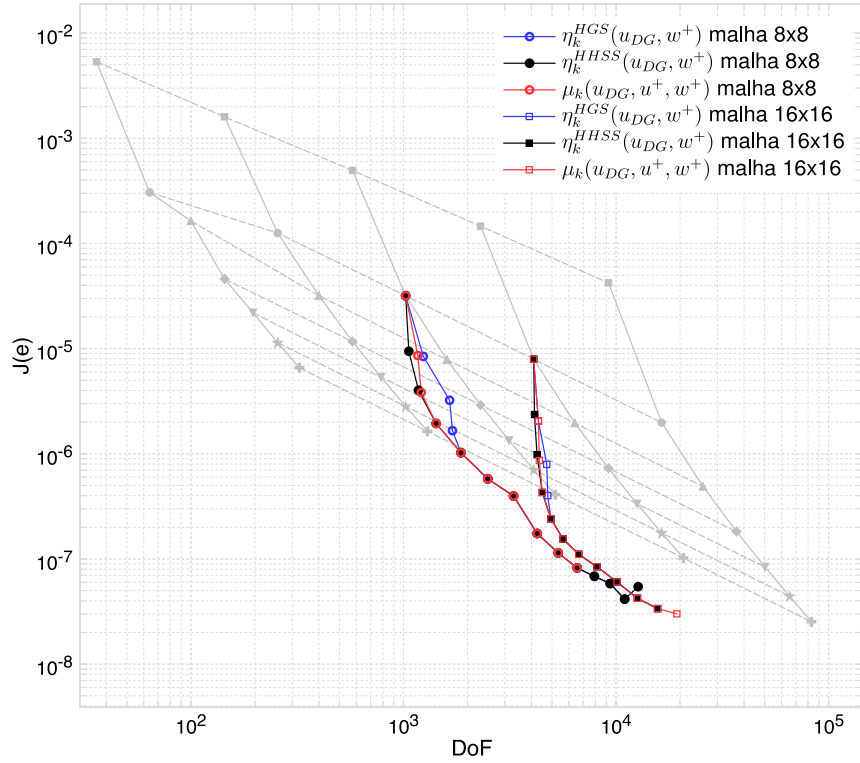


Figura 8.18: Erro por graus de liberdade, em espaços p -adaptados conforme os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, sem usar a ortogonalidade.

introdução da componente de ortogonalidade ajudou a vencer a saturação observada nas Figuras 8.17, 8.18 e 8.19. Merece destaque para os espaços h -adaptados houve uma maior distribuição do refinamento em todo o domínio, tanto no centro quanto nas bordas, como mostrado nas Figuras 8.23.

Finalmente consideramos a hp -adaptação pelos os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, sendo que a decisão entre h ou p -adaptação é baseada na regularidade estimada por indicadores do mesmo tipo com ordens polinomiais incrementadas.

Como mostra a Figura 8.24, os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ atingiram um nível de erro menor que o da h -adaptação com aproximadamente dez mil graus de liberdade a menos. O espaço hp -adaptado por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ obteve um erro um pouco menor que o verificado na h -adaptação, porém com aproximadamente o mesmo número de graus de liberdade.

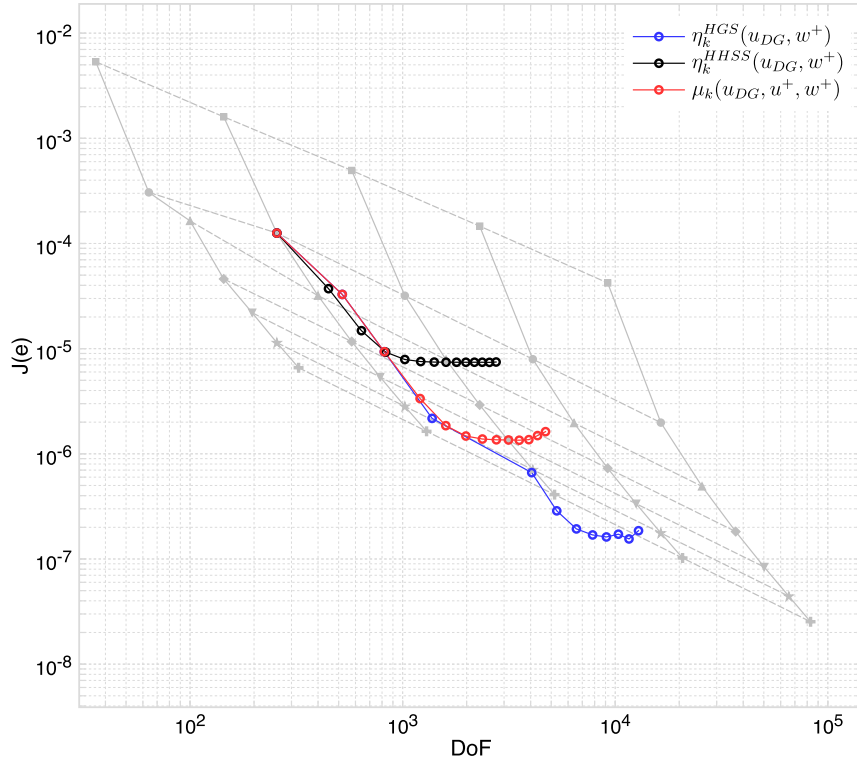


Figura 8.19: Erro por graus de liberdade, em espaços hp -adaptados conforme os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, sem usar a ortogonalidade.

Efeito da estimativa de regularidade

Os resultados um pouco inferiores de η^{HHSS} com relação aos outros dois indicadores indica, a exemplo do que aconteceu no experimento anterior, que o critério hp baseado no indicador η^{HHSS} não foi tão bom quanto poderia.

Portanto consideramos também a adaptação guiada por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e usando o critério hp dos indicadores η_k^{HGS} e μ_k , cujos resultados são apresentados na Figura 8.25.

Podemos observar que o desempenho do espaço adaptados por η_k^{HHSS} mas usando as estimativas de regularidade de μ_k e η_k^{HGS} foram superiores ao desempenho quando consideramos a estimativa usando o indicador η_k^{HHSS} . Inclusive o desempenho apresentados nessas duas abordagens foram próximos ao de η_k^{HGS} e μ_k ao longo das iterações, mas considerando o espaço adaptado final, as duas abordagens foram as melhores dentre todos os experimentos.

Comparando os espaços hp -adaptados das respectivas curvas da Figura 8.25, apresentados na Figura 8.26, observamos que todos foram bastante h -adaptados no centro da placa além de serem um pouco p -adaptados no entorno do centro.

Assim, como tínhamos constatado na análise dos resultados da h -adaptação, a adaptação nos cantos e meios dos lados da placa também fez-se necessária na hp -adaptação. Além disso,

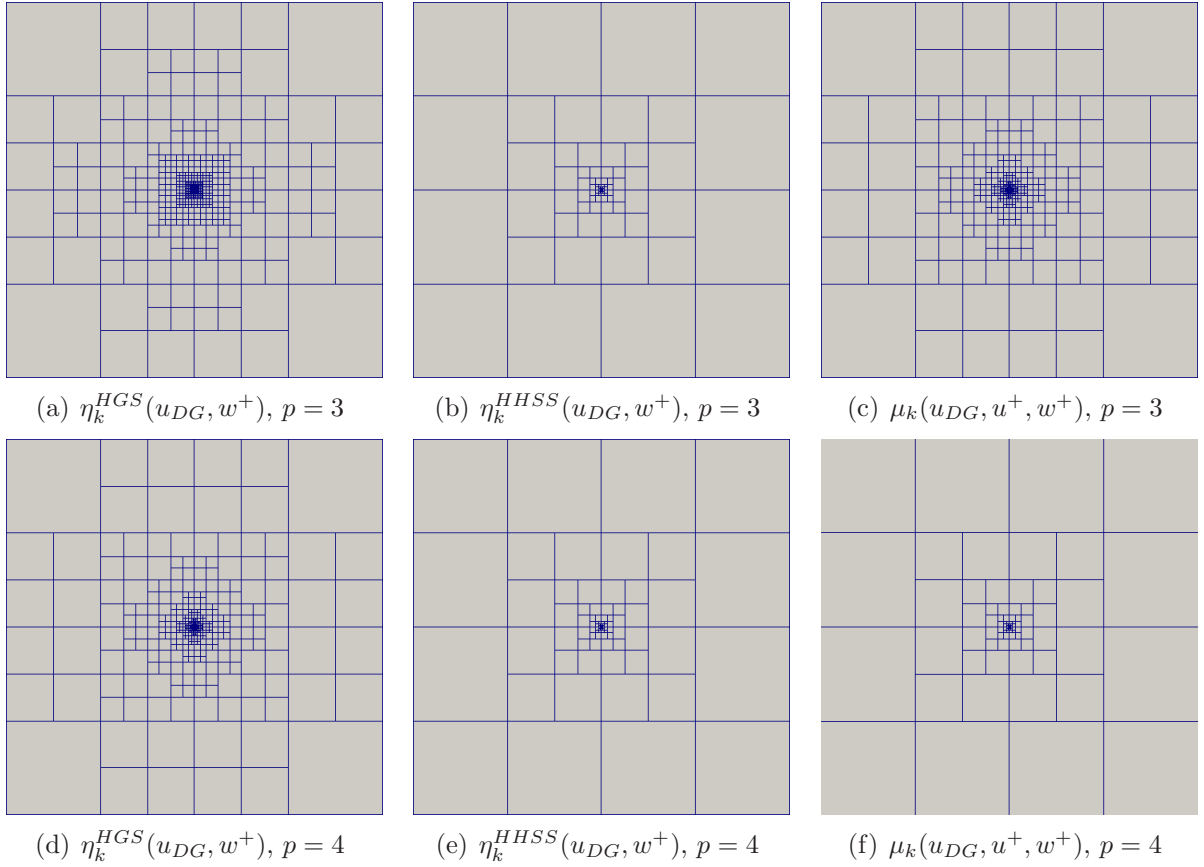


Figura 8.20: Espaços h -adaptados por $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$, sem usar a ortogonalidade, para $p = 3$ e 4 e com $\Delta p_{dual} = 2$ e $\Delta p_{primal} = 1$.

as estratégias que o fizeram predominantemente com p -adaptação foram as que apresentaram os melhores resultados.

Observando com mais detalhe o centro dos espaços de aproximação na Figura 8.27, os elementos mais ao centro da placa não foram p -adaptados, devido à singularidade, o que mostra que as estimativas de regularidade classificaram bem a regularidade nessa região. Contudo, a estimativa de regularidade usando indicadores do tipo η_k^{HHSS} estimou as regiões dos cantos e lados do domínio como regiões onde as aproximações tem baixa regularidade, levando a h -adaptação dessas regiões, e, em comparação com os resultados apresentados na Figura 8.25, essa não é uma boa estimativa. Assim, a exemplo do experimento anterior, a estimativa de regularidade usando o indicador η_k^{HHSS} foi pior que as estimativas dos demais indicadores.

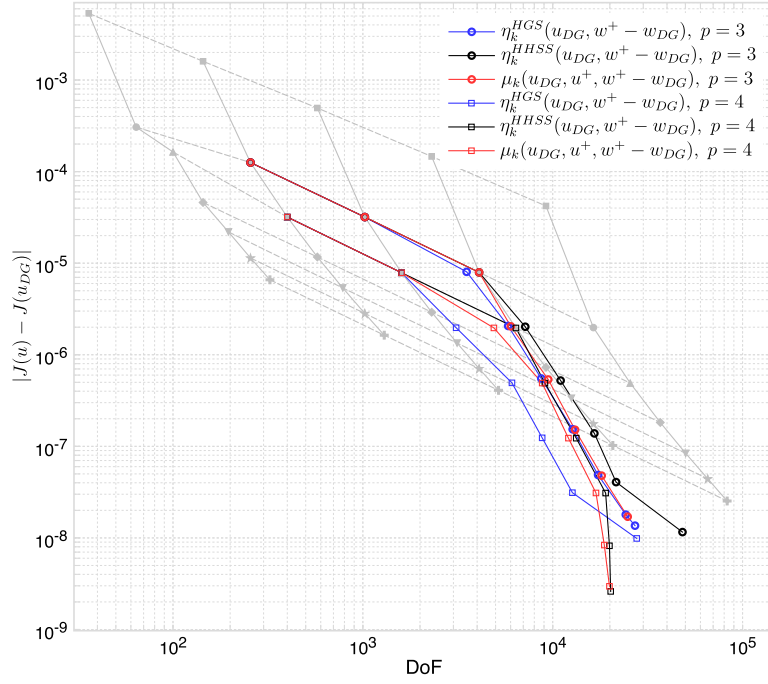


Figura 8.21: Erro por graus de liberdade, em espaços h -adaptados conforme os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, com $p = 3$ e 4 e com $\Delta p_{dual} = 2$.

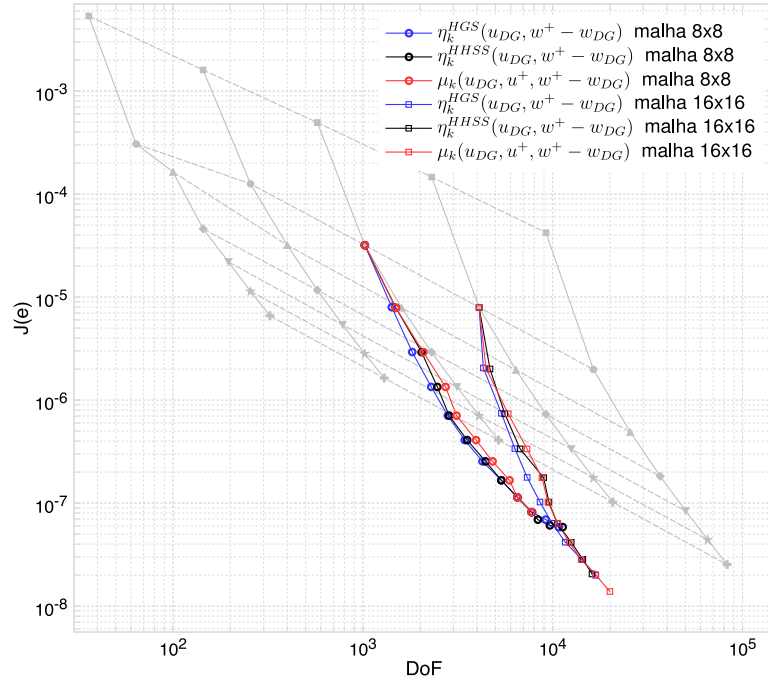
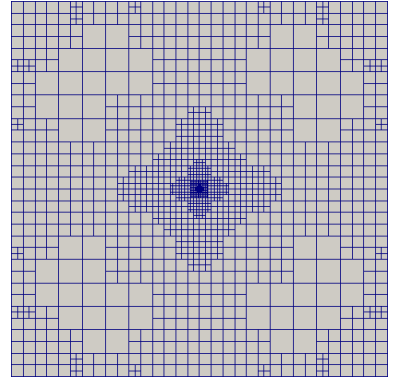
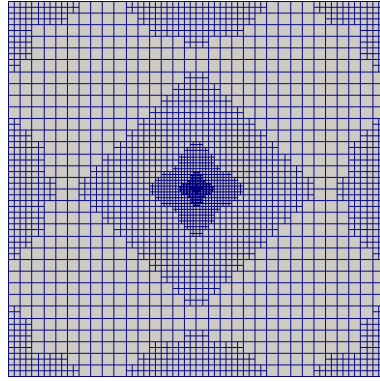
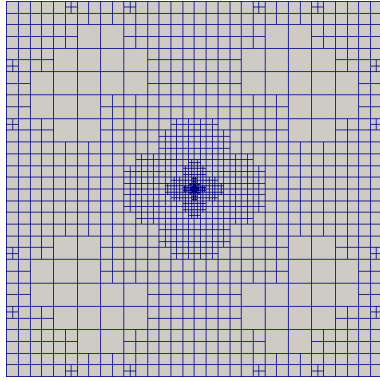
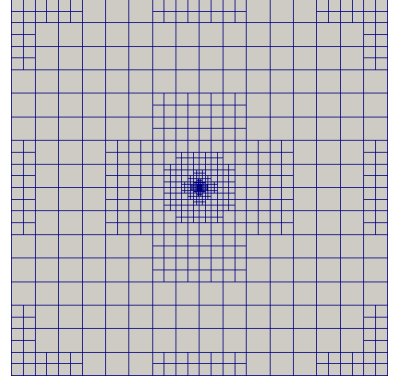
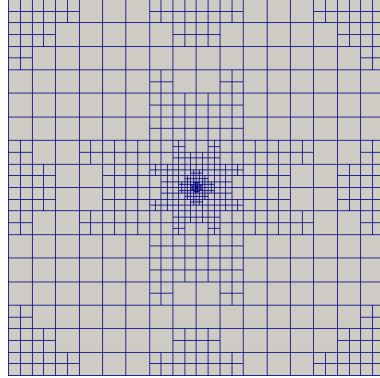
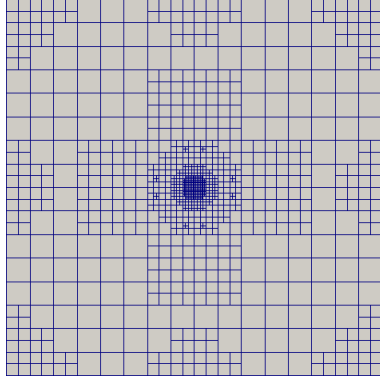


Figura 8.22: Erro por graus de liberdade, em espaços p -adaptados conforme os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, com p inicial igual a 3 e $\Delta p_{dual} = 2$.



(a) $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG}), p = 3$ (b) $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG}), p = 3$ (c) $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG}), p = 3$



(d) $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG}), p = 4$ (e) $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG}), p = 4$ (f) $\mu_k(u_{DG_4}, u^+, w^+ - w_{DG}), p = 4$

Figura 8.23: Espaços h -adaptados por indicadores usando a ortogonalidade, com $p = 3$ e 4 e $\Delta p_{dual} = 2$.

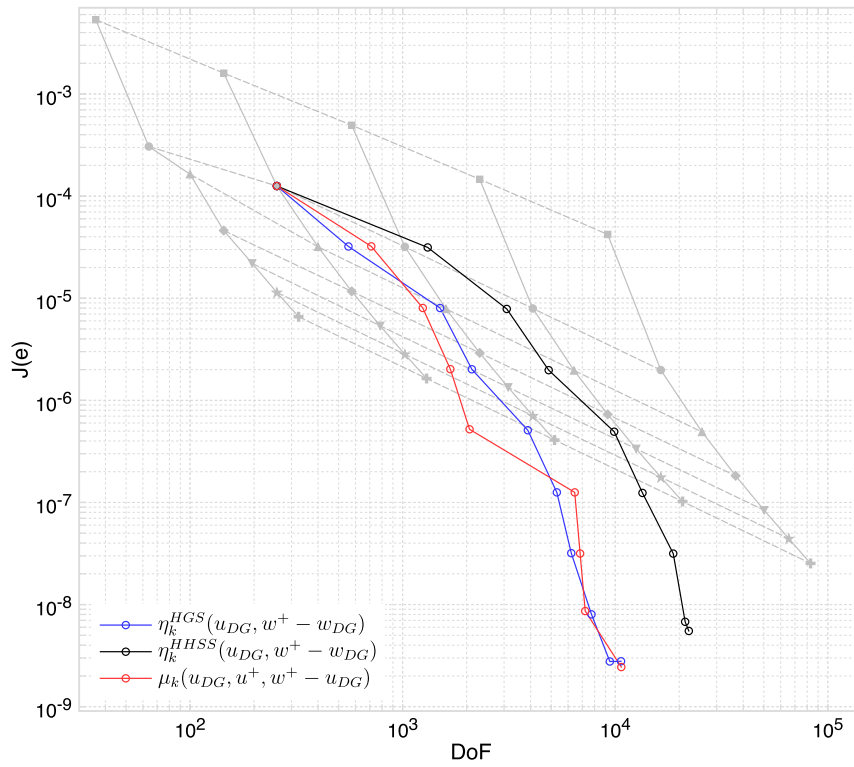


Figura 8.24: Erro por graus de liberdade, em espaços hp -adaptados conforme os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, com $p = 3$ e 4 , com $\Delta p_{dual} = 2$.

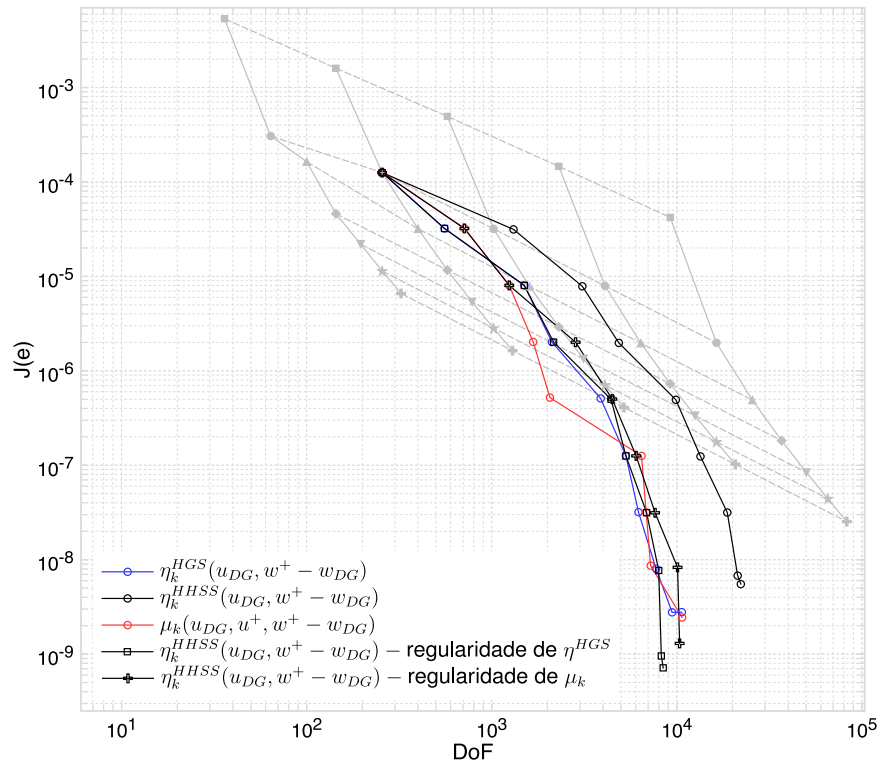


Figura 8.25: Erro por graus de liberdade, em espaços hp -adaptados conforme os indicadores $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, sendo que o último usa também as regularidades estimadas pelos dois primeiros no algoritmo adaptativo.

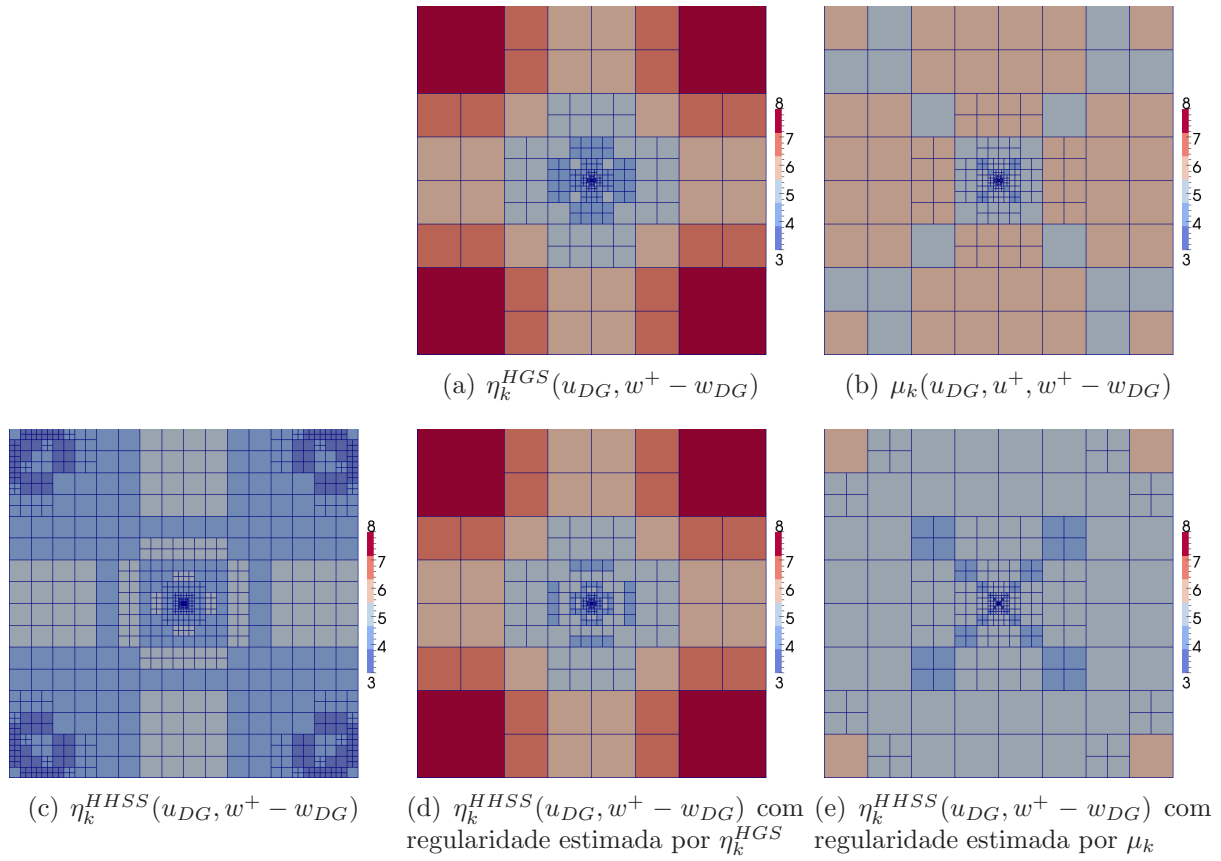


Figura 8.26: Espaços hp -adaptados por $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$.

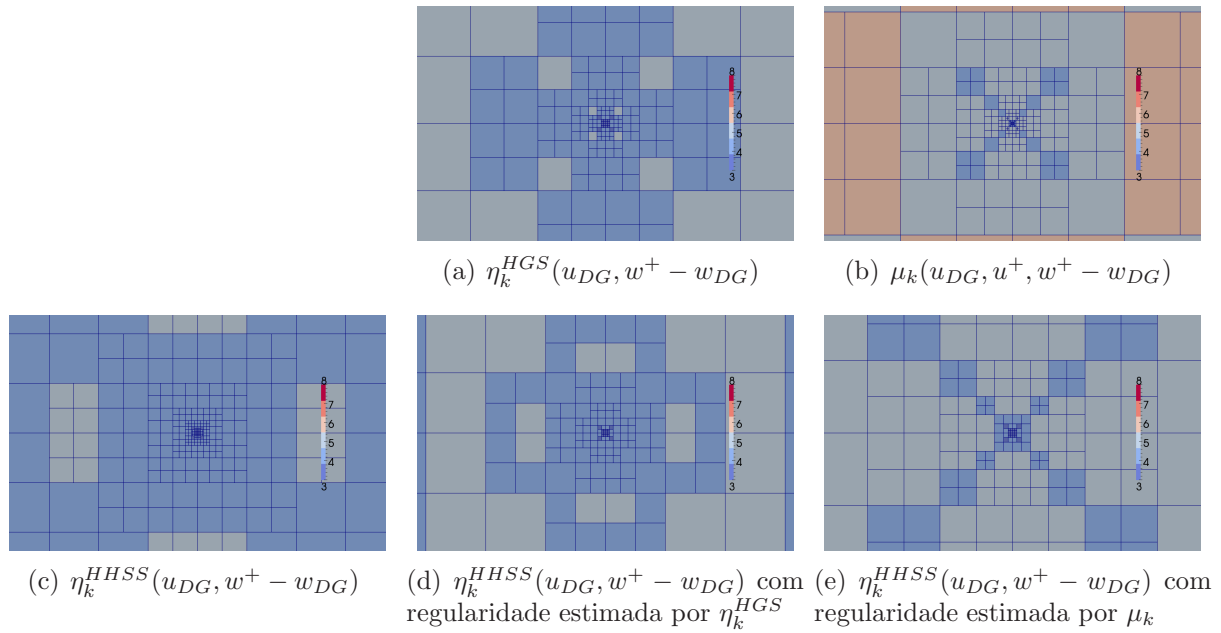


Figura 8.27: Zoom no centro dos espaços hp -adaptados por $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$.

Conclusões do experimento

Nesse experimento constatamos que a hp -adaptatividade foi vantajosa sobre o refinamento uniforme e também sobre a h e p -adaptações. Contudo é preciso escolher bem os indicadores para guiar o algoritmo adaptativo e o critério hp .

A ortogonalidade também atuou de forma fundamental sobre os indicadores de erro, embora num contexto diferente do experimento anterior. Neste experimento, devido ao tipo da singularidade, a ortogonalidade não é verificada numericamente e ao subtrair as componentes da ortogonalidade dos indicadores removemos essa falta de ortogonalidade dos indicadores.

Os indicadores de erro tiveram resultados próximos, com η_k^{HSS} um pouco melhor quando utiliza o critério hp obtido pelos indicadores η_k^{HGS} e μ_k .

Sobre a forma do espaço de aproximação, concluímos que além de refinamento h no centro da placa, onde é aplicado a força concentrada e que já poderíamos antever por saber da singularidade naquela região, o refinamento nas bordas da placa foi fundamental para conseguirmos diminuir o erro no funcional. Além disso, como as aproximações nessa região é mais suave, o p -refinamento se mostrou mais eficiente.

8.2 Equação de Poisson

Seja $\Omega = (-1, 1) \times (0, 1)$ e os conjuntos $\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ e } -1 < x < 0\}$ e $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ e } 0 < x < 1\}$. Consideramos o problema elíptico de segunda ordem

$$-\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (8.4a)$$

$$u(x, y) = 0 \quad \text{em } \Gamma_0, \quad (8.4b)$$

$$\nabla u(x, y) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad (8.4c)$$

$$\nabla u(x, y) \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{em } \partial\Omega \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1). \quad (8.4d)$$

Usando o sistema de coordenadas polares, com a mesma origem do sistema cartesiano, escolhemos g tal que a solução seja $u(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2)$. O funcional de interesse é a média de u sobre o domínio, $J(u) = \int_{\Omega} u d\Omega$. Este problema foi estudado na Seção 7.2.1, a título de comprovação das estimativas de regularidade.

Refinamento uniforme

Primeiramente analisamos o comportamento do erro $J(e)$ diante de h e p -refinamento uniforme. Essa análise é importante porque, caso a convergência respeite a as estimativas a

priori, o refinamento uniforme é uma opção simples e efetiva de obter aproximações precisas no funcional.

Na Figura 8.28 mostramos os erros $J(e)$ obtidos com espaços aproximação em malhas uniformes e graus polinomiais iguais para todos os elementos, sendo que o menor p considerado é 1 e a malha mais grossa tem 8 elementos.

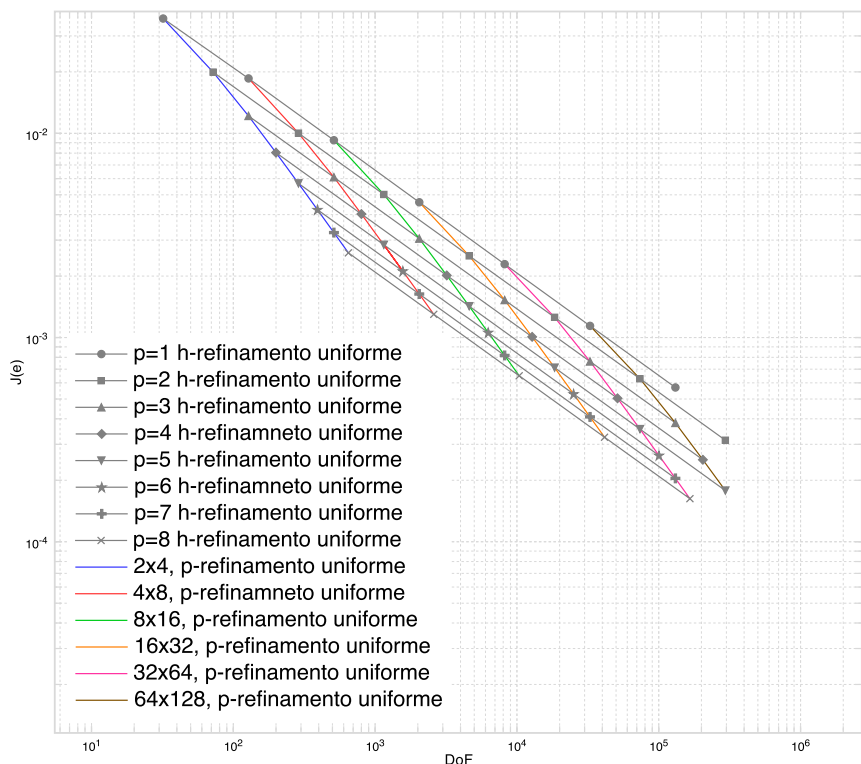


Figura 8.28: Erro de aproximação de $J(u)$ por graus de liberdade, para espaços de aproximação uniformes.

A taxa de convergência do h -refinamento foi 3 para todos os graus polinomiais considerados e a taxa do p -refinamento foi menor que 5. Apesar dessa taxa não serem ruins elas estão aquém do ideal. Observamos que, mesmo com malha fina e grau polinomial alto, o erro no funcional é maior que 10^{-4} . Desta forma, o uso de adaptatividade torna-se uma alternativa interessante.

Resultados adaptativos

Na primeira iteração adaptativa, a aproximação u_{DG} é de grau 2 e é calculada usando uma malha de 8 elementos. As aproximações w^+ e u^+ são calculadas com a mesma malha, porém com graus 4 e 3, respectivamente. Utilizamos $\gamma = 0.01$.

Começamos considerando a hp -adaptação usando os indicadores $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, sem usar a ortogonalidade. Na Figura 8.29 podemos ver que os espaços de aproximação adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$ e $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$ conseguiram reduzir o erro $J(e)$ à ordem 10^{-7} e fica claro que o primeiro indicador teve um desempenho melhor, usando menos graus de liberdade.

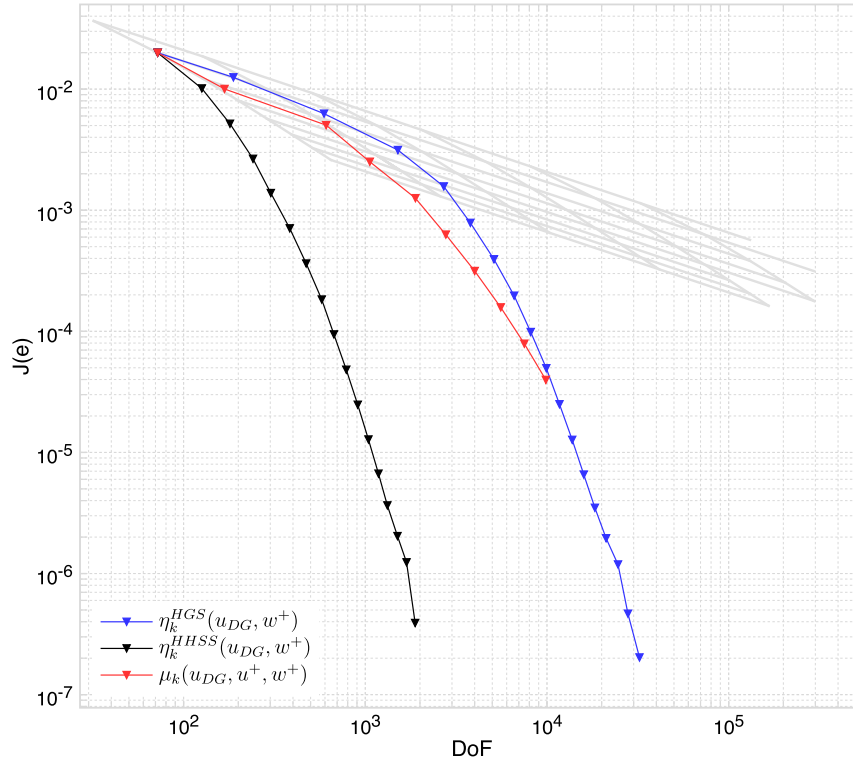


Figura 8.29: Erro de aproximação por graus de liberdade, para espaços de aproximação hp -adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+)$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+)$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$, sem usar a ortogonalidade.

O indicador $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+)$ teve um desempenho próximo ao do indicador η_k^{HGS} , mas após algumas iterações na adaptação do espaço por μ_k , ocorreu muita p -adaptação em todo o domínio, exceto na região da origem, onde ocorreu apenas h -adaptação em menor quantidade do que a observada nos outros espaços adaptados. Essa p -adaptação excessiva afetou o cálculo das aproximações, não permitindo a realização de mais iterações.

Como a principal diferença entre η_k^{HHSS} e os outros indicadores é a ortogonalidade vamos considerar os indicadores com a ortogonalidade subtraída. Na Figura 8.30 mostramos as curvas de erro por graus de liberdade para os espaços adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$.

Observamos que a subtração da ortogonalidade não afetou em nada a adaptação realizada por η_k^{HHSS} que foi exatamente igual ao caso sem subtração da ortogonalidade. O espaço

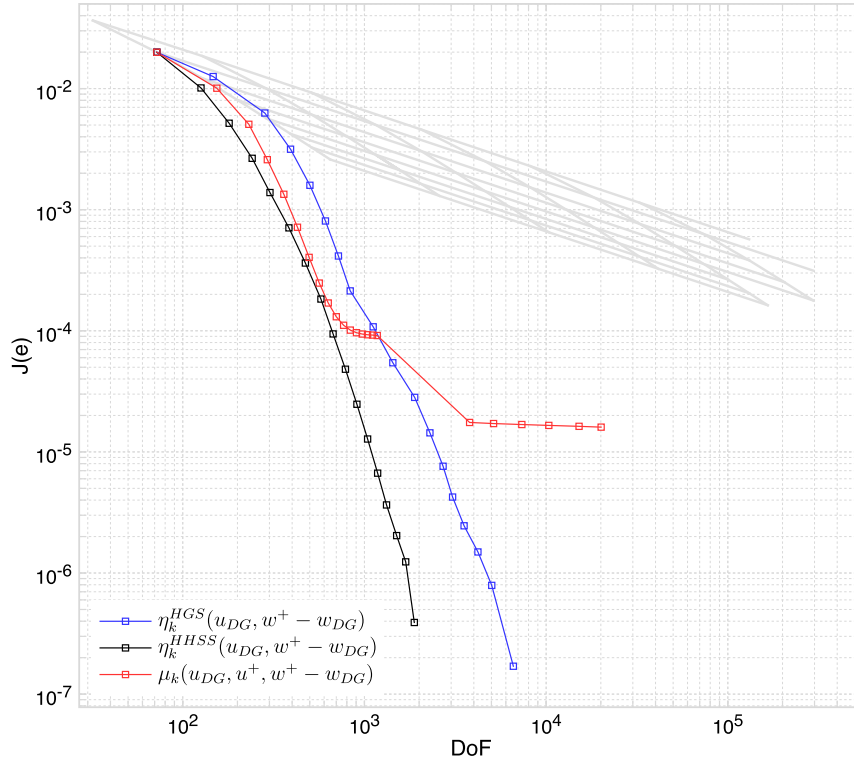


Figura 8.30: Erro de aproximação por graus de liberdade, para espaços de aproximação hp -adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$.

adaptado pelo indicador η_k^{HGS} teve uma melhora considerável mas ainda ficou um pouco pior que o obtido por η_k^{HHSS} . O indicador μ_k gerou espaços que, inicialmente, aproximaram a curva de η_k^{HHSS} , o que é ótimo. Porém as iterações seguintes pouco reduziram o erro no funcional e limitaram a redução do erro. Subtraindo a ortogonalidade do indicador, o desempenho da adaptação nas dez primeiras iterações é excelente. Porém, a partir da décima iteração a adaptação a h -adaptação na região da singularidade continua mas deixa de ser cercada por todos os lados por uma região p -adaptada, passando a ter em seu entorno regiões que não são adaptadas, isso impediu que o erro fosse reduzido. Depois de algumas iterações com o erro praticamente estagnado, a restrição do algoritmo adaptativo sobre o h -refinamento, desencadeia a h -adaptação de uma região maior próxima da singularidade que reduz um pouco o erro, mas nas iterações seguintes o erro volta a ficar estagnado.

Na Figura 8.31 são plotadas juntas as curvas de erro obtidos por h e hp -adaptação para efeito de comparação. Observa-se que a hp -adaptação melhora bastante o desempenho das curvas de erro por graus de liberdade para o indicador η_k^{HHSS} . Para os outros dois indicadores, houve uma pequena melhora, mas o comportamento das curvas continua o mesmo.

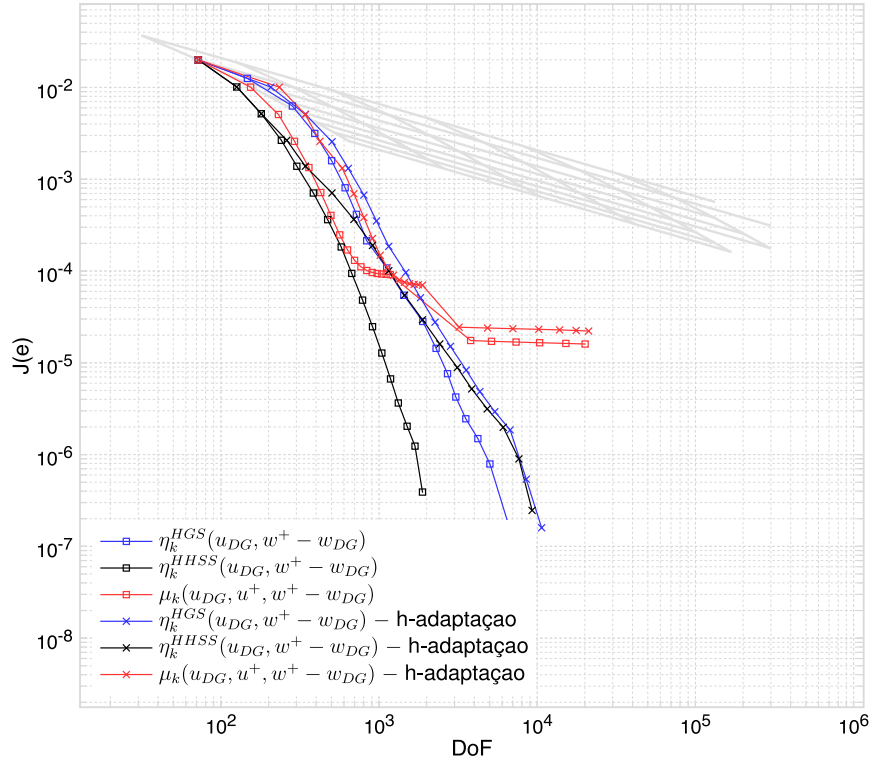


Figura 8.31: Erro de aproximação por graus de liberdade, para espaços de aproximação h e hp -adaptados por $\eta_k^{HHSS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$ e $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$.

As próximas figuras analisam os espaços de aproximação hp -adaptados pelos três indicadores.

Podemos observar na Figura 8.32 que usando η_k^{HHSS} , que teve o melhor desempenho, a região da singularidade foi h -adaptada e seu entorno e foi p -adaptado. O balanço entre h e p -adaptação mostra que a h -adaptação foi muito mais usada. De fato, enquanto o grau polinomial máximo passou de 2 para 5 (3 níveis), o diâmetro dos elementos variaram 17 níveis.

Os espaços hp -adaptados por η_k^{HGS} são apresentados na Figura 8.33. Observamos que tanto com ortogonalidade (à direita) quanto sem a subtração da ortogonalidade no indicador (à esquerda), foram realizadas muitas h -adaptações na região da singularidade. A diferença maior para os espaços obtidos usando η_k^{HHSS} é que η_k^{HGS} aplicou h -adaptação em uma região mais ampla. Isso, juntamente com a p -adaptação excessiva das regiões afastadas da singularidade levou à criação de graus de liberdade desnecessários, no caso sem ortogonalidade. Conseqüentemente o desempenho de η_k^{HGS} fica prejudicado, apesar do nível de erro atingido por esses espaços ser o mesmo que os obtidos usando η_k^{HHSS} .

Finalmente, analisamos os espaços adaptados por μ_k , mostrados na Figura 8.34. Sem

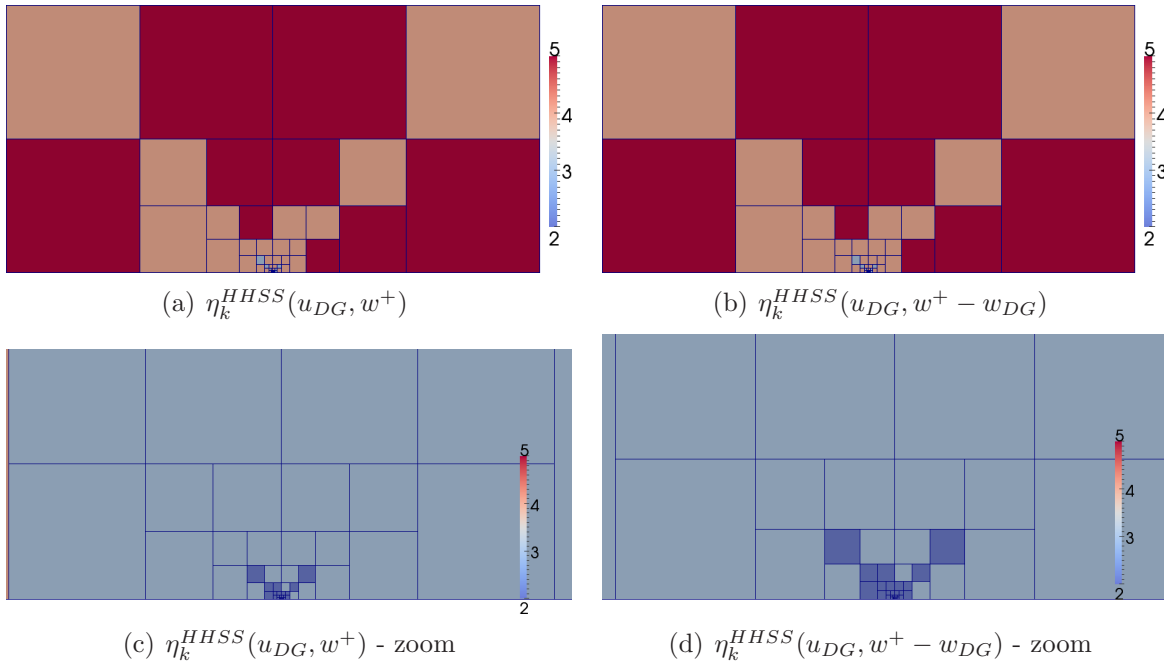


Figura 8.32: Espaços hp -adaptados por η_k^{HHSS} .

considerar a ortogonalidade (à esquerda), podemos ver que o critério hp baseado na estimativa de regularidade usando o indicador μ_k funciona muito bem pois a região da singularidade foi h -adaptada e as regiões onde as soluções são mais suaves foram p -adaptadas. Contudo, sem subtrair a ortogonalidade (à direita), μ_k falha pois indica excessivamente a necessidade de adaptação nas regiões mais distantes da singularidade. Com os graus polinomiais muito altos, a realização de mais iterações torna-se inviável.

Assim concluímos que o indicador η_k^{HHSS} teve o melhor desempenho nesses experimentos. O indicador η_k^{HGS} considerando a subtração da ortogonalidade teve um desempenho próximo a η_k^{HHSS} , ficando um pouco pior por h -adaptar uma região maior do que o primeiro, o que indica uma pequena falta de qualidade na estimativa da regularidade. Já μ_k mostrou-se um desempenho muito bom para estimar a regularidade das soluções, mas não foi bem como localizador do erro.

Agora, conhecendo melhor o desempenho dos indicadores, torna-se interessante testar o desempenho dos indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} usando o indicador μ_k para estimar a regularidade. Os resultados apresentados na Figura 8.35 mostram o desempenho dos algoritmos combinados. A curva de erro por graus de liberdade para o indicador η_k^{HHSS} não teve qualquer alteração. Já para a curva associada ao indicador η_k^{HGS} a melhora foi significativa e fez com que os resultados ficassem praticamente iguais aos de η_k^{HHSS} .

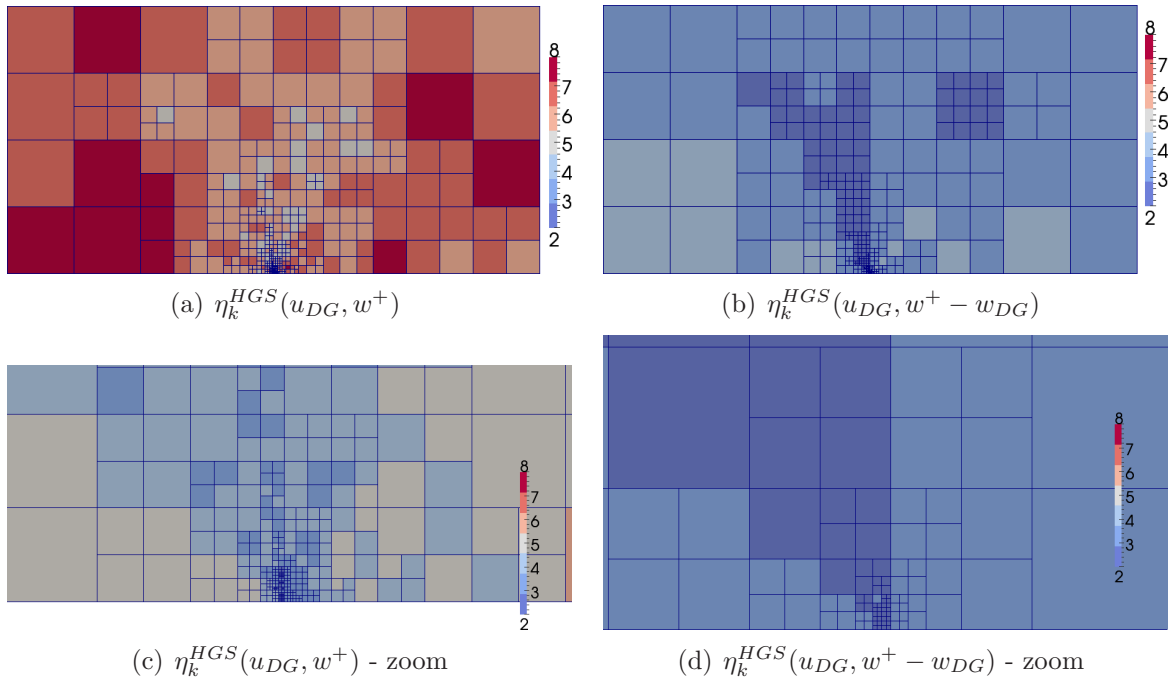


Figura 8.33: Espaços hp -adaptados por η_k^{HGS} .

Conclusões do experimento

A principal conclusão desse experimento é que para singularidades oriundas das condições de contorno o método hp -adaptativo usando o indicador η_k^{HHSS} é superior podendo ser muito vantajoso com relação ao refinamento uniforme. Além disso, observamos que embora μ_k não tenham um bom desempenho na localização dos erros, para estimar a regularidade das soluções sobre os elementos μ_k é excelente.

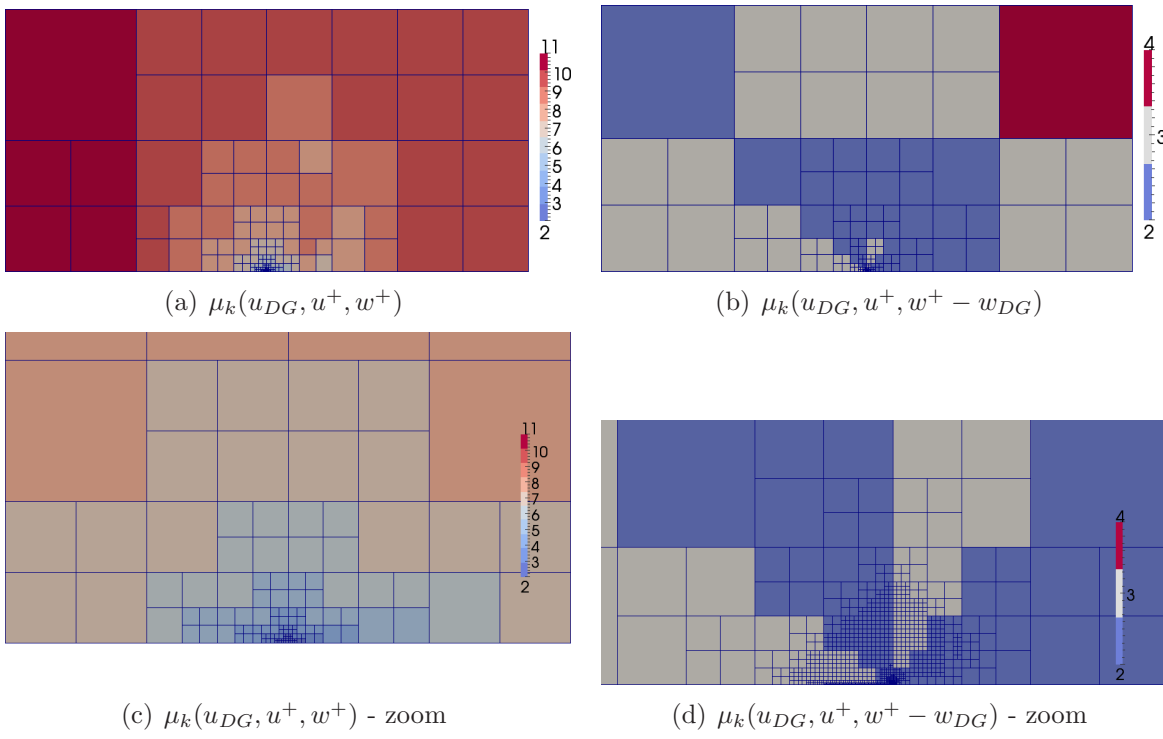


Figura 8.34: Espaços hp -adaptados por μ_k .

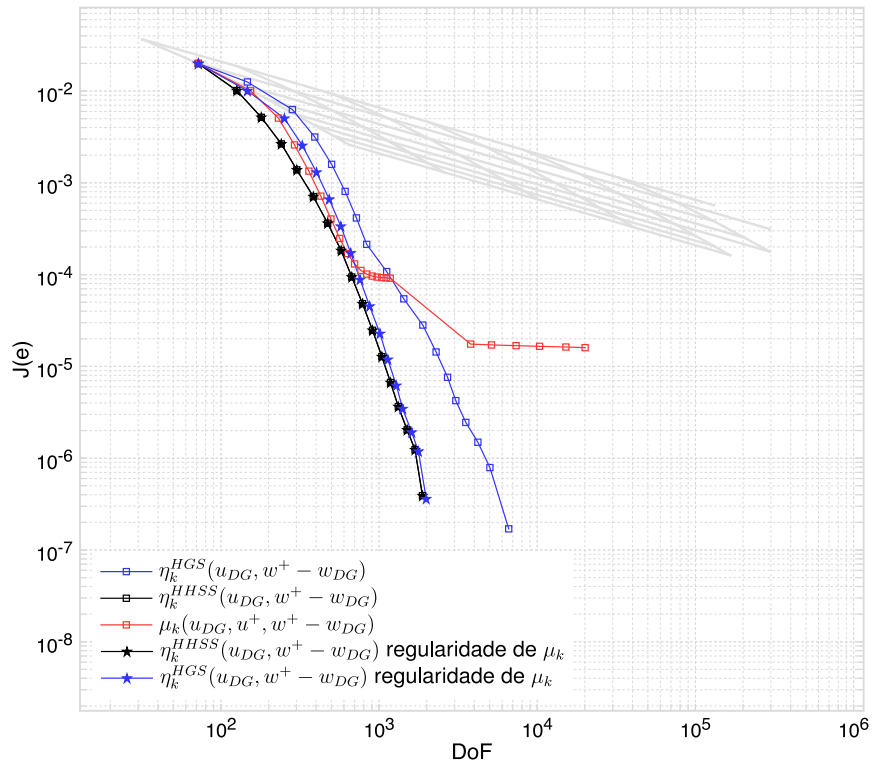


Figura 8.35: Erro de aproximação por graus de liberdade, para espaços de aproximação hp -adaptados por $\eta_k^{HHS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\eta_k^{HGS}(u_{DG}, w^+ - w_{DG})$, $\mu_k(u_{DG}, u^+, w^+ - w_{DG})$, sendo que para os dois primeiros também consideramos o uso do critério hp através do indicador μ_k .

Capítulo 9

Conclusões

Este trabalho é dedicado ao estudo de indicadores de erro *a posteriori* em quantidades de interesse. O objetivo desse estudo é, através do conhecimento sobre a forma dos indicadores de erro, tornar a *hp*-adaptatividade para métodos de Galerkin descontínuo o mais eficiente possível, ao reduzir o erro em quantidades de interesse.

Nesse sentido, estudamos indicadores de erro em quantidades de interesse baseados em argumentos de dualidade. Entre eles, consideramos o indicador de erro, η_k^{HHSS} , proposto em [37], que é amplamente divulgado na literatura. Outro indicador do mesmo tipo considerado no presente estudo é η_k^{HGS} , proposto em [35]. Em ambos os casos os indicadores são propostos para problemas de segunda ordem.

As principais contribuições dessa tese são:

- Extensão dos indicadores η_k^{HHSS} e η_k^{HGS} para problemas de valor de contorno envolvendo a equação biarmônica.
- Proposta de um novo indicador de erro μ_k , também baseado em argumentos de dualidade, publicado em [34]. Além da aproximação DGFEM primal, u_{DG} , e da aproximação dual enriquecida, w^+ , μ_k usa também uma aproximação primal enriquecida, u^+ .
- Caracterização dos três indicadores, descrevendo e ilustrando suas propriedades e características. Enquanto que η_k^{HHSS} é moldado respeitando a ortogonalidade localmente, o indicador μ_k visa a eficiência local na aproximação do erro na quantidade de interesse. As características do indicador η_k^{HGS} variam dependendo da equação em questão e da suavidade das soluções, podendo estar mais próximo de η_k^{HHSS} em alguns casos ou de μ_k em outros.
- Desenvolvimento de um algoritmo para suavizar aproximações DGFEM, que desempenham o papel de u^+ e w^+ , visando alimentar os indicadores com aproximações que

tivessem melhores características. Esse algoritmo resolve um problema de ponto sela, em que desejamos minimizar o erro no sistema algébrico gerado pelos métodos DGFEM, sujeitos às restrições de continuidade da aproximação e de seus gradientes normais às faces entre os elementos.

- Desenvolvimento de um algoritmo *hp*-adaptativo específico para o controle do erro em quantidades de interesse, inspirado nas ideias apresentadas em [3]. São determinantes para o desempenho desse algoritmo duas propriedades dos indicadores, a saber, a capacidade de localização dos elementos que mais contribuem para o erro e de estimar a regularidade local das soluções primal e dual. O critério *hp* é baseado na comparação entre as estimativas *a priori* para o erro em funcionais e o decaimento dos erros indicados mediante *p*-enriquecimento.
- Implementação do algoritmo *hp* no ambiente PZ de elementos finitos.
- Aplicação dos algoritmos *hp*-adaptativos em problemas elípticos de segunda e quarta ordem, para diversas configurações de singularidades. Foram estudadas as contribuições de diferentes aspectos importantes para o desempenho dos indicadores: efeito da ortogonalidade, das estimativas de regularidade das soluções, da qualidade da aproximação dual, do uso de aproximações recuperadas e dos parâmetros do algoritmo adaptativo.

Verificou-se que o algoritmo de recuperação consegue suavizar as aproximações DGFEM. No entanto, essas aproximações recuperadas, quando usadas nos indicadores, não modificam significativamente o desempenho dos mesmos. Desta forma, devido ao maior custo da obtenção das aproximações recuperadas, conclui-se que elas não são vantajosas.

A comparação entre os indicadores nos permitiu ver a importância da ortogonalidade sobre o desempenho dos indicadores. O indicador η_k^{HHSS} é independente da ortogonalidade. Porém, quando existe alguma singularidade que interfere na realização numérica da ortogonalidade, a subtração da ortogonalidade é importante mesmo para η_k^{HHSS} , pois ameniza o efeito da singularidade em questão, tornando o indicador mais eficiente. Os indicadores η_k^{HGS} e μ_k , sem considerar a ortogonalidade, ficaram aquém do indicador η_k^{HHSS} , em mesmas condições. Porém, considerando a ortogonalidade, o desempenho dos três indicadores é melhorado significativamente.

Para o experimento envolvendo a equação de segunda ordem, η_k^{HHSS} foi o que apresentou o melhor desempenho, enquanto η_k^{HGS} apresenta resultados pouco inferiores a η_k^{HHSS} . O indicador μ_k teve um desempenho ruim como localizador das regiões que deveriam ser adaptadas. Apesar disso, o desempenho de μ_k , quando usado para estimar a regularidade das soluções, foi excelente. Combinado μ_k com os outros indicadores na caracterização da regularidade das soluções, obtivemos os melhores resultados.

Nos problemas envolvendo a equação biharmônica, o desempenho de μ_k e η_k^{HGS} , considerando a subtração da ortogonalidade, foram excelentes e superaram o indicador η_k^{HHSS} , principalmente por conta da estimação de regularidade no critério hp . Combinando o indicador η_k^{HHSS} com a estimativa de regularidade de μ_k ou de η_k^{HGS} , os resultados melhoraram significativamente, ficando próximos aos resultados de μ_k e η_k^{HGS} .

Nos experimentos realizados, observamos que o algoritmo adaptativo cumpriu o papel esperado. O critério hp foi capaz de identificar as regiões de baixa regularidade, onde a h -adaptação foi efetuada. Nas regiões onde as soluções foram identificadas como mais regulares, quando necessária, a p -adaptação foi predominante. De forma geral, o indicador μ_k foi o mais robusto para a estimação de regularidade das soluções e, conseqüentemente, foi o que melhor guiou o critério hp . Como localizador de erro, também de forma geral, η_k^{HHSS} teve o melhor desempenho. Mas, na maioria dos experimentos, precisou que o critério hp fosse guiado por outro indicador para efetivar seu desempenho.

Os experimentos adaptativos demonstram a importância de dispormos de vários indicadores de erro, pois cada um tem propriedades específicas que foram úteis em diferentes situações.

Na sequência natural desse trabalho, pretende-se tratar funcionais mais complexos e representativos de outras quantidades de interesse, a aplicação de hp -adaptatividade em problemas que evoluam no tempo e o uso dos espaços adaptados em simuladores de problemas reais.

Referências Bibliográficas

- [1] AINSWORTH, M., AND ODEN, J. T. *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*. Wiley and Sons, 2000.
- [2] AINSWORTH, M., AND RANKIN, R. Constant free error bounds for nonuniform order discontinuous Galerkin finite-element approximation on locally refined meshes with hanging nodes. *IMA Journal of Numerical Analysis* (2009), 1–27.
- [3] AINSWORTH, M., AND SENIOR, B. An adaptive refinement strategy for *hp*-finite element computations. *Applied Numerical Mathematics* 26 (1998), 165–178.
- [4] ARNOLD, D. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.* 4, 19 (1982), 742–760.
- [5] ARNOLD, D., BREZZI, F., COCKBURN, B., AND MARINI, D. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (2002), 1749–1779.
- [6] ARROW, K., HURWICZ, L., AND UZAWA, H. *Studies in Nonlinear Programming*. Stanford University Press, Stanford, CA, 1958.
- [7] BABUŠKA, I., AND GUO, B. Q. The *h*, *p* and *h-p* version of the finite element method: basis theory and applications. *Advances in Engineering Software* 15, 3-4 (1992).
- [8] BABUŠKA, I., AND MILLER, A. The post-processing approach in the finite element method - part 1: Calculation of displacements, stress and other higher derivatives of the displacements. *Int. J. Num. Meth. Engnrg.* 20, 6 (1984), 1085–1109.
- [9] BABUŠKA, I., AND MILLER, A. The post-processing approach in the finite element method - part 2: Calculation of stress intensity factors. *Int. J. Num. Meth. Engnrg.* 20, 6 (1984), 1111–1129.

- [10] BABUŠKA, I., AND MILLER, A. The post-processing approach in the finite element method - part 3: A posteriori error estimates and adaptive mesh selection. *Int. J. Num. Meth. Engrng.* 20, 6 (1984), 2311–2325.
- [11] BABUŠKA, I., AND SURI, M. The h - p version of the finite element method with quasiuniform meshes. *Modélisation mathématique et analyse numérique* 21, 2 (1987), 199–238.
- [12] BABUŠKA, I., AND SURI, M. The optimal convergence rate of the p -version of the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.* 24, 4 (1987).
- [13] BAKER, G. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Math. Comp.* 31 (1977), 44–59.
- [14] BAKER, G. A., JUREIDINI, W. N., AND KARAKASHIAN. Piecewise solenoidal vector fields and the Stokes problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 27 (1990), 1466–1485.
- [15] BAUMANN, C. *An hp-adaptive discontinuous Galerkin FEM for computational fluid dynamics*. Tese de doutorado, TICAM, 1997.
- [16] BENZI, M., GOLUB, G. H., AND LIESEN, J. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica* (2005), 1–137.
- [17] BLUM, H., AND RANNACHER, R. On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2 (1980), 556–581.
- [18] BÖSING, P. R. *Método de Galerkin Descontínuo para Equações Elípticas de Alta Ordem*. Tese de doutorado, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade do Estado de São Paulo, 2006.
- [19] BRENNER, S. C., AND SCOTT, L. R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 1994.
- [20] BRENNER, S. C., AND SUNG, L.-Y. C^0 interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains. *Journal of Scientific Computing* 22 and 23 (2005), 83–118.
- [21] COCKBURN, B., KARNIADAKIS, G. E., AND SHU, C.-W. *Discontinuous Galerkin Finite Element Methods. Theory, Computation and Applications*, vol. 11 of *Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg.* Springer-Verlag, 2000.
- [22] DEMKOWICZ, L., RACHOWICZ, W., AND DEVLOO, P. R. B. A fully automatic hp -adaptivity. *Journal of Scientific Computing* 17 (2002), 127–155.

- [23] DEVLOO, P. R. B. 'pz': An object oriented enviroment for scientific programming. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 150 (1997), 133–153.
- [24] DEVLOO, P. R. B. On the development of a finite element program as an object oriented system. In *CILAMCE* (2000).
- [25] DEVLOO, P. R. B., AND LONGHIN, G. C. Object oriented design philosophy for scientific computing. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique* 36, 5 (2002), 793–807.
- [26] DOUGLAS, J. J., AND DUPONT, T. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. In *Lectures Notes in Physics*, vol. 58. Springer-Verlag, 1976.
- [27] ELMAN, H., AND GOLUB, G. H. Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems. *Journal Numerical Analysis* 31, 6 (1994), 1645–1661.
- [28] ENGEL, G., GARIKIPATI, K., HUGHES, T., LARSON, M., AND TAYLOR, R. Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191 (2002), 3669–3750.
- [29] ERN, A., STEPHANSEN, A. F., AND VOHRALIK, M. Improved energy norm a posteriori error estimation based on flux reconstruction for discontinuos Galerkin methods. Tech. rep., 2007.
- [30] GEORGOULIS, E. H., HALL, E., AND HOUSTON, P. Discontinuous Galerkin methods on *hp*-anisotropic meshes ii: a posteriori error analysis and adaptivity. *Applied Numerical Mathematics*, 59 (2009), 2179–2194.
- [31] GEORGOULIS, E. H., HOUSTON, P., AND VIRTANEN, J. An a posteriori error indicator for discontinuous Galerkin approximations of fourth-order elliptic problems. *IMA J. Numer. Anal.* (2009).
- [32] GIRAULT, V., AND RAVIART, P. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, 1986.
- [33] GONÇALVES, J. L. Estimativas de erro de aproximações de funcionais das soluções para equações de difusão-advecção-reação. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

- [34] GONÇALVES, J. L., DEVLOO, P. R. B., AND GOMES, S. M. Goal-oriented error estimation for the discontinuous Galerkin method applied to the biharmonic equation. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009*, G. Kreiss, P. Lötstedt, A. Målqvist, and M. Neytcheva, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 369–376. 10.1007/978-3-642-11795-4-39.
- [35] HARRIMAN, K., GAVAGHAN, D. J., AND SÜLI, E. Approximation of linear functionals using an *hp*-adaptive discontinuous Galerkin finite element method. Tech. Rep. 04/19, Oxford University Computing Laboratory, 2004.
- [36] HARRIMAN, K., GAVAGHAN, D. J., AND SÜLI, E. The importance of adjoint consistency in approximations of linear functionals using discontinuous Galerkin finite element method. Tech. Rep. 04/18, Oxford University Computing Laboratory, 2004.
- [37] HARRIMAN, K., HOUSTON, P., SENIOR, B., AND SÜLI, E. *hp-Version Discontinuous Galerkin Methods with Interior Penalty for Partial Differential Equations with Nonnegative Characteristic Form*, vol. 330. AMS, 2003, pp. 89–119.
- [38] HARTMANN, R. Multitarget error estimation and adaptivity in aerodynamic flow simulations. *SIAM J. Sci. Comput.* 31, 1 (2008), 708–731.
- [39] HARTMANN, R., HELD, J., AND LEICHT, T. Adjoint-based error estimation and adaptive mesh refinement for the rans and $k\text{-}\omega$ turbulence model equations. *J. Comput. Phys.* (2010).
- [40] HARTMANN, R., AND HOUSTON, P. Adaptive discontinuous Galerkin finite element methods for nonlinear hyperbolic conservation laws. *SIAM J. Sci. Comput.*, 24 (2002), 979–1004.
- [41] HARTMANN, R., AND HOUSTON, P. Adaptive discontinuous Galerkin finite element methods for the compressible Euler equations. *J. Comput. Phys.* 2, 183 (2002), 508–532.
- [42] HOUSTON, P., SCHWAB, C., AND SÜLI, E. Discontinuous *hp*-finite element methods for advection-diffusion-reaction problems. *SIAM J. Numer. Anal.* 39, 6 (2002), 2133–2163.
- [43] HOUSTON, P., SENIOR, B., AND SÜLI, E. *hp*-discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic problems: error analysis and adaptivity. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 40 (2002), 153–169.

- [44] HOUSTON, P., SENIOR, B., AND SÜLI, E. Sobolev regularity estimation for hp -adaptive finite element methods. Tech. rep., 2002.
- [45] HOUSTON, P., AND SÜLI, E. Stabilized hp -finite element approximation of partial differential equations with non-negative characteristic form. *Computing* 66 (2001), 99–119.
- [46] HOUSTON, P., AND SÜLI, E. A note on the design of hp -adaptive finite element methods for elliptic partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 194 (2005), 229–243.
- [47] LAZAROV, R., REPIN, S., AND TOMAR, S. K. Functional a posteriori error estimates for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *J. Numerical Methods for PDEs* 25(4) (2009), 952–971.
- [48] LEICHT, T., AND HARTMANN, R. Error estimation and anisotropic mesh refinement for 3D laminar aerodynamic flow simulations. *J. Comput. Phys.* 19, 229 (2010), 73447360.
- [49] LESAINTE, P., AND RAVIART, P.-A. *On a finite element method for solving the neutron transport equation*. Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations. C. de Boor, 1974, pp. 89–145.
- [50] LOUIS, A. Acceleration of convergence for finite element solutions of Poisson equations. *NUmer. Math.*, 33 (1979), 43–53.
- [51] MELENK, J. M. *hp-Finite Methods for Singular Perturbations*. Springer, 2002.
- [52] MOZOLEVSKI, I., AND SÜLI, E. A priori error analysis for the hp -version of the discontinuous Galerkin finite element method for the biharmonic equation. *Comput. Meth. Appl. Math.* 3, 4 (2003), 596–607.
- [53] MOZOLEVSKI, I., SÜLI, E., AND BÖSING, P. R. hp -version a priori error analysis of interior penalty discontinuous Galerkin finite element approximations to the biharmonic equation. *Journal of Scientific Computing* 30, 3 (March 2007), 465–491.
- [54] NOCEDAL, J., AND WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*, 2nd ed. Springer, 2000.
- [55] ODEN, J. T., BABUŠKA, I., AND BAUMANN, C. A discontinuous hp -FEM for diffusion problems. *J. Comput. Phys* 146 (1998), 491–519.
- [56] ODEN, J. T., AND PATRA, A. A parallel adaptive strategy for hp finite element computations. Tech. rep., TICAM, 1994.

- [57] ODEN, J. T., AND PRUDHOMME, S. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method. *Computers and Mathematics with Applications* 41 (2001), 735–756.
- [58] ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. New approaches to error estimation and adaptivity for the Stokes and Oseen equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 31 (1999), 3–15.
- [59] PARASCHIVOIU, M., PERAIRE, J., AND PATERA, A. T. A posteriori finite element bounds for linear outputs of elliptic partial differential equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 1-4, 150 (1997), 289–312.
- [60] PRUDHOMME, S., AND ODEN, J. T. On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 176 (1999), 313–331.
- [61] PRUDHOMME, S., ODEN, J. T., WESTERMANN, T., BASS, J., AND BOTKIN, E. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56 (2003), 1193–1224.
- [62] PRUDHOMME, S., PASCAL, F., ODEN, J., AND ROMKES, A. Review of a priori error estimation for discontinuous Galerkin methods. Tech. Rep., Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 2000.
- [63] REED, W. H.; HILL, T. R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Tech. Rep., Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [64] RYLO, E. C. Adaptatividade *hp* aplicada em malhas de elementos finitos. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2002.
- [65] RYLO, E. C. *Adaptatividade hp em paralelo*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2007.
- [66] SAAD, Y. *Iterative methods for sparse linear systems*. 2000.
- [67] SCHWAB, C. *p- and hp- Finite Element Methods. Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Oxford University Press, 1998.
- [68] SOLIN, P. *Partial differential equations and the finite element method*. John Wiley and Sons, 2006.

- [69] STOGNER, R. H., AND CAREY, G. F. C^1 macroelements in adaptive finite element methods. *International Journal For Numerical Methods in Engineering* 70 (2007), 1076–1095.
- [70] SÜLI, E., AND MOZOLEVSKI, I. *hp*-version interior penalty DGFEMs for the biharmonic equation. Tech. Rep., 2005.
- [71] SÜLI, E., SCHWAB, C., AND HOUSTON, P. *hp-DGFEM for Partial Differential Equations with Nonnegative Characteristic Form*, vol. 11 of *Lecture Notes in Comput. Sci. Engrg.* Springer-Verlag, 2000, pp. 221–230.
- [72] TIMOSHENKO, S. P., AND WOINOWSKY-KREIGER, S. *Theory of Plates and Shells*, 2 ed. McGraw Hill Higher Education, April 1984.
- [73] VOHRALÍK, M. Unified primal formulation-based a priori and a posteriori error analysis of mixed finite element methods. *Mathematics of Computation* (2009).