PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS COM UMA LEI DE POTÊNCIA EM DOMÍNIOS COM CANAIS ILIMITADOS

por

GILBERLANDIO JESUS DIAS

Orientador: MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Departamento de Matemática - UNICAMP

Agosto de 2011

PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS COM UMA LEI DE POTÊNCIA EM DOMÍNIOS COM CANAIS ILIMITADOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Gilberlandio Jesus Dias** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 05 de agosto de 2011

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Martins dos Santos
Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes
Prof. Dr. Hermano Frid Neto
Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves
Prof. Dr. Levi Lopes de Lima

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MÜLLER – CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

Dias, Gilberlandio Jesus, 1976-
D543p Problemas estacionários para fluidos incompressíveis com uma lei de potência em domínios com canais ilimitados / Gilberlandio Jesus Dias. – Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Marcelo Martins dos Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Sobolev, Espaços de. 3. Fluidos não-newtonianos. I. Santos, Marcelo Martins dos, 1961-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Stationary problems for incompressible fluids with a power law in channels with unlimited domains
Palavras-chave em inglês:
Navier-Stokes equations
Sobolev spaces
Non-newtonian fluids
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Marcelo Martins dos Santos [Orientador]
Helena Judith Nussenzveig Lopes
Hermano Frid Neto
Claudianor Oliveira Alves
Levi Lopes de Lima
Data da defesa: 05-08-2011
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 05 de agosto de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). MARCELO MARTINS DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). HELENA JUDITH NUSSENZVEIG LOPES

Prof(a). Dr(a). HERMANO FRID NETO

Prof(a). Dr(a). CLAUDIANOR OLIVEIRA ALVES

Prof(a). Dr(a). LEVI LOPES DE LIMA

Agradecimentos

Toda honra e toda glória sejam dadas ao nosso Eterno Deus, pois Ele me ama mais do que eu a mim mesmo. Em Jeremias 29.11, o meu Deus diz para mim: *Pois Eu bem sei os planos que tenho projetado para vós, diz o Senhor; planos de paz e não de mal, para vos dar um futuro e uma esperança.*

Poderia preencher páginas e mais páginas com nomes de pessoas que contribuiram para a realização deste trabalho, entretanto isto seria por demasiado incoveniente. Assim, citarei alguns nomes aqui e, para aqueles não citados, saibam que todos foram importantes.

Agradeço à minha Mãe Doralice Maria de Jesus Dias, em primeiro lugar por atender ao chamado de Cristo (por volta do início do anos 80), pois ali, talvez estivesse começando (ao nosso entendimento humano), este plano divino de futuro e esperança; em segundo lugar, por mesmo semi-analfabeta (na época) ter lutado para pôr e manter os filhos mais novos na escola, e isto eu sei que foi muito além dos meus esforços para realização deste. Ah, eu “sei”mãe, e talvez só o saiba pela tua dura vida, a dureza que são os “cascudos”desta vida. Perdão, Perdão e muito Perdão, em não ser capaz de ti retribuir, se quer um por cento do que me deste. Tolos, muito tolos são os que acreditam que este título é contrução minha, sem as tuas Orações eu teria ficado na estrada à pedir carona. É maravilhoso, estupendo e divino como podemos recordar os momentos da vida, sejam tristes ou felizes, simplesmente recordá-los; mas, mas os momentos da infância, estes não recordamos, não, não estes nós lacrimejamos com a vista, sentimos o cheiro na mais primitiva das razões da emoção; que ser tremendo tu nos criaste oh Deus, e minha alma Te venera. Mãe! eu te amo.

Ao meu pai, Valdete Ribeiro Dias (em memória), por, mesmo não entendendo, permitir que minha mãe, também sem entender muito bem, nos mantivesse na escola. Muito obrigado Pai, pois foste uma rocha em postura de “palavra de homem”, em comportamento em negócios e em respeito à outrém. É uma imensa tristeza não poder tê-lo conosco neste momento sublime.

Agora agradeço aos meus irmão “primeiros”: Wildes, Tânia, Marivaldo (gaso), Sônia e Manoel (Bide). Pois vocês se sacrificaram trabalhando na lavoura para que nós, os mais novos, pudéssemos frequentar a escola. Preciso citar aqui a im-

portância de Sônia, em sua tenra idada, se encarregando de “olhar”os irmãos mais novos, para que os nossos pais e os irmãos mais velhos pudessem trabalhar. Não posso, também, deixar de citar aqui o tremendo sacrifício à que foi posto o Manoel, quando (ainda criança) foi tirado do quarto ano do ensino fundamental, para trabalhar na Roça, a fim de ajudar a sustentar toda a nossa família; quem sabe hoje eu estaria sendo o segundo, na família, a obter o título de Doutor.

Finalizando a família de sangue, agradeço aos demais irmãos: Sandra, Cosme (estes mais velho que eu), Vanusa, Erivan e Rosivaldo (Rose). Como disse acima, de vocês carregamos até o “cheiro”.

Quero, também aqui, lembrar os irmãos que não conheci, Selma e Joildes (Jó), pois morreram antes que eu viesse ao mundo; bem como o irmão que foi concebido, mas se foi antes de vir a este mundo; este seria o Caçula.

Também agradeço a todos os meus primos, sobrinhos, Tios e cunhados.

Presto o meu agradecimento, todo especial, à minha Esposa Edleide Lima Moraes. Muito obrigado pelo apoio, por ter aguentado os, não poucos, momentos que estive chateado e chato, aqueles momentos que a aborreci, não entendi e mesmo te fiz chorar. Deus nos uniu porque precisávamos um do outro, entretanto estamos redondamente enganados se achamos que este ou outro qualquer motivo, ou sentimento nos levaram a nos entregarmos um ao outro; Deus nos uniu, sim, pelo Seu plano de futuro e esperança para nós em Seu Reino.

Venho também prestar um agradecimento especial ao orientador desta tese o Professor Marcelo Martins dos Santos. Certamente, sem as grandes contribuições do professor, este trabalho não se realizaria. Inclusive o professor Marcelo tem me ajudado desde a época do curso de Mestrado. Por falar do Mestrado, quero também prestar meus agradecimentos à Professora Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes, que me orientou na Dissertação de Mestrado. Também agradeço ao Professor Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki, que me iniciou no ambiente da pesquisa em matemática, me orientando por dois anos em projetos de Iniciação Científica.

Ao meu sogro Edvaldo (Gás), à Dona Noemia e Sr. Enedino (avós de Edleide), Zana, Júnior, Moraes (Têta) e Joélia, Ozéias e Thais, Raquel e Nilton, Daiane e Ronildo, Estéfani, Talita, Pedrinho, Eliade, Elizabeth, Elizete, Eliana, Luana e Jhow, Edna e Davi, Darlene (Ninha), Dailma e Danilo, Erasmo e Roberta, Heron e Damares, Denise, Tiel e Abimael.

Abaixo citarei os nomes e grupos dos diversos amigos que me acompanharam até aqui e, como já dito anteriormente, minhas sinceras desculpas se esqueci de citar alguns. Nal, Rogério, Chicão, Alan (landinho), Orlando, Aldo, Joélia, Dona Helena, Dona Maria, João Olímpio, Jalmiro, Chicó, Georgilton, Walace e família, todos os amigos do Bairro Glória, Irmãos das Igrejas PIB Ubatã,

PIB Uruçuca, PIB Viçosa, Batista em Real Parque (campinas), ao Pastor Osmar e família (Campinas), Turmas e Professores do Colégio Estadual de Ubatã, da EMARC-Uruçuca, da Graduação (Viçosa), do Mestrado e Doutorado (Unicamp), Josélio, Marcos, Ronan, Emel, Maurício, Rogério Casa grande, Lucas, Clécio e Joelma, Kélcio, Lais, Sueli(vizinha), Sueli (Colega de Edleide), Steve, Rosinha, Guzman, Marcio, Walter, Ana Raquel, Anderson, Rinaldo e Íngride, Luciana e Valdir, Lucilene e Jardson, Fernandes e Rita, Glau, Sr. Manolo, Ir. Noeme, Messias e Dulcirene, Pastor Bruno e Débora, Pastor Demétrio e Ir. Rosa.

A quem esqueci de citar: meu muito obrigado.

Resumo

Neste trabalho estudamos o escoamento de fluidos viscosos não Newtonianos, modelados pelo sistema estacionário incompressível de Navier-Stokes obedecendo a uma Lei de Potência, em domínios com canais infinitos.

Tratamos basicamente de dois tipos de domínios: domínios com canais cuja seção transversal é limitada e domínios com canais possuindo seção transversal ilimitada.

Tanto para domínios com seção transversal limitada quanto para domínios com seção transversal ilimitada, estudamos o problema proposto por Ladyzhenskaya e Solonnikov [*Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI)*, 96(1980)117-160 (English Transl.: *J. Soviet Math.*, 21, 1983, 728-761)].

Findamos nosso trabalho fazendo um estudo sobre estimativas em espaços de Sobolev com peso para soluções do sistema de Stokes com Lei de Potência.

Palavras-chave: Escoamento estacionário, equações de Navier-Stokes com Leis de Potência, problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov, espaços de Sobolev com peso, fluidos não Newtonianos.

Abstract

In this work we study the flow of the viscous non-Newtonian fluids, modeled by the steady incompressible Navier-Stokes system obeying a power-law, in domains with infinite channels.

We deal basically two types of domains: domains with channels whose cross section is limited and domains with channels having unlimited cross section. For both domains with limited cross section and for domains with unbounded cross section, we study the problem proposed by Ladyzhenskaya and Solonnikov [Zap. Nauchno. Sem Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (Lomi), 96 (1980) 117-160 (Português Transl.: J. Soviet Math., 21, 1983, 728-761)].

We finished our work making a study of estimates in Sobolev weight spaces for solutions of the Stokes power-law system.

Keywords: steady flow, Navier-Stokes power-law equations, Ladyzhenskaya and Solonnikov problem, Sobolev weight spaces, non Newtonianos fluids.

Sumário

INTRODUÇÃO

Um Pouco Sobre Fluidos Não Newtonianos

O modelo tradicional para a expressão do tensor stress de um fluido viscoso incompressível é

$$\mathrm{T} = 2\nu D(\vec{\mathrm{v}}) - \mathrm{pI}, \tag{1}$$

onde $\vec{\mathrm{v}}$ é a velocidade, p a pressão, $\nu > 0$ é a viscosidade, I a matriz identidade, $D(\vec{w}) = \dfrac{1}{2}\left(\nabla\vec{w} + \nabla\vec{w}^T\right)$, é a matriz, denominada *gradiente simétrico*, que tem entradas $D_{ij}(\vec{w}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_j}{\partial x_i} + \dfrac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)$.

Sobre a exprssão (1), Marusic-Paloka, em [29], comenta que foi deduzida por Navier em 1822 e por Poisson em 1829 e mais tarde por Saint-Venant em 1843 e por Stokes em 1845, entretanto (1) é muitas vezes chamada Lei de Stokes. Também Newton propôs uma versão simplificada de (1) e por isto alguns autores (veja por exemplo [36]) se referem a tal expressão como Lei de Newton.

Na equação (1) a viscosidade do fluido, expressando sua resistência para escoar, é constante, o que significa que a viscosidade não depende do escoamento. Os fluidos com tal comportamento são conhecidos por *fluidos Newtonianos* e tem como exemplos a água e o óleo. Este modelo, para muitos fluidos, não é uma aproximação razoável para as situações físicas reais, pois em muitos fluidos a resistência do escoamento muda com a intensidade do *shear rate* $|D(\vec{\mathrm{v}})|$ (veja [36]). Essa mudança de viscosidade pode ser significativa em tais fluidos e por isso não pode ser ignorada. A forma mais simples para modelar tais comportamentos é introduzir uma dependência do shear rate para a viscosidade ν em (1). Tais classes de fluidos não Newtonianos são, geralmente, chamadas quase-Newtonianos.

Em geral podemos dividir tais fluidos quase-Newtonianos em dois grupos: *shear-thinning* (ou plásticos e pseudo-plásticos), que são os fluidos com viscosidade decrescente com o shear rate; e *shear thickening* (ou dilatante), que são aqueles com viscosidade crescente com o shear rate. Como exemplo de comportamento dilatante temos o barro e o cimento, já o comportamento de pseudo-plástico é típico de muitos polímeros e soluções.

Sobre Fluidos com Lei de Potência

O mais simples e popular modelo para fluidos não Newtonianos que descreve a dependência da viscosidade ν em relação à $|D(\mathrm{v})|$ é o modelo de *Lei de Potência* (power-law ou Ostwald-Dewaele law)

$$\nu\left(D(\vec{\mathrm{v}})\right) = \mu|D(\vec{\mathrm{v}})|^{p-2}. \tag{2}$$

os parâmetros μ e p são chamados índices de consistência e escoamento, respectivamente. Para $p > 2$ temos os fluidos shear thickening; enquanto para $1 \leq p < 2$ temos os fluidos shear-thinning, sendo o escoamento pseudo-plástico para $1 < p < 2$ e puramente plástico para $p = 1$. O caso $p = 2$ corresponde ao comportamento Newtoniano.

O sistema de equações que modela o escoamento estacionário de um fluido viscoso incompressível com Lei de Potência, em um subdomínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, chamado *Sistema de Navier-Stokes com Lei de Potência*, é dado abaixo:

$$\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,\mathrm{T} + \vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}} & = & \vec{f} & \text{em} \quad \Omega \\ \nabla\cdot\vec{\mathrm{v}} & = & 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \vec{\mathrm{v}} & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\,, \end{array} \tag{3}$$

com T dado por (1), para ν como em (2). As notações acima estão no Capítulo 1 de preliminares. Descartando o termo convectivo $\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}$, em (3_1), obtemos o *Sistema de Stokes com Lei de Potência*, como abaixo:

$$\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\,\mathrm{T} & = & \vec{f} & \text{em} \quad \Omega \\ \nabla\cdot\vec{\mathrm{v}} & = & 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \vec{\mathrm{v}} & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\,. \end{array} \tag{4}$$

Observamos que para fluidos paralelos, podemos identificar $\vec{\mathrm{v}}$ com uma função escalar v e as primeiras equações dos sistemas (3) e (4), reduzem-se à famosa equação do *p-Laplaciano*

$$-\mathrm{div}\,\left\{|\nabla \mathrm{v}|^{p-2}\nabla \mathrm{v}\right\} = c\,,$$

para alguma constante c (relacionada à pressão p).

A existência de solução fraca para os sistemas (3) e (4), Em domínios limitados, tem sido estudada por diversos autores: Lions [28] e Ladyzhenskaya [24], [25] e [26], para $p > \frac{3n}{n+2}$; Frehse, Málek e Steinhauer em [18] e Ruzicka em [37], para $p > \frac{2n}{n+1}$; e Frehse, Málek e Steinhauer em [19] para $p > \frac{2n}{n+2}$. Em domínios limitados são poucas as referências, citamos Marusic-Paloka em [29] para domínios com canais cilíndricos infinitos e em [30] para domínios exteriores (o complementar em $\mathbb{R}^n$ de um domínio Lipschitz limitado).

Sobre Navier-Stokes em Domínios com Canais Infinitos

Tomando $p = 2$ em (2), temos que o sistema (3) fica da seguinte forma

$$\begin{array}{rcll} -\nu\Delta\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} - \nabla \mathrm{p} & = & \vec{f} & \text{em} \quad \Omega \\ \nabla\cdot\vec{v} & = & 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \vec{v} & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega\,, \end{array} \tag{5}$$

conhecido como *sistema de Navier-Stokes estacionário incompressível*. Se negligenciarmos, em (5), o termo convectivo o sistema é dito *sistema de Stokes estacionário incompressível*.

O sistema de Navier-Stokes estacionário incompressível de um fluido escoando por um domínio com canais cilíndricos ilimitados, com velocidade convergindo para a velocidade de um escoamento paralelo (escoamento de Poiseuille) e com força externa $\vec{f} = 0$, foi resolvido por Amick em [2]. Esse problema é conhecido como *Problema de Leray*, pois foi propposto por J. Leray para O. Ladyzhenskaya ([2], p. 476). Amick obteve solução para o problema de Leray com a condição do fluxo que passa pelas seções transversais ser suficientemente pequeno. O problema de Leray para um fluxo arbitrário ainda é um problema em aberto. Ladyzhenskaya e Solonnikov em [27], propôs um problema alternativo: considerando um fluxo arbitrário, resolver o problema sem pedir que a solução convirja para a velocidade de Poiseuille correspondente ao fluxo, porém exigindo que a integral de Dirichlet cresça com velocidade no máximo linear (*Problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov*).

Ladyzhenskaya e Solonnikov propoem, ainda em [27], o sistema (5), com $\vec{f} = 0$, em canais cônicos infinitos, para um fluxo qualquer. Porém, como no caso do problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov acima, pede que aintegral de Dirichlet, agora com peso, cresça limitada por uma função que depende do crescimento das seções transversais (neste caso as seções transversais crescem indefinidamente). Veja o Teorema 4.1, p. 749 de [27].

G. Galdi em [20] capítulo VI.3 estuda, para canais cônicos, o sistema de Stokes com $\vec{f} = 0$, para um fluxo arbitário. A solução para tal problema pertence ao espaço $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,2}(\Omega)$. K. Pileckas em [34], estuda o mesmo problema para a força externa $\vec{f}$ pertencente a um espaço de distribuiçõe apropriado, obtendo soluções num espaço de Sobolev com peso.

Alguns Pontos Relevantes da Tese

A resolução de (3) e da equação p-Laplaciano tem alguns pontos em comum, por exemplo o uso das inequações (1.4) e (1.5). Dessas inequações, conclui-se que o termo não linear div $\left\{|\nabla\vec{v}|^{p-2}\nabla\vec{v}\right\}$ (presente em (3)) define um operador monótono, e por este motivo empregamos o método de monotonicidade de Browder-Minty para tratar este termo. Diferentemente, da resolução do sistema de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos, visto que neste caso não precisamos lidar com um operador monótono (não linear), pois o termo correspondente, quando $p = 2$, é linear. Assim, resolvemos (3) combinando técnicas usadas para tratar o termo não linear convectivo e o método de monotonicidade, citado acima, para o termo não linear com lei de potência. A grande dificuldade de aplicar esta técnica reside no seguinte: em parte, como em [39] e [33], queremos aplicar a técnica desenvolvida em [27] para obtenção de existência de uma solução, que em particular, consiste em primeiro resolver o problema em um domínio truncado limitado e então tomar o limite quando o parâmetro de truncamento tende ao infinito, a fim de obter a solução em todo o domínio. Para tomar esse limite precisamos de estimativas uniformes, com relação ao parâmetro de truncamento, para as soluções nos domínios truncados, e isto é obtido via integração por partes, em um subdomíno, das equações para uma solução em algum domínio limitado fixo. Assim, precisamos da regularidade da solução em domínios limitados (fato este bastante conhecido para o caso Newtoniano, Capítulo VIII.5 de [20]), mais precisamente, que as soluções tenham campo velocidade, pelo menos, no espaço de Sobolev $W^{2,l}$ e a pressão em $W^{1,l}$, para algum número positivo l, devido aos termos de fronteira oriundos da integração por partes. Entretando, tamanha regularidade não é esperada para as soluções fracas de (3). Contornamos este problema modificando o termo $|D(\vec{v})|^{p-2}$ para $(\varepsilon + |D(\vec{v})|)^{p-2}$, onde ε é uma constante positiva dependendo do parâmetro de truncamento. É interessante observar que resultados de regularidade para a equação com esta alteração foram obtidos em papers recentes pelos autores Beirão da Veiga [4] e Beirão da Veiga, Kaplický e Ruzicka [5] e [6], para dimensões $n \geq 2$. Para dimensão dois, o resultado foi obtido primeiramente em [22].

Como em [27] e [40], e em vários papers subsequentes, o campo velocidade $\vec{v}$ é olhado na forma $\vec{v} = \vec{u}+\vec{a}$, onde $\vec{u}$ é a nova variável desconhecida com fluxo zero, enquanto $\vec{a}$ é um campo vetorial construido carregando o fluxo dado nos canais (isto é, se o fluxo dado em um canal com seção transversal Σ é Φ, então $\int_\Sigma \vec{a}\cdot\vec{n} = \Phi$ e $\int_\Sigma \vec{u}\cdot\vec{n} = 0$, onde $\vec{n}$ é o vetor unitário normal à Σ apontando sempre na direção infinita dos canais). Esse campo vetorial $\vec{a}$ depende da geometria do domínio e foi desenvolvido em muitos papers, sua construção é bastante engenhosa e faz uso da função cut-off de Hopf (veja [27] e [40]). No caso de fluidos com lei de potência (3), com $p > 2$, a construção de $\vec{a}$ pode ser simplificada. De fato, um ponto chave em sua construção, em qualquer caso, é obter um campo $\vec{a}$ que controle o termo quadrático não linear $\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\cdot\vec{a}$, que aparece após a substituição de $\vec{v} = \vec{u}+\vec{a}$ em (3) e multiplicação por $\vec{u}$. Isto é, para obter estimativas *a priori*, multiplicamos a primeira equação em (3) por $\vec{u}$ e tentamos limitar todos os termos resultantes pelo termo dominante $|D(\vec{u})|^p$. Em [27] é mostrado que dado um número positivo δ existe um campo vetorial $\vec{a}$ que, em particular, satisfaz a estimativa

$$\int_{\Omega_t} |\vec{u}|^2|\vec{a}|^2 \leq c\delta \int_{\Omega_t} |\nabla\vec{u}|^2, \tag{6}$$

para alguma constante c independente de δ, $\vec{u}$ e Ω_t, onde Ω_t é qualquer subdomínio truncado do domínio, com um comprimento de ordem t. Olhando sua construção e usando a desigualdade de Korn é possível mostrar que

$$\int_{\Omega_t} |\vec{u}|^{p'}|\vec{a}|^{p'} \leq c\delta^{p'} t^{(p-2)/(p-1)} \left(\int_{\Omega_t} \left|D(\vec{u})\right|^p\right)^{p'/p}, \tag{7}$$

onde p' é o expoente conjugado de p, isto é, $p' = p/(p-1)$. Quando $p = 2$, essa estimativa junto com a desigualdade de Hölder, produz

$$\left|\int_{\Omega_t} \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\cdot\vec{a}\right| \leq \left(\int_{\Omega_t} |\nabla\vec{u}|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_t} |\vec{u}|^{2'}|\vec{a}|^{2'}\right)^{1/2'} \leq c\delta \int_{\Omega_t} |\nabla\vec{u}|^2.$$

Assim controlamos o termo não linear $\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\cdot\vec{a}$ tomando, **necessariamente**, δ suficientemente pequeno. Quando $p > 2$, procedendo similarmente e usando a desigualdade de Korn, obtemos

$$\left|\int_{\Omega_t} \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\cdot\vec{a}\right| \leq c\delta t^{(p-2)/p}\left(\int_{\Omega_t}\left|D(\vec{u})\right|^p\right)^{2/p}.$$

Então, pela Desigualdade de Young com ε, temos

$$\left|\int_{\Omega_t} \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\cdot\vec{a}\right| \leq \varepsilon\int_{\Omega_t}\left|D(\vec{u})\right|^p + C_\varepsilon t\,,$$

para alguma nova constante C_ε. Devido à esta estimativa podemos controlar o termo não linear $\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\cdot\vec{a}$ tomando ε suficientemente pequeno e, portanto, não precisamos (necessariamente) construir o campo vetorial $\vec{a}$ satisfazendo a estimativa (7) para algum δ suficientemente pequeno (os detalhes desta construção do campo $\vec{a}$ estão no Capítulo 2).

No caso de seções cônicas, as seções transversais são caracterizadas por uma função Lipschitz g, e a necessidade da construção do campo $\vec{a}$ com a propriedade (6), fica condicionada a convergência da integral

$$\int_0^\infty g^{-n(p-1)-1}(t)dt\,. \tag{8}$$

Note que o caso de seções transversais limitadas, pode ser considerado como um caso particular para (8) divergente.

Para (8) convergente, no caso p=2 (Navier-Stokes), [40] obtem solução para δ suficientemente pequeno em (6), ademais, devido à convergência de (8), o campo velocidade pertence ao espaço $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,2}(\Omega)$; no nosso caso, para $p > 2$, como já comentado acima não precisamos da condição δ suficientemente pequeno em (6) e, devido à convergência de (8), não aparece o termo t em (7), e assim o campo velocidade pertence à $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega)$, como veremos no Capítulo 3.2.

Para o caso de seções transversais, onde a integral de (8) diverge, teremos uma dificuldade a mais na aplicação da técnica descrita acima, devido ao fato de que antes nos beneficiamos da propriedade de troncos de comprimento 1 terem volumes limitados em qualquer parte do canal, o que não ocorre nos canais cônicos, visto que neste caso tais troncos têm volumes crescendo indefinidamente quando caminhamos na direção infinita. Este problema é contornado tomando uma função truncamento em função da posição no canal. Essa função possibilita fazer uma mudança de variáveis que leva os troncos em novos troncos limitados, independentes de sua posição no canal. Assim, como é de se esperar para canais cônicos, não conseguimos solução com integral de Dirichlet crescendo linearmente, mas sim com integral de Dirichlet ponderada pela função truncamento crescendo dominada pelo crescimento da integral de (8).

Ainda para canais cônicos, nos papers [34] e [35], Pileckas obtém solução e estimativas em espaços de Sobolev com peso, para os sistemas de Stokes e Navier-Stokes, com fluxos arbitrários dados e força externa em espaços de distribuições apropriados. Um estudo semelhante para os sistema de Stokes e Navier-Stokes com Lei de Potência, é gravimente prejudicado pela não linearidade do termo $\operatorname{div}\left\{|\nabla\vec{v}|^{p-2}\nabla\vec{v}\right\}$. A técnica usada em [34] tem como um dos passos cruciais, o estudo do caso para fluxo zero e, devido a linearidade do sistema, estende para o caso de fluxo não zero (veja equação (6.6), p. 131 de [34]), o que ainda não é possível para o nosso caso. Desta forma desenvolvemos um resultado semelhante para fluxo zero, onde a principal diferença do paper [34], consiste na necessidade de usar compacidade fraca na tomada do limite (veja (4.172)) enquanto lá a convergência é imediata da linearidade (p. 125 de [34]).

Organização da Tese

De uma forma geral a Tese combina as seções dois e três acima, ou seja, ela trata de fluidos com Lei de Potência em canais ilimitados, dando um enfoque especial à condição das seções transversais dos canais: quando estas são limitadas e quando estas são ilimitadas.

Naturalmente, em se tratando de canais ilimitados, a primeira pergunta seria sobre o problema de Leray para Navier-Stokes com Lei de Potência. Este problema foi estudado por Marusic-Paloka em [29], que como no caso de Navier-Stokes, obtém solução para fluxos suficientemente pequenos, mas apenas para $p > 2$; para $1 < p < 2$ o problema está em aberto.

Assim, concentramos nosso trabalho no estudo do problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov para Navier-Stokes com potência, bem como o estudo destes fluidos em canais cônicos ilimitados.

No Capítulo 1 introduzimos as notações gerais (que serão usadas em toda a Tese) e os resultados preliminares, necessários para o desenvolvimento do trabalho. As notações exclusivas de um certo capítulo serão introduzidas no próprio capítulo.

Os Capítulos 2 e 3, denominamos *Seção Transversal Limitada* e *Seção Transversal Ilimitada*, respectivamente. Sendo que no Capítulo 2 tratamos do problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov, visto que neste problema a seção transversal é limitada. Já no Capítulo 3 tratamos de canais cônicas, onde as seções transversais são ilimitadas.

Por fim, no Capítulo 4, tratamos do estudo de estimativas em espaços de Sobolev com peso para o sistema de Stokes com Lei de Potência em canais cônicos.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Neste Capítulo introduziremos algumas notações e resultados que serão usados no decorrer deste trabalho. As notações e resultados peculiares a cada capítulo serão definidas e apresentadas nos mesmos.

1.1 Notações

Introduziremos, nesta seção, as notações comuns a todos os capítulos.

Denotaremos por Ω um domínio (aberto e conexo) do $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$, de classe C^∞, do tipo

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^{m} \Omega_i \,, \tag{1.1}$$

onde Ω_0 é um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, enquanto Ω_i, $i = 1, \ldots, m$, são "canais"que serão definidos em cada problema, conforme a natureza do domínio em questão. Σ denotará uma seção transversal qualquer de Ω, isto é, uma interseção limitada qualquer de Ω com um plano $(n-1)$ - dimensional, que em Ω_i, para possíveis diferentes sistemas de coordenadas cartesianas, reduz-se à

$$\Sigma_i(t) = \{x^{(i)} \in \Omega_i;\ x_n^{(i)} = t\}\,.$$

Para tornar a leitura mais agradável omitiremos o índice i na notação das coordenadas locais.

Adotaremos ainda, para $s > r > 0$, as seguintes notações:

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{ir} = \{x \in \Omega_i \,;\, |x_n| < r\} \\
&\Omega_{ir,s} = \Omega_{is} \setminus \overline{\Omega}_{ir} \\
&\Omega_i^r = \{x \in \Omega_i \,;\, |x_n| > r\} \\
&\Omega_r = \Omega_0 \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{ir} \\
&\Omega_{r,s} = \Omega_s \setminus \overline{\Omega}_r \\
&\Omega(r),\ \Omega(r,s) \quad \text{serão definidos no capítulo 3} \\
&\Omega_{i(r)}\,,\ \Omega_{(r)} \quad \text{serão definidos no capítulos 4}\,.
\end{aligned}
$$

Segue abaixo duas figuras ilustrativas do domínio Ω, em uma Ω possui seções transversais Σ limitadas e na outra as seções transversais são ilimitadas.

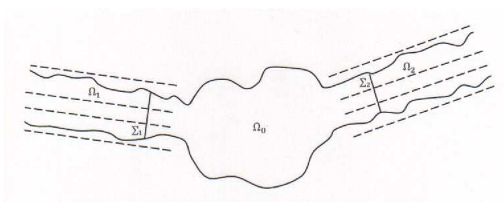

Figura 1.1: seção transversal limitada

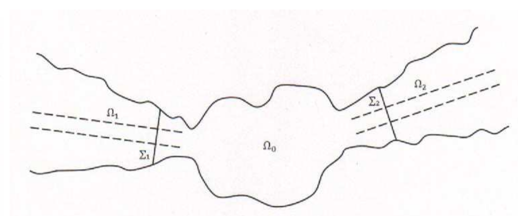

Figura 1.2: seção transversal ilimitada

Adotaremos as seguintes notações para operadores de diferenciação:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{w} = \operatorname{div} \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

$\nabla \vec{w}$ é a matriz $n \times n$ com entradas $\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j}$

$D(\vec{w}) = \dfrac{1}{2}\left(\nabla \vec{w} + [\nabla \vec{w}]^T\right)$ é a matriz $n \times n$ com entradas $D_{ij}(\vec{w}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)$

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{w}\,.$$

Consideraremos agora notações para espaços de funções. Observamos que neste trabalho não distinguiremos, na notação, espaços de funções a valores reais de vetoriais, uma vez que acreditamos não existir confusão na leitura do texto. U denotará um subdomínio de $\mathbb{R}^n$:

- $C_0^\infty(U)$ são funções infitamente diferenciáveis com suporte em U.
- $L^q(U)$, para $1 \leq q \leq \infty$, denotará os espaços de Lebesgue munido com as normas
$$\|\vec{w}\|_{q,U} = \left(\int_U |\vec{w}|^q\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty$$
$$\|\vec{w}\|_{\infty,U} = \sup \mathrm{ess}_U\, |\vec{w}|\,.$$
- $L^q_{loc}(U) = \left\{\vec{w} \in L^q(U'),\ \forall\, \bar{U}' \subset U,\ \text{com } U' \text{ limitado}\right\},\ 1 \leq q < \infty$, onde
$$\bar{U} = U \cup \partial U.$$
- $L^q_{loc}(\bar{U}) = \{\vec{w} \in L^q(U'),\ \forall\, U' \subset U,\ \text{com } U' \text{ limitado}\},\ 1 \leq q < \infty$.
- $W^{1,q}(U)$ e $W_0^{1,q}(U)$, para $1 \leq q < \infty$, são espaços de Sobolev canônicos. Um detalhamento sobre tais espaços pode ser encontrado em [1]. A norma do espaço de Sobolev será denotada por
$$\|\ \vec{w}\ \|_{1,q,U} = \left(\int_U |\vec{w}|^q + |\nabla\vec{w}|^q\right)^{1/q}.$$
- $D_0^{1,q}(U)$ denotará o fecho de $C_0^\infty(U)$ na norma
$$|\vec{\varphi}|_{1,q,U} = \left(\int_U |\nabla\vec{\varphi}|^q\right)^{1/q}.$$
- $\mathcal{D}(U) = \{\vec{\varphi} \in C_0^\infty(U);\ \nabla\cdot\vec{\varphi} = 0\}$.
- $\mathcal{D}_0^{1,q}(U)$ denotará o fecho de $\mathcal{D}(U)$ na norma $|\cdot|_{1,q,U}$.
- $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,q}(U) = \left\{\vec{w} \in D_0^{1,q}(U);\ \nabla\cdot\vec{w} = 0\right\}$.
- $D^{-1,q'}(U)$ é o espaço dual de $D_0^{1,q}(U)$, onde q' é o conjugado de q, isto é, q e q' satisfazem
$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1\,.$$

- $V(U;\Gamma)$ é o espaço das funções de $V(U)$ que se anulam em $\Gamma \subset \partial\Omega$, com $|\Gamma| > 0$.

Outras notações:

$$
\begin{aligned}
&(\vec{u},\vec{w})_U = \sum_{i=1}^{n} \int_U u_i w_i\,. \\
&\mathrm{A} : \mathrm{B} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{A}_{ij}\mathrm{B}_{ij}, \quad \text{para A e B matrizes } n\times n\,. \\
&a \ll 1 : \ a \text{ positivo e suficientemente pequeno.} \\
&a \gg 1 : \ a \text{ suficientemente grande.}
\end{aligned}
$$

Nas notações, sempre que não houver dúvidas sobre o domínio, ele poderá ser omitido a fim de simplificar a escrita das sentenças matemáticas.

1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados que serão usados nos demais capítulos.

Lema 1 . Sejam $z,\ \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções suaves, não negativas, não decrescentes e não identicamente nulas satisfazendo, no intervalo $[0,T]$, as inequações:

$$
\begin{aligned}
&z(t) \le \Psi(z'(t)) + (1-\delta_1)\varphi(t), \\
&\varphi(t) \ge \delta_1^{-1}\Psi(\varphi'(t)),
\end{aligned}
$$

para algum $\delta_1 \in (0,1)$, onde $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave e estritamente crescente, tal que $\Psi(0) = 0$ e $\Psi(\tau) \to \infty$, quando $\tau \to \infty$.

1. Se $z(T) \le \varphi(T)$ temos
$$z(t) \le \varphi(t)\,,\ \forall\, t \in [0,T].$$

2. As funções $z(t)$, não identicamente nulas, satisfazendo à desigualdade
$$z(t) \le \delta_1^{-1}\Psi\,(z'(t)) \quad \forall\, t \ge 0\,,$$
crescem indefinidamente com t, isto é, $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = \infty$. Se $\delta_1^{-1}\Psi(\tau) \le c\tau^m$, com $m > 1$ e $\tau \ge \tau_1$ (para algum $\tau_1 > 0$), então
$$\liminf_{t\to\infty} t^{-\frac{m}{m-1}} z(t) > 0\,;$$

se, contudo, $\delta_1^{-1}\Psi(\tau) \leq c\tau$, para $\tau \geq \tau_1$, então

$$\liminf_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t/c} z(t) > 0\,.$$

Para a prova deste lema, ver [27], Lema 2.3, p. 736, ou [39], Teorema 1, p. 708.

Lema 2 . Valem as seguintes desigualdades:

$$(a_1 + \ldots + a_k)^q \leq k^{q-1}\left(a_1^q + \ldots + a_k^q\right), \tag{1.2}$$

onde $a_i > 0,\ i = 1, \ldots, k$ e $q \geq 1$.

(Desigualdade de Young com ε) $\qquad ab \leq \varepsilon a^q + C(\varepsilon) b^{q'}$, (1.3)

onde $a, b, \varepsilon > 0$, com $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q'/q}(q')^{-1}$ e $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Agora, para $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $q > 2$

$$\langle |x|^{q-2}x - |y|^{q-2}y, x - y\rangle \geq c_q|x - y|^q\,, \tag{1.4}$$

$$\langle |x|^{q-2}x - |y|^{q-2}y, x - y\rangle \geq c_q|x - y|^2\left(|x|^{q-2} + |y|^{q-2}\right). \tag{1.5}$$

Aqui $\langle x, y\rangle$ está denotando o produto interno de $\mathbb{R}^N$.

Para a prova de (1.2) ver [21], Teorema 16, p. 26; de (1.3) ver Apêncice B.2 de [16]; de (1.4) e (1.5) ver [13] ou [3] Lema 2.1, p. 526.

Lema 3 .
(Desigualdade de Hölder) Sejam $1 \leq q_1, \ldots, q_k \leq \infty$, com $\dfrac{1}{q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_k} = 1$, e suponhamos que $w_i \in L^{p_i}(U)$, para $i = 1, \ldots, k$. Então

$$\int_U |w_1 \cdots u_k|\; dx \leq \prod_{i=1}^{k} \|w_i\|_{L^{p_i}(U)}\ . \tag{1.6}$$

(Desigualdade de Hölder para a Soma) Sejam $1 \leq q_1, \ldots, q_k \leq \infty$, com $\dfrac{1}{q_1} + \cdots + \dfrac{1}{q_k} = 1$, e suponhamos que $a_s^i \geq 0$, para $i = 1, \ldots, k$. Então

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_s^1 \cdots a_s^k \leq \left(\sum_{s=1}^{\infty}(a_s^1)^{q_1}\right)^{\frac{1}{q_1}} \cdots \left(\sum_{s=1}^{\infty}(a_s^k)^{q_k}\right)^{\frac{1}{q_k}}. \tag{1.7}$$

Para prova de (1.6), ver Apêncice B.2 de [16]; e para prova de (1.7), ver parágrafo 5.4 de [21].

O próximo lema trata de uma desigualdade do tipo Korn.

Lema 4 . Sejam U um domínio lipschitz limitado de $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$ e $\vec{w} \in W^{1,q}(U)$, $1 \leq q < \infty$, tal que $\vec{w} \equiv 0$ em $\Gamma \subset \partial U$, com $|\Gamma| > 0$. Então

$$c_1|\vec{w}|_{1,q,U} \leq \| D(\vec{w}) \|_{q,U} \leq c_2|\vec{w}|_{1,q,U} \,. \tag{1.8}$$

Prova: Para $n = 3$ ver [31], Teorema 4.10. Já para $n = 2$, tomamos

$$U_3 = U \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^3,$$

daí temos que U_3 e $\Gamma_3 = \Gamma \times (0, 1)$ satisfazem as hipóteses do teorema para $n = 3$. Assim, tomando

$$\vec{W}(x, y, z) = (\vec{w}(x, y), 0),$$

segue $|\vec{W}|_{1,q,U_3} = |\vec{w}|_{1,q,U}$ e $\|D(\vec{W})\|_{q,U_3} = \|D(\vec{w})\|_{q,U}$. Portanto, como $\vec{W}$ satisfaz (1.8) (para $n = 3$), temos que $\vec{w}$ satisfaz (1.8) (para $n = 2$).

□

O próximo lema é sobre desigualdade do tipo Poincaré.

Lema 5 . Sejam $|U| < \infty$, $\vec{w} \in W^{1,q}(U)$, $1 \leq q < \infty$, e $\Gamma \subset \partial U$ com $|\Gamma| > 0$. Então

$$\| \vec{w} \|_{q,U} \leq c_3 \left(|\vec{w}|_{1,q,U} + \| \vec{w} \|_{1,\Gamma} \right) , \ \forall \vec{w} \in W^{1,q}(U) \,. \tag{1.9}$$

Consideremos agora $\vec{w} \in W_0^{1,q}(U)$, $1 \leq q < \infty$. Então

$$\| \vec{w} \|_{q,U} \leq c_4 |U|^{1/n} |\vec{w}|_{1,q,U} \,. \tag{1.10}$$

Para a prova de (1.9) e (1.10) ver [20], Exercício II.4.4, p. 51 e Exercício II.4.10, p. 56.

Lema 6 . Seja $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ contínua, tal que para algum $\rho > 0$

$$F(\xi) \cdot \xi \geq 0 \ , \ \forall \, \xi \in \mathbb{R}^N \ \text{ com } \ |\xi| = \rho.$$

Então existe $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$, com $|\xi_0| \leq \rho$, tal que $F(\xi_0) = 0$.

Para prova ver [20], Lema VIII.3.1, p. 15; ou [16], Lema, p. 493.

Lema 7 . Seja U um domínio de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, limitado e localmente lipschitziana. Dado $f \in L^q(U)$, $1 < q < \infty$, satisfazendo $\int_U f = 0$, existe $\vec{w} \in W_0^{1,q}(U)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \vec{w} = f \\
&\vec{w} \in W_0^{1,q}(U) \\
&\| \vec{w} \|_{1,q,U} \leq c \| f \|_{q,U} ,
\end{aligned}$$

onde $c = c(n, q, U)$.
Para prova ver [20]. Teorema III.3.2, p. 135.

Lema 8 . Seja V um domínio de $\mathbb{R}^N$ e seja $\mathrm{d}(x) = \mathrm{dist}(x, \partial V)$. Então existe uma função $\rho \in C^\infty(V)$, tal que para todo $x \in V$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(x) \leq \rho(x); \\
&|D^\alpha \rho(x)| \leq k_{|\alpha|+1} (\mathrm{d}(x))^{1-|\alpha|}, \ |\alpha| \geq 0 ,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

onde $k_{|\alpha|+1}$ depende só de α e N.

Para prova ver [20], Lema III.6.1, p. 172.

O próximo lema será importante para a aplicação do método de Galerkin, em espaços que não são de Hilbert.

Lema 9 . Seja U um domínio arbitrário de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. Então existe um conjunto enumerável $\{\vec{\varphi}_k\} \subset \mathcal{D}(U)$ total em $\mathcal{D}_0^{1,q}(U)\,(1 \leq q \leq \infty)$, isto é, o conjunto das combinações lineares finitas de $\{\vec{\varphi}_k\}$ é denso em $\mathcal{D}_0^{1,q}(U)$. Ademais este conjunto é ortogonal em $L^2(U)$.

Prova: Sabemos que $\mathcal{D}_0^{1,q}(U)$ é um espaço separável. Daí, como subconjunto de $\mathcal{D}_0^{1,q}(U)$, temos que $\mathcal{D}(U)$ é separável (com efeito, Proposição III.22 de [9]),então existe $\{\vec{\psi}_k\} \subset \mathcal{D}(U)$, de modo que $\mathcal{D}(U)$ é o limite, na norma $| \cdot |_{1,q}$, de subsequências do referido conjunto. Agora, como $\mathcal{D}_0^{1,p}(U)$ é o fecho de $\mathcal{D}(U)$, segue que $\{\vec{\psi}_k\} \subset \mathcal{D}(U)$ é denso em $\mathcal{D}_0^{1,p}(U)$.

Agora, seja $L(\{\vec{\psi}_k\})$ o conjunto das combinações lineares finitas de $\{\vec{\psi}_k\}$. Por Gram-Schmidt (Proposição 21.6, p.122 de [32]), existe um conjunto enumerável $\{\vec{\varphi}_k\} \subset \mathcal{D}(U)$ ortogonal em $L^2(U)$, tal que os subespaços gerados por um número finito de elementos de $\{\vec{\psi}_k\}$ e $\{\vec{\varphi}_k\}$ são iguais, ou seja, $L(\{\vec{\psi}_k\}) = L(\{\vec{\varphi}_k\})$. Portanto $L(\{\vec{\varphi}_k\})$ é denso em $\mathcal{D}_0^{1,q}(U)$. Assim provamos o lema.

□

Capítulo 2

SEÇÃO TRANSVERSAL LIMITADA

2.1 Formulação do Problema

Neste Capítulo assumiremos Ω como em (1.1), com $m = 2$ (isto para simplificar a redação, visto que para $m \geq 2$ qualquer em $\mathbb{N}$, os resultados seguem sem alterações), e denotaremos os "canais"de Ω, em possíveis diferentes sistemas de coordenadas cartesianas, por

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_n^1 < 0,\ x' \equiv \left(x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1 \right) \in \Sigma_1(x_n^1) \right\} \\ \Omega_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_n^2 > 0,\ x' \equiv \left(x_1^2, \ldots, x_{n-1}^2 \right) \in \Sigma_2(x_n^2) \right\}, \end{aligned}$$

com $\Sigma_i, i = 1, 2$, domínios de classe C^∞ simplesmente conexo do $\mathbb{R}^{n-1}$, tais que para algumas constantes l_1 e l_2, independentes de x_n^i, satisfazem

$$\begin{aligned} \sup_{x_n^i} \operatorname{diam} \Sigma_i(x_n^i) &= l_2 < \infty \\ \inf_{x_n^i} \operatorname{diam} \Sigma_i(x_n^i) &= l_1 > 0, \end{aligned}$$

e contém os cilindros

$$\begin{aligned} C_{l_1}^1 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_n^1 < 0 \text{ e } |x'| < \tfrac{l_1}{4} \right\} \subset \Omega_1 \\ C_{l_1}^2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_n^2 > 0 \text{ e } |x'| < \tfrac{l_1}{4} \right\} \subset \Omega_2 \,. \end{aligned}$$

Denotaremos por $\vec{n}$ um vetor unitário ortogonal à Σ, orientado de Ω_1 para Ω_2.

Propomos a resolução de um problema correlato ao Problema 2.1 de [27], que será chamado *Problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov para o Sistema de Navier-Stokes com Lei de Potência*: Dado $\Phi \in \mathbb{R}$, obter um campo velocidade $\vec{v}$ e uma pressão p tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v})\right\} &= \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega \\ \nabla\cdot\vec{v} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \vec{v} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \int_{\Sigma} \vec{v}\cdot\vec{n} &= \Phi \\ \sup_{t>0} t^{-1}\int_{\Omega_t} |\nabla\vec{v}|^p &< \infty\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Buscaremos uma solução da forma $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}$, onde $\vec{a}$ é uma função que carrega o fluxo, construída no lema seguinte (veja [27], p. 744; veja também [20], Lema XI.7.1, p. 272 e [33], p. 46):

Lema 10 . Dado $p > 2$, existe um campo suave $\vec{a} \equiv \vec{a}(p) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo:

(a_1) $\vec{a} \in W^{1,p}_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$;

(a_2) $\nabla\cdot\vec{a} = 0$ em Ω e $\vec{a} = 0$ em $\partial\Omega$;

(a_3) $\displaystyle\int_{\Sigma_i(s)} \vec{a}\cdot\vec{n} = \Phi,\ \forall\, s \geq 0,\ i = 1, 2;$

(a_4) Existe uma constante c independente de $t \geq 0$, tal que

$$\int_{\Omega_{it-1,t}} |\nabla\vec{a}|^p \leq c|\Phi|^p,\ \forall\, t \geq 0,\ i = 1, 2;$$

(a_5) Dado $\vec{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$, tem-se

$$\int_{\Omega_t} |\vec{a}|^{p'}|\vec{\phi}|^{p'} \leq c|\Phi|^{p'} t^{(p-2)/(p-1)}|\vec{\phi}|^{p'}_{1,p,\Omega_t},\quad \forall\, t > 0;$$

(a_6) Existe uma constante c_2 independente de $t \geq 1$, tal que

$$\int_{\Omega_t} |\nabla\vec{a}|^p \leq c_2(t+1)\,,\quad \forall\, t \geq 1.$$

Prova: Sejam $\sigma, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções suaves não decrescentes tais que

$$\sigma(t) = \begin{cases} \dfrac{l_1}{4}\,, & t \leq \dfrac{l_1}{4} \\ t\,, & t > \dfrac{l_1}{2} \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq 0 \\ 1\,, & t > 1 \end{cases}.$$

Dado $\varepsilon \in (0,1)$, definamos

$$\zeta(x) = \psi\left(\varepsilon \ln \frac{\sigma(|x'|)}{\rho(x)}\right), \tag{2.2}$$

com ρ introduzido no Lema 8.

Devido às propriedades de ψ, temos

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0\,, & \sigma(|x'|) \leq \rho(x) \\ 1\,, & \sigma(|x'|) \geq \rho(x)\,\mathrm{e}^{1/\varepsilon} \end{cases} \tag{2.3}$$

que, em particular, implica

$$\operatorname{supp}(\nabla\zeta) \subset \left\{x \in \Omega; \rho(x) < \sigma(|x'|) < \rho(x)\,\mathrm{e}^{1/\varepsilon}\right\}. \tag{2.4}$$

Verificaremos agora algumas propriedades relevantes da função ζ:

1. $\zeta(x) = 0$, para todo $x \in C^i_{l_1}$, $i = 1, 2$.
De fato, seja $x \in C^i_{l_1}$, então $\mathrm{d}(x) > \frac{l_1}{4}$. Assim, decorre de (1.11) que

$$\rho(x) > \frac{l_1}{4}\,,\ \forall x \in C^i_{l_1}\,. \tag{2.5}$$

Ainda, se $x \in C^i_{l_1}$, então $\sigma(|x'|) = \frac{l_1}{4}$, desde que $|x'| \leq \frac{l_1}{4}$. Disto e de (2.5) temos, $\rho(x) \geq \sigma(|x'|)$, para todo $x \in C^i_{l_1}$, que por (2.3) nos leva à $\zeta(x) = 0$, como queríamos.

2. $\zeta(x) = 1$, para todo $x \in V_\varepsilon$, onde V_ε é a seguinte vizinhança de $\partial\Omega$

$$V_\varepsilon = \left\{x \in \Omega; \mathrm{d}\,(x) \leq \frac{l_1 \mathrm{e}^{-1/\varepsilon}}{4k_1}\right\}.$$

De fato, como σ é não decrescente,

$$\sigma(|x'|) \geq \frac{l_1}{4}, \tag{2.6}$$

e por (1.11), $k_1 \mathrm{d}\,(x) > \rho(x)$. Daí, para $x \in V_\varepsilon$, temos $\frac{l_1 \mathrm{e}^{-1/\varepsilon}}{4} > \rho(x)$, que devido à (2.6) implica $\sigma(|x'|) \geq \rho(x)\,\mathrm{e}^{1/\varepsilon}$ e, de (2.3) obtemos $\zeta(x) = 1$, como queríamos.

3. Pela definição de ζ, a partir de cálculos diretos, obtemos para todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} &|\nabla\zeta(x)| \leq \varepsilon c_1 \mathrm{d}^{-1}(x) \\ &|D^2\zeta(x)| \leq c_2 \mathrm{d}^{-2}(x)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vamos agora construir os campos $\vec{a}$, para $n = 2, 3$, separadamente.

$n = 2$:
Podemos considerar, neste momento apenas, $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2; f_1(x_2) < x_1 < f_2(x_2)\right\}$ com f_j, $j = 1, 2$, funções suaves. Para Ω, como em (1.1), fazemos uma colagem usando as construções em cada canal, como feito no capítulo VI de [20].

Definimos

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0 & , \quad s < 0 \\ 1 & , \quad s > 0\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Note que devido ao ponto 1 acima, temos $\widetilde{\zeta} \equiv \zeta\varphi \equiv 0$, em C_{l_1}, e assim $\widetilde{\zeta} \in C^\infty(\Omega)$.

Por fim, definimos

$$\vec{\mathrm{a}} = \Phi\nabla^\perp\left(\zeta(x)\varphi(x_1)\right) = \Phi\left(-\partial_{x_2}(\zeta\varphi), \partial_{x_1}(\zeta\varphi)\right).$$

Agora verificaremos que $\vec{\mathrm{a}}$ satisfaz as propriedades requeridas:

(a_1): É satisfeita pois $\vec{\mathrm{a}} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$.

(a_2): Por construção $\nabla\cdot\vec{\mathrm{a}} = 0$, e $\vec{\mathrm{a}}\Big|_{\partial\Omega} = 0$, devido ao ponto 2.

(a_3): Devido ao ponto 2, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma(x_2)} \vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{n}} &= \int_{\Sigma(x_2)} \mathrm{a}_2 d\,x_1 = \Phi\int_{\Sigma(x_2)} \frac{\partial}{\partial x_1}(\zeta\varphi) d\,x_1 \\ &= \Phi\zeta(s, x_2)\varphi(s)\Big|_{s=f_1(x_2)}^{f_2(x_2)} = \Phi\left[\varphi(f_2(x_2)) - \varphi(f_1(x_2))\right] = \Phi. \end{aligned}$$

(a_4): De (2.7) obtemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_2}[\zeta(x_1,x_2)\varphi(x_1)]\right| = \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x_2}\varphi(x_1)\right| \le c_1 \mathrm{d}^{-1}(x)$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1}(\zeta\varphi)\right| \le \left|\frac{\partial \zeta}{\partial x_1}\varphi\right| + |\zeta\varphi'| \le c_1 \mathrm{d}^{-1}(x) + c\mathrm{d}^{-1}(x) \le c_2 \mathrm{d}^{-1}(x)$$

logo, devido à (1.11),

$$|\vec{\mathrm{a}}(x)| \le \frac{c_3|\Phi|}{\rho(x)}. \tag{2.9}$$

Procedendo analogamente, obtemos

$$|\nabla\vec{\mathrm{a}}(x)| \le c_4 \mathrm{d}^{-2}(x)\chi_{\Omega\setminus V_\varepsilon} \le c_4 l_1^{-2} = c_5|\Phi|. \tag{2.10}$$

Daí, para $t \ge 1$, segue de (2.10)

$$\int_{\Omega_{t-1,t}} |\nabla\vec{\mathrm{a}}|^p \le \int_{t-1}^{t}\int_{\Sigma(s)} |\nabla\vec{\mathrm{a}}|^p \le c|\Sigma(s)||\Phi|^p \le c|\Phi|^p.$$

(a_5): Pelo ponto 2, $\vec{\mathrm{a}} \equiv 0$ em V_ε, e para $x \in \Omega \setminus V_\varepsilon$, temos

$$\rho(x) \ge \mathrm{d}(x) \ge \frac{l_1}{4k_1 \mathrm{e}^{1/\varepsilon}} \equiv c(\varepsilon, l_1). \tag{2.11}$$

Assim, dado $\vec{\phi} \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} |\vec{\mathrm{a}}|^{p'}|\vec{\phi}|^{p'}\,dx &\le c|\Phi|^{p'}\int_{\Omega_t\setminus V_\varepsilon}\left(\frac{|\vec{\phi}|}{\rho}\right)^{p'} dx \le c|\Phi|^{p'}\int_{\Omega_t\setminus V_\varepsilon}|\vec{\phi}|^{p'}\,dx\\
&\le c|\Phi|^{p'}\int_0^t\int_{\Sigma(x_2)}|\vec{\phi}|^{p'}\,dx_1dx_2 \le c|\Phi|^{p'}\int_0^t\int_{\Sigma(x_2)}|\nabla_{x_1}\vec{\phi}|^{p'}\,dx_1dx_2\\
&\le c|\Phi|^{p'}\int_0^t\int_{\Sigma(x_2)}|\nabla\vec{\phi}|^{p'}\,dx_1dx_2 \le c|\Phi|^{p'}t^{(p-2)/(p-1)}|\vec{\phi}|^{p'}_{1,p,\Omega},
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos (2.9), na segunda (2.11), na quarta a Desigualdade de Poincaré e na última a Desigualdade de Hölder com $q = p/p'$.

(a_6): É uma consequência imediata de (a_4). De fato, indicando por $[t]$ o maior inteiro menor ou igual a t, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t}|\nabla\vec{\mathrm{a}}|^p &\le \int_0^t\int_\Sigma|\nabla\vec{\mathrm{a}}|^p \le \sum_{s=1}^{[t]+1}\int_{s-1}^{s}\int_\Sigma|\nabla\vec{\mathrm{a}}|^p\\
&= \sum_{s=1}^{[t]+1}\int_{\Omega_{s-1,s}}|\nabla\vec{\mathrm{a}}|^p \le 2c_a([t]+1) \le c_2(t+1),
\end{aligned}$$

para todo $t \geq 1$, onde usamos (a_4) na penúltima desigualdade.

$n = 3$:
Definamos o campo $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = \frac{\Phi}{2\pi}\nabla \times (\zeta\vec{b}), \tag{2.12}$$

onde $\vec{b}(x) = \left(\frac{-x_2}{|x'|^2}, \frac{x_1}{|x'|^2}, 0\right)$.

Devido à identidade $\nabla \times (\zeta\vec{b}) = \nabla\zeta \times \vec{b} + \zeta\nabla \times \vec{b}$ e como $\nabla \times \vec{b} = 0$, temos

$$\vec{a} = \frac{\Phi}{2\pi}\nabla\zeta \times \vec{b}. \tag{2.13}$$

Agora verificaremos que $\vec{a}$ satisfaz as propriedades requeridas:

(a_1): Devido ao ponto 1 temos $\vec{a} \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)$, daí $\vec{a} \in W^{1,p}_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$;

(a_2): Por construção $\nabla \cdot \vec{a} = 0$, e $\vec{a}\Big|_{\partial\Omega} = 0$, devido ao ponto 2 e (2.13);

(a_3): Primeiro observemos que

$$\int_{\partial\Sigma_i(s)} \vec{b} \times \vec{\nu} \cdot \vec{e}_3 = -2\pi, \tag{2.14}$$

onde $\vec{\nu}$ é a normal exterior à $\partial\Sigma_i(s)$.
De fato, seja $\vec{w} \equiv (\vec{b}_2, -\vec{b}_1, 0)$ e $B_{l_1} = \{|x'| < l_1/2\} \subset \Sigma_i(s)$, daí

$$\nabla_{x'} \cdot \vec{w} = \nabla \times \vec{b} \cdot \vec{e}_3 = 0 \ \text{ em } \ \Sigma_i \setminus B_{l_1} \equiv U.$$

Assim, pelo teorema da divergência

$$0 = \int_U \nabla_{x'} \cdot \vec{w} = \int_{\partial\Sigma_i} \vec{w} \cdot \vec{\nu} - \int_{\partial B_{l_1}} \vec{w} \cdot \vec{e}_{\mathrm{r}}, \tag{2.15}$$

onde $\vec{e}_{\mathrm{r}} = \frac{x'}{|x'|}$. Para qualquer vetor $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, 0)$ temos $\vec{w} \cdot \vec{\gamma} = -\vec{b} \times \vec{\gamma} \cdot \vec{e}_3$. Assim, de (2.15), usando coordenadas cilíndricas, temos

$$\int_{\partial\Sigma_i} \vec{b} \times \vec{\nu} \cdot \vec{e}_3 = \int_{\partial B_{l_1}} \vec{b} \times \vec{e}_{\mathrm{r}} \cdot \vec{e}_3 = \int_{\partial B_{l_1}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{r} r\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi,$$

como queríamos.
Agora,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Sigma_i(s)} \vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{n}} &= \int_{\Sigma_i(s)} \vec{\mathrm{a}}_3 = \frac{\Phi}{2\pi} \int_{\Sigma_i(s)} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\zeta \mathrm{b}_2) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\zeta \mathrm{b}_1) \right] \\
&= \frac{\Phi}{2\pi} \int_{\Sigma_i(s)} \nabla \cdot (\zeta \mathrm{b}_2, -\zeta \mathrm{b}_1) = \frac{\Phi}{2\pi} \int_{\partial\Sigma_i(s)} (\zeta \mathrm{b}_2, -\zeta \mathrm{b}_1) \cdot \vec{\nu} \\
&= \frac{\Phi}{2\pi} \int_{\partial\Sigma_i(s)} (\mathrm{b}_2 \cdot \nu_1 - \mathrm{b}_1 \cdot \nu_2) = -\frac{\Phi}{2\pi} \int_{\partial\Sigma_i(s)} \vec{\mathrm{b}} \times \vec{\nu} \cdot \vec{\mathrm{e}}_3 = \Phi \,,
\end{aligned}
$$

onde na segunda igualdade usamos (2.12), na quarta o teorema da divergência, na quinta o ponto 2 e na última (2.14).

(a_4), (a_5) e (a_6) são verificadas como no caso $n = 2$.

$\square$

Portanto, devido às propriedades de $\vec{\mathrm{a}}$, para resolver o problema (2.1) devemos buscar $\vec{u}$ solução do seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \left\{ \left| D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}}) \right|^{p-2} \left[D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}}) \right] \right\} &= \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}} + \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{u} \\
&\quad + \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega \\
\nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\
\vec{u} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\
\int_\Sigma \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0 \\
\sup_{t>0} t^{-1} \int_{\Omega_t} |\nabla \vec{u}|^p &< \infty \,.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Multiplicando (2.16_1) por $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ e observando que

$$
\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}(\vec{u}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}(\vec{u}) D_{ij}(\vec{\varphi}) \,, \quad \forall \vec{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega) \tag{2.17}
$$

e $\int_\Omega \nabla \mathrm{p} \cdot \vec{\varphi} = -\int_\Omega \mathrm{p} \nabla \cdot \vec{\varphi} = 0$, após integrar por partes obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left| D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}}) \right|^{p-2} \left[D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}}) \right] : D(\vec{\varphi}) = \\
&- (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}, \vec{\varphi}) - (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}}, \vec{\varphi}) - (\vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{u}, \vec{\varphi}) - (\vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}}, \vec{\varphi}) \,.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Definição 1 . Uma *solução fraca* para o problema (2.16) é uma função $\vec{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\vec{u} \in W^{1,p}_{loc}(\bar{\Omega})$;

(ii) $\vec{u}$ satisfaz (2.18) para todo $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(iii) $\vec{u}$ satisfaz $(2.16_2) - (2.16_5)$.

Observação 1 . O uso de funções testes com divergente zero elimina a pressão p, a qual é posteriormente recuperada devido a um lema de De Rham (ver e.g. [20], Corolário III.5.2, p. 171).

2.2 O Problema Aproximado em Domínio Limitado

Nesta seção denotaremos por U um subdomínio limitado de Ω, e consideraremos a seguinte variação do problema (2.16): obter $\vec{u}$ e p solução fraca de

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left\{\left(\frac{1}{T} + \left|D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\right)\left[D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right]\right\} &= \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{u} \\ &\quad +\vec{a}\cdot\nabla\vec{a} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } U \\ \nabla\cdot\vec{u} &= 0 \quad \text{em } U \\ \vec{u} &= 0 \quad \text{em } \partial U \\ \int_\Sigma \vec{u}\cdot\vec{n} &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Com a seguinte definição de solução fraca

Definição 2 . Uma *solução fraca* para o problema (2.19) é uma função $\vec{u} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\vec{u} \in W^{1,p}_0(U)$;

(ii) $\vec{u}$ satisfaz para todo $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_U \left[D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right] : D(\vec{\varphi}) + \int_U \left|D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right] : D(\vec{\varphi}) = \\ &-(\vec{u}\cdot\nabla\vec{u},\vec{\varphi}) - (\vec{u}\cdot\nabla\vec{a},\vec{\varphi}) - (\vec{a}\cdot\nabla\vec{u},\vec{\varphi}) - (\vec{a}\cdot\nabla\vec{a},\vec{\varphi})\ ; \end{aligned} \tag{2.20}$$

(iii) $\vec{u}$ satisfaz $(2.19_2) - (2.19_4)$.

Obviamente, a pressão p relacionada à solução $\vec{u}$, para o problema (2.19), é obtida conforme a Observação 1.

Para resolver o problema (2.19), aplicaremos o método de Galerkin junto com o método de monotonicidade de Browder-Minty (veja [16], Remark, p. 497). O uso do método de Browder-Minty faz-se necessário devido ao termo não linear do lado esquerdo de (2.19_1).

Seja $\{\vec{\varphi}^j\} \subset \mathcal{D}(U)$ total em $\mathcal{D}_0^{1,p}(U)$, tal que $(\vec{\varphi}^i, \vec{\varphi}^j) = \delta_{ij}$, conforme o Lema 9. Escreveremos para cada $m = 1, 2, \ldots$

$$\vec{u}^m = \sum_{j=1}^{m} c_{jm} \vec{\varphi}^j \,, \tag{2.21}$$

tal que, para $j = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T} \int_U [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{\varphi}^j) + \int_U \left| D(\vec{u}^m) + D(\vec{a}) \right|^{p-2} [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{\varphi}^j) \\ &+ \left(\vec{u}^m \cdot \nabla \vec{u}^m, \vec{\varphi}^j\right) + \left(\vec{u}^m \cdot \nabla \vec{a}, \vec{\varphi}^j\right) + \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{u}^m, \vec{\varphi}^j\right) + \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{a}, \vec{\varphi}^j\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Lema 11 . Para cada $m \in \mathbb{N}$ o problema (2.21), (2.22) admite uma solução fraca $\vec{u}^m$.

Prova: Para $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$, definimos $\vec{u}^m = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \vec{\varphi}^j$ e

$$\begin{aligned} F_j(\xi) &= \frac{1}{T} \int_U [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{\varphi}^j) \\ &\quad + \int_U \left| D(\vec{u}^m) + D(\vec{a}) \right|^{p-2} [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{\varphi}^j) \\ &\quad + \left(\vec{u}^m \cdot \nabla \vec{u}^m, \vec{\varphi}^j\right) + \left(\vec{u}^m \cdot \nabla \vec{a}, \vec{\varphi}^j\right) + \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{u}^m, \vec{\varphi}^j\right) + \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{a}, \vec{\varphi}^j\right). \end{aligned}$$

Pelo Lema 6, basta mostrar que para algum $\rho > 0$ tem-se $\vec{F}(\xi) \cdot \xi \geq 0$, para todo $|\xi| = \rho$. Ora, facilmente vemos que $(\vec{u}^m \cdot \nabla \vec{u}^m, \vec{u}^m) = (\vec{a} \cdot \nabla \vec{u}^m, \vec{u}^m) = 0$. Daí

$$\begin{aligned} \vec{F}(\xi) \cdot \xi &= \frac{1}{T} \int_U [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{u}^m) \\ &\quad \int_U \left| D(\vec{u}^m) + D(\vec{a}) \right|^{p-2} [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{u}^m) \\ &\quad + (\vec{u}^m \cdot \nabla \vec{a}, \vec{u}^m) + (\vec{a} \cdot \nabla \vec{a}, \vec{u}^m)\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Agora, usando a Desigualdade de Hölder, (a_5) e a Desigualdade de Young com ε, obtemos

$$\begin{aligned} \left|(\vec{u}^m \cdot \nabla\vec{a}, \vec{u}^m)\right| &= \left|(\vec{u}^m \cdot \nabla\vec{u}^m, \vec{a})\right| \leq \left|\vec{u}^m\right|_{1,p} \left(\int_U |\vec{a}|^{p'} \left|\vec{u}^m\right|^{p'}\right)^{1/p'} \\ &\leq c \left|\vec{u}^m\right|_{1,p}^2 \leq \varepsilon_1 |\vec{u}^m|_{1,p}^p + c(\varepsilon_1)\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Analogamente, obtém-se

$$\left|(\vec{a} \cdot \nabla\vec{a}, \vec{u}^m)\right| \leq \varepsilon_2 |\vec{u}^m|_{1,p}^p + c(\varepsilon_2)\,. \tag{2.25}$$

Quanto ao primeiro termo de (2.23), aplicando a desigualdade $\langle x, y\rangle \leq \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^{n^2}$, obtemos

$$\int_U [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{u}^m) \geq \frac{1}{2}\int_U \left|D(\vec{u}^m)\right|^2 - \frac{1}{2}\int_U \left|D(\vec{a})\right|^2. \tag{2.26}$$

Para o termo que resta de (2.23), usamos (1.4) e (1.8) para obter

$$\int_U \left(\left|D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})\right|^{p-2} [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] - \left|D(\vec{a})\right|^{p-2} D(\vec{a})\right) : D(\vec{u}^m) \geq c_p \int_U \left|D(\vec{u}^m)\right|^p.$$

Daí

$$\begin{aligned} \int_U \left|D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})\right|^{p-2} (D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})) : D(\vec{u}^m) \;\geq\; & c_p \left|\vec{u}^m\right|_{1,p}^p \\ & + \int_U \left|D(\vec{a})\right|^{p-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^m), \end{aligned} \tag{2.27}$$

mas

$$\begin{aligned} \left|\int_U \left|D(\vec{a})\right|^{p-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^m)\right| &\leq \int_U \left|D(\vec{a})\right|^{p-1} \left|D(\vec{u}^m)\right| \\ &\leq \left(\int_U \left|D(\vec{a})\right|^p\right)^{(p-1)/p} \left(\int_U \left|D(\vec{u}^m)\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leq \varepsilon_3 \left|\vec{u}^m\right|_{1,p}^p + c(\varepsilon_3). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Assim, para $\varepsilon_i,\ i = 1, 2, 3$ suficientemente pequenos tais que $c_p - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) > 0$, e observando que $\left|\vec{u}^m\right|_{1,q}^q \geq |\xi|^q c_m,\ q = 2, p$, de (2.23) − (2.28) obtemos

$$\vec{F}(\xi) \cdot \xi \geq c_1|\xi|^2 - c_2 \geq 0$$

para $|\xi|^2 \geq \max\left\{1, \dfrac{c_2}{c_1}\right\}$. Como queríamos.

$\square$

Observação 2 . Não é necessário usar (a_5) para obtenção de (2.24), pois aplicando a Desigualdade de Hölder com p, p, $\dfrac{p}{p-2}$, podemos usar Imersão de Sobolev, desde que $\dfrac{p}{p-2} \leq p^* = \dfrac{np}{n-p} \Leftrightarrow p \geq \dfrac{3n}{n+1}$ (isto para $p < n$, pois para $p \geq n$ não há o que fazer). Para $2 < p < \dfrac{3n}{n+1}$, aplicamos a Desigualdade de Hölder com $p, \dfrac{p^*}{p'}, \dfrac{p^* p'}{p^* - p'}$ e temos Imersão de Sobolev, pois

$$p \leq \frac{p^* p'}{p^* - p'} \leq p^* \Leftrightarrow \frac{3n}{n+2} \leq p < \frac{3n}{n+1}.$$

Lema 12 . $|\vec{u}^m|_{1,p} \leq c$, com c independente de m.

Prova: Multiplicando (2.22) por ξ_j e somando em j de 1 à m, obtemos como em (2.23)

$$\frac{1}{T}\int_U \left(\left|D(\vec{u}^m)\right|^2 + D(\vec{u}^m) : D(\vec{a})\right) + \int_U \left|D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})\right|^{p-2} [D(\vec{u}^m) + D(\vec{a})] : D(\vec{u}^m)$$
$$+ (\vec{u}^m \cdot \nabla\vec{a}, \vec{u}^m) + (\vec{a} \cdot \nabla\vec{a}, \vec{u}^m) = 0.$$

Agora, procedendo como na obtenção de (2.24) e (2.28), obtemos

$$|\vec{u}^m|_{1,p}^p \leq c.$$

$\square$

Observação 3 . (a_5) vale para $\vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ no lugar de $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Teorema 1 . O problema (2.19) admite uma solução fraca $\vec{u} \in W_0^{1,p}(U)$.

Prova: Devido ao Lema 12, obtemos uma subsequência $\{\vec{u}^{m_k}\}$ e uma função $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U)$, tal que

$$\begin{array}{ll} \vec{u}^{m_k} \rightharpoonup \vec{u} & \text{em } \mathcal{D}_0^{1,p}(U) \\ \vec{u}^{m_k} \rightarrow \vec{u} & \text{em } L^p(U). \end{array} \tag{2.29}$$

Agora pretendemos passar o limite em (2.22) e tomar $\vec{\varphi}$ qualquer em $\mathcal{D}(U)$, para isto precisamos proceder com cuidado devido ao termo não linear. Começaremos introduzindo algumas notações para facilitar a redação. Para $\vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U)$, denotamos:

$$\begin{aligned} A\vec{w} &\equiv -\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{w}) + D(\vec{a})\right|^{p-2}[D(\vec{w}) + D(\vec{a})]\right\} \\ B(\vec{w}) &\equiv -\left(\vec{w}\cdot\nabla\vec{w} + \vec{w}\cdot\nabla\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{w} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{a}\right) \\ \mathfrak{F}(\vec{w}) &\equiv -\frac{1}{T}\mathrm{div}\left\{D(\vec{w}) + D(\vec{a})\right\}. \end{aligned}$$

Neste momento, procederemos com a demonstração pontualmente.

1. Usando (1.2), obtemos $A : \mathcal{D}_0^{1,p}(U) \longrightarrow \left[\mathcal{D}_0^{1,p}(U)\right]'$ e, devido ao Lema 12 temos $A\vec{u}^{m_k}$ limitado em $\left[\mathcal{D}_0^{1,p}(U)\right]'$, isto implica que existe $\chi \in \left[\mathcal{D}_0^{1,p}(U)\right]'$ tal que

$$\langle A\vec{u}^{m_k}, \vec{w}\rangle \longrightarrow \langle \chi, \vec{w}\rangle, \quad \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U). \tag{2.30}$$

2. Para toda $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$ temos

$$\int_U B(\vec{u}^{m_k})\cdot\vec{\varphi} \longrightarrow \int_U B(\vec{u})\cdot\vec{\varphi}. \tag{2.31}$$

De fato, para $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$,

$$\int_U B(\vec{u}^{m_k})\cdot\vec{\varphi} = -\left[(\vec{u}^{m_k}\cdot\nabla\vec{u}^{m_k}, \vec{\varphi}) + (\vec{u}^{m_k}\cdot\nabla\vec{a}, \vec{\varphi}) + (\vec{a}\cdot\nabla\vec{u}^{m_k}, \vec{\varphi}) + (\vec{a}\cdot\nabla\vec{a}, \vec{\varphi})\right].$$

Agora,

$$\begin{aligned} \left|(\vec{u}^{m_k}\cdot\nabla\vec{u}^{m_k}, \vec{\varphi}) - (\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}, \vec{\varphi})\right| &\leq \left|(\vec{u}^{m_k}\cdot\nabla\vec{\varphi}, \vec{u}^{m_k} - \vec{u})\right| + \left|((\vec{u}^{m_k} - \vec{u})\cdot\nabla\vec{\varphi}, \vec{u})\right| \\ &\leq c \parallel \vec{u}^{m_k} \parallel_p \parallel \vec{u}^{m_k} - \vec{u} \parallel_p + c \parallel \vec{u} \parallel_p \parallel \vec{u}^{m_k} - \vec{u} \parallel_p \\ &\leq c\left(\vec{\varphi}, \parallel \vec{u} \parallel_p\right) \parallel \vec{u}^{m_k} - \vec{u} \parallel_p \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

onde na segunda desigualdade usamos a Desigualdade de Hölder e na última (2.29_2). Aplicando ainda a Desigualdade de Hölder, obtemos também

$$\begin{aligned} \left|(\vec{u}^{m_k}\cdot\nabla\vec{a}, \vec{\varphi}) - (\vec{u}\cdot\nabla\vec{a}, \vec{\varphi})\right| &\leq c(\vec{\varphi})\left|\vec{a}\right|_{1,p}\left\|\vec{u}^{m_k} - \vec{u}\right\|_p \longrightarrow 0 \\ \left|(\vec{a}\cdot\nabla\vec{u}^{m_k}, \vec{\varphi}) - (\vec{a}\cdot\nabla\vec{u}, \vec{\varphi})\right| &\leq c(\vec{\varphi})\left\|\vec{a}\right\|_p\left\|\vec{u}^{m_k} - \vec{u}\right\|_p \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim, temos provado (2.31).

3. Devido à (2.29), temos para todo $\vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,2}(U)$

$$\langle \mathfrak{F}(\vec{u}^{m_k}), \vec{w} \rangle \longrightarrow \langle \mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{w} \rangle \,. \tag{2.32}$$

4. Agora, de (2.22) temos

$$\langle \mathfrak{F}(\vec{u}^{m_k}), \vec{\varphi}^j \rangle + \langle A\vec{u}^{m_k}, \vec{\varphi}^j \rangle = \int_U B(\vec{u}^{m_k}) \cdot \vec{\varphi}^j$$

que, devido à (2.30) – (2.32), fica

$$\langle \mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{\varphi}^j \rangle + \langle \chi, \vec{\varphi}^j \rangle = \int_U B(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi}^j. \tag{2.33}$$

5. Mostraremos agora que

$$\langle \mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{\varphi} \rangle + \langle \chi, \vec{\varphi} \rangle = \int_U B(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi}\,, \quad \forall\, \vec{\varphi} \in \mathcal{D}(U). \tag{2.34}$$

Vejamos. Seja $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(U)$, podemos, sem perda de generalidade, considerar que existe $\{\vec{\varphi}^{j_s}\}_{s=1}^{\infty} \subset \{\vec{\varphi}^j\}$ tal que $\vec{\varphi}^{j_s} \longrightarrow \vec{\varphi}$ em $\mathcal{D}_0^{1,p}(U)$, mas como $|U| < \infty$ temos $\vec{\varphi}^{j_s} \longrightarrow \vec{\varphi}$ em $W_0^{1,p}(U)$ (ver [20], Remark II.5.1, p. 58). Agora

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{\varphi} \rangle + \langle \chi, \vec{\varphi} \rangle - \int_U B(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi} \right| \ &\leq \ \left| \langle \mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s} \rangle \right| + \left| \langle \chi, \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s} \rangle \right| \\ &\quad + \left| \langle \mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{\varphi}^{j_s} \rangle + \langle \chi, \vec{\varphi}^{j_s} \rangle - \int_U B(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi}^{j_s} \right| \\ &\quad + \left| \int_U B(\vec{u}) \cdot \left(\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s} \right) \right| = J_1 + J_2 + J_3 + J_4\,. \end{aligned}$$

Mas,
$J_1 \longrightarrow 0$, quando $s \to \infty$, pois $\mathfrak{F}(\vec{u}) \in W^{-1,2}(U)$.
$J_2 = \left| \langle \chi, \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s} \rangle \right| \leq \|\chi\|_{\left(\mathcal{D}_0^{1,p}(U)\right)'} \left| \vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s} \right|_{1,p} \longrightarrow 0$, quando $s \to \infty$.
$J_3 = 0$ por (2.33).

$$\begin{aligned} J_4 \ &= \ \left| \int_U B(\vec{u}) \cdot (\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s}) \right| \leq \left| \left(\vec{u} \cdot \nabla(\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s}), \vec{u} \right) \right| + \left| \left(\vec{u} \cdot \nabla(\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s}), \vec{\mathrm{a}} \right) \right| \\ &\quad + \left| \left(\vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla(\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s}), \vec{u} \right) \right| + \left| \left(\vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla(\vec{\varphi} - \vec{\varphi}^{j_s}), \vec{\mathrm{a}} \right) \right| \\ &= \ I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Analisaremos então $I_i,\ i = 1, 2, 3, 4.$

$$\begin{aligned} I_1 &= \left|\left(\vec{u}\cdot\nabla(\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}),\vec{u}\right)\right| \le \left|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}\right|_{1,p}\left(\int_U \left|\vec{u}\right|^{(2p)/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} \\ &\le c\left|\vec{u}\right|_{1,p}^{p-1}\left|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}\right|_{1,p} \le c(\vec{u})\left|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}\right|_{1,p} \longrightarrow 0\,, \end{aligned} \tag{2.36}$$

onde na segunda desigualdade usamos imersão de Sobolev, uma vez que para $n > p,\ \dfrac{2p}{p-1} < p^* = \dfrac{np}{n-p} \Leftrightarrow p \ge \dfrac{3n}{n+2}$, e isto, para $n = 3$, é sempre verdade pois $p > 2 > \frac{9}{5} = \frac{3.3}{3+2}$; para $n = 2$ a imersão é trivial. Procedendo similarmente, só que em vez de imersão de Sobolev, usamos a Observação 3, obtemos

$$\begin{aligned} I_2 &= \left|\left(\vec{u}\cdot\nabla(\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}),\vec{\text{a}}\right)\right| \le \left|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}\right|_{1,p}\left(\int_U \left|\vec{u}\right|^{p'}|\vec{\text{a}}|^{p'}\right)^{1/p'} \\ &\le c\left|\vec{u}\right|_{1,p}\left|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}\right|_{1,p} \le c(\vec{u})\left|\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}\right|_{1,p} \longrightarrow 0\,. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Analogamente a (2.37) e (2.36),

$$I_3 = \left|\left(\vec{\text{a}}\cdot\nabla(\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}),\vec{u}\right)\right| \longrightarrow 0 \tag{2.38}$$

$$I_4 = \left|\left(\vec{\text{a}}\cdot\nabla(\vec{\varphi}-\vec{\varphi}^{j_s}),\vec{\text{a}}\right)\right| \longrightarrow 0\,. \tag{2.39}$$

Assim, de (2.35) − (2.39), vem

$$J_4 \quad\longrightarrow\quad 0\,.$$

E assim, temos a validade de (2.34). Como queríamos.

6. Note que para concluir a demonstração desta proposição basta mostrar que $\chi = A\vec{u}$.

6.1. Para este fim, começaremos mostrando que

$$\langle\mathfrak{F}(\vec{u}^{m_k}),\vec{u}^{m_k}\rangle + \langle A\vec{u}^{m_k},\vec{u}^{m_k}\rangle \longrightarrow \langle\mathfrak{F}(\vec{u}),\vec{u}\rangle + \langle\chi,\vec{u}\rangle. \tag{2.40}$$

Provaremos (2.40) em cinco passos:
6.1.1.

$$\int_U \left|B(\vec{u}^{m_k})\right|^{p'} \le c \parallel \vec{u} \parallel_{1,p}\,. \tag{2.41}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_U \left|B(\vec{u}^{m_k})\right|^{p'} &\leq c\left(\int_U \left|\vec{u}^{m_k}\cdot\nabla\vec{u}^{m_k}\right|^{p'} + \int_U \left|\vec{u}^{m_k}\cdot\nabla\vec{\mathrm{a}}\right|^{p'} + \int_\Omega \left|\vec{\mathrm{a}}\cdot\nabla\vec{u}^{m_k}\right|^{p'}\right.\\
&\quad \left. + \int_U \left|\vec{\mathrm{a}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{a}}\right|^{p'}\right) \leq c\left(|\vec{u}^{m_k}|_{1,p} \parallel \vec{u}^{m_k} \parallel_{1,p} + |\vec{\mathrm{a}}|_{1,p} \parallel \vec{u}^{m_k} \parallel_{1,p}\right.\\
&\quad \left. + |\vec{u}^{m_k}|_{1,p} \parallel \vec{\mathrm{a}} \parallel_{1,p} + |\vec{\mathrm{a}}|_{1,p} \parallel \vec{\mathrm{a}} \parallel_{1,p}\right)\\
&\leq c \parallel \vec{u} \parallel_{1,p},
\end{aligned}$$

onde na primeira desigualdade usamos (1.2), na segunda a Observação 2 para $2 < p < 3n/(n+1)$ e a mesma observação só que com a Desigualdade de Hölder com $q = p/p'$ para $p \geq 3n/(n+1)$ e na última a Afirmação 2.

6.1.2. De (2.31) e (2.41) obtemos

$$\int_U B(\vec{u}^{m_k})\cdot\vec{u} \longrightarrow \int_U B(\vec{u})\cdot\vec{u}. \tag{2.42}$$

6.1.3. Enquanto, de (2.22), (2.29), (2.41) e (2.42),

$$\langle\mathfrak{F}(\vec{u}^{m_k}), \vec{u}^{m_k}\rangle + \langle A(\vec{u}^{m_k}), \vec{u}^{m_k}\rangle \longrightarrow \int_U B(\vec{u})\cdot\vec{u}. \tag{2.43}$$

6.1.4. Sem muita dificuldade, mostra-se que (2.34) vale para $\vec{u}$ no lugar de $\vec{\varphi}$, isto é,

$$\langle\mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{u}\rangle + \langle\chi, \vec{u}\rangle = \int_U B(\vec{u})\cdot\vec{u}. \tag{2.44}$$

6.1.5. Por fim, (2.43) e (2.44) nos dá (2.40). Como queríamos.

6.2. De (1.4) e da linearidade de $\mathfrak{F}$, facilmente obtemos que $\mathfrak{F} + A$ é monótona, isto é,

$$\langle(\mathfrak{F}+A)(\vec{w}_1) - (\mathfrak{F}+A)(\vec{w}_2), \vec{w}_1 - \vec{w}_2\rangle \geq 0\ , \forall\, \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U). \tag{2.45}$$

Agora, tomando $\vec{w}_1 = \vec{u}^{m_k}$ e $\vec{w}_2 = \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U)$ em (2.45), obtemos

$$\langle(\mathfrak{F}+A)(\vec{u}^{m_k}), \vec{u}^{m_k}\rangle - \langle(\mathfrak{F}+A)(\vec{u}^{m_k}), \vec{w}\rangle - \langle(\mathfrak{F}+A)(\vec{w}), \vec{u}^{m_k}\rangle + \langle(\mathfrak{F}+A)(\vec{w}), \vec{w}\rangle \geq 0. \tag{2.46}$$

Tomando o limite em (2.46), devido à (2.29_1), (2.30) e (2.40),

$$\langle\mathfrak{F}(\vec{u}) + \chi - \mathfrak{F}(\vec{w}) - A\vec{w}, \vec{u} - \vec{w}\rangle \geq 0\ , \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U), \tag{2.47}$$

e assim, fazendo em (2.47), $\vec{w} = \vec{u} - \lambda\vec{w}_1$ com $\vec{w}_1 \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U)$, e $\lambda > 0$, temos

$$\langle \chi - \lambda\mathfrak{F}(\vec{w}_1) - A(\vec{u} - \lambda\vec{w}_1), \vec{w}_1\rangle \geq 0.$$

Daí, fazendo $\lambda \to 0$ obtemos

$$\langle \chi - A\vec{u}, \vec{w}_1\rangle \geq 0 \tag{2.48}$$

e tomando $-\vec{w}_1$ no lugar de $\vec{w}_1$ em (2.48), temos

$$\langle \chi - A\vec{u}, \vec{w}_1\rangle \leq 0\,. \tag{2.49}$$

Ora, (2.48) e (2.49) implicam

$$\langle \chi - A\vec{u}, \vec{w}_1\rangle = 0$$

que, pela arbitrariedade de $\vec{w}_1 \in \mathcal{D}_0^{1,p}(U)$, nos conduz à $\chi = A\vec{u}$. Assim concluímos o ponto 6.

Os 6 pontos mostrados acima, garantem que tomando o limite em (2.22) e tomando $\vec{\varphi}$ qualquer em $\mathcal{D}(U)$ obtemos

$$\langle \mathfrak{F}(\vec{u}), \vec{\varphi}\rangle + \langle A\vec{u}, \vec{\varphi}\rangle = \int_U B(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi}\,,\ \forall\, \vec{\varphi} \in \mathcal{D}(U).$$

Isto conclui a prova do teorema.

$\square$

O próximo resultado é sobre a regularidade da solução $\vec{u}$ do problema (2.19).

Teorema 2 . Sejam $n = 3$, $\vec{u}$ solução de (2.19), para $2 < p \leq 3$, e p a pressão associada a $\vec{u}$. Então $\vec{u} \in W^{2,l}(U)$ e p $\in W^{1,r}(U)$, com

$$l = \frac{12 - 3p}{5 - p} \quad \text{e} \quad r = \frac{24 - 6p}{8 - p}.$$

Para prova deste teorema, veja os Teoremas 2.3, 2.4 e a observação 3.2 de [4].

Observação 4 . Para o caso $n = 2$, temos para $p > 2$, $\vec{u} \in W^{2,p}(U)$ e p $\in W^{1,p}(U)$ (veja Teorema 6.1 de [22]), no entanto, este resultado é para $\vec{u} = 0$ em ∂U. Não temos certeza sobre a validade deste resultado para $\vec{u} = \vec{u}_0$ em ∂U.

2.3 Existência e Unicidade

Nesta seção apresentaremos resultados de existência e unicidade para o problema (2.1). Para esse fim consideremos o seguinte problema modificado:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\left\{\frac{1}{T} + \left|D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right]\right\} &= \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{a} + \vec{a}\cdot\nabla\vec{u} \\
&\quad + \vec{a}\cdot\nabla\vec{a} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega_T \\
\nabla\cdot\vec{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega_T \\
\vec{u} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega_T \\
\int_\Sigma \vec{u}\cdot\vec{n} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Pelo Teorema 1, temos que existe uma solução fraca, $\vec{u}^T \in W_0^{1,p}(\Omega_T)$, para o problema acima. No lema abaixo apresentamos algumas identidades integrais para a solução do problema (2.50), com $\mathrm{p}^T \in L^p(\Omega_T)$ sendo a pressão associada à solução $\vec{u}^T$.

Lema 13 . Para $t + 1 < T$ vale:

(i) $\displaystyle\int_{\Omega_t} \vec{u}^T\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{u}^T = \int_{\partial\Omega_t} \frac{|\vec{u}^T|^2}{2}\left(\vec{u}^T\cdot\vec{n}\right);$

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega_t} \vec{u}^T\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T = -\int_{\Omega_t} \vec{u}^T\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{a} + \int_{\partial\Omega_t}\left(\vec{u}^T\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{u}^T\cdot\vec{n}\right);$

(iii) $\displaystyle\int_{\Omega_t} \nabla\mathrm{p}^T\cdot\vec{u}^T = \int_{\partial\Omega_t} \mathrm{p}^T\left(\vec{u}^T\cdot\vec{n}\right);$

(iv)
$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega_t}\operatorname{div}\left\{\left(\frac{1}{T} + \left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\right)\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right]\right\}\cdot\vec{u}^T = \\
&\frac{1}{T}\int_{\Omega_t}\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right] : D(\vec{u}^T) + \int_{\Omega_t}\left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right] : D(\vec{u}^T) \\
&-\int_{\partial\Omega_t}\vec{u}^T\cdot\left\{\left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right]\right\}\cdot\vec{n} \\
&-\frac{1}{T}\int_{\partial\Omega_t}\vec{u}^T\cdot\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right]\cdot\vec{n}\,.
\end{aligned}
$$

Prova: Cálculos diretos.

Segundo o Teorema 2, temos regularidade suficiente para multiplicar (2.50_1) por $\vec{u}^T$ e integrar por partes em Ω_t, para $t+1 \leq T$. Assim, pelo Lema 13 obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_{\Omega_t}\left|D(\vec{u}^T)\right|^2 + \int_{\Omega_t}\left|D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right] : D(\vec{u}^T) = \\
&-\int_{\Omega_t} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T) + \int_{\Omega_t}\left(\vec{u}^T\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{u}^T - \vec{a}\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T\right) \\
&\int_{\partial\Omega_t}\left(\vec{u}^T\cdot\left[D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right]\cdot\vec{n} + \vec{u}^T\cdot\left\{\left|D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right]\right\}\cdot\vec{n}\right) \\
&-\int_{\partial\Omega_t}\left[\frac{|\vec{u}^T|^2}{2}\left(\vec{u}^T\cdot\vec{n}\right) + \left(\vec{u}^T\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{u}^T\cdot\vec{n}\right) + \mathrm{p}^T\left(\vec{u}^T\cdot\vec{n}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Estimaremos primeiro as integrais de (2.51) em Ω_t. Usando a Desigualdade de Young com ε, vem

$$-\int_{\Omega_t} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T) \leq \frac{\varepsilon_1}{T}\int_{\Omega_t}\left|D(\vec{u}^T)\right|^2 + c(\varepsilon_1)\,. \tag{2.52}$$

Agora, usando a Observação 3 e a Desigualdade de Young com ε, novamente, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_t}\vec{u}^T\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{a}\right| &\leq \left|\vec{u}^T\right|_{1,p,\Omega_t}\left(\int_{\Omega_t}\left|\vec{a}\right|^{p'}\left|\vec{u}^T\right|^{p'}\right)^{1/p'} \\
&\leq ct^{(p-2)/p}\left|\vec{u}^T\right|^2_{1,p,\Omega_t} \leq \varepsilon_2\left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} + c(\varepsilon_2)t\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\int_{\Omega_t}\vec{u}^T\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{a}\right| \leq \varepsilon_2\left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} + c(\varepsilon_2)t\,. \tag{2.53}$$

Analogamente se obtém

$$\left|\int_{\Omega_t}\vec{a}\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{u}^T\right| \leq \varepsilon_3\left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} + c(\varepsilon_3)t\,. \tag{2.54}$$

Procedendo como em (2.53) e, além disso, usando (a_6), temos

$$\left|\int_{\Omega_t}\vec{a}\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T\right| \leq \varepsilon_4\left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} + c(\varepsilon_4)t\,, \tag{2.55}$$

$$\left|\int_{\Omega_t}\left|D(\vec{a})\right|^{p-2}D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T)\right| \leq \varepsilon_5\left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} + c(\varepsilon_5)t\,. \tag{2.56}$$

Ainda, procedendo como em (2.28) resulta

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t} \left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right] : D(\vec{u}^T) \geq \\ &c_p \left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} + \int_{\Omega_t} \left|D(\vec{a})\right|^{p-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T).\end{aligned} \tag{2.57}$$

Assim, de (2.51) − (2.57), para $\varepsilon_j \ll 1,\ \ j = 1, 2, 3, 4$ e 5, obtemos

$$y(t) \equiv \frac{1}{T}\left|\vec{u}^T\right|^2_{1,2,\Omega_t} + \left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} \leq c_1 t + I\,, \tag{2.58}$$

onde

$$\begin{aligned} I \ = \ & \int_{\partial\Omega_t}\Bigg[\frac{1}{T}\vec{u}^T \cdot \left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right] \cdot \vec{n} + \vec{u}^T \cdot \left\{\left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right]\right\} \cdot \vec{n} \\ & -\frac{|\vec{u}^T|^2}{2}\left(\vec{u}^T \cdot \vec{n}\right) - \left(\vec{u}^T \cdot \vec{a}\right)\left(\vec{u}^T \cdot \vec{n}\right) - \mathrm{p}\left(\vec{u}^T \cdot \vec{n}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{2.59}$$

Observação 5 . Aqui é necessário (a_5), pois se aplicarmos a Desigualdade de Hölder como na Observação 2 obteremos, por exemplo, para o caso $n = 3$, $\frac{9}{4} < p < 3$

$$\left|\left(\vec{u}^T \cdot \nabla\vec{u}^T, \vec{a}\right)\right| \leq \varepsilon\left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_t} + ct^{\frac{p(2p+3)}{3p(p-2)}}\,,$$

mas $\dfrac{p(2p+3)}{3p(p-2)} \leq 1 \ \Leftrightarrow\ p \geq 9$, que não é o caso.

A fim de estimarmos o termo de fronteira I, integramos (2.58) em relação a t de $\eta - 1$ a η, para $1 \leq \eta \leq T$, e obtemos

$$z(\eta) \equiv \int_{\eta-1}^{\eta} y(t)\,dt \leq 2c_1\eta + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5\,, \tag{2.60}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{T}\int_{\partial\Omega_t} \vec{u}^T \cdot \left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right] \cdot \vec{n} \\ I_2 &= \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \vec{u}^T \cdot \{\left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right]\} \cdot \vec{n} \\ I_3 &= -\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \frac{|\vec{u}^T|^2}{2}\left(\vec{u}^T \cdot \vec{n}\right) \\ I_4 &= -\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \left(\vec{u}^T \cdot \vec{a}\right)\left(\vec{u}^T \cdot \vec{n}\right) \\ I_5 &= -\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \mathrm{p}\left(\vec{u}^T \cdot \vec{n}\right).\end{aligned}$$

Para $\eta \geq 1$ temos

$$y(\eta - 1) \leq z(\eta) \leq y(\eta)\,, \tag{2.61}$$

ainda

$$z'(\eta) = \frac{1}{T}\left|\vec{u}^T\right|^2_{1,2,\Omega_{\eta-1,\eta}} + \left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}}\,.$$

Agora estimaremos os termos $I_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ e 5. Usando (1.9) e (a_4), obtemos, para $i = 1, 2$ com $q = 2,\ p$, respectivamente,

$$\begin{aligned}
|I_i| &\leq \varsigma(q)\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}}\left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{q-1}\left|\vec{u}^T\right| \\
&\leq c\varsigma(q)\left(\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}}\left|D(\vec{u}^T)\right|^{q-1}\left|\vec{u}^T\right| + \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}}\left|D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{q-1}\left|\vec{u}^T\right|\right) \\
&\leq c\varsigma(q)\left(\left|\vec{u}^T\right|^{q-1}_{1,q,\Omega_{\eta-1,\eta}}\left\|\vec{u}^T\right\|_{q,\Omega_{\eta-1,\eta}} + \left|\vec{\mathrm{a}}\right|^{q-1}_{1,q,\Omega_{\eta-1,\eta}}\left\|\vec{u}^T\right\|_{q,\Omega_{\eta-1,\eta}}\right) \\
&\leq c\varsigma(q)\left(\left|\vec{u}^T\right|^{q}_{1,q,\Omega_{\eta-1,\eta}} + \left|\vec{u}^T\right|_{1,q,\Omega_{\eta-1,\eta}}\right) = c\left(z'(\eta) + (z'(\eta))^{1/q}\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\varsigma(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{T} & ,\quad q = 2 \\ 1 & ,\quad q = p\,. \end{cases}$$

Assim,

$$|I_i| \leq c\left(z'(\eta) + (z'(\eta))^{1/q}\right), \quad i = 1,\ 2\,,\ q = 2,\ p\,. \tag{2.62}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
|I_3| + |I_4| &\leq \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}}\frac{\left|\vec{u}^T\right|^3}{2} + \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}}\left|\vec{u}^T\right|^2\left|\vec{\mathrm{a}}\right| \\
&\leq c\left\|\vec{u}^T\right\|^3_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}} + \left(\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}}\left|\vec{u}^T\right|^{p^*}\right)^{2/p^*}\left(\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}}\left|\vec{\mathrm{a}}\right|^{\frac{p^*}{p^*-2}}\right)^{\frac{p^*-2}{p^*}} \\
&\leq c\left\|\vec{u}^T\right\|^3_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}} + \left\|\vec{u}^T\right\|^2_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}}\left\|\vec{\mathrm{a}}\right\|_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}} \\
&\leq c\left(\left|\vec{u}^T\right|^3_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}} + \left|\vec{\mathrm{a}}\right|_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}}\left|\vec{u}^T\right|^2_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}}\right) \\
&\leq c\left(\left|\vec{u}^T\right|^3_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}} + \left|\vec{u}^T\right|^2_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}}\right) = c\left((z'(\eta))^{2/p} + (z'(\eta))^{3/p}\right),
\end{aligned}$$

onde, além de usarmos (1.9) e (a_4), usamos também Imersão de Sobolev, pois

$$\frac{p^*}{p^* - 2} \leq p^* \ \Leftrightarrow\ p^* \geq 3 \ \Leftrightarrow\ p \geq \frac{3n}{n+3}\,.$$

Assim,

$$|I_3| + |I_4| \leq c\left((z'(\eta))^{2/p} + (z'(\eta))^{3/p}\right). \tag{2.63}$$

Para estimar o termo I_5, observamos que o problema

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{w} = \vec{u}^T \cdot \vec{\mathrm{n}} \quad \text{em } \Omega_{\eta-1,\eta} \\ \vec{w} \in W_0^{1,p}(\Omega_{\eta-1,\eta}) \\ \left\|\vec{w}\right\|_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}} \leq c\left\|\vec{u}^T \cdot \vec{\mathrm{n}}\right\|_{p,\Omega_{\eta-1,\eta}} \end{array}\right. \tag{2.64}$$

admite solução, segundo o Lema 7, visto que a condição de compatibilidade $\displaystyle\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \vec{u}^T \cdot \vec{\mathrm{n}} = 0$ é satisfeita.

Usando (2.50_1) e (2.64), escrevemos

$$\begin{aligned} |I_5| \quad \leq \quad & \left|\int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \left(\frac{1}{T} + \left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{p-2}\right)\left[D(\vec{u}^T) + D(\vec{\mathrm{a}})\right] : D(\vec{w})\right. \\ & + \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \vec{u}^T \cdot \nabla\vec{u}^T \cdot \vec{w} + \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \vec{u}^T \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{w} \\ & \left. + \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{u}^T \cdot \vec{w} + \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{w}\right|. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Agora estimamos os termos de (2.65) procedendo como na obtenção de (2.62) – (2.63) e usando (2.64) e a Observação 2, donde vem

$$|I_5| \leq c\left(z'(\eta) + (z'(\eta))^{1/p} + (z'(\eta))^{2/p} + (z'(\eta))^{3/p}\right). \tag{2.66}$$

Por fim, de (2.60), (2.62) – (2.63) e (2.66), segue

$$z(\eta) \leq 2c_1\eta + c_2\left(z'(\eta) + [z'(\eta)]^{1/2} + [z'(\eta)]^{1/p} + [z'(\eta)]^{2/p} + [z'(\eta)]^{3/p}\right), \quad 1 \leq \eta \leq T. \tag{2.67}$$

Lema 14 . Existem constantes c_5 e c_6, independentes de t e T, tais que

$$\left|\vec{u}^T\right|^p_{1,p,\Omega_{t-1}} \leq c_5 t + c_6\,, \quad \forall\, t \in [1,T]\,. \tag{2.68}$$

Prova: Mostraremos primeiro que existe uma constante $c_3 > 2c_1$ (onde c_1 é a constante de (2.67)), independente de T, tal que

$$y(T) \leq c_3 T\,. \tag{2.69}$$

Para isto, multiplicamos (2.50_1) por $\vec{u}^T$ e integramos em Ω_T, para obtermos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_{\Omega_T}\left|D(\vec{u}^T)\right|^2 + \int_{\Omega_T}\left|D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right] : D(\vec{u}^T) = \\
&-\frac{1}{T}\int_{\Omega_T} D(\vec{u}^T) : D(\vec{a}) - \left(\vec{u}^T\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T\right) - \left(\vec{a}\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T\right).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Usando (1.4), vem

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T}\left|D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right|^{p-2}\left[D(\vec{u}^T)+D(\vec{a})\right] : D(\vec{u}^T) \geq\ & c_p\int_{\Omega_T}\left|D(\vec{u}^T)\right|^p \\
&+\int_{\Omega_T}\left|D(\vec{a})\right|^{p-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T)\,,
\end{aligned}$$

que de (2.70) e de (1.8) nos leva à

$$\begin{aligned}
y(T) \ \leq\ & c\left\{\frac{1}{T}\left|\int_{\Omega_T} D(\vec{u}^T) : D(\vec{a})\right| + \left|\left(\vec{u}^T\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T\right)\right| + \left|\left(\vec{a}\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T\right)\right|\right. \\
&\left. + \left|\int_{\Omega_T}\left|D(\vec{a})\right|^{p-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T)\right|\right\}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Agora, estimando os temos do lado direito de (2.71) como em (2.52) − (2.56) (Obviamente para $T \gg 1$), temos (2.69). Como queríamos.

Agora, de (2.69), devido à (2.61), obtemos $z(T) \leq c_3 T$. Tomando agora $\varphi(\eta) = \dfrac{c_3\eta + c_4}{1-\delta_1}$, $\delta_1 \in (0,1)$ temos $z(T) \leq \varphi(T)$ e $2c_1\eta \leq (1-\delta_1)\varphi(\eta)$. Assim, de (2.67)

$$\begin{aligned}
&z(\eta) \leq (1-\delta_1)\varphi(\eta) + \Psi(z'(\eta)) \quad 1 \leq \eta \leq T \\
&z(T) \leq \varphi(T)\,,
\end{aligned}$$

onde $\Psi(\tau) := c_2(\tau + \tau^{1/2} + \tau^{1/p} + \tau^{2/p} + \tau^{3/p})$, $\tau > 0$ (c_2 é a constante de (2.67)).

Para obtermos todas as hipóteses do Lema 1, precisamos tomar as constantes c_3 e c_4 tais que

$$\varphi(\eta) \geq \delta_1^{-1}\Psi(\varphi'(\eta))\,, \quad \forall\,\eta \in [1,T]. \tag{2.72}$$

Ora, isto é simples visto que φ' é constante e φ é crescente, logo basta escolhermos $c_3,\ c_4$ de modo que (2.72) valha para $\eta = 1$.

Assim $z,\ \Psi$ e φ verificam as hipóteses do Lema 1. Portanto, pela parte 1 do mesmo lema, concluímos que

$$z(\eta) \leq \varphi(\eta)\ , \quad \forall\, \eta \in [1, T]\,,$$

o que por sua vez, segundo (2.61), implica (2.68).

□

Agora provaremos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3 . Para $n = 3$ e

$$2 < p \leq 3, \tag{2.73}$$

o problema (2.1) possui uma solução fraca $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}$.

Prova: Consideremos a sequência crescente de domínios, $\Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_k \subset \cdots$, tal que

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k\,.$$

Seja $\vec{u}^k$ solução fraca em Ω_k, conforme o Teorema 1. Assim, de (2.68), temos

$$\int_{\Omega_r} |\nabla \vec{u}^k|^p \leq c_5 r + c_6\ , \quad \forall\, r \in \mathbb{N}\,,\ r + 1 \leq k, \tag{2.74}$$

onde c_5 e c_6 independem de r e k. Portanto, para cada r fixado existe uma subsequência $\{\vec{u}^{k_j}\}$ de $\{\vec{u}^k\}$ e $\vec{u}_r \in W^{1,p}(\Omega_r)$, tais que

$$\begin{array}{lll} \vec{u}^{k_j} \rightharpoonup \vec{u}_r & \text{em} & W^{1,p}(\Omega_r) \\ \vec{u}^{k_j} \to \vec{u}_r & \text{em} & L^p(\Omega_r). \end{array} \tag{2.75}$$

Tomando subsequência de subsequência e observando que $\vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2}$ em Ω_{r_1}, para $r_2 \geq r_1$, definindo $\vec{u} = \vec{u}_r$ em Ω_r, temos que existe uma subsequência final convergindo fraco para $\vec{u}$ em $W^{1,p}_{loc}(\overline{\Omega})$.

Resta agora, mostrar que $\vec{u}$ é solução fraca de (2.16). Facilmente vemos que $\vec{u}$ satisfaz $(2.16_2) - (2.16_4)$, enquanto (2.16_5) é garantido pela Proposição III.5(iii) de [9] e (2.74). Já a prova de que $\vec{u}$ satisfaz (2.18), será mais trabalhosa e contará, novamente, com o método de Browder-Minty.

Dado $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{supp} \vec{\varphi} \subset \Omega_{k_0-1}$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, $\vec{u}^k$ satisfaz (2.20) com $\vec{\varphi}$, isto é,

$$\int_{\Omega_{k_0}} S_k(\vec{u}^k) : D(\vec{\varphi}) = \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k) \cdot \vec{\varphi}, \tag{2.76}$$

onde

$$S_k(\vec{w}) \equiv \left(\frac{1}{k} + \left|D(\vec{w}) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\right)[D(\vec{w}) + D(\vec{a})].$$

Denotaremos ainda

$$S(\vec{w}) \equiv \left|D(\vec{w}) + D(\vec{a})\right|^{p-2}[D(\vec{w}) + D(\vec{a})].$$

Consideremos agora a função suave $\zeta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$, tal que $\zeta = 1$ em $\operatorname{supp} \vec{\varphi}$ e $\zeta = 0$ em $\Omega \setminus \Omega_{k_0}$. Denotemos

$$V_0 \equiv W^{1,p}(\Omega_{k_0}, \partial\Omega \cap \partial\Omega_{k_0}) = \left\{\vec{w} \in W^{1,p}(\Omega_{k_0})\,;\, \vec{w} = 0 \text{ em } \partial\Omega \cap \partial\Omega_{k_0}\right\},$$

e definamos os operadores

$$A_\zeta,\ A_{\zeta,k}\ :\ V_0\ \longrightarrow\ V_0^*,$$

por

$$\begin{aligned}\langle A_{\zeta,k}\vec{w}_1, \vec{w}_2\rangle &\equiv \int_{\Omega_{k_0}} S_k(\vec{w}_1) : D(\vec{w}_2)\zeta\\ \langle A_\zeta\vec{w}_1, \vec{w}_2\rangle &\equiv \int_{\Omega_{k_0}} S(\vec{w}_1) : D(\vec{w}_2)\zeta.\end{aligned}$$

Facilmente verificamos que $A_{\zeta,k}$ está bem definido e, como $\zeta \geq 0$ temos, devido à (1.4), $A_{\zeta,k}$ monótono. Agora, aplicamos a Desigualdade de Hölder e (2.74), para obtermos $\left\{A_{\zeta,k}\vec{u}^k\right\}$ limitado em V_0^* (uniformemente em relação à k). Daí, existe $\chi_\zeta \in V_0^*$ tal que, a menos de subsequência,

$$A_{\zeta,k}\vec{u}^k \ \stackrel{*}{\rightharpoonup}\ \chi_\zeta \ \text{ em } V_0^*. \tag{2.77}$$

Devido à monotonicidade de $A_{\zeta,k}$, temos para todo $\vec{w} \in V_0$

$$\langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{u}^k\rangle - \langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{w}\rangle - \langle A_{\zeta,k}\vec{w}, \vec{u}^k\rangle + \langle A_{\zeta,k}\vec{w}, \vec{w}\rangle \geq 0 \tag{2.78}$$

De (2.77), (2.74) e (2.75_1), temos

$$\begin{aligned}\langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{w}\rangle &\longrightarrow \langle \chi_\zeta, \vec{w}\rangle\\ \langle A_{\zeta,k}\vec{w}, \vec{u}^k\rangle &\longrightarrow \langle A_\zeta\vec{w}, \vec{u}\rangle.\end{aligned} \tag{2.79}$$

Mostraremos agora que

$$\langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{u}^k\rangle \longrightarrow \langle \chi_\zeta, \vec{u}\rangle. \tag{2.80}$$

Primeiramente, com $\vec{u}^k$ é solução fraca de (2.50), multiplicamos (2.50_1) por $\zeta\vec{u}$ (aqui estamos usando o Teorema 2, donde advém a hipótese (2.73) sobre p) e integramos em Ω_{k_0}, daí

$$\begin{aligned}\langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{u}\rangle &= \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k)\cdot(\zeta\vec{u}) - \int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}^k\vec{u}\cdot\nabla\zeta - \frac{1}{2}\int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot S(\vec{u}^k)\cdot\nabla\zeta \\ &\quad -\frac{1}{k}\left(\int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot D(\vec{u}^k)\cdot\nabla\zeta + \int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot D(\vec{\mathrm{a}})\cdot\nabla\zeta\right),\end{aligned} \tag{2.81}$$

onde p^k é a pressão referente à solução $\vec{u}^k$. Ora, de (2.16_5), (1.9) e (a_6) vem

$$\frac{1}{k}\left(\int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot D(\vec{u}^k)\cdot\nabla\zeta + \int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot D(\vec{\mathrm{a}})\cdot\nabla\zeta\right) \le \frac{c(k_0)}{k} \longrightarrow 0\,. \tag{2.82}$$

E, de (2.74) e (a_6), temos

$$\int_{\Omega_{k_0}} \left|S(\vec{u}^k)\right|^{p'} \le c\,.$$

Daí, existe $\chi_{p'} \in L^{p'}(\Omega_{k_0})$, tal que

$$S(\vec{u}^k) \rightharpoonup \chi_{p'} \ \text{ em } \ L^{p'}(\Omega_{k_0}).$$

O que implica

$$\int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot S(\vec{u}^k)\cdot\nabla\zeta \longrightarrow \int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot\chi_{p'}\cdot\nabla\zeta\,. \tag{2.83}$$

Também, de (2.77)

$$\langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{u}\rangle \longrightarrow \langle \chi_\zeta, \vec{u}\rangle\,. \tag{2.84}$$

Falta verificarmos ainda, a convergência de dois termos de (2.81). Para o primeiro termo, do lado direito, temos

$$\int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k)\cdot(\zeta\vec{u}) \longrightarrow \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u})\cdot(\zeta\vec{u}). \tag{2.85}$$

De fato, vamos verificar a convergência para um dos termos de $\displaystyle\int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k)\cdot(\zeta\vec{u})$, pois os demais seguem analogamente. Mostremos então que

$$(\vec{u}^k\cdot\nabla\vec{u}^k, \zeta\vec{u})_{\Omega_{k_0}} \longrightarrow (\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}, \zeta\vec{u})_{\Omega_{k_0}}. \tag{2.86}$$

Ora

$$
\begin{aligned}
\left|(\vec{u}^k \cdot \nabla \vec{u}^k, \zeta \vec{u})_{\Omega_{k_0}} - (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}, \zeta \vec{u})_{\Omega_{k_0}}\right| \quad \leq & \quad \left| \int_{\Omega_{k_0}} (\vec{u}^k - \vec{u}) \cdot \nabla \vec{u}^k \cdot \zeta \vec{u} \right| \\
& + \left| \int_{\Omega_{k_0}} \vec{u} \cdot (\nabla \vec{u}^k - \nabla \vec{u}) \cdot \zeta \vec{u} \right|.
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

Verificaremos primeiro a convergência do último termo de (2.87). para isto, definamos

$$T_{\vec{u}} \, : L^p(\Omega_{k_0}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

por

$$T_{\vec{u}} \vec{w} = \int_{\Omega_{k_0}} \vec{u} \cdot \vec{w} \cdot \zeta \vec{u}.$$

Devemos mostrar que $T_{\vec{u}} \in L^{p'}(\Omega_{k_0})$. Para isto consideremos dois casos:
$p = 3$: Este é o caso mais simples, pois podemos aplicar a Desigualdade de Hölder, apropriadamente, e obter

$$\left|T_{\vec{u}} \vec{w}\right| \leq c \left\|\vec{u}\right\|^2_{1,p,\Omega_{k_0}} \left\|\vec{w}\right\|_{p,\Omega_{k_0}} .$$

$2 < p < 3$: Pelo Teorema de Imersão de Sobolev

$$\left\|\vec{u}\right\|_{r,\Omega_{k_0}} \leq c \left\|\vec{u}\right\|_{1,p,\Omega_{k_0}} \;, \quad r \in [1, p^*].$$

Como $2p' \leq p^* \Leftrightarrow p \geq 9/5$, daí temos $\vec{u} \in L^{2p'}(\Omega_{k_0})$ e assim, aplicando a Desigualdade de Hölder vem

$$\left|T_{\vec{u}} \vec{w}\right| \leq c \left\|\vec{u}\right\|^2_{2p',\Omega_{k_0}} \left\|\vec{w}\right\|_{p,\Omega_{k_0}} \leq c \left\|\vec{u}\right\|^2_{1,p,\Omega_{k_0}} \left\|\vec{w}\right\|_{p,\Omega_{k_0}} .$$

Assim, concluimos a prova de que $T_{\vec{u}} \in L^{p'}(\Omega_{k_0})$ e, portanto, devido à (2.75), temos que o último termo de (2.87) converge para zero. agora checaremos a convergência do primeiro termo de (2.87). Como antes, consideraremos os casos $p = 3$ e $2 < p < 3$, separadamente.
$p = 3$: Este é o caso mais simples, pois aplicamos a Desigualdade de Hölder e usamos (2.75) para obter a convergência para zero.
$2 < p < 3$: Como antes, devido à (2.74), pelo Teorema de Compacidade de Rellich-Kondrachov (ver [16]), temos que, a menos de subsequência,

$$\vec{u}^k \longrightarrow \vec{u} \quad \text{em } L^r(\Omega_{k_0}), \quad r \in [1, p^*). \tag{2.88}$$

Agora, aplicando a Desigualdade de Hölder

$$\left|\int_{\Omega_{k_0}} (\vec{u}^k - \vec{u}) \cdot \nabla \vec{u}^k \cdot \zeta \vec{u}\right| \leq c \left|\vec{u}^k\right|_{1,p,\Omega_{k_0}} \left\|\vec{u}^k - \vec{u}\right\|_{p_1,\Omega_{k_0}} \left\|\vec{u}\right\|_{p_2,\Omega_{k_0}}, \tag{2.89}$$

onde $1 \leq p_1 < p^*$ e $1 \leq p_2 \leq p^*$, devido ao Teorema de Imersão de Sobolev, isto é possível, pois

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p'}\ , \quad p_1 < p^* = \frac{3p}{3-p}\ , \quad p_2 \leq p^* = \frac{3p}{3-p} \quad \Longleftrightarrow \quad p \geq \frac{9}{5}.$$

Assim, devido à (2.74) e (2.88), temos que (2.89) converge para zero. Assim, concluímos que o primeiro termo de (2.87) converge para zero e, por conseguinte, concluímos a prova de (2.86), como desejávamos para a obtenção de (2.85).

Falta apenas verificar a convergência

$$\int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}^k \vec{u} \cdot \nabla\zeta \ \longrightarrow \ \int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}\, \vec{u} \cdot \nabla\zeta, \tag{2.90}$$

onde p é a pressão associada à $\vec{u}$. Para este intúito basta mostrar que existe $\mathrm{p} \in L^{p'}(\Omega_{k_0})$ tal que

$$\mathrm{p}^k \ \rightharpoonup \ \mathrm{p} \ \text{ em } \ L^{p'}(\Omega_{k_0}). \tag{2.91}$$

Primeiro comecemos observando que p^k é única a menos de constante. De fato, seja p_1^k outra pressão associada a $\vec{u}^k$. Daí para toda $\vec{\psi} \in C_0^\infty(\Omega_k)$, temos

$$\int_{\Omega_k} (\mathrm{p}_1^k - \mathrm{p}^k) \nabla \cdot \vec{\psi} = 0,$$

o que implica $\mathrm{p}_1^k = \mathrm{p}^k + c_k$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos considerar p^k satisfazendo

$$\int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}^k dx = 0. \tag{2.92}$$

Agora, seja

$$g = \left|\mathrm{p}^k\right|^{p'-2} \mathrm{p}^k - |\Omega_{k_0}|^{-1} \int_{\Omega_{k_0}} \left|\mathrm{p}^k\right|^{p'-2} \mathrm{p}^k dx.$$

Sem dificuldades verificamos que $\displaystyle\int_{\Omega_{k_0}} g\, dx = 0$, $g \in L^p(\Omega_{k_0})$ e $\|g\|_{p,\Omega_{k_0}} \leq c \left\|\mathrm{p}^k\right\|_{p',\Omega_{k_0}}^{\frac{1}{p-1}}$.

Daí, pelo Lema 7, existe $\vec{\psi} \in W_0^{1,p}(\Omega_{k_0})$ solução do problema

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{\psi} = g \\ &\left\|\vec{\psi}\right\|_{1,p,\Omega_{k_0}} \leq c \left\|\mathrm{p}^k\right\|_{p',\Omega_{k_0}}^{\frac{1}{p-1}}. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Portanto, de (2.92) e (2.93), vem

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{k_0}} \left|\mathrm{p}^k\right|^{p'} &= \int_{\Omega_{k_0}} \left(\left|\mathrm{p}^k\right|^{p'-2}\mathrm{p}^k\right)\mathrm{p}^k = \int_{\Omega_{k_0}} g\mathrm{p}^k + |\Omega_{k_0}|^{-1}\left(\int_{\Omega_{k_0}} \left|\mathrm{p}^k\right|^{p'-2}\mathrm{p}^k\right)\int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}^k \\ &= \int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}^k\nabla\cdot\vec{\psi} = \int_{\Omega_{k_0}} S_k(\vec{u}^k) : D(\vec{\psi}) + \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k)\cdot\vec{\psi}.\end{aligned} \tag{2.94}$$

Agora, fazendo uso, novamente, de (2.93), e procedendo como na obtenção de (2.85), temos

$$\int_{\Omega_{k_0}} S_k(\vec{u}^k) : D(\vec{\psi}) + \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k)\cdot\vec{\psi} \leq c\left(\left\|\vec{u}^k\right\|_{1,p,\Omega_{k_0}} + \left\|\vec{\mathrm{a}}\right\|_{1,p,\Omega_{k_0}}\right)\left\|\mathrm{p}^k\right\|_{p',\Omega_{k_0}}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{2.95}$$

Assim, de (2.94) e (2.95)

$$\left\|\mathrm{p}^k\right\|_{p',\Omega_{k_0}} \leq c\left(\left\|\vec{u}^k\right\|_{1,p,\Omega_{k_0}} + \left\|\vec{\mathrm{a}}\right\|_{1,p,\Omega_{k_0}}\right) \leq c\,,$$

e isto implica (2.91). Como desejávamos.

Portanto, de (2.81) − (2.85) e (2.90), obtemos

$$\langle \chi_\zeta, \vec{u}\rangle = \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u})\cdot(\zeta\vec{u}) - \int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}\,\vec{u}\cdot\nabla\zeta - \frac{1}{2}\int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot\chi_{p'}\cdot\nabla\zeta. \tag{2.96}$$

Agora, se em (2.81) trocarmos $\vec{u}$ por $\vec{u}^k$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{u}^k\rangle &= \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k)\cdot(\zeta\vec{u}^k) - \int_{\Omega_{k_0}} \mathrm{p}^k\vec{u}^k\cdot\nabla\zeta - \frac{1}{2}\int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}^k\cdot S(\vec{u}^k)\cdot\nabla\zeta \\ &\quad -\frac{1}{k}\left(\int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot D(\vec{u}^k)\cdot\nabla\zeta + \int_{\Omega_{k_0}} \vec{u}\cdot D(\vec{\mathrm{a}})\cdot\nabla\zeta\right).\end{aligned} \tag{2.97}$$

Passando o limite no lado direito de (2.97) obtemos o lado direito de (2.96) (o procedimento segue os passos do procedimento para (2.81), as diferenças que surgem são facilmente contornáveis), ou seja,

$$\langle A_\zeta\vec{u}^k, \vec{u}^k\rangle \longrightarrow \langle \chi_\zeta, \vec{u}\rangle. \tag{2.98}$$

Portanto, de (2.78), (2.79) e (2.98), temos

$$\langle \chi_\zeta, \vec{u}\rangle - \langle \chi_\zeta, \vec{w}\rangle - \langle A_\zeta\vec{w}, \vec{u}\rangle + \langle A_\zeta\vec{w}, \vec{w}\rangle \geq 0,$$

e procedendo como no final da Teorema 1, segue

$$\chi_\zeta = A_\zeta \vec{u}. \tag{2.99}$$

Por fim, como $\zeta = 1$ no suporte de $\vec{\varphi}$, de (2.77) e (2.99) temos

$$\int_{\Omega_{k_0}} S_k(\vec{u}^k) : D(\vec{\varphi}) = \langle A_{\zeta,k}\vec{u}^k, \vec{\varphi}\rangle \longrightarrow \langle A_\zeta \vec{u}, \vec{\varphi}\rangle = \int_{\Omega_{k_0}} S(\vec{u}) : D(\vec{\varphi}).$$

E como

$$\int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}^k) \cdot \vec{\varphi} \longrightarrow \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi},$$

passando o limite em (2.76), obtemos

$$\int_{\Omega_{k_0}} S(\vec{u}) : D(\vec{\varphi}) = \int_{\Omega_{k_0}} B(\vec{u}) \cdot \vec{\varphi},$$

ou seja, $\vec{u}$ satisfaz (2.18), como queríamos demonstrar.

□

Observação 6 . Se descartarmos o termo convectivo $\vec{v} \cdot \nabla\vec{v}$ em (2.1_1), obtemos o *Problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov para o sistema de Stokes com Lei de Potência*, cuja solução é obtida repetindo os argumentos usados no problema, correlato, para Navier-Stokes (problema (2.1)), só que com menos cálculos, obviamente.

As soluções do problema (2.1), obtidas pelo Teorema 3, possuem dissipação de energia distribuida uniformemente (veja Teorema 3.2, p. 745 de [27]), mais precisamente:

Proposição 1 . Seja $\vec{v}$ uma solução do Problema 2.1, obtida pelo Teorema 3. Então existe uma constante c independente de t, tal que

$$\int_t^{t+1} \int_{\Sigma_i} |\nabla\vec{v}|^p \leq c\,, \quad \forall\, t \geq 0,\; i = 1, 2\,, \tag{2.100}$$

com p satisfazendo (2.73).

Prova: Denotemos $\vec{u} = \vec{v} - \vec{a}$ e, para $\tau \geq 2$, definamos

$$\Omega_i^\tau(t) \equiv \Omega_{i,\tau-t,\tau+t}\,, \quad \tau \geq t\,.$$

Como a solução $\vec{v}$ é obtida pelo Teorema 3, temos que $\vec{u}$ é limite fraco, em $W^{1,p}_{loc}(\overline{\Omega})$, de uma sequência de soluções $\vec{u}^k$ do Problema aproximado (2.50). Assim, pelo Teorema 2, temos regularidade suficiente para multiplicarmos (2.50$_1$) por $\vec{u}^k$ e integrarmos por partes em $\Omega_i^\tau(t)$, e depois proceder como nos cáculos feitos anteriormente ao Teorema 3, para obtermos

$$z_\tau(\eta) \leq \varphi(\eta)\,, \quad \forall\, \eta \in [1,\tau]\,,$$

onde $z_\tau(\eta) \equiv \displaystyle\int_{\eta-1}^{\eta} y_\tau(t)\,dt$, com $y_\tau(t) \equiv \dfrac{1}{k}\left|\vec{u}^k\right|^2_{1,2,\Omega_i^\tau(t)} + \left|\vec{u}^k\right|^p_{1,p,\Omega_i^\tau(t)}$ e $\varphi(\eta) = c_2\eta + c_3$. Como $\tau \geq 2$, temos

$$y_\tau(1/2) = \int_{3/2-1}^{3/2} y_\tau(1/2)\,dt \leq \int_{3/2-1}^{3/2} y_\tau(t)\,dt = z_\tau(3/2) \leq \varphi(3/2) = c\,.$$

Daí,

$$\int_{\tau-1/2}^{\tau+1/2}\int_{\Sigma_i}\left|\nabla\vec{u}^k\right|^p \leq y_\tau(1/2) \leq c\,.$$

Assim, pela Proposição III.5(iii) de [9], temos

$$\int_{\tau-1/2}^{\tau+1/2}\int_{\Sigma_i}\left|\nabla\vec{u}\right|^p \leq c\,.$$

Portanto, obtivemos (2.100) com $\vec{u}$ no lugar de $\vec{v}$ e para todo $t = \tau - 1/2$. Como $\vec{u} \in W^{1,p}_{loc}(\Omega_i)$, temos que $\vec{u}$ satisfaz (2.100) para todo $t \geq 0$. Por fim, de (a_4) segue o resultado.

$\square$

Em [29], p. 1437, Marusic-Paloka comenta a dificuldade de obtenção de resultados de unicidade para problemas de valores de fronteira para o sistema de Navier-Stokes com Lei de Potência para $p > 2$, inclusive esta é uma questão em aberto para domínios limitados. Em face de todas estas dificuldades, estabeleceremos apenas um resultado de unicidade sob hipóteses adicionais. Começaremos com o seguinte lema.

Lema 15 . Seja $\vec{v}$ solução de (2.1) satisfazendo

$$\left|\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_j}\right| \geq c|x'|^{1/(p-1)}, \tag{2.101}$$

em Ω_i , $i = 1, 2$, para algum $j = 1, \ldots, n$. Então para todo $\vec{w} \in \mathcal{D}^{1,p}_{loc}(\Omega_i)$ vale

$$(\vec{w} \cdot \nabla\vec{v}, \vec{w})_{\Omega_{it}} \leq c\,|\Phi| \left\|\left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)/2} D(\vec{w})\right\|^2_{2,\Omega_{it}}, \quad \forall\, t > 0. \tag{2.102}$$

Prova: Denotemos $\Omega \equiv \Omega_i$. Usando a Desigualdade de Hölder e (a_4), obtemos

$$\left|(\vec{w} \cdot \nabla\vec{v}, \vec{w})_{\Omega_{t-1,t}}\right| \leq c\,|\Phi| \left\|\vec{w}\right\|^2_{2p',\Omega_{t-1,t}}. \tag{2.103}$$

Usando Imersão de Sobolev e (1.9), temos

$$\left\|\vec{w}\right\|_{2p',\Omega_{t-1,t}} \leq c\left|\vec{w}\right|_{1,r,\Omega_{t-1,t}}, \tag{2.104}$$

para todo $1 < r < 2$, tal que $2p' \leq \dfrac{rn}{n-r}$. Agora, usando (1.8), a Desigualdade de Hölder e (2.101), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\vec{w}\right|^r_{1,r,\Omega_{t-1,t}} &= \int_{\Omega_{t-1,t}} \left|\nabla\vec{w}\right|^r \leq c\int_{\Omega_{t-1,t}} \left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)r/2} \left|D(\vec{w})\right|^r \frac{1}{\left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)r/2}} \\
&\leq c\left(\int_{\Omega_{t-1,t}} \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} \left|D(\vec{w})\right|^2\right)^{r/2} \left(\int_{\Omega_{t-1,t}} \frac{1}{\left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)r/(2-r)}}\right)^{(2-r)/2} \\
&\leq c\left\|\left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)/2} D(\vec{w})\right\|^r_{2,\Omega_{t-1,t}} \left(\int_0^{l_2} s^{n-2-\frac{(p-2)r}{(p-1)(2-r)}}\, ds\right)^{(2-r)/2}.
\end{aligned}$$

Daí, para $r \leq \dfrac{2(n-1)(p-1)}{np-(n+1)}$, temos

$$\left|\vec{w}\right|_{1,r,\Omega_{t-1,t}} \leq c\left\|\left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)/2} D(\vec{w})\right\|_{2,\Omega_{t-1,t}}. \tag{2.105}$$

E assim, de (2.104) e (2.105),

$$\left\|\vec{w}\right\|_{2p',\Omega_{t-1,t}} \leq c\left\|\left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)/2} D(\vec{w})\right\|_{2,\Omega_{t-1,t}}$$

e de (2.103) vem,

$$\left|(\vec{w} \cdot \nabla\vec{v}, \vec{w})_{\Omega_{t-1,t}}\right| \leq c\,|\Phi| \left\|\left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)/2} D(\vec{w})\right\|^2_{2,\Omega_{t-1,t}}. \tag{2.106}$$

Por fim, somando (2.106) obtemos (2.102).

$\square$

Observação 7 . Um exemplo de solução satisfazendo (2.101) é a solução de Poiseuille para Ω_i apropriado, ver [29] p. 1429.

Teorema 4 . Seja Φ suficientemente pequeno e l algum número positivo, então existe não mais que uma solução fraca de (2.1) em $W^{2,l}_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$, satisfazendo (2.100) e a propriedade (2.102) em todo Ω, isto é,

$$(\vec{w}\cdot\nabla\vec{v},\vec{w})_{\Omega_t} \leq c\,|\Phi| \left\| \left|D(\vec{v})\right|^{(p-2)/2} D(\vec{w}) \right\|^2_{2,\Omega_t}, \quad \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}^{1,p}_{loc}(\Omega) \text{ e } t > 0.$$

Prova: Denotemos $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, onde $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são soluções de (2.1) satisfazendo as hipótese acima. Daí

$$-\text{div}\left\{\left|D(\vec{v}_1)\right|^{p-2} D(\vec{v}_1)\right\} + \vec{v}_1\cdot\nabla\vec{v}_1 + \nabla \mathrm{p}_1 = 0\,,$$

Introduzindo $\vec{w}$ e usando o fato de $\vec{v}_2$ também ser solução , vem

$$\begin{aligned}&-\text{div}\left\{\left|D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right|^{p-2}\left[D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right] - \left|D(\vec{v}_2)\right|^{p-2} D(\vec{v}_2)\right\}\\ &+\vec{w}\cdot\nabla\vec{w} + \vec{w}\cdot\nabla\vec{v}_2 + \vec{v}_2\cdot\nabla\vec{w} + \nabla\left(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2\right) = 0.\end{aligned}$$

Agora, multiplicamos por $\vec{w}$, integramos em Ω_t e procedemos como na obtenção de (2.51) para obtermos

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_t}\left\{\left|D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right|^{p-2}\left[D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right] - \left|D(\vec{v}_2)\right|^{p-2} D(\vec{v}_2)\right\} : D(\vec{w})\\ &= -\left(\vec{w}\cdot\nabla\vec{v}_2,\vec{w}\right)_{\Omega_t} - I\,,\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}I \;=\; &\int_{\partial\Omega_t}\Bigg[\vec{w}\cdot\left\{\left|D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right|^{p-2}\left[D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right] - \left|D(\vec{v}_2)\right|^{p-2} D(\vec{v}_2)\right\}\cdot\vec{n}\\ &-\frac{\left|\vec{w}\right|^2}{2}\left(\vec{w}\cdot\vec{n} + \vec{v}_2\cdot\vec{n} - \left(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2\right)\left(\vec{w}\cdot\vec{n}\right)\right)\Bigg]\,.\end{aligned}$$

Usando as desigualdades (1.8), (1.4), (1.5) e (2.102), obtemos

$$c_1\int_{\Omega_t}\left|\nabla\vec{w}\right|^p + c_2\int_{\Omega_t}\left|D(\vec{v}_2)\right|^{p-2}\left|D(\vec{w})\right|^2 \leq c_3\,|\Phi|\int_{\Omega_t}\left|D(\vec{v}_2)\right|^{p-2}\left|D(\vec{w})\right|^2 + I\,. \quad (2.107)$$

Assim, para $|\Phi| < c_1/c_2$ e, definindo $y(t) = \left|\vec{w}\right|^p_{1,p,\Omega_t}$, de (2.107) temos

$$y(t) \leq cI\,.$$

Por fim, integrando em relação a t de $\eta - 1$ à η, para $\eta \geq 1$, obtemos

$$z(\eta) \equiv \int_{\eta-1}^{\eta} y(t)\,dt \leq I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \left|\vec{w} \cdot \left\{\left|D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right|^{p-2}\left[D(\vec{w}) + D(\vec{v}_2)\right] - \left|D(\vec{v}_2)\right|^{p-2} D(\vec{v}_2)\right\} \cdot \vec{n}\right| \\
I_2 &= \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \left|\frac{\left|\vec{w}\right|^2}{2}\vec{w} \cdot \vec{n}\right| \\
I_3 &= \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \left|\frac{\left|\vec{w}\right|^2}{2}\vec{v}_2 \cdot \vec{n}\right| \\
I_4 &= \int_{\Omega_{\eta-1,\eta}} \left|(\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_2)\,\vec{w} \cdot \vec{n}\right|.
\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}
y(t-1) \leq z(t) \leq y(t) \\
z'(\eta) = \left|\vec{w}\right|^p_{1,p,\Omega_{\eta-1,\eta}}\,.
\end{aligned}$$

Agora, procedemos como na obtenção de (2.67), só que usando (2.100) em vez de (a_4), para obtermos

$$z(\eta) \leq c\Psi\left(z'(\eta)\right),$$

onde $\Psi(\tau) = \tau + \tau^{1/p} + \tau^{2/p} + \tau^{3/p}$. Assim, Supondo z não identicamente nula, pelo Lema 1 temos

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = \infty.$$

Ainda, como para $\tau \geq \tau_1$ (para algum $\tau_1 > 0$)

$$\Psi(\tau) \leq \begin{cases} \tau & , \quad p = 3 \\ \frac{3}{p} & , \quad p < 3, \end{cases}$$

pelo mesmo lema, temos

$$\begin{aligned}
&\liminf_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} z(t) > 0 &&, \quad p = 3 \\
&\liminf_{t\to\infty} t^{-3/(3-p)} z(t) > 0 &&, \quad p < 3\,.
\end{aligned}$$

O que é um absurdo, segundo (2.1_5).
Portanto $z \equiv 0$, o que implica $\vec{w} = 0$, que por sua vez implica $\vec{w} = 0$, isto é, $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

$\square$

Observação 8 . Para exemplo de um domínio satisfazendo a propriedade (2.102) em todo Ω, ver [29] p. 1437.

Observação 9 . Quanto ao problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov para o sistema de Stokes com Lei de Potência, tem-se a demonstração de unicidade direta (sem o uso do Lema 15) para um fluxo qualquer, como ocorre no caso $p = 2$ (ver Corolário 2.1, p. 739 de [27]).

Capítulo 3

SEÇÃO TRANSVERSAL ILIMITADA

Introdução

Consideraremos um domínio Ω como em (1.1), com

$$\Omega_i = \left\{x^{(i)}; |x^{(i)}| < g_i(x_n^{(i)}),\ x_n^{(i)} > 0\right\},$$

onde as funções $g_i(t)$ satisfazem as condições

$$\begin{aligned} & g_i(t) \geq g_0 > 0 \\ & |g_i(t_1) - g_i(t_2)| \leq M_i |t_1 - t_2|\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

para todo $t_1, t_2, t > 0$.

Para tornar a leitura mais agradável omitiremos o índice i na notação das coordenadas locais. Assumiremos ainda que g_i é de classe C^∞ e $\Sigma = \Sigma_i(x_n)$ a seção transversal de Ω_i perpendicular ao eixo $x' = 0$ e passando pelo ponto $(0, x_n)$. Denotaremos por $\vec{n}$ um vetor unitário de Σ_i. Segue imediatamente de (3.1) que

$$\begin{aligned} & |g_i'(t)| \leq M\ , \quad \forall\, t > 0 \\ & g_i(t) \leq 2Mt\ , \quad \forall t \geq t_0 = M^{-1} g_i(0). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para $i = 1, \ldots, m$, definimos

$$I_i(\infty) = \int_0^\infty g_i^\lambda(t)\,, \tag{3.3}$$

λ podendo assumir as formas $1-2p$, $2-3p$ ou $2-\dfrac{p}{p-2}$. Temos as seguintes possibilidades

$$\begin{aligned} I_i(\infty) &= \infty\,, \quad \text{para } i = 1,\dots,m_1\,, \\ I_i(\infty) &< \infty\,, \quad \text{para } i = m_1+1,\dots,m\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

No caso $I_i(\infty) = \infty$ diremos que a *seção transversal diverge*, enquanto no caso $I_i(\infty) < \infty$ diremos que a *seção transversal converge*.

Consideremos o problema: Dados $\Phi_i \in \mathbb{R}$ quaisquer, satisfazendo a condição

$$\sum_{i=1}^{m} \Phi_i = 0\,, \tag{3.5}$$

obter um par $\vec{\mathrm{v}}$, p, tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}})\right\} &= \delta(\vec{\mathrm{v}}\cdot\nabla\vec{\mathrm{v}}) + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega \\ \nabla\cdot\vec{\mathrm{v}} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \vec{\mathrm{v}} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \int_{\Sigma_i} \vec{\mathrm{v}}\cdot\vec{n} &= \Phi_i\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $\delta = 1$ ou 0. Se $\delta = 1$, (3.6) é dito *sistema de Navier-Stokes com Lei de Potência*; se $\delta = 0$, (3.6) é dito *sistema de Stokes com Lei de Potência*.

Neste capítulo estudaremos o problema acima sob as seguintes condições sobre (3.4): $m_1 = 0$, isto é, todas as seções transversais divergem; $m_1 = m$, ou seja, todas as seções transversais convergem; e $0 < m_1 < m$, que significa que Ω possui seções transversais que convergem e seções transversais que divergem.

Observação 10 . Sempre que a integral

$$\int_0^\infty g_i^{-n(p-1)-1}(t)\,dt \tag{3.7}$$

converge, temos (Teorema III.4.3 de [28]) que existe um campo, $\vec{\mathrm{a}}_i \in \hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega_i)$, com $\int_{\Sigma_i} \vec{\mathrm{a}}_i\cdot\vec{n} = \Phi_i$. Assim sendo, se (3.7) converge para todo $i = 1,\dots,m$, podemos buscar soluções da forma $\vec{\mathrm{v}} = \vec{u} + \vec{\mathrm{a}}$ com $\vec{\mathrm{a}} \in \hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_{\Sigma_i} \vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{n} = \Phi_i$ e $\vec{u} \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ com fluxo zero, isto é, $\int_{\Sigma_i} \vec{u}\cdot\vec{n} = 0$. Se (3.7) converge apenas para um "canal", ou se (3.7) sempre diverge, temos $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, daí $\vec{\mathrm{a}} \notin \hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega)$, caso contrário $\int_{\Sigma_i} \vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{n} = 0$ (Teorema III.5.1 de [28]). Também se m=1, pelo Teorema 1 de [40], temos $\hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega) = \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$.

3.1 Problema de Stokes com Lei de Potência para Seções Convergentes

Nesta seção assumiremos

$$\lambda = -n(p-1) - 1\,, \tag{3.8}$$

e consideraremos o seguinte problema: Dados $\Phi_i \in \mathbb{R}$ quaisquer, satisfazendo a condição (3.5), obter um par $\vec{v}$, p, tal que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v})\right\} &= \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega \\
\nabla \cdot \vec{v} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\
\vec{v} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\
\int_{\Sigma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} &= \Phi_i \\
\lim_{|x|\to\infty} \vec{v}(x) = 0 \ \text{ em } \Omega_i\,,\ & i = 1, \ldots, m\,,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

com Ω agora não mais caracterizado por (3.4), mas sim satisfazendo para todo $i = 1, \ldots, m$

$$I_i(\infty) = \int_0^\infty g_i^\lambda(t)\, dt < \infty\,. \tag{3.10}$$

Um exemplo de domínio satisfazendo a condição (3.10), é o domínio onde os canais são dados pelas funções $g_i(t) = t + t_0$, $i = 1, \ldots, m$, e $t_0 > 0$. Mais geralmente, os domínios cujos canais são definidos pelas funções $g_i(t) = (t + t_0)^\theta$, para $\theta > \dfrac{1}{n(p-1)+1}$, $i = 1, \ldots, m$; satisfazem (3.10).

A formulação fraca para (3.9_1), é obtida multiplicando-a por $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integrando por partes, donde vem

$$\int_\Omega |D(\vec{v})|^{p-2} D(\vec{v}) : D(\vec{\varphi}) = 0\,. \tag{3.11}$$

Definição 3 *:* Uma *solução fraca* para o problema (3.5), (3.9) com Ω caracterizado por (3.10), é uma função $\vec{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\vec{v} \in \hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $\vec{v}$ satisfaz (3.11) para todo $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(iii) $\vec{v}$ satisfaz $(3.9_2) - (3.9_4)$.

Observamos que a pressão p é obtida conforme a Observação 1.

Observação 11 . A condição (i) na definição acima implica

$$\frac{1}{|\Sigma_i(x_n)|^{\frac{p}{n-1}}}\int_{\Sigma_i(x_n)}|\vec{v}|^p \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando } |x|\to\infty\,, \quad \text{em } \Omega_i\,,\ i=1,\ldots,m\,. \tag{3.12}$$

De fato, seja $i = 1,\ldots,m$. De (1.10) temos, para $\vec{w}\in D^{1,p}(\Omega_i;\partial\Omega\cap\partial\Omega_i)$,

$$\int_{\Sigma_i(s)}|\vec{w}(x',s)|^p dx' \le c|\Sigma_i(s)|^{\frac{p}{n-1}}\int_{\Sigma_i(s)}|\nabla_{x'}\vec{w}|^p dx' \le c g_i^p(s)\int_{\Sigma_i(s)}|\nabla\vec{w}|^p dx'\,. \tag{3.13}$$

Consideremos agora $\vec{f_i}(x_n) = g_i^{-p}(x_n)\vec{e}_n$. Do Teorema de Green vem, para $t_1 > t$,

$$\int_{\Omega_{it,t_1}}\nabla\cdot\left(\vec{f_i}|\vec{w}|^p\right) = \int_{\Sigma_i(t_1)} g_i^{-p}(t_1)|\vec{w}(x',t_1)|^p dx' - \int_{\Sigma_i(t)} g_i^{-p}(t)|\vec{w}(x',t)|^p dx'\,. \tag{3.14}$$

Agora, integramos a identidade $\nabla\cdot\left(\vec{f}|\vec{w}|^p\right) = |\vec{w}|^p\nabla\cdot\vec{f} + \vec{f}\cdot\nabla|\vec{w}|^p$, em Ω_{it,t_1}, para obter

$$\int_{\Omega_{it,t_1}}\nabla\cdot\left(\vec{f_i}|\vec{w}|^p\right) = p\int_{\Omega_{it,t_1}}\frac{|\vec{w}|^{p-1}}{g_i^p(x_n)}\frac{\partial|\vec{w}|}{\partial x_n} - p\int_{\Omega_{it,t_1}}\frac{g_i'(x_n)|\vec{w}|^p}{g_i^{p+1}(x_n)}\,. \tag{3.15}$$

Assim, de (3.14) e (3.15), obtemos

$$\frac{1}{g_i^p(t)}\int_{\Sigma_i(t)}|\vec{w}|^p = \frac{1}{g_i^p(t_1)}\int_{\Sigma_i(t_1)}|\vec{w}|^p + p\int_{\Omega_{it,t_1}}\frac{g_i'(x_n)|\vec{w}|^p}{g_i^{p+1}(x_n)} - p\int_{\Omega_{it,t_1}}\frac{|\vec{w}|^{p-1}}{g_i^p(x_n)}\frac{\partial|\vec{w}|}{\partial x_n}\,,$$

que devido à (3.2_1), fica

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_i^p(t)}\int_{\Sigma_i(t)}|\vec{w}|^p \quad \le \quad & \frac{1}{g_i^p(t_1)}\int_{\Sigma_i(t_1)}|\vec{w}|^p + Mp\int_{\Omega_{it,t_1}}\frac{|\vec{w}|^p}{g_i^{p+1}(x_n)} \\ & +p\int_t^{t_1}\frac{1}{g_i^p(s)}\left(\int_{\Sigma_i(s)}|\vec{w}|^{p-1}|\nabla\vec{w}|\,d\Sigma\right)ds\,.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Agora usando (3.13), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{it,t_1}}\frac{|\vec{w}|^p}{g_i^{p+1}(x_n)} \le c\int_{\Omega_i^t}|\nabla\vec{w}|^p \\ \int_t^{t_1}\frac{1}{g_i^p(s)}\left(\int_{\Sigma_i(s)}|\vec{w}|^{p-1}|\nabla\vec{w}|\,d\Sigma\right)ds \le c\int_{\Omega_i^t}|\nabla\vec{w}|^p.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Assim, de (3.16) e (3.17), temos

$$\frac{1}{g_i^p(t)} \int_{\Sigma_i(t)} |\vec{w}|^p \leq \frac{1}{g_i^p(t_1)} \int_{\Sigma_i(t_1)} |\vec{w}|^p + c_2 \int_{\Omega_i^t} |\nabla \vec{w}|^p. \tag{3.18}$$

Por fim, como $\vec{w} \in D^{1,p}(\Omega_i; \partial\Omega \cap \partial\Omega_i)$, devido à (3.13), temos, pelo menos ao longo de uma subsequência de valores para t_1,

$$\int_{\Sigma_i(t_1)} |\vec{w}|^p \longrightarrow 0\,, \quad \text{quando} \quad t_1 \to \infty\,.$$

Daí, fazendo $t_1 \to \infty$ em (3.18), vem

$$\frac{1}{g_i^p(t)} \int_{\Sigma_i(t)} |\vec{w}|^p \leq c_2 \int_{\Omega_i^t} |\nabla \vec{w}|^p. \tag{3.19}$$

E, desde que $g_i^p(t) = |\Sigma_i(t)|^{\frac{p}{n-1}}$, fazendo $t \to \infty$ em (3.19), obtemos (3.12). Como queríamos demonstrar.

Observação 12 . Note que (3.12) é uma formulação fraca para (3.9_5).

Como procedemos anteriormente, buscaremos uma solução fraca para o problema (3.5), (3.9), da forma $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}$, onde $\vec{a}$ é obtido segundo o Lema III.4.3 de [20], e satisfaz as seguintes propriedades:

(a_1) $\vec{a} \in C^\infty(\Omega)$;

(a_2) $\vec{a}$ se anula próximo da fronteira $\partial\Omega$;

(a_3) $|D^\alpha \vec{a}(x)| \leq c g_i^{-n+1-|\alpha|}(x_n)\,, \quad \forall\, x \in \Omega_i\,,\ \ |\alpha| \geq 0$;

(a_4) $\displaystyle\int_{\Sigma_i} \vec{a} \cdot \vec{n} = \Phi_i$.

Enquanto $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaz para toda $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\int_\Omega \left|D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right|^{p-2} [D(\vec{u}) + D(\vec{a})] : D(\vec{\varphi}) = 0\,. \tag{3.20}$$

A seguir, provaremos um resultado fundamental para esta seção.

Teorema 5 . Existe $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (3.20).

Prova: Seja $\{\vec{\varphi}^j\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ denso em $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ e tal que $\left(\vec{\varphi}^i, \vec{\varphi}^j\right) = \delta_{ij}$ (ver Lema 4). Como em teoremas anteriores, temos que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe

$$\vec{u}^N = \sum_{j=1}^{N} c_{jN} \vec{\varphi}^j, \tag{3.21}$$

tal que para $j = 1, \ldots, N$

$$\int_\Omega \left|D(\vec{u}^N) + D(\vec{a})\right|^{p-2} [D(\vec{u}^N) + D(\vec{a})] : D(\vec{\varphi}^j) = 0 \tag{3.22}$$

e

$$\left|\vec{u}^N\right|_{1,p} \leq c\,, \tag{3.23}$$

onde c é independente de N. Agora, pela compacidade fraca de $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, devido à (3.23), podemos obter uma subsequência $\{\vec{u}^{N_k}\}$ de $\{\vec{u}^N\}$ e uma função $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\vec{u}^{N_k} \rightharpoonup \vec{u}\,, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{3.24}$$

Pretendemos agora passar o limite em (3.22) e tomar $\vec{\varphi}$ qualquer em $\mathcal{D}(\Omega)$. Para tal, como temos procedido anteriormente, começaremos definindo para $\vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$

$$A\vec{w} = -\text{div}\left\{\left|D(\vec{w}) + D(\vec{a})\right|^{p-2} [D(\vec{w}) + D(\vec{a})]\right\}.$$

Assim,

$$\begin{gathered} A : \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\right)' \equiv D^{-1,p'}(\Omega) \\ \left\|A\vec{u}^{N_k}\right\|_{D^{-1,p'}(\Omega)} \leq c\,, \end{gathered} \tag{3.25}$$

com c independete de k. Daí, existe $\chi \in D^{-1,p'}(\Omega)$, tal que

$$\langle A\vec{u}^{N_k}, \vec{w}\rangle \longrightarrow \langle \chi, \vec{w}\rangle\,, \quad \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{3.26}$$

Facilmente, vemos também que A é um operador monótono, isto é,

$$\langle A\vec{w}_1 - A\vec{w}_2, \vec{w}_1 - \vec{w}_2\rangle \geq 0\,, \quad \forall\, \vec{w}_1,\, \vec{w}_2 \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{3.27}$$

Agora, tomando em (3.27), $\vec{w}_1 = \vec{u}^{N_k}$ e $\vec{w}_2 = \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, obtemos

$$\langle A\vec{u}^{N_k}, \vec{u}^{N_k}\rangle - \langle A\vec{u}^{N_k}, \vec{w}\rangle - \langle A\vec{w}, \vec{u}^{N_k}\rangle + \langle A\vec{w}, \vec{w}\rangle \geq 0\,. \tag{3.28}$$

Mas, obviamente, $\langle A\vec{u}^{N_k}, \vec{u}^{N_k}\rangle = 0$ e de (3.24) e (3.25), segue

$$\langle A\vec{w}, \vec{u}^{N_k}\rangle \longrightarrow \langle A\vec{w}, \vec{u}\rangle.$$

Disto, de (3.26) e (3.28), temos

$$-\langle \chi, \vec{w}\rangle - \langle A\vec{w}, \vec{u} - \vec{w}\rangle \geq 0\,, \quad \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\,. \tag{3.29}$$

Agora, facilmente vemos que $\langle \chi, \vec{u}\rangle = 0$. Daí reescrevemos (3.29) como

$$\langle \chi - A\vec{w}, \vec{u} - \vec{w}\rangle \geq 0\,, \quad \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Assim, procedendo como no Capítulo 2, mostra-se que

$$\chi = A\vec{u}\,.$$

Portanto, (3.26) fica

$$\langle A\vec{u}^{N_k}, \vec{w}\rangle \longrightarrow \langle A\vec{u}, \vec{w}\rangle\,, \quad \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\,,$$

que garante passar o limite em (3.22) e tomar $\vec{\varphi}$ qualquer em $\mathcal{D}(\Omega)$. Como queríamos.

□

Agora provaremos o principal teorema desta seção.

Teorema 6 . Existe uma única solução fraca $\vec{v}$ para o problema (3.5), (3.9), e tal solução satisfaz

$$|\vec{v}|_{1,p} \leq c\,\Phi\,, \tag{3.30}$$

onde $\Phi = \max\{|\Phi_1|, \ldots, |\Phi_m|\}$.

Prova: A existência é obtida pelo teorema anterior, onde $\vec{v} = \vec{u} + \vec{a}$. Note que $(3.9_{2,3})$ são imediatas, enquanto (3.9_4) segue de $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ e de (a_4).

Quanto à unicidade, começamos observando que (3.11) é satisfeita com $\vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ no lugar de $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Agora consideremos $\vec{v}_1$ outra solução do problema e denotemos $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_1$. Assim temos $\vec{w} \in \hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega)$ com fluxo zero. Portanto, pelo Teorema 5.1 do capítulo III de [20], $\vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$. Daí, usamos $\vec{w}$ em (3.11), como comentado, para obter

$$\int_\Omega |D(\vec{w}) + D(\vec{v}_1)|^{p-2}[D(\vec{w}) + D(\vec{v}_1)] : D(\vec{w}) = 0,$$

e daí aplicando (1.4)

$$\begin{aligned}
|\vec{w}|_{1,p}^p &\leq c \int_\Omega \left\{|D(\vec{w}) + D(\vec{v}_1)|^{p-2}[D(\vec{w}) + D(\vec{v}_1)] - |D(\vec{v}_1)|^{p-2}D(\vec{v}_1)\right\} : D(\vec{w}) \\
&= -c \int_\Omega |D(\vec{v}_1)|^{p-2}D(\vec{v}_1) : D(\vec{w}) = 0\,.
\end{aligned}$$

Logo $|\vec{w}|_{1,p} = 0$. O que implica $\vec{w} \equiv 0$, ou seja, $\vec{v}_1 = \vec{v}$. Assim temos a unicidade.

Falta apenas demonstrar (3.30). Para isto, tomamos $\vec{u}$ no lugar de $\vec{\varphi}$ em (3.20), e obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left\{\left|D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right|^{p-2} [D(\vec{u}) + D(\vec{a})] - |D(\vec{a})|^{p-2}D(\vec{a})\right\} : D(\vec{u}) \\
&= -\int_\Omega |D(\vec{a})|^{p-2}D(\vec{a}) : D(\vec{u})\,.
\end{aligned}$$

Daí, usando (1.4) e a Desigualdade de Young com ε, vem

$$|\vec{u}|_{1,p}^p \leq c \int_\Omega |D(\vec{a})|^{p-1}|D(\vec{u})| \leq \varepsilon|\vec{u}|_{1,p}^p + c|\vec{a}|_{1,p}^p.$$

Tomando $\varepsilon \ll 1$ temos

$$|\vec{u}|_{1,p} \leq c|\vec{a}|_{1,p} \leq c\,\Phi\,.$$

Como $\vec{v} = \vec{u}+\vec{a}$, da desigualdade acima obtemos facilmente a desigualdade (3.30), e assim, provamos o teorema.

□

3.2 Problema de Navier-Stokes com Lei de Potência para Seções Convergentes

Nesta seção assumiremos $n = 3$ e

$$\lambda = \begin{cases} 2 - 3p & , \quad 2 < p \leq \dfrac{7}{3} \\ 2 - \dfrac{p}{p-2} & , \quad p > \dfrac{7}{3} \end{cases} \tag{3.31}$$

e, similarmente à seção anterior, consideraremos o problema: Dados $\Phi_i \in \mathbb{R}$ quaisquer, satisfazendo a condição (3.5), obter um par $\vec{v}$, p, tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v})\right\} &= \vec{v} \cdot \nabla\vec{v} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \vec{v} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \int_{\Sigma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} &= \Phi_i\,, \\ \lim_{|x|\to\infty} \vec{v}(x) = 0 \ \ \text{em } \Omega_i\,,\ \ i &= 1, \ldots, m\,, \end{aligned} \tag{3.32}$$

com Ω tal que para $i = 1, \ldots, m$,

$$I_i(\infty) < \infty\,. \tag{3.33}$$

Multiplicando (3.32_1) por $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integrando por partes, obtemos, como em (2.18),

$$\int_\Omega |D(\vec{v})|^{p-2} D(\vec{v}) : D(\vec{\varphi}) = (\vec{v} \cdot \nabla\vec{v}, \vec{\varphi})\,. \tag{3.34}$$

Definição 4 *:* Uma *solução fraca* para o problema (3.32) é uma função $\vec{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\vec{v} \in \hat{\mathcal{D}}_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $\vec{v}$ satisfaz (3.34) para todo $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(iii) $\vec{v}$ satisfaz (3.32_2) – (3.32_4).

Lembramos, como de praxe, que a pressão p, associada à velocidade $\vec{\mathrm{v}}$, é obtida conforme a Observação 1, e satisfaz

$$\int_\Omega \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}}) : D(\vec{\varphi}) = (\vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla\vec{\mathrm{v}}, \vec{\varphi}) - \int_\Omega \mathrm{p}\, \mathrm{div}\, \vec{\varphi}\,, \qquad \forall\, \vec{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.35)$$

Buscaremos uma solução fraca para o problema (3.32) da forma $\vec{\mathrm{v}} = \vec{u} + \vec{\mathrm{a}}$, onde $\vec{\mathrm{a}}$ é obtido como na seção anterior, enquanto $\vec{u}$ é solução fraca do seguinte problema auxiliar

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{p-2} [D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}})]\right\} &= \vec{u} \cdot \nabla\vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}} + \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{u} \\ &\quad + \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega \\ \vec{u} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \int_{\Sigma_i} \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0\,, \end{aligned} \qquad (3.36)$$

cuja formulação fraca é dada por

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left|D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{p-2} [D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}})] : D(\vec{\varphi}) = \\ &-(\vec{u} \cdot \nabla\vec{u}, \vec{\varphi}) - (\vec{u} \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}}, \vec{\varphi}) - (\vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{u}, \vec{\varphi}) - (\vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}}, \vec{\varphi})\,, \end{aligned} \qquad (3.37)$$

para toda $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Observação 13 . Na construção de $\vec{\mathrm{a}}$ em [40], destaca-se a seguinte, fundamental, propriedade

$$\int_\Omega |\vec{\mathrm{a}}|^2 |\vec{w}|^2 \le c\varepsilon \int_\Omega |\nabla\vec{w}|^2\,, \quad \forall\, \vec{w} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)\,,$$

com $\varepsilon \ll 1$. Porém, aqui, devido à $p > 2$, tal condição não será necessária.

Para obter $\vec{u}$ solução fraca de (3.36), primeiro obteremos uma solução fraca $\vec{u}^T$ para o problema (3.36) truncado, e depois obteremos $\vec{u}$ como o limite de $\vec{u}^T$, quando $T \to \infty$.

Consideremos, então, o problema (3.36) truncado, isto é,

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{p-2} [D(\vec{u}) + D(\vec{\mathrm{a}})]\right\} &= \vec{u} \cdot \nabla\vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}} + \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{u} \\ &\quad + \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla\vec{\mathrm{a}} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega_T \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{em } \Omega_T \\ \vec{u} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega_T \\ \int_{\Sigma_i} \vec{u} \cdot \vec{n} &= 0\,. \end{aligned} \qquad (3.38)$$

Definição 5 *:* Uma função $\vec{u}$ é uma *solução fraca para o problema* (3.38) se,

(i) $\vec{u} \in W_0^{1,p}(\Omega_T)$;

(ii) $\vec{u}$ satisfaz (3.37) com Ω_T no lungar de Ω;

(iii) $\vec{u}$ satisfaz $(3.38_2) - (3.38_4)$.

Proposição 2 . Existe $\vec{u}^T$ solução fraca do problema (3.38).

Prova: Idêntica à prova da Teorema 1.

Lema 16 . A solução $\vec{u}^T$ satisfaz para $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\,, \varepsilon_3 > 0$:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega_T} \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{\mathrm{a}} \right| \le \varepsilon_1 \left| \vec{u}^T \right|^p_{1,p,\Omega_T} + c_1; \\ &\left| \int_{\Omega_T} \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{\mathrm{a}} \right| \le \varepsilon_2 \left| \vec{u}^T \right|^p_{1,p,\Omega_T} + c_2; \\ &\left| \int_{\Omega_T} |D(\vec{\mathrm{a}})|^{p-2} D(\vec{\mathrm{a}}) : D(\vec{u}^T) \right| \le \varepsilon_3 \left| \vec{u}^T \right|^p_{1,p,\Omega_T} + c_3\,, \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde $c_j = c_j(\Omega_0, p, \varepsilon_j),\ j = 1, 2, 3.$

Prova: Começaremos provando (3.39_1). Aplicando a Desigualdade de Hölder obtemos de imediato

$$\left| \int_{\Omega_T} \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{\mathrm{a}} \right| \le \left| \vec{u}^T \right|_{1,p,\Omega_T} \left(\int_{\Omega_T} |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{\mathrm{a}}|^{p'} \right)^{1/p'} . \tag{3.40}$$

Agora usando a Desigualdade de Hölder e (1.10) obtemos

$$\int_{\Omega_{iT}} g_i^{-2p'} |\vec{u}^T|^{p'} \le c \left(\int_0^T g_i^{2-\frac{p}{p-2}}(s)\, ds \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_{\Omega_{iT}} |\nabla \vec{u}^T|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} .$$

Daí, usando as propriedades de $\vec{\mathrm{a}}$ junto com (1.9) e (1.2) temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{\mathrm{a}}|^{p'} &= \int_{\Omega_0} |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{\mathrm{a}}|^{p'} + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{iT}} |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{\mathrm{a}}|^{p'} \\ &\le c \left[\left(\int_{\Omega_0} |\nabla \vec{u}^T|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_{iT}} g_i^{-2p'} |\vec{u}^T|^{p'} \right] \\ &\le c \left(\sum_{i=1}^m \int_0^T g_i^{2-\frac{p}{p-2}}(s)\, ds \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left| \vec{u}^T \right|^{p'}_{1,p,\Omega_T} . \end{aligned}$$

Disto, de (3.40) e de (3.33), aplicando a Desigualdade de Young, vem

$$\left| \int_{\Omega_T} \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{a} \right| \leq \varepsilon_1 \left| \vec{u}^T \right|^p_{1,p,\Omega_T} + c_1. \tag{3.41}$$

Com um raciocínio semelhante, mostra-se (3.39_2) e (3.39_3).

□

Observação 14 . Este lema é o motivo de $n = 3$ nesta seção, pois no caso $n = 2$ teríamos expoente em g_i tal que a convergência da integral não seria garantida.

Agora provaremos o principal teorema desta seção.

Teorema 7 . Existe uma solução fraca, $\vec{v}$ para o problema (3.6).

Prova: Diante do exposto acima é suficiente mostrar que existe uma solução fraca $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, para o problema (3.36).

Seja $\vec{u}^T$ uma solução fraca, conforme a Proposição 2. Como $\vec{u}^T \in W_0^{1,p}(\Omega_T)$ temos que (3.37) vale para $\vec{u}^T$ no lugar de $\vec{u}$ e de $\vec{\varphi}$, isto é,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_T} \left| D(\vec{u}^T) + D(\vec{a}) \right|^{p-2} [D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})] : D(\vec{u}^T) = -\left(\vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{u}^T \right) \\ &-\left(\vec{u}^T \cdot \nabla \vec{a}, \vec{u}^T \right) - \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{u}^T \right) - \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{a}, \vec{u}^T \right). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Como já vimos no Capítulo 2

$$\left(\vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{u}^T \right) = \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{u}^T \right) = 0\,,$$
$$\left(\vec{u}^T \cdot \nabla \vec{a}, \vec{u}^T \right) = -\left(\vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{a} \right) \quad \text{e} \quad \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{a}, \vec{u}^T \right) = -\left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{a} \right).$$

Assim, de (3.42) e (1.4), obtemos

$$c \left| \vec{u}^T \right|^p_{1,p,\Omega_T} \leq \left(\vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{a} \right) + \left(\vec{a} \cdot \nabla \vec{u}^T, \vec{a} \right) + \left| \int_{\Omega_T} |D(\vec{a})|^{p-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T) \right|, \tag{3.43}$$

que pelo Lema 16 nos leva à

$$\int_\Omega |\nabla \vec{u}^T|^p = \int_{\Omega_T} |\nabla \vec{u}^T|^p \leq c\,. \tag{3.44}$$

Portanto, existe uma subsequência de $\left\{\vec{u}^T\right\}_{T=1}^{\infty}$, que ainda denotaremos por $\left\{\vec{u}^T\right\}_{T=1}^{\infty}$, e uma função $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, tal que

$$\begin{array}{lcll} \vec{u}^T & \rightharpoonup & \vec{u} & \text{em} \quad \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \\ \vec{u}^T & \to & \vec{u} & \text{em} \quad L^p_{loc}(\Omega)\,. \end{array} \tag{3.45}$$

Resta agora mostrar que $\vec{u}$ é solução fraca do problema (3.36). Ora, dado $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$, existe $T_0 > 0$ tal que $\operatorname{supp} \vec{\varphi} \subset \Omega_T$, para todo $T \geq T_0$. Daí, $\vec{u}^T$ satisfaz (3.37), e assim, passando o limite em T, como no Capítulo 2, obtemos que $\vec{u}$ satisfaz (3.37). Facilmente vemos que $\vec{u}$ satisfaz $(3.36_2) - (3.36_4)$. Portanto $\vec{u}$ é solução, como queríamos.

□

3.3 Problema de Navier-Stokes com Lei de Potência para Seções Divergentes

Nesta seção, como na anterior, consideraremos $n = 3$ e λ dada por (3.31, porém, aqui estudaremos o problema composto por (3.5) e pelo sistema (3.6) para $\delta = 1$, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}})\right\} & = & \vec{\mathrm{v}} \cdot \nabla\vec{\mathrm{v}} + \nabla \mathrm{p} \quad \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{\mathrm{v}} & = & 0 \quad \text{em } \Omega \\ \vec{\mathrm{v}} & = & 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\Sigma_i} \vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{n} & = & \Phi_i\,, \end{array} \tag{3.46}$$

sob a condição

$$I_i(\infty) = \infty\,. \tag{3.47}$$

Procedendo como na seção anterior, buscaremos uma solução fraca da forma $\vec{\mathrm{v}} = \vec{u} + \vec{a}$, com $\vec{a}$ definido na seção 3.1. Entretanto, devido à (3.47), não podemos proceder como na seção 2, visto que neste caso a constante de (3.44) dependeria de T. Sendo assim, aplicaremos a técnica do Capítulo 2.

Começamos definindo, para cada $i = 1, \ldots, m$, a função $h_i(t)$ como a inversa da função

$$h_i^{-1}(t) = \int_0^t g_i^{\beta}(s)\, ds\,, \quad t \geq 0\,, \tag{3.48}$$

isto é,

$$t = \int_0^{h_i(t)} g_i^{\beta}(s)\, ds\,, \quad t \geq 0\,, \tag{3.49}$$

onde $\beta \geq \lambda$, será determinado posteriormente. Obviamente, h_i e h_i^{-1} são crescentes, com $h_i(0) = h_i^{-1}(0) = 0$ e

$$h_i(t)\,,\ h_i^{-1}(t) \ \longrightarrow\ \infty\,, \ \text{ quando } t \to \infty.$$

Tomamos o seguinte truncamento de Ω

$$\Omega(T) = \Omega_0 \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{ih_i(T)} \right].$$

Como no Capítulo 2, consideramos o problema modificado (2.50) (obviamente, com $\Omega(T)$ no lugar de Ω_T) que possui uma solução $\vec{u}^T \in W_0^{1,p}(\Omega(T))$, com $\mathrm{p}^T \in L^p(\Omega(T))$ sendo a pressão associada à tal solução.

A seguir, apresentaremos um lema técnico.

Lema 17 . Para $M = \max\limits_{1 \leq i \leq m_1} M_i$, temos

$$\frac{1}{2} g_i(t) \leq g_i(s) \leq \frac{2}{3} g_i(t)\,, \quad \forall\, s \in [t - (2M)^{-1} g_i(t)\,,\, t]\,,\ \forall\, t \geq t_0. \tag{3.50}$$

Prova: $s \in [t - (2M)^{-1} g_i(t)\,,\, t]$ implica a existência de $\xi \in [0, 1]$, tal que $s = t - (2M)^{-1} g_i(t)\xi$. Daí, usando (3.1), temos

$$g_i(t) - g_i(s) \leq M(t - s) = \frac{\xi}{2} g_i(t);$$
$$g_i(s) - g_i(t) \leq M(t - s) = \frac{\xi}{2} g_i(t).$$

Como $1 - \dfrac{\xi}{2} \geq \dfrac{1}{2}$ e $1 + \dfrac{\xi}{2} \leq \dfrac{3}{2}$, temos (3.50).

□

Agora, introduzimos a função "truncamento", como em [27], dependendo do parâmetro t

$$\zeta(x,t) = \begin{cases} \dfrac{h_i(t) - x_n}{g_i(h_i(t))} & , \quad x \in \omega_i(t) \\ (2M)^{-1} & , \quad x \in \Omega_0 \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{i\bar{h}_i(t)} \right] \\ 0 & , \quad x \in \bigcup_{i=1}^{m} [\Omega_i \setminus \Omega_{ih_i(t)}] \end{cases} \tag{3.51}$$

onde, para $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned} \omega_i(t) &= \{x \in \Omega_i;\ \bar{h}_i(t) < x_n < h_i(t)\} \\ \bar{h}_i(t) &= h_i(t) - (2M)^{-1} g_i(h_i(t)). \end{aligned}$$

Segundo o Teorema 2, temos regularidade suficiente para multiplicarmos (2.50_1) por $\zeta\vec{u}^T$ e integrarmos sobre o cojunto

$$\Omega(t) = \Omega_0 \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{ih_i(t)} \right], \quad t_0 \le t \le T\,,$$

para obtermos

$$\int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{1}{T}[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})] + S(\vec{u}^T) \right\} : D(\zeta\vec{u}^T) = -\int_{\Omega(t)} B(\vec{u}^T)\cdot(\zeta\vec{u}^T) + \int_{\Omega(t)} \mathrm{p}^T \vec{u}^T \cdot \nabla\zeta. \tag{3.52}$$

Agora, como

$$\begin{aligned} [D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})] : D(\zeta\vec{u}^T) &= \zeta[D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})] : D(\vec{u}^T) \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{\partial\zeta}{\partial x_n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial u_j^T}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n^T}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial a_j^T}{\partial x_n} + \frac{\partial a_n^T}{\partial x_j} \right) \right] u_j^T, \end{aligned}$$

usando (1.4) e (3.52), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_{\Omega(t)} \zeta \left| D(\vec{u}^T) \right|^2 + \int_{\Omega(t)} \zeta \left| D(\vec{u}^T) \right|^p \quad \le \quad & -c \int_{\Omega(t)} \zeta \left| D(\vec{a}) \right|^{p-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T) \\ & -\frac{1}{T}\int_{\Omega(t)} \zeta D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T) + J \\ & -\int_{\Omega(t)} B(\vec{u}^T)\cdot(\zeta\vec{u}^T) + \int_{\Omega(t)} \mathrm{p}^T \vec{u}^T \cdot \nabla\zeta, \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde

$$J = -\frac{1}{4}\int_{\Omega(t)} \frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\left(\frac{1}{T} + \left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\right)\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_j^T}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n^T}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{\partial a_j^T}{\partial x_n} + \frac{\partial a_n^T}{\partial x_j}\right)\right]u_j^T.$$

Na proposição seguinte, apresentaremos estimativas para os termos do lado direito de (3.53).

Proposição 3 . As seguintes estimativas valem para $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, 2, 3$ e c constante independente de t:

$$\int_{\Omega(t)} \zeta |D(\vec{a})|^{q-2} D(\vec{a}) : D(\vec{u}^T) \le \frac{\varepsilon_1}{T^{\delta_{2q}}}\int_{\Omega(t)} \zeta|\nabla \vec{u}^T|^q + \frac{c}{T^{\delta_{2q}}}\int_{\Omega(t)}\zeta|\nabla\vec{a}|^q \tag{3.54}$$

$$J \le \frac{c}{T^{\delta_{2q}}}\sum_{i=1}^{m}\left(|\vec{u}^T|^q_{1,q,\omega_i(t)} + |\vec{a}|^q_{1,q,\omega_i(t)}\right) \tag{3.55}$$

$$\int_{\Omega(t)}\zeta\vec{u}^T\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{u}^T \le c\sum_{i=1}^{m}\left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{5p-9}{p}}|\vec{u}^T|^3_{1,p,\omega_i(t)} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)}\zeta\vec{u}^T\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T \quad &\le \quad (\varepsilon_2+\varepsilon_3)\int_{\Omega(t)}\zeta|\nabla\vec{u}^T|^p + c\sum_{i=1}^{m}\left\{\int_0^{\bar{h}_i(t)} g_i^{\frac{p-4}{p-2}}(s)ds\right.\\ &\left. + \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{2p-6}{p}}|\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} + \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{2p-6}{p-1}}|\vec{u}^T|^{p'}_{1,p,\omega_i(t)}\right\}\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\int_{\Omega(t)}\zeta\vec{a}\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{u}^T \le c\sum_{i=1}^{m}\left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{2p-6}{p}}|\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} \tag{3.58}$$

$$\int_{\Omega(t)}\zeta\vec{a}\cdot\nabla\vec{a}\cdot\vec{u}^T \le c\sum_{i=1}^{m}\left[g_i(h_i(t))\right]^{-\frac{3+p}{p}}|\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)} \mathrm{p}^T\vec{u}^T\cdot\nabla\zeta \quad &\le \quad c\sum_{i=1}^{m}\left\{\left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{p-6}{p}}|\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} + \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{9(p-2)}{2p}}|\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)}\right.\\ &\left. + [g_i(h_i(t))]^2|\vec{u}^T|^3_{1,p,\omega_i(t)} + |\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)}\right\},\end{aligned} \tag{3.60}$$

onde $q = 2$ ou $q = p$ e

$$\delta_{2q} = \begin{cases} 1\ ,\ q = 2 \\ 0\ ,\ q = p\,. \end{cases}$$

Prova:
(3.54) segue de cálculos imediatos. (3.55) segue da aplicação de (1.10) e do Lema 17.
(3.56) será mais trabalhosa. Primeiro observamos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(t)} \zeta \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{u}^T &= \sum_{r,s=1}^{n} \int_{\Omega(t)} \zeta u_s^T \frac{\partial u_r^T}{\partial x_s} u_r^T \\ &= -\int_{\Omega(t)} |\vec{u}^T|^2 \vec{u}^T \cdot \nabla \zeta - \int_{\Omega(t)} \zeta \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{u}^T , \end{aligned}$$

que devido a (3.51), nos dá

$$\int_{\Omega(t)} \zeta \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{u}^T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i(t)} |\vec{u}^T|^2 u_n g_i^{-1}(h_i(t)). \tag{3.61}$$

Agora, introduzimos a seguinte mudança de coordenadas,

$$\begin{cases} y' = 2Mg_i^{-1}(h_i(t))x' \\ y_n^i = 2Mg_i^{-1}(h_i(t))[h_i(t) - x_n^i] . \end{cases} \tag{3.62}$$

Facilmente, com o uso do Lema 17, obtemos

$$\begin{gathered} 0 < y_n^i < 1 \\ |y'| \leq 3M . \end{gathered}$$

Seja

$$G_{it}(y_n) \equiv 2Mg_i^{-1}(h_i(t))g_i\left(h_i(t) - (2M)^{-1} g_i(h_i(t))y_n\right).$$

Segue, imediatamente do Lema 17, que

$$M < G_{it}(y_n) < 3M .$$

Assim, temos que a mudança de coordenadas (3.62) leva $\omega_i(t)$ em $\hat{\omega}_i(t)$, onde

$$\hat{\omega}_i(t) = \{y \in \mathbb{R}^n;\ |y'| < G_{it}(y_n),\ 0 < y_n < 1\}$$

e

$$|\hat{\omega}_i(t)| \leq 9\pi M^2 .$$

Agora, vamos estimar os termos do lado direito de (3.61) via mudança de coordenadas (3.62):

$$
\begin{aligned}
\int_{\omega_i(t)} |\vec{u}^T|^2 u_n g_i^{-1}(h_i(t))\,dx &\leq g_i^{-1}(h_i(t)) \int_{\omega_i(t)} |\vec{u}^T|^3 dx = 2M g_i^{n-1}(h_i(t)) \int_{\hat{\omega}_i(t)} |\vec{u}^T|^3 dy \\
&\leq c g_i^{n-1}(h_i(t)) \left(\int_{\hat{\omega}_i(t)} |\nabla \vec{u}^T|^p dy \right)^{\frac{3}{p}} \\
&= c[g_i(h_i(t))]^{\frac{5p-9}{p}} |\vec{u}^T|^3_{1,p,\omega_i(t)},
\end{aligned}
\tag{3.63}
$$

onde na última desigualdade usamos o Teorema de Imersão de Sobolev junto com (1.9). Com isto, de (3.61) e (3.63), obtemos (3.56). Como desejávamos.

Provaremos agora (3.57). Para isto, começamos observando que

$$
\int_{\Omega(t)} \zeta \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{a} \cdot \vec{u}^T = - \int_{\Omega(t)} \zeta \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{a} - \int_{\Omega(t)} \vec{a} \cdot \vec{u}^T u_n^T \frac{\partial \zeta}{\partial x_n}. \tag{3.64}
$$

Denotando $U(t) \equiv \Omega(t) \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \omega_i(t)$, temos

$$
\int_{\Omega(t)} \zeta \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{a} \leq \left(\int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{u}^T|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(c \int_{U(t)} |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{a}|^{p'} + \sum_{i=1}^{m} \int_{\omega_i(t)} \zeta |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{a}|^{p'} \right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{3.65}
$$

Usando (a_3), (1.9), (1.10) e (1.2), obtemos

$$
\int_{U(t)} |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{a}|^{p'} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} \int_0^{\bar{h}_i(t)} g_i^{\frac{p-4}{p-2}}(s) ds \right)^{\frac{p-2}{p-1}} \left(\int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{u}^T|^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.66}
$$

e, como $\zeta \leq (2M)^{-1}$, usando (a_3), (1.10) e o Lema 17, estimamos também

$$
\int_{\omega_i(t)} \zeta |\vec{u}^T|^{p'} |\vec{a}|^{p'} \leq c[g_i(h_i(t))]^{\frac{2p-6}{p-1}} |\vec{u}^T|^{p'}_{1,p,\omega_i(t)}. \tag{3.67}
$$

Assim, de (3.65) − (3.67), vem

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega(t)} \zeta \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{a} &\leq (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{u}^T|^p + c \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\bar{h}_i(t)} g_i^{\frac{p-4}{p-2}}(s) ds \\
&\quad + c \sum_{i=1}^{m} [g_i(h_i(t))]^{\frac{2p-6}{p-1}} |\vec{u}^T|^{p'}_{1,p,\omega_i(t)}.
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

Procedendo de forma similar com o último termo de (3.64), sem dificuldades, chegamos à

$$\int_{\Omega(t)} \vec{a}\cdot\vec{u}^T u_n^T \frac{\partial\zeta}{\partial x_n} \leq c\sum_{i=1}^{m}[g_i(h_i(t))]^{\frac{2p-6}{p}}|\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)}. \tag{3.69}$$

Por fim, de (3.64), (3.68) e (3.69) temos (3.57), como queríamos.

A prova de (3.58) é imediata. Vejamos,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega(t)} \zeta\vec{a}\cdot\nabla\vec{u}^T\cdot\vec{u}^T &= -\frac{1}{2}\int_{\Omega(t)}|\vec{u}^T|^2 a_n\frac{\partial\zeta}{\partial x_n}\\ &\leq c\sum_{i=1}^{m}[g_i(h_i(t))]^{\frac{2p-6}{p}}|\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)},\end{aligned}$$

onde, a desigualdade é do tipo (3.69).

A prova de (3.59) também segue facilmente.

Agora provaremos a última estimativa desta proposição, isto é, (3.60). Para começar, observamos que

$$\int_{\Omega(t)} \mathrm{p}^T\vec{u}^T\cdot\nabla\zeta = \sum_{i=1}^{m} g_i^{-1}(h_i(t))\int_{\omega_i(t)}\mathrm{p}^T u_n^T. \tag{3.70}$$

Agora, desde que

$$\int_{\omega_i(t)} u_n^T = 0\,,$$

pelo Lema 7, temos que existe uma solução para o problema abaixo

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\vec{\psi} = u_n^T \ \text{ em } \ \omega_i(t)\\ \vec{\psi}\in W_0^{1,p}(\omega_i(t))\\ |\vec{\psi}|_{1,p,\omega_i(t)} \leq c\|u_n^T\|_{p,\omega_i(t)}\,.\end{gathered} \tag{3.71}$$

O ponto importante aqui é que a constante em (3.71_3) não depende de t, isto pode ser verificado simplesmente observando que a mudança de coordenadas (3.62) leva o problema (3.71) em um problema equivalente, só que no domínio $\hat{\omega}_i(t)$ que não depende de t. Temos também que (3.71_3) implica

$$|\vec{\psi}|_{1,q,\omega_i(t)} \leq c[g_i(h_i(t))]^{\beta_2}|\vec{u}^T|_{1,q,\omega_i(t)}\,, \tag{3.72}$$

onde

$$\beta_2 = \begin{cases}\dfrac{5p-6}{2p}\,, & q=2\\ 1\,, & q=p\,.\end{cases}$$

Assim, de (3.35) e (3.71), para cada $i = 1, \ldots, m$, vem

$$\begin{aligned}\int_{\omega_i(t)} \mathrm{p} u_n^T \quad = \quad & \int_{\omega_i(t)} \left(\frac{1}{T} + \left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{p-2}\right) [D(\vec{u}^T) + D(\vec{\mathrm{a}})] : D(\vec{\psi}) \\ & + \int_{\omega_i(t)} \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{\psi} + \int_{\omega_i(t)} \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\psi} + \int_{\omega_i(t)} \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{\psi} \\ & + \int_{\omega_i(t)} \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\psi}\,.\end{aligned} \tag{3.73}$$

Agora, fazendo uso de (a_3), (3.72), (1.10), Lema 17 e Imersão de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}& \int_{\omega_i(t)} \left(\frac{1}{T} + \left|D(\vec{u}^T) + D(\vec{\mathrm{a}})\right|^{p-2}\right) [D(\vec{u}^T) + D(\vec{\mathrm{a}})] : D(\vec{\psi}) \leq c \left\{ g_i(h_i(t)) |\vec{u}^T|^p_{1,p,\omega_i(t)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{T} [g_i(h_i(t))]^{\frac{11p-18}{2p}} |\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} + \left(\frac{1}{T} [g_i(h_i(t))]^{\frac{4p-12}{2p}} + [g_i(h_i(t))]^{1-\frac{3(p-1)^2}{p}} \right) |\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} \right\} \\ & \int_{\omega_i(t)} \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{\psi} \leq c g_i^3(h_i(t)) |\vec{u}^T|^3_{1,p,\omega_i(t)} \\ & \int_{\omega_i(t)} \vec{u}^T \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\psi} \leq c [g_i(h_i(t))]^{\frac{3p-6}{p}} |\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} \\ & \int_{\omega_i(t)} \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{u}^T \cdot \vec{\psi} \leq c [g_i(h_i(t))]^{\frac{3p-6}{p}} |\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} \\ & \int_{\omega_i(t)} \vec{\mathrm{a}} \cdot \nabla \vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\psi} \leq c [g_i(h_i(t))]^{-\frac{3}{p}} |\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)}\,.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Portanto, de (3.70), (3.73) e (3.74), obtemos (3.60). Como queríamos demonstrar. Assim concluímos a prova desta proposição.

□

Da proposição anterior e de (3.53), chegamos à

$$\begin{aligned}y(t) \quad \equiv \quad & \int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{u}^T|^p \leq c \sum_{i=1}^{m} \left\{ \varphi_1^i(t) + [g_i(h_i(t))]^{\frac{p-6}{p}} |\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} \right. \\ & + [g_i(h_i(t))]^{\frac{9(p-2)}{2p}} |\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} + [g_i(h_i(t))]^2 |\vec{u}^T|^3_{1,p,\omega_i(t)} \\ & \left. + [g_i(h_i(t))]^{\frac{2(p-3)}{p-1}} |\vec{u}^T|^{p'}_{1,p,\omega_i(t)} + |\vec{u}^T|^p_{1,p,\omega_i(t)} \right\},\end{aligned} \tag{3.75}$$

onde

$$\varphi_1^i(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{h_i(t)} g_i^{-4}(s)\, ds & , \quad 2 < p \leq \dfrac{12}{5} \\ \displaystyle\int_0^{h_i(t)} g_i^{\frac{p-4}{p-2}}(s)\, ds & , \quad \dfrac{12}{5} < p \leq 3\,. \end{cases}$$

Lema 18 . Para $y(t)$ definido em (3.75), temos

$$y'(t) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_1} [g_i(h_i(t))]^{-\beta-1} |\vec{u}^T|^p_{1,p,\omega_i(t)}. \tag{3.76}$$

Prova: Começamos calculando $\dfrac{\partial y(t)}{\partial t}$. Ora,

$$\begin{aligned} y'_+(t) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{\Omega(t+h)\setminus\Omega(t)} \zeta(x,t+h)|\nabla\vec{u}^T(x)|^p dx + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial\zeta}{\partial t}|\nabla\vec{u}^T(x)|^p dx \\ y'_-(t) &= \lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{h} \int_{\Omega(t)\setminus\Omega(t+h)} \zeta(x,t+h)|\nabla\vec{u}^T(x)|^p dx + \int_{\Omega(t)} \frac{\partial\zeta}{\partial t}|\nabla\vec{u}^T(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Porém, ambos os limites acima são zero. De fato, mostraremos apenas o primeiro, uma vez que o segundo segue análogo. Temos,

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{\Omega(t+h)\setminus\Omega(t)} \zeta(x,t+h)|\nabla\vec{u}^T(x)|^p dx \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{m_1} \int_{h_i(t)}^{h_i(t+h)} \int_{\Sigma_i(s)} \zeta(x,t+h)|\nabla\vec{u}^T(x)|^p d\Sigma\, ds. \end{aligned}$$

Sejam

$$\begin{aligned} &E_r(h_i(t)) \equiv [h_i(t), h_i(t+h)] \subset \mathbb{R}\,, \quad r>0 \\ &H(s,h) \equiv \textstyle\int_{\Sigma_i(s)} \zeta(x,t+h)|\nabla\vec{u}^T(x)|^p d\Sigma. \end{aligned}$$

Obviamente $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Ainda,

$$h'_i(s) = g_i^{-\beta}(h_i(s)).$$

Assim, do Teorema do Valor Médio e do Lema 17, vem

$$h_i(t+r) - h_i(t) \leq 2g_i^{-\beta}(h_i(t))r\,,$$

com isto os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, $E_r(h_i(t)) \times [-r,r]$, são "shrink nicely"(ver [17]), e assim podemos aplicar o Teorema 3.21 de [17], para obter

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{E_h(h_i(t))} H(s,h)\, ds &= \lim_{h\to 0^+} \frac{c(t)}{|E_h(h_i(t)) \times [-r,r]|} \int_{E_h(h_i(t))\times[-r,r]} H(s,h)\, ds\, dx_2 \\ &= H(h_i(t),0) = \int_{\Sigma_i(h_i(t))} \zeta(x,t)|\nabla\vec{u}^T(x)|^p d\Sigma = 0\,, \end{aligned}$$

uma vez que $\zeta(\cdot,t) = 0$ em $\Sigma_i(h_i(t))$. Assim temos,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{\Omega(t+h)\setminus\Omega(t)} \zeta(x,t+h)|\nabla\vec{u}^T(x)|^p dx = 0.$$

Como querámos demonstrar.

Portanto

$$y'(t) = \int_{\omega_i(t)} \frac{\partial\zeta}{\partial t}|\nabla\vec{u}^T(x)|^p dx. \tag{3.77}$$

Agora, em $\omega_i(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\zeta}{\partial t} &= \frac{h_i'(t)g_i(h_i(t)) - (h_i(t)-x_n)\,g_i'(h_i(t))h_i'(t)}{g_i^2(h_i(t))}\\
&= \frac{h_i'(t)}{g_i(h_i(t))}\left[1 - \frac{(h_i(t)-x_n)\,g_i'(h_i(t))}{g_i(h_i(t))}\right]\\
&\geq \frac{h_i'(t)}{g_i(h_i(t))}\left[1 - \frac{(2M)^{-1}g_i(h_i(t))g_i'(h_i(t))}{g_i(h_i(t))}\right] \geq \frac{1}{2}[g_i(h_i(t))]^{-\beta-1},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (3.2_1). Disto e de (3.77) obtemos (3.76).

□

Agora, de (3.76), podemos deduzir estimativas relacionando $|\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)}$ com a derivada de y, como segue:

$$\begin{aligned}
|\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} &\leq cy'(t)\\
[g_i(h_i(t))]^{\frac{-\beta-1}{p}}\,|\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} &\leq c\,[y'(t)]^{\frac{1}{p}}\\
[g_i(h_i(t))]^{\frac{-2(\beta+1)}{p}}\,|\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} &\leq c\,[y'(t)]^{\frac{2}{p}}\\
[g_i(h_i(t))]^{\frac{-3(\beta+1)}{p}}\,|\vec{u}^T|^3_{1,p,\omega_i(t)} &\leq c\,[y'(t)]^{\frac{3}{p}}\\
[g_i(h_i(t))]^{\frac{-\beta-1}{p-1}}\,|\vec{u}^T|^{p'}_{1,p,\omega_i(t)} &\leq c\,[y'(t)]^{\frac{1}{p-1}}\,.
\end{aligned} \tag{3.78}$$

No lema a seguir obteremos restrições para β de forma que os coeficientes dos termos do tipo $|\vec{u}^T|^{\gamma}_{1,p,\omega_i(t)}$, em (3.75), sejam limitados pelos coeficientes dos termos respectivos, em (3.78).

Lema 19 . Seja

$$\beta = \begin{cases} -1 - \dfrac{2p}{3} & , \quad 2 < p \leq \dfrac{54}{19} \\ \dfrac{14 - 9p}{4} & , \quad \dfrac{54}{19} < p \leq 3 \end{cases} . \tag{3.79}$$

Então

$$\begin{aligned} \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{p-6}{p}} &\leq \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{-\beta-1}{p}} \\ \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{9(p-2)}{2p}} &\leq \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{-2(\beta+1)}{p}} \\ \left[g_i(h_i(t))\right]^{2} &\leq \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{-3(\beta+1)}{p}} \\ \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{2(p-3)}{p-1}} &\leq \left[g_i(h_i(t))\right]^{\frac{-\beta-1}{p-1}} . \end{aligned} \tag{3.80}$$

Prova: Segue de cálculos diretos.

□

Lema 20 . As funções h_i , $i = 1, \ldots, m$, estão bem definidas para

$$2 < p \leq p_0 = \frac{\sqrt{37} - 1}{2}. \tag{3.81}$$

Prova: Para que as funções h_i estejam bem definidas é suficiente termos $\beta \geq \lambda$, o que só é possível para p satisfazendo (3.81).

□

Do lema acima, de (3.75) e (3.78), vem

$$y(t) \leq c_1\varphi_1(t) + c_2 \left\{ y'(t) + [y'(t)]^{\frac{1}{p}} + [y'(t)]^{\frac{2}{p}} + [y'(t)]^{\frac{3}{p}} + [y'(t)]^{\frac{1}{p-1}} \right\}, \tag{3.82}$$

onde $\varphi_1(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} \varphi_1^i(t)$.

Proposição 4 . Para todo $t \in [t_0, T]$ temos

$$y(t) \leq \varphi(t)\,, \tag{3.83}$$

onde

$$\varphi(t) = \frac{c_1}{1-\delta_1}\varphi_1(t) + c_3,$$

para algum $\delta_1 \in (0,1)$.

Prova: Aplicaremos o Lema 1. Para isto verificaremos se as hipóteses de tal lema são satisfeitas. Consideramos para algum $\delta_1 \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) = \frac{c_1}{1-\delta_1}\varphi_1(t) + c_3\\
&\Psi(\tau) = c_2\left(\tau + \tau^{\frac{1}{p}} + \tau^{\frac{2}{p}} + \tau^{\frac{3}{p}} + \tau^{\frac{1}{p-1}}\right).
\end{aligned}$$

Temos y, φ funções suaves, não negativas e não decrescentes e satisfazem

$$y(t) \leq \Psi(y'(t)) + (1-\delta_1)\varphi(t) \quad , \quad \forall\, t \in [t_0, T].$$

Facilmente vemos que $\varphi'(t) \leq \dfrac{c_1 c_0}{1-\delta_1}$. Ainda, como $2 < p \leq p_0 < 3$, temos

$$\Psi(t) \leq \begin{cases} 5c_2 t^{\frac{3}{p}} & , \quad t \geq 1\\ 5c_2 t^{\frac{1}{p}} & , \quad t < 1\,. \end{cases} \tag{3.84}$$

Daí, como Ψ é estritamenente crescente, temos

$$\Psi(\varphi'(t)) \leq \Psi\left(\frac{c_1 c_0}{1-\delta_1}\right). \tag{3.85}$$

Agora, tomaremos δ_1 e c_3, tais que

$$\begin{aligned}
\frac{c_1 c_0}{1-\delta_1} &\geq 1\\
\varphi(t_0) &\geq \frac{1}{\delta_1} 5c_2\left(\frac{c_1 c_0}{1-\delta_1}\right)^{\frac{3}{p}}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

E assim, devido à (3.84) − (3.86), temos (uma vez que φ é crescente)

$$\varphi(t) \geq \frac{1}{\delta_1}\Psi(\varphi'(t)).$$

Por fim, para aplicarmos o Lema 1 resta apenas mostrar que

$$y(T) \leq \varphi(T). \tag{3.87}$$

Começamos multiplicando (2.50_1) por $\vec{u}^T$ e integrando sobre $\Omega(T)$, para obter

$$\begin{aligned} |\vec{u}^T|^p_{1,p,\Omega} &\leq c\sum_{i=1}^{m_1}\int_0^{h_i(t)}\left[(g_i(s))^{2-\frac{p}{p-2}} + (g_i(s))^{2-\frac{4p}{p-1}} + (g_i(s))^{2-3p} + (g_i(s))^{-4}\right]ds \\ &\leq \frac{c(1-\delta_1)}{c_1}\varphi(T)\,, \end{aligned} \tag{3.88}$$

como feito anteriormente.

E assim, tomando $\delta_1 \geq 1 - \dfrac{2Mc_1}{c}$, temos $\dfrac{c(1-\delta_1)}{c_1} \leq 2M$, o que nos leva à

$$|\vec{u}^T|^p_{1,p,\Omega} \leq 2M\varphi(T). \tag{3.89}$$

Por fim, como $\zeta(x,t) \leq (2M)^{-1}$ para todo t, de (3.89) vem

$$y(T) = \int_\Omega \zeta(x,T)|\nabla\vec{u}^T|^p dx \leq (2M)^{-1}\int_\Omega |\nabla\vec{u}^T|^p dx \leq \varphi(T).$$

Portanto, obtivemos (3.87), como desejávamos.

Agora, aplicando o Lema 1, obtemos (3.83).

□

A seguir apresentaremos mais um lema técnico.

Lema 21 . Seja $\bar{h}_i(t) = h_i(t) - (2M)^{-1}g_i(h_i(t))$, introduzida em (3.51). Temos que $\bar{h}_i$ é crescente e satisfaz

$$\bar{h}_i(t) \geq \frac{1}{4}h_i(t)\,, \quad \forall\, t \geq h_i^{-1}(t_*)\,, \tag{3.90}$$

onde $t_* \equiv 2M^{-1}g_i(0)$.

Prova: Facilmente se verifica que $\bar{h}_i$ é crescente. Mostremos então (3.90). Para isto é suficiente mostrarmos que

$$t - (2M)^{-1}g_i(t) \geq \frac{1}{4}t\,, \quad \forall\, t \geq t_*\,. \tag{3.91}$$

Ora

$$g_i(t) - g_i(0) \leq Mt \iff t - (2M)^{-1} g_i(t) \geq \frac{t}{2} - (2M)^{-1} g_i(0) \geq \frac{t}{4},$$

pois $t \geq t_* = 2M^{-1} g_i(0) \Leftrightarrow \dfrac{t}{4} \geq (2M)^{-1} g_i(0)$. Assim temos (3.91), como desejávamos.

□

Agora apresentaremos o principal teorema desta seção.

Teorema 8 . Sejam $2 < p \leq p_0$ e $\Phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, quaisquer. Existe uma solução fraca $\vec{v}$ do problema (3.5), (3.46) satisfazendo

$$\int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{v}|^p \leq c\varphi(t)\,.$$

Prova: Denotemos

$$U(t) \equiv \Omega(\bar{t}) \equiv \Omega_0 \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i(\bar{h}_i(t)) \right].$$

Devido ao lema anterior, temos a sequência crescente de domínios $U(1) \subset U(2) \subset \cdots \subset U(k) \subset \cdots$, satisfazendo

$$\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U(k)\,.$$

Seja $\vec{u}^k$ solução fraca em $\Omega(k)$, conforme Proposição 4. Para $t_0 \leq r + 1 \leq k$, de (3.83), temos

$$y^k(r) = \int_{\Omega(r)} \zeta |\nabla \vec{u}^k|^p = (2M)^{-1} \int_{U(r)} |\nabla \vec{u}^k|^p + \sum_{i=1}^{m_1} \int_{\omega_i(r)} \zeta |\nabla \vec{u}^k|^p \leq \varphi(r).$$

Daí,

$$\int_{U(r)} |\nabla \vec{u}^k|^p \leq 2M\varphi(r)\,, \quad \forall\, t_0 \leq r + 1 \leq k.$$

Portanto, para cada r fixado existe uma subsequência $\{\vec{u}^{k_j}\}$ de $\{\vec{u}^k\}$ e uma função $\vec{u}_r \in W^{1,p}(U(r))$, tais que

$$\begin{array}{lll} \vec{u}^{k_j} \rightharpoonup \vec{u}_r\,, & \text{em } W^{1,p}(U(r)) \\ \vec{u}^{k_j} \to \vec{u}_r\,, & \text{em } L^p(U(r))\,. \end{array} \tag{3.92}$$

Tomando subsequência de subsequência e observando que $\vec{u}_{r_1} = \vec{u}_{r_2}$ em $U(r_1)$, para $r_2 \geq r_1$, definindo $\vec{u} = \vec{u}_r$ em $U(r)$, temos que existe uma subsequência final convergindo fraco para $\vec{u} \in W^{1,p}_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$. E, analogamente ao Capítulo 2, mostra-se que $\vec{u}$ é solução fraca de (3.36).

Agora mostraremos que

$$\int_{\Omega(r)} \zeta |\nabla \vec{u}|^p \leq c\varphi(r)\,. \tag{3.93}$$

Começamos definindo o espaço de Sobolev Homogêneo com Peso

$$V^{1,p}(\Omega(r)) \equiv \left\{ \vec{w} \in D^{1,p}(\Omega(r)); ||\vec{w}||_V < \infty \text{ e } \vec{w} = 0 \text{ em } \partial\Omega \cap \partial\Omega(r) \right\},$$

onde

$$||\vec{w}||_V = \left(\int_{\Omega(r)} \zeta |\nabla \vec{w}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, usando (3.83) temos

$$||\vec{u}^k||_V = \int_{\Omega(r)} \zeta |\nabla \vec{u}^k|^p \leq c\varphi(r)\,, \quad \forall\, t_0 \leq r+1 \leq k. \tag{3.94}$$

Como $\zeta^{-\frac{1}{p-1}} \in L^1_{loc}(\Omega(r))$, temos que $V^{1,p}(\Omega(r))$ é reflexivo (Teorema 1.3 de [15]), e assim (3.94) implica que, a menos de subsequência,

$$\vec{u}^k \rightharpoonup \vec{w}_r \ \text{ em } V^{1,p}(\Omega(r)). \tag{3.95}$$

Afirmamos que

$$\vec{w}_r = \vec{u} \ \text{ em } \Omega(r).$$

De fato, como ζ é constante em $U(r)$, temos

$$V^{1,p}(\Omega(r)) \subset V^{1,p}(U(r)) \equiv D^{1,p}\left(U(r), \partial\Omega \cup \partial U(r)\right).$$

Assim, de (3.92) e (3.95), têm-se que $\vec{w}_r = \vec{u}$ em $U(r)$. Ora, para $r' > r$ temos $\vec{w}_{r'} = \vec{w}_r$ em $\Omega(r)$. Daí, tomamos $r' > r$ tal que $\Omega(r) \subset U(r')$ (isto é possível devido à (3.90)), temos $\vec{w}_{r'} = \vec{u}$ em $U(r')$, o que implica $\vec{w}_r = \vec{u}$ em $\Omega(r)$, como afirmamos.

Portanto, pela Proposição III.5(iii) de [9], temos (3.93). Assim, concluímos a prova do teorema.

□

3.4 Problema de Stokes com Lei de Potência para Seções Divergentes

Nesta seção estamos nas mesmas condições da seção anterior, diferindo apenas na definição de λ, que aqui é dada por (3.8), para $n = 3$, ou seja,

$$\lambda = 2 - 3p\,; \tag{3.96}$$

e no valor de δ, que aqui vale 0, ou seja, o nosso sistema de equações agora é

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v})\right\} & = & \nabla p \quad \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{v} & = & 0 \quad \text{em } \Omega \\ \vec{v} & = & 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\Sigma_i} \vec{v} \cdot \vec{n} & = & \Phi_i. \end{array} \tag{3.97}$$

É natural que sigamos os passos da seção anterior, inclusive esperando menos cálculos. A importância desta seção está na "melhora"do intervalo de aceitação de p para o teorema de existência, que antes era $(2, p_0]$, enquanto aqui será $(2, 3]$, como veremos a seguir.

Teorema 9 . Dados $\Phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, quaisquer satisfazendo (3.5). Então existe $\vec{v}$ solução fraca de (3.97), com $p \in (2, 3]$. Ademais, $\vec{v}$ satisfaz

$$\int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{v}|^p \leq c \sum_{i=1}^{m} \int_0^{h_i(t)} g_i^{\lambda}(s)\, ds\,.$$

Prova: Procederemos como na seção anterior, só que usando $h(T)^{-3}$ ao invés de T^{-1}, com $h(T) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} h_i(T)$. Assim, o sistema truncado fica,

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{div}\left\{\left(h(T)^{-3} + \left|D(\vec{u}) + D(\vec{a})\right|^{p-2}\right)[D(\vec{u}) + D(\vec{a})]\right\} & = & \nabla p \quad \text{em } \Omega(T) \\ \nabla \cdot \vec{u} & = & 0 \quad \text{em } \Omega(T) \\ \vec{u} & = & 0 \quad \text{em } \partial\Omega(T) \\ \displaystyle\int_{\Sigma} \vec{u} \cdot \vec{n} & = & 0\,. \end{array} \tag{3.98}$$

Contas similares à seção anterior nos levam à

$$\begin{aligned} y(t) \quad \equiv \quad & \int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{u}^T|^p \leq h(T)^{-3} \left(\int_{\Omega(T)} \zeta |\nabla \vec{a}|^2 + \sum_{i=1}^{m} |\vec{a}|^2_{1,2,\omega_i(t)} \right) + \int_{\Omega(T)} \zeta |\nabla \vec{a}|^p \\ & + \sum_{i=1}^{m} \Big\{ |\vec{a}|^p_{1,p,\omega_i(t)} + \left(h(T)^{-3} [g_i(h_i(t))]^{\frac{p-6}{p}} + [g_i(h_i(t))]^{\frac{-3(p-1)^2}{p}} \right) |\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} \\ & + h(T)^{-3} \left([g_i(h_i(t))]^{\frac{3(p-2)}{p}} + [g_i(h_i(t))]^{\frac{9(p-2)}{2p}} \right) |\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} + |\vec{u}^T|^p_{1,p,\omega_i(t)} \Big\} . \end{aligned} \tag{3.99}$$

Os termos de (3.99), que não são coeficientes de $|\vec{u}^T|^r_{1,p,\omega_i(t)}$, $r = 1, 2, p$, são majorados como anteriormente, salvo os termos multiplicados por $h(T)^{-3}$. Para estes termos, como $h(T) \geq cg_i(h_i(s))$, fazendo a mudança de variável $r = h_i^{-1}(s)$ estimamos

$$h(T)^{-3} \int_{\Omega(T)} \zeta |\nabla \vec{a}|^2 \leq c \int_0^{h_i(t)} [g_i(h_i(s))]^{-4-\lambda} ds$$

$$h(T)^{-3} |\vec{a}|^2_{1,2,\omega_i(t)} \leq c \int_0^{h_i(t)} [g_i(h_i(s))]^{-4-\lambda} ds \,.$$

Assim, os termos de (3.99) que não são coeficientes de $|\vec{u}^T|^r_{1,p,\omega_i(t)}$, $r = 1, 2, p$, são majorados por

$$c\varphi_1^i(t) = c \int_0^{h_i(t)} [g_i(h_i(s))]^{2-3p} ds \,.$$

Majorando os termos de (3.99) que são coeficientes de $|\vec{u}^T|^r_{1,p,\omega_i(t)}$, $r = 1, 2, p$, obtemos por fim

$$\begin{aligned} y(t) \quad \leq \quad c \sum_{i=1}^{m} \Big\{ & \varphi_1^i(t) + [g_i(h_i(t))]^{\frac{-3(p-1)^2}{p}} |\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} \\ & + [g_i(h_i(t))]^{\frac{3(p-6)}{2p}} |\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} + |\vec{u}^T|^p_{1,p,\omega_i(t)} \Big\} . \end{aligned}$$

Agora, tomamos $\beta = \lambda$ e a restrição para p fica $p \in (2, 3]$. O restante da prova é análogo à seção anterior.

$\square$

Observação 15 . Tomando $h(T)^{-3}$ no lugar de T^{-1} na seção anterior, embora tenhamos contas diferentes, a restrição para p continua a mesma ($2 < p \leq p_0$), isto deve-se ao fato de $p_0 < \dfrac{54}{19}$.

3.5 Problema de Stokes com Lei de Potência para Domínios com Seções Convergentes e Divergentes

Nesta seção estamos nas mesmas condições da anterior, apenas diferindo na condição sobre $I_i(\infty)$, que aqui satisfaz (3.4), com $0 < m_1 < m$.

Teorema 10 . Sejam Ω caracterizado pela condição (3.4), com $0 < m_1 < m$ e $\Phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, quaisquer satisfazendo (3.5). Então existe $\vec{v}$ solução fraca de (3.97), com $p \in (2, 3]$. Ademais, $\vec{v}$ satisfaz

$$\int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{v}|^p \leq c \sum_{i=1}^{m_1} \int_0^{h_i(t)} g_i^\lambda(s)\, ds \,.$$

Prova: Consideremos o seguinte truncamento de Ω, para $t_0 \leq t \leq T$

$$\Omega(t,T) = \Omega_0 \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m_1} \Omega_{ih_i(T)} \right] \bigcup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^{m} \Omega_{iT} \right],$$

onde

$$h_i(t) = \begin{cases} t\,, \quad i = m_1+1, \ldots, m \\ \text{como em (3.48), (3.49)}\,, \quad i = 1, \ldots, m_1 \,. \end{cases}$$

Seja $\vec{u}^T \in W_0^{1,p}(\Omega(T,T))$, a solução do sistema (3.98), para esta seção (existe conforme Capítulo 2), com $\mathrm{p}^T \in L^p(\Omega(T,T))$ sendo a pressão associada à tal solução. Agora, como antes, introduzimos a função "truncamento":

$$\zeta(x,t) = \begin{cases} \dfrac{h_i(t) - x_n}{g_i(h_i(t))} \quad , \quad x \in \omega_i(t)\,, \quad i = 1, \ldots, m_1 \\ (2M)^{-1} \quad , \quad x \in \Omega_0 \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m_1} \Omega_{i\bar{h}_i(t)} \right] \bigcup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^{m} \Omega_{iT} \right] \\ 0 \quad , \quad x \in \left[\bigcup_{i=1}^{m_1} \Omega_i \setminus \Omega_{ih_i(t)} \right] \bigcup \left[\bigcup_{i=m_1+1}^{m} \Omega_i \setminus \Omega_{iT} \right]. \end{cases} \tag{3.100}$$

Multiplicamos (3.98_1) por $\zeta \vec{u}^T$, conforme o Teorema 2, e integramos sobre o cojunto $\Omega(t,T)$, para $t_0 \leq t \leq T$, a fim de obtermos

$$\int_{\Omega(t,T)} \left\{ h(T)^{-3} [D(\vec{u}^T) + D(\vec{a})] + S(\vec{u}^T) \right\} : D(\zeta \vec{u}^T) = \int_{\Omega(t,T)} \mathrm{p}^T \vec{u}^T \cdot \nabla \zeta \,,$$

que, como em (3.99), fornece

$$
\begin{aligned}
y(t) \quad \equiv \quad & \int_{\Omega(t,T)} \zeta |\nabla \vec{u}^T|^p \leq h(T)^{-3} \left(\int_{\Omega(T,T)} \zeta |\nabla \vec{a}|^2 + \sum_{i=1}^{m_1} |\vec{a}|^2_{1,2,\omega_i(t)} \right) + \int_{\Omega(t,T)} \zeta |\nabla \vec{a}|^p \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} \left\{ |\vec{a}|^p_{1,p,\omega_i(t)} + \left(h(T)^{-3} [g_i(h_i(t))]^{\frac{p-6}{p}} + [g_i(h_i(t))]^{\frac{-3(p-1)^2}{p}} \right) |\vec{u}^T|_{1,p,\omega_i(t)} \right. \\
& \left. + h(T)^{-3} \left([g_i(h_i(t))]^{\frac{3(p-2)}{p}} + [g_i(h_i(t))]^{\frac{9(p-2)}{2p}} \right) |\vec{u}^T|^2_{1,p,\omega_i(t)} + |\vec{u}^T|^p_{1,p,\omega_i(t)} \right\}.
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

Agora, desde que os canais $i = m_1 + 1, \ldots, m,$ convergem, temos

$$
\begin{aligned}
h(T)^{-3} \int_{\Omega(t,T)} \zeta |\nabla \vec{a}|^2 &\leq c \left(\sum_{i=1}^{m_1} \int_0^{h_i(t)} g_i^{-7}(s)\, ds + 1 \right) \\
\int_{\Omega(T,T)} \zeta |\nabla \vec{a}|^2 &\leq c \left(\sum_{i=1}^{m_1} \int_0^{h_i(t)} g_i^{2-3p}(s)\, ds + 1 \right).
\end{aligned}
$$

Os demais termos de (3.101), que não são coeficientes de $|\vec{u}^T|^r_{1,p,\omega_i(t)}$, $r = 1, 2, p$, são majorados como na seção anterior, e assim, podemos majorar todos estes termos por

$$
\varphi_1(t) = c \left(\sum_{i=1}^{m_1} \int_0^{h_i(t)} g_i^{2-3p}(s)\, ds + 1 \right).
$$

Os termos restantes de (3.101) são majorados também como na seção anterior.

Por fim, tomando $\beta = \lambda$, o restante da prova segue exatamente como na última seção.

□

3.6 Problema de Navier-Stokes com Lei de Potência para Domínios com Seções Convergentes e Divergentes

Nesta seção, como na anterior, temos $I_i(\infty) = \infty$, $i = 1, \ldots, m_1$ e $I_i(\infty) < \infty$, $i = m_1 + 1, \ldots, m$, com λ definido por (3.31).

Obviamente, combinando as técnicas das seções 3 e 5 obtemos o seguinte teorema.

Teorema 11 . Sejam Ω caracterizado por (3.4), com $0 < m_1 < m$ e $\Phi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, quaisquer satisfazendo (3.5). Então existe $\vec{v}$ solução fraca de (3.32), com $p \in (2, p_0]$. Ademais, $\vec{v}$ satisfaz

$$\int_{\Omega(t)} \zeta |\nabla \vec{v}|^p \leq c \sum_{i=1}^{m_1} \int_0^{h_i(t)} g_i^{\lambda}(s)\, ds\,.$$

Capítulo 4

ESTIMATIVAS EM ESPAÇOS DE SOBOLEV COM PESO

4.1 Introdução e Notações

Neste capítulo estudaremos o problema de Stokes com Lei de Potência sujeito a uma força externa, num domínio Ω como em (1.1), com

$$\Omega_i = \{x; |x'| < g_i(x_n),\ x_n > 0\}, \tag{4.1}$$

onde as funções $g_i(t)$ satisfazem as seguintes condições, para todo $t_1, t_2, t > 0$,

$$\begin{aligned} & g_i(t) \geq g_0 > 0 \\ & |g_i(t_1) - g_i(t_2)| \leq M_i|t_1 - t_2|\,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Assumiremos ainda que as funções g_i satisfazem

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} g_i'(t) = 0\ ,\quad |g_i'(t)| \leq M_i\ ,\quad i = 1, \ldots, m\,. \tag{4.3}$$

Denotaremos

$$R_{i0} = 0, \quad R_{ik+1} = R_{ik} + (2M_i)^{-1} g_{ik}, \quad g_{ik} = g_i(R_{ik}), \quad i = 1, \ldots, m\,,$$

$$\Omega_{i(k)} = \{x \in \Omega_i;\ x_n < R_{ik}\}\ ,\quad \omega_{ik} = \Omega_{i(k+1)} \setminus \overline{\Omega}_{i(k)}\,,\qquad \Omega_{(k)} = \Omega_0 \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_{i(k)}\,;$$

$$N_i(x_n) = g_i(x_n) g_{ik_0}^{-1}, \quad i = 1, \ldots, m\,,$$
$$N(x)^\gamma = \begin{cases} N_i(x_n)^{\gamma_i} & , \quad x = \Omega_i \setminus \Omega_{(k_0)}, \quad i = 1, \ldots, m\,, \\ 1 & , \quad x \in \Omega_{(k_0)}, \end{cases}$$
$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m),$$
$$\alpha_i(t) = \int_0^t g_i(\tau)^{-1} d\tau\,, \quad \alpha_{ik} = \alpha_i(R_{ik}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Agora introduziremos os espaços de funções com peso. Para $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_m),\ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ e $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, denotamos por

$$L^{\mathbf{q}}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)$$

o espaço de funções com a seguinte norma finita

$$\left\| f; L^{\mathbf{q}}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\| = \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} |f|^{q_0}\, dx \right)^{1/q_0} + \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_i \setminus \Omega(k_0)} N_i^{q_i \gamma_i} \mathrm{e}^{q_i \beta_i \alpha_i(x_n)} |f|^{q_i}\, dx \right)^{1/q_i}.$$

Denotamos por

$$V^{1,\mathbf{q}}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)$$

o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma

$$\left\| f; V^{1,\mathbf{q}}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\| \equiv \left\| f; L^{\mathbf{q}}_{(\gamma-1,\beta)}(\Omega) \right\| + \left\| \nabla f; L^{\mathbf{q}}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\|,$$

e por

$$V^{-1,\mathbf{q},p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)$$

o espaço das distribuições $\vec{f}$, que podem ser representadas na forma

$$\vec{f} = \vec{f}^{(0)} + \left(\mathrm{div} \vec{f}^{(1)}, \ldots, \mathrm{div} \vec{f}^{(n)} \right), \tag{4.4}$$

com $\vec{f}^{(0)} \in L^{\mathbf{q}}_{((p-1)(\gamma+1),(p-1)\beta)}(\Omega),\ \vec{f}^{(j)} \in L^{\mathbf{q}}_{((p-1)\gamma,(p-1)\beta)}(\Omega)\,,\ \ j = 1, \ldots, n$ e

$$\left\| \vec{f}; V^{-1,\mathbf{q},p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\| \equiv \left\| \vec{f}^{(0)}; L^{\mathbf{q}}_{((p-1)(\gamma+1),(p-1)\beta)}(\Omega) \right\| + \sum_{j=1}^n \left\| \vec{f}^{(j)}; L^{\mathbf{q}}_{((p-1)\gamma,(p-1)\beta)}(\Omega) \right\|,$$

onde $(p-1)(\gamma + l) = ((p-1)(\gamma_1 + l), \ldots, (p-1)(\gamma_m + l))$. Sempre que tivermos $q_0 = q_1 = \cdots = q_m$, escreveremos simplesmente q ao invés de $\mathbf{q}$.

Os espaços de funções com peso em subdomínios Ω' de Ω, são definidos da mesma forma, com uma única diferença, as integrais são tomadas sobre Ω' em vez de Ω.

4.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados que serão necessários no decorrer deste capítulo.

Lema 22 . Sejam $i = 1, \ldots, m$ e $l,\ k \in \mathbb{N}$. Então valem as seguintes relações:

$$\frac{1}{2} g_{ik} \leq g_i(t) \leq \frac{3}{2} g_{ik}\,, \quad t \in [R_{ik}, R_{ik+1}]; \tag{4.5}$$

$$\int_0^{\infty} g_i(\tau)^{-1} d\tau = \infty; \tag{4.6}$$

$$\mu_* |l - k| \leq |\alpha_{il} - \alpha_{ik}| \leq \mu^* |l - k|\,, \tag{4.7}$$

onde μ_* e μ^* são constantes independentes de k e l.

Para prova ver [34], p. 102.

Sempre que uma função f satisfizer uma condição do tipo (4.5), isto é, existirem constantes positivas, c_1 e c_2, tais que

$$c_1 f(\beta) \leq f(t) \leq c_2 f(\beta)\ , \quad \forall\ t \in [\alpha, \beta]; \tag{4.8}$$

denotaremos (4.8) por

$$f(t) \sim f(\beta) \ \text{ em } [\alpha, \beta].$$

Como uma consequência imediata de (4.7) temos então

$$e^{\theta \alpha_i(t)} \sim e^{\theta \alpha_{il}} \quad \text{em} \quad \omega_{il}\,, \ \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}\,. \tag{4.9}$$

Lema 23 . Seja $\vec{u} \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Então temos

$$\int_{\omega_{ik}} g_i(x_n)^{q_i(\gamma_i - 1)} \left|\vec{u}\right|^{q_i} \leq c \int_{\omega_{ik}} g_i(x_n)^{q_i \gamma_i} \left|D(\vec{u})\right|^{q_i}, \quad i = 1, \ldots, m\,, \tag{4.10}$$

com c independente de $\vec{u}$ e k.

Prova: Devido à (1.10) e (1.8) temos,

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_i(x_n)} \left|\vec{u}\right|^{q_i} dx' &\leq c\,|\Sigma_i(x_n)|^{q_i/(n-1)} \int_{\Sigma_i(x_n)} \left|\nabla_{x'}\vec{u}\right|^{q_i} dx' \leq c g_i(x_n)^{q_i} \int_{\Sigma_i(x_n)} \left|D'(\vec{u})\right|^{q_i} dx' \\ &\leq c g_i(x_n)^{q_i} \int_{\Sigma_i(x_n)} \left|D(\vec{u})\right|^{q_i} dx',\end{aligned}$$

onde $D'(\vec{u}(x', x_n)) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial x_s} + \dfrac{\partial u_s}{\partial x_r}\right)$, $s, r = 1, \ldots, n-1$. Agora, multiplicando por $g_i(x_n)^{q_i(\gamma_i-1)}$ e integrando sobre x_n de R_{ik} à R_{ik+1}, obtemos (4.10).

$\square$

Proposição 5 . Seja $\vec{u} \in V^{1,q}_{\gamma,\beta}(\Omega)$. Então

$$\left\|\vec{u}; L^q_{(\gamma-1,\beta)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\nabla\vec{u}; L^q_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\| , \tag{4.11}$$

onde $c = c(k_0, \mu_*, \mu^*)$.

Prova: Seja $\vec{\varphi}_n \in C^\infty_0(\Omega)$ tal que

$$\vec{\varphi}_n \longrightarrow \vec{u} \quad \text{em } V^{1,q}_{(\gamma,\beta)}(\Omega).$$

Usando (1.9), (4.9), (4.10) e (1.8), obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\vec{\varphi}_n; L^q_{(\gamma-1,\beta)}(\Omega)\right\| &= \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\vec{\varphi}_n\right|^q\right)^{1/q} + \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_i\setminus\Omega_{(k_0)}} N_i^{q(\gamma_i-1)} e^{q\beta_i\alpha_i} \left|\vec{\varphi}_n\right|^q\right)^{1/q} \\ &\leq c\left\{\left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\nabla\vec{\varphi}_n\right|^q\right)^{1/q} + \sum_{i=1}^m \left(\int_{\Omega_i\setminus\Omega_{(k_0)}} N_i^{q(\gamma_i-1)} e^{q\beta_i\alpha_i} \left|\nabla\vec{\varphi}_n\right|^q\right)^{1/q}\right\} \\ &= c\left\|\nabla\vec{\varphi}_n; L^q_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\| ,\end{aligned}$$

onde $c = c(k_0, \mu_*, \mu^*)$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos (4.11).

$\square$

Lema 24 . Seja $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$ e seja ξ_k uma função suave "cut-off"tal que

$$\xi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_{(k)} \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_{(k+1)} \end{cases} , \quad 0 \le \xi_k \le 1 ,$$

e

$$|\nabla \xi_k| \le c g_{ik}^{-1} , \quad x \in \omega_{ik} , \quad i = 1, \dots, m . \tag{4.12}$$

Então existe um vetor $\vec{W}_k \in W_0^{1,q}(\Omega)$, satisfazendo a equação

$$\mathrm{div} \vec{W}_k = -\mathrm{div}\,(\xi_k N^{q\gamma} \vec{u}) , \tag{4.13}$$

$\vec{W}_k$ pode ser representado como uma soma

$$\vec{W}_k = \vec{W}_k^{(1)} + \vec{W}_k^{(2)} ,$$

onde supp $\vec{W}_k^{(1)} \subset \Omega_{(k+1)} \backslash \overline{\Omega}_{(k)}$, supp $\vec{W}_k^{(2)} \subset \Omega_{(k+1)} \backslash \overline{\Omega}_{(k_0)}$, e as seguintes estimativas valem:

$$\left\| N^{-(q-1)\gamma} \nabla \vec{W}_k^{(1)} \right\|_{q, \Omega_{(k+1)} \backslash \overline{\Omega}_{(k)}} \le c \left\| N^{\gamma} D(\vec{u}) \right\|_{q, \Omega_{(k+1)} \backslash \overline{\Omega}_{(k)}} ; \tag{4.14}$$

$$\left\| N^{-(q-1)\gamma} \nabla \vec{W}_k^{(2)} \right\|_{q, \Omega_{(k+1)} \backslash \overline{\Omega}_{(k_0)}} \le c\varepsilon(k_0) \left\| N^{\gamma} D(\vec{u}) \right\|_{q, \Omega_{(k+1)} \backslash \overline{\Omega}_{(k_0)}} , \tag{4.15}$$

com $\varepsilon(k_0) \longrightarrow 0$, quando $k_0 \to \infty$, e a constante c independe de k e $\vec{u}$.

Prova: Tomamos a função "cut-off" ξ_k dependendo só de $x_n^{(i)}$ quando $x \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, m$, sempre podemos fazer esta escolha. Como div $\vec{u} = 0$, representamos o lado direito de (4.13) na forma:

$$-\mathrm{div}\,(\xi_k N^{q\gamma} \vec{u}) = -N^{q\gamma} \nabla \xi_k \cdot \vec{u} - \xi_k \nabla N^{q\gamma} \cdot \vec{u} \equiv S_{k1}(x) + S_{k2}(x) .$$

Agora construiremos $\vec{W}_k = \vec{W}_k^{(1)} + \vec{W}_k^{(2)}$, com $\vec{W}_k^{(j)}$, $j = 1, 2$, sendo solução da equação

$$\mathrm{div}\, \vec{W}_k^{(j)} = S_{kj}. \tag{4.16}$$

$j = 1$: Como $\vec{u} \in \mathcal{D}_0^{1,q}(\Omega)$,

$$\int_{\omega_{ik}} S_{k1} dx = g_{ik_0}^{-q\gamma_i} \int_{R_{ik}}^{R_{ik+1}} \xi_k' g_i(x_n)^{q\gamma_i} \left(\int_{\Sigma_i(x_n)} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dx' \right) dx_n = 0.$$

Daí, devido ao Lema 7, existe $\vec{W}_{ik}^{(1)}$, tal que

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}\, \vec{W}_{ik}^{(1)} = S_{k1} \ \text{ em } \omega_{ik} \\ &\vec{W}_{ik}^{(1)} = 0 \ \text{ em } \partial\omega_{ik} \\ &\left\| \nabla \vec{W}_{ik}^{(1)} \right\|_{q, \omega_{ik}} \le c_i \left\| S_{k1} \right\|_{q, \omega_{ik}} . \end{aligned} \tag{4.17}$$

O ponto importante aqui é que podemos tomar a constate c_i em (4.17_3) independente de k. De fato, a mudança de coordenadas

$$y' = 2M_i g_{ik}^{-1} x' \ , \quad y_n = 2M_i g_{ik}^{-1}(x_n - R_{ik}),$$

leva o domínio ω_{ik} no domínio

$$\tilde{\omega}_{ik} \equiv \{y : |y'| < G_{ik}(y_n)\, ,\ 0 < y_n < 1\}\, ,$$

onde $G_{ik}(y_n) \equiv g_i\left(R_{ik} + (2M_i)^{-1} g_{ik} y_n\right) 2M_i g_{ik}^{-1}$ e, devido à (4.5), G_{ik} satisfaz

$$M_i \le G_{ik}(t) \le 3M_i\, , \quad |G_{ik}(t_1) - G_{ik}(t_2)| \le M_i |t_1 - t_2|\, , \quad t, t_1, t_2 > 0.$$

Assim, uma vez que $\dfrac{\partial}{\partial x_j} = 2M_i g_{ik}^{-1} \dfrac{\partial}{\partial y_j}$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_x \vec{W}_{ik}^{(1)}(x) &= 2M_i g_{ik}^{-1} \mathrm{div}_y \tilde{\vec{W}}_{ik}^{(1)}(y) \\ S_{k1}(x) &= 2M_i g_{ik}^{-1} \tilde{S}_{k1}(x) \\ \left\|\nabla_x \vec{W}_{ik}^{(1)}\right\|_{q,\omega_{ik}}^q &= 2M_i g_{ik}^{-1} \left\|\nabla_x \tilde{\vec{W}}_{ik}^{(1)}\right\|_{q,\tilde{\Omega}_{i(k)}}^q . \end{aligned}$$

Disto, vemos que a mudança de coordenadas leva o problema (4.17) num problema análogo em $\tilde{\omega}_{ik}$, com a mesma constante c_i, e como $\tilde{\omega}_{ik}$ não depende de k temos que c_i também não depende de k.

Agora vamos estimar a norma $\|S_{k1}\|_{q,\omega_{ik}}$. Devido à (4.12), (4.5) e (4.10), temos

$$\begin{aligned} \|S_{k1}\|_{q,\omega_{ik}} &= \left(\int_{\omega_{ik}} \left|N^{q\gamma_i} \nabla \xi_k \cdot \vec{u}\right|^q\right)^{1/q} \le c\left(\int_{\omega_{ik}} g_i^{q^2\gamma_i}(x_n) g_{ik_0}^{-q^2\gamma_i} g_{ik}^{-q} \left|\vec{u}\right|^q\right)^{1/q} \\ &\le c g_{ik_0}^{-q\gamma_i} \left(\int_{\omega_{ik}} g_i^{q(q\gamma_i - 1)}(x_n) \left|\vec{u}\right|^q\right)^{1/q} \\ &\le c\left(\int_{\omega_{ik}} g_i^{q^2\gamma_i}(x_n) g_{ik_0}^{-q^2\gamma_i} \left|D(\vec{u})\right|^q\right)^{1/q} = c\left\|N_i^{q\gamma_i} D(\vec{u})\right\|_{q,\omega_{ik}} . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Assim, de (4.17_3) e (4.18), segue

$$\left\|\nabla \vec{W}_{ik}^{(1)}\right\|_{q,\omega_{ik}} \le c\left\|N_i^{q\gamma_i} D(\vec{u})\right\|_{q,\omega_{ik}} . \tag{4.19}$$

Agora, segundo (4.5), $g_i(x_n) \sim g_{ik}$, isto implica que podemos multiplicar (4.19) por $N_i^{-(q-1)\gamma_i}$ para obter

$$\left\|N_i^{-(q-1)\gamma_i} \nabla \vec{W}_{ik}^{(1)}\right\|_{q,\omega_{ik}} \le c\left\|N_i^{\gamma_i} D(\vec{u})\right\|_{q,\omega_{ik}} . \tag{4.20}$$

Por fim, estendemos os vetores $\vec{W}_{ik}^{(1)}$ por zero em $\Omega \setminus \overline{\omega}_{ik}$ e definimos

$$\vec{W}_k^{(1)}(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \vec{W}_{ik}^{(1)}(x).$$

Obviamente $\operatorname{div} \vec{W}_k^{(1)} = S_{k1}$, $\operatorname{supp} \vec{W}_k^{(1)} \subset \Omega_{(k+1)} \setminus \overline{\Omega}_{(k)}$ e

$$\left\| N^{-(q-1)\gamma} \nabla \vec{W}_k^{(1)} \right\|_{q,\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k)}} \leq c \left\| N^{\gamma} D(\vec{u}) \right\|_{q,\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k)}},$$

e assim temos (4.14).

$j = 2$: Como, para $i = 1, \ldots, m$,

$$\int_{\Sigma_i(x_n)} S_{k2}\, dx' = q\gamma_i g_{ik_0}^{-q\gamma_i} g_i(x_n)^{q\gamma_i - 1} g_i'(x_n) \xi_k(x_n) \int_{\Sigma_i(x_n)} u_n dx' = 0,$$

temos

$$\int_{\omega_{il}} S_{k2}(x)\, dx = 0\,, \quad i = 1, \ldots, m\,,\ l = k_0, k_0 + 1, \ldots, k\,.$$

Assim, pelo Lema 7, para cada ω_{il} podemos obter um vetor $\vec{W}_{il}^{(2)}$, tal que

$$\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{W}_{il}^{(2)} = S_{k2} \ \text{ em } \omega_{il} \\ \vec{W}_{il}^{(2)} = 0 \ \text{ em } \partial\omega_{il} \\ \left\| \nabla \vec{W}_{il}^{(2)} \right\|_{q,\omega_{il}} \leq c_i \, \|S_{k2}\|_{q,\omega_{il}}\ , \end{array} \tag{4.21}$$

com c_i independente de k e l (como no caso $j = 1$).

Agora estimaremos $\|S_{k2}\|_{q,\omega_{il}}$. Devido à (4.10), temos

$$\begin{array}{rcl} \|S_{k2}\|_{q,\omega_{il}} & \leq & c \left(\displaystyle\int_{\omega_{il}} \left| g_i'(x_n) \right|^q g_i(x_n)^{q(q\gamma_i - 1)} g_{ik_0}^{-q^2\gamma_i} \left| \vec{u} \right|^q \right)^{1/q} \\ & \leq & c g_{ik_0}^{-q\gamma_i} \displaystyle\sup_{x \in \omega_{il}} \left(\left| g_i'(x_n) \right| \right) \left(\int_{\omega_{il}} g_i(x_n)^{q(q\gamma_i - 1)} \left| \vec{u} \right|^q \right)^{1/q} \\ & \leq & c\varepsilon^{(i)}(k_0) \left(\displaystyle\int_{\omega_{il}} \left(g_i^{q\gamma_i}(x_n) g_{ik_o}^{-q\gamma_i} \right)^q \left| D(\vec{u}) \right|^q \right)^{1/q} \\ & = & c\varepsilon^{(i)}(k_0) \left\| N_i^{q\gamma_i} D(\vec{u}) \right\|_{q,\omega_{il}}, \end{array} \tag{4.22}$$

onde c independe de l e, devido à (4.3),

$$\varepsilon^{(i)}(k_0) \equiv \sup_{\substack{x \in \Omega_i \\ x_n \geq k_0}} |g_i'(x_n)| \ \longrightarrow \ 0\,, \ \text{ quando } k_0 \to \infty\,, \ \ i = 1, \ldots, m\,.$$

Procedendo como antes, de (4.21_3) e (4.22), obtemos

$$\left\| N_i^{-(q-1)\gamma_i} \nabla \vec{W}_{il}^{(2)} \right\|_{q,\omega_{il}} \leq c\varepsilon^{(i)}(k_0) \left\| N_i^{\gamma_i} D(\vec{u}) \right\|_{q,\omega_{il}} .$$

Como

$$\Omega_{(k+1)} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)} = \bigcup_{j=1}^{m} \left(\bigcup_{l=k_0}^{k} \omega_{il} \right),$$

podemos definir

$$\vec{W}_k^{(2)} \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=k_0}^{k} \vec{W}_{il}^{(2)}.$$

Assumindo que $\vec{W}_{il}^{(2)}$ é estendido por zero em $\Omega \setminus \overline{\omega}_{il}$, obviamente temos

$$\operatorname{div} \vec{W}_k^{(2)} = S_{k2} \quad , \quad \operatorname{supp} \vec{W}_k^{(2)} \subset \Omega_{(k+1)} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)} \quad \text{e}$$

$$\left\| N^{-(q-1)\gamma} \nabla \vec{W}_k^{(2)} \right\|_{q,\Omega_{(k+1)} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \leq c\varepsilon(k_0) \left\| N^{\gamma} D(\vec{u}) \right\|_{q,\Omega_{(k+1)} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} ,$$

onde $\varepsilon(k_0) \equiv \max\limits_{i=1,\ldots,m} \varepsilon^{(i)}(k_0)$ e a constante c é independente de k. Portanto, temos (4.15).

$\square$

4.3 Soluções Fracas para o Problema de Stokes com Lei de Potência e Fluxo Zero

Consideremos o problema: Obter $\vec{v}$ e p satisfazendo

$$\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v})\right\} + \nabla \mathrm{p} & = & \vec{f} & \text{em } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{v} & = & 0 & \text{em } \Omega \\ \vec{v} & = & 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \int_\Sigma \vec{v} \cdot \vec{n} & = & 0\,. & \end{array} \tag{4.23}$$

Multiplicando (4.23_1) por $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$ e integrando por partes, obtemos como em (2.18),

$$\int_\Omega \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v}) : D(\vec{\varphi}) = \langle \vec{f}, \vec{\varphi} \rangle. \tag{4.24}$$

Definição 6 *:* Uma *solução fraca* para o problema (4.23) é uma função $\vec{v} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\vec{v} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$;

(ii) $\vec{v}$ satisfaz (4.24), para todo $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(iii) $\vec{v}$ satisfaz $(4.23_2) - (4.23_4)$.

A seguir temos um teorema de existência e unicidade para o problema (4.23).

Teorema 12 . Se $\vec{f} \in D^{-1,p'}(\Omega)$, então existe uma única solução fraca $\vec{v}$ para o problema (4.23) e, esta solução satisfaz

$$\left|\vec{v}\right|_{1,p} \leq c \left\|\vec{f}\right\|_{D^{-1,p'}(\Omega)}^{1/(p-1)}. \tag{4.25}$$

A prova deste teorema é feita aplicando o método de Galerkin junto com o método de monotonicidade de Browder-Minty, como na prova da Proposição 11.

Agora deduziremos algumas estimativas com peso para as integrais de Dirichlet das soluções do problema (4.23), sobre os domínios ω_{ik}. Iniciaremos provando uma estimativa em $\Omega_{(k)}$.

Teorema 13 . Seja $\vec{v}$ uma solução fraca do problema (4.23), satisfazendo (4.24) com $\vec{f} \in V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \cap D^{-1,p'}(\Omega)$ e $\vec{\varphi} \in W^{1,p'}_{loc}(\Omega) \cap \mathcal{D}(\Omega)$. Então existem números $\beta_0 > 0$ e $\gamma_0 > 0$, tais que para $|\beta_i| < \beta_0$ e $|\gamma_i| < \gamma_0$, $i = 1, \ldots, m$, $\vec{v}$ satisfaz

$$\int_{\Omega_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p dx \leq c Q_k \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'} , \tag{4.26}$$

com

$$Q_k = 1 + \sum_{i=1}^{m} Q_k^{(i)} , \quad \text{onde} \quad Q_k^{(i)} = \begin{cases} 1 & , \ \beta_i \geq 0 \\ \mathrm{e}^{-p\beta_i\alpha_{ik+1}} & , \ \beta_i < 0 \end{cases} ,$$

e a constante c independe de k.

Prova: Tomamos a função

$$\vec{\eta}(x) \equiv \xi_k N^{p\gamma}(x)\vec{v}(x) + \vec{W}_k(x) ,$$

onde div $\vec{W}_k = -\text{div}\ (\xi_k N^{p\gamma}\vec{v})$, sendo ξ_k e $\vec{W}_k$ dados pelo Lema 24. Facilmente temos $\eta \in \mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$. Obviamente (4.24) vale para $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$. Assim, substituindo $\vec{\eta}$ em (4.24), obtemos

$$\int_\Omega \vec{f} \cdot \vec{\eta} = \int_\Omega \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v}) : D(\xi_k N^{p\gamma}\vec{v}) + \int_\Omega \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v}) : D(\vec{W}_k) . \tag{4.27}$$

Como

$$\begin{aligned} D_{rs}(\xi_k N^{p\gamma}\vec{v}) \quad &= \quad \xi_k N^{p\gamma} D_{rs}(\vec{v}) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \xi_k}{\partial x_r} N^{p\gamma} v_s + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_s} N^{p\gamma} v_r\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\xi_k\left(\frac{\partial N^{p\gamma}}{\partial x_r} v_s + \frac{\partial N^{p\gamma}}{\partial x_s} v_r\right)\right], \end{aligned}$$

de (4.27),

$$
\begin{aligned}
z_k &\equiv \int_{\Omega(k)} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p \leq \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} \xi_k N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p \\
&\quad + \left| \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v}) : D(\vec{W}_k^{(1)}) \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} D(\vec{v}) : D(\vec{W}_k^{(2)}) \right| \\
&\quad + c\left| \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} \nabla\xi_k \cdot D(\vec{v}) \cdot \vec{v} \right| \\
&\quad + c\left| \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k_0)}} \xi_k \left|D(\vec{v})\right|^{p-2} \nabla N^{p\gamma} \cdot D(\vec{v}) \cdot \vec{v} \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega_{(k+1)}} \vec{f}^{(0)} \cdot \left(\xi_k N^{p\gamma}\vec{v} + \vec{W}_k\right) \right| \\
&\quad + \left| \int_{\Omega_{(k+1)}} \sum_{j=1}^{m} \vec{f}^{(j)} \cdot \nabla \left(\xi_k N^{p\gamma} v_j + W_{kj}\right) \right| \\
&\equiv \sum_{s=1}^{7} I_s \,.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Agora vamos estimar cada um dos termos I_s, de (4.28).

$$
I_1 \leq \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p = z_{k+1} - z_k \,. \tag{4.29}
$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder e (4.14), temos

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} \left|D(\vec{v})\right|^{p-1} \left|D(\vec{W}_k^{(1)})\right| \\
&\leq \left(\int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} N^{-p(p-1)\gamma} \left|\nabla \vec{W}_k^{(1)}\right|^p \right)^{1/p} \\
&\leq c \left(\int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p \right)^{1/p} \\
&= \int_{\Omega_{(k+1)}\backslash\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{v})\right|^p = c(z_{k+1} - z_k) \,.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder e (4.15), vem

$$\begin{aligned} I_3 &\leq c\left(\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N^{p\gamma}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k)}} N^{-p(p-1)\gamma}\left|\nabla\vec{W}_k^{(2)}\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leq c\varepsilon(k_0)\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N^{p\gamma}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \leq c\varepsilon(k_0)z_k + c(z_{(k+1)} - z_k)\,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Agora, aplicamos a Desigualdade de Hölder, (4.5), (4.12) e (4.10), para obtermos

$$\begin{aligned} I_4 &\leq c\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma}\left|\nabla\xi_k\right|\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1}\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\leq c\sum_{i=1}^{m}\int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} g_i^{-1}(x_n) g_{ik_0} g_{ik}^{-1}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1}\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\leq c\sum_{i=1}^{m} g_{ik_0}^{-1}\int_{\omega_{ik}}\left(N_i^{\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|\right)^{p-1} N_i^{\gamma_i-1}\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\leq c\sum_{i=1}^{m} g_{ik_0}^{-1}\left(\int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\omega_{ik}} N_i^{p(\gamma_i-1)}\left|\vec{\mathrm{v}}\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leq c\sum_{i=1}^{m} g_{ik_0}^{-\gamma_i}\left(\int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\omega_{ik}} g_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{1/p} \\ &= c\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k)}} N^{p\gamma}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p = c(z_{k+1} - z_k)\,. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Usando a Desigualdade de Hölder, (4.3) e (4.10), temos

$$\begin{aligned} I_5 &\leq c\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}}\left|\nabla N^{p\gamma}\right|\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1}\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\leq c\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=k_0}^{k}\int_{\omega_{il}}\left|g_i'(x_n)\right| g_{ik_0}^{-p\gamma_i} g_i^{p\gamma_i-1}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1}\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\leq c\varepsilon(k_0)\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=k_0}^{k} g_{ik_0}^{-p\gamma_i}\int_{\omega_{il}}\left(g_i^{\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|\right)^{p-1}\left(g_i^{\gamma_i-1}\left|\vec{\mathrm{v}}\right|\right) \\ &\leq c\varepsilon(k_0)\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=k_0}^{k} g_{ik_0}^{-p\gamma_i}\left(\int_{\omega_{il}} g_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\omega_{il}} g_i^{p(\gamma_i-1)}\left|\vec{\mathrm{v}}\right|^p\right)^{1/p} \\ &\leq c\varepsilon(k_0)\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=k_0}^{k} g_{ik_0}^{-p\gamma_i}\left(\int_{\omega_{il}} g_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\omega_{il}} g_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{1/p} \\ &= c\varepsilon(k_0)\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N^{p\gamma}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p = c\varepsilon(k_0)z_k + c(z_{k+1} - z_k)\,. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Aplicando a Desigualdade de Young obtemos,

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq c\left(\int_{\Omega_{(k+1)}} N^{p\gamma}\left|\vec{f}^{(0)}\right|\left|\vec{v}\right| + \int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}}\left|\vec{f}^{(0)}\right|\left|\vec{W}_k\right|\right) \\
&\leq c(\delta)\int_{\Omega_{(k+1)}} N^{p\gamma+\frac{p}{p-1}}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{\frac{p}{p-1}} + \delta\int_{\Omega_{(k+1)}} N^{p(\gamma-1)}\left|\vec{v}\right|^p \\
&\quad +\delta\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N^{p(-(p-1)\gamma-1)}\left|\vec{W}_k\right|^p .
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Precisamos estimar as duas últimas integrais em (4.34), para isto usamos (4.10), (4.14) e (4.15) donde vem

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{(k+1)}} N^{p(\gamma-1)}\left|\vec{v}\right|^p &\leq c\left(\int_{\Omega_{(k_0)}}\left|D(\vec{v})\right|^p + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=k_0}^{k} g_{ik_0}^{-p(\gamma_i-1)}\int_{\omega_{il}} g_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{v})\right|^p\right) \\
&\leq c g_{k_0}^p\int_{\Omega_{(k+1)}} N^{p\gamma}\left|D(\vec{v})\right|^p = c g_{k_0}^p z_{k+1}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N^{p(-(p-1)\gamma-1)}\left|\vec{W}_k\right|^p &\leq c\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=k_0}^{k} g_{ik_0}^{p(p-1)\gamma_i+p}\int_{\omega_{il}} g_i^{-p(p-1)\gamma_i}\left|D(\vec{W}_k)\right|^p \\
&\leq c\varepsilon(k_0) g_{k_0}^p\int_{\Omega_{(k+1)}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N^{p\gamma}\left|D(\vec{v})\right|^p \\
&= c\varepsilon(k_0) g_{k_0}^p z_k + c g_{k_0}^p (z_{k+1}-z_k)\,.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Assim, de (4.34) – (4.36), segue

$$I_6 \leq c(\delta)\mathfrak{F}_{k+1} + \delta z_k + c(z_{k+1}-z_k)\,, \tag{4.37}$$

onde

$$\mathfrak{F}_{k+1} = \int_{\Omega_{(k+1)}} N^{p\gamma+p'}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} + \sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega_{(k+1)}} N^{p\gamma}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} .$$

Procedendo com cálculos como na obtenção de (4.37), obtemos

$$I_7 \leq c(\delta)\mathfrak{F}_{k+1} + \delta z_k + c(z_{k+1}-z_k)\,. \tag{4.38}$$

Portanto, de (4.28) – (4.33) e (4.37) – (4.38), temos

$$z_k \leq c_1(z_{k+1}-z_k) + c_2\mathfrak{F}_{k+1}\,,$$

ou equivalentemente,

$$z_k \le b_0^{-1} z_{k+1} + c_3 \mathfrak{F}_{k+1}, \tag{4.39}$$

onde $b_0^{-1} = \dfrac{c_1}{1+c_1} < 1$.

Agora vamos estimar $\mathfrak{F}_{k+1}$ pela norma $\left\| \vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\|$.

$\beta_{i_0} \ge 0\,, \quad i_0 \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{i_0 k+1}} N_{i_0}^{p\gamma_{i_0}+p'} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_{i_0 k+1}} N_{i_0}^{p\gamma_{i_0}} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} \\
&\le c(k_0) \int_{\Omega_{i_0 k_0}} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} + \int_{\Omega_{i_0} \setminus \Omega_{(k_0)}} N_i^{p(\gamma_{i_0}+1)} \mathrm{e}^{p\beta_{i_0}\alpha_{i_0}(x_n)} |\vec{f}^{(0)}|^{p'} + \\
&\sum_{j=1}^{n} \left(c(k_0) \int_{\Omega_{i_0 k_0}} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} + \int_{\Omega_{i_0} \setminus \Omega_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_{i_0}} \mathrm{e}^{p\beta_{i_0}\alpha_{i_0}(x_n)} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} \right) \\
&\le c(k_0) \left\| \vec{f}^{(0)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+1),(p-1)\beta)}(\Omega) \right\|^{p'} + \sum_{j=1}^{n} \left\| \vec{f}^{(j)}; L^{p'}_{((p-1)\gamma,(p-1)\beta)}(\Omega) \right\|^{p'} \\
&\le c(k_0) \left\| \vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\|^{p'} .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$\beta_{i_0} < 0\,, \quad i_0 \in \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_{i_0 k+1}} N_{i_0}^{p\gamma_{i_0}+p'} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_{i_0 k+1}} N_{i_0}^{p\gamma_{i_0}} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} \\
&\le \mathrm{e}^{-p\beta_{i_0}\alpha_{i_0 k+1}} \int_{\Omega_{i_0 k+1}} N_{i_0}^{p(\gamma_{i_0}+1)} \mathrm{e}^{p\beta_{i_0}\alpha_{i_0}} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} + \mathrm{e}^{-p\beta_{i_0}\alpha_{i_0 k+1}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_{i_0 k+1}} N_{i_0}^{p\gamma_{i_0}} \mathrm{e}^{p\beta_{i_0}\alpha_{i_0}} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} \\
&\le c\mathrm{e}^{-p\beta_{i_0}\alpha_{i_0 k+1}} \left\| \vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\|^{p'} .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Seja

$$Q_k^{(i)} = \begin{cases} 1 & , \ \beta_i \ge 0 \\ \mathrm{e}^{-p\beta_i \alpha_{ik+1}} & , \ \beta_i < 0\,. \end{cases} \tag{4.42}$$

Note que os números $Q_k^{(i)}$ satisfazem as condições:

$$Q_{k+1}^{(i)} \ge Q_k^{(i)}\,, \quad Q_{k+l}^{(i)} \le Q_k^{(i)} b^l\,, \quad i = 1, \dots, m\,. \tag{4.43}$$

De fato, a primeira condição é óbvia, uma vez que $\alpha_{ik+2} \ge \alpha_{ik+1}$. Já a segunda, no caso $\beta_i \ge 0$, segue imediatamente para $b_i = 1 + \varepsilon\,,\ \varepsilon > 0$, já para $\beta_i < 0$, usando

(4.5), temos

$$
\begin{aligned}
Q_{k+l}^{(i)} &= Q_k^{(i)} \exp\left(-p\beta_i \sum_{j=1}^{l} \int_{R_{ik+j}}^{R_{ik+j+1}} g_i^{-1}(t)\,dt\right) \leq Q_k^{(i)} \mathrm{e}^{-p\beta_i M_i^{-1} l} \\
&= Q_k^{(i)} b_i^l ,
\end{aligned}
$$

onde $b_i = \mathrm{e}^{-p\beta_i M_i^{-1}}$. Tomando $b = \max\limits_{1 \leq i \leq m} b_i$, temos a segunda condição de (4.43), como desejávamos.

Seja agora $Q_k = 1 + \sum\limits_{i=1}^{m} Q_k^{(i)}$. De (4.40) – (4.42), temos

$$
\mathfrak{F}_{k+1} \leq c Q_k \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} , \tag{4.44}
$$

onde os números Q_k satisfazem (4.43). Assim, de (4.39) e (4.44), obtemos

$$
z_k \leq b_0^{-1} z_{k+1} + c Q_k \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} . \tag{4.45}
$$

Como em (4.45), podemos escrever

$$
\begin{aligned}
z_{k+1} &\leq b_0^{-1} z_{k+2} + c Q_{k+1} \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \\
&\leq b_0^{-1} \left(b_0^{-1} z_{k+3} + c Q_{k+2} \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \right) + c Q_{k+1} \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \\
&= b_0^{-2} z_{k+3} + c \left(Q_{k+1} + Q_{k+2} b_0^{-1} \right) \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} .
\end{aligned}
$$

Daí reescrevemos (4.45) como

$$
z_k \leq b_0^{-3} z_{k+3} + c \left(Q_k + b_0^{-1} Q_{k+1} + b_0^{-2} Q_{k+2} \right) \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} .
$$

Assim, sucessivamente, obtemos

$$
z_k \leq c \left(Q_k + b_0^{-1} Q_{k+1} + \ldots + b_0^{-l} Q_{k+l} \right) \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} + b_0^{-(l+1)} z_{k+l+1} .
$$

Agora, usamos (4.43), para obtermos

$$
z_k \leq c \left(1 + b b_0^{-1} + \ldots + (b b_0^{-1})^l \right) Q_k \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} + b_0^{-(l+1)} z_{k+l+1} . \tag{4.46}
$$

Tomamos

$$
1 < b < b_0 , \tag{4.47}
$$

do que segue

$$1 + bb_0^{-1} + \ldots + (bb_0^{-1})^l \leq b_0(b_0 - b)^{-1},$$

e daí, (4.46) fica

$$z_k \leq c\, Q_k \left\| \vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega) \right\|^{p'} + b_0^{-(l+1)} z_{k+l+1}\,. \tag{4.48}$$

Analisaremos agora, quais as condições sobre β_i, a fim de que possamos ter (4.47):

$1 < b \equiv \max\limits_{i=1,\ldots,m} b_i$:
Ora, se $\beta_i \geq 0$, não há o que fazer, pois neste caso $b_i = 1 + \varepsilon\,, \varepsilon > 0$. Já para $\beta < 0\,,\ b_i = \mathrm{e}^{p|\beta_i|/M_i} > 1$. Portanto, sempre $b > 1$.

$b < b_0$:
Se $\beta_i \geq 0\,,\ b_i = 1 + \varepsilon < b_0$, para $\varepsilon \ll 1$. Se $\beta_i < 0\,,\ b_i = \mathrm{e}^{p|\beta_i|/M_i} < b_0$, desde que $|\beta_i| < \dfrac{M_i \ln b_0}{p}$.
Portanto, para que possamos ter (4.47), basta

$$|\beta_i| < \frac{M_i \ln b_0}{p} \equiv \beta_0.$$

Agora passaremos o limite $l \to \infty$ em (4.48). De (4.5), temos para
$t \in [R_{ik}, R_{ik+1}]$,

$$g_i(t) \leq \frac{3}{2} g_{ik} = \frac{3}{2} g_i(R_{ik}) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^2 g_i(R_{ik-1}) \leq \cdots \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1-k_0} g_i(R_{ik_0})\,.$$

Daí, para $\overline{\gamma} \equiv \max_{i=1,\ldots,m} |\gamma_i|$,

$$\begin{aligned}
z_{k+l+1} &= \int_{\Omega_{(k+l+1)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \\
&= \int_{\Omega_{(k_0)}} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \\
&\leq \int_{\Omega_{(k_0)}} \left|\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|^p + c \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p|\gamma_i|} \left|\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|^p \\
&\leq \int_{\Omega_{(k_0)}} \left|\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|^p + c \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} g_i^{p|\gamma_i|} \left|\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|^p \\
&\leq \int_{\Omega_{(k_0)}} \left|\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|^p + c \left(\frac{3}{2}\right)^{p\overline{\gamma}(k+l)} \int_{\Omega \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|^p \\
&\leq c(k) \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{p\overline{\gamma}}\right]^l \int_{\Omega} \left|\nabla\vec{\mathrm{v}}\right|^p \leq c(k) \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{p\overline{\gamma}}\right]^l \left\|\vec{f}\right\|_{-1,p',\Omega}^{p'} .
\end{aligned}$$

Assim,

$$b_0^{-(l+1)} z_{k+l+1} \leq c(k) \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{p\gamma_0}}{b_0}\right]^l \left\|\vec{f}\right\|_{-1,p',\Omega}^{p'} \quad \xrightarrow{l\to\infty} \quad 0 \,, \tag{4.49}$$

desde que

$$\overline{\gamma} < \frac{\ln b_0}{p \ln(3/2)} \equiv \gamma_0 \,.$$

Portanto, fazendo $l \to \infty$ em (4.48), de (4.49), temos

$$\int_{\Omega_{(k)}} N^{p\gamma} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \leq c\, Q_k \left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'} ,$$

onde c independe de k.

□

O próximo resultado é a estimativa com peso para as integrais de Dirichlet da solução em ω_{ik}, como havíamos prometido.

Teorema 14 . Consideremos as condições do Teorema 13 satisfeitas. Então existe um número $\beta_* > 0$, tal que para $|\beta_i| < \beta_*$, a solução fraca $\vec{v}$, do problema (4.23), satisfaz a estimativa

$$\int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \left|D(\vec{v})\right|^p \, dx \le c\nu_k^{(i)} \left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'} , \tag{4.50}$$

com $\nu_k^{(i)} = \mathrm{e}^{-p\beta_i\alpha_{ik}}$, $i = 1, \ldots, m$, $k \ge k_0$, e a constante c independe de k e $\vec{f}$.

Prova: Para $b_i = \mathrm{e}^{p|\beta_i|M_i^{-1}}$, $i = 1, \ldots, m$, temos

$$\nu_{k+s}^{(i)} \le \nu_k^{(i)} b_i^s \quad , \quad \nu_{k-s}^{(i)} \le \nu_k^{(i)} b_i^s \, . \tag{4.51}$$

De fato, para a primeira inequação,

$$\alpha_{ik+s} = \alpha_{ik} + \int_{R_{ik}}^{R_{ik+s}} g_i^{-1}(t)\, dt \, ,$$

mas de (4.5)

$$\frac{2}{3}\sum_{j=0}^{s-1}(R_{ik+j+1} - R_{ik+j})g_{ik+j}^{-1} \le \sum_{j=0}^{s-1}\int_{R_{ik+j}}^{R_{ik+j+1}} g_i^{-1}(t)\, dt \le 2\sum_{j=0}^{s-1}(R_{ik+j+1} - R_{ik+j})g_{ik+j}^{-1} \, ,$$

que pela definição de R_{ir+1} nos dá

$$\frac{1}{3}(M_i)^{-1}s \le \int_{R_{ik}}^{R_{ik+s}} g_i^{-1}(t)\, dt \le (M_i)^{-1}s \, .$$

Daí

$$\nu_{k+s}^{(i)} = \mathrm{e}^{-p\beta_i\alpha_{ik+s}} \le \nu_k^{(i)}\mathrm{e}^{-p|\beta_i|M_i^{-1}s} = \nu_k^{(i)} b_i^s.$$

Assim temos a primeira inequação de (4.51). A verificação da segunda é análoga.

Agora, para $i = 1, \ldots, m$ e $l + 1 \le k$, sejam

$$\widetilde{Q}_l^{(i)}(k) = \sum_{s=-l-1}^{l+1} \nu_{k+s}^{(i)} \qquad \text{e} \qquad \widehat{Q}_k^{(i)} = \sum_{s=k_0}^{k} \nu_s^{(i)} \, .$$

Para $k \geq \max\{l+2, l+j+1\}$, temos

$$\widetilde{Q}^{(i)}_{l+1}(k) \geq \widetilde{Q}^{(i)}_{l}(k) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{Q}^{(i)}_{l+j}(k) \leq c\, \widetilde{Q}^{(i)}_{l}(k) b_i^j\,. \tag{4.52}$$

De fato, a primeira segue direto da definição, quanto à segunda,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}^{(i)}_{l+j}(k) &= \widetilde{Q}^{(i)}_{l}(k) + \sum_{s=-l-j-1}^{-l} \nu^{(i)}_{k+s} + \sum_{s=l+2}^{l+j+1} \nu^{(i)}_{k+s} \\
&\leq \widetilde{Q}^{(i)}_{l}(k) + \sum_{s=0}^{j+1} \nu^{(i)}_{k-l-s} + \sum_{s=2}^{j+1} \nu^{(i)}_{k+l+s} \\
&\leq \widetilde{Q}^{(i)}_{l}(k) + \nu^{(i)}_{k-l} \sum_{s=0}^{j+1} b_i^s + \nu^{(i)}_{k+l} \sum_{s=2}^{j+1} b_i^s \\
&\leq c\left(\widetilde{Q}^{(i)}_{l}(k) + \nu^{(i)}_{k-l} b_i^j + \nu^{(i)}_{k+l} b_i^j\right) \leq c\, \widetilde{Q}^{(i)}_{l}(k) b_i^j\,,
\end{aligned}$$

onde, na segunda desigualdade usamos (4.51) e na terceira a desigualdade básica $1 + a + \cdots + a^r \leq c a^r$, com c independente de r e $a > 1$.

Similarmente, para $l \leq k - k_0 - 1$, mostra-se que

$$\widehat{Q}^{(i)}_{k+1} \geq \widehat{Q}^{(i)}_{k} \qquad \text{e} \qquad \widehat{Q}^{(i)}_{k+l} \leq c\, \widehat{Q}^{(i)}_{k} b_i^l\,. \tag{4.53}$$

Assumiremos, neste momento, $l \leq k - k_0 - 1$ e, denotaremos por $\vec{u}^{(i)}_{k+l} \in W^{1,p}_0\left(\Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{ik-l}\right)$, a solução do sistema

$$\begin{cases}
\operatorname{div} \vec{u}^{(i)}_{k+l} &= -\operatorname{div}\left(N_i^{p\gamma_i} \vec{v}\right) \quad \text{em } \Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{ik-l} \\
\vec{u}^{(i)}_{k+l} &= 0 \quad \text{em } \partial\left(\Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{ik-l}\right).
\end{cases}$$

Como no Lema 24, tal solução existe e satisfaz

$$\left\| N_i^{-(p-1)\gamma_i} \nabla \vec{u}^{(i)}_{k+l} \right\|_{p, \Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{ik-l}} \leq c\varepsilon(k_0) \left\| N_i^{\gamma_i} D(\vec{v}) \right\|_{p, \Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{ik-l}}\,, \tag{4.54}$$

com c independente de k e l. Seja ξ_k a mesma função "cut-off"do Lema 24. Definimos

$$\vec{\eta}(x) = \begin{cases}
N_i^{p\gamma_i} \xi_{k+l+1} \vec{v} + \vec{W}_{k+l+1} & , x \in \omega_{ik+l+1} \\
N_i^{p\gamma_i} \xi_{k-l-1} \vec{v} + \vec{W}_{k-l-1} & , x \in \omega_{ik-l-1} \\
N_i^{p\gamma_i} \vec{v} + \vec{u}^{(i)}_{k+l} & , x \in \Omega_{ik+l+1} \setminus \overline{\Omega}_{ik-l} \\
0 & , x \in \Omega \setminus \left(\bigcup_{s=-l-1}^{l+1} \omega_{ik+s} \right),
\end{cases}$$

onde os vetores $\vec{W}_j$ foram construídos no Lema 24. Obviamente, $\operatorname{div} \vec{\eta} = 0$ e $\operatorname{supp} \vec{\eta} \subset \Omega_{ik+l+2} \setminus \overline{\Omega}_{ik-l-1}$.

Agora, substituimos $\vec{\eta}$ na integral (4.24) e procedemos como na prova do Teorema 13, para obtermos

$$z_l^{(k)} \le c_1\left(z_{l+1}^{(k)} - z_l^{(k)}\right) + c_2\mathfrak{F}_l^{(k)}\,, \tag{4.55}$$

onde

$$z_l^{(k)} \equiv \int_{\Omega_{ik+l+1}\setminus\overline{\Omega}_{ik-l}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{v})\right|^p$$

e

$$\mathfrak{F}_l^{(k)} \equiv \int_{\Omega_{ik+l+2}\setminus\overline{\Omega}_{ik-l-1}}\left(N_i^{p\gamma_i+p'}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} + \sum_{j=1}^{n} N_i^{p\gamma_i}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'}\right).$$

Como no Teorema 13, devemos estimar $\mathfrak{F}_l^{(k)}$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_l^{(k)} &= \sum_{t=-1}^{2l+1}\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p\gamma_i+p'}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=-1}^{2l+1}\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p\gamma_i}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'}\\
&\le \sum_{t=-1}^{2l+1} \mathrm{e}^{-p\beta_i\alpha_{ik-l+t+1}}\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p\gamma_i+p'}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'}\\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{t=-1}^{2l+1}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_{ik-l+t}}\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p\gamma_i}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'}\\
&\le \sum_{t=-1}^{2l+1}\mathrm{e}^{-p\beta_i\alpha_{ik-l+t}}\left(\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p\gamma_i+p'}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'}\right.\\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n}\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p\gamma_i}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'}\right)\\
&\le \left(\sum_{t=-1}^{2l+1}\mathrm{e}^{-p\beta_i\alpha_{ik-l+t}}\right)\left[\sum_{t=-1}^{2l+1}\left(\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p(\gamma_i+1)}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'}\right.\right.\\
&\quad \left.\left. + \sum_{j=1}^{n}\int_{\omega_{ik-l+t}} N_i^{p\gamma_i}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'}\right)\right]\\
&\le \left(\sum_{s=-l-1}^{l+1}\mathrm{e}^{-p\beta_i\alpha_{ik+s}}\right)\left(\int_{\Omega_{ik+l+2}\setminus\overline{\Omega}_{ik-l}} N_i^{p(\gamma_i+1)}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'}\right.\\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega_{ik+l+2}\setminus\overline{\Omega}_{ik-l}} N_i^{p\gamma_i}\mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'}\right)\\
&\le c\left\|\vec{f};V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'}\sum_{s=-l-1}^{l+1}\nu_{k+s}^{(i)} = c\left\|\vec{f};V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'}\widetilde{Q}_l^{(i)}(k)\,.
\end{aligned}$$

Assim temos,

$$\mathfrak{F}_l^{(k)} \leq c \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \widetilde{Q}_l^{(i)}(k)\,.$$

Daí, reescrevemos (4.55) como,

$$z_l^{(k)} \leq b_*^{-1} z_{l+1}^{(k)} + c \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \widetilde{Q}_l^{(i)}(k)\,, \tag{4.56}$$

onde $b_* = \dfrac{1+c_1}{c_1} > 1$. Agora, aplicando (4.56) repetidas vezes e usando $1 < b_i < b_*$, obtemos

$$\begin{aligned} z_l^{(k)} &\leq b_*^{-k+2l+1} z_{k-l-1}^{(k)} + c \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \sum_{j=0}^{k-2l-2} b_*^{-j} \widetilde{Q}_{l+j}^{(i)}(k) \\ &\leq b_*^{-k+2l+1} z_{k-l-1}^{(k)} + c \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \widetilde{Q}_l^{(i)}(k) \sum_{j=0}^{k-2l-2} \left(\frac{b_i}{b_*} \right)^j \\ &\leq c \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \widetilde{Q}_l^{(i)}(k) + b_*^{-k+2l+1} z_{k-l-1}^{(k)}\,, \end{aligned}$$

isto é

$$z_l^{(k)} \leq c \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \widetilde{Q}_l^{(i)}(k) + b_*^{-k+2l+1} z_{k-l-1}^{(k)}\,. \tag{4.57}$$

Agora, fazendo $l = k_0$ em (4.57), temos

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p &\leq z_{k_0}^{(k)} \leq c \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \sum_{s=-k_0-1}^{k_0+1} \nu_{k+s}^{(i)} + b_*^{-k+2k_0+1} z_{k-k_0-1}^{(k)} \\ &\leq c\nu_k^{(i)} \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} \sum_{s=0}^{k_0+1} b_i^s + b_*^{-k+2k_0+1} z_{k-k_0-1}^{(k)}\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p \leq c(k_0) \nu_k^{(i)} \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'} + b_*^{-k+2k_0+1} z_{k-k_0-1}^{(k)}\,. \tag{4.58}$$

Neste ponto, precisamos estimar $z_{k-k_0-1}^{(k)}$, para isto começamos demonstrando a seguinte afirmação:

Afirmação: Para $k \geq k_0 + 1$, $|\beta_i| < \beta_*$ e $|\gamma_i| < \gamma_0$, temos

$$\int_{\omega_{ik_0+1} \bigcup \ldots \bigcup \omega_{ik-1}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p \leq c\, \widehat{Q}_k^{(i)} \left\| \vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega) \right\|^{p'}. \tag{4.59}$$

De fato, tomamos uma função "cut-off" $\xi_k^{(i)}$, do tipo ξ_k, só que $\xi_k^{(i)}$ é igual a 1 em $\omega_{ik_0+1}\bigcup\ldots\bigcup\omega_{ik-1}$ e se anula em $\Omega\setminus\bigcup_{s=k_0}^{k}\omega_{is}$, e procedemos como na prova do Teorema 13. Assim sendo, tomamos $\vec{\eta}(x)=\xi_k^{(i)}N_i^{p\gamma_i}\vec{\mathrm{v}}(x)+\vec{W}_k(x)$, substituimos em (4.24) e, como em (4.28), obtemos

$$h_k \equiv \int_{\omega_{ik_0+1}\bigcup\ldots\bigcup\omega_{ik-1}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \le \int_{\omega_{ik_0}\bigcup\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + \sum_{s=1}^{5} I_s\,, \tag{4.60}$$

depois procedemos como em (4.31) − (4.38), para obtermos as estimativas

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \left|\int_{\Omega_{ik+1}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}}) : D(\vec{W}_k)\right| \\ &\le \int_{\Omega_{ik+1}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1}\left|D(\vec{W}_k)\right| \le c\varepsilon(k_0)\int_{\Omega_{ik+1}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \\ &= c\varepsilon(k_0)\int_{\omega_{ik_0}\bigcup\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + c\varepsilon(k_0)h_k \end{aligned} \tag{4.61}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \left|\int_{\omega_{ik_0}\cup\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2}\nabla\xi_k\cdot D(\vec{\mathrm{v}})\cdot\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\le \int_{\omega_{ik_0}\cup\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1}\left|\nabla\xi_k^{(i)}\right|\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \le c\int_{\omega_{ik_0}\bigcup\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \left|\int_{\Omega_{ik+1}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2}\nabla N_i^{p\gamma_i}\cdot D(\vec{\mathrm{v}})\cdot\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\le \int_{\Omega_{ik+1}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|\nabla N_i^{p\gamma_i}\right|\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1}\left|\vec{\mathrm{v}}\right| \\ &\le c\varepsilon(k_0)\int_{\omega_{ik_0}\bigcup\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + c\varepsilon(k_0)h_k \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$
\begin{aligned}
I_4 \quad &\equiv \quad \left| \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \vec{f}^{(0)} \cdot \left(\xi_k^{(i)} N_i^{p\gamma_i} \vec{\mathrm{v}} + \vec{W}_k \right) \right| \\
&\leq \quad c \left(\int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left| \vec{f}^{(0)} \right| \left| \vec{\mathrm{v}} \right| + \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \left| \vec{f}^{(0)} \right| \left| \vec{W}_k \right| \right) \\
&\leq \quad c(\delta) \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i + p'} \left| \vec{f}^{(0)} \right|^{p'} + \delta \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p(\gamma_i - 1)} \left| \vec{\mathrm{v}} \right|^p \\
&\quad +\delta \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p(-(p-1)\gamma_i - 1)} \left| \vec{W}_k \right|^p \leq c(\delta) \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i + p'} \left| \vec{f}^{(0)} \right|^{p'} \\
&\quad +c\delta g_{k_0}^p \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p + c\varepsilon(k_0) g_{k_0}^p \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p \\
&\leq \quad c(\delta) \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p(\gamma_i + 1)} \left| \vec{f}^{(0)} \right|^{p'} + c g_{k_0}^p \delta \int_{\omega_{ik_0} \bigcup \omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p + c g_{k_0}^p \delta h_k
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

$$
\begin{aligned}
I_5 \quad &\equiv \quad \left| \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \sum_{j=1}^{n} \vec{f}^{(j)} \cdot \nabla \left(\xi_k^{(i)} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{v}_j + W_{kj} \right) \right| \\
&\leq \quad c \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left| \vec{f}^{(j)} \right| \left| \nabla \xi_k^{(i)} \right| \left| \mathrm{v}_j \right| + \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \left| \vec{f}^{(j)} \right| \left| \nabla N_i^{p\gamma_i} \right| \left| \mathrm{v}_j \right| \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left| \vec{f}^{(j)} \right| \left| \nabla \mathrm{v}_j \right| + \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \left| \vec{f}^{(j)} \right| \left| \nabla W_{kj} \right| \right) \\
&\leq \quad c \sum_{j=1}^{n} \left(c(\delta) \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left| \vec{f}^{(j)} \right|^{p'} + \delta \int_{\omega_{ik_0} \bigcup \omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p + \delta h_k \right).
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

Assim, de (4.60) − (4.65), temos para $k_0 \gg 1$ e $\delta \ll 1$

$$
\begin{aligned}
h_k \quad &\leq \quad c \left(\int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p(\gamma_i + 1)} \left| \vec{f}^{(0)} \right|^{p'} + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega_{ik+1} \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i} \left| \vec{f}^{(j)} \right|^{p'} \right) \\
&\quad +c_1 \int_{\omega_{ik_0} \bigcup \omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \left| D(\vec{\mathrm{v}}) \right|^p .
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

Agora, como

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_{ik+1}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p(\gamma_i+1)}\left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} &\leq c\left\|\vec{f}^{(0)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+1),(p-1)\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}\sum_{s=k_0}^{k}\nu_s^{(i)}\\ &= \left\|\vec{f}^{(0)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+1),(p-1)\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}\widehat{Q}_k^{(i)},\end{aligned}$$

e igualmente,

$$\int_{\Omega_{ik+1}\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p\gamma_i}\left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} \leq \left\|\vec{f}^{(j)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+1),(p-1)\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}\widehat{Q}_k^{(i)},$$

temos

$$\begin{aligned}h_k &\leq c\widehat{Q}_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'} + c_1\int_{\omega_{ik_0}\cup\,\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\\ &= c\widehat{Q}_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'} + c_1\int_{\omega_{ik_0}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + c_1(h_{k+1}-h_k)\,.\end{aligned}$$

Daí, para $b_0 = (c_1+1)/c_1$, segue

$$h_k \leq c\widehat{Q}_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'} + c_1\int_{\omega_{ik_0}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + b_0^{-1}h_{k+1}\,. \tag{4.67}$$

Aplicando (4.67) recursivamente e usando (4.53), obtemos para $1 < b_i < b_0$ e $r \geq 1$,

$$\begin{aligned}h_k &\leq c\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}\sum_{s=0}^{r}\widehat{Q}_{k+s}^{(i)}b_0^{-s}\\ &\quad +c_1\left(\sum_{s=0}^{r}b_0^{-s}\right)\int_{\omega_{ik_0}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + b_0^{-r}h_{k+r}\\ &\leq c\widehat{Q}_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}\sum_{s=0}^{r}(b_ib_0^{-1})^s\\ &\quad +c_1\left(\sum_{s=0}^{r}b_0^{-s}\right)\int_{\omega_{ik_0}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + b_0^{-r}h_{k+r}\\ &\leq cb_0(b_0-b_i)^{-1}\widehat{Q}_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}\\ &\quad +c_1b_0(b_0-b_i)^{-1}\int_{\omega_{ik_0}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p + b_0^{-r}h_{k+r}.\end{aligned}\tag{4.68}$$

Agora, como em (4.49), para

$$\gamma_0 \equiv \frac{\ln b_0}{p\ln(3/2)} > \gamma_i,$$

temos

$$b_0^{-1}h_{k+r} \quad \longrightarrow \quad 0\,,\ \text{quando}\ r\ \rightarrow\ \infty\,.$$

Portanto, fazendo $r\ \rightarrow\ \infty$ em (4.68), obtemos

$$h_k \leq c\widehat{Q}_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'} + c\int_{\omega_{ik_0}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{v})\right|^p.$$

Por fim, aplicamos (4.26) ao último termo da inequação acima, para obtermos

$$h_k \leq c\widehat{Q}_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'},$$

desde que $|\beta_i| < \beta_*$ e $|\gamma_i| < \gamma_0$, onde

$$\beta_* \equiv \min\left\{\frac{M_i\ln b_0}{p}, \frac{M_i\ln b_*}{p}\right\}.$$

Assim provamos a Afirmação.

Agora, usamos (4.59), (4.53) e o fato que $\widehat{Q}_{2k}^{(i)} \leq cb_i^k\nu_k^{(i)}$, para obtermos

$$\begin{aligned} z_{k-k_0-1}^{(k)} &= \int_{\omega_{ik_0+1}\bigcup\ldots\bigcup\omega_{i2k-k_0-1}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{v})\right|^p \leq c\widehat{Q}_{2k-k_0}^{(i)}\left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'} \\ &\leq c(k_0)b_i^k\nu_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'}. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Por fim, de (4.58) e (4.69), vem

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i}\left|D(\vec{v})\right|^p &\leq c(k_0)\nu_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'} + c(k_0)\left(\frac{b_i}{b_*}\right)^k\nu_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'} \\ &\leq c\nu_k^{(i)}\left\|\vec{f}; V_{(\gamma,\beta)}^{-1,p',p}(\Omega)\right\|^{p'}. \end{aligned}$$

□

Agora, para funções $\vec{f}^{(0)}$, $\vec{f}^{(s)}$, $s = 1,\ldots,n$, de suporte compacto em ω_{ik}, provaremos um resultado semelhante ao Teorema 3.4 de [34].

Teorema 15 . Suponhamos que as funções $\vec{f}^{(0)}$, $\vec{f}^{(s)}$, $s = 1, \dots, n$, tenham suporte compacto contido em ω_{ik} e $\vec{f} \in V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)$. Então a solução fraca $\vec{v}$ de (4.23) satisfaz as seguintes estimativas

$$\int_{\omega_{il}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i} \left|D(\vec{v})\right|^p \leq c\mathrm{e}^{-p\varepsilon_0 c_0 |k-l|} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}, \ i = 1, \dots, m \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{jl}} N_j^{p\gamma_j} \mathrm{e}^{p\beta_j\alpha_j} \left|D(\vec{v})\right|^p \ &\leq \ c\mathrm{e}^{-p\varepsilon_0 \alpha_{jl}} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}, \\ & \qquad j \neq i\,, \ i, \ j = 1, \dots, m\,, \end{aligned} \tag{4.71}$$

onde $\varepsilon_0 > 0$, $|\beta_j| \leq \beta_*$ e as constantes são independentes de k e l.

Prova: Sejam β_i, $\hat{\beta}_i \in (-\beta_*, \beta_*)$. Devido à (4.9) temos

$$\int_{\omega_{il}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i} \left|D(\vec{v})\right|^p \leq c\mathrm{e}^{p(\beta_i - \hat{\beta}_i)\alpha_{il}} \int_{\omega_{il}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\hat{\beta}_i\alpha_{il}} \left|D(\vec{v})\right|^p. \tag{4.72}$$

Aplicaremos (4.50), ao lado direito de (4.72), com
$\hat{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \hat{\beta}_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n)$,

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{il}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\hat{\beta}_i\alpha_{il}} \left|D(\vec{v})\right|^p \ &\leq \ c\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\hat{\beta})}(\Omega)\right\|^{p'} \\ &= \ c\left[\int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i + p} \mathrm{e}^{p\hat{\beta}_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} \right. \\ & \qquad \left. + \sum_{s=1}^{n} \int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\hat{\beta}_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(s)}\right|^{p'}\right] \\ &\leq \ c\mathrm{e}^{p(\hat{\beta}_i - \beta_i)\alpha_{ik}} \left[\int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i + p} \mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} \right. \\ & \qquad \left. + \sum_{s=1}^{n} \int_{\omega_{ik}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(s)}\right|^{p'}\right] \\ &= \ c\mathrm{e}^{p(\hat{\beta}_i - \beta_i)\alpha_{ik}} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}. \end{aligned}$$

Disto e de (4.72), temos

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{il}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i} \left|D(\vec{v})\right|^p \ &\leq \ c\mathrm{e}^{p(\beta_i - \hat{\beta}_i)\alpha_{il} + p(\hat{\beta}_i - \beta_i)\alpha_{ik}} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'} \\ &= \ c\mathrm{e}^{p(\beta_i - \hat{\beta}_i)(\alpha_{il} - \alpha_{ik})} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Tomando em (4.73) $\hat{\beta}_i = \beta_i - \varepsilon$ se $k < l$ e $\hat{\beta}_i = \beta_i + \varepsilon$ se $k \geq l$, e usando (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\omega_{il}} N_i^{p\gamma_i} \mathrm{e}^{p\beta_i\alpha_i} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p &\leq c\mathrm{e}^{-p\varepsilon_0|\alpha_{ik}-\alpha_{il}|} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'} \\ &\leq c\mathrm{e}^{-p\varepsilon_0\mu_*|k-l|} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}.\end{aligned}$$

Assim provamos (4.70).

Agora, para provarmos (4.71), tomamos

$$\beta^{(1)} = (\beta_1 + \varepsilon_0, \ldots, \beta_{i-1} + \varepsilon_0, \beta_i, \beta_{i+1} + \varepsilon_0, \ldots, \beta_m + \varepsilon_0)$$

com $\varepsilon_0 > 0$ e $|\beta_s + \varepsilon_0| < \beta_*, \ \ s = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m.$ Devido à estimativa (4.50), temos

$$\int_{\omega_{jl}} N_j^{p\gamma_j} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \leq c\mathrm{e}^{-p(\beta_j+\varepsilon_0)\alpha_{jl}} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta^{(1)})}(\Omega)\right\|^{p'}, \quad j \neq i. \tag{4.74}$$

Como supp $\vec{f} \subset \omega_{ik}$ e $\beta_i^{(1)} = \beta_i$, segue que

$$\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta^{(1)})}(\Omega)\right\|^{p'} = \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}.$$

E assim, de (4.74), temos

$$\begin{aligned}\int_{\omega_{jl}} N_j^{p\gamma_j} \mathrm{e}^{p\beta_j\alpha_j} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p &\leq \mathrm{e}^{p\beta_j\alpha_{jl}} \int_{\omega_{jl}} N_j^{p\gamma_j} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \\ &\leq c\mathrm{e}^{p\beta_j\alpha_{jl}-p(\beta_j+\varepsilon_0)\alpha_{jl}} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta^{(1)})}(\Omega)\right\|^{p'} \\ &= c\mathrm{e}^{-p\varepsilon_0\alpha_{jl}} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\|^{p'}.\end{aligned}$$

□

4.4 Estimativa Local em Espaços L^q com Peso

4.4.1 Introdução e Notações

Agora analisaremos estimativas locais, das soluções, em espaços L^q com peso. Consideraremos o problema (4.23) no domínio $\omega_{il}^* \equiv \Omega_{il+2} \setminus \overline{\Omega}_{il-1}$:

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}})\right\} + \nabla \mathrm{p} &= \vec{f} \quad \text{em } \omega_{il}^* \\ \nabla \cdot \vec{\mathrm{v}} &= 0 \quad \text{em } \omega_{il}^* \\ \vec{\mathrm{v}} &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega \cap \partial\omega_{il}^* . \end{aligned} \tag{4.75}$$

Afirmação 1: Fazendo a mudança de coordenadas

$$y' = 2M_i g_{il}^{-1} x' \quad , \quad y_n = (x_n - R_{il-1}) 2M_i g_{il}^{-1}, \tag{4.76}$$

temos que ω_{il} e ω_{il}^* são levados, respectivamente, em

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{il} &\equiv \left\{y; |y'| < G_{il}(y_n)\,,\ \gamma_{il}^{(1)} < y_n < 1 + \gamma_{il}^{(1)}\right\} \\ \hat{\omega}_{il}^* &\equiv \left\{y; |y'| < G_{il}(y_n)\,,\ 0 < y_n < 1 + \gamma_{il}^{(1)} + \gamma_{il}^{(2)}\right\}, \end{aligned} \tag{4.77}$$

onde

$$\begin{aligned} G_{il}(y_n) &\equiv g_{il}^{-1} 2M_i g_i\left(R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il} y_n\right) \\ \gamma_{il}^{(1)} &= g_{il-1}\, g_{il}^{-1} \quad , \quad \gamma_{il}^{(2)} = g_{il+1}\, g_{il}^{-1}. \end{aligned}$$

De fato,

$$x \in \omega_{il} \;\Leftrightarrow\; R_{il} < x_n < R_{il+1} \;\Leftrightarrow\; (R_{il} - R_{il-1}) 2M_i g_{il}^{-1} < y_n < (R_{il+1} - R_{il-1}) 2M_i g_{il}^{-1},$$

mas

$$(R_{il} - R_{il-1}) 2M_i g_{il}^{-1} = \gamma_{il}^{(1)} \quad \text{e} \quad (R_{il+1} - R_{il-1}) 2M_i g_{il}^{-1} = 1 + \gamma_{il}^{(1)}.$$

Daí

$$x \in \omega_{il} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_{il}^{(1)} < y_n < 1 + \gamma_{il}^{(1)}.$$

Ainda,

$$|x'| < g_i(x_n) \;\Leftrightarrow\; |y'| < 2M_i g_{il}^{-1} g_i(x_n) = G_{il}(y_n)\,.$$

Assim, (4.76) leva ω_{il} em $\hat{\omega}_{il}$. Analogamente, mostra-se também que (4.76) leva ω_{il}^* em $\hat{\omega}_{il}^*$. Portanto, concluimos a verificação da Afirmação 1.

Afirmação 2: Os domínios $\hat{\omega}_{il}$ e $\hat{\omega}^*_{il}$ independem de l, mais precisamente,

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \le \gamma_{il}^{(1)} \le 2 \quad &, \qquad \frac{1}{2} \le \gamma_{il}^{(2)} \le \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} M_i \le G_{il}(y_n) \le 6M_i \quad &, \qquad |G_{il}(t_1) - G_{il}(t_2)| \le M_i |t_1 - t_2|. \end{aligned} \tag{4.78}$$

De fato, usando (4.5), obtemos

$$\gamma_{il}^{(1)} = g_{il-1} g_{il}^{-1} = g_{il-1} g_i^{-1}(R_{il}) \ge \frac{2}{3} g_{il-1} g_{il-1}^{-1} = \frac{2}{3}\,.$$

E analogamente,

$$\gamma_{il}^{(1)} \le 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} \le \gamma_{il}^{(2)} \le \frac{3}{2}.$$

Assim verificamos a primeira linha de (4.78). Quanto ao primeiro termo da segunda linha de (4.78) analisaremos em três casos:
Caso 1: $0 < y_n < \gamma_{il}^{(1)}$
$x_n = R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il} y_n \ge R_{il-1}$
$x_n \le R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il} \gamma_{il}^{(1)} = R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il-1} = R_{il}$.
Daí, $x_n \in \overline{\omega}_{il-1}$ e, de (4.5), vem

$$\frac{1}{2} g_{il-1} g_{il}^{-1} 2M_i \le g_{il}^{-1} 2M_i g_i(x_n) \le \frac{3}{2} g_{il-1} g_{il}^{-1} 2M_i,$$

donde, usando agora (4.78_1), temos

$$\frac{2}{3} M_i \le \gamma_{il}^{(1)} M_i \le G_{il}(y_n) \le 3\gamma_{il}^{(1)} M_i \le 6M_i\,,$$

ou seja,

$$\frac{2}{3} M_i \le G_{il}(y_n) \le 6M_i. \tag{4.79}$$

Caso 2: $\gamma_{il}^{(1)} < y_n < 1 + \gamma_{il}^{(1)}$
$x_n \ge R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il} \gamma_{il}^{(1)} = R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il-1} = R_{il}$
$x_n \le R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il}(1 + \gamma_{il}^{(1)}) = R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il} \gamma_{il}^{(1)} + (2M_i)^{-1} g_{il}$
$= R_{il} + (2M_i)^{-1} g_{il} = R_{il+1}$.
Assim, $x_n \in \overline{\omega}_{il}$ e, de (4.5), temos

$$M_i = \frac{1}{2} g_{il} g_{il}^{-1} 2M_i \le G_{il}(y_n) \le \frac{3}{2} g_{il} g_{il}^{-1} 2M_i \le 3M_i\,,$$

ou seja,

$$M_i \leq G_{il}(y_n) \leq 3M_i. \tag{4.80}$$

Caso 3: $1 + \gamma_{il}^{(1)} < y_n < 1 + \gamma_{il}^{(1)} + \gamma_{il}^{(2)}$

$x_n \geq R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il}(1 + \gamma_{il}^{(1)}) = R_{il+1}$

$x_n \leq R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il}(1 + \gamma_{il}^{(1)} + \gamma_{il}^{(2)}) = R_{il+1} + (2M_i)^{-1} g_{il}\gamma_{il}^{(2)}$

$= R_{il+1} + (2M_i)^{-1} g_{il+1} = R_{il+2}$.

Portanto, $x_n \in \overline{\omega}_{il+1}$ e, de (4.5),

$$\frac{1}{2} g_{il+1} g_{il}^{-1} 2M_i \leq G_{il}(y_n) \leq \frac{3}{2} g_{il}^{-1} g_{il+1} 2M_i\,,$$

ou seja,

$$\gamma_{il}^{(2)} M_i \leq G_{il}(y_n) \leq 3M_i \gamma_{il}^{(2)}$$

e, usando novamente (4.78_1), vem

$$\frac{1}{2} M_i \leq G_{il}(y_n) \leq \frac{9}{2} M_i. \tag{4.81}$$

Assim, de (4.79) – (4.81), temos

$$\frac{1}{2} M_i \leq G_{il}(y_n) \leq 6M_i\,, \quad \forall\, y \in \hat{\omega}_{il}^*\,.$$

E para concluir a prova de (4.78_2), aplicamos (4.2), e obtemos

$$\begin{aligned} |G_{il}(t_1) - G_{il}(t_2)| &= g_{il}^{-1} 2M_i \left| g_i\left(R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il} t_1\right) - g_i\left(R_{il-1} + (2M_i)^{-1} g_{il} t_2\right)\right| \\ &\leq 2 g_{il}^{-1} M_i^2 \left|(2M_i)^{-1} g_{il}(t_1 - t_2)\right| = M_i |t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova da Afirmação 2.

Afirmação 3: A mudança de coordenadas (4.76), leva o sistema (4.75) no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} -\text{div}\left\{\left|D(\vec{w})\right|^{p-2} D(\vec{w})\right\} + \nabla\tilde{\text{p}} &= \vec{g} \;\text{ em }\; \hat{\omega}_{il}^* \\ \nabla \cdot \vec{w} &= 0 \;\text{ em }\; \hat{\omega}_{il}^* \\ \vec{w} &= 0 \;\text{ em }\; S_{il}^*\,, \end{aligned} \tag{4.82}$$

onde

$$\begin{aligned} &\vec{w}(y) = \vec{\text{v}}(x(y)); \\ &\tilde{\text{p}}(y) = (2M_i)^{-(p-1)} g_{il}^{p-1} \text{p}(x(y)); \\ &\vec{g}(y) = \vec{g}^{(0)}(y) + \left(\text{div}\, \vec{g}^{(1)}(y), \ldots, \text{div}\, \vec{g}^{(n)}(y)\right); \\ &\vec{g}^{(0)}(y) = (2M_i)^{-p} g_{il}^p \vec{f}^{(0)}(x(y)); \\ &\vec{g}^{(j)}(y) = (2M_i)^{-(p-1)} g_{il}^{p-1} \vec{f}^{(j)}(x(y)); \end{aligned} \tag{4.83}$$

$$S_{il}^* \equiv \partial\hat{\omega}_{il}^* \setminus \left\{y; y_n = 0 \text{ ou } y_n = 1 + \gamma_{il}^{(1)} + \gamma_{il}^{(2)}\right\}.$$

De fato, devido à (4.76),

$$\frac{\partial x_r}{\partial y_s} = (2M_i)^{-1} g_{il} \delta_{rs},$$

e assim obtemos,

$$D(\vec{\mathrm{v}}) = 2M_i g_{il}^{-1} D(\vec{w}),$$

que nos leva à

$$\operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}})\right\} = (2M_i)^p g_{il}^{-p} \operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{w})\right|^{p-2} D(\vec{w})\right\}. \tag{4.84}$$

Obtemos, ainda,

$$\nabla \mathrm{p} = 2M_i g_{il}^{-1} \nabla \tilde{\mathrm{p}} \quad \text{e} \quad \operatorname{div} \vec{f}^{(j)} = 2M_i g_{il}^{-1} \operatorname{div} \vec{g}^{(j)}. \tag{4.85}$$

Assim, de (4.75), (4.84) e (4.85), temos

$$-\operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{w})\right|^{p-2} D(\vec{w})\right\} + \nabla\left((2M_i)^{-(p-1)} g_{il}^{p-1} \mathrm{p}\right) =$$
$$(2M_i)^{-p} g_{il}^{p} \vec{f}^{(0)} + \left(\operatorname{div}\left[(2M_i)^{-(p-1)} g_{il}^{p-1} \vec{f}^{(1)}\right], \ldots, \operatorname{div}\left[(2M_i)^{-(p-1)} g_{il}^{p-1} \vec{f}^{(n)}\right]\right).$$

E temos (4.82_1), conforme (4.83). Assim findamos a prova da Afirmação 3.

Consideremos o sistema (4.82) num domínio U_{iR} ao invés de $\hat{\omega}_{il}^*$, isto é,

$$\begin{array}{rcll} -\operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{w})\right|^{p-2} D(\vec{w})\right\} + \nabla\tilde{\mathrm{p}} & = & \vec{g} & \text{em } U_{iR} \\ \nabla \cdot \vec{w} & = & 0 & \text{em } U_{iR} \\ \vec{w} & = & 0 & \text{em } S_{iR}, \end{array} \tag{4.86}$$

onde

$$\begin{array}{l} U_{iR} = \{y; |y'| < G_{il}(y_n)\,,\ 0 < y_n < R\} \\ S_{iR} = \partial U_{iR} \setminus \{y; y_n = 0 \text{ ou } y_n = R\}. \end{array}$$

Definição 7 . Seja $\vec{g} \in L^p(U_{iR})$. Uma função $\vec{w} \in W^{1,p}(U_{iR})$ é uma *solução fraca local* de (4.86) se, para toda $\vec{\varphi} \in W_0^{1,p}(U_{iR})$,

$$\int_{U_{iR}} \left|D(\vec{w})\right|^{p-2} D(\vec{w}) : D(\vec{\varphi}) = \int_{U_{iR}} \vec{g}^{(0)} \cdot \vec{\varphi} - \sum_{j=1}^{n} \int_{U_{iR}} \vec{g}^{(j)} \cdot \nabla \varphi_j + \int_{U_{iR}} \tilde{\mathrm{p}} \operatorname{div} \vec{\varphi}. \tag{4.87}$$

Observação 16 . A fórmula (4.24) vale para $\vec{\varphi} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, assim, temos que $\vec{v}$ é uma solução fraca local de (4.86), para todo $R > 0$.

Agora, como $\vec{v} = 0$ em S_{iR}, denotamos

$$U_{iR}^* \equiv \{y; 0 < y_n < R\}$$

e estendemos $\vec{v}$ por zero em $U_{iR}^* \setminus U_{iR}$ e continuamos ainda denotando tal extensão por $\vec{v} \in W_{1,p}(U_{iR}^*)$. Também estendemos $\vec{g}$ e $\tilde{p}$ por zero em $U_{iR}^* \setminus U_{iR}$ e permanecemos com a mesma notação. Para facilitar os cálculos fazemos a translação $x = y - (0, R/2)$ e continuamos ainda denotando $\vec{v}(y(x)) \equiv \vec{v}(x)$ e o mesmo para $\vec{g}$ e $\tilde{p}$, e escrevemos

$$\hat{U}_{iR}^* \equiv \left\{y; -\frac{R}{2} < |y_n| < \frac{R}{2}\right\}.$$

4.4.2 Estimativa Local para o Gradiente

Agora, usaremos as idéias de [12] e [14] para obtermos estimativa local para o gradiente da solução fraca $\vec{v}$. Começaremos listando uma série de lemas auxiliares.

Lema 25 . (ver [11]) Suponha que g é uma função mensurável não negativa em $U \subset \mathbb{R}^n$ (limitado). Sejam $\theta > 0$ e $a > 1$ duas constantes. Então, para $0 < q < \infty$, temos

$$g \in L^q(U) \quad \Longleftrightarrow \quad S \equiv \sum_{i \geq 1} a^{iq} \left|\left\{x \in U; g(x) > \theta a^i\right\}\right| < \infty$$

e

$$\frac{1}{C} S \leq \|g\|_q^q \leq C\left(|U| + S\right),$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas de θ, a e q.

Lema 26 . (ver [17]) Se $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\lim_{r \to 0} ⨍_{B_r(x)} |\vec{u}(y)|\, dy = g(x), \quad \text{qtp em } \mathbb{R}^n,$$

onde

$$⨍_U f\, dx = \frac{1}{|U|} \int_U f\, dx.$$

Definição 8 . Seja $\vec{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, a *função maximal de Hardy-Littlewood* é definida como

$$\mathfrak{M}\vec{u}(x) \equiv \sup_{r>0} \fint_{B_r(x)} |\vec{u}(y)|\, dy\,.$$

Se $\vec{u}$ não está definida fora de U, então difinimos

$$\mathfrak{M}_U \vec{u}(x) \equiv \mathfrak{M}\left(\chi_U \vec{u}\right)(x)\,.$$

A função maximal satisfaz a estimativa L^q forte e L^1 fraca, como vemos no lema abaixo.

Lema 27 . (ver [41])

(i) Se $\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)$, para $q > 1$, então $\mathfrak{M}\vec{u} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com a estimativa

$$\left\|\mathfrak{M}\vec{u}\right\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq c\left\|\vec{u}\right\|_{q,\mathbb{R}^n}\ ;$$

(ii) Se $\vec{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n; \mathfrak{M}\vec{u}(x) > \lambda\right\}\right| \leq \frac{c}{\lambda}\left\|\vec{u}\right\|_{1,\mathbb{R}^n}\ .$$

Usaremos agora uma versão modificada do Lema de Vitale.

Lema 28 . (ver [10] e [42]) Sejam C e D conjuntos mensuráveis, $C \subset D \subset B_1$ e $\varepsilon > 0$, tais que

$$|C| < \varepsilon|B_1|\,,$$

e para todo $x \in B_1,\ r \in (0,1)$ com $|C \cap B_r(x)| > \varepsilon|B_r|$,

$$B_r(x) \cap B_1 \subset D\,.$$

Então temos

$$|C| \leq 10^n \varepsilon |D|\,.$$

Lema 29 . Se para $\vec{w} \in W^{1,p}(B_R)$, $\vec{u}$ é uma solução fraca local de

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{u})\right|^{p-2} D(\vec{u})\right\} &= 0 \quad \text{em} \quad B_R \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{em} \quad B_R \\ \vec{u} &= \vec{w} \quad \text{em} \quad \partial B_R\,. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^p \leq \int_{B_R} \left|D(\vec{w})\right|^p .$$

Prova: Tomamos $\vec{\varphi} = \vec{u} - \vec{w} \in W_0^{1,p}(B_R)$ na definição de solução fraca local. Assim,

$$0 = \int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^{p-2} D(\vec{u}) : [D(\vec{u}) - D(\vec{w})] = \int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^p - \int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^{p-2} D(\vec{u}) : D(\vec{w})\,.$$

Agora, aplicamos a Desigualdade de Hölder, para obtermos

$$\int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^p \leq \int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^{p-1} \left|D(\vec{w})\right| \leq \left(\int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_R} \left|D(\vec{w})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Portanto, temos

$$\int_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^p \leq \int_{B_R} \left|D(\vec{w})\right|^p .$$

□

Lema 30 . Se $\vec{u}$ é uma solução fraca local de $\operatorname{div}\left\{\left|D(\vec{u})\right|^{p-2} D(\vec{u})\right\} = 0$ em $\hat{U}^*_{iR}$, então

$$\left\|D(\vec{u})\right\|_{\infty, B_{\tau R}(x_0)} \leq c(n, p, \tau, R) \left(⨍_{B_R} \left|D(\vec{u})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} ,$$

para todo $\tau \in (0, 1)$, onde $B_R(x_0) \subset \hat{U}^*_{iR}$.

Para prova deste lema seguir as idéias de [7], Proposição 1.1, p. 49.

Lema 31 . Seja B uma bola com $B_4 \subset B \subset \hat{U}^*_{iR}$. Existe uma constante N_1 tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ e, se $\vec{\mathrm{v}}$ é uma solução fraca local de

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{w})\right|^{p-2} D(\vec{w})\right\} + \nabla\tilde{\mathrm{p}} &= \vec{g} \quad \text{em} \quad \hat{U}^*_{iR} \\ \nabla \cdot \vec{w} &= 0 \quad \text{em} \quad \hat{U}^*_{iR} \\ \lim_{|x'|\to\infty} \vec{w} &= 0\,, \end{aligned} \tag{4.88}$$

com

$$\left\{\mathfrak{M}_B\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) \leq \delta^p\right\} \cap \left\{\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) \leq 1\right\} \cap B_1 \neq \emptyset\,, \tag{4.89}$$

então,

$$\left|\left\{\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > N_1^p\right\} \cap B_1\right| < \varepsilon|B_1|\,. \tag{4.90}$$

Prova: De (4.89), existe $x_0 \in B_1$ tal que

$$\mathfrak{M}_B\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right)(x_0) \leq \delta^p \quad \text{e} \quad \mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)(x_0) \leq 1\,. \tag{4.91}$$

Agora, como $B_4 \subset B$ e $B_4 \subset B_8(x_0)$, (4.91) nos dá

$$⨍_{B_4}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \leq \frac{|B_8(x_0)|}{|B_4|}⨍_{B_8(x_0)\cap B}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \leq 2^n\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)(x_0) \leq 2^n\,, \tag{4.92}$$

e, similarmente,

$$⨍_{B_4}\sum_{j=1}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p \leq 2^n\delta^p. \tag{4.93}$$

Seja $\vec{u}$ solução fraca local de

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{u})\right|^{p-2} D(\vec{u})\right\} &= 0 \quad \text{em} \quad B_4 \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \quad \text{em} \quad B_4 \\ \vec{u} &= \vec{w} \quad \text{em} \quad \partial B_4\,. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Do Lema 29 e (4.92), temos

$$⨍_{B_4}\left|D(\vec{u})\right|^p \leq ⨍_{B_4}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \leq 2^n\,,$$

que pelo Lema 30 segue

$$\left\|D(\vec{u})\right\|_{\infty,B_3} \leq c(n,p)\left(\fint_{B_4}\left|D(\vec{u})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq N_0(n,p)\,,$$

isto é,

$$\left\|D(\vec{u})\right\|_{\infty,B_3}^p \leq N_0^p. \tag{4.95}$$

Agora vamos estimar $\displaystyle\int_{B_4}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p$. Para isto tomamos $\vec{\varphi} = \vec{v}-\vec{u}$ na definição de solução fraca local de (4.88), pois $\vec{v}-\vec{u} \in W_0^{1,p}(B_4)$ devido (4.94_3), e daí usando a Desigualdade de Hölder, a Desigualdade de Young, (1.2), (1.4), (1.8) e (4.93), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_4}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p &\leq c\left(\int_{B_4}\vec{g}^{(0)}\cdot(\vec{v}-\vec{u}) - \sum_{j=1}^{n}\int_{B_4}\vec{g}^{(j)}\cdot\nabla(v_j-u_j)\right)\\
&\leq c\left\{\left(\int_{B_4}\left|\vec{g}^{(0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_4}\left|\vec{v}-\vec{u}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{B_4}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_4}\left|\nabla(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}\\
&\leq c\sum_{j=0}^{n}\left(\int_{B_4}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B_4}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq c\sum_{j=0}^{n}\int_{B_4}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p + \delta_1\int_{B_4}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\\
&\leq c\delta^p + \delta_1\int_{B_4}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\,,
\end{aligned}$$

que para $\delta_1 \ll 1$ nos fornece

$$\int_{B_4}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p \leq c\delta^p\,. \tag{4.96}$$

Usamos (4.96) e o Lema 27 (ii) para $\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, para obtermos

$$\lambda\left|\left\{x \in B_1; \mathfrak{M}_{B_3}\left(\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right)(x) > \lambda\right\}\right| \leq c\left\|\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right\|_{1,B_3} \leq c\delta^p.$$

Agora, tomamos na inequação acima, $\lambda = N_0^p$, assim

$$\lambda\left|\left\{x \in B_1; \mathfrak{M}_{B_3}\left(\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right)(x) > N_0^p\right\}\right| \leq c\delta^p < \varepsilon|B_1|,$$

desde que tomemos $\delta(\varepsilon) \ll 1$.

Devido à última inequação, para provar (4.90) basta obter $N_1 > 1$ tal que

$$A \equiv \left\{x \in B_1; \mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{v})\right|^p\right)(x) > N_1^p\right\} \subset \left\{x \in B_1; \mathfrak{M}_{B_3}\left(\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right)(x) > N_0^p\right\} \equiv D,$$

e para isto é suficiente tomar $x_1 \in D^c$ e mostrar que $x_1 \notin A$. Seja então

$$x_1 \in \left\{x \in B_1; \mathfrak{M}_{B_3}\left(\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right)(x) \leq N_0^p\right\} \equiv D^c. \tag{4.97}$$

Caso 1: $0 < r \leq 2$.
Neste caso temos $B_r(x_1) \subset B_3$, e assim para $y \in B_r(x_1)$, devido à (1.2) e (4.95)

$$|D(\vec{v})|^p(y) \leq 2^{p-1}\left(\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p(y) + \left|D(\vec{u})\right|^p(y)\right) \leq 2^{p-1}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p(y) + 2^{p-1}N_0^p.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_r(x_1)|}\int_{B_r(x_1)\cap B}\left|D(\vec{v})\right|^p(y)\,dy &\leq \frac{2^{p-1}}{|B_r(x_1)|}\int_{B_r(x_1)\cap B}\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p(y)\,dy + 2^{p-1}N_0^p\\ &\leq 2^{p-1}\mathfrak{M}_{B_3}\left(\left|D(\vec{v}-\vec{u})\right|^p\right)(x_1) + 2^{p-1}N_0^p\end{aligned}$$

e, de (4.97), vem

$$\frac{1}{|B_r(x_1)|}\int_{B_r(x_1)\cap B}\left|D(\vec{v})\right|^p(y)\,dy \leq 2^pN_0^p. \tag{4.98}$$

Caso 2: $r > 2$.
Como $x_0, x_1 \in B_1$, temos $B_r(x_1) \subset B_{2r}(x_0)$ e daí usando (4.91),

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_r(x_1)|}\int_{B_r(x_1)\cap B}\left|D(\vec{v})\right|^p(y)\,dy &\leq \frac{|B_{2r}(x_0)|}{|B_r(x_1)|}\frac{1}{|B_{2r}(x_0)|}\int_{B_{2r}(x_0)\cap B}\left|D(\vec{v})\right|^p(y)\,dy\\ &\leq 2^n\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{v})\right|^p\right)(x_0) \leq 2^n,\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{1}{|B_r(x_1)|}\int_{B_r(x_1)\cap B}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p(y)\,dy \leq 2^n. \tag{4.99}$$

Portanto, de (4.98) e (4.99), obtemos

$$\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)(x_1) \leq N_1^p,$$

onde $N_1^p \equiv \max\left\{2^n, 2^p N_0^p\right\} > 1$. Portanto $x_1 \notin A$, como queríamos demonstrar.

□

Lema 32 . Seja B uma bola com $B_{4r}(x_0) \subset B \subset \hat{U}^*_{iR}$. Se $\vec{\mathrm{v}}$ é uma solução fraca local de (4.88), satisfazendo a condição

$$\left|\left\{\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > N_1^p\right\} \cap B_r(x_0)\right| \geq \varepsilon |B_r(x_0)|\,, \tag{4.100}$$

então

$$B_r(x_0) \subset \left[\left\{\mathfrak{M}_B\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p\right\} \cup \left\{\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > 1\right\}\right]. \tag{4.101}$$

Prova: Aplicaremos a contra-positiva do Lema 31, para isto fazemos a mudança de variáveis

$$T\,:\; y \;\longmapsto\; x = ry + x_0 \quad, y \in B_1.$$

Assim, temos que T leva B_1 em $B_r(x_0)$. Agora escrevemos

$$\vec{u}(y) = \frac{1}{r}\vec{\mathrm{v}}(x)\,,\;\; \vec{h}(y) = \vec{g}(x) \;\text{ e }\; \hat{\mathrm{p}}(y) = \frac{1}{r}\tilde{\mathrm{p}}(x),$$

e temos que $-\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}})\right\} = \vec{g} - \nabla\tilde{\mathrm{p}}$ é equivalente à

$$-\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{u})\right|^{p-2} D(\vec{u})\right\} = \vec{h} - \nabla\hat{\mathrm{p}}\,.$$

Temos ainda,

$$\mathfrak{M}_B\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)(x) = \mathfrak{M}_{T^{-1}B}\left(\left|D(\vec{u})\right|^p\right)(y)\,.$$

Assim, (4.100) fica

$$\left|\left\{\mathfrak{M}_{T^{-1}B}\left(\left|D(\vec{u})\right|^p\right) > N_1^p\right\} \cap B_1\right| \geq \varepsilon |B_1|\,.$$

Daí, a contra-positiva do Lema 31 nos dá

$$B_1 \subset \left[\left\{ \mathfrak{M}_{T^{-1}B} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \vec{h}^{(j)} \right|^p \right) > \delta^p \right\} \cup \left\{ \mathfrak{M}_{T^{-1}B} \left(\left| D(\vec{u}) \right|^p \right) > 1 \right\} \right].$$

E voltando à variável x, temos (4.101).

□

Lema 33 . Suponhamos que $B_5 \subset \hat{U}^*_{iR}$. Se $\vec{v}$ é uma solução fraca local de (4.88), com

$$\left| \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\left| D(\vec{v}) \right|^p \right) > N_1^p \right\} \cap B_1 \right| < \varepsilon |B_1| \,. \tag{4.102}$$

Então, para $\varepsilon_1 = 10^n \varepsilon$, temos

$$\begin{aligned} \left| B_1 \cap \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\left| D(\vec{v}) \right|^p \right) > \left(N_1^p \right)^k \right\} \right| \;\; \leq \;\; & \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_1^i \left| B_1 \cap \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\sum_{j=0}^{n} \left| \vec{g}^{(j)} \right|^p \right) > \delta^p \left(N_1^p \right)^{k-i} \right\} \right| \\ & + \varepsilon_1^k \left| B_1 \cap \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\left| D(\vec{v}) \right|^p \right) > 1 \right\} \right| . \end{aligned} \tag{4.103}$$

Prova:
Passo 1: Sejam

$$\begin{aligned} C &= B_1 \cap \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\left| D(\vec{v}) \right|^p \right) > N_1^p \right\} \\ D &= \left(B_1 \cap \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\left| D(\vec{v}) \right|^p \right) > 1 \right\} \right) \cup \left(B_1 \cap \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\textstyle\sum_{j=0}^{n} \left| \vec{g}^{(j)} \right|^p \right) > \delta^p \right\} \right) . \end{aligned}$$

De (4.102) temos,

$$|C| < \varepsilon |B_1| \,. \tag{4.104}$$

Daí, se

$$|C \cap B_r(x_1)| \geq \varepsilon |B_r(x_1)|, \tag{4.105}$$

para cada $x_1 \in B_1$ e r arbitrário em $(0, 1)$, então

$$B_1 \cap B_r(x_1) \subset D \,. \tag{4.106}$$

De fato, (4.105) implica

$$\left| B_r(x_1) \cap \left\{ \mathfrak{M}_{B_5} \left(\left| D(\vec{v}) \right|^p \right) > N_1^p \right\} \right| \geq \varepsilon |B_r(x_1)| \,. \tag{4.107}$$

Agora, como $B_{4r}(x_1) \subset B_5$, de (4.107) e Lema 32, temos

$$B_r(x_1) \subset \left[\left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p\right\} \cup \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > 1\right\}\right],$$

e portanto, temos (4.106), como queríamos.

Obviamente $C \subset D$. Disto e de (4.104) − (4.107), pelo Lema 28, temos

$$|C| < \varepsilon_1 |D|\,,$$

e isto implica (4.103) para $k = 1$, isto é,

$$\begin{aligned}\left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > N_1^p\right\}\right| \;&\leq\; \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p\right\}\right| \\ &\quad + \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > 1\right\}\right|.\end{aligned} \tag{4.108}$$

Passo 2: Sejam $\lambda > 1$ uma constante arbitrária; $\vec{w} = \lambda^{-1}\vec{\mathrm{v}}$; $\vec{h} = \lambda^{-(p-1)}\vec{g}$ e $\hat{\mathrm{p}} = \lambda^{-(p-1)}\tilde{\mathrm{p}}$. Desta forma, $\vec{w}$ satisfaz $-\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{w})\right|^{p-2} D(\vec{w})\right\} = \vec{h} - \nabla\hat{\mathrm{p}}$. Assim, aplicando o resultado do Passo 1 à $\vec{w}$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{w})\right|^p\right) > N_1^p\right\}\right| \;&\leq\; \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p\right\}\right| \\ &\quad + \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{w})\right|^p\right) > 1\right\}\right|,\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}\left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > \lambda^p N_1^p\right\}\right| \;&\leq\; \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \lambda^p\delta^p\right\}\right| \\ &\quad + \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > \lambda^p\right\}\right|.\end{aligned} \tag{4.109}$$

Agora, fazemos iterações com $\lambda = N_1^i$, $i = 1, \ldots, k-1$, em (4.109):
$i = 1$:

$$\begin{aligned}\left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > \left(N_1^p\right)^2\right\}\right| \;&\leq\; \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p N_1^p\right\}\right| \\ &\quad + \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > N_1^p\right\}\right| \\ &\leq\; \sum_{i=1}^{2}\varepsilon_1^i \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p \left(N_1^p\right)^{2-i}\right\}\right| \\ &\quad + \varepsilon_1^2 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > 1\right\}\right|,\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (4.108).

$i = 2$:

$$
\begin{aligned}
\left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > \left(N_1^p\right)^3\right\}\right| &\leq \varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p \left(N_1^p\right)^2\right\}\right| \\
&\quad +\varepsilon_1 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > \left(N_1^p\right)^2\right\}\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_1^i \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p \left(N_1^p\right)^{3-i}\right\}\right| \\
&\quad +\varepsilon_1^3 \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right) > 1\right\}\right|,
\end{aligned}
$$

onde na última desigualdade usamos a iteração $i = 1$. Prosseguindo com este argumento, de sempre usar a iteração anterior, obtemos a desigualdade (4.103) na iteração $i = k - 1$.

□

Lema 34 . Seja $\vec{\mathrm{v}}$ uma solução fraca local de (4.88). Então

$$
\left\|D(\vec{\mathrm{v}})\right\|_{p,B_{\tau R_1}(x_0)}^p \leq c(n,p,R_1) \sum_{j=0}^{n} \left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{p',B_{R_1}(x_0)}^{p'} + \|\tilde{p}\|_{p',B_{R_1}(x_0)}^{p'} + \left\|\vec{\mathrm{v}}\right\|_{p,B_{R_1}(x_0)}^p , \quad (4.110)
$$

onde $B_{R_1}(x_0) \subset \hat{U}_{iR}^*$.

Prova: Sem perda de generalidade podemos considerar $x_0 = 0$ em (4.110). Tomemos como função teste, na definição de solução fraca local de (4.88), a função $\vec{\varphi} = \eta^p \vec{\mathrm{v}}$, onde $\eta \in C_0^\infty(\hat{U}_{iR}^*)$ satisfaz

$$
\begin{cases} \eta \equiv 1\,, & B_{\tau R_1} \\ \eta \equiv 0\,, & \hat{U}_{iR}^* \setminus B_{R_1}\,, \end{cases} \qquad 0 \leq \eta \leq 1\,, \quad |\nabla \eta| \leq \frac{c}{R_1}.
$$

Daí temos,

$$
\int_{\hat{U}_{iR}^*} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-2} D(\vec{\mathrm{v}}) : D(\eta^p \vec{\mathrm{v}}) = \int_{\hat{U}_{iR}^*} \vec{g}^{(0)} \cdot (\eta^p \vec{\mathrm{v}}) - \sum_{j=1}^{n} \int_{\hat{U}_{iR}^*} \vec{g}^{(j)} \cdot \nabla(\eta^p v_j) + \int_{\hat{U}_{iR}^*} \tilde{\mathrm{p}} \,\mathrm{div}\,(\eta^p \vec{\mathrm{v}}). \quad (4.111)
$$

Agora, como

$$\begin{aligned}
&D(\eta^p \vec{\mathrm{v}}) = \eta^p D(\vec{\mathrm{v}}) + \sum_{s,r=1}^{n} \frac{p\eta^{p-1}}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x_s} v_r + \frac{\partial \eta}{\partial x_r} v_s\right)\\
&\operatorname{div}(\eta^p \vec{\mathrm{v}}) = \nabla(\eta^p)\cdot \vec{\mathrm{v}},
\end{aligned}$$

segue de (4.111)

$$\begin{aligned}
\int_{B_{R_1}} \eta^p \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p &\leq p\int_{B_{R_1}} \eta^{p-1}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1} |\nabla\eta| \left|\vec{\mathrm{v}}\right| + \int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(0)}\right| \left|\eta^p \vec{\mathrm{v}}\right| \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(j)}\right| \left|\nabla(\eta^p v_j)\right| + \int_{B_{R_1}} \left|\tilde{\mathrm{p}}\right| |\nabla \eta^p| \left|\vec{\mathrm{v}}\right| \qquad (4.112)\\
&= \sum_{s=1}^{4} I_s\,.
\end{aligned}$$

Estimaremos, separadamente, cada um dos termos I_s:
Aplicando a Desigualdade de Hölder, a Desigualdade de Young e (1.8), obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &= p\int_{B_{R_1}} \eta^{p-1}\left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^{p-1} |\nabla\eta| \left|\vec{\mathrm{v}}\right| \leq c_1 \int_{B_{R_1}} \left|\vec{\mathrm{v}}\right|^p + \delta_1 \int_{B_{R_1}} \eta^p \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\\
I_2 &= \int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(0)}\right| \left|\eta^p\vec{\mathrm{v}}\right| \leq c_2 \int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(0)}\right|^{p'} + c_3 \int_{B_{R_1}} \left|\vec{\mathrm{v}}\right|^p\\
I_3 &= \sum_{j=1}^{n} \int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(j)}\right| \left|\nabla(\eta^p v_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{B_{R_1}} \left|\nabla(\eta^p\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{1/p}\\
&\leq c\sum_{j=1}^{n} \left(\int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{B_{R_1}} \left|D(\eta^p\vec{\mathrm{v}})\right|^p\right)^{1/p}\\
&\leq c_4 \sum_{j=1}^{n} \int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'} + c_5 \int_{B_{R_1}} \left|\vec{\mathrm{v}}\right|^p + \delta_2 \int_{B_{R_1}} \eta^p \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p\\
I_4 &= \int_{B_{R_1}} \left|\tilde{\mathrm{p}}\right| |\nabla\eta^p| \left|\vec{\mathrm{v}}\right| \leq c_6 \int_{B_{R_1}} \left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'} + c_7 \int_{B_{R_1}} \left|\vec{\mathrm{v}}\right|^p.
\end{aligned}$$

Daí, para $\delta_1, \delta_2 \ll 1$ e como $\eta \equiv 1$ em $B_{\tau R_1}$, temos

$$\int_{B_{R_1}} \left|D(\vec{\mathrm{v}})\right|^p \leq c \left(\sum_{j=0}^{n} \int_{B_{R_1}} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'} + \int_{B_{R_1}} \left|\vec{\mathrm{v}}\right|^p + \int_{B_{R_1}} \left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'} \right),$$

isto é, (4.110) para $x_0 = 0$, como queríamos.

□

Teorema 16 . Sejam $B_6 \subset \hat{U}^*_{iR}$ e $g^{(j)} \in L^q(\hat{U}^*_{iR})$, $j = 0, 1, \ldots, n$, com $q \geq p$. Se $\vec{\mathrm{v}}$ é uma solução fraca local de (4.88) em $\hat{U}^*_{iR}$, então

$$\left\|D(\vec{\mathrm{v}})\right\|_{q,B_1} \leq c(n,p,q) \left[\left(\sum_{j=0}^{n} \left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q,B_6} \right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\vec{\mathrm{v}}\right\|_{p,B_6} + \|\tilde{p}\|_{p',B_6}^{\frac{1}{p-1}} \right]. \tag{4.113}$$

Prova: O caso $q = p$ segue imediatamente de (4.110), com $x_0 = 0$, $R_1 = 6$, $\tau = 1/6$ e aplicação da Desigualdade de Hölder. Vamos provar então o caso $q > p$. Ainda, em (4.110) tomando $x_0 = 0$, $R_1 = 6$ e $\tau = 5/6$, obtemos

$$\left\|D(\vec{\mathrm{v}})\right\|_{p,B_5} \leq c \left[\left(\sum_{j=0}^{n} \left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{p,B_6} \right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\vec{\mathrm{v}}\right\|_{p,B_6} + \|\tilde{p}\|_{p',B_6}^{\frac{1}{p-1}} \right]. \tag{4.114}$$

Agora, sejam

$$\vec{\mathrm{v}}^{(1)} = \zeta_1 \vec{\mathrm{v}}, \quad \vec{h}^{(j)} = \zeta_1^{p-1} \vec{g}^{(j)}, \quad \hat{\mathrm{p}} = \zeta_1^{p-1} \tilde{\mathrm{p}},$$

onde $j = 0, 1, \ldots, n$ e

$$\zeta_1 \equiv \frac{\lambda}{\left(\sum_{j=0}^{n} \left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q,B_5} \right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\tilde{\mathrm{p}}\right\|_{p',B_5}^{\frac{1}{p-1}} + \left\|D(\vec{\mathrm{v}})\right\|_{p,B_5}}$$

e λ é uma constante suficientemente pequena que será determinada mais adiante. É fácil ver que

$$\left\|D(\vec{\mathrm{v}}^{(1)})\right\|_{p,B_5} \leq \lambda, \quad \sum_{j=0}^{n} \left\|\vec{h}^{(j)}\right\|_{q,B_5} \leq \lambda^{p-1} \quad \text{e} \quad \left\|\hat{\mathrm{p}}\right\|_{p',B_5} \leq \lambda^{p-1}.$$

Ainda, $\vec{v}^{(1)}$ satisfaz

$$-\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^{p-2} D(\vec{v}^{(1)})\right\} = \vec{h} - \nabla\hat{p}.$$

Agora, do Lema 27 (ii), existe $\lambda_0 = \lambda_0(p, q, \varepsilon)$ tal que

$$\left|\left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p\right) > N_1^p\right\} \cap B_1\right| \leq cN_1^{-p} \int_{B_5} \left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p \leq cN_1^{-p}\lambda^p \leq \varepsilon|B_1|, \quad (4.115)$$

para todo $\lambda \leq \lambda_0$. Note que para provar (4.113) é suficiente mostrar que

$$\left\|D(\vec{v}^{(1)})\right\|_{q,B_1} \leq c\,, \tag{4.116}$$

onde c depende só de p e q. De fato, (4.116) implica

$$\begin{aligned}
\left\|D(\vec{v})\right\|_{q,B_1} &\leq \frac{c}{\lambda}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q,B_5}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\tilde{p}\right\|_{p',B_5}^{\frac{1}{p-1}} + \left\|D(\vec{v})\right\|_{p,B_5}\right]\\
&\leq \frac{c}{\lambda}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q,B_6}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\vec{v}\right\|_{p,B_6} + \|\tilde{p}\|_{p',B_6}^{\frac{1}{p-1}}\right],
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos (4.114) e a Desigualdade de Hölder. Provaremos então (4.116). Do Lema 27 (i) temos $\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right) \in L^{q/p}(B_5)$. Agora aplicamos o Lema 25 com $\theta = \delta^p$, $a = N_1^p$ e $g = \mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right)$, donde obtemos que existe $c = c(\delta, q, N_1)$, tal que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} N_1^{iq}\left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p(N_1^p)^i\right\}\right| \leq c\left\|\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right)\right\|_{q/p,B_1}^{q/p}\\
&\leq c\left\|\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right\|_{q/p,B_1} \leq c\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{h}^{(j)}\right\|_{q,B_1}\right)^q \leq \lambda^{(p-1)q} \leq 1\,,
\end{aligned} \tag{4.117}$$

tomando $\lambda \leq \lambda_0$ apropriado.

Agora, usando (4.115), Lema 33 e (4.117), obtemos

$$
\begin{aligned}
S &\equiv \sum_{i=1}^{\infty} N_1^{iq} \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)}\right|^p\right) > (N_1^p)^i\right\}\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{\infty} N_1^{iq} \sum_{k=1}^{i} \varepsilon_1^k \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p \left(N_1^p\right)^{i-k}\right\}\right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} N_1^{iq}\varepsilon_1^i \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p\right) > 1\right\}\right| \\
&= \sum_{k\ge 1}\sum_{i\ge k} N_1^{iq}\varepsilon_1^k \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p \left(N_1^p\right)^{i-k}\right\}\right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} N_1^{iq}\varepsilon_1^i \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p\right) > 1\right\}\right| \\
&\le \sum_{k\ge 1}\left(N_1^q\varepsilon_1\right)^k \sum_{i\ge k} N_1^{(i-k)q} \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\sum_{j=0}^{n}\left|\vec{h}^{(j)}\right|^p\right) > \delta^p \left(N_1^p\right)^{i-k}\right\}\right| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \left(N_1^q\varepsilon_1\right)^i \left|B_1 \cap \left\{\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p\right) > 1\right\}\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\left(N_1^q\varepsilon_1\right)^k + c\sum_{i=1}^{\infty}\left(N_1^q\varepsilon_1\right)^i \le c\sum_{i=1}^{\infty}\left(N_1^q\varepsilon_1\right)^i \le c\,,
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

desde que $\varepsilon_1 = 10^n\varepsilon$ seja tal que $N_1^q\varepsilon_1 < 1$. Aplicamos novamente o Lema 25, só que para $g = \mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p\right) \in L^{q/p}(B_5)$ e, devido à (4.118), chegamos à

$$
\left\|\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p\right)\right\|_{q/p,B_1} \le c(|B_1| + S) \le c\,.
$$

Mas, pelo Lema 26, segue

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p\right)(x) &= \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)\cap B_5}\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p \\
&\ge \lim_{r\to 0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)\cap B_5}\left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p = \left|D(\vec{v}^{(1)})\right|^p(x)\,.
\end{aligned}
$$

Daí
$$\left\|D(\vec{\mathrm{v}}^{(1)})\right\|_{q,B_1}^{p} \le \left\|\mathfrak{M}_{B_5}\left(\left|D(\vec{\mathrm{v}}^{(1)})\right|^{p}\right)\right\|_{q/p,B_1} \le c\,.$$
Como queríamos demonstrar.

$\square$

Teorema 17 . Suponhamos que $\vec{g} \in L^q\left(\hat{U}^*_{iR}\right)$, para algum $q \ge p$. Se $\vec{w}$ é uma solução fraca local de (4.88), então

$$\left\|D(\vec{w})\right\|_{q,B_{\frac{r}{6}}(x_0)} \le c(n,p,q,r)\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q,B_r(x_0)}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\vec{w}\right\|_{p,B_r(x_0)} + \|\tilde{p}\|_{p',B_r(x_0)}^{\frac{1}{p-1}}\right], \tag{4.119}$$

onde $B_r(x_0) \subset \hat{U}^*_{iR}$.

Prova: Fazendo a mudança de coordenadas
$$T:\ y \longmapsto x = T(y) = \frac{6}{r}(y - x_0)\,,$$
temos que $B_{\frac{r}{6}}(x_0)$ é levado em B_1, enquanto $B_r(x_0)$ é levado em B_6. Assim, fazendo
$$\vec{u}(x) = \frac{6}{r}\vec{w}(y(x))\,,\quad \vec{h}^{(0)}(x) = \vec{g}^{(0)}(y(x))\,,\quad \vec{h}^{(j)}(x) = \frac{6}{r}\vec{g}^{(j)}(y(x))\,,\quad \text{e}\quad \hat{\mathrm{p}}(x) = \frac{6}{r}\tilde{\mathrm{p}}(y(x))\,,$$
$j = 1,\ldots,n$, temos
$$-\mathrm{div}\left\{\left|D(\vec{u})\right|^{p-2} D(\vec{u})\right\} = \vec{h} - \nabla\hat{\mathrm{p}}\,,$$
e asim, aplicando o Teorema 16, obtemos
$$\left\|D(\vec{u})\right\|_{q,B_1} \le c(n,p,q)\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{h}^{(j)}\right\|_{q,B_6}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\vec{u}\right\|_{p,B_6} + \left\|\hat{\mathrm{p}}\right\|_{p',B_6}^{\frac{1}{p-1}}\right].$$
Por fim, voltando às coordenadas iniciais temos (4.119).

$\square$

4.4.3 Resultado Principal

Agora provaremos o resultado principal desta seção, ou seja, provaremos que a solução $\vec{v}$, do problema (4.23), satisfaz uma estimativa local num espaço L^q com peso.

Teorema 18 . Suponhamos que a função $\vec{f}$ tenha a representação (4.4) e $\vec{f}^{(j)} \in L^{q_i}_{loc}(\Omega_i)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $q_i \geq p$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Então a solução fraca $\vec{v}$, do problema (4.23), satisfaz a estimativa local

$$\left\|\nabla\vec{v}; L^{q_i}_{(\gamma_i,\beta_i)}(\omega_{il})\right\| \leq c\left\{\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i,p}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{il})\right\|^{\frac{1}{(p-1)}} + \left\|\nabla\vec{v}; L^{p}_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},\beta_i)}(\omega^*_{il})\right\|\right\}, \quad (4.120)$$

onde $\hat{\gamma} = \gamma + \dfrac{n(p-2)}{\mathbf{q}(p-1)}$, $\gamma^{(1)} = \dfrac{n(p-\mathbf{q})}{p\mathbf{q}}$ e a constante c é independente de l.

Prova: O problema (4.75) é equivalente ao problema (4.82) via mudança de coordenadas (4.76). Assim, trabalhando nas novas coordenadas temos, para $\vec{w}$ solução fraca local de (4.82),

$$\left\|\nabla\vec{w}\right\|_{q_i,\hat{\omega}_{il}} \leq c(n,p,q_i)\left\{\left(\sum_{j-0}^{n}\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q_i,\hat{\omega}^*_{il}}\right)^{\frac{1}{(p-1)}} + \left\|\vec{w}\right\|_{p,\hat{\omega}^*_{il}} + \left\|\tilde{\mathrm{p}}\right\|^{\frac{1}{(p-1)}}_{p',\hat{\omega}^*_{il}}\right\}. \quad (4.121)$$

De fato, existem $r_1, \ldots, r_N \in \mathbb{R}^+$ e $x_1, \ldots, x_N \in \hat{\omega}_{il}$, com $N = N(M_i) \in \mathbb{N}$, tais que $\hat{\omega}_{il} \subset \cup_{s=1}^{N} B_{r_s/6}(x_s)$. Assim, de (4.119) temos

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\vec{w}\right\|_{q_i,\hat{\omega}_{il}} &\leq \sum_{s=1}^{N}\left\|\nabla\vec{w}\right\|_{q_i,B_{r_s/6}(x_s)} \\
&\leq c\sum_{s=1}^{N}\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q_i,B_{r_s}(x_s)}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\vec{w}\right\|_{p,B_{r_s}(x_i)} + \left\|\tilde{\mathrm{p}}\right\|^{\frac{1}{p-1}}_{p',B_{r_s}(x_i)}\right] \\
&\leq c(N)\left[\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q_i,\hat{\omega}^*_{il}}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\vec{w}\right\|_{p,\hat{\omega}^*_{il}} + \left\|\tilde{\mathrm{p}}\right\|^{\frac{1}{p-1}}_{p',\hat{\omega}^*_{il}}\right].
\end{aligned}$$

Assim provamos (4.121).

Agora vamos estimar o último termo do lado direito de (4.121). Para isto lembramos que $\tilde{\mathrm{p}}$, na definição de solução fraca local, é “a menos de constante”, daí podemos tomar $\tilde{\mathrm{p}}$ tal que $\displaystyle\int_{\hat{\omega}^*_{il}} \tilde{\mathrm{p}} = 0$.

Seja $h = \left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'-2}\tilde{\mathrm{p}} - \left|\hat{\omega}_{il}^{*}\right|^{-1}\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'-2}\tilde{\mathrm{p}}$. Daí $h \in L^{p}(\hat{\omega}_{il}^{*})$ com $\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}} h = 0$ e

$$\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}} |h|^{p} \leq c\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'}. \tag{4.122}$$

Pelo Lema 7 e (4.122), existe $\vec{u}$ solução de

$$\begin{array}{l} \nabla\cdot\vec{u} = h \\ \vec{u} \in W_{0}^{1,p}(\hat{\omega}_{il}^{*}) \\ \left\|\vec{u}\right\|_{1,p,\hat{\omega}_{il}^{*}} \leq c\left\|\tilde{\mathrm{p}}\right\|_{p',\hat{\omega}_{il}^{*}}^{\frac{1}{p-1}}, \end{array} \tag{4.123}$$

com c independente de l. Assim, (4.123) e (4.87) nos leva à

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'} &= \int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left[\left(\left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'-2}\tilde{\mathrm{p}} - \left|\hat{\omega}_{il}^{*}\right|^{-1}\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'-2}\tilde{\mathrm{p}}\right)\tilde{\mathrm{p}} + \left|\hat{\omega}_{il}^{*}\right|^{-1}\left(\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\tilde{\mathrm{p}}\right|^{p'-2}\tilde{\mathrm{p}}\right)\tilde{\mathrm{p}}\right] \\
&= \int_{\hat{\omega}_{il}^{*}} h\tilde{\mathrm{p}} = \int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\tilde{\mathrm{p}}\nabla\cdot\vec{u} \\
&= \left\{\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|D(\vec{w})\right|^{p-2}D(\vec{w}) : D(\vec{u}) - \int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\vec{g}^{(0)}\cdot\vec{u} - \sum_{j=1}^{n}\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\vec{g}^{(j)}\cdot\nabla u_{j}\right\} \\
&\leq c\left\{\left(\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|D(\vec{w})\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \sum_{j=0}^{n}\left(\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}\left\|\vec{u}\right\|_{1,p,\hat{\omega}_{il}^{*}} \\
&\leq c\left\{\left(\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|D(\vec{w})\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} + \sum_{j=0}^{n}\left(\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}\left\|\tilde{\mathrm{p}}\right\|_{p',\hat{\omega}_{il}^{*}}^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Portanto, estimamos o último termo do lado direito de (4.121) da seguinte forma

$$\left\|\tilde{\mathrm{p}}\right\|_{p',\hat{\omega}_{il}^{*}}^{\frac{1}{(p-1)}} \leq c\left\{\left(\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|D(\vec{w})\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} + \sum_{j=0}^{n}\left(\int_{\hat{\omega}_{il}^{*}}\left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}. \tag{4.124}$$

Agora, substituindo (4.124) em (4.121), obtemos

$$\left\|\nabla\vec{w}\right\|_{q_{i},\hat{\omega}_{il}} \leq c\left\{\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q_{i},\hat{\omega}_{il}^{*}}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\nabla\vec{w}\right\|_{p,\hat{\omega}_{il}}\right\}. \tag{4.125}$$

Agora, voltando às coordenadas de origem, segundo (4.76), temos:

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\vec{w}\right\|_{q_i,\hat{\omega}_{il}} &= \left(2M_i g_{il}^{-1}\right)^{\frac{n-q_i}{q_i}} \left\|\nabla\vec{v}\right\|_{q_i,\omega_{il}} \\
\left\|\vec{g}^{(0)}\right\|_{q_i,\hat{\omega}^*_{il}} &= \left(2M_i g_{il}^{-1}\right)^{\frac{n-pq_i}{q_i}} \left\|\vec{f}^{(0)}\right\|_{q_i,\omega^*_{il}} \\
\left\|\vec{g}^{(j)}\right\|_{q_i,\hat{\omega}^*_{il}} &= \left(2M_i g_{il}^{-1}\right)^{\frac{n-(p-1)q_i}{q_i}} \left\|\vec{f}^{(j)}\right\|_{q_i,\omega^*_{il}} \\
\left\|\nabla\vec{w}\right\|_{p,\hat{\omega}^*_{il}} &= \left(2M_i g_{il}^{-1}\right)^{\frac{n-p}{p}} \left\|\nabla\vec{v}\right\|_{p,\omega^*_{il}} .
\end{aligned}$$

Assim, (4.125) é equivalente a

$$\left\|\nabla\vec{v}\right\|_{q_i,\omega_{il}} \leq c\left\{ g_{il}^{\frac{q_i+p-n-1}{q_i(p-1)}} \left\|\vec{f}^{(0)}\right\|_{q_i,\omega^*_{il}}^{\frac{1}{p-1}} + g_{il}^{\frac{n(p-2)}{q_i(p-1)}} \sum_{j=1}^{n} \left\|\vec{f}^{(j)}\right\|_{q_i,\omega^*_{il}}^{\frac{1}{p-1}} + g_{il}^{\frac{n(p-q_i)}{pq_i}} \left\|\nabla\vec{v}\right\|_{p,\omega^*_{il}} \right\}.$$

Agora, multiplicamos a inequação acima por $g_{il}^{\gamma_i} e^{\beta_i \alpha_{il}}$ e usamos (4.5) e (4.7), para obtermos

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\vec{v}; L^{q_i}_{(\gamma_i,\beta_i)}(\omega_{il})\right\| \quad \leq \quad & c\left(\left\|\vec{f}^{(0)}; L^{q_i}_{((p-1)(\hat{\gamma}_i+1),(p-1)\beta_i)}(\omega^*_{il})\right\|^{\frac{1}{p-1}}\right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{n} \left\|\vec{f}^{(j)}; L^{q_i}_{((p-1)\hat{\gamma}_i,(p-1)\beta_i)}(\omega^*_{il})\right\|^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\nabla\vec{v}; L^{p}_{(\gamma_i+\gamma^{(1)},\beta_i)}(\omega^*_{il})\right\|\right),
\end{aligned}$$

ou seja, (4.120). Assim concluímos a demonstração do teorema.

□

4.5 Estimativas em Espaços de Sobolev com Peso

Iniciaremos provando um resultado para o problema de Stokes com Lei de Potência equivalente ao resultado do Teorema 5.1 de [34] para o Problema de Stokes com Fluxo Zero.

Teorema 19 . Suponhamos que a força externa $\vec{f}$ tenha representação (4.4), com supp $\vec{f}^{(j)} \subset \omega_{ik}^*$ e $\vec{f}^{(j)} \in L^{q_i}(\omega_{ik}^*)$ para algum $q_i \geq p$. Então o problema (4.23) possui uma única solução fraca $\vec{v} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega) \cap V_{(\gamma,\beta)}^{1,\mathbf{q}}(\Omega)$, onde $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_m)$, $q_j \geq p$, $|\beta_j| < \beta_*$ (β_* definido no Teorema 14) e γ é arbitrário. Além disso, vale a estimativa

$$\left\|\vec{v}; V_{(\gamma,\beta)}^{1,\mathbf{q}}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{f}; V_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}^{-1,q_i,p}(\omega_{ik}^*)\right\|^{\frac{1}{p-1}} . \tag{4.126}$$

Prova: Como supp $\vec{f}^{(j)} \subset \omega_{ik}^*$, facilmente verificamos que $\vec{f} \in D^{-1,p'}(\Omega)$ e daí, pelo Teorema 12, temos que existe uma única solução $\vec{v} \in \mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$. Assim sendo, basta verificarmos a validade de (4.126). Pelo Teorema 18, temos que $\vec{v}$ satisfaz (4.120). Usando (4.75), temos

$$\left\|\nabla\vec{v}; L^p_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},\beta_i)}(\omega_{il}^*)\right\| \leq c e^{-\varepsilon_0 c_0 |k-l|} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},\beta_i)}(\omega_{ik}^*)\right\|^{\frac{1}{p-1}} . \tag{4.127}$$

Ora,

$$\begin{aligned} \left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},\beta_i)}(\omega_{ik}^*)\right\|^{\frac{1}{p-1}} \leq\ & c \left\{ \int_{\omega_{ik}^*} N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)}+1)} e^{p\beta_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{n} \int_{\omega_{ik}^*} N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)})} e^{p\beta_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} \right\}^{\frac{1}{p}} . \end{aligned} \tag{4.128}$$

Agora, usando a mudança de coordenadas (4.76) e aplicando a Desigualdade de Hölder estimamos cada um dos termos de (4.128), como abaixo:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{ik}^*} N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)}+1)} e^{p\beta_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^{p'} &\leq c \left\|\vec{f}^{(0)}; L^{q_i}_{((p-1)(\hat{\gamma}_i+1),(p-1)\beta_i)}(\omega_{ik}^*)\right\|^{\frac{p}{p-1}} \\ \int_{\omega_{ik}^*} N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)})} e^{p\beta_i\alpha_i} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^{p'} &\leq c \left\|\vec{f}^{(j)}; L^{q_i}_{((p-1)\hat{\gamma}_i,(p-1)\beta_i)}(\omega_{ik}^*)\right\|^{\frac{p}{p-1}} . \end{aligned}$$

E assim, de (4.128) vem

$$\left\|\vec{f}; V^{-1,p',p}_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},\beta_i)}(\omega_{ik}^*)\right\|^{\frac{1}{p-1}} \leq c \left\|\vec{f}; V^{-1,q_i,p}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega_{ik}^*)\right\|^{\frac{1}{p-1}} . \tag{4.129}$$

Por fim, de (4.120), (4.127) e (4.129) temos

$$\left\|\nabla\vec{v}; L^{q_i}_{(\gamma_i,\beta_i)}(\omega_{il})\right\| \leq c\left\{\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i,p}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{il})\right\|^{\frac{1}{p-1}} + e^{-\varepsilon_0 c_0|k-l|}\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i,p}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{ik})\right\|^{\frac{1}{p-1}}\right\}. \tag{4.130}$$

Agora, se $j \neq i$, então $\vec{f} = 0$ em ω^*_{jl} e assim, de (4.120), (4.71) e (4.129), em vez de (4.130), obtemos

$$\left\|\nabla\vec{v}; L^{q_j}_{(\gamma_j,\beta_j)}(\omega_{jl})\right\| \leq ce^{-\varepsilon_0\alpha_{jl}}\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{ik})\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.131}$$

Por fim, como $\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{ik})\right\| = 0$, para $l < k-2$ e $l > k+2$, e como $\sum_{l=1}^{\infty} e^{-\varepsilon_0\alpha_{jl}} < \infty$, podemos somar as inequações (4.130) e (4.131) em l. Daí obtemos

$$\left\|\nabla\vec{v}; L^{\mathbf{q}}_{(\gamma,\beta)}(\Omega\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)})\right\| \leq c\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{ik})\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.132}$$

Quanto ao termo $\left\|\nabla\vec{v}\right\|_{q_0,\Omega_{(k_0+1)}}$, como no Teorema 18, temos a estimativa local

$$\left\|\nabla\vec{v}\right\|_{q_0,\Omega_{(k_0+1)}} \leq c\left\{\left(\sum_{j=0}^{n}\left\|\vec{f}^{(j)}\right\|_{q_0,\Omega_{(k_0+2)}}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\nabla\vec{v}\right\|_{p,\Omega_{(k_0+2)}}\right\}. \tag{4.133}$$

E de (4.26) e (4.129), temos

$$\left\|\nabla\vec{v}\right\|_{p,\Omega_{(k_0+2)}} \leq c(k_0)\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i,p}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{ik})\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.134}$$

Portanto, de (4.132) − (4.134) vem

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\vec{v}; L^{\mathbf{q}}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)\right\| &= \left\|\nabla\vec{v}\right\|_{q_0,\Omega_{(k_0+1)}} + \sum_{i=1}^{m}\left\|\nabla\vec{v}; L^{q_i}_{(\gamma_i,\beta_i)}(\Omega_i\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)})\right\| \\ &\leq c(k_0)\left\|\vec{f}; V^{-1,q_i,p}_{(\hat{\gamma}_i,\beta_i)}(\omega^*_{ik})\right\|^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned}$$

□

Consideraremos agora, $\vec{f} \in V^{-1,q,p}_{(\gamma,\beta)}(\Omega)$, onde $q \geq p$, e seja $\{\varphi_{k_0}, \varphi_{ik}\}^{m,\infty}_{i=1,k=k_0}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{\Omega_{(k_0+2)}, \omega^*_{ik}\}^{m,\infty}_{i=1,k=k_0}$, isto é,

$$\Omega = \Omega_{(k_0+2)} \bigcup \left[\bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \omega^*_{ik} \right) \right]$$

e $\operatorname{supp} \varphi_{k_0} \subset \Omega_{(k_0+2)}$, $\operatorname{supp} \varphi_{ik} \subset \overline{\omega}^*_{ik}$, φ_{k_0}, $\varphi_{ik} \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ com

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=k_0}^{\infty} \varphi_{ik}(x) + \varphi_{k_0}(x) = 1 \ \text{ em } \ \Omega \, .$$

Denotamos por

$$\begin{aligned}
\vec{f}^{(j)}_{k_0} &= \varphi_{k_0} \vec{f}^{(j)} \, , \quad \vec{f}^{(j)}_{ik} = \varphi_{ik} \vec{f}^{(j)} \, , \quad j = 0, 1, \ldots, n \\
\vec{f}_{k_0} &= \vec{f}^{(0)}_{k_0} + \left(\operatorname{div} \vec{f}^{(1)}_{k_0}, \ldots, \operatorname{div} \vec{f}^{(n)}_{k_0} \right) \\
\vec{f}_{ik} &= \vec{f}^{(0)}_{ik} + \left(\operatorname{div} \vec{f}^{(1)}_{ik}, \ldots, \operatorname{div} \vec{f}^{(n)}_{ik} \right)
\end{aligned}$$

$$\vec{f}^{[N]}_i = \sum_{k=k_0}^{N} \vec{f}_{ik}$$

$$\vec{f}^{[N]} = \vec{f}_{k_0} + \sum_{i=1}^{m} \vec{f}^{[N]}_i \, .$$

Lema 35 . Existe uma única solução fraca, $\vec{v}^{[N]} \in \mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$, para o problema (4.23) com $\vec{f}^{[N]}$ no lugar de $\vec{f}$.

Prova: Basta verificar que $\vec{f}^{[N]} \in D^{-1,p'}(\Omega)$, e o resultado segue do Teorema 12. Verificaremos, então, que $\vec{f}^{[N]} \in D^{-1,p'}(\Omega)$. Seja $\vec{\psi} \in \mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$, daí

$$\left| \langle \vec{f}^{[N]}, \vec{\psi} \rangle \right| \leq \left| \langle \vec{f}_{k_0}, \vec{\psi} \rangle \right| + \left| \left\langle \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=k_0}^{N} \vec{f}_{ik}, \vec{\psi} \right\rangle \right| . \tag{4.135}$$

Agora, usando a Desigualdade de Hölder, (1.2) e (1.9), obtemos

$$\left| \langle \vec{f}_{k_0}, \vec{\psi} \rangle \right| \leq c(q, k_0) \left\| \vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega) \right\| \left| \vec{\psi} \right|_{1,p} \, , \tag{4.136}$$

e usando (1.9) e $\sum_{k=k_0}^{N} \varphi_{ik}(x) \le 1$, para todo $x \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=k_0}^{N} \vec{f}_{ik}, \vec{\psi} \right\rangle\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=k_0}^{N} \left(\int_\Omega \left|\vec{f}_{ik}^{(0)}\right| \left|\vec{\psi}\right| + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left|\vec{f}_{ik}^{(j)}\right| \left|\nabla\vec{\psi}\right| \right) \\
&\le \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0-1)}} N_i^{q(p-1)(\hat{\gamma}_i+1)} e^{q(p-1)\beta_i} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^q \right)^{1/q} \cdot \right.\right. \\
&\left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0-1)}} N_i^{-q'(p-1)(\hat{\gamma}_i+1)} e^{-q'(p-1)\beta_i} \left| \sum_{k=k_0}^{N} \varphi_{ik} \right|^{q'} \left|\vec{\psi}\right|^{q'} \right)^{1/q'} \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0-1)}} N_i^{q(p-1)\hat{\gamma}_i} e^{q(p-1)\beta_i} \left|\vec{f}^{(j)}\right|^q \right)^{1/q} \cdot \\
&\left.\left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0-1)}} N_i^{-q'(p-1)\hat{\gamma}_i} e^{-q'(p-1)\beta_i} \left| \sum_{k=k_0}^{N} \varphi_{ik} \right|^{q'} \left|\nabla\vec{\psi}\right|^{q'} \right)^{1/q'} \right\} \\
&\le c \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\left\| \vec{f}^{(0)}; L^q_{((p-1)(\hat{\gamma}_i+1),(p-1)\beta_i)}(\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0-1)}) \right\| \right.\right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{n} \left\| \vec{f}^{(j)}; L^q_{((p-1)\hat{\gamma}_i,(p-1)\beta_i)}(\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0-1)}) \right\| \right) \cdot \\
&\left.\left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0-1)}} N_i^{-q'(p-1)\hat{\gamma}_i} e^{-q'(p-1)\beta_i} \left| \sum_{k=k_0}^{N} \varphi_{ik} \right|^{q'} \left(\left|\vec{\psi}\right|^{q'} + \left|\nabla\vec{\psi}\right|^{q'} \right) \right)^{1/q'} \right\} \\
&\le c(N) \left\| \vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega) \right\| \left|\vec{\psi}\right|_{1,p} .
\end{aligned}$$

Disto e de (4.135) e (4.136), vem

$$\left|\langle \vec{f}^{[N]}, \vec{\psi} \rangle\right| \le c(N) \left\| \vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega) \right\| \left|\vec{\psi}\right|_{1,p} .$$

Portanto, $\vec{f}^{[N]} \in D^{-1,p'}(\Omega)$, como desejávamos.

□

Agora, para provarmos o principal resultado deste capítulo, provaremos alguns lemas auxiliares.

Lema 36 . Para $q \geq p$ e $\beta > 0$, temos $V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega) \subset V^{-1,p',p}_{(\gamma+\gamma^{(1)},0)}(\Omega)$, com

$$\left\|\vec{g}; V^{-1,p',p}_{(\gamma+\gamma^{(1)},0)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{g}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\| \ , \quad \forall\ \vec{g} \in V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega) \,. \tag{4.137}$$

Prova: Basta mostrar (4.137). Começamos relembrando que

$$\left\|\vec{g}; V^{-1,p',p}_{(\gamma+\gamma^{(1)},0)}(\Omega)\right\| = \left\|\vec{g}^{(0)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}+1),0)}(\Omega)\right\| + \sum_{j=1}^{n} \left\|\vec{g}^{(j)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}),0)}(\Omega)\right\| . \tag{4.138}$$

Analisaremos os termos de (4.138). Para $j = 1, \ldots, n$, temos

$$\left\|\vec{g}^{(j)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}),0)}(\Omega)\right\| = \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} + \sum_{i=1}^{m} \left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)})} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} . \tag{4.139}$$

Agora, usando (4.9) e procedendo como na obtenção de (4.129), obtemos, para cada $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)})} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} &\leq c \left\{\sum_{k=k_0}^{\infty} e^{-p\beta_i\alpha_{ik}} \left(\int_{\omega_{ik}} N_i^{q(p-1)\hat{\gamma}_i} e^{q(p-1)\beta_i\alpha_i} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{q}\right)^{\frac{p}{q(p-1)}}\right\}^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq c \left\{\left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \int_{\omega_{ik}} N_i^{q(p-1)\hat{\gamma}_i} e^{q(p-1)\beta_i\alpha_i} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{q}\right)^{\frac{p}{q(p-1)}} \cdot \right. \\
&\qquad \left. \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} e^{-pr'\beta_i\alpha_{ik}}\right)^{\frac{1}{r'}}\right\}^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq c \left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{q(p-1)\hat{\gamma}_i} e^{q(p-1)\beta_i\alpha_i} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} ,
\end{aligned} \tag{4.140}$$

onde na segunda desigualdade usamos a Desigualdade de Hölder para soma com $r = q(p-1)/p$ e na última a convergência da série, visto que $\beta > 0$. Ainda, aplicando a Desigualdade de Hölder, segue

$$\left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq c \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\vec{g}^{(j)}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} . \tag{4.141}$$

Agora de (4.139) − (4.141), temos

$$\left\|\vec{g}^{(j)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}),0)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{g}^{(j)}; L^{q}_{((p-1)\hat{\gamma},(p-1)\beta)}(\Omega)\right\| . \tag{4.142}$$

Analogamente, obtemos

$$\left\|\vec{g}^{(0)}; L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}+1),0)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{g}^{(0)}; L^{q}_{((p-1)(\hat{\gamma}+1),(p-1)\beta)}(\Omega)\right\| . \tag{4.143}$$

E assim, de (4.138), (4.142) e (4.143) segue (4.137).

□

Lema 37 . Para $q \geq p$ e $\beta > 0$, temos $\vec{f}^{[N]}$ e $\vec{f} \in \left(V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)\right)^*$, para todo $N \in \mathbb{N}$, e satisfazem

$$|\langle \vec{g}, \vec{w}\rangle| \leq c \left\|\vec{g}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\| \left\|\vec{w}; V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)\right\| , \tag{4.144}$$

onde $\vec{g}$ é $\vec{f}^{[N]}$ ou $\vec{f}$.

Prova: Basta fazermos a prova para $\vec{f}$, pois para $\vec{f}^{[N]}$ é análoga. Seja então $\vec{w} \in V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)$, daí

$$|\langle \vec{f}, \vec{w}\rangle| \leq \int_\Omega \left|\vec{f}^{(0)}\right| |\vec{w}| + \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \left|\vec{f}^{(j)}\right| |\nabla \vec{w}| . \tag{4.145}$$

Vejamos o primeiro termo de (4.145)

$$\int_\Omega \left|\vec{f}^{(0)}\right| |\vec{w}| \leq \int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\vec{f}^{(0)}\right| |\vec{w}| + \sum_{i=1}^{m} \int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|\vec{f}^{(0)}\right| |\vec{w}| . \tag{4.146}$$

Ora, aplicando a Desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\vec{f}^{(0)}\right| |\vec{w}| \leq c \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^q\right)^{1/q} \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} |\vec{w}|^q\right)^{1/q} . \tag{4.147}$$

Enquanto, para cada i

$$\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} \left|\vec{f}^{(0)}\right| |\vec{w}| \leq \left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{q(p-1)(\hat{\gamma}_i+1)} e^{(p-1)\beta_i \alpha_i} \left|\vec{f}^{(0)}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega_i \setminus \overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{q(\gamma_i-1)} |\vec{w}|^q\right)^{\frac{1}{q}} I_i^{\frac{q-2}{q}} , \tag{4.148}$$

onde
$$I_i = \int_{\Omega_i\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{\frac{q}{q-2}[-(p-1)(\hat{\gamma}_i+1)-\gamma_i+1]} e^{-\frac{q}{q-2}(p-1)\beta_i\alpha_i}.$$

Mostraremos agora que a integral I_i converge. Começaremos denotando $\theta_1 = \frac{q}{q-2}[-(p-1)(\hat{\gamma}_i + 1) - \gamma_i + 1]$, $\theta_2 = \frac{q}{q-2}(p-1)\beta_i$. Daí

$$I_i \le c \int_{k_0}^{\infty} g_i^z(t) e^{-\theta_2\alpha_i(t)} dt\,, \tag{4.149}$$

onde $z = n + 1 - \theta_1$. É suficiente mostrar que a integral em (4.149) é finita para $z > 0$ limitado. Ora, como $\lim\limits_{t\to\infty} g_i'(t) = 0$, temos que para $c_0 = c_0(z,\theta_2) > 0$, existe $t_1 = t_1(c_0(z,\theta_2))$ tal que
$$g_i'(t) \le c_0 \quad , \quad \forall t \ge t_1\,.$$

Daí
$$g_i(t) \le 2c_0 t \quad , \quad \forall t \ge t_2 = \max\left\{t_1, \frac{M_i t_1}{c_0}\right\}.$$

Portanto,
$$\int_{k_0}^{\infty} g_i^z(t) e^{-\theta_2\alpha_i(t)} dt \le c(k_0, z, \theta_2) + c(z,\theta_2)\int_{t_2}^{\infty} t^{z-\frac{\theta_2}{2c_0}} dt \le \infty\,,$$

desde que $z - \frac{\theta_2}{2c_0} < -1$, mas para isto basta tomarmos $c_0 = \frac{q(p-1)\beta_i}{3(1+z)(q-2)}$. Assim temos mostrado que a integral em (4.149) é finita, ou seja, I_i converge e portanto, usando a Desigualdade de Hölder para a soma, de (4.146) − (4.148) vem

$$\int_\Omega \left|\vec{f}^{(0)}\right| |\vec{w}| \le c \left\|\vec{f}^{(0)}; L^q_{((p-1)(\hat{\gamma}+1),(p-1)\beta)}(\Omega)\right\| \left\|\vec{w}; L^q_{(\gamma-1,0)}(\Omega)\right\|. \tag{4.150}$$

Analogamente, se mostra que para cada $j = 1, \ldots, m$,

$$\int_\Omega \left|\vec{f}^{(j)}\right| |\nabla\vec{w}| \le c \left\|\vec{f}^{(j)}; L^q_{((p-1)\hat{\gamma},(p-1)\beta)}(\Omega)\right\| \left\|\nabla\vec{w}; L^q_{(\gamma-1,0)}(\Omega)\right\|. \tag{4.151}$$

Portanto, de (4.145), (4.150) e (4.151) temos (4.144) para $\vec{f}$, como queríamos demonstrar.

□

Teorema 20 . Dado $\vec{f} \in V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)$, com $q \geq p$, $\beta > 0$ e γ como nos teoremas anteriores. Existe uma única solução fraca $\vec{v} \in \mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega) \cap V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)$, para o problema (4.23) e, esta solução, satisfaz as seguintes estimativas:

$$\left|\vec{v}\right|_{1,p} \leq c \left\|\vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}} \tag{4.152}$$

$$\left\|\vec{v}; V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}} . \tag{4.153}$$

Prova: Seja $\vec{v}^{[N]} \in \mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$ a solução do problema (4.23) com $\vec{f}^{[N]}$ no lugar de $\vec{f}$, conforme o Lema 35. Estimaremos agora

$$\left\|\nabla\vec{v}^{[N]}; L^q_{(\gamma,0)}(\Omega)\right\| = \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\nabla\vec{v}^{[N]}\right|^q\right)^{1/q} + \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{\Omega_i\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{q\gamma_i}\left|\nabla\vec{v}^{[N]}\right|^q\right)^{1/q} . \tag{4.154}$$

Cada um dos termos de (4.154) será estimado separadamente. Para o primeiro termo, como em (4.133), temos

$$\left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\nabla\vec{v}^{[N]}\right|^q\right)^{1/q} \leq c\left\{\left(\left\|\vec{f}_{k_0}\right\|_{q,\Omega_{(k_0+2)}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=k_0}^{k_0+3}\left\|\vec{f}_{ik}\right\|_{q,\Omega_{(k_0+2)}}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\nabla\vec{v}^{[N]}\right\|_{p,\Omega_{(k_0+2)}}\right\}. \tag{4.155}$$

Agora, usando o Lema 36 e (4.26), vem

$$\left\|\nabla\vec{v}^{[N]}\right\|_{p,\Omega_{(k_0+2)}} \leq c\left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|. \tag{4.156}$$

Como, obviamente

$$\left\|\vec{f}_{k_0}\right\|_{q,\Omega_{(k_0+2)}} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=k_0}^{k_0+3}\left\|\vec{f}_{ik}\right\|_{q,\Omega_{(k_0+2)}} \leq c\left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|, \tag{4.157}$$

de (4.155) – (4.157), temos a seguinte estimativa para o primeiro termo de (4.154)

$$\left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}} \left|\nabla\vec{v}^{[N]}\right|^q\right)^{1/q} \leq c\left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}} . \tag{4.158}$$

Agora vamos estimar o segundo termo de (4.154). Usando (4.120), temos para cada $i = 1, \ldots, m$ e $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$,

$$\left\|\nabla\vec{v}^{[N]}; L^q_{(\gamma_i,0)}(\omega_{ik})\right\| \leq c\left\{\left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma}_i,0)}(\omega^*_{ik})\right\|^{\frac{1}{p-1}} + \left\|\nabla\vec{v}^{[N]}; L^p_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},0)}(\omega^*_{ik})\right\|\right\}. \tag{4.159}$$

Agora, usando (4.50) obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\vec{v}^{[N]};L^{p}_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},0)}(\omega^*_{ik})\right\| &\leq ce^{-\frac{p}{2}\beta_i\alpha_{ik}}\left\{\left\|\vec{f}^{(0)[N]};L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}+1),(p-1)\frac{\beta}{2})}(\Omega)\right\|\right.\\ &\left.+\sum_{j=1}^{n}\left\|\vec{f}^{(j)[N]};L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}),(p-1)\frac{\beta}{2})}(\Omega)\right\|\right\}^{\frac{1}{p-1}}.\end{aligned} \tag{4.160}$$

Analisaremos agora, os termos de (4.160). Para cada $j=1,\ldots,n$, temos

$$\begin{aligned}\left\|\vec{f}^{(j)[N]};L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}),(p-1)\frac{\beta}{2})}(\Omega)\right\| &= \left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}}\left|\vec{f}^{(j)[N]}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &+\sum_{i=1}^{m}\left(\int_{\Omega_i\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}}N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)})}e^{\frac{p}{2}\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)[N]}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned} \tag{4.161}$$

Agora, procedendo como em (4.140), obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega_i\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}}N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)})}e^{\frac{p}{2}\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)[N]}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{\omega_{ik}}N_i^{p(\gamma_i+\gamma_i^{(1)})}e^{p\beta_i\alpha_i}e^{-\frac{p}{2}\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)[N]}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\leq c\left(\int_{\Omega_i\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}}N_i^{q(p-1)\hat{\gamma}_i}e^{q(p-1)\beta_i\alpha_i}\left|\vec{f}^{(j)[N]}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned} \tag{4.162}$$

e, como em (4.141),

$$\left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}}\left|\vec{f}^{(j)[N]}\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\leq c\left(\int_{\Omega_{(k_0+1)}}\left|\vec{f}^{(j)[N]}\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.163}$$

Assim, de (4.161) − (4.163), obtemos

$$\left\|\vec{f}^{(j)[N]};L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}),(p-1)\frac{\beta}{2})}(\Omega)\right\|\leq c\left\|\vec{f}^{(j)[N]};L^{q}_{((p-1)\hat{\gamma},(p-1)\beta)}(\Omega)\right\|. \tag{4.164}$$

Analogamente, temos

$$\left\|\vec{f}^{(0)[N]};L^{p'}_{((p-1)(\gamma+\gamma^{(1)}+1),(p-1)\frac{\beta}{2})}(\Omega)\right\|\leq c\left\|\vec{f}^{(0)[N]};L^{q}_{((p-1)(\hat{\gamma}+1),(p-1)\beta)}(\Omega)\right\|. \tag{4.165}$$

Daí, substituindo (4.164) e (4.165) em (4.160), vem

$$\left\|\nabla\vec{v}^{[N]};L^{p}_{(\gamma_i+\gamma_i^{(1)},0)}(\omega^*_{ik})\right\|\leq ce^{-\frac{p}{2}\beta_i\alpha_{ik}}\left\|\vec{f}^{[N]};V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.166}$$

Agora, facilmente vemos que

$$\left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma}_i,0)}(\omega^*_{ik})\right\| \leq c e^{-\frac{p}{q}\beta_i\alpha_{ik}} \left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|. \qquad (4.167)$$

E assim, de (4.159), (4.166) e (4.167), obtemos

$$\left\|\nabla\vec{v}^{[N]}; L^{q}_{(\gamma_i,0)}(\omega_{ik})\right\| \leq c e^{-\frac{p}{q(p-1)}\beta_i\alpha_{ik}} \left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (4.168)$$

Ainda, como $\beta > 0$, de (4.168) segue

$$\left(\int_{\Omega_i\setminus\overline{\Omega}_{(k_0)}} N_i^{q\gamma_i} \left|\nabla\vec{v}^{[N]}\right|^q\right)^{1/q} \leq c \left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (4.169)$$

E assim, de (4.154), (4.158) e (4.169), temos

$$\left\|\nabla\vec{v}^{[N]}; L^{q}_{(\gamma,0)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (4.170)$$

Pela tomada de $\vec{f}^{[N]}$, sem dificuldades, vemos que

$$\left\|\vec{f}^{[N]}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\| \leq \left\|\vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|.$$

Daí, de (4.170), segue

$$\left\|\nabla\vec{v}^{[N]}; L^{q}_{(\gamma,0)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}},$$

que pela Proposição 5 nos dá

$$\left\|\vec{v}^{[N]}; V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)\right\| \leq c \left\|\vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega)\right\|^{\frac{1}{p-1}}. \qquad (4.171)$$

Agora, como os espaços $V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)$ são reflexivos para $1 < q < \infty$ (ver [15], Teorema 1.3) de (4.171) temos que existe uma subsequência, que denotaremos ainda por $\vec{v}^{[N]}$, que converge fraco em $V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)$, isto é, existe $\vec{v} \in V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)$ tal que

$$\langle\vec{v}^{[N]}, \vec{\varphi}\rangle \longrightarrow \langle\vec{v}, \vec{\varphi}\rangle, \quad \forall\vec{\varphi} \in \left(V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega)\right)^*. \qquad (4.172)$$

Precisamos mostrar então, que $\vec{v}$ é solução fraca do nosso problema, isto é, satisfaz (4.24). Para tal é necessário passar o limite em

$$\int_\Omega \left|D(\vec{v}^{[N]})\right|^{p-2} D(\vec{v}^{[N]}) : D(\vec{\varphi}) = \langle\vec{f}^{[N]}, \vec{\varphi}\rangle, \quad \forall\vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega). \qquad (4.173)$$

Procedendo como na demonstração dos Lemas 35 e 37, obtemos

$$\vec{f} \in D^{-1,p'}(\Omega)\,, \tag{4.174}$$

satisfazendo

$$|\langle \vec{f}, \vec{w} \rangle| \leq c \left\| \vec{f}; V^{-1,q,p}_{(\hat{\gamma},\beta)}(\Omega) \right\| \left| \vec{w} \right|_{1,p,\Omega}. \tag{4.175}$$

Também é fácil ver que

$$\vec{f}^{[N]} \longrightarrow \vec{f} \ \text{ em } \left(V^{1,q}_{(\gamma,0)}(\Omega) \right)^* \text{ e em } D^{-1,p'}(\Omega). \tag{4.176}$$

Agora, como (4.173) vale para $\vec{\varphi} = \vec{v}^{[N]}$, de (4.172) e (4.176) temos, para $A\vec{w} = -\text{div} \left\{ \left| D(\vec{w}) \right|^{p-2} D(\vec{w}) \right\}$,

$$c_p \left| \vec{v}^{[N]} \right|_{1,p} \leq \int_\Omega \left| D(\vec{v}^{[N]}) \right|^p = \langle A\vec{v}^{[N]}, \vec{v}^{[N]} \rangle = \langle \vec{f}^{[N]}, \vec{v}^{[N]} \rangle \longrightarrow \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle\,, \tag{4.177}$$

onde a desigualdade é devido à (1.8) e a convergência devido ao resultado clássico de [9] (Proposição III.5(iv)). Como $\mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$ é reflexivo (ver [20], Exercício II.5.1), devido à (4.177) podemos obter uma subsequência (que ainda denotaremos por $\vec{v}^{[N]}$) que converge fraco em $\mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$, isto é, existe $\vec{u} \in \mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$ tal que

$$\langle \vec{v}^{[N]}, \vec{w} \rangle \longrightarrow \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle\,, \quad \forall\, \vec{w} \in D^{-1,p'}(\Omega)\,. \tag{4.178}$$

Porém, devido ao Lema 37, (4.172), (4.174) e (4.178) temos $\vec{u} = \vec{v}$. Agora aplicando o Método de Monotonicidade, como no Capítulo 2, concluímos que $\vec{v}$ satisfaz (4.24), como queríamos.

Resta ainda provar as estimativas (4.152) e (4.153). Vejamos então: (4.152) segue de (4.175) e (1.8), enquanto (4.153) segue do uso do resultado clássico de [9] (Proposição III.5(iii)), devido à (4.172), junto com a estimativa (4.171).

□

TRABALHOS FUTUROS

Uma tese de doutoramento é um trabalho inicial de formação do pesquisador. Nas muitas vezes o trabalho apresenta resultados parciais e levanta muitas questões e problemas para trabalhos futuros. Assim, nas linhas abaixo, citaremos algumas propostas de trabalhos futuros.

Obviamente, este nosso trabalho, nos depara com uma gama de problemas "duais", isto é, uma vez que a tese se propós a estudar fluidos shear thickening (fluidos obedecendo a Lei de Potência para $p > 2$), podemos propor os mesmos problemas para fluidos shear thinning ($1 < p < 2$). Um ponto favorável é a existência de uma literatura para fluidos shear thinning, praticamente em mesmo volume da literatura para fluidos shear thickening.

Um ponto crucial desta tese foi a questão de regularidade em domínios limitados. Ainda, o que nos deixou mais motivados foi o fato dos resultados, tanto para fluidos shear thickening quanto para fluidos shear thinning, estarem sendo desenvolvidos nos dois últimos anos (pelo menos para $n = 3$) pelos autores Beirão da Veiga, Kaplický e Ruzicka. Sendo assim, uma possível proposta de estudo seria regularida para fluidos com potência.

No Capítulo 4, não atingimos o objetivo que era obter as estimativas para os sistemas de Stokes e Navier-Stokes com fluxo prescrito qualquer. Como comentamos na Introdução, a não linearidade do termo com potência aniquilou as nossas tentativas, até então. Isto não significa a irresubilidade de tal problema.

Por fim, ao iniciar os trabalhos desta Tese, tivemos que decidir entre estudar o problema de Ladyzhenskaya e Solonnikov para fluidos shear thickening ou o problema de Leray para fluidos shear thinning. Portanto um problema interessante é contribuir com o trabalho do Marusic-Paloka, resolvendo o problema de Leray para fluidos shear thinning.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R.A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] Amick, C.J., Steady Solutions of the Navier-Stokes Equations in Unbounded Channels and Pipes, Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4ª série, Vol.4, nº 3, 473-513, 1977.

[3] Barrett, J.W. e Liu, W.B., Finite Element Approximation of the p-Laplacian, Mathematics of Computation, Vol. 61, nº 204, 523-537, 1993.

[4] Beirão da Veiga, H., On the Ladyzhenskaya-Smagorinsky Turbulence Model of the Navier-Stokes Equations in Smooth Domains. The Regularity Problem, J. Eur. Math. Soc., 11, 127-167, 2009.

[5] Beirão da Veiga, H., Kaplický, P. e Ruzicka, M., Boundary Regularity of Shear Thickening Flows, J. Math. Fluid Mech., to appear; published online, doi:10.1007/s00021-010-0025-y.

[6] Beirão da Veiga, H., Kaplický, P. e Ruzicka, M., Regularity Theorems, up to the Boundary, for Shear Thickening Flows, C. R. Mathe. Acad. Sci. Paris, 348, 541-544, 2010.

[7] Bhattacharya, T., DiBenedetto, E. e Manfredi, J., Limits as $p \to \infty$ of $\Delta_p u_p = f$ and Related Extremal Problems, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Fascicolo Speciale, Nonlinear PDE's, 15-68, 1989.

[8] BÍBLIA. Português. **A Bíblia Sagrada**. Versão Revisada da Tradução de João Ferreira de Almeida. Rio de Janeiro. JUERP/Imprensa Bíblica Brasileira. 1992.

[9] Brézis, H., Análisis Funcional Teoría y Aplicacions, Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1984.

[10] Byun, S. e Wang, L. H., Elliptic Equations with BMO Coefficients in Reifenberg Domains, Comm. Pure Appl. Math., 57(10), 1283-1310, 2004.

[11] Caffarelli, L. A. e Cabré, X., Fully Nonlinear Elliptic Equations, American Mathematical Society, 43, Providense, RI, 1995.

[12] Cai, Y. Y. e Yao, F. P., L^q Interior Estimates of the Gradient for Weak Solutions of Quasilinear Elliptic Equations, Acta Mathematica Sinica, English Series, 23, nº 12, 2225-2234, 2007.

[13] DiBenedetto, E., Degenerate Parabolic Equations, Spring Verlag, Berlin, 1994.

[14] DiBenedetto, E. e Manfredi, J., On the Higer Integrability of the Gradient of Weak Solutions of Certain Degenerate Elliptic Systems, Amer. J. Math., 115, 1107-1134, 1993.

[15] Drábek, P., Kufner, A. e Nicolosi, F., Quasilinear Elliptic Equations with Degenerations and Singularities, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1997.

[16] Evans, L.C., Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[17] Folland, G., Real Analysis: Modern Techniques and their Applications, Wiley-Interscience, 1984.

[18] Frehse, J., Málek, J. e Steinhauer, M., An Existence Result for fluids with shear dependent viscosity-steady flows, Nonlinear Anal., 30, 3041-3049, 1997.

[19] Frehse, J., Málek, J. e Steinhauer, M., On Analysis of Steady Flows of Fluids with Shear-Dependent Viscosity Based on the Lipschitz Truncation Method, SIAM J. Math. Anal., Vol 34, nº 5, 1064-1083, 2003.

[20] Galdi, G.P., An Introduction to the Mathematical Theory o f the Navier-Stokes Equations, Vol. I e II, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[21] Hardy, G.H., Littlewood, J.D., Polya, G., Inequalities, Second Ed., Cambridge Univ. Press, 1952.

[22] Kaplický, P., Málek, J. e Stará, J., $C^{1,\alpha}$-Regularity of Weak Solutions to a Class of Nonlinear Fluids in Two Dimensions-Stationary Dirichlet Problem, Zap. Nauchn. Sem. Pt. Odel. Mat. Inst. 259, 89-121, 1999.

[23] Kondratjev, V., Oleinik, O.A., Boundary Value Problems for the System of Elasticity Theory in Unbounded Domains. Korn's Inequalities. Russ. Math. Surveys 43, 5, 65-119, 1988.

[24] Ladyzhenskaya, O. A., On Some New Equations Describing Dynamics of Incompressible Fluids and on Global Solvability of Boundary Value Problems to these Equations, Trudy Steklov's Math. Institute, 102, 85-104, 1967.

[25] Ladyzhenskaya, O. A., On Some Modifications of the Navier-Stokes Equations for Large Gradients of Velocity, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 7, 126-154, 1968.

[26] Ladyzhenskaya, O. A., The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, 2nd ed., 1969.

[27] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Determination of the Solutions of Boundary Value Problems for Steady-State Stokes and Navier-Stokes Equations in Domains Having an Unbounded Dirichlet Integral, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 96 (1980) 117-160 (English Transl.: J. Soviet Math., 21, 1983, 728-761).

[28] Lions, J.L., Quelques Méthods de Resolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[29] Marusic-Paloka, E., Steady Flow of a Non-Newtonian Fluid in Unbounded Channels and Pipes, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 10, nº 9, 1425-1445, 2000.

[30] Marusic-Paloka, E., On the Stokes Paradox for Power-Law Fluids, ZAMM. Z.. Angew. Math. Mech., 81, nº 1, 31-36,2001.

[31] Neff, P., On Korn's First Inequality with Nonconstant Coefficients, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 132A, 221-243, 2002.

[32] Oliveira, C. R., Introcução à Análise Funcional, 2ª ed., Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[33] Passerini, A., Patria, M.C. e Thater, G., Steady Flow of a Viscous Incompressible Fluid in na Unbounded "Funnel-Shaped" Domain, Annali di Matematica Pura Ed Applicata (IV), Vol. CLXXIII, 43-62, 1997.

[34] Pileckas, K., Weighted L^q-Solvability of the Steady Stokes System in Domains with Noncompact Boundaries, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 6, nº 1, 97-136, 1996.

[35] Pileckas, K.I., Recent Advances in the Theory of Stokes and Navier-Stokes Equations in Domains with Non-compact Boundaries, Mathematical Theory in Fluid Mechanics, Galdi, G.P., Málek, J., and Necas, J., Eds., Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific and Technical, Vol. 354, 30-85, 1996

[36] Rosen, S. L., Fundamental Principles of Polymeric Materials, 2ª ed., Wiley, 1993.

[37] Ruzicka, M., A Note on Steady flow of fluids with shear dependent viscosity, Nonlinear Anal., 30, 3029-3039, 1997.

[38] Sadowski, W., On the Stationary Flow of the Power Law Fluid in 2D, Journal of Applied Analysis, Vol.8, Nº 1, 141-151, 2002.

[39] Silva, F.V., On a Lemma Due to Ladyzhenskaya and Solonnikov and Some Applications, Nonlinear Analysis, 64, 706-725, 2006.

[40] Solonnikov, V.A., Pileckas, K.I., Certain Spaces of Solenoidal Vectores and the Solvability of the Boundary Problem for the Navier-Stokes System of Equations in Domains with Noncompact Boundaries, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI), 73(1977)136-151 (English Transl.: J. Soviet Math., 34, 1986, 2101-2111).

[41] Stein, E. M., Harmonic Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[42] Wang, L. H., A Geometric Approach to the Calderón-Zygmund Estimates. Acta Mathematica Sinica, English Series, 19(2), 381-396, 2003.