

---

**Universidade Estadual de Campinas**

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática Aplicada

---

Tese de Doutorado

**Função  $H$  de Fox e Aplicações no Cálculo  
Fracionário**

**Felix Silva Costa**

Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

## Função $H$ de Fox e Aplicações no Cálculo Fracionário

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Felix Silva Costa** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 25 de Agosto de 2011.

---

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira  
Orientador

**Banca Examinadora:**

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Prof. Dr. João Mauricio Rosario

Prof. Dr. Jayme Vaz Junior

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Prof. Dr. Ervin Kaminski Lenzi

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR ANA REGINA MACHADO – CRB8/5467  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

C823f	Costa, Felix Silva, 1982- Função H de Fox e aplicações no cálculo fracionário / Felix Silva Costa. – Campinas, SP : [s.n.], 2011.  Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.  1. Função H de Fox. 2. Cálculo fracionário. 3. Equação do telégrafo. 4. Schrödinger, Equação de. 5. Equação de onda-difusão. I. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.
-------	---

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Fox H function and applications in the fractional calculus

**Palavras-chave em inglês:**

Fox H function

Fractional calculus

Telegraph equation

Schrödinger equation

Wave-difusion equation

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]

João Mauricio Rosario

Jayme Vaz Junior

Bruto Max Pimentel Escobar

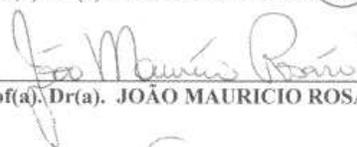
Ervin Kaminski Lenzi

**Data da defesa:** 25-08-2011

**Programa de Pós Graduação:** Matemática Aplicada

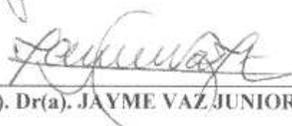
Tese de Doutorado defendida em 25 de agosto de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

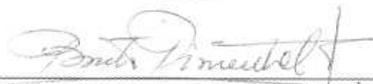


Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

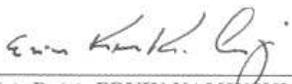
Prof(a). Dr(a). JOÃO MAURICIO ROSARIO



Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR



Prof(a). Dr(a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR



Prof(a). Dr(a). ERVIN KAMINSKI LENZI



A minha família e meu orientador  
Edmundo Capelas de Oliveira.  
*Dedico*



*“A paz é a única forma de nos  
sentirmos realmente humanos.”  
(Albert Einstein)*



---

# Agradecimentos

---

A Deus por tudo que conquistei ao longo dessa jornada.

A minha família por sempre ficar do meu lado e, mesmo distante, me ajudar a superar todos os obstáculos enfrentados.

Ao meu orientador, o qual tenho profunda admiração e gratidão, pelo seu apoio e por acreditar em mim.

Ao professor doutor Jayme Vaz Jr. (UNICAMP) por suas contribuições.

Aos meus amigos e companheiros que sempre estiveram presentes nos momentos alegres e difíceis da minha vida.

A Universidade Estadual de Campinas por propiciar a realização deste trabalho.



---

# Resumo

---

Neste trabalho é apresentado um estudo sistemático da função  $H$  de Fox e aplicações no cálculo fracionário. Inicialmente é feito um estudo da função hipergeométrica e suas possíveis generalizações, logo em seguida é definida a integral de Mellin-Barnes e a função  $G$  de Meijer, em conjunto com suas propriedades e seus casos particulares. Depois é definida a função  $H$  de Fox, objetivo principal do trabalho, e seu atual campo de aplicação, que é o cálculo fracionário. Finalmente, apresentam-se as aplicações envolvendo a função  $H$  de Fox e o cálculo fracionário. Das três aplicações, os dois primeiros resultados correspondem a duas generalizações: uma da equação do telégrafo e a outra da equação de Schrödinger. Enfim, é discutida uma generalização da equação de onda-difusão no caso em que as condições iniciais são periódicas.

**Palavras chaves:** Função  $H$  de Fox, cálculo fracionário, equação do telégrafo, equação de Schrödinger, equação de onda-difusão.



---

# Abstract

---

This work presents a systematic study of the Fox  $H$  function and its possible applications in fractional calculus. It begins with a study about the hypergeometric function and its possible generalizations; after that, the Mellin-Barnes integral and the Meijer  $G$  function are defined and their properties and particular cases are presented. The Fox  $H$  function is then defined and its current field of application, fractional calculus, is discussed. In the sequence some applications involving the Fox  $H$  function and fractional calculus are presented, which constitute its main results; the two first results involve the telegraph equation and the Schrödinger equation in their generalized sense. Finally, one discusses a generalization of the wave-diffusion equation in the case in which the initial conditions are periodic.

**Keywords:** Fox  $H$  function, fractional calculus, telegraph equation, Schrödinger equation, wave-difusion equation.



---

# Sumário

---

Agradecimentos	ix
Resumo	xi
Abstract	xiii
Introdução	1
<b>1 Função hipergeométrica</b>	<b>5</b>
1.1 Símbolo de Pochhammer . . . . .	5
1.2 Função hipergeométrica e generalizações . . . . .	7
1.2.1 Possíveis generalizações . . . . .	7
1.2.2 Funções de Appell, Kampé de Fériet e Horn . . . . .	8
1.2.3 Funções de MacRobert, Meijer e Fox . . . . .	9
1.2.4 Funções de Lauricella . . . . .	10
<b>2 As integrais de Mellin-Barnes</b>	<b>11</b>
2.1 Princípio da dualidade . . . . .	11
2.2 Expansão assintótica do logaritmo da função $\Gamma(z)$ . . . . .	15
2.3 Expansão de um quociente de funções gama . . . . .	16
2.3.1 Expansão fatorial inversa . . . . .	17
2.4 Convergência das integrais de Mellin-Barnes . . . . .	21
2.5 Casos particulares . . . . .	28
2.5.1 Função exponencial . . . . .	29
2.5.2 Função hipergeométrica . . . . .	29
2.5.3 Função hipergeométrica generalizada . . . . .	31

<b>3</b>	<b>A função <math>G</math> de Meijer</b>	<b>33</b>
3.1	Introdução . . . . .	33
3.2	Definição e equação diferencial . . . . .	35
3.2.1	Equação hipergeométrica . . . . .	37
3.2.2	Equação hipergeométrica confluyente . . . . .	39
3.3	Propriedades . . . . .	39
3.4	Casos particulares . . . . .	45
3.4.1	Função hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; x)$ . . . . .	45
3.4.2	Função hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$ . . . . .	46
3.4.3	Função $E$ de MacRobert . . . . .	46
<b>4</b>	<b>A função <math>H</math> de Fox</b>	<b>47</b>
4.1	Introdução . . . . .	47
4.2	Definição . . . . .	50
4.3	Propriedades . . . . .	53
4.4	Casos particulares . . . . .	57
4.4.1	A função $G$ de Meijer . . . . .	58
4.4.2	As funções de Mittag-Leffler . . . . .	58
4.4.3	A função de Wright . . . . .	59
4.4.4	A função de Mainardi . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Cálculo fracionário</b>	<b>61</b>
5.1	Introdução . . . . .	61
5.2	Operadores fracionários de Riemann-Liouville . . . . .	63
5.2.1	Integrais fracionárias . . . . .	63
5.2.2	Derivadas fracionárias . . . . .	63
5.2.3	Propriedades . . . . .	65
5.2.4	Integrais e derivadas fracionárias sobre $\mathbb{R}^+$ . . . . .	65
5.3	Derivada fracionária de Caputo . . . . .	67
5.3.1	Propriedades . . . . .	68
5.4	Integral fracionária de Weyl . . . . .	70
5.4.1	Propriedades . . . . .	71

---

5.5	Derivada de Riesz . . . . .	71
5.6	Derivada fracionária de Grünwald-Letnikov . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>75</b>
6.1	Equação do telégrafo fracionária . . . . .	75
6.2	Equação de Schrödinger fracionária . . . . .	78
6.2.1	Equação de Schrödinger fracionária espacial . . . . .	79
6.2.2	Potencial delta . . . . .	82
6.2.3	Duplo potencial delta . . . . .	87
6.3	Equação de onda-difusão fracionária . . . . .	92
6.3.1	Equação fracionária com condições iniciais periódicas . . . . .	93
	<b>Conclusões</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Função gama <math>\Gamma(z)</math></b>	<b>103</b>
A.1	Função gama . . . . .	103
A.2	Expansão assintótica . . . . .	104
<b>B</b>	<b>Cálculo de algumas integrais</b>	<b>107</b>
B.1	Cálculo da integral (6.14) . . . . .	107
B.2	Cálculo da integral em (6.26) . . . . .	109
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>111</b>



---

# Introdução

---

A busca por uma descrição e compreensão mais apurada de problemas físicos, biológicos e que aparecem na engenharia, tem feito diversos pesquisadores utilizarem ferramentas matemáticas mais sofisticadas. O uso de tais ferramentas pode ser justificado pelo grau de complexidade que cada problema envolve. Uma das alternativas que apresenta um grande crescimento é o cálculo diferencial e integral de ordem arbitrária, popularmente conhecido pelo nome de cálculo fracionário [32, 115].

O cálculo fracionário está relacionado com derivadas e integrais de ordem arbitrária. Estas integrais e derivadas vêm sendo introduzidas ao longo do tempo através de diversas definições, o que, em princípio, dificulta uma abordagem geral. Entretanto, dentre as várias definições que aparecem, podemos citar como principais, a derivada (e integral) de Riemann-Liouville, a derivada de Caputo, a derivada de Grünvald-Letnikov e a derivada de Riesz.

A utilização desta teoria faz com que muitas outras definições e ferramentas matemáticas apareçam conforme o cálculo fracionário vem evoluindo e sendo aplicado. Dentre estas ferramentas, citamos aqui o nosso objeto de estudo, as funções  $H$  de Fox [79], que emergem com bastante frequência na solução de problemas advindos do cálculo fracionário.

Além do mais, uma outra importante justificativa para o seu estudo são as suas propriedades e seus casos particulares. Dentre os casos particulares podemos citar a função  $G$  de Meijer e a função de Mittag-Leffler, visto que a primeira engloba todas as clássicas funções especiais e a segunda aparece como solução de importantes problemas envolvendo o cálculo fracionário.

Assim, o principal objetivo do nosso trabalho é investigar e utilizar as funções  $H$  de Fox, de forma que possamos ter uma melhor compreensão de problemas advindos do cálculo

fracionário<sup>2</sup>. Por outro lado, podemos dizer que a própria função  $H$  de Fox desperta bastante interesse, pois se trata da forma mais geral de generalizar a função hipergeométrica, em particular, aquela com uma variável independente.

A seguir, vamos, de maneira resumida, apresentar como o trabalho está dividido. O Capítulo 1 traz uma breve introdução sobre a função hipergeométrica. Neste, apresentamos a definição da clássica função hipergeométrica e da respectiva equação diferencial por ela satisfeita, a conhecida equação hipergeométrica. Apresentamos possíveis generalizações, mencionando também, os seus precursores. Enfim, salientamos o caso de nosso interesse que é a generalização da função hipergeométrica através do aumento dos seus parâmetros, mantendo o número de variáveis independentes, isto é, uma variável independente e  $n$  parâmetros.

O Capítulo 2 trata das integrais de Mellin-Barnes que é a forma como vamos definir as funções  $H$  de Fox. Além disso, todo estudo matemático destas funções é baseado no estudo destas integrais junto aos seus respectivos contornos. O principal resultado apresentado nesse capítulo é a análise da convergência destas integrais para cada contorno discutido. Justifica-se isto pois a convergência destas integrais está relacionada diretamente com a existência das funções  $H$  de Fox.

O Capítulo 3 apresenta um estudo de um dos casos particulares da função  $H$  de Fox. Esta função é simplesmente a função  $G$  de Meijer que engloba todas as clássicas funções especiais.<sup>3</sup> Para esta função, definimos e apresentamos suas propriedades, e ainda mostramos a sua equação diferencial, que corresponde à forma mais geral de uma equação diferencial hipergeométrica. Como exemplo, é recuperada a equação diferencial satisfeita por uma função hipergeométrica confluenta. Mostramos ainda que a função hipergeométrica generalizada e a função de MacRobert são seus casos particulares.

No Capítulo 4 apresentamos o nosso principal objeto de estudo, ou seja, a função  $H$  de Fox. Sua definição e suas propriedades são apresentadas, bem como sua relação com as integrais de Mellin-Barnes. Finalizamos o capítulo discutindo os seus principais casos

---

<sup>2</sup>Convém ressaltar que um estudo das funções de Fox, em língua portuguesa, está sendo feito pela primeira vez, neste trabalho, em particular o estudo da convergência da representação integral, utilizando para definir a função de Fox, através das integrais de Mellin-Barnes.

<sup>3</sup>Ressaltamos também, que este estudo, em língua portuguesa, envolvendo a função  $G$  de Meijer, está sendo feito pela primeira vez, conforme nosso conhecimento.

particulares. Dentre estes casos, apresentamos a função de Mittag-Leffler e a função de Mainardi, a primeira aparece em muitos problemas envolvendo o cálculo fracionário e a segunda relacionada a problemas de difusão, em particular, a difusão anômala.

O Capítulo 5 apresenta o campo principal de aplicação da função  $H$  de Fox, isto é, problemas advindos do cálculo fracionário. Neste capítulo, após uma breve introdução do cálculo fracionário, as definições, exemplos e propriedades das diversas maneiras de se introduzir as derivadas de ordem não inteiras, ou ainda, derivadas fracionárias, são determinadas. Em particular, discutimos as derivadas de Riemann-Liouville, de Caputo, de Grünwald-Letnikov, de Weyl e de Riesz. Cabe ainda destacarmos, dentre estas definições, as derivadas de Riemann-Liouville, a mais difundida, e de Caputo, a mais conveniente para problemas envolvendo condições iniciais, bem como a relação entre elas. Estas derivadas, em particular as de Grünwald-Letnikov, vêm sendo utilizadas em diversas aplicações advindas da engenharia.

No Capítulo 6 apresentamos algumas aplicações envolvendo o cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler e  $H$  de Fox. Em particular, começamos por apresentar uma generalização da clássica equação do telégrafo cuja discussão é feita por meio da metodologia da transformada integral, especificamente, usamos a transformada de Laplace na variável temporal enquanto que na variável espacial, a transformada de Fourier. Apresentamos a solução em termos da função  $H$  de Fox e discutimos casos particulares dos parâmetros.

A equação de Schrödinger fracionária é discutida através da derivada de Riesz, na variável espacial. Aqui também apresentamos a solução em termos da função  $H$  de Fox e discutimos particulares casos dos parâmetros. Enfim, discutimos uma equação diferencial fracionária com condições periódicas onde a solução é apresentada em termos da função de Mittag-Leffler, que corresponde a um caso particular da função  $H$  de Fox. Aqui, neste caso, utilizamos a derivada no sentido de Caputo associada à parte temporal enquanto que a derivada de Riesz na variável espacial. Ressaltamos, enfim, que esta equação diferencial contempla, conforme os parâmetros, tanto a equação de onda, quanto a equação de difusão. Recupéramos alguns resultados recentes e também apresentamos os gráficos destes resultados para uma condição inicial periódica, em particular.

Concluindo o trabalho, apresentamos os apêndices A e B, onde no primeiro é discutido um breve resumo sobre a função gama, suas propriedades e a sua expansão assintótica, enquanto que no segundo, efetuamos os cálculos específicos de algumas integrais que aparecem no

decorrer do trabalho. Ressaltamos, que estes resultados se constituem de grande importância para este trabalho, em particular, o primeiro apêndice, pois as expansões das funções gama formam a base para análise da convergência das integrais de Mellin-Barnes.

---

# Função hipergeométrica

---

A clássica função hipergeométrica, também conhecida como função hipergeométrica de Gauss, é solução de uma equação diferencial ordinária que apresenta três pontos singulares regulares, incluindo um ponto no infinito, a chamada equação hipergeométrica, ou ainda equação de Gauss. A confluência de duas destas singularidades nos conduz à equação hipergeométrica confluyente, que apresenta dois pontos singulares, um deles irregular. Casos particulares da função hipergeométrica são, por exemplo, as funções de Legendre e de Gegenbauer, dentre outras; enquanto que as funções de Bessel e de Laguerre são casos particulares da função hipergeométrica confluyente.

Neste capítulo, após uma breve revisão do símbolo de Pochhammer, conveniente para a simplificação de resultados associados ao fatorial e à função gama, introduzimos a função hipergeométrica como sendo uma solução da equação hipergeométrica. Através de um conveniente processo de limite, recuperamos a função hipergeométrica confluyente, bem como citamos alguns de seus casos particulares. Concluimos o capítulo mencionando possíveis generalizações da função hipergeométrica, destacando aquela que permite o aumento do número de parâmetros porém mantida apenas uma variável independente, isto é, o estudo das chamadas funções  $H$  de Fox, objetivo do Capítulo 4.

## 1.1 Símbolo de Pochhammer

O chamado símbolo de Pochhammer, denotado por  $(\alpha)_n$ , foi originalmente introduzido com o intuito de simplificar a notação, em particular, envolvendo produtos ditos ascendentes, ou seja, em termos de funções gama ou, em certos casos, através do fatorial.

**Definição (Pochhammer):**

Sejam  $\alpha \notin 0, -1, -2, -3, \dots$  e o produto

$$\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1) \equiv (\alpha)_n$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Definimos o símbolo de Pochhammer através do seguinte quociente envolvendo duas funções gama (Apêndice A)

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}.$$

No caso particular em que  $\alpha = m \in \mathbb{Z}_+^*$  podemos escrever

$${}^{(m)}_n = \frac{\Gamma(m + n)}{\Gamma(m)} = \frac{(m + n - 1)!}{(m - 1)!} = n! \binom{m + n - 1}{m - 1}$$

onde  $\binom{a}{b}$  é o binomial. No caso em que  $0 \leq b \leq a$  com  $a, b \in \mathbb{Z}_+^*$  o binomial é interpretado como o número de combinações. Por outro lado, se escrito na forma

$$\binom{n}{m} = \frac{(-1)^m (-n)_m}{m!}$$

permite apenas, formalmente, escrevermos os binomiais sem a devida interpretação como números de combinações.

Ainda mais, neste caso,  $m$  e  $n$  inteiros positivos, temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow -m} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \begin{cases} (-1)^m \frac{m!}{(n - m)!}, & \text{para } n \geq m \\ 0, & \text{para } n < m. \end{cases}$$

No caso em que  $\alpha \rightarrow -\alpha$  e  $n \rightarrow -n$  podemos escrever

$$\frac{\Gamma(-\alpha - n)}{\Gamma(-\alpha)} = -\alpha(-\alpha + 1)(-\alpha + 2) \cdots (-\alpha - n - 1) = (-1)^n \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha + n)} = \frac{(-1)^n}{(1 + \alpha)_n}.$$

A segunda igualdade desta expressão advém da relação satisfeita pela função gama, i.e., para  $z \neq$  inteiro, vale [9]

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}.$$

Enfim, podemos escrever

$$\frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{(-1)^n}{(1 - \alpha)_{-n}}$$

a qual pode ser interpretada como sendo uma continuação analítica para valores negativos de  $\alpha$  e  $n$ . Outras propriedades envolvendo o símbolo de Pochhammer podem ser encontradas, por exemplo, em [1, 30, 116].

## 1.2 Função hipergeométrica e generalizações

Aqui, introduzimos o conceito de função hipergeométrica, também conhecida pelo nome de função hipergeométrica de Gauss, como sendo uma solução da equação diferencial ordinária que apresenta três pontos singulares regulares, incluindo um ponto no infinito, a chamada equação hipergeométrica. A equação hipergeométrica é dada por:

$$x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}y(x) + [c - (a+b+1)x]\frac{d}{dx}y(x) - aby(x) = 0 \quad (1.1)$$

e a função hipergeométrica, que é solução de (1.1), tem a forma

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n, \quad |x| < 1. \quad (1.2)$$

em que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os parâmetros complexos e  $x \in \mathbb{R}$  é a variável independente da função. Se os parâmetros  $a$  ou  $b$  forem um inteiro negativo,  $-n$ , a série tem somente um número finito de termos e desse modo, torna-se um polinômio de grau  $n$ . Note ainda que fazendo  $a \rightarrow 1$ ,  $c \rightarrow b$  em (1.2), obtemos:

$${}_2F_1(1, b; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que é a série geométrica, de onde segue-se, em analogia, o nome série hipergeométrica.

Devido ao grande sucesso da teoria da série hipergeométrica, vários matemáticos desenvolveram uma teoria correspondente em duas ou mais variáveis, como vamos ver a seguir.

### 1.2.1 Possíveis generalizações

Existem três possíveis maneiras de se generalizar a função hipergeométrica, a saber: a) aumentar o número de variáveis independentes; b) manter apenas uma variável independente porém um número de parâmetros maior que três e c) aumentar tanto o número de parâmetros quanto o número de variáveis independentes. Neste trabalho, a primeira e a terceira maneiras de se generalizar a função hipergeométrica, apesar de serem mencionadas, não serão estudadas, i.e., o objetivo do trabalho reside na segunda maneira, ou seja, manter uma variável independente porém considerar o número de parâmetros maior do que três.

### 1.2.2 Funções de Appell, Kampé de Fériet e Horn

A fim de fornecer uma generalização para as funções hipergeométricas podemos pensar em aumentar o número de variáveis independentes, por exemplo, como proposto por Appell e Kampé de Fériet, no caso de duas variáveis independentes. No clássico trabalho [2] são definidas quatro séries, denotadas por  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  e  $F_4$ . Aqui, apresentamos apenas a função introduzida por Appell, denotada por  $F_1$ , também conhecida pelo nome de função de Picard, através da série dupla

$$F_1(a, b, b'; c; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n}} \frac{x^m y^n}{m! n!} \quad (1.3)$$

válida para  $|x| < 1$  e  $|y| < 1$ . Como já mencionado, Appell introduziu outras três funções, todas com duas variáveis independentes porém com os parâmetros diferentes [2]. Note-se que no caso particular em que  $y = 0$  recuperamos exatamente a clássica função hipergeométrica. Em geral, as quatro funções de Appell são reduzidas a uma função hipergeométrica do tipo (1.2) quando  $y = 0$ .

As funções de Kampé de Ferriet generalizam as funções de Appell no sentido de que tenhamos ainda apenas duas variáveis independentes porém o número de parâmetros é maior do que três [2]. Enfim, ainda com duas variáveis independentes temos as funções de Horn que compreendem tanto as funções de Appell quanto as funções de Kampé de Ferriet como casos particulares [74]. Convém ressaltar que Horn propôs a seguinte definição geral no caso de duas variáveis independentes, isto é, a dupla série de potências,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} x^m y^n$$

é uma série hipergeométrica se os dois quocientes

$$\frac{A_{m+1,n}}{A_{m,n}} = f(m, n) \quad \text{e} \quad \frac{A_{m,n+1}}{A_{m,n}} = g(m, n)$$

são funções racionais de  $m$  e  $n$ . Ainda mais, neste trabalho é discutida a convergência da respectiva série hipergeométrica bem como os sistemas de equações diferenciais parciais por ela satisfeitos [30].

Como uma possível aplicação destas funções, mencionamos o estudo de regras de soma envolvendo as funções de Jacobi [11] onde emerge naturalmente a chamada função de Picard, ou ainda, a função  $F_1$ , conforme definida por Appell. Mencionamos, também, o cálculo

da função de Green associada à equação diferencial parcial, relativa ao problema do pião esfericamente simétrico [95] onde encontramos uma função de Appell do tipo  $F_4$  [10].

### 1.2.3 Funções de MacRobert, Meijer e Fox

Aqui, mencionamos apenas a chamada função  $E$  de MacRobert<sup>1</sup>, inicialmente proposta a partir de uma integral múltipla, cuja origem era fornecer um significado para o símbolo  ${}_pF_q$  no caso em que  $p > q + 1$  [89], isto é, uma generalização no sentido de aumentar apenas o número de parâmetros, mantendo apenas uma variável independente. Analogamente, a função  $G$  de Meijer também é caracterizada pelo aumento apenas do número de parâmetros, a qual será apresentada no Capítulo 3, através da chamada integral de Mellin-Barnes. Além disso, a função  $E$  de MacRobert é um caso particular da função  $G$  de Meijer.

A função hipergeométrica generalizada será, neste trabalho, denotada por

$${}_pF_q \left[ \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} x \right] \equiv {}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!} \quad (1.4)$$

sendo  $p$  parâmetros do tipo  $a$  (encontram-se no numerador) e  $q$  parâmetros do tipo  $b$  (encontram-se no denominador). Se qualquer um dos parâmetros  $a_i$  for um número inteiro negativo, a função se reduz a um polinômio.

Tanto a função de MacRobert quanto a função de Meijer fornecem uma possível generalização da clássica função hipergeométrica no sentido de termos apenas uma variável independente porém um número de parâmetros maior do que três. A relação entre a função  $E$  de MacRobert e a função  $G$  de Meijer pode ser encontrada na referência [30]. Em MacRobert [90] encontramos várias integrais envolvendo uma função hipergeométrica e uma função de Legendre calculadas em termos da função  $E$ .

O objetivo principal deste trabalho reside nesta subseção no sentido de generalizarmos a clássica função hipergeométrica aumentando apenas o número de parâmetros e mantendo somente uma variável independente. Para tal, no Capítulo 4, introduzimos as funções  $H$  de Fox [59], através das integrais de Mellin-Barnes, como sendo a forma mais geral deste tipo de generalização. As funções de Meijer representam um importante caso particular das funções de Fox e serão apresentadas no Capítulo 3. Ainda sobre possíveis generalizações, podemos citar a chamada função  $H$  de Fox generalizada, como apresentada em [129].

<sup>1</sup>Para um estudo envolvendo o básico da função  $E$  de MacRobert, ver [30].

### 1.2.4 Funções de Lauricella

Neste caso, uma possível generalização envolvendo tanto o aumento do número de parâmetros quanto o número de variáveis independentes mencionamos o clássico trabalho de Lauricella [81] bem como os livros de Exton [31] e Srivastava-Karlssohn [131] além do manual de fórmulas de Prudnikov et al. [116] onde podem ser encontradas, além das definições, várias propriedades e sistemas de equações diferenciais satisfeitos por tais funções [72].

Apenas para mencionar uma generalização vamos, aqui, explicitar a definição da função de Lauricella<sup>2</sup>  $F_D^{(n)}$ , através da seguinte expressão

$$F_D^{(n)}(a; b_1, \dots, b_n; c; x_1 \cdots x_n) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} \frac{(a)_{m_1 + \dots + m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1 + \dots + m_n}} \frac{x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}}{m_1! \cdots m_n!}.$$

Note que apenas os parâmetros  $b_i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$  podem aumentar, enquanto que os parâmetros  $a$  e  $c$  estão fixos. No caso em que  $n = 2$  recuperamos exatamente a função de Appell,  $F_1$ , conforme (1.3).

Uma particular aplicação das funções de Lauricella pode ser encontrada em [27], onde a função distribuição associada a uma variável randômica é obtida em termos de uma função de Lauricella.

Concluimos este capítulo enfatizando que o objetivo principal do trabalho é o estudo das funções de Meijer e Fox, sendo esta última a maneira mais geral de se generalizar a clássica função hipergeométrica no sentido de aumentar o número de parâmetros mantendo apenas uma variável independente.

Ressaltamos que o estudo das funções de Meijer e Fox requerem o uso das chamadas integrais de Mellin-Barnes, objetivo de estudo do Capítulo 2, conforme vamos apresentar a seguir.

---

<sup>2</sup>As outras funções discutidas no trabalho de Lauricella são denotadas por  $F_A^{(n)}$ ,  $F_B^{(n)}$  e  $F_C^{(n)}$ , conforme a disposição dos parâmetros, em numerador e/ou denominador [81].

---

# As integrais de Mellin-Barnes

---

As integrais do tipo Mellin-Barnes são integrais de contorno em que o integrando envolve um quociente de produtos de funções gama e o contorno está relacionado com os polos dessas funções gama. Utilizando essas integrais podemos encontrar uma representação integral para a função hipergeométrica e também sua generalização. Para discutir a convergência dessas integrais vamos utilizar a expansão assintótica do produto das funções gama.

## 2.1 Princípio da dualidade

As integrais de Mellin-Barnes foram introduzidas por Salvatore Pincherle (1853-1930), em 1888 [94, 118, 119]. A partir da teoria desenvolvida, em 1910, por Mellin, elas foram usadas por Barnes para integração da equação diferencial hipergeométrica generalizada.

O artigo de 1888 de Pincherle<sup>1</sup> é baseado no que ele chamou de “princípio da dualidade”, que relaciona uma equação diferencial com coeficientes racionais a uma equação de diferenças finitas (EDF) linear com coeficientes racionais. Usando este princípio, no caso em que os coeficientes são polinômios, Pincherle mostrou que duas funções hipergeométricas generalizadas propostas e investigadas, respectivamente, por Pochhammer, e por Goursat, podem ser obtidas uma da outra.

As funções hipergeométricas generalizadas introduzidas por Pochhammer e Goursat, consideradas por Pincherle, são soluções da equação diferencial de ordem  $n$  com coeficientes polinomiais. Pincherle considerou que a equação diferencial ordinária e a equação de diferenças finitas linear estão relacionadas pelo princípio da dualidade, ambas com coeficientes

---

<sup>1</sup>Aqui apresentamos um breve resumo do princípio da dualidade [118, 119].

polinomiais. Em sua análise Pincherle considerou a equação diferencial de ordem  $m$  com coeficientes racionais,

$$\sum_{h=0}^m (a_{h0} + a_{h1}e^{-t} + a_{h2}e^{-2t} + \cdots + a_{hp}e^{-pt})\psi^{(h)}(t) = 0, \quad (2.1)$$

em que  $\psi^{(h)}(t)$  corresponde a  $h$ -ésima derivada da função  $\psi(t)$ , na qual aplicou a transformada de Laplace. Admite-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-xt}\psi(t) = 0$$

e denota-se,

$$f(x) = \int_l e^{-xt}\psi(t)dt \quad (2.2)$$

em que  $l$  é uma linha que vai de 0 até  $+\infty$  contornando alguns pontos singulares de (2.1). Integrando (2.2) por partes, obtém-se a relação,

$$x^h f(x) = \int_l e^{-xt}\psi^{(h)}(t)dt,$$

de onde pode-se escrever

$$(x+k)^h f(x+k) = \int_l e^{-xt}e^{-kt}\psi(t)dt.$$

Com essa relação, temos que (2.1) se transforma em uma equação de diferenças finitas linear, de ordem  $p$  e com coeficientes racionais de grau  $m$ ,

$$\sum_{k=0}^p [a_{0k} + a_{1k}(x+k) + a_{2k}(x+k)^2 + \cdots + a_{mk}(x+k)^m]f(x+k) = 0. \quad (2.3)$$

Esta é a equação de diferenças finitas linear relacionada com (2.1), onde  $f(x)$  é a transformada de Laplace de  $\psi(t)$ ,  $\psi(t) \leftrightarrow f(x)$ .

Por outro lado, aplicando a transformada de Laplace inversa,

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{xt}f(x)dx \quad (2.4)$$

onde o contorno  $L$  satisfaz a condição,

$$\int_L e^{xt}f(x)dx = \int_L e^{(x+1)t}f(x)dx = \cdots = \int_L e^{(x+p)t}f(x)dx,$$

obtém-se,

$$\psi^{(h)}(t)e^{-kt} = \int_L e^{xt}(x+k)^h f(x+k)dx. \quad (2.5)$$

Com isso, (2.3) se transforma em (2.1) e vice-versa.

Passemos para o caso particular da função hipergeométrica, primeiramente no sentido de Pochhammer. Para a função hipergeométrica generalizada introduzida por Pochhammer, Pincherle partiu da equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem,

$$(a_{00} + a_{01}e^{-t} + a_{02}e^{-2t} + \cdots + a_{0p}e^{-pt})\psi(t) + (a_{10} + a_{11}e^{-t} + a_{12}e^{-2t} + \cdots + a_{1p}e^{-pt})\psi^{(1)}(t) = 0 \quad (2.6)$$

a fim de relacioná-la com a EDF

$$(a_{00} + a_{10}x)f(x) + [a_{01} + a_{11}(x + 1)]f(x + 1) + [a_{02} + a_{12}(x + 2)]f(x + 2) + \cdots + [a_{0p} + a_{1p}(x + p)]f(x + p) = 0. \quad (2.7)$$

Neste caso Pincherle mostrou que a solução  $f(x)$  de (2.7) é obtida da transformada de Laplace, dependendo de  $p$  parâmetros, cujos logaritmos são pontos singulares de (2.6).

Por outro lado, para a função hipergeométrica generalizada, conforme introduzida por Gousart, parte-se de uma EDF de primeira ordem,

$$[a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + \cdots + a_{m0}x^m]f(x) + [a_{01} + a_{11}(x + 1) + a_{21}(x + 1)^2 + \cdots + a_{m1}(x + 1)^m]f(x + 1) = 0, \quad (2.8)$$

a fim de obter a correspondente EDO linear de ordem  $m$ , isto é,

$$(a_{00} + a_{01}e^{-t})\psi(t) + (a_{10} + a_{11}e^{-t})\psi^{(1)}(t) + (a_{20} + a_{21}e^{-t})\psi^{(2)}(t) + \cdots + (a_{m0} + a_{m1}e^{-t})\psi^{(m)}(t) = 0. \quad (2.9)$$

Utilizando o resultado de Mellin<sup>2</sup>, Pincherle escreveu a solução de (2.8) como,

$$f(x) = c^x \frac{\prod_{v=1}^m \Gamma(x - \rho_v)}{\prod_{v=1}^m \Gamma(x - \sigma_v)} \quad (2.10)$$

onde  $c$  é uma constante, sendo os  $\rho$ 's e  $\sigma$ 's, respectivamente, as raízes das equações algébricas:

$$a_{00} + a_{10}x + \cdots + a_{m0}x^m = a_{m0} \prod_{v=1}^m (x - \rho_v) = 0 \quad (2.11)$$

<sup>2</sup>Hj. Mellin, *Zur Theorie der Gammafunction*, Acta Mathematica, **8**, 37-80, (1886).

e

$$a_{01} + a_{11}(x+1) + \cdots + a_{m1}(x+1)^m = a_{m1} \prod_{v=1}^m (x - \sigma_v) = 0. \quad (2.12)$$

Se  $a_{m0}$  e  $a_{m1}$  são ambos diferentes de zero, podemos considerar  $c = -\frac{a_{m0}}{a_{m1}}$ .

Pincherle mostrou que, fazendo  $z = ce^t$ , a EDO de ordem  $m$  é simplesmente a equação de Goursat. Da relação (2.4), temos

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a+i\infty}^{a-i\infty} c^x \frac{\prod_{v=1}^m \Gamma(x - \rho_v)}{\prod_{v=1}^m \Gamma(x - \sigma_v)} e^{xt} dx. \quad (2.13)$$

Introduzindo a mudança de variável,  $z = ce^t$ , obtemos:

$$u(z) = \psi[t(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\prod_{v=1}^m \Gamma(x - \rho_v)}{\prod_{v=1}^m \Gamma(x - \sigma_v)} z^x dx, \quad (2.14)$$

que, por sua vez, tomando  $x = s$ , fornece

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\prod_{v=1}^m \Gamma(s - \rho_v)}{\prod_{v=1}^m \Gamma(s - \sigma_v)} z^s ds, \quad (2.15)$$

em que  $a > \operatorname{Re}(\rho_i)$ , para  $i = 1, \dots, m$ . Este foi o primeiro exemplo na literatura da integral de Mellin-Barnes. A convergência da integral foi provada por Pincherle usando a fórmula assintótica para a função  $\Gamma(a \pm i\eta)$  quando  $\eta \rightarrow \infty$ . Assim, como uma solução do caso particular da equação de Goursat, Pincherle obteve uma representação integral que mais tarde foi adaptada por Mellin e Barnes para estudos associados à função hipergeométrica generalizada.

Antes de abordarmos especificamente o quociente de duas funções gama de modo que possamos enfrentar o problema da convergência, vamos discutir uma expansão assintótica do logaritmo da função gama.

## 2.2 Expansão assintótica do logaritmo da função $\Gamma(z)$

A representação do logaritmo de  $\Gamma(z)$  é dada por [134]

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \Omega(z), \quad (2.16)$$

onde  $\Omega(z)$  é uma função analítica de  $z$  possuindo polos simples em  $z = -k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  definida aqui por,

$$\Omega(z) = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (2.17)$$

onde o  $\operatorname{arctg}$  toma o seu valor principal. Considere a expansão em série de MacLaurin de  $\operatorname{arctg}(t/z)$ ,

$$\operatorname{arctg}(t/z) = \frac{t}{z} - \frac{1}{3} \frac{t^3}{z^3} + \frac{1}{5} \frac{t^5}{z^5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{2n-1} \frac{1}{z^{2n-1}} + \dots$$

Vamos substituir este resultado em (2.17) e usar o resultado

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}}{e^{2\pi t} - 1} dt = \frac{B_n}{4n},$$

onde  $B_n$  denota os números de Bernoulli, a fim de obtermos a relação para  $\Omega(z)$

$$\Omega(z) \sim \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)z^{2r-1}}.$$

Fazendo  $B_{2r} = (-1)^{r-1} B_r$ , temos

$$\Omega(z) \sim \sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{2r}}{2r(2r-1)z^{2r-1}}, \quad (2.18)$$

que corresponde a expansão em série de  $\Omega(z)$ .

Combinando (2.16) e (2.18), encontramos a *série de Stirling*

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{2r}}{2r(2r-1)z^{2r-1}}, \quad (2.19)$$

que corresponde a expansão assintótica de  $\log \Gamma(z)$ . Tomando a exponencial da *série de Stirling*, obtemos

$$\Gamma(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-z} z^{z-\frac{1}{2}} \{1 + O(z^{-1})\} \quad (2.20)$$

para  $|z| \rightarrow \infty$  com  $|\arg(z)| < \pi$ . Esta equação representa uma fórmula assintótica para a função gama.

Uma outra representação para a função  $\Omega(z)$  (ver [134] e [117]) é a expansão fatorial inversa

$$\Omega(z) = \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{(z+1)(z+2)} + \frac{c_3}{(z+1)(z+2)(z+3)} + \dots \quad (2.21)$$

válida para  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , onde os coeficientes  $c_n$  podem ser calculados por

$$c_n = \frac{1}{n} \int_0^1 (x)_n \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \quad (n \geq 1).$$

A convergência desta expansão para  $\operatorname{Re}(z) > 0$  pode ser estabelecida a partir do fato que  $c_n \leq \Gamma(n) \int_0^1 x(x - \frac{1}{2}) dx = \Gamma(n)/12$ , de modo que o comportamento do  $n$ -ésimo termo da soma é controlado pela razão  $\Gamma(n)/\Gamma(n+z+1) n^{-z-1}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

## 2.3 Expansão de um quociente de funções gama

Nesta seção apresentamos dois lemas sobre a expansão de quocientes de funções gama como expansão fatorial inversa. Este tipo de expansão será utilizado no desenvolvimento da expansão assintótica das integrais de Mellin-Barnes.

Considere o quociente de funções gama dado por

$$P(s) = \frac{\prod_{r=1}^p \Gamma(\alpha_r s + a_r)}{\prod_{r=1}^q \Gamma(\beta_r s + b_r)} \quad (2.22)$$

onde  $p$  e  $q$  são inteiros não negativos. Os parâmetros  $\alpha_r$  ( $1 \leq r \leq p$ ) e  $\beta_r$  ( $1 \leq r \leq q$ ) são, por hipótese, positivos enquanto  $a_r$  ( $1 \leq r \leq p$ ) e  $b_r$  ( $1 \leq r \leq q$ ) são números complexos arbitrários. A função  $P(s)$  possui uma sequência de polos dados por  $s = -(a_r + k)/\alpha_r$  ( $k = 0, 1, \dots; 1 \leq r \leq p$ ) que resultam dos polos das funções gama  $\Gamma(\alpha_r s + a_r)$ .

Definimos agora os seguintes parâmetros:

$$h = \prod_{r=1}^p \alpha_r^{\alpha_r} \prod_{r=1}^q \beta_r^{-\beta_r},$$

$$v = \sum_{r=1}^p a_r - \sum_{r=1}^q b_r + \frac{1}{2}(q - p + 1), \quad v' = 1 - v$$

$$k = \sum_{r=1}^q \beta_r - \sum_{r=1}^p \alpha_r. \quad (2.23)$$

Temos, por hipótese, que  $h > 0$ , porém  $v$  é, em geral, complexo. O parâmetro  $k$  fornece o “desequilíbrio” entre a soma dos coeficientes  $\beta_r$  das funções gama do denominador e a soma dos coeficientes  $\alpha_r$  das funções gama do numerador. Dizemos que  $k > 0$  ( $k < 0$ ) corresponde a um “desequilíbrio” positivo (negativo) e quando  $k = 0$ , a função  $P(s)$  é dita ser “equilibrada”.

### 2.3.1 Expansão fatorial inversa

Usando as expansões em (2.19) e (2.18) encontramos que, para um inteiro positivo  $M$  com  $|s| \rightarrow 0$  uniformemente no setor  $|\arg(z)| \leq \pi - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \log P(s) &= \sum_{r=1}^p \left( \alpha_r s + a_r - \frac{1}{2} \right) \log(\alpha_r s) - \sum_{r=1}^q \left( \beta_r + b_r - \frac{1}{2} \right) \log(\beta_r s) + \\ &\quad + ks + \frac{1}{2}(p - q) \log 2\pi + \sum_{j=1}^{M-1} C_j s^{-1} + O(s^{-M}) \\ &= -ks \log s + s(k + \log h) + (v - \frac{1}{2}) \log s + \log \tilde{A}_0 + \sum_{j=1}^{M-1} C_j s^{-j} + O(s^{-M}), \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $C_j$  são independentes de  $s$  e

$$\tilde{A}_0 = (2\pi)^{\frac{1}{2}(p-q)} \prod_{r=1}^p \alpha_r^{a_r - \frac{1}{2}} \prod_{r=1}^q \beta_r^{\frac{1}{2} - b_r}.$$

Então a expansão assintótica para  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$  dada por

$$P(s) = \tilde{A}_0 h^s e^{ks} s^{v-ks-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \sum_{j=i}^{M-1} D_j s^{-j} + O(s^{-M}) \right\}, \quad (2.24)$$

onde os coeficientes  $D_j$  dependem de  $C_j$ . Quando  $P(s)$  é “equilibrada” ( $k = 0$ ), temos que

$$P(s) = h_s s^{v-\frac{1}{2}} \tilde{A}_0 \{1 + O(s^{-1})\} \quad (|s| \rightarrow \infty; |\arg(s)| \leq \pi - \epsilon). \quad (2.25)$$

Quando  $k > 0$ , obtemos uma expansão de  $P(s)$  como uma série da expansão fatorial inversa. Se  $a > 0$  e  $b$  denotam constantes, tal que  $|\arg(as + b)| < \pi$ , então de (2.24) e do fato que  $\Gamma(as + b) \sim (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-as} (as)^{as+b-\frac{1}{2}}$  para  $|s|$  grande, temos

$$P(s)\Gamma(as + b) \sim A_0 (hk^k)^s (ks)^{-ks+v-\frac{1}{2}} e^{(k-a)s} (as)^{as+b-\frac{1}{2}} \quad (2.26)$$

para  $|s| \rightarrow \infty; |\arg(s)| \leq \pi - \epsilon, \epsilon > 0$ , onde

$$A_0 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}-v} \tilde{A}_0. \quad (2.27)$$

Fazendo  $a = k$  e  $b = 1 - v$  removemos os três últimos termos da expansão assintótica acima. Assim, escrevemos  $P(s)$  da seguinte forma

$$P(s) = \frac{A_0 (hk^k)^s}{\Gamma(ks + v')} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{M-1} E_j s^{-j} + O(s^{-M}) \right\} \quad (2.28)$$

quando  $|s| \rightarrow \infty; |\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ , onde os coeficientes  $E_j$  dependem de  $D_j, k$  e  $v$ . Se agora introduzirmos os coeficientes  $A_j$  ( $j \leq 1$ ) através da expansão para  $|s|$  grande, temos

$$A_0 \sum_{j=1}^{M-1} E_j s^{-j} = \frac{A_1}{ks + v'} + \frac{A_2}{(ks + v')_2} + \cdots + \frac{A_{M-1}}{(ks + v')_M} + O(s^{-M}). \quad (2.29)$$

Assim, obtemos a expansão de  $P(s)$  com  $k > 0$  como uma série fatorial inversa<sup>3</sup> da forma:

$$P(s) = (hk^k)^s \left\{ \sum_{j=1}^{M-1} \frac{A_j}{\Gamma(ks + v' + j)} + \frac{O(1)}{\Gamma(ks + v' + M)} \right\} \quad (2.30)$$

válida quando  $|s| \rightarrow \infty; |\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ .

Para tratar do caso quando o quociente de funções gama envolve um “desequilíbrio” negativo entre os coeficientes das funções gama do denominador e os coeficientes das funções gama do numerador, consideremos o quociente dado por

---

<sup>3</sup>Uma série fatorial inversa é uma expansão do tipo  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}$ , onde os coeficientes  $a_n$  são tais que a série converge, para um valor de  $\text{Re}(z)$  suficientemente grande.

$$Q(s) = \frac{\prod_{r=1}^q \Gamma(1 - b_r + \beta_r s)}{\prod_{r=1}^p \Gamma(1 - a_r + \alpha_r s)}. \quad (2.31)$$

Os parâmetros  $h$ ,  $v$  e  $k$  são os mesmos definidos em (2.23). Supondo que o desequilíbrio de  $Q$  é negativo, ou seja, o somatório dos coeficientes que estão no denominador (neste caso os coeficientes  $\alpha_r$ ) menos o somatório dos coeficientes no numerador (neste caso são os coeficientes  $\beta_r$ ), isso faz corresponder  $k$  positivo,  $k > 0$ . Uma aplicação similar de (2.19) mostra que, para  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ ,

$$\frac{Q(s)}{\Gamma(as + b)} \sim \frac{A_0}{(2\pi)^{p-q+1}} (hk^k)^{-s} e^{(a-k)s} (ks)^{ks+v-\frac{1}{2}} (as)^{-as-b+\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

sendo  $|\arg(as + b)| < \pi$ , onde  $A_0$  é definido por (2.29). Se fizermos  $a = k$  e  $b = v$ , removemos os três últimos termos e obtemos a seguinte expressão para  $Q(s)$

$$Q(s) = \frac{A_0}{(2\pi)^{p-q+1}} (hk^k)^{-s} \Gamma(ks + v) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{M-1} E'_j s^{-j} + O(s^{-M}) \right\} \quad (2.33)$$

quando  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ . Então, de uma maneira similar para  $P(s)$ , obtemos a expansão fatorial inversa

$$\begin{aligned} Q(s) &= (hk^k)^{-s} \Gamma(ks + v) \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{A'_j}{(-ks - v + 1)_j} + O(s^{-M}) \right\} \\ &= (hk^k)^{-s} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} (-1)^j A'_j \Gamma(ks + v - j) + O(1) \Gamma(ks + v - M) \right\} \end{aligned} \quad (2.34)$$

válida quando  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ . Os coeficientes  $A'_j$  independem de  $s$  e, em particular,  $A_0 = A_0 / (2\pi)^{p-q+1}$ .

Para verificar como os coeficientes  $A'_j$  estão relacionados aos  $A_j$  que aparecem em (2.30) usamos a chamada fórmula de reflexão dada por

$$\Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \quad (2.35)$$

para encontrar a seguinte relação

$$Q(-s) = P(s) \Theta(s), \quad (2.36)$$

onde

$$\Theta(s) = \pi^{q-p} \frac{\prod_{r=1}^p \operatorname{sen}[\pi(\alpha_r s + a_r)]}{\prod_{r=1}^q \operatorname{sen}[\pi(\beta_r s + b_r)]}. \quad (2.37)$$

Fazendo  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $|\arg(s)| = \frac{1}{2}\pi$  e comparando os coeficientes da expansão de  $Q(-s)$  com os do lado direito da equação acima, temos:

$$\Theta(s) \sim i(2\pi)^{q-p} e^{-\pi k|s|} e^{-\pi i v} \quad (|s| \rightarrow \infty; \arg(s) = \frac{1}{2}\pi) \quad (2.38)$$

e

$$(-1)^j A'_j \Gamma(-ks + v - j) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(v - ks)} \frac{A'_j}{\Gamma(ks + v' + j)},$$

onde  $\pi \operatorname{cosec}[\pi(v - ks)] \sim 2\pi i e^{-\pi k|s|} e^{-\pi i v}$  quando  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $\arg(s) = \frac{1}{2}\pi$ , encontramos então de (2.30) e (2.35) a seguinte relação entre os coeficientes

$$A'_j = \frac{A_j}{(2\pi)^{p-q+1}} \quad (0 \leq j \leq M-1).$$

Estes dois resultados encontrados, que nos fornecem expansões assintóticas para  $P(s)$  e  $Q(s)$ , podem ser escritos como os dois lemas a seguir:

**Lema 2.1.** *Seja  $M$  um inteiro positivo e supondo que  $k > 0$ . Então existem números  $A_j$  ( $0 \leq j \leq M-1$ ) independentes de  $s$  e  $M$  tal que  $P(s)$  definida por*

$$P(s) = \frac{\prod_{r=1}^p \Gamma(\alpha_r s + a_r)}{\prod_{r=1}^q \Gamma(\beta_r + b_r)}$$

*possui uma expansão fatorial inversa dada por:*

$$P(s) = (hk^k)^s \left\{ \sum_{j=1}^{M-1} \frac{A_j}{\Gamma(ks + v' + j)} + \frac{\sigma_M(s)}{\Gamma(ks + v' + M)} \right\}$$

*onde os parâmetros  $h, k, v'$  estão definidos em (2.23). Em particular, o coeficiente  $A_0$  tem o valor*

$$A_0 = (2\pi)^{\frac{1}{2}(p-q+1)} k^{\frac{1}{2}-v} \prod_{r=1}^p \alpha_r^{a_r - \frac{1}{2}} \prod_{r=1}^q \beta^{\frac{1}{2}-b_r}.$$

A função  $\sigma_M(s)$  é analítica em  $s$  exceto nos pontos  $s = -(a_r + k)/\alpha_r$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , que são os polos de  $P(s)$ , e é tal que

$$\sigma_M(s) = O(1)$$

para  $|s| \rightarrow \infty$  uniformemente;  $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . No caso “equilibrado”,  $k = 0$ , o comportamento de  $P(s)$  é descrito por (2.25).

**Lema 2.2.** *Seja  $M$  um inteiro positivo e suponha que  $k > 0$ . Então, com os parâmetros  $h$ ,  $v$  e  $k$  definidos em (2.23), a função  $Q(s)$  definida por*

$$Q(s) = \frac{\prod_{r=1}^q \Gamma(1 - b_r + \beta_r s)}{\prod_{r=1}^p \Gamma(1 - a_r + \alpha_r s)}$$

possui a expansão fatorial inversa dada por

$$Q(s) = \frac{(hk^k)^{-s}}{(2\pi)^{p-q+1}} \left\{ \sum_{j=0}^{M-1} (-1)^j A_j \Gamma(ks + v - j) + \rho_M(s) \Gamma(ks + v - M) \right\},$$

onde os coeficientes  $A_j$  são aqueles que aparecem no Lema 2.1. A função  $\rho_M(s)$  é analítica em  $s$  exceto nos pontos  $s = (b_r - 1 - k)/\beta_r$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  ( $1 \leq r \leq q$ ), que são os polos de  $Q(s)$ , e temos que

$$\rho_M(s) = O(1)$$

para  $|s| \rightarrow \infty$  uniformemente;  $|\arg(s)| \leq \pi - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ .

Os dois lemas acima estão mais na forma de teoremas de existência, pois os lemas não dizem nada sobre os valores dos coeficientes  $A_j$ , exceto  $A_0$ . O cálculo desses coeficientes é em geral bastante difícil. Riney [121, 122] desenvolveu dois algoritmos para o cálculo dos coeficientes  $A_j$  quando  $\alpha_r = \beta_r = 1$ . Outro método é explorar a álgebra computacional de softwares como o Mathematica ou Maple.

## 2.4 Convergência das integrais de Mellin-Barnes

Nesta seção desenvolvemos regras convenientes para determinar a convergência de uma classe de funções que aparecem com bastante frequência nas integrais de Mellin-Barnes. Estas integrais tipicamente têm a forma

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(s) z^{-s} ds \quad (2.39)$$

onde o contorno  $C$  é geralmente ou um caminho circular no plano complexo  $s$ , ou uma linha vertical indentada para envolver certos polos do integrando, e tendendo para o infinito em certas direções fixas. Integrais deste tipo são conhecidas como funções de Fox e serão estudadas com maior detalhe no Capítulo 4. Quando  $\alpha_r = \beta_r = 1$  conforme (2.40), a seguir, a integral se reduz à função  $G$  de Meijer que será estudada no Capítulo 3. Para melhor entendimento sobre o contorno  $C$  ver Fig. 2.1 e Fig. 2.2.

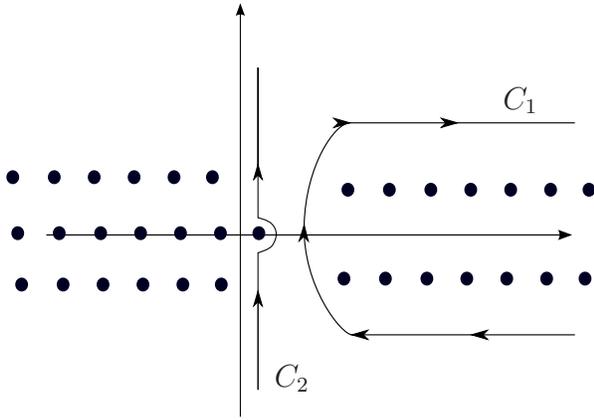


Fig. 2.1: Contorno  $C_1$  e  $C_2$  envolvendo os polos das funções gama.

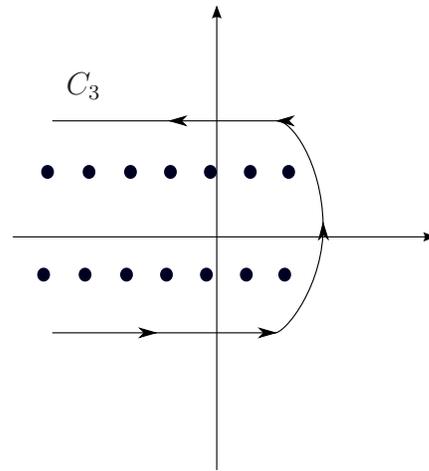


Fig. 2.2: Contorno  $C_3$  envolvendo os polos das funções gama.

Consideremos o integrando  $g(s)$  em (2.39) na seguinte forma [105];

$$g(s) = \frac{\prod_{r=1}^m \Gamma(b_r + \beta_r s) \prod_{r=1}^n \Gamma(1 - \alpha_r s - a_r)}{\prod_{r=m+1}^q \Gamma(1 - \beta_r s - b_r) \prod_{r=n+1}^p \Gamma(a_r + \alpha_r s)} \quad (2.40)$$

com<sup>4</sup>  $1 \leq m \leq q$ ,  $0 \leq n \leq p$ . Os parâmetros  $\alpha_r$ ,  $\beta_r$  são números reais positivos e os parâmetros  $a_r$  e  $b_r$  são tais que o caminho  $C$  pode ser escolhido para separar os polos de  $\Gamma(b_r + \beta_r s)$  ( $1 \leq r \leq m$ ) daqueles que provêm de  $\Gamma(1 - \alpha_r s - a_r)$  ( $1 \leq r \leq n$ ). Para

<sup>4</sup>O fato de  $m$  se iniciar em 1 é devido a querermos englobar na definição de Mellin-Barnes, a função  $G$  de Meijer que será estudada no Capítulo 3.

determinar a convergência da integral de Mellin-Barnes, vamos examinar o comportamento do integrando  $g(s)z^{-s}$  para  $|s| \rightarrow \infty$  ao longo dos contornos  $C_1$  e  $C_3$ , conforme Fig. 2.1 e Fig. 2.2.

Usamos novamente a expansão assintótica para o logaritmo da função gama, dada por

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(z^{-1}) \quad (2.41)$$

para  $|z| \rightarrow \infty$  em  $|\arg(z)| < \pi$ . Fazendo  $z = \alpha + \beta s$ , com  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $|\arg(\alpha \pm \beta s)| < \pi$ , em que  $\alpha$  e  $s$  são complexos e  $\beta > 0$  temos:

$$\log \Gamma(\alpha + \beta s) = \left(\alpha + \beta s - \frac{1}{2}\right) \log(\alpha + \beta s) - (\alpha + \beta s) + \frac{1}{2} \log 2\pi + O((\alpha + \beta s)^{-1})$$

$$\log \Gamma(\alpha + \beta s) = \left(\alpha + \beta s - \frac{1}{2}\right) \log \beta s \left(\frac{\alpha}{\beta s} + 1\right) - \beta s + \frac{1}{2} \log 2\pi + \{-\alpha + O((\alpha + \beta s)^{-1})\}.$$

Assim, podemos escrever

$$\log \Gamma(\alpha + \beta s) = \left(\alpha + \beta s - \frac{1}{2}\right) \log \beta s - \beta s + O(1).$$

Utilizando agora a fórmula de reflexão dada em (2.35), obtemos o seguinte resultado

$$\log \Gamma(\alpha - \beta s) = -\log[\operatorname{sen}\pi(\alpha - \beta s)] + \left(\alpha - \beta s - \frac{1}{2}\right) \log \beta s + \beta s + O(1)$$

para  $|s| \rightarrow \infty$ ;  $|\arg(\alpha \pm \beta s)| < \pi$ . Com  $s = Re^{i\theta}$ , a parte real de  $\log \Gamma(\alpha \pm \beta s)$ , quando  $R \rightarrow \infty$ , é, portanto, dada por:

$$\begin{aligned} \log |\Gamma(\alpha + \beta s)| &\sim \beta R \cos\theta \log \beta R - \beta R(\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \\ &+ \left(\operatorname{Re}(\alpha) - \frac{1}{2}\right) \log \beta R, \end{aligned} \quad (2.42)$$

bem como,

$$\begin{aligned} \log |\Gamma(\alpha - \beta s)| &\sim -\beta R \cos\theta \log \beta R + \beta R(\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \\ &+ \left(\operatorname{Re}(\alpha) - \frac{1}{2}\right) \log \beta R - \log |\operatorname{sen}\pi(\alpha - \beta s)|. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Note que para  $s = Re^{i\theta}$ , o termo  $\log |\operatorname{sen}\pi(\alpha - \beta s)| \sim \pi \beta R \operatorname{sen}\theta$  é não limitado.

Ao longo da curva  $C_3$ , temos  $\theta \rightarrow \pi$  para  $R$  grande e as expansões ficam simplificadas, i.e., valem as seguintes relações

$$\log |\Gamma(\alpha \pm \beta s)| = \mp \beta R \log R + O(R).$$

Assim,  $g(s)$  tem o seguinte comportamento quando  $R \rightarrow \infty$  dado por

$$\log |g(s)| = \left\{ \sum_{r=1}^p \alpha_r - \sum_{r=1}^q \beta_r \right\} R \log R + O(R),$$

tal que para todo  $z \neq 0$  finito, o integrando decai exponencialmente uma vez que

$$k = \sum_{r=1}^q \beta_r - \sum_{r=1}^p \alpha_r > 0.$$

Segue, portanto, que a integral (2.39) com  $C = C_3$  converge absolutamente quando esta condição é satisfeita.

De maneira análoga, se fizermos esta mesma análise agora sobre a curva  $C_1$ , obtemos que a integral (2.39) converge absolutamente para  $z \neq 0$  e  $k < 0$ .

Para a situação onde  $k = 0$ , devemos encontrar uma outra estimativa. Para este caso, encontramos que  $\log |g(s)|$  possui o seguinte comportamento para  $R$  grande ao longo da curva  $C = C_3$ ,

$$\left\{ \sum_{r=1}^p \alpha_r \log \alpha_r - \sum_{r=1}^q \beta_r \log \beta_r \right\} R + O(\log R) = R \log h + O(\log R)$$

tal que, quando composta com o comportamento de  $z^{-s}$  para valores grandes de  $R$  encontramos o comportamento assintótico para  $g(s)z^{-s}$  dado por

$$\log |g(s)z^{-s}| = R \log(h|z|) + O(\log R), \quad (R \rightarrow \infty).$$

Deste modo, para que o integrando tenha um decaimento exponencial, precisamos ter necessariamente  $z$  restrito ao domínio  $|z| < h^{-1}$ . No caso em que  $h = 1$ , a convergência será possível somente sobre o disco unitário,  $|z| < 1$ .

Fazendo a mesma análise sobre a curva  $C_1$  o integrando de (2.39) tem um decaimento exponencial para  $|z| > h$  e, portanto, a integral (2.39) converge absolutamente.

Uma última possibilidade para o caso em que  $k = 0$  é se tivermos  $\log(h|z|)$  igual a zero, ou seja,  $|z| = h^{-1}$ . Neste caso, são os termos da ordem  $\log R$  que controlam a convergência da integral. Para estas circunstâncias,  $\log |g(s)z^{-s}|$  tem o seguinte comportamento, para grandes valores de  $R$ , ao longo de  $C_3$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{r=1}^m \left( b_r - \frac{1}{2} \right) + \sum_{r=1}^n \left( \frac{1}{2} - a_r \right) - \sum_{r=m+1}^q \left( \frac{1}{2} - b_r \right) - \sum_{r=n+1}^p \left( a_r - \frac{1}{2} \right) \right\} \log R \\ = \left( \frac{1}{2} - \operatorname{Re}(v) \right) \log R, \end{aligned}$$

onde

$$v = \left\{ \sum_{r=1}^p a_r - \sum_{r=1}^q b_r \right\} + \frac{1}{2} (q - p + 1).$$

Se definirmos,

$$\mu = \left\{ \sum_{r=1}^q b_r - \sum_{r=1}^p a_r \right\} + \frac{1}{2} (p - q)$$

temos que  $\mu = \frac{1}{2} - v$  e a convergência depende, então, do decaimento algébrico (polinomial) do integrando, que é controlado pelo comportamento de  $R^\mu$ . Neste caso, se  $\operatorname{Re}(\mu) < -1$  a integral (2.39) converge. Se fizermos esta mesma análise agora sobre o contorno  $C = C_1$  vamos obter o mesmo resultado, ou seja, a integral converge para  $\operatorname{Re}(\mu) < -1$  sobre o contorno  $C_1$ .

Vamos analisar agora o caso quando  $C = C_2$ , temos  $\theta = \pm \frac{1}{2}$  quando  $s \rightarrow \infty$ . De (2.43), obtemos o comportamento dominante de  $g(s)$  dado por

$$\log |g(s)| = -\frac{1}{2} \pi R \left\{ \sum_{r=1}^n \alpha_r + \sum_{r=1}^m \beta_r - \sum_{r=n+1}^p \alpha_r - \sum_{r=m+1}^q \beta_r + O(\log R) \right\}.$$

Compondo com o comportamento de  $z^{-s}$  para valores grandes de  $R$ , encontramos o seguinte comportamento ao longo da curva  $C_2$

$$\log |g(s)z^s| = -\frac{1}{2} R \left\{ \sum_{r=1}^n \alpha_r + \sum_{r=1}^m \beta_r - \sum_{r=n+1}^p \alpha_r - \sum_{r=m+1}^q \beta_r \right\} \mp R \arg(z) + O(\log R),$$

em que escolhemos o sinal negativo quando  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ , e o sinal positivo é escolhido quando  $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ . Para a convergência absoluta da integral sobre a curva  $C_2$  devemos ter

$$|\arg z| < \frac{1}{2} \pi \left\{ \sum_{r=1}^n \alpha_r + \sum_{r=1}^m \beta_r - \sum_{r=n+1}^p \alpha_r - \sum_{r=m+1}^q \beta_r \right\}. \quad (2.44)$$

No caso em que o caminho  $C_2$  tem um deslocamento  $\gamma > 0$  para direita, temos que  $s = \gamma + R e^{i\frac{\pi}{2}}$ , com  $R \rightarrow \infty$ . Neste caso, apresentamos a seguinte expansão assintótica com

o auxílio de (2.43) e (2.43):

$$\begin{aligned}
\log \Gamma(b_r + \beta_r s) &= \left[ b_r + \beta_r (\gamma + Re^{i\frac{\pi}{2}}) - \frac{1}{2} \right] \log \beta_r (\gamma + Re^{i\frac{\pi}{2}}) - \beta_r (\gamma + Re^{i\frac{\pi}{2}}) + O(1) \\
&= \left[ b_r + \beta_r (\gamma + iR) - \frac{1}{2} \right] \left( \log \beta_r R + i\frac{\pi}{2} \right) - \beta_r \gamma - i\beta_r R + O(1) \\
&= \left[ b_r + \beta_r \gamma - \frac{1}{2} \right] \log \beta_r R - \frac{\pi}{2} \beta_r R - \beta_r \gamma \\
&\quad + i \left[ \frac{\pi}{2} \left( b_r + \beta_r \gamma - \frac{1}{2} \right) + \beta_r R (\log \beta_r R - 1) \right] + O(1).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\log |\Gamma(b_r + \beta_r s)| \sim \left[ \operatorname{Re}(b_r) + \beta_r \gamma - \frac{1}{2} \right] \log \beta_r R - \frac{\pi}{2} \beta_r R - \beta_r \gamma,$$

para  $1 \leq r \leq m$  e  $R \rightarrow \infty$ .

Procedendo de maneira análoga, encontramos as demais expansões:

$$\log |\Gamma(1 - a_r - \alpha_r s)| \sim \left[ -\operatorname{Re}(a_r) + \frac{1}{2} - \alpha_r \gamma \right] \log \alpha_r R - \frac{\pi}{2} \alpha_r R + \alpha_r \gamma,$$

para  $1 \leq r \leq n$  e  $R \rightarrow \infty$ ,

$$\log |\Gamma(a_r + \alpha_r s)| \sim \left[ \operatorname{Re}(a_r) + \alpha_r \gamma - \frac{1}{2} \right] \log \alpha_r R - \frac{\pi}{2} \alpha_r R - \alpha_r \gamma,$$

para  $n+1 \leq r \leq p$  e  $R \rightarrow \infty$ , bem como

$$\log |\Gamma(1 - b_r - \beta_r s)| \sim \left[ -\operatorname{Re}(b_r) + \frac{1}{2} - \beta_r \gamma \right] \log \beta_r R - \frac{\pi}{2} \beta_r R + \beta_r \gamma,$$

para  $m+1 \leq r \leq q$  e  $R \rightarrow \infty$ .

Desse modo, o comportamento de  $\log |g(s)z^{-s}|$ , quando  $R \rightarrow \infty$  é dado por:

$$\begin{aligned}
\log |g(s)z^{-s}| &\sim \frac{\pi}{2} \left[ -\sum_{r=1}^m \beta_r - \sum_{r=1}^n \alpha_r + \sum_{r=n+1}^p \alpha_r + \sum_{m+1}^q \beta_r \right] R + \\
&\quad + \sum_{r=1}^m \left[ \operatorname{Re}(b_r) + \beta_r \gamma - \frac{1}{2} \right] \log \beta_r R + \\
&\quad + \sum_{r=1}^n \left[ -\operatorname{Re}(a_r) - \alpha_r \gamma + \frac{1}{2} \right] \log \alpha_r R +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=m+1}^q \left[ -\operatorname{Re}(b_r) - \beta_r \gamma + \frac{1}{2} \right] \log \beta_r R + \\
& - \sum_{r=n+1}^p \left[ \operatorname{Re}(a_r) + A_r \gamma - \frac{1}{2} \right] \log \alpha_r R + \\
& + \left( - \sum_{r=1}^q \beta_r + \sum_{r=1}^p \alpha_r \right) \gamma + \gamma \log |z| - \arg(z) R.
\end{aligned}$$

Supondo  $\arg(z) = 0$  e  $\left[ - \sum_{r=1}^m \beta_r - \sum_{r=1}^n \alpha_r + \sum_{r=n+1}^p \alpha_r + \sum_{m+1}^q \beta_r \right] = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
\log |g(s)z^{-s}| & \sim \left[ \operatorname{Re} \left( \sum_{r=1}^q b_r - \sum_{r=1}^p a_r + \frac{p-q}{2} \right) + \left( \sum_{r=1}^q \beta_r - \sum_{r=1}^p \alpha_r \right) \gamma \right] \log R \\
& \sim [\operatorname{Re}(\mu) + k\gamma] \log R, \quad \text{com } R \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, o comportamento do integrando é dado por  $R^{[\operatorname{Re}(\mu)+k\gamma]}$ . Assim, para que tenhamos convergência de (2.39), devemos ter  $\operatorname{Re}(\mu) + k\gamma < -1$ .

Estas convergências resultantes podem ser resumidas em três regras dadas a seguir. Estas regras determinam a convergência de (2.39) sobre  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .

**Lema 2.3. (Regra 1)** *A integral de Mellin-Barnes (2.39) tomada ao longo da curva  $C_2$ , contornando adequadamente (caso necessário) os polos do integrando (2.40), converge no setor definido por*

$$|\arg(z)| < \frac{1}{2}\pi \left\{ \sum_{r=1}^n \alpha_r + \sum_{r=1}^m \beta_r - \sum_{r=n+1}^p \alpha_r - \sum_{r=m+1}^q \beta_r \right\}.$$

No caso em que  $\arg(z) = 0$  e  $\left[ - \sum_{r=1}^m \beta_r - \sum_{r=1}^n \alpha_r + \sum_{r=n+1}^p \alpha_r + \sum_{m+1}^q \beta_r \right] = 0$ , temos que a convergência da integral é dada se  $\operatorname{Re}(\mu) + k\gamma < -1$ .

**Lema 2.4. (Regra 2)** *A integral de Mellin-Barnes (2.39) tomada ao longo da curva  $C_3$ , iniciada em  $-\infty + i\varphi_1$ , envolvendo, no sentido positivo, somente os polos do integrando localizados em  $\beta_r s = -b_r - k$ , ( $1 \leq r \leq m$ ) e  $k$  um inteiro não negativo, e continuando em  $-\infty + i\varphi_2$ , com  $\varphi_1 < \varphi_2$ , converge para todo valor finito não nulo de  $z$  se*

$$k = \sum_{r=1}^q \beta_r - \sum_{r=1}^p \alpha_r > 0.$$

Quando esta quantidade se anula, a integral converge em  $|z| < h^{-1}$ . Se tivermos  $k = 0$  e  $|z| = h^{-1}$ , temos que a integral converge se  $\operatorname{Re}(\mu) < -1$ .

**Lema 2.5. (Regra 3)** A integral de Mellin-Barnes (2.39) tomada ao longo da curva  $C_1$ , iniciada em  $+\infty + i\varphi_1$ , envolvendo, no sentido negativo, somente os polos do integrando localizados em  $\alpha_r s = 1 - a_r + k$ , ( $1 \leq r \leq m$ ) e  $k$  um inteiro não negativo, e continuando em  $+\infty + i\varphi_2$ , com  $\varphi_1 < \varphi_2$ , converge para todo valor finito não nulo de  $z$  se

$$k = \sum_{r=1}^q \beta_r - \sum_{r=1}^p \alpha_r < 0.$$

Quando esta quantidade se anula, a integral converge em  $|z| > h^{-1}$ . Se tivermos  $k = 0$  e  $|z| = h^{-1}$ , temos que a integral converge se  $\operatorname{Re}(\mu) < -1$ .

Um sumário mnemônico contém a duas primeiras regras. Considere o diagrama:

$$\frac{\prod_{r=1}^m \Gamma(b_r + \beta_r s)}{\prod_{r=m+1}^q \Gamma(1 - \beta_r s - b_r)} \left| \frac{\prod_{r=1}^n \Gamma(1 - \alpha_r s - a_r)}{\prod_{r=n+1}^p \Gamma(a_r + \alpha_r s)} \right. \quad C_2$$

$C_3$

Assim a integral de Mellin-Barnes tomada sobre a curva  $C_3$ , usamos esta linha vertical para separar componentes do integrando: funções gama a esquerda da linha são balanceadas com aquelas que aparecem do lado direito desta linha vertical, ou seja, a soma dos  $\beta_r$  coeficientes das funções gama à esquerda menos a soma dos coeficientes  $\alpha_r$  das funções gama à direita. Para a integral tomada sobre a curva  $C_2$ , usamos a linha horizontal em nossa relação, balanceando as funções gama acima da linha horizontal em relação àquelas abaixo da linha horizontal, ou seja, a soma dos coeficientes  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  das funções gama acima da linha vertical menos o somatório dos coeficientes  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  das funções gama que estão abaixo da linha horizontal.

## 2.5 Casos particulares

Vamos, nesta seção, apresentar casos particulares dentre eles, a função exponencial, a função hipergeométrica generalizada, envolvendo representações integrais de Mellin-Barnes e usar os lemas anteriores para analisar a respectiva convergência.

### 2.5.1 Função exponencial

Seja a integral, com  $c > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds. \quad (2.45)$$

Temos que (2.45) é uma integral do tipo Mellin-Barnes e corresponde à transformada inversa de Mellin da função gama. Note ainda que o contorno de integração desta integral corresponde ao contorno  $C_2$  deslocado para o ponto  $(c, 0)$  onde  $c > 0$ . Vamos usar o teorema dos resíduos para o cálculo dessa integral. Assim,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds \quad (2.46)$$

onde os polos do integrando são dados por  $s = 0, -1, -2, \dots$ . Denotando o resíduo no polo em  $-n$ , por

$$R_n = \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) [\Gamma(s) z^{-s}] \quad (2.47)$$

vamos manipular o produto  $(s+n) [\Gamma(s) z^{-s}]$ , para o cálculo de  $R_n$ . Temos

$$(s+n)\Gamma(s) = (s+n) \frac{(s+n-1) \cdots s \Gamma(s)}{(s+n-1) \cdots s} = \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n-1) \cdots s}$$

logo,

$$R_n = \lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Gamma(s+n+1) z^{-s}}{(s+n-1) \cdots s} = \frac{\Gamma(1) z^n}{(-1)(-2) \cdots (-n)} = \frac{(-1)^n}{n!} z^n.$$

Assim, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = e^{-z}.$$

Portanto (2.45) é a representação integral de Mellin-Barnes da função exponencial, ou seja,

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds \quad (c > 0). \quad (2.48)$$

Supondo  $s = \sigma + it$  (com  $\sigma = c > 0$ ) e  $\theta = \arg(z)$ , temos que esta integral converge em  $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$  de acordo com a **Regra 1**.

### 2.5.2 Função hipergeométrica

Seja agora a seguinte integral do tipo Mellin-Barnes,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} z^{-s} ds, \quad (2.49)$$

em que o contorno de integração  $C_2$  separa os polos de  $\Gamma(s)$  dos polos de  $\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)$ , para  $a$  e  $b \neq 0, -1, -2, \dots$ . Vamos utilizar o teorema dos resíduos, para o calcular esta integral. Denotando o resíduo no polo em  $-n$  por  $R_n$ , temos que o valor da integral é

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} z^{-s} ds \equiv \sum_{n=0}^{\infty} R_n. \quad (2.50)$$

O cálculo do resíduo  $R_n$  é dado por

$$R_n = \lim_{s \rightarrow -n} \left[ (s+n)\Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} z^{-s} \right].$$

Note que,

$$(s+n)\Gamma(s) = (s+n) \frac{(s+n-1)\dots s\Gamma(s)}{(s+n-1)\dots s} = \frac{\Gamma(s+n+1)}{(-s+n-1)\dots(-s)}.$$

Utilizando este resultado encontramos para  $R_n$ ,

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{s \rightarrow -n} \left[ \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n-1)\dots(s)} \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} z^{-s} \right] \\ &= \frac{\Gamma(-n+n+1)}{(-n+n-1)\dots(-n)} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} z^n \\ &= \frac{1}{(-1)^n n!} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} z^n \\ &= \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{(-1)^n n!} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{(-z)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Assim, a soma dos resíduos fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} z^{-s} ds &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{(-z)^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; -z). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Portanto esta integral corresponde à representação integral de Mellin-Barnes da função hipergeométrica  ${}_2F_1(a, b; c; -z)$  e corresponde a transformada inversa de Mellin do produto de funções gama dado em (2.49). Pela **Regra 1** temos que esta integral converge para

$$|\arg(-z)| < \frac{1}{2}\pi(3-1) = \pi.$$

Se, ao invés de integração no contorno  $C_2$ , tivéssemos escolhido o contorno  $C_1$ , teríamos pela **Regra 2** que a integral converge no disco unitário aberto.

### 2.5.3 Função hipergeométrica generalizada

De modo geral temos uma representação integral de Mellin-Barnes para a função hipergeométrica generalizada em relação aos seus parâmetros, como foi apresentado no Capítulo 1, ou seja, a representação integral de Mellin-Barnes para  ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ , onde

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!},$$

em que  $(\alpha)_n$  são os símbolos de Pochhammer.

Vamos determinar a sua representação integral através da seguinte integral sobre o contorno  $C_2$ ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(a_1 - s) \cdots \Gamma(a_p - s)}{\Gamma(b_1 - s) \cdots \Gamma(b_q - s)} \Gamma(s) (z)^{-s} ds$$

em que  $a_r \neq -n$ , ( $\forall n$  e  $1 \leq r \leq p$ ) e  $b_r \neq -n$ , ( $\forall n$  e  $1 \leq r \leq q$ ). Assim, para calcular a integral sobre o contorno  $C_2$  conforme Fig. 2.1, calculamos o resíduo em cada polo, em  $-n$ , definido da seguinte forma,

$$R_n = \lim_{s \rightarrow -n} \left[ (s+n) \Gamma(s) \frac{\Gamma(a_1 - s) \cdots \Gamma(a_p - s)}{\Gamma(b_1 - s) \cdots \Gamma(b_q - s)} (z)^{-s} \right]$$

e somamos os resultados encontrados. Assim, utilizando a relação dada para  $(s+n)\Gamma(s)$  obtemos o seguinte valor para  $R_n$

$$R_n = \frac{(-1)^n \Gamma(a_1 + n) \cdots \Gamma(a_p + n)}{(n!) \Gamma(b_1 + n) \cdots \Gamma(b_q + n)} z^n = \left\{ \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)} \right\} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n (-z)^n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!}.$$

Agora somando os resíduos, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n = \Omega \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n (-z)^n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} \equiv \Omega {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -z) \quad \text{onde} \quad \Omega \equiv \frac{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}.$$

Enfim, podemos escrever

$$\frac{1}{\Omega} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(a_1 - s) \cdots \Gamma(a_p - s)}{\Gamma(b_1 - s) \cdots \Gamma(b_q - s)} \Gamma(s) (z)^{-s} ds \equiv {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -z), \quad (2.52)$$

que corresponde a representação integral de Mellin-Barnes para a função hipergeométrica generalizada  ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -z)$ . Utilizando a **Regra 1** temos que esta integral converge absolutamente para

$$|\arg(-z)| < \frac{\pi}{2}(p+1-q), \text{ em que } p+1 > q.$$

Note que no caso em que  $p = 2$  e  $q = 1$  recuperamos o resultado da seção anterior, associado à clássica função hipergeométrica.

A partir de agora, conhecidas as integrais de Mellin-Barnes, podemos efetuar o estudo da função de Meijer, a seguir, bem como o caso geral, a função de Fox, conforme Capítulo 4.

---

# A função $G$ de Meijer

---

Neste capítulo vamos estudar a função  $G$  de Meijer. Apresentar sua definição como uma integral do tipo Mellin-Barnes (ver Capítulo 2), suas propriedades e relações que serão utilizadas nos próximos capítulos. Lembrando que a função  $G$  de Meijer é uma generalização do tipo **1.2.3** da função hipergeométrica, como apresentado no Capítulo 1, considerada aqui como caso particular da função  $H$  de Fox que será estudada no Capítulo 4.

## 3.1 Introdução

Cornelis Simon Meijer nasceu em 17 de Agosto de 1904, em Pieterburen, Holanda. Estudou na universidade de Groningen, Holanda, de 1924 até 1929 sob orientação dos professores Van der Corput e Van der Waerden, defendendo sua tese em 1933. Foi professor de matemática na universidade de Groningen de 1946 até 1972. Morreu em 12 de Abril de 1974.

Seus trabalhos científicos consistem da expansão assintótica com estimativa de erros e representações integrais para funções especiais da física matemática, em particular para as funções de Bessel e Whittaker, as generalizações da transformada de Laplace que têm seu nome, e a hoje chamada função  $G$  de Meijer.

Em sua tese Meijer explorou adequadas representações integrais das funções de Bessel e Hankel, nesta ordem, para obter expansões assintóticas. Representações integrais de funções especiais da física matemática foi o seu principal campo de interesse. Durante o período de 1934 a 1941 Meijer e A. Erdélyi desenvolveram a teoria de representações integrais das funções de Whittaker e seus produtos [7].

As ferramentas mais importantes de suas investigações neste tema são inegavelmente as integrais de Barnes para essas funções que podem ser expressas em termo das funções hipergeométricas generalizadas. Em 1936 Meijer [103] definiu a função  $G$ , hoje conhecida como a função  $G$  de Meijer.

Com o recurso do cálculo dos resíduos mostrou que a função  $G$  de Meijer é uma combinação linear de funções hipergeométricas generalizadas. De fato, esta foi a definição original de Meijer da função  $G$  de Meijer. A função  $G$  de Meijer satisfaz a equação diferencial hipergeométrica generalizada e todas as soluções particulares desta equação podem ser expressas em termos da função  $G$  de Meijer.

Barnes [4] considerou o comportamento assintótico de um sistema fundamental de soluções da equação diferencial hipergeométrica, consistindo das funções  $G$  de Meijer correspondente a  $m = 1, n = p; m = q, n = 1$ ; e  $m = q, n = 0$ . Em [97] encontram-se os artigos fundamentais onde Meijer deduziu as expansões assintóticas da funções  $G$  de Meijer no caso  $p < q$  através de suas expressões em termos do sistema fundamental de soluções.

Em [100, 101, 102] Meijer deduziu diversas fórmulas de expansão para a função  $G$  de Meijer. Os casos simples dessas expansões são as expansões de Taylor em torno de um ponto  $z = w$ . Obtemos, por exemplo, a seguinte relação

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ \lambda w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda - 1)^r}{r!} G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ w \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, r \end{matrix} \right. \right].$$

Esta notação para função  $G$  de Meijer será definida na próxima seção.

Muitas relações conhecidas para funções especiais, por exemplo funções geratrizes para polinômios ortogonais e funções hipergeométricas generalizadas, são casos especiais dessas fórmulas de expansão.

O nome de Meijer também está associado a duas generalizações da transformada de Laplace e de Fourier e seus respectivos teoremas de inversão. Ele encontrou estes resultados em 1940 e 1941 [98, 99]. Primeiramente, temos a conexão com a transformada de Hankel. O correspondente teorema de inversão fornece condições para a validade do par de fórmulas,

$$f(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} K_{\nu}(st)(st)^{\frac{1}{2}} F(t) dt, \quad (3.1)$$

$$F(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} I_{\nu}(ts)(ts)^{\frac{1}{2}} f(s) ds, \quad (3.2)$$

em que  $K_\nu(x)$  é uma função de Bessel de terceira espécie e  $I_\nu(x)$  é uma função de Bessel com argumento imaginário. A segunda transformada de Meijer concerne as fórmulas

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2},m}(st)(st)^{-k-\frac{1}{2}} F(t) dt, \quad (3.3)$$

$$F(t) = \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i \Gamma(1+2m)} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{\frac{1}{2}ts} M_{k-\frac{1}{2},m}(ts)(ts)^{k-\frac{1}{2}} f(s) ds, \quad (3.4)$$

em que  $W_{\mu,\nu}(x)$  e  $M_{\mu,\nu}(x)$  são as funções de Whittaker. Importantes casos especiais destas fórmulas são dados em artigos de Meijer <sup>1</sup>.

Os últimos anos de sua vida Meijer trabalhou em expansões assintóticas da função  $G$  com parâmetros grandes. Apesar de obter vários resultados nesta área, ele atrasou sua publicação visando um tratamento mais completo e compreensivo. Convém ressaltar que suas aulas eram sempre bem preparadas bem como dedicou muito do seu tempo aos estudantes. Foi muito modesto e muito estimado pelos seus colegas e estudantes [80].

## 3.2 Definição e equação diferencial

Definimos a função  $G$  de Meijer através da integral [116],

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} (a_j)_{j=1}^p \\ (b_k)_{k=1}^q \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L R(s) z^{-s} ds \quad (3.5)$$

em que

$$R(s) = \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)}.$$

$L$  é um caminho adequado,  $z \neq 0$ ,  $z^{-s} := \exp[-s(\ln|z| + i\arg(z))]$ . Os inteiros  $m, n, p, q$ , conhecidos como a ordem da função  $G$ , são tais que  $1 \leq m \leq q$ ,  $0 \leq n \leq p$ , e os parâmetros  $a_j$  e  $b_j$  são tais que os polos de  $\Gamma(b_k + s)$ ,  $k = 1, \dots, m$  não coincidem com qualquer outro polo de  $\Gamma(1 - a_j - s)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Aqui o produto vazio é interpretado como 1.

Existem três possíveis contornos de integração para  $L$  explicitados a seguir <sup>2</sup>:

<sup>1</sup>Uma lista de artigos de Meijer pode ser encontrada em [80].

<sup>2</sup>Alguns autores consideram quatro possíveis contornos de integração para  $L$ , isto porque eles consideram o contorno  $L_{i\infty}$  dividido em dois casos: um contornando a origem e outro contornando um ponto diferente da origem [116].

(i)  $L$  vai de  $c - i\infty$  até  $c + i\infty$ , com  $c \geq 0$ , tal que todos os polos de  $\Gamma(b_j + s)$ ,  $j = 1, \dots, m$  estão à esquerda, e todos os polos de  $\Gamma(1 - a_k - s)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , à direita de  $L$ . Denotamos este contorno por  $L_{i\infty}$ , conforme Fig.3.1. A integral converge se  $p + q < 2(m + n)$  e  $|\arg(z)| < (m + n - \frac{p}{2} - \frac{q}{2})\pi$ .

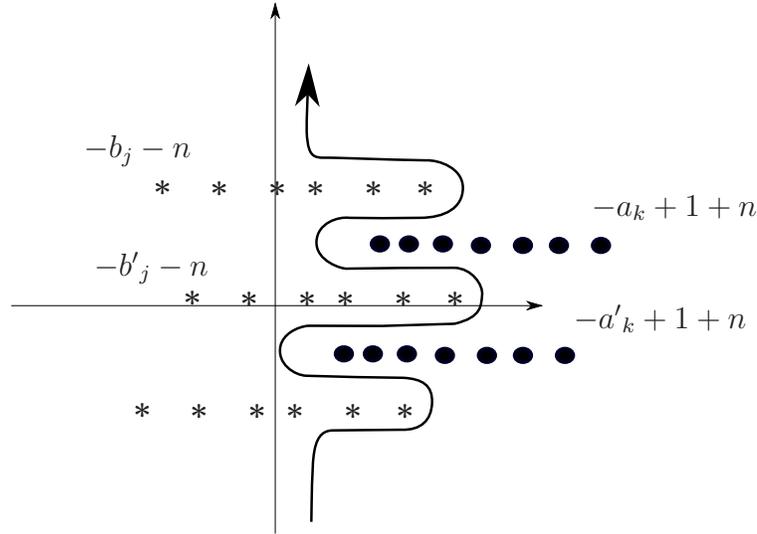


Fig. 3.1: Contorno  $L_{i\infty}$ .

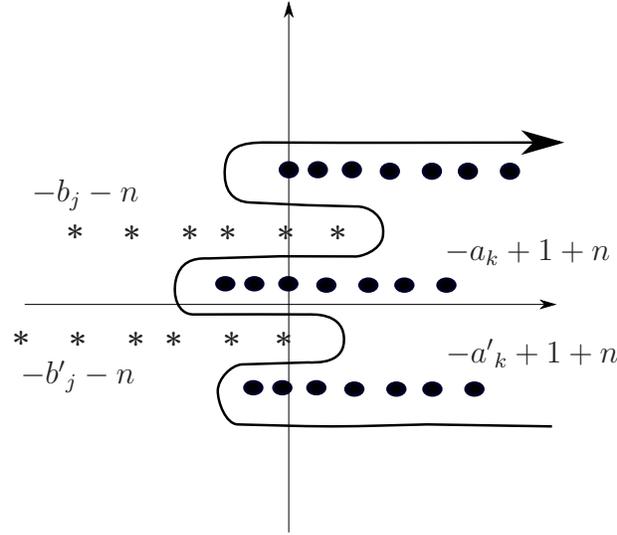
(ii)  $L$  é um contorno iniciando e terminando em  $+\infty$ , envolvendo (ou contornando) todos os polos de  $\Gamma(b_j + s)$ ,  $j = 1, \dots, m$  indo pelo sentido negativo, mas não contornando os polos de  $\Gamma(1 - a_k - s)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , denotado aqui por  $L_{+\infty}$ , conforme Fig. 3.2. A integral converge se  $q \neq 1$  e qualquer  $p < q$  ou  $p = q$  para  $|z| < 1$ .

(iii)  $L$  é um contorno iniciando e terminando em  $-\infty$  e contornando todos os polos de  $\Gamma(1 - a_k - s)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , começando no sentido da direção positiva, mas não contorna os polos de  $\Gamma(b_j + s)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Denotamos este contorno por  $L_{-\infty}$ , conforme Fig. 3.3. A integral converge se  $p \neq 1$  e qualquer  $p > q$  ou  $p = q$  e  $|z| > 1$ .

A função  $G$  de Meijer satisfaz à seguinte EDO do tipo hipergeométrica generalizada de ordem  $\max(p, q)$ .

$$\left[ (-1)^{p-m-n} z \prod_{j=1}^p \left( z \frac{d}{dz} - a_j + 1 \right) - \prod_{k=1}^q \left( z \frac{d}{dz} - b_k \right) \right] u(z) = 0. \quad (3.6)$$

a) Se  $p < q$ , as únicas singularidades de (3.6) são  $x = 0$  e  $\infty$ ;  $x = 0$  é uma singularidade regular e  $x = \infty$  uma singularidade irregular.

Fig. 3.2: Contorno  $L_{+\infty}$ .

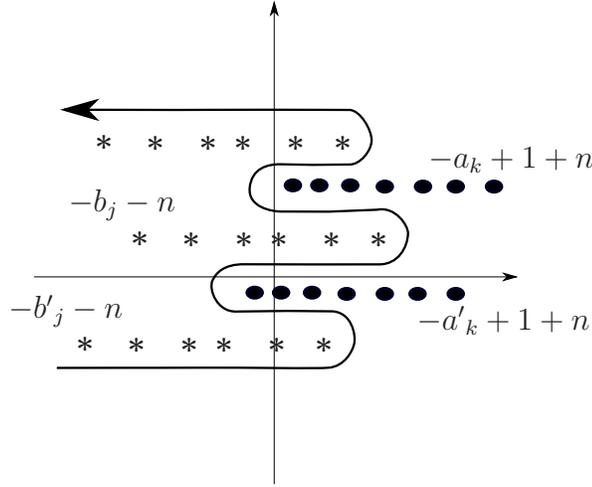
- b) Se  $p = q$ ,  $x = 0$  é uma singularidade do tipo regular, o ponto  $x = \infty$  passa a ser uma singularidade do tipo regular e, supondo  $L$  satisfazendo (i), temos que  $(-1)^{p-m-n}$  é também uma singularidade regular.
- c) Se  $p > q$  podemos usar a **Propriedade 3**, a seguir, de modo que este caso é conduzido ao caso (a), acima.

### 3.2.1 Equação hipergeométrica

Aqui, como um particular exemplo, vamos discutir o caso da equação hipergeométrica. Considerando em (3.6) os parâmetros  $p = 2$ ,  $q = 2$ ,  $m = 1$  e  $n = 2$ , obtemos a equação:

$$\left[ (-1)^{2-1-2} z \prod_{j=1}^2 \left( z \frac{d}{dz} - a_j + 1 \right) - \prod_{k=1}^2 \left( z \frac{d}{dz} - b_k \right) \right] u(z) = 0$$

$$\left[ -z \left( z \frac{d}{dz} - a_1 + 1 \right) \left( z \frac{d}{dz} - a_2 + 1 \right) - \left( z \frac{d}{dz} - b_1 \right) \left( z \frac{d}{dz} - b_2 \right) \right] u(z) = 0.$$

Fig. 3.3: Contorno  $L_{-\infty}$ .

Fazendo  $b_1 = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} & \left[ -z \left( z \frac{d}{dz} - a_1 + 1 \right) \left( z \frac{d}{dz} - a_2 + 1 \right) - z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} - b_2 \right) \right] u(z) = 0 \\ & \left[ -z \left( z \frac{d}{dz} - a_1 + 1 \right) \left( z \frac{d}{dz} - a_2 + 1 \right) - z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} - b_2 \right) \right] u(z) = 0 \\ & \left[ \left( z \frac{d}{dz} - a_1 + 1 \right) \left( z \frac{d}{dz} - a_2 + 1 \right) + \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} - b_2 \right) \right] u(z) = 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ z \frac{d}{dz} + z^2 \frac{d^2}{dz^2} + [(1 - a_1) + (1 - a_2)] z \frac{d}{dz} + (1 - a_1)(1 - a_2) + \frac{d}{dz} + z \frac{d^2}{dz^2} - b_2 \frac{d}{dz} \right\} u(z) = 0$$

$$\left\{ z(1 + z) \frac{d^2}{dz^2} + [(1 - b_2) + [1 + (1 - a_1) + (1 - a_2)]] z \frac{d}{dz} + (1 - a_1)(1 - a_2) \right\} u(z) = 0$$

$$z(1 + z) \frac{d^2}{dz^2} u(z) + [(1 - b_2) + [1 + (1 - a_1) + (1 - a_2)]] z \frac{d}{dz} u(z) + (1 - a_1)(1 - a_2) u(z) = 0.$$

Tomando  $a = (1 - a_1)$ ,  $b = (1 - a_2)$  e  $c = (1 - b_2)$ , temos:

$$z(1 + z) \frac{d^2}{dz^2} u(z) + [c + (1 + a + b)] z \frac{d}{dz} u(z) + abu(z) = 0.$$

Fazendo  $z \rightarrow -z$ , podemos escrever

$$z(1 - z) \frac{d^2}{dz^2} u(-z) + [c - (1 + a + b)] z \frac{d}{dz} u(-z) - abu(-z) = 0,$$

e introduzindo a notação  $v(z) = u(-z)$ , obtemos:

$$z(1 - z) \frac{d^2}{dz^2} v(z) + [c - (1 + a + b)] z \frac{d}{dz} v(z) - av(z) = 0.$$

que corresponde à clássica equação hipergeométrica.

### 3.2.2 Equação hipergeométrica confluyente

Assim, como anteriormente, vamos recuperar, a partir da EDO (3.6) para a função de Meijer, a equação hipergeométrica confluyente. Para isso, fazemos em (3.6)  $m = 1$ ,  $p = 1$ ,  $n = 1$  e  $q = 2$ , deste modo:

$$\begin{aligned} & \left[ (-1)^{1-1-1} z \prod_{j=1}^1 \left( z \frac{d}{dz} - a_j + 1 \right) - \prod_{k=1}^2 \left( z \frac{d}{dz} - b_k \right) \right] u(z) = 0 \\ & \left[ -z \left( z \frac{d}{dz} - a_1 + 1 \right) - \left( z \frac{d}{dz} - b_1 \right) \left( z \frac{d}{dz} - b_2 \right) \right] u(z) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando esta última por  $(-1)$  e fazendo  $b_1 = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} & \left[ z \left( z \frac{d}{dz} - a_1 + 1 \right) + z \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} - b_2 \right) \right] u(z) = 0. \\ & \left[ z \frac{d}{dz} + (-a_1 + 1) + \frac{d}{dz} + z \frac{d^2}{dz^2} - b_2 \frac{d}{dz} \right] u(z) = 0. \\ & z \frac{d^2}{dz^2} u(z) + (1 - b_2 + z) \frac{d}{dz} u(z) + (1 - a_1) u(z) = 0. \end{aligned}$$

Fazendo  $c = 1 - b_2$ ,  $a = (1 - a_1)$  e aplicando a mudança de variável  $z \rightarrow -z$ , obtemos:

$$z \frac{d^2}{dz^2} u(-z) + (c - z) \frac{d}{dz} u(-z) - au(-z) = 0.$$

Definindo a função  $v(z) = u(-z)$ , encontramos

$$z \frac{d^2}{dz^2} v(z) + (c - z) \frac{d}{dz} v(z) - av(z) = 0.$$

que corresponde a clássica equação hipergeométrica confluyente.

## 3.3 Propriedades

1. **Simetria:** A função  $G$  de Meijer é simétrica com respeito aos parâmetros  $a_1, \dots, a_n$ , também em  $a_{n+1}, \dots, a_p$ , em  $b_1, \dots, b_m$ , e  $b_{m+1}, \dots, b_q$ .
2. **Relação entre a função  $G$  de Meijer e a função hipergeométrica:**

Supondo  $L$  na condição (ii) e que dois  $b_j$ 's,  $j = 1, \dots, m$ , não diferem por um inteiro, podemos representar a função  $G$  de Meijer por meio de uma combinação da função

hipergeométrica generalizada, isto é,

$$\begin{aligned}
 G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right] &= \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{k=1}^{m'} \Gamma(b_k - b_h) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_h - a_j)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 + b_h - b_k) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - b_h)} z^{b_h} \\
 &\times {}_pF_{q-1}[1 + b_h - a_1, \dots, 1 + b_h - a_p; \\
 &1 + b_h - b_1, \dots, *, \dots, 1 + b_h - b_q; (-1)^{p-m-n} z] \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

em que  $p < q$  ou  $p = q$  e  $|z| < 1$ . O símbolo  $\prod'$  indica omissão do fator  $\Gamma(b_h - b_h)$  e o asterisco em  $F$  a omissão do parâmetro  $1 + b_h - b_h$ .

De modo similar, se dois  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , não diferem por um inteiro e  $L$  satisfaz a condição (iii), temos:

$$\begin{aligned}
 G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right] &= \sum_{h=1}^m \frac{\prod_{k=1}^{m'} \Gamma(a_h - a_k) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 + b_j - a_h)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 + a_k - a_h) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_h - b_j)} z^{b_h} \\
 &\times {}_qF_{p-1}[1 + b_1 - a_h, \dots, 1 + b_q - a_h; \\
 &1 + a_1 - a_h, \dots, *, \dots, 1 + a_p - a_h; (-1)^{q-m-n} z^{-1}] \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

em que  $p > q$  ou  $p = q$  e  $|z| > 1$ . O símbolo  $\prod'$  indica omissão do fator  $\Gamma(a_h - a_h)$  e o asterisco em  $F$  a omissão do parâmetro  $1 + a_h - a_h$ .

3. **Inversão:** Esta propriedade, dada a seguir, transforma a função  $G$  de Meijer com  $p > q$  em uma função  $G$  de Meijer com  $p < q$ . Deste modo, em todas as discussões, podemos considerar  $p \leq q$  sem perda de generalidade.

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j)_{j=1}^p \\ (b_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = G_{q,p}^{n,m} \left[ \frac{1}{z} \left| \begin{array}{c} 1 - (a_j)_{j=1}^p \\ 1 - (b_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right]. \quad (3.9)$$

4. **Translação:** A relação a seguir transforma o produto  $z^\alpha$  pela função  $G$  de Meijer em uma translação de ordem  $\alpha$  nos parâmetros  $a_j$  e  $b_k$ , em que  $\alpha \in \mathbb{C}$ :

$$z^\alpha G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j)_{j=1}^p \\ (b_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j)_{j=1}^p + \alpha \\ (b_k)_{k=1}^q + \alpha \end{array} \right. \right] \quad (3.10)$$

5. **Funções contíguas:** Apresentamos aqui algumas relações entre as funções contíguas, que advêm do deslocamento unitário em um dos parâmetros da função  $G$  de Meijer:

$$(1 + b_1 - a_1)G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] + G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1 + 1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \quad (3.11)$$

em que  $m, n \geq 1$ ;

$$(a_p - a_1)G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] + G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_{p-1}, a_p - 1 \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \quad (3.12)$$

em que  $1 \leq n \leq p - 1$ ;

$$(a_p - a_1)G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 + v, \dots, a_{p-1} \\ a_1 + v, \dots, b_{q-1} \end{matrix} \right. \right] = (1 + v)G_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_{p-1} \\ b_1, \dots, b_{q-1} \end{matrix} \right. \right] + \\ - G_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - 1, a_2, \dots, a_{p-1} \\ b_1, \dots, b_{q-1} \end{matrix} \right. \right] \quad (3.13)$$

em que  $v$  é um número complexo e  $1 \leq n \leq p - 1$ ;

6. **Diferenciação:** Apresentamos aqui duas relações de diferenciação da função  $G$  de Meijer:

$$x \frac{d}{dz} G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] + (a_1 - 1)G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \quad (3.14)$$

para  $n \geq 1$ ;

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^k G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \right\} = z^{k-1} G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ z \left| \begin{matrix} -k, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 - k \end{matrix} \right. \right], \quad k \in \mathbb{C}; \quad (3.15)$$

7. **Funções de argumento  $ze^{\pm\pi i}$ :** As duas relações a seguir mostram a conexão entre a função  $G$  de Meijer e as funções de argumento  $ze^{\pm\pi i}$ :

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{\pi i b_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n} \left[ ze^{-\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] + \right. \\ \left. - e^{\pi i b_{m+1}} G_{p,q}^{m+1,n} \left[ ze^{\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \right\}$$

com  $m \leq q - 1$  e

(3.16)

$$G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \left\{ e^{\pi i a_{n+1}} G_{p,q}^{m,n+1} \left[ ze^{-\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] + \right. \\ \left. - e^{\pi i a_{n+1}} G_{p,q}^{m,n+1} \left[ ze^{\pi i} \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \right\}$$

com  $n \leq p - 1$ ,

(3.17)

8. **Redução de ordem:** Esta relação nos fornece uma redução de ordem da função  $G$  de Meijer em relação aos parâmetros  $n$ ,  $p$  e  $q$  dada por:

$$G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ z \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{matrix} \right. \right] = (a_1 - 1) G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] + G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right].$$

(3.18)

Aqui, também, a fim de exemplificar a manipulação destas expressões, vamos mostrar o resultado envolvendo a redução de ordem. De fato, por definição, temos que:

$$G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ z \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{matrix} \right. \right] = G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ z \left| \begin{matrix} a'_1, \dots, a'_p, a'_{p+1} \\ b'_1, \dots, b'_q, b'_{q+1} \end{matrix} \right. \right] = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b'_k + s) \prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(1 - a'_j - s)}{\prod_{k=m+1}^{q+1} \Gamma(1 - b'_k - s) \prod_{j=n+2}^{p+1} \Gamma(a'_j + s)} z^{-s} ds,$$

em que  $L$  é o contorno definido anteriormente,  $a'_1 = 0$ ,  $a'_{j+1} = a_j$ , para  $j = 1, \dots, p$ ,  $b'_k = b_k$ , para  $k = 1, \dots, q$  e  $b'_{q+1} = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ z \left| \begin{array}{c} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{array} \right. \right] &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b'_k + s) \Gamma(1 - a'_1 - s) \prod_{j=2}^{n+1} \Gamma(1 - a'_j - s)}{\Gamma(1 - b_{q+1} - s) \prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b'_k - s) \prod_{j=n+2}^{p+1} \Gamma(a'_j + s)} z^{-s} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \Gamma(1 - 0 - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\Gamma(1 - 1 - s) \prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \Gamma(1 - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\Gamma(-s) \prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\frac{\Gamma(1 - s)}{\Gamma(-s)} = \frac{-s\Gamma(-s)}{\Gamma(-s)} = -s. \quad (3.19)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(1 - a_1 - s)\Gamma(1 - a_1 - s) &= \Gamma(2 - a_1 - s) \\
-s\Gamma(1 - a_1 - s) + (1 - a_1)\Gamma(1 - a_1 - s) &= \Gamma(2 - a_1 - s) \\
-s + (1 - a_1) &= \frac{\Gamma(2 - a_1 - s)}{\Gamma(1 - a_1 - s)} \\
-s &= (a_1 - 1) + \frac{\Gamma(2 - a_1 - s)}{\Gamma(1 - a_1 - s)}. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Logo, de (3.19) e (3.20), temos:

$$\frac{\Gamma(1 - s)}{\Gamma(-s)} = (a_1 - 1) + \frac{\Gamma(2 - a_1 - s)}{\Gamma(1 - a_1 - s)}, \quad (3.21)$$

voltando em  $G_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ z \left| \begin{array}{c} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{array} \right. \right]$  podemos escrever

$$\begin{aligned}
G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ z \left| \begin{array}{c} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{array} \right. \right] &= \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \left\{ (a_1 - 1) + \frac{\Gamma(2 - a_1 - s)}{\Gamma(1 - a_1 - s)} \right\} z^{-s} ds \\
&= (a_1 - 1) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \frac{\Gamma(2 - a_1 - s)}{\Gamma(1 - a_1 - s)} z^{-s} ds.
\end{aligned}$$

A primeira parte do segundo membro corresponde à função  $G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{array} \right. \right]$ . Vamos desenvolver a última parte do segundo membro.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} \frac{\Gamma(2 - a_1 - s)}{\Gamma(1 - a_1 - s)} z^{-s} ds = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \Gamma(2 - a_1 - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \Gamma(1 - a_1 - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \Gamma(2 - a_1 - s) \Gamma(1 - a_1 - s) \prod_{j=2}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \Gamma(1 - a_1 - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \Gamma(2 - a_1 - s) \prod_{j=2}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + s) \Gamma(1 - (a_1 - 1) - s) \prod_{j=2}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - 1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right].
\end{aligned}$$

Desse modo, finalmente, obtemos o resultado desejado

$$G_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ z \left| \begin{matrix} 0, a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q, 1 \end{matrix} \right. \right] = (a_1 - 1) G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] + G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] \square$$

### 3.4 Casos particulares

A importância da função  $G$  de Meijer aparece na possibilidade de podermos representar várias funções especiais, advindas da física matemática, em termos dela. Podemos estudar propriedades e relações de tais funções como Bessel, Legendre e Whittaker, dentre outras, através da função de Meijer. Estas propriedades podem ser encontradas nos artigos de C. S. Meijer.

#### 3.4.1 Função hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; x)$

Novamente, voltamos à clássica função hipergeométrica. Consideremos os parâmetros  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $p = 2$  e  $q = 2$ . Conforme **2.5.2**, temos:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} (-z)^{-s} ds = G_{2,2}^{1,2} \left[ -z \left| \begin{matrix} 1-a, 1-b \\ 0, 1-c \end{matrix} \right. \right] \quad (3.22)$$

correspondente a representação da função hipergeométrica em termos da função  $G$  de Meijer.

Desta relação podemos assegurar que todos os casos particulares da clássica função hipergeométrica podem ser escritos em termos da função de Meijer.

### 3.4.2 Função hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$

De maneira similar, fazendo  $m = p$ ,  $n = p$  e  $q \rightarrow q + 1$ , conforme **2.5.3**, encontramos a função hipergeométrica generalizada  ${}_pF_q$  dada pela função  $G$  de Meijer:

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(a_1 - s) \dots \Gamma(a_p - s)}{\Gamma(b_1 - s) \dots \Gamma(b_q - s)} \Gamma(s) (-z)^{-s} ds = \\ &= \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{p,q+1}^{1,p} \left[ -z \left| \begin{array}{l} 1 - a_1, \dots, 1 - a_p \\ 0, 1 - b_1, \dots, 1 - b_q \end{array} \right. \right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

### 3.4.3 Função $E$ de MacRobert

Enfim, apenas para mencionar, conforme Capítulo 1, explicitamos a função de MacRobert em termos da função de Meijer. Fazendo agora  $m = p$ ,  $n = 1$ ,  $p = q + 1$  e  $q = p$ , obtemos a função  $E$  de MacRobert representada por uma função  $G$  de Meijer:

$$E[p; (\alpha_j)_{j=1}^p; q; (\beta_k)_{k=1}^q; z] = G_{q+1,p}^{p,1} \left[ z \left| \begin{array}{l} 1, \beta_1, \dots, \beta_q \\ \alpha_1, \dots, \alpha_p \end{array} \right. \right] \quad (3.24)$$

Usando a **Propriedade 3** da função de Meijer, temos:

$$\begin{aligned} {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) &= \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(a_1 - s) \dots \Gamma(a_p - s)}{\Gamma(b_1 - s) \dots \Gamma(b_q - s)} \Gamma(s) (-z)^{-s} ds &= \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(a_j)} G_{q+1,p}^{p,1} \left[ -\frac{1}{z} \left| \begin{array}{l} 1, b_1, \dots, b_q \\ a_1, \dots, a_p \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

Fazendo agora  $b_k = \beta_k$  para  $k = 1, \dots, q$  e  $a_j = \alpha_j$ , para  $j = 1, \dots, p$ , encontramos uma relação, através da função de Meijer, entre a função hipergeométrica generalizada e a função de MacRobert dada por [30]:

$${}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(\beta_j)}{\prod_{j=1}^p \Gamma(\alpha_j)} E \left[ p; (\alpha_j)_{j=1}^p; q; (\beta_k)_{k=1}^q; -\frac{1}{z} \right]. \quad (3.25)$$

# A função $H$ de Fox

Neste capítulo vamos definir a função  $H$  de Fox através de uma integral do tipo Mellin-Barnes, apresentar algumas de suas propriedades, bem como recuperar, como casos particulares, por exemplo, a chamada função  $G$  de Meijer, apresentada no Capítulo 3, a chamada função de Mittag-Leffler, bem como as funções de Wright e Mainardi, úteis em problemas advindos do cálculo fracionário, conforme será visto no Capítulo 5.

## 4.1 Introdução

Charles Fox nasceu em 17 de Março de 1897, em Londres, Inglaterra e era filho de Morris and Fenny Fox. Estudou na Universidade Sussex Sidney, Cambridge em 1915. Dois anos depois, seus estudos foram interrompidos quando juntou-se à força expedicionária britânica na França e foi ferido em ação em 1918. Depois completou seus estudos em Cambridge, e lecionou na Universidade Imperial de Ciências. Em 1928 recebeu o grau de doutor em ciências da Univesidade de Londres.

Charles Fox emigrou para o Canadá em 1949 para trabalhar na Universidade McGill, Montreal, como professor associado de matemática e logo depois foi promovido ao posto de professor de matemática em 1956. Em 1961 foi eleito um Fellow da Royal Society do Canadá. Depois de aposentado da Universidade McGill em 1967, trabalhou na Sir George Williams University (agora Concordia University) como professor (visitante), de matemática e continuou seus ensinamentos até próximo dos 80 anos.

Seus trabalhos consistem no estudo de séries e integrais nulas, matemática aplicada à navegação, transformadas integrais, equações integrais e funções hipergeométricas generali-

zadas. Seus primeiros artigos [36, 37] referem-se à investigação de séries e integrais nulas. Trabalhos associados à matemática aplicada e à navegação são encontrados em [49, 67].

Uma das maiores contribuições de Fox envolve a investigação sistemática da expansão assintótica da função hipergeométrica generalizada (agora conhecida como função de Wright, ou por alguns autores como função de Fox-Wright) definida por

$${}_pF_q[(a_1, \alpha_1), \dots, (a_p, \alpha_p); (b_1, \beta_1), \dots, (b_q, \beta_q); z] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i r)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j r)} \frac{z^r}{r!},$$

em que  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$  com  $i = 1, \dots, p$ ;  $j = 1, \dots, q$  e  $\sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i \geq -1$ . Sua metodologia refina o trabalho de Barnes [3], que discutiu a expansão assintótica da função hipergeométrica generalizada  ${}_pF_q$ .

As contribuições de Fox nas funções especiais e transformadas integrais podem ser divididas em três classes: (i) teoria da transformada de Mellin; (ii) operadores de integração fracionária; e (iii) aplicação dos operadores  $L$  e  $L^{-1}$ .

A técnica envolvendo a transformada de Mellin é exibida na maioria de seus artigos. Em seu primeiro artigo, na aplicação da transformada de Mellin para equação integral, Fox [44] desenvolveu a solução da seguinte equação do tipo Fredholm

$$F(x) = G(x) + \int_0^{\infty} H(ux)F(u)du,$$

em que  $G(x)$  e  $H(x)$  são funções conhecidas e  $F(x)$  deve ser determinada. Pela aplicação da teoria da transformada de Mellin, Fox investigou certas propriedades na forma de teoremas para as seguintes transformadas integrais:

1. Transformadas iteradas [50];
2. Transformadas em cadeia [47, 52, 58];
3. Classificação de núcleos que possuem transformadas integrais [54];
4. Transformadas unitárias gerais [56];
5. Transformada integral matricial [61].

Fox [51] também desenvolveu uma fórmula de inversão associada à transformada de um produto de convolução através da aplicação de certos operadores diferenciais.

Em 1961, Fox [59] introduziu a função  $H$  na teoria de funções especiais, que é uma generalização da função  $E$  de MacRobert, função hipergeométrica de Wright e da função  $G$  de Meijer. Ele investigou o núcleo de Fourier generalizado associado à função  $H$  e estabeleceu muitas propriedades e discutiu casos particulares deste núcleo. A função  $H$ , atualmente conhecida como função  $H$  de Fox será definida na próxima seção.

A função  $H$  já aparecia no tratado de Bateman [30], dada por uma integral de Mellin-Barnes. Este fato foi levado ao conhecimento de Fox em Janeiro de 1966. Esta foi a razão que o fez não prosseguir em qualquer outro trabalho de pesquisa dessa função  $H$  além do artigo [63]. Neste artigo, Fox derivou uma solução formal da equação integral dual, envolvendo funções  $H$ , em termos do chamado operador de Erdélyi-Kober modificado.

Como foi visto no Capítulo 2, as integrais de Mellin-Barnes aparecem primeiramente com S. Pincherle, baseadas no “princípio da dualidade”. Essas integrais foram estudadas por Barnes em 1908, Mellin [104], Dixon e Ferrar [24] e Bochner [6]. Porém, um estudo sistemático dessas funções é feito por Fox em conexão com a investigação do núcleo de Fourier simétrico generalizado [59]. Estes núcleos de Fourier são úteis na caracterização das distribuições de probabilidade. O trabalho de Fox em distribuições estocásticas pode ser visto em dois artigos [58, 64].

As reciprocidades

$$g(x) = \int_0^\infty k(xt)f(t)dt, \quad f(x) = \int_0^\infty k(xt)g(t)dt,$$

geralmente conhecidas como transformada integral de Fourier generalizada direta e inversa, podem ser estabelecidas se certas condições de convergência bem como a equação funcional  $K(s)K(1-s) = 1$  são satisfeitas, em que  $K(s)$  é a transformada de Mellin de  $k(x)$ . Como um resultado de seu interesse nos núcleos de Fourier, Fox [60] mostrou que a reciprocidade pode ser obtida com a ajuda de operadores de integração fracionária, que são análogos às transformadas de Fourier acima mas com o desenvolvimento da equação funcional muito mais geral,

$$K(s)K(1-s) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma[\alpha_i + (\eta_i + 1 - s)/m_i]\Gamma[\alpha_i + (\eta_i + s)/m_i]}{\Gamma[(\eta_i + 1 - s)/m_i]\Gamma[(\eta_i + s)/m_i]},$$

onde  $m_i > 0$ ,  $0 \leq \text{Re}(\alpha_i) < 1/2$  e  $\text{Re}(\eta) > -1/2$ .

Em [62], Fox reduz a transformada de Meijer modificada, definida por

$$g(x) = \int_0^\infty (xt)^\nu K_\nu(xt) f(t) dt,$$

em termos da transformada de Laplace e deriva sua fórmula de inversão.

A técnica da transformada de Laplace  $L$  e sua inversa  $L^{-1}$  é exibido por Fox em dois dos seus artigos [65, 66]. Em um dos artigos, Fox [66] obteve a fórmula de inversão para a chamada transformada de Varma, definida por

$$g(t) = \int_0^\infty (tu)^{m-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}tu\right) W_{k,m}(tu) f(u) du, \quad t > 0,$$

na forma:  $f(x) = x^{-2m} L^{-1} t^{-k-m+1/2} L[x^{m-k+1/2} L^{-1} g(t)]$ .

Finalmente, é importante observar que Fox também obteve muitos resultados numa miscelânea de tópicos de interesse, tais como: ortocentro, função potencial, equação polar de uma curva, teorema de Hankel, matrizes mágicas, linha de Pascal, etc. Isso pode ser observado nos seus artigos [38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 48, 53, 55, 57].

Atualmente, devido a ocorrência da chamada função de Mittag-Leffler na solução de equações diferenciais fracionárias, a importância da função  $H$  cresceu consideravelmente tanto nas Ciências quanto na Engenharia, especialmente em áreas envolvendo problemas de difusão fracionária e difusão anômala em sistemas complexos. A tendência das pesquisas em muitos ramos da ciência aplicada e tecnológica é a mudança de direção associada às aplicações envolvendo a função  $H$  de Fox (e seu particular caso, a função de Mittag-Leffler) em suas áreas de pesquisa. O primeiro artigo em que a solução de uma equação de difusão fracionária é obtida em termos da função  $H$  de Fox foi publicado por Wyss [135].

Fox foi um dedicado, honesto e efetivo professor, que fez contribuições significantes no campo de sua especialização e inspirou e encorajou vários pesquisadores [125].

## 4.2 Definição

A função  $H$  de Fox, em termos de uma integral do tipo Mellin-Barnes, é [105],

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_1, \alpha_1), \dots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), \dots, (b_q, \beta_q) \end{array} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L g(s) z^{-s} ds, \quad (4.1)$$

em que

$$g(s) = \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + \beta_k s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - \beta_k s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \alpha_j s)}$$

e um produto vazio é sempre interpretado como 1,  $z \neq 0$ ,  $z^{-s} := \exp[-s(\ln |z| + i \arg(z))]$ ,  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$  com  $0 \leq n \leq p$ ,  $1 \leq m \leq q$  e  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{C}$  ( $i = 1, \dots, p$ ;  $j = 1, \dots, q$ ) tal que  $\alpha_i(b_j + k) \neq \beta_j(a_i - l - 1)$ ,  $k, l \in \mathbb{N}$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ . Além disso,  $L$  é um contorno adequado que separa todos os polos de  $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , dos polos de  $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

O estudo das condições de existência da função  $H$  de Fox é feito através de um estudo sobre a convergência de (4.1) que, como já foi discutido no Capítulo 2, depende do contorno  $L$  e da relação entre os parâmetros  $a_i$  e  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) e  $b_j$  e  $\beta_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ).

A função  $H$  de Fox aparece na solução de equações diferenciais fracionárias e equações integrais fracionárias. Assim, para encontrar a condição de existência da solução de uma destas equações, precisamos das condições de existência da função  $H$  de Fox.

Um estudo detalhado sobre a convergência de (4.1), como já mencionamos, foi realizado no Capítulo 2 deste trabalho e apresentado como lemas. Aqui vamos apenas apresentar um resumo destes resultados. Os casos em que a função  $H$  de Fox existe e é analítica são:

- (i)  $L = L_{i\infty}$ ;  $a > 0$ ,  $|\arg z| < a\pi/2$ ,  $z \neq 0$ ;
- (ii)  $L = L_{i\infty}$ ;  $\arg(z) = 0$ ,  $a = 0$ ,  $\operatorname{Re}(\mu) + kc < -1$ ;
- (iii)  $L = L_{-\infty}$ ,  $k > 0$ ,  $z \neq 0$ ;
- (iv)  $L = L_{-\infty}$ ,  $k = 0$ ,  $0 < |z| < h^{-1}$ ;
- (v)  $L = L_{-\infty}$ ,  $k = 0$ ,  $|z| = h$ ,  $\operatorname{Re}(\mu) < -1$ ;
- (vi)  $L = L_{+\infty}$ ,  $k < 0$ ,  $z \neq 0$ ;
- (vii)  $L = L_{+\infty}$ ,  $k = 0$ ,  $|z| > h^{-1}$ ;
- (viii)  $L = L_{+\infty}$ ,  $k = 0$ ,  $|z| = h^{-1}$ ,  $\operatorname{Re}(\mu) < -1$ ,

onde os parâmetros  $a$ ,  $k$ ,  $h$  e  $\mu$  são tais que:

$$\begin{aligned}
 a &= \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=n+1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j - \sum_{j=m+1}^q \beta_j \\
 k &= \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i, \\
 h &= \prod_{i=1}^p \alpha_i^{\alpha_i} \prod_{j=1}^q \beta_j^{-\beta_j}, \\
 \mu &= \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

O contorno  $L_{i\infty}$  vai de  $c-i\infty$  até  $c+i\infty$ , com  $c \geq 0$ , tal que todos os polos de  $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ ,  $j = 1, \dots, m$  estão à esquerda, e todos os polos de  $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , à direita de  $L$ . Este contorno corresponde ao contorno  $C_2$  no Capítulo 2.

O contorno  $L_{-\infty}$  vai de  $-\infty + i\varphi_1$  para  $-\infty + i\varphi_2$ , com  $\varphi_1 < \varphi_2$ , tal que os polos de  $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ ,  $j = 1, \dots, m$  estão à esquerda, e todos os polos de  $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$ ,  $i = 1, \dots, n$  à direita de  $L_{-\infty}$ . Este contorno corresponde ao contorno  $C_3$  do Capítulo 2.

O contorno  $L_{+\infty}$  vai de  $+\infty + i\varphi_1$  para  $+\infty + i\varphi_2$ , com  $\varphi_1 < \varphi_2$ , tal que os polos de  $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ ,  $j = 1, \dots, m$  estão à esquerda, e todos os polos de  $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$ ,  $i = 1, \dots, n$  à direita de  $L_{+\infty}$ . Este contorno corresponde ao contorno  $C_1$  no Capítulo 2.

O caso (i) é analisado com detalhes no Capítulo 2 em forma de lema, **Lema 2.3**. Utilizando a expansão assintótica da função gama na análise do comportamento de  $\log |g(s)z^{-s}|$  ao longo do contorno  $C_1$ , mostramos a convergência de (4.1) e resumimos este ao **Lema 2.3**.

Os casos (ii)-(iv) são resultados da análise da integral de Mellin-Barnes ao longo do contorno  $C_3$  e aparecem como resumo desta análise em forma de lema, **Lema 2.4**. Este lema fornece as condições de convergência da integral de Mellin-Barnes sobre o contorno  $C_3$ . Vale destacar aqui a convergência da função  $H$  de Fox em um disco unitário no caso  $k=0$ .

Os casos (v)-(viii) são resultados da análise da integral de Mellin-Barnes ao longo do contorno  $C_1$  e são apresentados como lema, **Lema 2.5**. Estes são vistos de uma forma equivalente pelo **Teorema 1** em [78]. Neste teorema é verificada a convergência do integrando em (4.1) para estes casos através de uma estimativa assintótica para o mesmo<sup>1</sup>. Vamos a seguir, apresentar algumas propriedades da função de Fox que nos serão úteis.

<sup>1</sup>Uma outra importante referência sobre a existência envolvendo a função  $H$  de Fox é dada em [105].

## 4.3 Propriedades

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades sobre a função  $H$  de Fox. Estas e outras propriedades podem ser encontradas em [116]. Aqui consideramos  $a_i, b_i \in \mathbb{C}$  e  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}_+$ .

1. **Simetria em relação aos parâmetros:** A função  $H$  de Fox é simétrica com relação aos pares  $(a_1, \alpha_1), \dots, (a_n, \alpha_n)$  de  $(a_i, \alpha_i)_{i=1}^p$ ,  $(a_{n+1}, \alpha_{n+1}), \dots, (a_p, \alpha_p)$  de  $(a_i, \alpha_i)_{i=1}^p$ ,  $(b_1, \beta_1), \dots, (b_n, \beta_n)$  de  $(b_j, \beta_j)_{j=1}^q$  e  $(b_{m+1}, \beta_{m+1}), \dots, (b_q, \beta_q)$  de  $(b_j, \beta_j)_{j=1}^q$ .
2. **Representação na forma de série:** Podemos representar a função  $H$  de Fox pelas seguintes séries:

$$\begin{aligned}
 H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m \Gamma(b_j - (b_i + k)\beta_j/\beta_i)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + (b_i + k)\beta_j/\beta_i)} \times \\
 &\times \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - (b_i + k)\alpha_j/\beta_i)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - (b_i + k)\alpha_j/\beta_i)} \frac{(-1)^k z^{(b_i+k)/\beta_i}}{k! \beta_i}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Esta série é válida quando  $k \geq 0$ , as condições (i)-(iii) são válidas e  $B_k(b_j + l) \neq B_j(b_k + s)$ ,  $j \neq k$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, m$  e  $s = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
 H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^m \Gamma(1 - a_j - (a_i + k)\alpha_j/\alpha_i)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + (1 - a_i + k)\alpha_j/\alpha_i)} \times \\
 &\times \frac{\prod_{j=1}^n \Gamma(b_j - (a_i + k)\beta_j/\alpha_i)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - (1 - a_i + k)\beta_j/\alpha_i)} \frac{(-1)^k z^{-(1-a_i+k)/\beta_i}}{k! \alpha_i}. \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Esta série é válida quando  $k \leq 0$ , as condições (i) e (iii) são válidas e  $A_k(1 - a_j + l) \neq A_j(a_k + s)$ ,  $j \neq k$ ,  $j, k = 1, 2, \dots, m$  e  $s = 0, 1, \dots$

3. **Expansões assintóticas:** As expansões assintóticas para a função  $H$  de Fox foram estudadas em [5]. Sejam  $k$  e  $a$  como definidos anteriormente, se  $k > 0$  e  $a > 0$  temos

$$H_{p,q}^{m,n}(z) = \sum_{r=1}^n [h_r x^{(a_r-1)/A_r} + o(x^{(a_r-1)/A_r})], \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

onde

$$h_r = \frac{1}{A_r} \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + (1 - a_r)B_j/A_r) \prod_{j=1, j \neq r}^n \Gamma(1 - a_r - (1 - a_r)A_j/A_r)}{\prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - (1 - a_r)A_j/A_r) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - (1 - a_r)B_j/A_r)},$$

e se  $k > 0$  e  $a = 0$  temos

$$\begin{aligned} H_{p,q}^{m,n}(z) &= \sum_{r=1}^n [h_r x^{(a_r-1)/A_r} + o(x^{(a_r-1)/A_r})] \\ &\quad + Ax^{\nu+1/2}/\Delta (c_0 \exp[i(B + Cx^{1/\Delta})] - d_0 \exp[-i(B + Cx^{1/\Delta})]) \\ &\quad + o(x^{(\nu+1/2)/\Delta}), \quad |z| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= (2\pi i)^{m+n-p} \exp \left[ \pi i \left( \sum_{r=n+1}^p a_r - \sum_{j=1}^m b_j \right) \right], \\ d_0 &= (-2\pi i)^{m+n-p} \exp[-\pi i \left( \sum_{r=n+1}^p a_r - \sum_{j=1}^m b_j \right) \pi i], \\ A &= \frac{1}{2\pi i \Delta} (2\pi)^{(p-q+1)/2} \Delta^{-\nu} \prod_{r=1}^p A_r^{-a_r+1/2} \prod_{j=1}^q B_j^{b_j-1/2} \left( \frac{\Delta \Delta}{\delta} \right)^{(\nu+1/2)/\Delta}, \\ B &= \frac{(2\nu+1)\pi}{4}, \quad C = \left( \frac{\Delta \Delta}{\delta} \right)^{1/\Delta} \\ \delta &= \prod_{l=1}^p A^{A_l} \prod_{j=1}^q B_j^{B_j}, \quad \nu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{j=1}^p a_j + \frac{p-q}{2}. \end{aligned}$$

4. **Analiticidade:** A função  $H$  de Fox é analítica com respeito a variável  $z$ , quando ela satisfaz os casos de (i)-(viii). Citamos, por exemplo, o caso (i), em que ela é analítica no setor  $|\arg(z)| < a\pi/2$ , em que  $a$  é definido em (4.2).

5. **Redução de ordem:** A fórmula a seguir reduz a ordem da função  $H$  de Fox em relação aos parâmetros  $n$ ,  $p$  e  $q$ .

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q, (a_1, \alpha_1) \end{array} \right. \right] = H_{p-1,q-1}^{m,n-1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j, \alpha_j)_{j=2}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] \quad (4.7)$$

6. **Simetria:** Esta relação é dada para a inversão da variável  $z$  na função  $H$  de Fox. Isto nos possibilita, por exemplo, apresentar mais uma possibilidade de definir a função  $H$  de Fox.

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = H_{q,p}^{n,m} \left[ \frac{1}{z} \left| \begin{array}{l} (1 - b_k, \beta_k)_{k=1}^q \\ (1 - a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \end{array} \right. \right] \quad (4.8)$$

7. **Translação:** Esta relação nos possibilita a redução de um produto de uma função da forma  $f(z) = z^\gamma$ , onde  $\gamma \in \mathbb{R}$  com a função  $H$  de Fox em uma translação nos parâmetros  $a_j$  e  $b_k$ ,

$$z^\gamma H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j + \gamma\alpha_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k + \gamma\beta_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] \quad (4.9)$$

8. **Funções contíguas:** Apresentamos a seguir duas relações entre funções contíguas que aparecem de deslocamentos unitários nos parâmetros da função  $H$  de Fox:

$$\begin{aligned} & (b_1\alpha_1 - a_1\beta_1 + \beta_1) H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = \\ & = \beta_1 H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_1 - 1, \alpha_1), (a_j, \alpha_j)_{j=2}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] + \alpha_1 H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_1 + 1, \beta_1), (b_k, \beta_k)_{k=2}^q \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

e

$$\begin{aligned} & H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^{p-1}, (a_1 + \gamma, \alpha_1) \\ (a_1 + \gamma + 1, \alpha_1), (b_k, \beta_k)_{k=1}^{q-1} \end{array} \right. \right] = \\ & = (\gamma + 1) H_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=2}^{p-1} \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^{q-1} \end{array} \right. \right] - H_{p-1,q-1}^{m-1,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_1 - 1, \alpha_1), (a_j, \alpha_j)_{j=2}^{p-1} \\ (b_1 + 1, \beta_1), (b_k, \beta_k)_{k=2}^{q-1} \end{array} \right. \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para que estas relações sejam válidas, devemos ter  $m, n \geq 1$ .

9. **Diferenciação:** Relações de diferenciação para função  $H$  de Fox são como a seguir:

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^\sigma H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{l} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] \right\} = z^{\sigma-1} H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ z \left| \begin{array}{l} (-\sigma, 1), (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q, (1 - \sigma, 1) \end{array} \right. \right] \quad (4.12)$$

$$\frac{d^k}{dz^k} H_{p,q}^{m,n} \left[ (cz+d)^\sigma \left| \begin{array}{c} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = \frac{c^k}{(cz+d)^k} H_{p+1,q+1}^{m,n+1} \left[ (cz+d)^\sigma \left| \begin{array}{c} (0, \sigma), (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q, (k, \sigma) \end{array} \right. \right] \quad (4.13)$$

Para (4.13) ser válida, devemos ter  $\sigma > 0$ .

A fim de exemplificar, vamos verificar a relação dada em (4.12). Utilizando a propriedade de translação da função de Fox, **Propriedade 1**, temos:

$$z^\sigma H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j + \sigma\alpha_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k + \sigma\beta_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left\{ z^\sigma H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] \right\} &= \frac{d}{dz} \left\{ H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j + \sigma\alpha_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k + \sigma\beta_k, \beta_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] \right\} = \\ &= \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + \sigma\beta_k + \beta_k s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \sigma\alpha_j - \alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - \sigma\beta_k - \beta_k s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \sigma\alpha_j + \alpha_j s)} z^{-s} ds \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + \sigma\beta_k + \beta_k s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \sigma\alpha_j - \alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - \sigma\beta_k - \beta_k s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \sigma\alpha_j + \alpha_j s)} (-s) z^{-s-1} ds. \end{aligned}$$

Fazendo  $s \rightarrow s - 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + \sigma\beta_k + \beta_k(s-1)) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \sigma\alpha_j - \alpha_j(s-1))}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - \sigma\beta_k - \beta_k(s-1)) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \sigma\alpha_j + \alpha_j(s-1))} (1-s) z^{-s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + \sigma\beta_k - \beta_k + \beta_k s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \sigma\alpha_j + \alpha_j - \alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - \sigma\beta_k + \beta_k - \beta_k s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \sigma\alpha_j - \alpha_j + \alpha_j s)} (1-s) z^{-s} ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + \beta_k(\sigma - 1) + \beta_k s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \alpha_j(\sigma - 1) - \alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - \beta_k(\sigma - 1) - \beta_k s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \alpha_j(\sigma - 1) + \alpha_j s)} (1-s) z^{-s} ds$$

Agora, utilizando o símbolo de Pochhammer,  $(\beta)_n$ , encontramos a relação

$$(1-s) = (1-s)_1 = \frac{\Gamma(1 + (1-s))}{\Gamma(1-s)} = \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(1-s)} = \frac{\Gamma(2 + \sigma - \sigma - s)}{\Gamma(1 + \sigma - \sigma - s)} = \frac{\Gamma(1 + \sigma - (\sigma - 1) - s)}{\Gamma(\sigma - (\sigma - 1) - s)}$$

e substituímos este resultado,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b_k + \beta_k(\sigma - 1) + \beta_k s) \Gamma(1 + \sigma - (\sigma - 1) - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \alpha_j(\sigma - 1) - \alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^q \Gamma(1 - b_k - \beta_k(\sigma - 1) - \beta_k s) \Gamma(\sigma - (\sigma - 1) - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \alpha_j(\sigma - 1) + \alpha_j s)} z^{-s} ds.$$

Reordenamos os produtos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{k=1}^m \Gamma(b'_k + \beta'_k(\sigma - 1) + \beta'_k s) \prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(1 - a'_j - \alpha'_j(\sigma - 1) - \alpha'_j s)}{\prod_{k=m+1}^{q+1} \Gamma(1 - b'_k - \beta'_k(\sigma - 1) - \beta'_k s) \prod_{j=n+2}^{p+1} \Gamma(a'_j + \alpha'_j(\sigma - 1) + \alpha'_j s)} z^{-s} ds, \quad (4.14)$$

em que  $a'_1 = -\sigma$ ,  $\alpha'_1 = 1$  e  $a'_j = a_{j-1}$ ,  $\alpha'_j = \alpha_{j-1}$  para  $j = 2, \dots, n+1$ . Do mesmo modo,  $b'_k = b_k$ ,  $\beta'_k = \beta_k$  para  $k = 1, \dots, q$  e  $b'_{q+1} = \sigma - 1$ ,  $\beta'_{q+1} = 1$ , temos que (4.14) corresponde à função de Fox,

$$\begin{aligned} H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a'_j + (\sigma - 1)\alpha'_j, \alpha'_j)_{j=1}^{p+1} \\ (b'_k + (\sigma - 1)\beta'_k, \beta'_k)_{k=1}^{q+1} \end{array} \right. \right] &= z^{\sigma-1} H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a'_j, \alpha'_j)_{j=1}^{p+1} \\ (b'_k, \beta'_k)_{k=1}^{q+1} \end{array} \right. \right] \\ &= z^{\sigma-1} H_{p+1, q+1}^{m, n+1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (-\sigma, 1), (a_j, \alpha_j)_{j=1}^p \\ (b_k, \beta_k)_{k=1}^q, (\sigma, 1) \end{array} \right. \right] \square \end{aligned}$$

## 4.4 Casos particulares

Apresentamos nessa seção casos particulares da função  $H$  de Fox, dentre eles a função de Meijer, a função de Wright, a função de Mainardi e a função de Mittag-Leffler, esta última aparece com bastante frequência nos problemas de cálculo fracionário.

#### 4.4.1 A função $G$ de Meijer

Considerando  $\alpha_j$ , para  $j = 1, \dots, p$  e  $\beta_k$ , para  $k = 1, \dots, q$  iguais a 1, a função  $H$  de Fox coincide com a função  $G$  de Meijer. Ou seja, vale a relação

$$H_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j, 1)_{j=1}^p \\ (b_k, 1)_{k=1}^q \end{array} \right. \right] = G_{p,q}^{m,n} \left[ z \left| \begin{array}{c} (a_j)_{j=1}^p \\ (b_k)_{k=1}^q \end{array} \right. \right].$$

Desta relação é fácil notar que nem todas as funções que são casos particulares da função  $H$  de Fox podem ser expressas em termos da função  $G$  de Meijer. Podemos citar o caso em que  $\alpha_j$  e  $\beta_k$  são irracionais ou, como exemplo particular, a função de Mittag-Leffler.

#### 4.4.2 As funções de Mittag-Leffler

Introduzimos aqui as funções de Mittag-Leffler com suas respectivas representações em termos da função  $H$  de Fox. Iniciamos definindo a função de Mittag-Leffler com três parâmetros e representamos como casos particulares a clássica função de Mittag-Leffler e a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Definimos a função de Mittag-Leffler com três parâmetros conforme proposta em [120],

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(k\alpha + \beta)} \frac{z^k}{k!} \quad (4.15)$$

em que  $(\rho)_k$  é o símbolo de Pochhammer,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\rho) > 0$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e  $\text{Re}(\beta) > 0$ . Esta função generaliza a clássica função de Mittag-Leffler  $E_{\alpha}(z)$  e a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros  $E_{\alpha,\beta}(z)$ , ou seja, para  $\rho = \beta = 1$ , temos:

$$E_{\alpha,1}^1(z) = E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

e para  $\rho = 1$ ,

$$E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)},$$

podemos citar ainda como um caso particular  $\alpha = \rho = \beta = 1$ ,  $E_{1,1}^1(z) = e^z$  que equivale a função exponencial.

A forma integral da função de Mittag-Leffler com três parâmetros pode ser verificada quando substituimos  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $a_1 = 1 - \gamma$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1 - \beta$ ,

$\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = \alpha$  e  $z \rightarrow -z$  na integral de Mellin-Barnes para a função  $H$  de Fox,

$$H_{1,2}^{1,1} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (1 - \gamma, 1) \\ (0, 1); (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(\gamma - s)}{\Gamma(\beta - \alpha s)} (-z)^{-s} ds. \quad (4.16)$$

Calculando a integral no contorno contendo os polos de  $\Gamma(s)$  através do teorema dos resíduos e usando a seguinte relação,

$$(s + n)\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s + n + 1)}{(s + n - 1) \cdots s},$$

temos

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{s \rightarrow -n} \frac{(s + n)\Gamma(s)\Gamma(\gamma - s)}{\Gamma(\beta - \alpha s)} (-z)^{-s} = \lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Gamma(s + n + 1)\Gamma(\gamma - s)}{(s + n - 1) \cdots s\Gamma(\beta - \alpha s)} (-z)^{-s} \\ &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(\gamma + n)}{(-1)^n n! \Gamma(\beta + \alpha n)} (-z)^n = \frac{\Gamma(\gamma)(\gamma)_n z^n}{\Gamma(\beta + \alpha n)}, \end{aligned}$$

em que  $R_n$  é o resíduo calculado em cada polo. Assim, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \Gamma(\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma)_n z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} = \Gamma(\gamma) E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z).$$

Portanto,

$$E_{\alpha, \beta}^{\gamma}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} H_{1,2}^{1,1} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (1 - \gamma, 1) \\ (0, 1); (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right. \right] \quad (4.17)$$

e como caso particulares, encontramos as representações integrais das funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente,

$$E_{\alpha}(z) = H_{1,2}^{1,1} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (0, 1) \\ (0, 1); (0, \alpha) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1 - s)}{\Gamma(1 - \alpha s)} (-z)^{-s} ds \quad (4.18)$$

e

$$E_{\alpha, \beta}(z) = H_{1,2}^{1,1} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (1, 1) \\ (0, 1); (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1 - s)}{\Gamma(\beta - \alpha s)} (-z)^{-s} ds. \quad (4.19)$$

### 4.4.3 A função de Wright

Do mesmo modo como feito anteriormente se tomarmos agora  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $p = 1$ ,  $q = 2$ ,  $a_1 = 0$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 1 - \beta$ ,  $\beta_1 = 1$  e  $\beta_2 = \alpha$  e  $z \rightarrow -z$ , temos:

$$H_{1,2}^{1,1} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (0, 0) \\ (0, 1); (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\beta - \alpha s)} (-z)^s ds$$

de onde segue-se

$$H_{1,2}^{1,1} \left[ -z \left| \begin{array}{c} (0, 0) \\ (0, 1); (1 - \beta, \alpha) \end{array} \right. \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)} = W_{\alpha, \beta}(z) \quad (4.20)$$

que é conhecida como função de Wright.

Destas duas últimas relações fica claro, como havíamos mencionado anteriormente, que tanto a função de Wright quanto a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros não podem ser obtidas como casos particulares da função de Meijer.

#### 4.4.4 A função de Mainardi

Apresentamos aqui em termos da função de Fox, um caso particular da função de Wright bastante importante, que é encontrado no cálculo fracionário, para ser mais preciso, aparece naturalmente como solução da equação de difusão fracionária em relação ao tempo [93]. Este caso particular é conhecido como função de Mainardi definida por [91],

$$M_{\nu}(z) = W_{-\nu, 1-\nu}(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma[-\nu n + (1 - \nu)]}, \quad 0 < \nu < 1.$$

Esta função também é conhecida como função  $M$  de Wright. Sua representação em termos da função  $H$  de Fox é obtida fazendo  $-z \rightarrow z$ ,  $\alpha \rightarrow -\nu$  e  $\beta \rightarrow 1 - \nu$  em (4.20), logo

$$H_{1,2}^{1,1} \left[ z \left| \begin{array}{c} (0, 0) \\ (0, 1); (\nu, -\nu) \end{array} \right. \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma[-\nu n + (1 - \nu)]} = M_{\nu}(z).$$

---

# Cálculo fracionário

---

O cálculo fracionário tem seu início datado a partir de uma carta de l'Hospital para Leibniz em 1695. No entanto, por três séculos, a teoria do cálculo fracionário esteve restrita ao campo da Matemática pura. Apenas recentemente, tem-se verificado que as derivadas de ordem não inteira são eficientes para a descrição de fenômenos físicos e biológicos tais como elasticidade [14], reologia [15], dinâmica populacional [86] e processos difusivos [73, 91, 92, 109, 132]. Vamos apresentar neste capítulo uma breve introdução do cálculo fracionário, algumas definições e propriedades para derivada de ordem arbitrária. Destacamos aqui as definições de Riemann-Liouville e Caputo bem como a motivação de trabalhar com a derivada fracionária segundo Caputo nas nossas aplicações.

## 5.1 Introdução

Podemos dizer que o cálculo fracionário, ou para sermos mais precisos o cálculo de ordem arbitrária, surgiu quando G. A. l'Hospital escreveu para G. W. Leibniz perguntando qual o significado de  $\frac{d^n}{dx^n}$ , quando  $n = \frac{1}{2}$ . A sua resposta, em 30 de Setembro de 1695, em uma carta para l'Hospital foi que “ $d^{\frac{1}{2}}$  será igual a  $x\sqrt{dx} : x$ , um aparente paradoxo do qual um dia resultados importantes emergirão.”

Desde então muitos matemáticos vêm contribuindo para tal teoria, podemos citar, por exemplo, no século XVIII: Euler, em 1730, e Lagrange, em 1772. No século XIX: Laplace, em 1812; Lacroix, em 1819; Liouville, em 1832; Riemann, em 1847; Center, em 1848; Greer, em 1859; Holmgren, em 1865; Grünwald, em 1867; Letnikov, em 1868; Sonin, em 1869; Laurent,

em 1884; Nekrassov, em 1888; Krug, em 1890; Heaviside, em 1892. No século XX: Weyl, em 1917; Caputo, em 1969, dentre outros mais recentes [126].

Em 1819 Lacroix observou que

$$\frac{d^m}{dx^m} x^n = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}, \quad (5.1)$$

em que  $n \in \mathbb{N}$  e  $m \in \mathbb{N}_0$ ;  $n \geq m$ . Sendo  $n! = \Gamma(n+1)$  e  $(n-m)! = \Gamma(n-m+1)$ , Lacroix escreveu (5.1) em termos da função gama,

$$\frac{d^m}{dx^m} x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)!} x^{n-m}, \quad (5.2)$$

e então considerou  $m = \frac{1}{2}$  e  $n = 1$  para obter

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}}.$$

Riemann, ainda na graduação, também apresentou uma generalização para as derivadas e para a série de Taylor. Esta definição foi publicada em 1892 e definida por

$$\frac{d^{-\gamma}}{dx^{-\gamma}} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_c^x (x-k)^{\gamma-1} u(k) dk + \psi(x) \quad (5.3)$$

em que  $\psi(x)$  corresponde a uma função complementar que aparece na fórmula devido a ambiguidade do limite inferior  $c$ .

Em 1867 Grünwald definiu a diferintegração<sup>1</sup> em termos da seguinte série infinita:

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{[(x-a)/N]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-q)}{\Gamma(k+1)} f \left( x - k \left[ \frac{x-a}{N} \right] \right) \right\},$$

onde  $q$  é arbitrário. A definição acima foi generalizada por Post (1930) para a forma,

$$\frac{d^n f}{[d(x-a)]^n} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ (\delta x)^{-n} \sum_{k=0}^n (-1)^k f(x - k\delta x) \right\}.$$

Claro que várias outras definições importantes aparecem, mas vamos apresentar nas próximas seções algumas definições e propriedades, que serão trabalhadas aqui, e que aparecem com frequência em problemas atuais envolvendo o cálculo fracionário.

<sup>1</sup>Este termo diz respeito a: derivada se  $\text{Re}(q) > 0$  enquanto que a integral se  $\text{Re}(q) < 0$ .

## 5.2 Operadores fracionários de Riemann-Liouville

Em 1860, o estudo sobre operadores de integrais e derivadas fracionárias teve um crescimento considerável a partir de Riemann. Estes operadores eram essencialmente baseados na familiar fórmula integral de Cauchy. Dentre esses operadores, destacamos os apresentados por Sonin em 1869 e por Laurent em 1884. Este último, obteve o mesmo resultado proposto antes por Riemann. Estes foram os primeiros trabalhos relacionados diretamente com a definição de Riemann-Liouville [126].

### 5.2.1 Integrais fracionárias

Seja  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty < a < b < \infty$ ) um intervalo sobre o eixo real. As integrais fracionárias de Riemann-Liouville  $I_{a+}^\alpha f$  e  $I_{b-}^\alpha f$  de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $\text{Re}(\alpha) > 0$ ) são definidas por [79]

$$(I_{a+}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x > a; \text{Re}(\alpha) > 0). \quad (5.4)$$

e

$$(I_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (x < b; \text{Re}(\alpha) > 0). \quad (5.5)$$

respectivamente. Aqui  $\Gamma(\alpha)$  é a função gama. Estas integrais são chamadas integrais fracionárias à esquerda e à direita, respectivamente. Quando  $\alpha = n$  as integrais fracionárias (5.4) e (5.5) coincidem com as  $n$ -ésimas integrais da forma

$$(I_{a+}^n f)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

e

$$(I_{b-}^n f)(x) = \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{N}).$$

### 5.2.2 Derivadas fracionárias

As derivadas fracionárias de Riemann-Liouville  $D_{a+}^\alpha y$  e  $D_{b-}^\alpha y$  de ordem  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) \geq 0$  são definidas por

$$(D_{a+}^\alpha y)(x) := \left( \frac{d}{dx} \right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \quad (5.6)$$

com  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1; x > a$  e

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \quad (5.7)$$

com  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1; x < b$ . O símbolo  $[\operatorname{Re}(\alpha)]$  significa a parte inteira de  $\operatorname{Re}(\alpha)$ . No caso quando  $n \in \mathbb{N}_0$ , temos:  $(D_{a+}^0y)(x) = (D_{b-}^0y)(x) = y(x)$ ;  $(D_{a+}^ny)(x) = y^{(n)}(x)$  e  $(D_{b-}^ny)(x) = (-1)^ny^{(n)}(x)$ , em que  $y^{(n)}(x)$  corresponde a derivada da função  $y(x)$  de ordem  $n$ . No caso em que  $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ , as derivadas fracionárias ficam reduzidas à forma,

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)}{(x-t)^{\alpha-[\operatorname{Re}(\alpha)]}} dt \quad \text{com } x > a, \quad (5.8)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)}{(t-x)^{\alpha-[\operatorname{Re}(\alpha)]}} dt \quad \text{com } x < b. \quad (5.9)$$

No caso em que  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ , então (5.6) e (5.7) têm a seguinte forma:

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha] + 1; x > a) \quad (5.10)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\alpha] + 1; x < b), \quad (5.11)$$

enquanto que (5.8) e (5.9), para o caso  $0 < \alpha < 1$ , são dadas por:

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \quad \text{com } x > a \quad (5.12)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \quad \text{com } x < b. \quad (5.13)$$

Se  $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$  ( $\alpha \neq 0$ ), então (5.6) e (5.7) tornam-se derivadas fracionárias de ordem imaginária pura [112], isto é, temos

$$(D_{a+}^{i\theta}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{i\theta}} \quad \text{com } x > a, \quad (5.14)$$

e

$$(D_{b-}^{i\theta}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{i\theta}} \quad \text{com } x < b. \quad (5.15)$$

### 5.2.3 Propriedades

Apresentamos aqui algumas das principais propriedades das integrais e derivadas fracionárias de Riemann-Liouville.

**Propriedade 1:** Se  $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(\beta) > 0$ , então para  $f(x) \in L_p(a, b)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), valem as seguintes relações sobre o intervalo  $[a, b]$ :

$$(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(x) = I_{a+}^{\alpha-\beta} f(x) \quad \text{e} \quad (D_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f)(x) = I_{b-}^{\alpha-\beta} f(x).$$

Em particular, quando  $\beta = k \in \mathbb{R}$  e  $\operatorname{Re}(\alpha) > k$ ,

$$(D^k I_{a+}^{\alpha} f)(x) = I_{a+}^{\alpha-k} f(x) \quad \text{e} \quad (D^k I_{b-}^{\alpha} f)(x) = (-1)^k I_{b-}^{\alpha-k} f(x).$$

**Propriedade 2:** Seja  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $D = d/dx$ .

(a) Se as derivadas fracionárias  $(D_{a+}^{\alpha} y)(x)$  e  $(D_{b-}^{\alpha+m} y)(x)$  existem, então

$$(D^m D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} y)(x).$$

(b) Se as derivadas fracionárias  $(D_{b-}^{\alpha} y)(x)$  e  $(D_{b-}^{\alpha+m} y)(x)$  existem, então

$$(D^m D_{b-}^{\alpha} y)(x) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} y)(x).$$

Vamos agora definir as integrais e derivadas fracionárias de Riemann-Liouville sobre o semieixo real.

### 5.2.4 Integrais e derivadas fracionárias sobre $\mathbb{R}^+$

Nesta seção apresentamos as definições e algumas propriedades das integrais e a derivadas fracionárias de Riemann-Liouville sobre  $\mathbb{R}^+$ .

Usando as definições (5.4), (5.6) e a notação de Mainardi em [91], definimos a integral e a derivada fracionárias sobre o intervalo  $[0, \infty)$ , respectivamente, por:

(i) **Integral fracionária de ordem  $\nu$ :**

$$J_t^{\nu} f(t) = (I_{0+}^{\nu} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau \quad (t > 0; \nu \in \mathbb{C} \text{ e } \operatorname{Re}(\nu) > 0). \quad (5.16)$$

Note que esta integral é a mesma definida por Riemann sem a função complementar  $\psi(t)$ . A relação desta função com a integral fracionária pode ser vista com maior detalhes em [32].

(ii) **Derivada fracionária de ordem  $\beta$ :**

$$D_t^\beta f(t) = D^n [J_t^\nu f(t)] = \begin{cases} \frac{d^n}{dt^n} \left[ \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1-n}} \right], & n-1 < \operatorname{Re}(\beta) < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \beta = n. \end{cases} \quad (5.17)$$

em que  $\beta \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ ,  $n$  o menor inteiro maior que  $\operatorname{Re}(\beta)$  e  $\nu = n - \beta$ . Apresentamos a seguir algumas propriedades de (5.16) e (5.17). Note que o cálculo da derivada fracionária de ordem arbitrária de uma função  $f(x)$  é calculada do seguinte modo: primeiro, efetuamos a integração de ordem  $\nu$  de  $f(x)$ , onde  $\nu$  é definido acima e, em seguida, derivamos  $n$  vezes a função obtida após a integração. Vamos ver mais adiante o que acontece quando invertemos esta ordem.

**Propriedade 1:** Consideremos a função  $f(x) = x^{\beta-1}$ . Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$  e  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ . Temos que a integral e a derivada fracionárias de ordem  $\alpha$  são dadas, respectivamente, por:

$$J^\alpha x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} \quad \text{com } \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \text{ e } \operatorname{Re}(\beta) > 0,$$

e

$$D^\alpha x^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} \quad \text{com } \operatorname{Re}(\alpha) \geq 0 \text{ e } \operatorname{Re}(\beta) > 0.$$

**Propriedade 2:** Seja  $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)$  e  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ , temos:

$$D^\alpha J^\alpha f(x) = f(x).$$

Esta propriedade mostra que o operador derivada de ordem  $\alpha$  é o operador inverso à esquerda do operador integral  $\alpha$ . Se aplicarmos este mesmo operador à direita do operador integral não necessariamente vamos obter o operador identidade [32].

**Propriedade 3:** Sejam  $\alpha > \beta > 0$  e  $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)$ , temos:

$$D^\beta J^\alpha f(x) = J^{\alpha-\beta} f(x).$$

Em particular, quando  $\beta = k \in \mathbb{N}$  e  $\operatorname{Re}(\alpha) > k$ , obtemos

$$D^k J^\alpha f(x) = J^{\alpha-k} f(x).$$

**Propriedade 4:** Sejam  $\alpha > 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  e  $D = d/dx$ . Se as derivadas fracionárias  $D^\alpha f(x)$  e  $D^{\alpha+m} f(x)$  existem, então,

$$D^m D^\alpha f(x) = D^{\alpha+m} f(x).$$

**Propriedade 5:** Seja  $f(t)$  definida em  $\mathbb{R}^+$  satisfazendo as condições para que exista a transformada de Laplace. A transformada de Laplace da sua derivada fracionária de ordem  $\alpha$  em que  $n - 1 \leq \alpha < n$  é dada por:

$$(\mathcal{L}[D_t^\alpha]f(t))(s) = s^\alpha (\mathcal{L}[f(t)])(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k (D_t^{\alpha-k-1} f)(0). \quad (5.18)$$

Nesta equação, a transformada de Laplace está relacionada com condições iniciais dadas em termos das derivadas de ordem não inteira. Isso pode nos trazer problemas no uso desta derivada em aplicações físicas, já que, em geral, as condições iniciais dos problemas físicos são dadas em relação as derivadas de ordem inteira. Assim, diante desse dilema, justifica-se a necessidade da definição a seguir.

### 5.3 Derivada fracionária de Caputo

Ao trabalharmos com a derivada fracionária no sentido de Riemann-Liouville, notamos que alguns resultados indesejados estão acoplados em tal definição. Podemos citar, por exemplo, o fato de a derivada fracionária de uma constante nem sempre ser zero e o fato de necessitarmos de condições iniciais de ordem não inteira, quando usamos a transformada de Laplace em problemas envolvendo esta derivada. Diante disso, surge outra definição para a derivada fracionária. Esta definição foi dada por Caputo e aparece pela primeira vez em seu trabalho sobre viscoelasticidade [14]. Atualmente, esta derivada é conhecida como derivada fracionária no sentido de Caputo.

Usando a notação adotada por Mainardi em [91], definimos a derivada de Caputo de ordem  $\beta$ , com  $\text{Re}(\beta) > 0$  da seguinte forma,

$${}_t^* D_t^\beta f(t) = J_t^\nu [D^n f(t)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta+1-n}} d\tau, & n-1 < \text{Re}(\beta) < n, \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t), & \beta = n. \end{cases} \quad (5.19)$$

em que  $\beta \in \mathbb{C}$ , com  $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ ,  $n$  o menor inteiro maior que  $\operatorname{Re}(\beta)$  e  $\nu = n - \beta$  e  $D^n$  corresponde ao operador derivada de ordem  $n$ .

As derivadas de Riemann-Liouville e Caputo têm comportamento diferente no limite  $\beta \rightarrow (n - 1)^+$ . Para este limite, temos os seguintes comportamentos destas derivadas:

$$D_t^\beta f(t) \rightarrow D_t^n J_t^1 f(t) = D_t^{(n-1)} f(t)$$

e

$$*D_t^\beta f(t) \rightarrow J_t^1 D_t^n f(t) = D_t^{(n-1)} f(t) - D_t^{(n-1)} f(0^+),$$

onde o limite para  $t \rightarrow 0^+$  é tomado após a operação da derivada.

Uma relação entre as duas derivadas (Caputo e Riemann-Liouville) é dada por [91], pela definição da derivada de Caputo, temos:

$$D_t^\beta \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+) \right] = *D_t^\beta f(t).$$

Nesta relação podemos notar que a definição de Caputo para a derivada fracionária incorpora os valores iniciais da função e suas derivadas inteiras de menor ordem. A subtração do polinômio de Taylor de grau  $n - 1$  em  $t = 0^+$  da função é um tipo de regularização da derivada fracionária. Em particular, conforme esta definição, a relevante propriedade que a derivada de uma constante é zero é preservada para a derivada fracionária.

### 5.3.1 Propriedades

Apresentamos a seguir algumas propriedades da derivada de Caputo, as quais são bastante utilizadas nos problemas envolvendo o cálculo fracionário.

**Propriedade 1:** Seja  $f(t) = t^\mu$ ,  $\mu > -1$  e  $\mu \neq 0$ , temos:

$$*D_t^\beta t^\mu = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \beta + 1)} t^{\mu - \beta}, \quad (5.20)$$

em que  $\beta > 0$ . Para o caso de  $f(t) = k$  onde  $k$  é uma constante, usando a definição,

$$*D_t^\beta k = 0. \quad (5.21)$$

**Propriedade 2:** Seja  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  e seja  $f(t)$  contínua. Então,

$$*D_t^\alpha J_t^\alpha f(t) = f(t).$$

**Propriedade 3:** Seja  $\text{Re}(\alpha) > 0$  e se existe a derivada de  $f(t)$  de ordem  $m \in \mathbb{N}$  temos que

$${}_t D_t^\alpha (D_t^m f(t)) = {}_t D_t^{\alpha+m} f(t). \quad (5.22)$$

**Propriedade 4:** Seja  $f(t) \in C^1[0, T]$  para algum  $T > 0$ . Então

$${}_t D_t^\alpha ({}_t D_t^\beta f(t)) = {}_t D_t^\beta ({}_t D_t^\alpha f(t)) = {}_t D_t^{\alpha+\beta} f(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.23)$$

em que  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  e  $\alpha + \beta \leq 1$ . Esta última condição é necessária. Sem esta condição, citamos o seguinte contra-exemplo:

$${}_t D_t^{0.5} ({}_t D_t^{0.6} t) = \frac{1}{\Gamma(0.9)} t^{-0.1} \neq {}_t D_t^{1.1} t = 0.$$

Com efeito, explicitamente,

$${}_t D_t^{0.6} t = \frac{1}{\Gamma(0.4)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{0.6}} d\tau = \frac{1}{\Gamma(0.4)} \left[ -\frac{(t-\tau)^{0.4}}{0.4} \right]_0^t = \frac{1}{\Gamma(0.4)} \frac{t^{0.4}}{0.4}.$$

Calculando agora  ${}_t D_t^{0.5} ({}_t D_t^{0.6} t)$ , temos:

$${}_t D_t^{0.5} ({}_t D_t^{0.6} t) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{1}{\Gamma(0.4)} \int_0^t \frac{\tau^{-0.6}}{(t-\tau)^{0.5}} d\tau.$$

Para o cálculo desta integral fazemos a seguinte mudança de variável  $\tau = ut$  e obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(ut)^{-0.6} t du}{(t-tu)^{0.5}} &= \int_0^1 \frac{u^{-0.6}}{t^{0.1}(1-u)^{0.5}} du = \frac{1}{t^{0.1}} \int_0^1 u^{-0.6}(1-u)^{-0.5} du = \\ &= \frac{1}{t^{0.1}} \int_0^1 u^{0.4-1}(1-u)^{0.5-1} du = \frac{1}{t^{0.1}} B(0.4, 0.5) = \frac{1}{t^{0.1}} \frac{\Gamma(0.4)\Gamma(0.5)}{\Gamma(0.9)}, \end{aligned}$$

onde  $B(x, y)$  corresponde à função beta. Assim substituindo o valor da integral, obtemos o resultado procurado, ou seja,  ${}_t D_t^{0.5} ({}_t D_t^{0.6} t) = \frac{1}{\Gamma(0.9)} t^{-0.1}$ .

Agora, se usamos a definição, dada por (5.19), para calcular  ${}_t D_t^{1.1} t$ , obtemos:

$${}_t D_t^{1.1} t = \frac{1}{\Gamma(0.9)} \int_0^t \frac{t''}{(t-\tau)^{0.1}} d\tau = 0,$$

de onde segue-se que  ${}_t D_t^{0.5} ({}_t D_t^{0.6} t) \neq {}_t D_t^{1.1} t$ .

**Propriedade 5:** Seja  $f(t) \in C^m[0, T]$  para  $T > 0$ , então

$${}_t D_t^\alpha = {}_t D_t^{\alpha_n} \cdots {}_t D_t^{\alpha_1} f(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.24)$$

em que  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $\alpha_i \in (0, 1]$ ,  $m - 1 \leq \alpha < m \in \mathbb{N}$  e existe um  $i_k < n$  tal que  $\sum_{j=1}^{i_k} \alpha_j = k$ , com  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ . Esta propriedade nos possibilita, por exemplo, uma redução de ordem de um sistema de equações diferenciais de ordem fracionária<sup>2</sup>.

**Propriedade 6:** Seja  $\alpha > 0$ ,  $n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$  tal que  $f(t) \in C^n(\mathbb{R}^+)$ ,  $f(t) \in L_1(0, b)$ , para algum  $b > 0$ , supondo que a transformada de Laplace de  $f(t)$  e  $f^n(t)$  existem e  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (D^k f)(t) = 0$  para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ , temos:

$$(\mathfrak{L}[*_D_t^\alpha f(t)])(s) = s^\alpha (\mathfrak{L}[f(t)])(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (D^k f)(0). \quad (5.25)$$

Em particular, se  $0 < \alpha < 1$ ,

$$(\mathfrak{L}[*_D_t^\alpha f(t)])(s) = s^\alpha (\mathfrak{L}[f(t)])(s) - s^{\alpha-1} f(0). \quad (5.26)$$

Note que, enquanto a transformada de Laplace da derivada fracionária de Riemann-Liouville está relacionada com condições iniciais fracionárias, ou seja, as suas derivadas fracionárias aplicadas em  $t \rightarrow 0$ , a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo está relacionada com as condições iniciais dadas pelas derivadas de ordem inteira da função. Lembrando que, em geral, as aplicações físicas têm suas condições iniciais dadas em termos de derivadas de ordem inteira e além disso, como a transformada de Laplace é uma ferramenta bastante utilizada na resolução de problemas aplicados, a escolha da derivada segundo Caputo para modelar problemas físicos é a mais compatível diante desses argumentos.

## 5.4 Integral fracionária de Weyl

Definimos a integral de Weyl de ordem  $\alpha$  com  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , denotada aqui por  ${}_x W_\infty^\alpha$ , através de [105]:

$${}_x W_\infty^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (5.27)$$

<sup>2</sup>As propriedades 4 e 5 da derivada de Caputo são apresentadas como teoremas em [85].

### 5.4.1 Propriedades

**Propriedade 1:** Dadas as funções reais  $\psi(x)$  e  $\varphi(x)$ , a seguinte igualdade é válida:

$$\int_0^\infty \varphi(x)(J_x^\alpha \psi(x))dx = \int_0^\infty \varphi(x)({}_xW_\infty^\alpha \psi(x))dx. \quad (5.28)$$

Esta equação é chamada a fórmula para integral fracionária por partes. Também é chamada como identidade de Parseval. Ela pode ser estabelecida intercalando a ordem de integração.

**Propriedade 2:** A integral de Weyl obedece a propriedade de semigrupo, ou seja,

$${}_xW_\infty^\alpha {}_xW_\infty^\beta f(x) = {}_xW_\infty^{\alpha+\beta} f(x) = {}_xW_\infty^\beta {}_xW_\infty^\alpha f(x). \quad (5.29)$$

**Propriedade 3:** Seja  $f(x) = e^{-\lambda x}$ , com  $\lambda > 0$ , temos que a integral de Weyl de  $f(x)$  vale,

$${}_xW_\infty^\alpha f(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^\alpha}. \quad (5.30)$$

**Propriedade 4:** Seja  $E_{\beta,\gamma}^\delta(\cdot)$  a função de Mittag-Leffler de três parâmetros onde  $\delta, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ , com  $\min\{\text{Re}(\delta), \text{Re}(\beta), \text{Re}(\gamma)\} > 0$ , temos:

$${}_xW_\infty^\alpha {}_x[x^{-\alpha-\gamma} E_{\beta,\gamma}^\delta(ax^{-\beta})] = x^{-\gamma} E_{\beta,\gamma+\alpha}^\delta(ax^{-\beta}). \quad (5.31)$$

## 5.5 Derivada de Riesz

Definimos a derivada de Riesz de ordem  $\alpha$  da seguinte forma

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = -\frac{1}{2 \cos(\alpha\pi/2)} \{I_+^{-\alpha} f(x) + I_-^{-\alpha} f(x)\}, \quad (5.32)$$

com  $I_\pm^{-\alpha} = (\pm 1)^m D_\pm^\alpha$ ,  $m - 1 < \alpha < m$ , onde esta derivada é definida por

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

e

$$(D_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (\xi - x)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi$$

Uma das principais propriedades desta derivada é a sua transformada de Fourier. Esta propriedade é definida pela relação a seguir:

$$\mathfrak{F}[(-\Delta)^{\alpha/2} f(x); v] = |v|^\alpha F(v) \quad (5.33)$$

onde  $F(v)$  corresponde a transformada de Fourier de  $f(x)$ .

Uma relação que podemos descrever para esta derivada é sua relação com os potenciais de Riesz de  $f$  de ordem  $\alpha$ . O potencial de Riesz de ordem  $\alpha$  é definido por [115]

$$R^\alpha f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{|x-u|^{1-\alpha}} du \quad (5.34)$$

onde  $0 < \alpha < 1$ . Associado a este, temos o potencial de Riesz conjugado de ordem  $\alpha$  definido por

$$\tilde{R}^\alpha f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign}(x-u)f(u)}{|x-u|^{1-\alpha}} du. \quad (5.35)$$

Uma condição apropriada, por exemplo, para que os potenciais existam é  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ . Podemos citar neste caso duas relações a seguir com  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  e  $\alpha + \beta < 1$ :

$$R^\alpha R^\beta f = R^{\alpha+\beta} f \quad \text{e} \quad \tilde{R}^\alpha \tilde{R}^\beta f = -R^{\alpha+\beta} f.$$

Usamos a transformada de Fourier para encontrar algumas relações envolvendo tais potenciais. Para isto iniciamos com a seguinte relação,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ivu}}{|u|^{1-\alpha}} du = 2|v|^{-\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{u^{1-\alpha}} du = 2|v|^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \cos \frac{\pi\alpha}{2} \quad (5.36)$$

Aplicando a transformada de Fourier em (5.34) e pelo teorema de convolução, obtemos o resultado a seguir:

$$\mathfrak{F}[R^\alpha f(x); v] = |v|^{-\alpha} F(v), \quad (5.37)$$

em que  $F(v)$  corresponde a transformada de Fourier de  $f(x)$ . Calculamos agora, a transformada de Fourier de (5.35),

$$\mathfrak{F}[\tilde{R}^\alpha f(x); v] = -i(\text{sign}v)|v|^{-\alpha} F(v). \quad (5.38)$$

Aplicamos também a transformada de Fourier nas derivadas dos potenciais de Riesz e obtemos

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d}{dx} R^{1-\alpha} f(x); v\right] = (iv)|v|^{\alpha-1} F(v) = i(\text{sign}v)|v|^\alpha F(v) \quad (5.39)$$

e

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d}{dx} \tilde{R}^{1-\alpha} f(x); v\right] = (iv)(-i \text{sign}v)|v|^{\alpha-1} F(v) = |v|^\alpha F(v). \quad (5.40)$$

Se compararmos (5.33) e (5.40), podemos tomar  $\frac{d}{dx} \tilde{R}^{1-\alpha}$  para definir a derivada de Riesz de ordem  $\alpha$ , ou usar a relação encontrada para descrever tal derivada, ou seja, [8].

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivx} |v|^\alpha F(v) dv, \quad (5.41)$$

onde  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  é o Laplaciano e  $F(v)$  é a transformada de Fourier de  $f(x)$ . Mencionamos ainda que, a derivada de Riesz é também chamada de Laplaciano fracionário.<sup>3</sup>

## 5.6 Derivada fracionária de Grünwald-Letnikov

A definição da derivada de Grünwald-Letnikov está baseada na seguinte relação para a derivada de ordem inteira  $n$  de uma função  $y$  escrita da forma:

$$y^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^n y)(x)}{h^n} \quad (5.42)$$

em que  $(\Delta_h^n y)(x)$  é uma diferença finita de ordem  $n \in \mathbb{N}_0$  de uma função  $y(x)$  com passo  $h \in \mathbb{R}$  e centrada no ponto  $x \in \mathbb{R}$ .

Afim de construímos a derivada fracionária no sentido de Grünwald-Letnikov, fazemos as seguintes alterações em (5.42): trocamos  $n \in \mathbb{N}_0$  por  $\alpha > 0$  real,  $h^n$  por  $h^\alpha$  e substituímos  $(\Delta_h^n y)(x)$  por  $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ , chamada de diferença de ordem fracionária e definida por,

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} y(x - kh) \quad x, h \in \mathbb{R}; \alpha > 0, \quad (5.43)$$

com

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (5.44)$$

Assim, com estas substituições, obtemos a derivada fracionária de ordem  $\alpha$  no sentido de Grünwald-Letnikov, expressa por

$$y^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha}. \quad (5.45)$$

Em relação a (5.43), quando  $h > 0$  a diferença é chamada diferença à esquerda e quando  $h < 0$ , a diferença é chamada diferença à direita. Além disso, a série converge absoluta e uniformemente para cada  $\alpha > 0$  e qualquer função limitada  $y(x)$  [79].

Esta derivada vem sendo utilizada em diversas aplicações, em especial, aquelas que surgem no campo da engenharia. Isto vem sendo realizado devido a uma melhor descrição em problemas mais complexos e o uso das suas principais características, que são a forma explícita para o cálculo da derivada fracionária e o efeito de memória. Este último, caracteriza o fato de o operador ser não local, ou seja, valores distantes do ponto analisado, também

<sup>3</sup>Com esta definição podemos generalizar a derivada de Riesz para dimensões maiores.

influenciam no comportamento do fenômeno. Destacamos seu uso computacional, uma vez que, como colocamos antes, a derivada fracionária pode ser calculada numericamente, devido a sua forma explícita em função dos valores de  $y(x)$ .

---

# Aplicações

---

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações do cálculo fracionário relacionadas com a função de Fox. Ressaltamos que tais resultados, conforme [12, 20], são objeto de pesquisa da função  $H$  de Fox em problemas advindos do cálculo fracionário.

## 6.1 Equação do telégrafo fracionária

A clássica equação do telégrafo é uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes definida pela seguinte expressão

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + au_t + bu = 0, \quad u = u(x, t)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são constantes reais. Esta equação aparece em problemas de reação difusão e análise de sinais por propagação de sinais elétricos em cabo de linhas transmissão. Tanto a corrente como a voltagem satisfazem a equação do telégrafo. Citamos ainda o seu aparecimento na propagação de ondas de pressão e no estudo do fluxo sanguíneo em artérias. A equação do telégrafo é um modelo apropriado, por exemplo, para descrever certos problemas envolvendo fluidos suspensão.

A equação do telégrafo fracionária tem sido estudada por muitos autores. Por exemplo, Orsingher e Beghin [113, 114] discutiram a equação do telégrafo com movimento Browniano e a equação tempo-fracionária do telégrafo, mostrando que alguns processos são governados pela equação tempo-fracionária do telégrafo. Chen et al. [21] também discutiram e derivaram a solução da equação tempo-fracionária do telégrafo com três diferentes condições de

contorno pelo método de separação de variáveis. Momani [107] discutiu as soluções analíticas e aproximadas da equação espaço e tempo fracionárias do telégrafo com o uso do chamado método de decomposição de Adomian. Camargo et al. [34] discutiram a também chamada equação geral espaço-tempo fracionário do telégrafo pelos métodos do cálculo diferencial e integral, discutindo a solução pela metodologia das transformadas integrais, em particular, pelas transformadas de Laplace e Fourier nas variáveis temporal e espacial, respectivamente.

Aqui nesta seção apresentamos um estudo da equação espaço e tempo fracionárias do telégrafo tridimensional definida da seguinte maneira

$$aD_t^{2\alpha}u + bD_t^\beta u = -\mathcal{K}(-\Delta)^\gamma u, \quad t > 0; \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (6.1)$$

com  $D \equiv \partial/\partial t$ ,  $1/2 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < \beta \leq 1$  e  $0 < \gamma \leq 1$ , com  $u = u(t, x; \alpha, \beta, \gamma)$  e  $x = x(x_1, x_2, x_3)$ . Aqui  $(-\Delta)^\gamma$  denota o operador de Laplace fracionário [17]. Ainda mais,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{K}$  uma constante física real,  $t$  é a variável temporal e  $x$  é a variável espacial. No caso particular de  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , recuperamos a clássica equação do telégrafo. Assim (6.1) pode ser considerada como uma possível generalização da clássica equação do telégrafo. Aqui, não estamos preocupados com as unidades físicas [75].

Admitamos as condições iniciais e de contorno

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x; \alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad \text{e} \quad D_t^k u(t, x; \alpha, \beta, \gamma) = f_k(x),$$

respectivamente, para  $k = 0, 1$ .

As derivadas fracionárias consideradas são a derivada fracionária temporal no sentido de Caputo e a derivada espacial fracionária no sentido de Riesz. Para encontrar a solução do nosso problema de valor inicial e de contorno fracionário, aplicamos inicialmente a transformada de Fourier em (6.1) e usamos a relação [17]

$$\mathfrak{F}[(-\Delta)^\gamma u(t, x; \alpha, \beta, \gamma); \omega] = |\omega|^{2\gamma} \mathfrak{F}[u(t, x; \alpha, \beta, \gamma); \omega]$$

onde  $\omega$  é o parâmetro associado à transformada de Fourier, de onde obtemos uma outra equação diferencial fracionária

$$aD_t^{2\alpha}\hat{u} + bD_t^\beta\hat{u} = -\mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}\hat{u} \quad (6.2)$$

satisfazendo as condições iniciais  $D_t^k \hat{u}(t, \omega, \alpha, \beta, \gamma) = F_k(\omega)$  com  $k = 0, 1$ . Nesta equação temos que  $\hat{u} = \hat{u}(t, \omega; \alpha, \beta, \gamma)$  é a transformada de Fourier de  $u = u(t, x; \alpha, \beta, \gamma)$  e  $F_k(\omega)$  é a transformada de Fourier de  $f_k(x)$ .

Então, tomando a transformada de Laplace em (6.2) e usando as condições iniciais, obtemos uma equação algébrica cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} a\{p^{2\alpha}\widehat{U} - \sum_{k=0}^1 p^{2\alpha-k-1}(D_t^k\widehat{u})(0)\} + b\{p^\beta\widehat{u} - p^{\beta-1}\widehat{u}(0)\} &= -\mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}\widehat{U} \\ a\{p^{2\alpha}\widehat{U} - p^{2\alpha-1}\widehat{u}(0) - p^{2\alpha}(D_t'\widehat{u}(0))\} + b\{p^\beta - p^{\beta-1}\widehat{u}(0)\} &= -\mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}. \end{aligned}$$

Sendo  $\widehat{u}(0) = F_0(\omega)$  e  $D_t'\widehat{u}(0) = F_1(\omega) = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} a\{p^{2\alpha}\widehat{U} - p^{2\alpha-1}F_0(\omega)\} + b\{p^\beta\widehat{U} - p^{\beta-1}F_0(\omega)\} &= -\mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}\widehat{U} \\ (ap^{2\alpha} + bp^\beta + \mathcal{K}|\omega|^{2\gamma})\widehat{U} &= (ap^{2\alpha-1} + bp^{\beta-1})F_0(\omega) \\ \widehat{U}(p, \omega; \alpha, \beta, \gamma) &= F_0(\omega) \frac{ap^{2\alpha-1} + bp^{\beta-1}}{ap^{2\alpha} + bp^\beta + \mathcal{K}|\omega|^{2\gamma}} \end{aligned}$$

onde  $p$  é o parâmetro da transformada de Laplace e  $\widehat{U}(p, \omega; \alpha, \beta, \gamma)$  é a justaposição da transformada inversa de  $u(t, x; \alpha, \beta, \gamma)$ . Para obter a última expressão usamos as condições

$$u(0, x; \alpha, \beta, \gamma) = f_0(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{u}(0, \omega; \alpha, \beta, \gamma) = F_0(\omega)$$

e

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u(t, x; \alpha, \beta, \gamma) \right|_{t=0} = f_1(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(t, \omega; \alpha, \beta, \gamma) \right|_{t=0} = F_1(\omega) = 0.$$

Agora, devemos proceder com a inversão. Tomando a correspondente transformada de Laplace inversa, podemos escrever [33]

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t, \omega; \alpha, \beta, \gamma) &= F_0(\omega) \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r t^{(2\alpha-\beta)r} E_{2\alpha, (2\alpha-\beta)r+1}^{r+1} \left(-\frac{\mathcal{K}}{a} |\omega|^{2\gamma} t^{2\alpha}\right) \\ &+ \frac{b}{a} F_0(\omega) \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r t^{(2\alpha-\beta)(r+1)} E_{2\alpha, (2\alpha-\beta)(r+1)+1}^{r+1} \left(-\frac{\mathcal{K}}{a} |\omega|^{2\gamma} t^{2\alpha}\right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

com  $\text{Re}(\alpha) > 1/2$ ,  $\text{Re}(\beta) > 0$ ,  $\text{Re}(s) > 0$ ,  $\alpha > \beta$ ,  $|b s^\beta / (a s^\alpha + \mathcal{K}|\omega|^{2\gamma})| < 1$  e  $E_{\alpha, \beta}^\gamma(z)$  é a função de Mittag-Leffler com três parâmetros.

Podemos reescrever (6.3) na forma

$$\widehat{u}(t, \omega; \alpha, \beta, \gamma) = F_0(\omega) \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r \left\{ \mathcal{E}_{2\alpha, \mu r+1}^{r+1}(t, \omega; \gamma) + \frac{b}{a} \mathcal{E}_{2\alpha, \mu(r+1)+1}^{r+1}(t, \omega; \gamma) \right\}$$

onde definimos o parâmetro  $\mu = 2\alpha - \beta$  e  $\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^\rho(t, y, \gamma) \equiv t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}^\rho(-\mathcal{K}|y|^\gamma t^\alpha)$  é uma função do tipo Mittag-Leffler.

Para calcular a respectiva transformada de Fourier inversa, levamos em conta o teorema de convolução, logo,

$$u(t, x; \alpha, \beta, \gamma) \equiv \mathfrak{F}^{-1}[\widehat{u}(t, \omega; \alpha, \beta, \gamma); \omega] = \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\xi) \mathcal{G}(t; x - \xi) d\xi$$

onde a função  $\mathcal{G}(t, x)$ , como no caso inteiro, é conhecida como solução fundamental, que é dada por

$$\mathcal{G}(t; x) = \widehat{\mathcal{E}}_{2\alpha, \mu r+1}^{r+1}(t, x; \gamma) + \frac{b}{a} \widehat{\mathcal{E}}_{2\alpha, \mu(r+1)+1}^{r+1}(t, x; \gamma),$$

a qual pode ser escrita em termos da função  $H$  de Fox, como abaixo

$$u(t, x; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}|x|)^3} \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{b}{a}\right)^r \frac{t^{\mu r}}{r!} \int_{\mathbb{R}^3} F_0(\xi) \mathfrak{H}_{2,3}^{2,1}(x - \xi) d\xi$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{2,3}^{2,1}(x) &= H_{2,3}^{2,1} \left( \frac{a|x|^{2\gamma}}{2^{2\gamma} \mathcal{K} t^{2\alpha}} \left| \begin{array}{l} (1, 1), (\mu r + 1, 2\alpha) \\ (r + 1, 1), (\frac{3}{2}, \gamma), (1, \gamma) \end{array} \right. \right) \\ &+ \frac{b}{a} t^{\mu} H_{2,3}^{2,1} \left( \frac{a|x|^{2\gamma}}{2^{2\gamma} \mathcal{K} t^{2\alpha}} \left| \begin{array}{l} (1, 1), [\mu(r + 1) + 1, 2\alpha] \\ (r + 1, 1), (\frac{3}{2}, \gamma), (1, \gamma) \end{array} \right. \right) \end{aligned}$$

com  $\mu = 2\alpha - \beta$ .

Nessa aplicação, apresentamos uma generalização associada a equação do telégrafo e sua solução dada em termos da função  $H$  de Fox. Esta solução é obtida através do uso das transformadas de Fourier e Laplace e suas inversas. A solução encontrada também abrange a clássica solução do telégrafo e nos possibilita uma melhor compreensão dos problemas envolvendo o cálculo fracionário.

## 6.2 Equação de Schrödinger fracionária

Na mecânica quântica, o comportamento de uma partícula que se espalha em um campo de forças potenciais é descrito pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi + V(x, t) \psi$$

onde  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$  erg.seg é a constante de Planck,  $\mu$  é a massa de uma partícula,  $V$  a energia potencial em um campo de forças e  $\psi(x, t)$  é a função de onda. A função de onda

$\psi$  nos fornece o estado da partícula em um instante  $t$  e a densidade de probabilidade de encontrarmos a partícula na posição  $x$  e no instante  $t$ , isto é, nos fornece a probabilidade de localizar uma partícula em uma região  $a \leq x \leq b$  no instante  $t$ .

Recentemente, o estudo das equações integro diferenciais aplicadas à física e outras áreas tem crescido consideravelmente. Por exemplo, em [108] os autores discutiram a equação integrodiferencial com a integral tempo-fracionário; em [106] foi estudado equações diferenciais parciais com derivadas tempo-fracionário, e em [28] é apresentada uma discussão envolvendo equações diferenciais parciais tempo e espaço fracionárias cujas soluções são dadas em termos da função  $H$  de Fox. Ainda, recentemente a equação de Langevin fracionária generalizada foi proposta para discutir o comportamento difusivo e anômalo de um oscilador hamônico dado pela função de Mittag-Leffler de dois parâmetros [35] que é um caso particular da função  $H$  de Fox.

Aqui, discutimos a equação de Schrödinger fracionária (ESF) como introduzida por Laskin em [82, 83], a qual foi obtida no contexto da aproximação das integrais de caminho. Nesta aproximação, as integrais de caminho são definidas sobre trajetórias dos voos de Lévy, que é uma natural generalização do movimento Browniano [82, 111].

Existem vários artigos na literatura estudando soluções da ESF, dentre os quais podemos citar, por exemplo, [68, 88, 127]. Porém, recentemente Jeng et al. [77] mostram que algumas afirmações para solucionar a ESF não foram levadas em consideração, em particular, o fato de que a derivação fracionária é uma operação não local. Como uma consequência, todas essas tentativas baseadas nas aproximações locais estão intrinsicamente erradas.

Jeng et al. apontaram que somente uma delas é correta [25], aquela envolvendo o potencial delta. Porém, em [25] a ESF com o potencial delta foi estudada somente no caso de energias negativas. Nosso principal objetivo é resolver a ESF para o potencial delta para todas as energias, e generalizar esta aproximação para o potencial delta duplo, expressando as soluções em termos da função  $H$  de Fox.

### 6.2.1 Equação de Schrödinger fracionária espacial

Definimos a equação de Schrödinger fracionária por,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = D_\alpha (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t), \quad (6.4)$$

em que  $D_\alpha$  é uma constante,  $\Delta = \partial_x^2$  é o Laplaciano,  $V(x)$  é o potencial e  $(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}$  é a derivada fracionária no sentido de Riesz, isto é,

$$(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar} |p|^\alpha \phi(p, t) dp,$$

em que  $\phi(p, t)$  é a transformada de Fourier da função de onda,

$$\phi(p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx/\hbar} \psi(x, t) dx,$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar} \phi(p, t) dp.$$

A ESF independente do tempo é

$$D_\alpha(-\hbar^2\Delta)^{\alpha/2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

onde  $E$  é uma constante, a energia.

Na representação de momento, esta equação é escrita como

$$D_\alpha |p|^\alpha \phi(p) + \frac{(W * \phi)(p)}{2\pi\hbar} = E\phi(p), \quad (6.5)$$

em que  $(W * \phi)(p)$  é a convolução

$$(W * \phi)(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(p - q) \phi(q) dq, \quad (6.6)$$

e  $W(p) = \mathfrak{F}[V(x)]$  é a transformada de Fourier do potencial  $V(x)$ .

Uma propriedade muito importante que segue da ESF é a presença de um termo fonte (ou sumidouro) na equação para a densidade de probabilidade. Para ver isto, precisamos escrever a derivada fracionária de Riesz em termos do potencial de Riesz. Seja  $\mathcal{R}^\alpha\psi(x)$  o potencial de Riesz de  $\psi(x)$  de ordem  $\alpha$  dado por [8]

$$\mathcal{R}^\alpha\psi(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(\xi)}{|x - \xi|^{1-\alpha}} d\xi,$$

para  $0 < \alpha < 1$  e  $\tilde{\mathcal{R}}$  seu potencial de Riesz conjugado dado por

$$\tilde{\mathcal{R}}^\alpha\psi(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sign}(x - \xi) \psi(\xi)}{|x - \xi|^{1-\alpha}} d\xi. \quad (6.7)$$

Admitimos que  $\psi(x)$  satisfaz condições apropriadas para garantir a existência destas operações (ver [124]). Sendo estes potenciais dados em termos de convoluções, suas transformadas de Fourier podem ser facilmente calculadas. Primeiramente, note que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx/\hbar} \frac{1}{|x|^{1-\alpha}} dx = -2i\hbar^\alpha |p|^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \cos(\pi\alpha/2),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx/\hbar} \frac{\text{sign}(x)}{|x|^{1-\alpha}} dx = -2i\hbar^\alpha |p|^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \text{sen}(\pi\alpha/2) \text{sign}(p),$$

segue do teorema de convolução que

$$\mathfrak{F}[\mathcal{R}^\alpha \psi(x)] = \hbar^\alpha |p|^{-\alpha} \phi(p)$$

$$\mathfrak{F}[\tilde{\mathcal{R}}^\alpha \psi(x)] = -i\hbar^\alpha \text{sign}|p|^{-\alpha} \phi(p)$$

em que  $\phi(p)$  é a transformada de Fourier de  $\psi(x)$ . Então temos

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{R}}^{1-\alpha} \psi(x)\right] = i\frac{p}{\hbar} \mathfrak{F}[\tilde{\mathcal{R}}^{1-\alpha} \psi(x)] = \hbar^{-\alpha} |p|^\alpha \phi(p),$$

isto é,

$$\frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{R}}^{1-\alpha} \psi(x) = (-\Delta)^{\alpha/2} \psi(x),$$

em que  $0 < \alpha < 1$ . Para  $1 < \alpha < 2$  em  $(-\Delta)^{\alpha/2}$  usamos isso no caso  $0 < 2 - \alpha < 1$  e então

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{R}}^{2-\alpha} \psi(x)\right] = \frac{p^2}{\hbar^2} \mathfrak{F}[\tilde{\mathcal{R}}^{2-\alpha} \psi(x)] = \hbar^{-\alpha} |p|^\alpha \phi(p),$$

logo

$$-\frac{d^2}{dx^2} \tilde{\mathcal{R}}^{2-\alpha} \psi(x) = (-\Delta)^{\alpha/2} \psi(x).$$

Agora usamos este resultado na ESF. Se seguimos as etapas usuais, isto é, multiplicamos a ESF pela  $\psi^*$  e subtraímos deste complexo conjugado da ESF para  $\psi$ , obtemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = S,$$

em que temos, como a usual, a densidade de probabilidade  $\rho = \psi^* \psi$ , com as expressões para a probabilidade  $J$  e termo fonte  $S$  são definidos por,

$$J = 2D_\alpha \hbar^{\alpha-1} \text{Re} \left[ i\psi \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{R}^{2-\alpha} \psi^*) \right],$$

$$S = 2D_\alpha \hbar^{\alpha-1} \text{Re} \left[ i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{R}^{2-\alpha} \psi^*) \right].$$

### 6.2.2 Potencial delta

Consideremos a equação de Schrödinger no caso em que o potencial é

$$V(x) = V_0\delta(x)$$

onde  $\delta(x)$  é a função de Dirac e  $V_0$  é uma constante. Sua transformada de Fourier é  $W(p) = V_0$  e a convolução  $(W * \phi)(p)$  é

$$(W * \phi)(p) = V_0K$$

em que a constante  $K$  é

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(q) dq. \quad (6.8)$$

A ESF na representação de momento (6.5) é

$$\left( |p|^\alpha - \frac{E}{D_\alpha} \right) \phi(p) = -\gamma K, \quad (6.9)$$

onde

$$\gamma = \frac{V_0}{2\pi\hbar D_\alpha}.$$

Agora temos duas situações: (i)  $E < 0$ , e (ii)  $E \geq 0$ . O caso  $E < 0$  foi considerado por Jeng et al. [77], mas apresentaremos aqui de modo a contextualizar os dois casos.

Iniciamos com o caso (i) onde  $E < 0$  definindo a seguinte variável

$$\frac{E}{D_\alpha} = -\lambda^\alpha, \quad (6.10)$$

onde  $\lambda > 0$ . Então (6.9) fornece

$$\phi(p) = \frac{-\gamma K}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha}. \quad (6.11)$$

Usando isto em (6.8), temos que

$$1 = -\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} = -2\gamma\lambda^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{q^\alpha + 1}.$$

Esta integral resulta em  $(\pi/\alpha) \csc(\pi/\alpha)$  [70] e, portanto,

$$1 = -2\gamma\lambda^{1-\alpha} \frac{\pi}{\alpha} \csc\left(\frac{\pi}{\alpha}\right). \quad (6.12)$$

Logo, como na Mecânica Quântica usual ( $\alpha = 2$ ), o estado limite existe somente para um potencial delta ( $V_0 < 0$ ). A energia, usando (6.10) é dada por

$$E = - \left( \frac{g \csc(\pi/\alpha)}{\alpha \hbar D_\alpha^{1/\alpha}} \right)^{\alpha/(\alpha-1)}, \quad (6.13)$$

onde escrevemos  $V_0 = -g$  ( $g > 0$ ). Note que para  $\alpha = 2$  e  $D_2 = 1/(2m)$  encontramos o resultado usual  $E = -mg^2/2\hbar^2$ .

A função de onda  $\psi(x)$  é obtida pela transformada de Fourier inversa de  $\phi(p)$ , isto é,

$$\psi(x) = \frac{-\gamma K}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx/\hbar}}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} dp. \quad (6.14)$$

Esta integral pode ser escrita em termos da função  $H$  de Fox, como mostra a equação (B.4) no apêndice B,

$$\psi(x) = \frac{-\alpha\gamma K}{2\lambda^\alpha|x|} H_{2,3}^{2,1} \left( (\hbar^{-1}\lambda)^\alpha |x|^\alpha \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, \alpha/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, \alpha/2) \end{array} \right. \right). \quad (6.15)$$

Para compararmos a função de onda para diferentes valores de  $\alpha$  primeiramente vamos normalizá-la. Tendo em vista o grau de complicação para tal processo usamos o teorema de Parseval para efetuarmos a normalização, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(x)\psi_2(x)dx = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1^*(p)\phi_2(p)dp. \quad (6.16)$$

Usando um resultado conhecido [70], temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(|p|^\alpha + \lambda^\alpha)^2} = \frac{2\pi}{\alpha} \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) \lambda^{1-2\alpha} \csc \frac{\pi}{\alpha}, \quad (6.17)$$

e, então, para a função de onda ser normalizada à unidade precisamos ter

$$(\gamma K)^2 = \alpha \hbar \lambda^{2\alpha-1} \left( \frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \text{sen} \frac{\pi}{\alpha}. \quad (6.18)$$

Finalmente, com a escolha apropriada da fase, temos

$$\Psi(x) = \frac{N_\alpha}{|x|} H_{2,3}^{2,1} \left( (\hbar^{-1}\lambda)^\alpha |x|^\alpha \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, \alpha/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, \alpha/2) \end{array} \right. \right) \quad (6.19)$$

onde

$$N_\alpha = \frac{\alpha^2}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda(\alpha-1)} \text{sen} \frac{\pi}{\alpha}}.$$

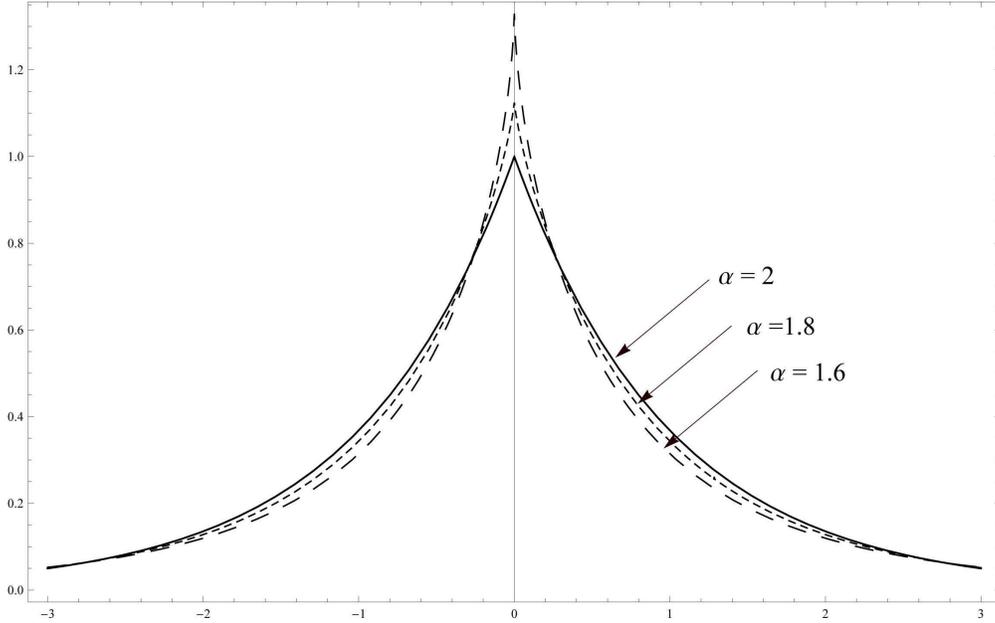


Fig. 6.1:  $\Psi = \Psi/L^{-1/2}$  como função de  $\bar{x} = x/L$ , onde  $L = (\hbar^\alpha D_\alpha/E)^{1/\alpha}$ , como dado em (6.19), para diferentes valores de  $\alpha$ .

Na Fig. 6.1 podemos ver os gráficos para a função de onda para alguns valores de  $\alpha$ .

Analisamos agora o caso em que  $E \geq 0$ , para este caso escrevemos

$$\frac{E}{D_\alpha} = \lambda^\alpha, \quad (6.20)$$

onde  $\lambda > 0$ . Sendo  $f(x)\delta(0) = f(0)\delta(x)$ , a solução de (6.9) neste caso é

$$\psi(p) = \frac{-\gamma K}{|p|^\alpha - \lambda^\alpha} + c_1\delta(p - \lambda) + c_2\delta(p + \lambda), \quad (6.21)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias. Usando isto em (6.8) encontramos

$$K = -\gamma K \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{dp}{|p|^\alpha - \lambda^\alpha} + c_1 + c_2, \quad (6.22)$$

onde a integral é interpretada no sentido do valor principal de Cauchy, e é obtida

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{|p|^\alpha - \lambda^\alpha} = 2\lambda^{1-\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{q^\alpha - 1} = 2\lambda^{1-\alpha} \frac{\pi}{\alpha} \cot \frac{\pi}{\alpha}, \quad (6.23)$$

conforme [70]. A constante  $K$  é, portanto,

$$\frac{(c_1 + c_2)\alpha\lambda^{\alpha-1}}{\alpha\lambda^{\alpha-1} - 2\pi\gamma \cot \pi/\alpha}, \quad (6.24)$$

e temos

$$\psi(p) = c_1\delta(p - \lambda) + c_2\delta(p + \lambda) - \frac{\gamma(c_1 + c_2)\alpha\lambda^{\alpha-1}}{(\alpha\lambda^{\alpha-1} - 2\pi\gamma \cot \pi/\alpha)} \frac{1}{(|p|^\alpha - \lambda^\alpha)}. \quad (6.25)$$

A próxima etapa é calcular a transformada de Fourier inversa de  $\phi(p)$  a fim de obter  $\psi(x)$ , isto é,

$$\psi(x) = C_1 e^{i\lambda x/\hbar} + C_2 e^{-i\lambda x/\hbar} - \frac{\gamma(C_1 + C_2)\alpha\lambda^{\alpha-1}}{(\alpha\lambda^{\alpha-1} - 2\pi\gamma \cot \pi/\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx/\hbar}}{|p|^\alpha - \lambda^\alpha} dp, \quad (6.26)$$

onde definimos  $C_j = c_j/2\pi\hbar$  para  $j = 1, 2$ . Calculando a integral acima e usando as definições de  $\gamma$  e  $\lambda$  obtemos a solução em termos da função  $H$  de Fox, ou seja,

$$\psi(x) = C_1 e^{i\lambda x/\hbar} + C_2 e^{-i\lambda x/\hbar} + \Omega_\alpha \frac{(C_1 + C_2)}{2} \Phi_\alpha \left( \frac{\lambda|x|}{\hbar} \right) \quad (6.27)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha \left( \frac{\lambda|x|}{\hbar} \right) &= \frac{\alpha\hbar}{\lambda|x|} H_{2,3}^{2,1} \left[ \left( \frac{\lambda|x|^\alpha}{\hbar} \right) \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2) \end{array} \right. \right] \\ &\quad - H_{2,3}^{2,1} \left[ \left( \frac{\lambda|x|^\alpha}{\hbar} \right) \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2) \end{array} \right. \right], \end{aligned} \quad (6.28)$$

e

$$\Omega_\alpha = \left[ \left( \frac{E}{\bar{U}} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \cot \frac{\pi}{\alpha} \right], \quad (6.29)$$

e

$$U = \left( \frac{V_0}{\hbar D_{\alpha^1/\alpha}} \right)^{\alpha/(\alpha-1)}. \quad (6.30)$$

Desejamos agora encontrar as constantes  $C_1$  e  $C_2$  para comparar a função de onda para diferentes valores de  $\alpha$ . Para tal efetuamos o estudo do comportamento assintótico. O comportamento assintótico da função  $H$  de Fox é dado pela **Propriedade 3** da função  $H$  de Fox, apresentada no Capítulo 4. Em  $\Phi_\alpha(\lambda|x|/\hbar)$ , os dois termos que aparecem na diferença são duas funções  $H$  de Fox da forma

$$H_{2,3}^{2,1} \left[ w^\alpha \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, \mu) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, \mu) \end{array} \right. \right],$$

para  $\mu = (2 + \alpha)/2$  e  $\mu = (2 - \alpha)/2$ . Em ambos os casos temos  $\Delta = \alpha > 0$ , mas  $\Delta^* = 0$  para  $\mu = (2 + \alpha)/2$  e  $\Delta^* > 0$  para  $\mu = (2 - \alpha)/2$  temos, respectivamente, que

$$H_{2,3}^{2,1} \left[ w^\alpha \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2) \end{array} \right. \right] = \frac{2w}{\alpha} \text{sen} w + o(1), \quad |w| \rightarrow \infty, \quad (6.31)$$

$$H_{2,3}^{2,1} \left[ w^\alpha \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2) \end{array} \right. \right] = o(1), \quad |w| \rightarrow \infty, \quad (6.32)$$

e então

$$\Phi_\alpha \left( \frac{\lambda|x|}{\hbar} \right) = 2 \text{sen} \frac{\lambda|x|}{\hbar} + o(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (6.33)$$

O comportamento da função de onda  $\psi(x)$  para  $x \rightarrow \pm\infty$  é, portanto,

$$\psi(x) = C_1 e^{i\lambda x/\hbar} + C_2 e^{-i\lambda x/\hbar} \pm \Omega_\alpha (C_1 + C_2) \text{sen} \frac{\lambda x}{\hbar} + o(x^{-1}), \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (6.34)$$

ou

$$\psi(x) = A e^{i\lambda x/\hbar} + B e^{-i\lambda x/\hbar} + o(x^{-1}), \quad x \rightarrow -\infty \quad (6.35)$$

$$\psi(x) = C e^{i\lambda x/\hbar} + D e^{-i\lambda x/\hbar} + o(x^{-1}), \quad x \rightarrow +\infty \quad (6.36)$$

onde definimos

$$A = C_1 + i(C_1 + C_2)\Omega_2/2, \quad B = C_1 - i(C_1 + C_2)\Omega_2/2, \quad (6.37)$$

$$C = C_1 - i(C_1 + C_2)\Omega_2/2, \quad D = C_1 + i(C_1 + C_2)\Omega_2/2. \quad (6.38)$$

Agora consideramos a situação de partículas vindo do lado esquerdo e dispersadas pelo potencial delta. Neste caso  $D = 0$  (em particular vindo do lado direito) e  $B = rA$  e  $C = tA$ , onde os coeficientes de reflexão  $R$  e transmissão  $T$  são dados por  $R = |r|^2$  e  $T = |t|^2$  [71]. O resultado é

$$r = \frac{-i\Omega_\alpha}{1 + i\Omega_\alpha}, \quad t = \frac{1}{1 + i\Omega_\alpha} \quad (6.39)$$

e então

$$R = \frac{\Omega_\alpha^2}{1 + \Omega_\alpha^2}, \quad T = \frac{1}{1 + \Omega_\alpha^2}. \quad (6.40)$$

Na Fig. 6.2 mostramos o comportamento destes coeficientes para diferentes valores de  $\alpha$  e na Fig. 6.3 mostramos a distribuição de probabilidade  $|\psi(x)|^2$  para esta situação quando  $E/U = 2$ .

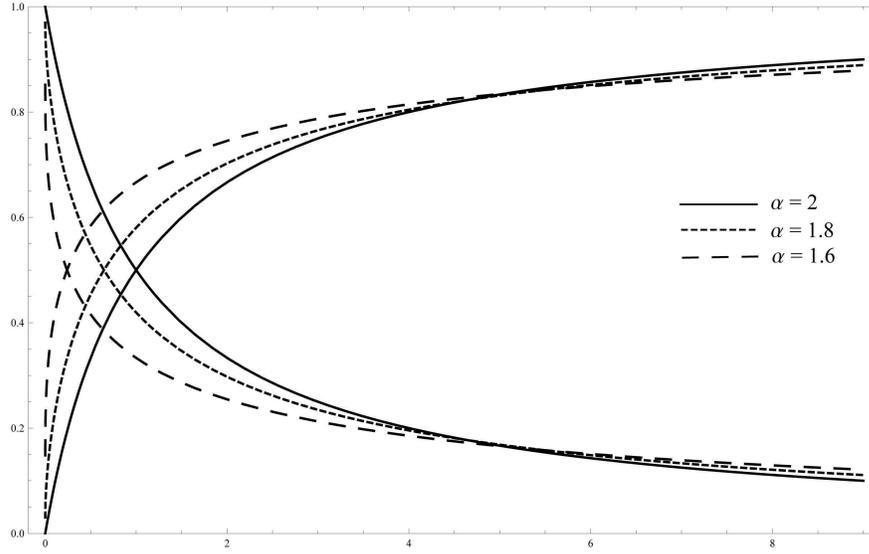


Fig. 6.2: Coeficientes de transmissão e reflexão como uma função de  $E/U$ , como dada em (6.40), para diferentes valores de  $\alpha$ .

### 6.2.3 Duplo potencial delta

Supondo agora que o potencial seja da forma

$$V(x) = V_0[\delta(x + R/2) + \mu\delta(x - R/2)]. \quad (6.41)$$

Quando  $V_0 < 0$  este potencial pode ser visto como um modelo para limite unidimensional do íon molecular  $H_2^+$  [128]. O parâmetro  $R$  é interpretado como a distância intermolecular e os parâmetros associados são  $V_0$  e  $\mu V_0$ . A transformada de Fourier é

$$W(p) = V_0 e^{ipR/2\hbar} + V_0 \mu e^{-ipR/2\hbar} \quad (6.42)$$

e para a convolução

$$(W * \phi)(p) = V_0 e^{ipR/2\hbar} K_1(R) + V_0 \mu e^{-ipR/2\hbar} K_2(R), \quad (6.43)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são constantes dadas por

$$K_1(R) = K_2(-R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iRq/2\hbar} \phi(q) dq. \quad (6.44)$$

A ESF no espaço de momentos é

$$\left( |p|^\alpha - \frac{E}{D_\alpha} \right) \phi(p) = -\gamma e^{iRp/2\hbar} K_1(R) - \gamma \mu e^{-iRp/2\hbar} K_2(R), \quad (6.45)$$

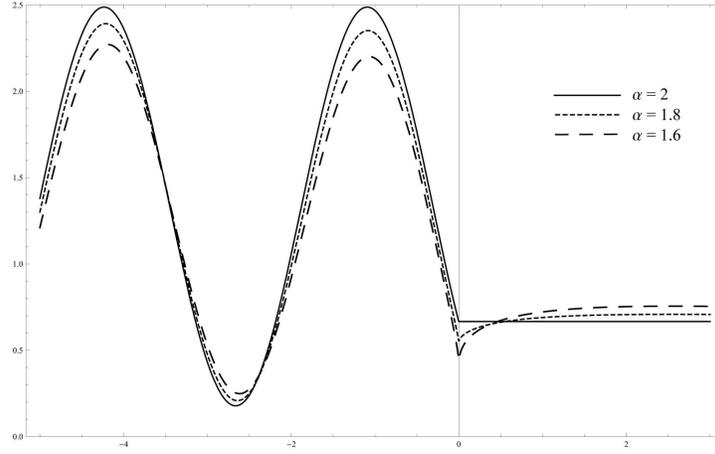


Fig. 6.3: Distribuição de probabilidade  $|\psi(x)|^2$  (em unidades de  $A^2$ ) como função de  $x/\hbar\lambda^{-1}$  dadas em (6.27), para diferentes valores de  $\alpha$ , quando  $E/U = 2$ .  $r$  e  $t$  são dados por (6.39).

onde usamos a notação introduzida anteriormente. Consideramos novamente dois casos separados: (i)  $E < 0$  e (ii)  $E > 0$ .

No primeiro caso ( $E < 0$ ) se usarmos  $\lambda$  como em (6.10), podemos escrever a solução de (6.45) da forma

$$\phi(p) = -\frac{\gamma e^{iRp/2\hbar} K_1(R)}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} - \frac{\gamma \mu e^{-iRp/2\hbar} K_2(R)}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha}. \quad (6.46)$$

Usamos esta expressão para  $\phi(p)$  da definição das constantes  $K_1(R)$  e  $K_2(R)$  de (6.44), e obtemos

$$K_1(R) = -2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0)K_1(R) - \mu 2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}(R\lambda/\hbar)K_2(R), \quad (6.47)$$

$$K_2(R) = -2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0)(R\lambda/\hbar)K_1(R) - \mu 2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0)K_2(R), \quad (6.48)$$

onde definimos

$$I(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(wy)}{y^\alpha + 1} dy. \quad (6.49)$$

O sistema (6.47) e (6.48) fornece uma solução não trivial somente quando

$$(2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0) + 1)(\mu 2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0) + 1) - \mu[2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(R\lambda/\hbar)]^2 = 0.$$

Existem duas soluções,

$$2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(R\lambda/\hbar) = \pm \sqrt{(2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0) + 1)(2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0) + \mu^{-1})}, \quad (6.50)$$

e isto nos fornece

$$\frac{K_2}{K_1} = \mp \frac{1}{\mu} F(\mu), \quad (6.51)$$

onde

$$F(\mu) = \sqrt{\frac{2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0) + 1}{2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}I(0) + \mu^{-1}}}. \quad (6.52)$$

A expressão para  $\phi(p)$  é

$$\phi(p) = -\gamma K_1(R) \left[ \frac{e^{iRp/2\hbar}}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} \pm F(\mu) \frac{e^{-iRp/2\hbar}}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} \right]. \quad (6.53)$$

Aplicando a transformada inversa, temos que  $\psi(x)$  é dada por,

$$\psi(p) = \frac{-\gamma K_1(R)}{2\pi\hbar} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ip(x+R/2)/\hbar}}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} \pm F(\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ip(x-R/2)/\hbar}}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} dp \right]. \quad (6.54)$$

Agora, se identificamos a função de onda para um potencial delta, como dado em (6.14), podemos escrever

$$\psi(x) = A[\Psi(x + R/2) \pm F(\mu)\Psi(x - R/2)]. \quad (6.55)$$

onde  $\Psi(x)$  é dado por (6.19) e  $A$  é uma constante.

**Caso particular**  $\mu = 1$ : Neste caso, observando (6.50) com maior detalhe, obtemos o seguinte resultado

$$\pm I(R\lambda/\hbar) = I(0) + \frac{\lambda^{\alpha-1}}{2\pi\gamma}. \quad (6.56)$$

Sendo  $|I(R\lambda/\hbar)| \leq |I(0)|$ , é fácil ver que existe uma solução não trivial para  $\lambda$  somente quando  $\gamma < 0$ , que corresponde ao caso de um duplo potencial. Se escrevermos  $V_0 = -g$  com  $g > 0$  e denotar

$$H = \frac{\hbar\alpha D_\alpha}{gR^{\alpha-1}}, \quad \kappa = \frac{\lambda R}{\hbar} \quad (6.57)$$

então (6.56) pode ser escrita como

$$\pm I(\kappa) = I(0) - H\kappa^{\alpha-1}. \quad (6.58)$$

Na Fig. 6.4 temos os gráficos das funções  $\pm I(k)$  e  $I(0) - \pi^{-1}\kappa^{\alpha-1}$  (isto é, para  $H = \pi^{-1}$ ) para  $\alpha = 2, 1.8, 1.6$  e a identificação dos correspondentes autovalores  $\kappa_\alpha^\pm$ . Na Fig. 6.4, os estados estável e excitado são cada um deles denotados por  $+$  e  $-$ , respectivamente, e a diferença de energia entre estes estados diminui quando  $\alpha$  decresce. A função de onda  $\psi(x)$

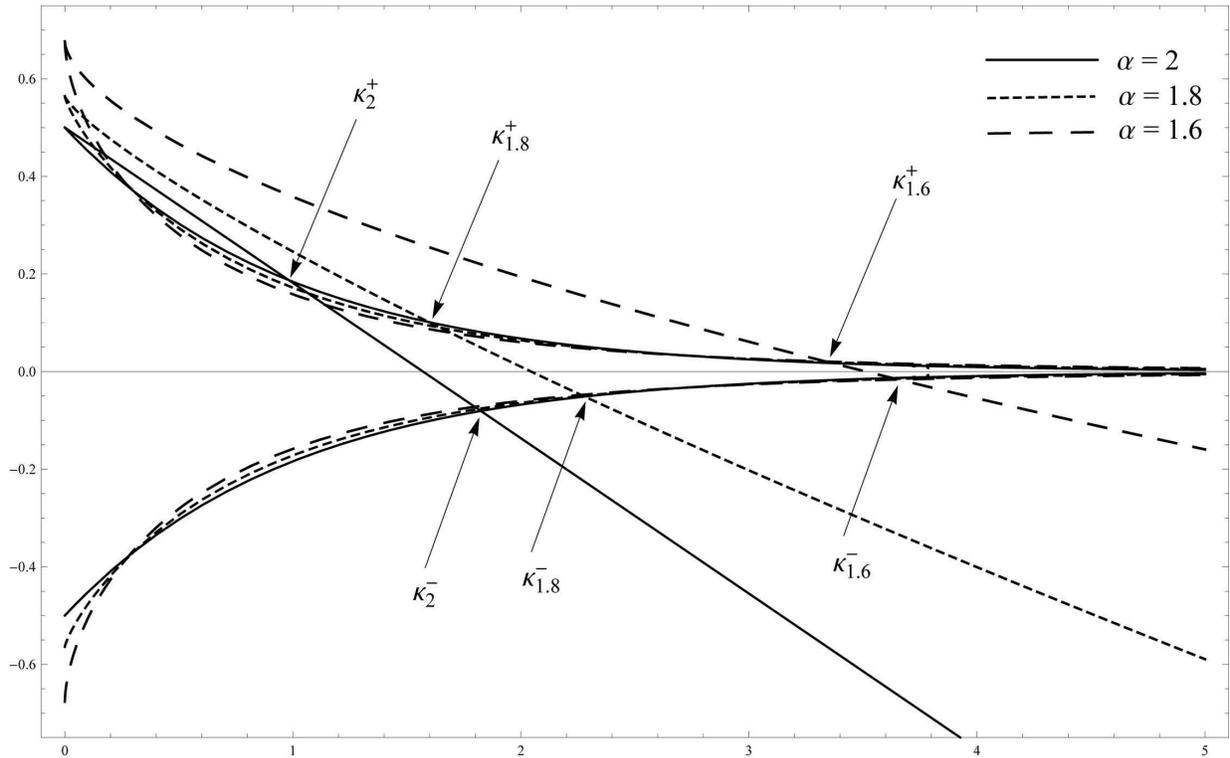


Fig. 6.4: Gráfico da função dada em (6.58) ( $H = \pi^{-1}$ ) e identificação dos autovalores de  $\kappa$  para diferentes valores de  $\alpha$ .

de (6.55) pode ser escrita como

$$\Psi_{\pm}(x) = N_{\alpha}[\Psi(x + R/2) \pm \Psi(x - R/2)], \quad (6.59)$$

onde  $N_{\alpha}$  é a constante de normalização dada por

$$N_{\alpha} = \left[ 2 \pm 2 \left( \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) \frac{\alpha}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(pR\lambda/\hbar)}{(p^{\alpha} + 1)^2} dp \right]^{-1/2}. \quad (6.60)$$

Vamos agora analisar o caso 2, ou seja, quando temos  $E > 0$ . Neste caso, usamos  $\lambda$  como em (6.20) e para a solução de (6.45) encontramos

$$\Psi(p) = 2\pi\hbar C_1 \delta(p - \lambda) + 2\pi\hbar C_2 \delta(p + \lambda) - \frac{\gamma e^{iRp/\hbar} K_1(R)}{|p|^{\alpha} - \lambda^{\alpha}} - \frac{\mu \gamma e^{-iRp/2\hbar} K_2(R)}{|p|^{\alpha} - \lambda^{\alpha}}, \quad (6.61)$$

onde a constante  $2\pi\hbar$  foi introduzida por conveniência. Usando esta expressão para  $\psi(p)$  de

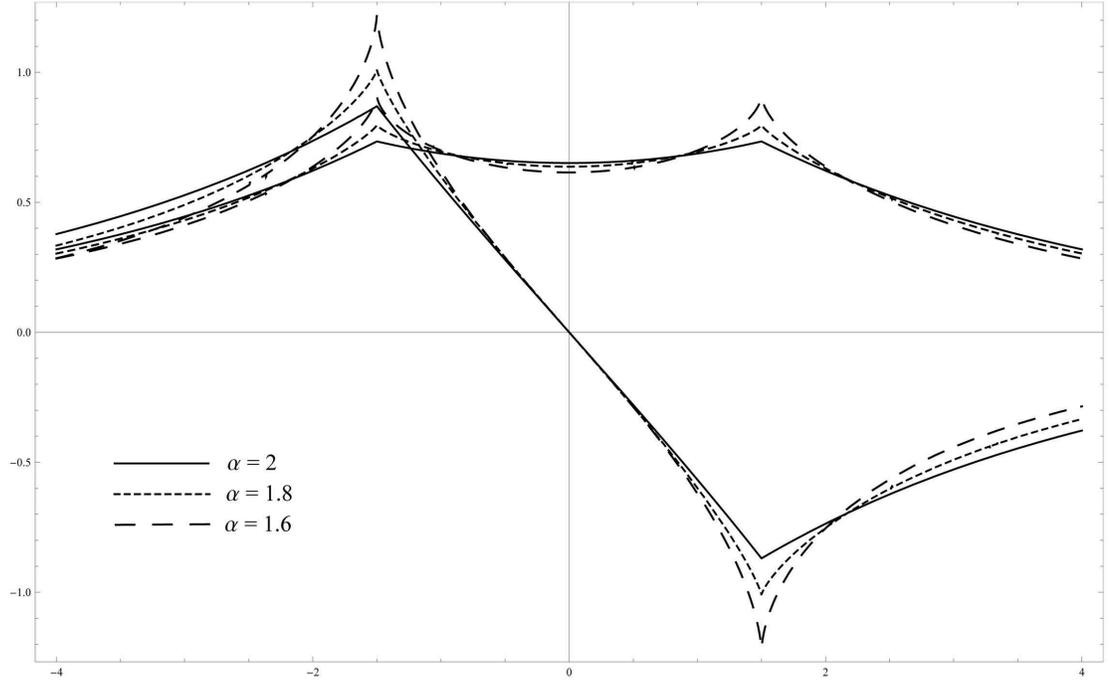


Fig. 6.5: Gráfico de  $\bar{\Psi}_{\pm} = \Phi_{\pm}/L^{-1/2}$  como função  $\bar{x} = x/L$ , onde  $L = (\hbar D_{\alpha}/E)^{1/\alpha}$ , como dada em (6.59), para diferentes valores de  $\alpha$ .

(6.44) da definição de  $K_1(R)$  e  $K_2(R)$  temos

$$(1 + 2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}J(0))K_1(R) + \mu 2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}J(\lambda R/\hbar)K_2(R) = 2\pi\hbar C'_1, \quad (6.62)$$

$$2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}J(\lambda R/\hbar)K_1(R) + (1 + \mu 2\pi\gamma\lambda^{1-\alpha}J(0))K_2(R) = 2\pi\hbar C'_2, \quad (6.63)$$

onde

$$C'_1 = C_1 e^{-iR\lambda/2\hbar}, \quad C'_2 = C_1 e^{iR\lambda/2\hbar} + C_2 e^{-iR\lambda/2\hbar}, \quad (6.64)$$

e  $J(w)$  é o valor principal de Cauchy da integral

$$J(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(wq)}{q^{\alpha} - 1} dq. \quad (6.65)$$

A fim de escrever a solução destas equações, é conveniente introduzir o parâmetro

$$\epsilon = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{2\pi\gamma} = \left( \frac{E}{U} \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

onde  $U$  foi definido em (6.30), de tal modo que temos

$$K_1(R) = \frac{2\pi\hbar\epsilon}{W} [(\epsilon\mu^{-1} + J(0))C'_1 - J(\lambda R/\hbar)C'_2], \quad (6.66)$$

$$K_2(R) = \frac{2\pi\hbar\epsilon}{\mu W} [(\epsilon + J(0))C'_2 - J(\lambda R/\hbar)C'_1], \quad (6.67)$$

onde

$$W = (\epsilon + J(0))(\epsilon\mu^{-1} + J(0)) - (J(\lambda R/\hbar))^2. \quad (6.68)$$

Usando  $K_1(R)$  e  $K_2(R)$  em (6.61) obtemos  $\phi(p)$ . Então, para  $\psi(x)$ , temos

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_1 e^{i\lambda x/\hbar} + C_2 e^{-i\lambda x/\hbar} \\ &+ \frac{1}{2\alpha W} [(\epsilon\mu^{-1} + J(0))C'_1 - J(\lambda R/\hbar)C'_2] \Phi_\alpha \left( \frac{\lambda|x + R/2|}{\hbar} \right) \\ &+ \frac{1}{2\alpha W} [(\epsilon\mu^{-1} + J(0))C'_2 - J(\lambda R/\hbar)C'_1] \Phi_\alpha \left( \frac{\lambda|x - R/2|}{\hbar} \right). \end{aligned}$$

onde expressamos o resultado em termos da função  $\Phi_\alpha$  definida em (6.28).

De modo geral, resolvemos a ESF para o potencial delta e para o duplo potencial delta para todas as energias.

### 6.3 Equação de onda-difusão fracionária

Sabemos que muitos fenômenos não podem ser descritos simplesmente com o uso do cálculo ordinário. Dentre estes fenômenos podemos citar os problemas envolvendo a difusão, especialmente, a difusão anômala. Estes problemas vêm sendo estudados por muitos autores, por exemplo, Mainardi [106] considerou soluções fundamentais para equação fracionária de onda-difusão no tempo, usando transformada de Laplace. Mainardi [96] também discutiu a solução fundamental da equação de difusão fracionária no tempo-espaco usando as transformadas de Laplace e Fourier, e as funções de Mittag-Leffler. Duan et al. [26] também discutiu o problema de equação fracionária de onda-difusão no tempo em intervalo finito, obtido por separação de variáveis usando transformada de Laplace. Nesta seção apresentamos a solução da equação fracionária de onda-difusão tempo-espaco com condições iniciais periódicas, obtendo como caso particular um resultado recente [136].

### 6.3.1 Equação fracionária com condições iniciais periódicas

Aqui consideramos uma equação diferencial fracionária em duas variáveis independentes: tempo e espaço, dependendo dos parâmetros  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ . Assim, a equação diferencial parcial fracionária a ser estudada é

$$\nu {}_*D_t^\beta u(x, t) + \mu {}_*D_t^\gamma u(x, t) = D_x^\alpha u(x, t) \quad (6.69)$$

com  $1 < \beta \leq 2$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  e  $1 < \alpha \leq 2$ . Nesta equação  ${}_*D_t^\beta$  e  $D_x^\alpha$  são, respectivamente, a derivada fracionária no sentido de Caputo e a derivada fracionária no sentido de Riesz, conforme definidas no Capítulo 5. Também consideramos como condições iniciais  $u(x, 0) = f_1(x)$  e  $u'(x, 0) = f_2(x)$  onde  $f_1$  e  $f_2$  são funções reais periódicas que podem ser expandidas em termos de uma conveniente série de Fourier.

Inicialmente, aplicamos a transformada de Laplace na variável temporal que nos fornece

$$\nu \{s^\beta \hat{u}(x, s) - s^{\beta-1} u(x, 0) - s^{\beta-2} u_t(x, 0)\} + \mu \{s^\gamma \hat{u} - s^{\gamma-1} u(x, 0)\} = D_x^\alpha \hat{u}(x, s)$$

ou na seguinte forma, já com as condições iniciais

$$(\nu s^\beta + \mu s^\gamma) \hat{u}(x, s) + [-s^{\beta-1} \nu f_1(x) - s^{\gamma-1} \mu f_1(x)] - \nu s^{\beta-2} f_2(x) = D_x^\alpha \hat{u}(x, s).$$

Assim, podemos escrever

$$(\nu s^\beta + \mu s^\gamma) \hat{u}(x, s) - (\nu s^{\beta-1} + \mu s^{\gamma-1}) f_1(x) - \nu s^{\beta-2} f_2(x) = D_x^\alpha \hat{u}(x, s). \quad (6.70)$$

Uma vez que as funções  $f_1$  e  $f_2$  podem ser escritas em termos de uma série de Fourier

$$f_j = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{j,n}(0) e^{inx}$$

com  $j = 1, 2$  temos para os coeficientes

$$f_{j,n}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(x) e^{-inx} dx.$$

Por outro lado, precisamos calcular a derivada fracionária no sentido de Riesz de  $\hat{u}(x, s)$ .

Para este fim, supomos que (separação de variáveis)

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(t) e^{inx}$$

Usando a definição da derivada fracionária no sentido de Riesz, apresentada no Capítulo 5,

$$\begin{aligned}
 I_+^{-\alpha}u(x, t) &= \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{u(\xi, t)}{(x-\xi)^{1+\alpha-m}} d\xi \right) \\
 &= \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(t) \int_{-\infty}^x \frac{e^{in\xi}}{(x-\xi)^{1+\alpha-m}} d\xi \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d_n(t)}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left( e^{inx} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-inr}}{r^{1+\alpha-m}} dr \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(t) (in)^\alpha e^{inx}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 I_-^{-\alpha}u(x, t) &= (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_x^{+\infty} \frac{u(\xi, t)}{(\xi-x)^{1+\alpha-m}} d\xi \right) \\
 &= (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \left( \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(t) \int_x^{+\infty} \frac{e^{in\xi}}{(\xi-x)^{1+\alpha-m}} d\xi \right) \\
 &= (-1)^m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d_n(t)}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left( e^{inx} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-inr}}{r^{1+\alpha-m}} dr \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(t) (-in)^\alpha e^{inx}
 \end{aligned}$$

temos que

$$D_x^\alpha u(x, t) = -\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} \{I_+^{-\alpha}u(x, t) + I_-^{-\alpha}u(x, t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d'_n(t) e^{inx} \quad (6.71)$$

onde os coeficientes podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned}
 d'_n(t) &= -\frac{1}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} [(in)^\alpha + (-in)^\alpha] d_n(t) \\
 &= -\frac{|n|}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} [i^\alpha + (-i)^\alpha] d_n(t) \\
 &= -\frac{|n|}{2 \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} [e^{i\alpha\pi/2} + e^{-i\alpha\pi/2}] d_n(t),
 \end{aligned}$$

que nos fornece a seguinte relação

$$d'_n(t) = -|n|^\alpha d_n(t). \quad (6.72)$$

Assim, tomando a transformada de Laplace de (6.71), obtemos

$$\mathfrak{L}[D_x^\alpha u(x, t)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-|n|^\alpha) \widehat{d}_n(s) e^{inx} \quad (6.73)$$

com  $\widehat{d}_n(s) = \mathfrak{L}[d_n(t)]$ .

Então, substituindo estes resultados em (6.70), obtemos a expressão

$$\begin{aligned} & (\nu s^\beta + \mu s^\gamma) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{d}_n(s) e^{inx} - (\nu s^{\beta-1} + \mu s^{\gamma-1}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{1,n}(0) e^{inx} \\ & - \nu s^{\beta-2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{2,n}(0) e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-|n|^\alpha) \widehat{d}_n e^{inx}. \end{aligned}$$

que pode ser escrita da seguinte forma,

$$(\nu s^\beta + \mu s^\gamma) \widehat{d}_n(s) - (\nu s^{\beta-1} + \mu s^{\gamma-1}) f_{1,n}(0) - \nu s^{\beta-2} f_{2,n}(0) = -|n|^\alpha \widehat{d}_n(s).$$

Esta equação é uma equação algébrica cuja solução é dada por

$$\widehat{d}_n(s) = \frac{\nu s^{\beta-1} + \mu s^{\gamma-1}}{\nu s^\beta + \mu s^\gamma + |n|^\alpha} f_{1,n}(0) + \frac{\nu s^{\beta-2}}{\nu s^\beta + \mu s^\gamma + |n|^\alpha} f_{2,n}(0). \quad (6.74)$$

Vamos, agora, aplicar a transformada de Laplace inversa. Para isto usamos a relação [33]

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha_1} + A s^{\alpha_2} + B} \right\} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-A)^j t^{(\alpha_1 - \alpha_2)j + \alpha_1 - \rho} E_{\alpha_1, (\alpha_1 - \alpha_2)j + \alpha_1 + 1 - \rho}^{j+1} (-B t^{\alpha_1}), \quad (6.75)$$

com  $A$  e  $B$  reais e  $\text{Re}(\alpha_1) > \text{Re}(\alpha_2) > 0$ .

Portanto, usando este resultado, temos que a transformada inversa de Laplace de

$$\widehat{d}_{n1}(s) = \frac{\nu s^{\beta-1}}{\nu s^\beta + \mu s^\gamma + |n|^\alpha} = \frac{s^{\beta-1}}{s^\beta + \frac{\mu}{\nu} s^\gamma + \frac{|n|^\alpha}{\nu}} \quad (6.76)$$

pode ser obtida, fazendo  $\rho = \beta$ ,  $\alpha_1 = \beta$ ,  $A = \mu/\nu$ ,  $\alpha_2 = \gamma$  e  $B = \frac{|n|^\alpha}{\nu}$ . Com isto, temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1} [\widehat{d}_{n1}(s)] &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{-\mu}{\nu} \right)^j t^{(\beta-\gamma)j + \beta - \beta} E_{\beta, (\beta-\gamma)j + \beta + 1 - \beta}^{j+1} \left( -\frac{|n|^\alpha}{\nu} t^\beta \right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left( \frac{-\mu}{\nu} \right)^j t^{(\beta-\gamma)j} E_{\beta, (\beta-\gamma)j + 1}^{j+1} \left( -\frac{|n|^\alpha}{\nu} t^\beta \right), \end{aligned} \quad (6.77)$$

com  $\beta > \gamma > 0$ .

Procedendo do mesmo modo como em (6.76), temos que a transformada de Laplace inversa de

$$\widehat{d}_{n2}(s) = \frac{\mu s^{\gamma-1}}{\nu s^{\beta} + \mu s^{\gamma} + |n|^{\alpha}} = \frac{\mu}{\nu} \frac{s^{\gamma-1}}{s^{\beta} + \frac{\mu}{\nu} s^{\gamma} + \frac{|n|^{\alpha}}{\nu}} \quad (6.78)$$

é obtida quando substituímos  $\rho = \gamma$ ,  $\alpha_1 = \beta$ ,  $A = \mu/\nu$ ,  $\alpha_2 = \gamma$  e  $B = \frac{|n|^{\alpha}}{\nu}$  em (6.75), e é dada por

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \widehat{d}_{n2}(s) \right] = \frac{\mu}{\nu} \sum_{j=0}^{+\infty} \left( -\frac{\mu}{\nu} \right)^j t^{(\beta-\gamma)j+\beta-\gamma} E_{\beta,(\beta-\gamma)j+\beta+1-\gamma}^{j+1} \left( -\frac{|n|^{\alpha}}{\nu} t^{\beta} \right), \quad (6.79)$$

com  $\beta > \gamma > 0$ .

Finalmente, precisamos calcular

$$\widehat{d}_{n3}(s) = \frac{\nu s^{\beta-2}}{\nu s^{\beta} + \mu s^{\gamma} + |n|^{\alpha}} = \frac{s^{\beta-2}}{s^{\beta} + \frac{\mu}{\nu} s^{\gamma} + \frac{|n|^{\alpha}}{\nu}}. \quad (6.80)$$

Analogamente, substituímos  $\rho = \beta - 1$ ,  $\alpha_1 = \beta$ ,  $A = \mu/\nu$ ,  $\alpha_2 = \gamma$  e  $B = \frac{|n|^{\alpha}}{\nu}$  em (6.75), de modo a obter o resultado

$$\mathfrak{L}^{-1} \left[ \widehat{d}_{n3}(s) \right] = \sum_{j=0}^{+\infty} \left( -\frac{\mu}{\nu} \right)^j t^{(\beta-\gamma)j+1} E_{\beta,(\beta-\gamma)j+2}^{j+1} \left( -\frac{|n|^{\alpha}}{\nu} t^{\beta} \right), \quad (6.81)$$

com  $\beta > \gamma > 0$ .

Usando (6.77), (6.79) e (6.81), podemos escrever

$$\begin{aligned} d_n(t) &= \mathfrak{L} \left[ \widehat{d}_n(s) \right] = \mathfrak{L} \left[ \left( \widehat{d}_{n1}(s) + \widehat{d}_{n2}(s) \right) f_{1,n}(0) + \widehat{d}_{n3}(s) f_{2,n}(0) \right] \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left( -\frac{\mu}{\nu} \right)^j t^{(\beta-\gamma)j} E_{\beta,(\beta-\gamma)j+1}^{j+1} (-K t^{\beta}) f_{1,n}(0) + \\ &+ \frac{\mu}{\nu} \sum_{j=0}^{+\infty} \left( -\frac{\mu}{\nu} \right)^j t^{(\beta-\gamma)j+\beta-\gamma} E_{\beta,(\beta-\gamma)j+\beta+1-\gamma}^{j+1} (-K t^{\beta}) f_{1,n}(0) + \\ &+ \sum_{j=0}^{+\infty} \left( -\frac{\mu}{\nu} \right)^j t^{(\beta-\gamma)j+1} E_{\beta,(\beta-\gamma)j+2}^{j+1} (-K t^{\beta}) f_{2,n}(0), \end{aligned}$$

onde  $E_{\mu,\nu}^{\gamma}(z)$  é a função de Mittag-Leffler de três parâmetros enquanto que  $K = |n|^{\alpha}/\nu$  é um parâmetro.

Para simplificar esta expressão, primeiro introduzimos um parâmetro positivo, definido por  $\eta = \beta - \gamma$ . Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} d_n(t) = & \sum_{j=0}^{+\infty} \left(-\frac{\mu}{\nu} t^\eta\right)^j \left\{ E_{\beta, \eta j+1}^{j+1}(-K t^\beta) + \frac{\mu}{\nu} t^\eta E_{\beta, \eta j+\beta+1-\gamma}^{j+1}(-K t^\beta) \right\} f_{1,n}(0) + \\ & + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(-\frac{\mu}{\nu} t^\eta\right)^j t E_{\beta, \eta j+2}^{j+1}(-K t^\beta) f_{2,n}(0), \end{aligned} \quad (6.82)$$

que se constitui em nosso principal resultado.

A partir do resultado obtido em (6.82), passamos a discutir alguns casos particulares, a saber:

**Caso 1:** Para recuperar os resultados recentemente obtidos por Zhang-Liu [136], basta considerar  $\nu = 1$  e  $\mu = 0$  em (6.82). Neste caso, o único termo que contribui é  $j = 0$ , i.e., somente o primeiro termo contribui. Assim,

$$d_n(t) = E_{\beta,1}^1(-K t^\beta) f_{1,n}(0) + t E_{\beta,2}^1(-K t^\beta) f_{2,n}(0) \quad (6.83)$$

com  $K = |n|^\alpha$ . Como vimos no Capítulo 4, este caso particular corresponde a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, i.e.,  $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ . Com isso, podemos escrever

$$d_n(t) = E_{\beta,1}(-K t^\beta) f_{1,n}(0) + t E_{\beta,2}(-K t^\beta) f_{2,n}(0) \quad (6.84)$$

que é o resultado obtido por Zhang-Liu [136].

**Caso 2:** O clássico caso (inteiro) é obtido quando consideramos os parâmetros  $\alpha = \beta = 2$  e  $\gamma = 1$  de onde segue  $\eta = 1$ . Então, usando (6.82), temos

$$\begin{aligned} d_n(t) = & \sum_{j=0}^{+\infty} \left(-\frac{\mu}{\nu} t\right)^j \left\{ E_{2, j+1}^{j+1}(-K t^2) + \frac{\mu}{\nu} t E_{2, j+2+1-\gamma}^{j+1}(-K t^2) \right\} f_{1,n}(0) + \\ & + \sum_{j=0}^{+\infty} \left(-\frac{\mu}{\nu} t\right)^j t E_{2, j+2}^{j+1}(-K t^2) f_{2,n}(0) \end{aligned} \quad (6.85)$$

com  $K = |n|^2/\nu$ .

**Caso 3:** Como outro caso particular, é interessante observar que, para o caso  $\nu = 0$ , temos somente um termo que contribui para a solução. É conveniente notar que aqui temos uma equação diferencial fracionária associada a problemas de difusão, contrariamente aos dois casos anteriores, onde discutimos uma equação diferencial fracionária associada a problemas ondulatórios.

Voltemos ao nosso problema. Neste caso, usando (6.74), obtemos

$$\widehat{h}_n(s) = \mu \frac{s^{\gamma-1}}{\mu s^\gamma + |n|^\gamma} = \frac{s^{\gamma-1}}{s^\gamma + \frac{|n|^\alpha}{\mu}} \quad (6.86)$$

cuja a inversa é obtida quando tomamos  $A = 0$  em (6.75) e, neste caso, temos apenas  $j = 0$ ,

$$\mathfrak{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha_1} + B} \right\} = t^{\alpha_1-\rho} E_{\alpha_1, \alpha_1+1-\rho}(-Bt^{\alpha_1}) \quad (6.87)$$

e, para  $\alpha_1 = \gamma$ ,  $\rho = \gamma$  e  $B = \frac{|n|^\alpha}{\mu}$  encontramos

$$d_n(t) = t^{\gamma-\gamma} E_{\gamma, \gamma+1-\gamma} \left( -\frac{|n|^\alpha}{\mu} t^\gamma \right) f_{1,n}(0)$$

ou ainda

$$d_n = f_{1,n}(0) E_\gamma \left( -\frac{|n|^\alpha}{\mu} t^\gamma \right) \quad (6.88)$$

com  $0 < \gamma \leq 1$  e  $1 < \alpha \leq 2$ .

A fim de explicitarmos alguns casos, tomamos  $u(x, 0) = \text{sen } x$  e  $u_t(x, 0) = \cos x$  como condições iniciais, para alguns valores de  $\beta$ , obtemos (para  $x = 0$  fixo) os seguintes gráficos.

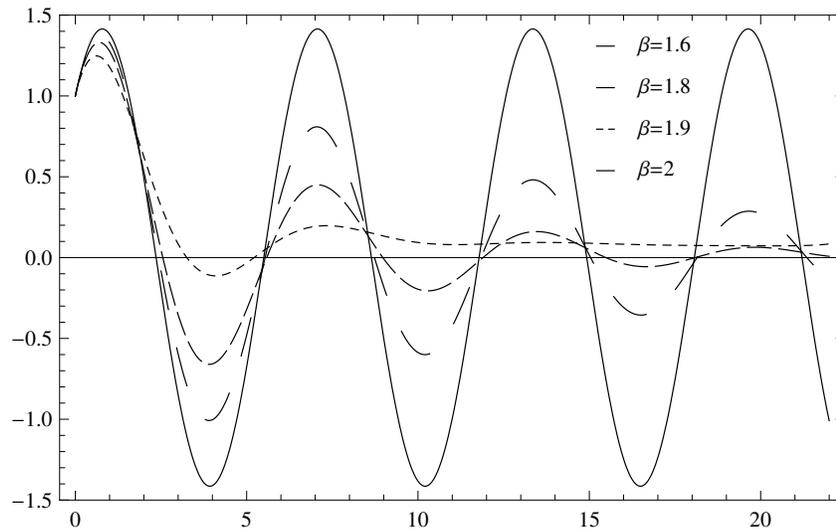


Fig. 6.6: Gráfico de  $u \times t$  do **caso 1** para  $\beta = 1.6$ ,  $\beta = 1.8$ ,  $\beta = 1.9$  e  $\beta = 2$ .

Usamos a separação de variáveis na equação fracionária, o que nem sempre é válido para as demais definições, pois a derivada do produto nem sempre é produto da derivada. Além disso, podemos diferenciar a equação do telégrafo e onda difusão pelas condições impostas.

---

# Conclusões

---

A função  $H$  de Fox desempenha um papel fundamental no cálculo fracionário. Com o auxílio de suas propriedades, podemos abordar, de maneira unificada, vários problemas advindos do cálculo fracionário. Podemos, por outro lado, ainda, enxergar essa função como uma generalização da função hipergeométrica e, também, como a maneira mais geral de abranger todas as clássicas funções especiais. Em particular, citamos a função  $G$  de Meijer, que permite escrever, como casos particulares, todas as clássicas funções hipergeométricas e hipergeométricas confluentes, e a função de Mittag-Leffler que é uma generalização da função exponencial, considerada por muitos pesquisadores como a rainha das funções associadas aos problemas advindos o cálculo fracionário.

Diante disto, neste trabalho, foi realizado um estudo detalhado dessa função, através das chamadas integrais de Mellin-Barnes, que nos possibilita um amplo entendimento sobre sua existência e seu comportamento ao longo de contornos definidos no plano complexo. Os resultados encontrados no Capítulo 2 são resumidos, no Capítulo 4, por meio de um teorema, que refere-se simplesmente à existência e à analiticidade da função  $H$  de Fox.

No Capítulo 5 apresentamos as definições para a derivada fracionária, conforme introduzidas por Riemann-Liouville, Caputo, Weyl, Riesz e Grünwald-Letnikov bem como, discutimos as suas principais propriedades. Uma importante discussão que surge neste capítulo é a relação entre as derivadas de Riemann-Liouville, a mais difundida, e Caputo, apesar de mais restritiva, a mais conveniente nas aplicações, pois existem resultados importantes envolvidos com essa relação. Dentre eles, podemos citar a regularização das derivadas fracionárias, que não foi tratado aqui, mas é um assunto que vem sendo bastante discutido [32]. Apresentamos uma justificativa para adotar a derivada de Caputo em nossa abordagem ao invés da derivada de Riemann-Liouville. O principal motivo de termos optado pela derivada de Caputo reside no fato de que a derivada de uma constante é zero o que, nem sempre, ocorre com a derivada conforme proposta por Riemann-Liouville. Ressaltamos ainda que, apesar

de não apresentarmos aqui, existe também a possibilidade do uso das derivadas de ordem arbitrária no plano complexo. Isto pode ser visto com maior detalhe em [23]. Também, devemos ressaltar que o uso da derivada fracionária, conforme proposta por Grünwald-Letnikov, desempenha um papel importante quando trabalhamos com métodos numéricos uma vez que é expressa através de um somatório.

Os resultados obtidos neste trabalho, apresentados como aplicações, correspondem a generalizações das equações do telégrafo [20], Schrödinger [12] e onda-difusão [19]. Estas generalizações são obtidas substituindo a derivada de ordem inteira por derivadas fracionárias. Na primeira aplicação, equação tipo telégrafo, usamos a derivada fracionária no sentido de Caputo na variável temporal, e a derivada fracionária de Riesz na variável espacial, para generalizar a respectiva equação. Com isso, podemos ter uma descrição de fenômenos associados à equação do telégrafo, por exemplo, em processos de difusão anômala observados em experimento envolvendo o fluxo sanguíneo [16]. A solução desta equação é dada em termos da função de Fox, englobando como caso particular a clássica solução da equação do telégrafo.

Na segunda aplicação, a equação de Schrödinger, utilizamos a derivada fracionária de Riesz na variável espacial, que aparece quando levamos, também, em consideração os efeitos de memória e não locais, obtendo assim, a generalização de uma forma natural [84]. Neste caso, apresentamos a equação de Schrödinger fracionária para um potencial tipo delta. Discutimos todas as possibilidades envolvendo o parâmetro associado à energia o que nos proporcionou obter a generalização de um recente trabalho [12]. Apresentamos as soluções em termos da função  $H$  de Fox bem como, discutimos o comportamento de cada solução a partir de um esboço gráfico.

Enfim, como uma terceira aplicação, discutimos a generalização da equação de onda-difusão, onde aplicamos a derivada fracionária de Caputo na variável temporal e a derivada fracionária de Riesz na variável espacial, expressando a solução fundamental dessa equação sujeita às condições iniciais periódicas, em termos de um somatório. Note que, a separação de variáveis, neste caso, foi possível pois a derivada de uma constante, no sentido de Caputo, é zero. Apresentamos ainda, alguns gráficos associados a casos particulares.

Como perspectivas futuras, para finalizarmos, acrescentamos que a área de cálculo fracionário vem crescendo consideravelmente, o que nos permite concluir que vários são os

temas que merecem, no mínimo, uma revisão. Além da quantidade de trabalhos e livros que emergem, envolvendo a derivada de ordem arbitrária [13, 20, 69, 87, 133], podemos citar: [29] onde é realizada uma generalização do movimento de um projétil sujeito à gravidade através da derivada de Caputo. Neste trabalho é discutida a maneira de se generalizar apenas a variável temporal logo, a utilização de uma derivada, no sentido de Riesz, na variável espacial, pode nos conduzir a um interessante problema a ser discutido. Outros dois recentes trabalhos que também destacamos aqui são [76, 130] onde são apresentadas generalizações da equação de Schrödinger sendo a solução de cada uma delas dada em termos da função  $H$  de Fox. Por último, citamos [18] onde aplicamos a derivada fracionária no sentido de Caputo na variável temporal e analisamos, no domínio da frequência, o comportamento térmico difusivo das faces de uma parede e de uma esfera, recuperando, como caso particular, um recente resultado. A interpretação destes resultados encontra-se em fase conclusiva.



# Função gama $\Gamma(z)$

---



---

## A.1 Função gama

Vamos definir a função gama através da seguinte integral imprópria

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

com  $\operatorname{Re}(z) > 0$ , onde a integração é feita no eixo real positivo. Esta função é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ . Citamos aqui algumas propriedades da função gama que serão úteis neste trabalho.

P1:  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ ;

P2:  $\Gamma(z + n) = z(z + 1) \cdots (z + n - 1)\Gamma(z)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;

P3:  $\forall z \in \mathbb{N}$ , temos  $n! = \Gamma(n + 1)$ ;

P4:  $\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}$ .

Podemos definir a função gama para  $\operatorname{Re}(z)$  usando a técnica do prolongamento analítico. Com esta técnica, obtemos a seguinte definição:

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

com a qual podemos verificar explicitamente que a função gama  $\Gamma(z)$  é analítica em  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ .

## A.2 Expansão assintótica

Uma outra definição para a função gama, proposta por Weierstrass, é dada por

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Neste caso a função gama é analítica em todos os pontos exceto em  $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ , onde tem polos simples.

Podemos reescrever esta definição da forma,

$$\{\Gamma(z+1)\}^{-1} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}. \quad (\text{A.2})$$

Se agora diferenciarmos logaritmicamente esta equação, obtemos a seguinte relação para derivada do logaritmo da função gama,

$$\frac{d \log \Gamma(z+1)}{dz} = -\gamma + \frac{z}{1(z+1)} + \frac{z}{2(z+2)} + \frac{z}{3(z+3)} + \dots \quad (\text{A.3})$$

Lembrando que  $\log \Gamma(z+1) = \log(z) + \log \Gamma(z)$ , encontramos:

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)}. \quad (\text{A.4})$$

Derivando novamente, obtemos:

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Gamma(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \dots \quad (\text{A.5})$$

Podemos representar esta série na forma integral a seguir,

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(z+\xi)^2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{q(t, z)}{e^{2\pi t} - 1} dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{q(t, z+n)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (\text{A.6})$$

onde

$$2iq(t) = \frac{1}{(z+it)^2} - \frac{1}{(z-it)^2}.$$

Uma vez que  $|q(t, z+n)|$  é menor do que  $K_1 t/n$ , onde  $K_1$  independe das variáveis  $t$  e  $n$ , temos que o limite da última integral é zero. Com isto, obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{d^2}{dz^2} \Gamma(z) = \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{z} + \int_0^{\infty} \frac{4tz}{(z^2+t^2)^2} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}.$$

Visto que  $\left| \frac{2z}{z^2 + t^2} \right|$  não excede  $K$  (onde  $K$  depende somente de  $\delta$ ) quando a parte real de  $z$  excede  $\delta$ , a integral converge uniformemente e podemos integrar de 1 até  $z$ . Assim,

$$\frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \log z + C - 2 \int_0^\infty \frac{t dt}{(z^2 + t^2)(e^{2\pi t} - 1)},$$

onde  $C$  é uma constante. Integrando novamente, obtemos

$$\log \Gamma(z) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \log z + (C - 1)z + C_1 + 2 \int_0^\infty \frac{\arctg(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt,$$

onde  $C_1$  é uma constante.

Agora, se  $z$  é real,  $0 \leq \arctg(t/z) \leq t/z$ , podemos escrever

$$\left| \log \Gamma(z) - \left( z - \frac{1}{2} \right) \log z - (C - 1)z - C_1 \right| < \frac{2}{z} \int_0^\infty \frac{t}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$

Mas temos que,

$$\left| \log \Gamma(z) - \left( z - \frac{1}{2} \right) \log z + z - \frac{1}{2} \log(2\pi) \right| \rightarrow 0,$$

quando  $z \rightarrow \infty$  para valores reais. Comparando estes resultados, notamos que  $C = 0$  e  $C_1 = \frac{1}{2} \log(2\pi)$ .

Então podemos afirmar que para todo  $z$  cuja parte real é positiva, vale a expressão

$$\log \Gamma(z) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + 2 \int_0^\infty \frac{\arctg(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt.$$



## Cálculo de algumas integrais

### B.1 Cálculo da integral (6.14)

Definimos  $I(w)$  por

$$I(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos wy}{y^\alpha + 1} dy.$$

Então a integral em (6.14) pode ser escrita como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx/\hbar}}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} dp = 2\pi\lambda^{1-\alpha} I(\lambda x/\hbar),$$

onde  $\lambda > 0$ . Para calcularmos  $I(w)$  vamos usar a transformada de Mellin e em seguida calcular a respectiva transformada inversa do resultado obtido. Vale lembrar que a transformada de Mellin e sua transformada inversa são dadas, respectivamente, por

$$M[f(x)](z) = F(z) = \int_0^{+\infty} f(x)x^{z-1}dx \quad \text{e} \quad M^{-1}[F(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z}F(z)dz. \quad (\text{B.1})$$

Como a transformada de Mellin de  $I(w)$  toma somente os valores positivos de  $w$ , e sendo  $I(-w) = I(w)$ , precisamos apenas substituir  $w$  por  $|w|$  no final do cálculo para que o resultado seja válido para todo  $w$ .

Para iniciarmos, usamos o seguinte resultado [110],

$$M_w[\cos(wy)](z) = y^{-z}\Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2}.$$

Com isto, obtemos a seguinte expressão para a transformada de Mellin de  $I(w)$ ,

$$M_w[I(w)](z) = \frac{1}{\pi}\Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} \int_0^{+\infty} \frac{y^{-z}}{y^\alpha + 1} dy.$$

Esta última integral é dada por [70],

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\mu-1}}{x^\nu + 1} dx = \frac{\pi}{\nu} \operatorname{csc} \frac{\mu\pi}{\nu} = \frac{1}{\nu} B\left(\frac{\mu}{\nu}, \frac{\nu - \mu}{\nu}\right),$$

onde  $B(a, b)$  é a função beta e  $\operatorname{Re}(\nu) \geq \operatorname{Re}(\mu) > 0$ . Usando este resultado e o fato que

$$\cos \frac{\pi z}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi(1-z)}{2} = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1-z}{2}\right)},$$

podemos escrever a transformada de Mellin em termos da função gama,

$$M_w[I(w)](z) = \frac{1}{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1-z}{\alpha}\right) \Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1-z}{2}\right)} = F_1(z).$$

Assim, obtemos  $I(w)$  através da transformada inversa de  $F_1(z)$ ,

$$I(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} w^{-z} F_1(z) dz.$$

Escrevendo em termos da função  $H$  de Fox, obtemos

$$I(w) = \frac{1}{\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[ w \left| \begin{array}{c} (1 - 1/\alpha, 1/\alpha), (1/2, 1/2) \\ (0, 1), (1 - 1/\alpha, 1/\alpha), (1/2, 1/2) \end{array} \right. \right] \quad (\text{B.2})$$

Usando as propriedades da função  $H$  de Fox, encontramos:

$$I(w) = \frac{1}{|w|} H_{2,3}^{2,1} \left[ |w|^\alpha \left| \begin{array}{c} (1, 1), (1, \alpha/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, \alpha/2) \end{array} \right. \right] \quad (\text{B.3})$$

onde usamos o valor absoluto para adicionar na expressão os valores negativos de  $w$  visto que  $I(-w) = I(w)$ . Finalmente, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx/\hbar}}{|p|^\alpha + \lambda^\alpha} dp = \frac{2\pi\hbar}{\lambda^\alpha |x|} H_{2,3}^{2,1} \left[ (\hbar^{-1})^\alpha |x|^\alpha \left| \begin{array}{c} (1, 1), (1, \alpha/2) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, \alpha/2) \end{array} \right. \right], \quad (\text{B.4})$$

que é o resultado desejado. Quando  $\alpha = 2$  não é difícil mostrar [105] que

$$H_{2,3}^{2,1} \left[ w^2 \left| \begin{array}{c} (1, 1), (1, 1) \\ (1, 2), (1, 1), (1, 1) \end{array} \right. \right] = H_{2,3}^{2,1} \left[ w^2 \left| \begin{array}{c} (1, 1), (1, 1) \\ (1, 2), (1, 1), (1, 1) \end{array} \right. \right] = \frac{|w|}{2} \exp(-|w|).$$

Da expressão anterior recupera-se o resultado bem conhecido,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx\hbar}}{p^2 + \lambda^2} dp = \frac{\pi}{\lambda} \exp(-\lambda|x|/\hbar).$$

## B.2 Cálculo da integral em (6.26)

Seja  $J(w)$  dada por

$$J(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos wy}{y^\alpha} dy. \quad (\text{B.5})$$

Então podemos escrever a integral (6.26) como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx/\hbar}}{|p|^\alpha - \lambda^\alpha} dp = 2\pi\lambda^{1-\alpha} J(\lambda x/\hbar),$$

onde  $\lambda > 0$ . Aplicando a transformada de Mellin em  $J(w)$ , temos

$$M_w[J(w)](z) = \frac{1}{\pi} \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} \int_0^\infty \frac{y^{-z}}{y^\alpha - 1} dy.$$

Esta última integral é dada por [70],

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\mu-1}}{1-x^\nu} dx = \frac{\pi}{\nu} \cot \frac{\mu\pi}{\nu}, \quad (\text{B.6})$$

onde a integração é entendida como o valor principal de Cauchy <sup>1</sup>. Portanto temos,

$$M_w[J(w)](z) = -\frac{1}{\alpha} \Gamma(z) \operatorname{sen} \frac{\pi(1-z)}{2} \cot \frac{\pi(1-z)}{\alpha}. \quad (\text{B.7})$$

Usando a relação  $2\operatorname{sen}A \cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$  e expressando a função seno em termos do produto de funções gama podemos escrever a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} M_w[J(w)](z) = & -\frac{1}{2\alpha} \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-z}{\alpha}\right)}{\Gamma\left((1-z)\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)\Gamma\left(1-(1-z)\frac{2+\alpha}{2\alpha}\right)} \\ & + \frac{1}{2\alpha} \frac{\Gamma(z)\Gamma\left(\frac{1-z}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-z}{\alpha}\right)}{\Gamma\left((1-z)\frac{(2-\alpha)}{2\alpha}\right)\Gamma\left(1-(1-z)\frac{(2-\alpha)}{2\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

Tomando a transformada de Mellin inversa e usando a definição da função  $H$  de Fox, obtemos:

$$\begin{aligned} J(w) = & -\frac{1}{2\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[ w \left| \begin{array}{l} (1-1/\alpha, 1/\alpha), (1-(2+\alpha)/2\alpha, (2+\alpha)/2\alpha) \\ (0, 1), (1-1/\alpha, 1/\alpha), (1-(2+\alpha)/2\alpha, (2+\alpha)/2\alpha) \end{array} \right. \right] \\ & + \frac{1}{2\alpha} H_{2,3}^{2,1} \left[ w \left| \begin{array}{l} (1-1/\alpha, 1/\alpha), (1-(2-\alpha)/2\alpha, (2-\alpha)/2\alpha) \\ (0, 1), (1-1/\alpha, 1/\alpha), (1-(2-\alpha)/2\alpha, (2-\alpha)/2\alpha) \end{array} \right. \right]. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Lembremos que na inversão da transformada de Fourier a integração é para ser efetuada no sentido do valor principal de Cauchy [22].

Usando as propriedades da função  $H$  de Fox, que apresentamos no Capítulo 4, e substituindo  $w$  por  $|w|$  visto que  $I_2(-w) = I_2(w)$ , obtemos:

$$J(w) = -\frac{1}{2\alpha|w|} H_{2,3}^{2,1} \left[ w \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2\alpha) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2\alpha) \end{array} \right. \right] \\ + \frac{1}{2\alpha|w|} H_{2,3}^{2,1} \left[ w \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2\alpha) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2\alpha) \end{array} \right. \right].$$

Finalmente, podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx\hbar}}{|p|^\alpha - \lambda^\alpha} dp = -\frac{\hbar\pi}{\lambda^\alpha|x|} \left( H_{2,3}^{2,1} \left[ (\hbar^{-1}\lambda)^\alpha|x|^\alpha \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2\alpha) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 + \alpha)/2\alpha) \end{array} \right. \right] \right. \\ \left. - H_{2,3}^{2,1} \left[ (\hbar^{-1}\lambda)^\alpha|x|^\alpha \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2\alpha) \\ (1, \alpha), (1, 1), (1, (2 - \alpha)/2\alpha) \end{array} \right. \right] \right).$$

Da definição da função  $H$  de Fox temos o seguinte resultado para o caso particular  $\alpha = 2$ ,

$$H_{2,3}^{2,1} \left[ |w|^2 \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, 0) \\ (1, 2), (1, 1), (1, 0) \end{array} \right. \right] = 0 \quad (\text{B.8})$$

bem como

$$H_{2,3}^{2,1} \left[ |w|^2 \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2) \\ (1, 2), (1, 1), (1, 2) \end{array} \right. \right] = H_{1,2}^{1,1} \left[ |w|^2 \left| \begin{array}{l} (1, 1) \\ (1, 1), (1, 2) \end{array} \right. \right] = w^2 H_{1,2}^{1,1} \left[ |w|^2 \left| \begin{array}{l} (0, 1) \\ (0, 1), (-1, 2) \end{array} \right. \right].$$

Lembrando dos casos particulares da função de Fox dados no Capítulo 4, temos:

$$H_{1,2}^{1,1} \left[ -z \left| \begin{array}{l} (0, 1) \\ (0, 1), (1 - b, a) \end{array} \right. \right] = E_{a,b}(z)$$

onde  $E_{a,b}(z)$  é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros. Utilizando a relação [115]

$$E_{2,2}(z) = \frac{\text{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

podemos escrever

$$H_{2,3}^{2,1} \left[ |w|^2 \left| \begin{array}{l} (1, 1), (1, 2) \\ (1, 2), (1, 1), (1, 2) \end{array} \right. \right] = |w|^2 E_{2,2}(-|w|^2) = |w| \text{sen}|w|,$$

de onde segue-se que para  $\alpha = 2$  temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx\hbar}}{|p|^2 - \lambda^2} dp = -\frac{\pi}{\lambda} \text{sen} \frac{\lambda|x|}{\hbar}.$$

---

# Referências Bibliográficas

---

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover, New York, (1972).
- [2] P. Appell et M. J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite*, Gauthier-Villars, Paris, (1926).
- [3] E. W. Barnes, *On functions defined by simple hypergeometric series*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **20**, 253-279, (1908).
- [4] E. W. Barnes, *The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series*, Proc. London Math. Soc. (2) **5**, 59-116, (1907).
- [5] B. L. J. Braaksma, *Asymptotic expansions and continuations for a class of Barnes-integrals*, Compos. Math., **15**, 239-341, (1962-1964).
- [6] S. Bochner, *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes Sind*, Fundamenta Mathematicae, **20**, 262-276, (1933).
- [7] H. Buchholz, *The confluent hypergeometric functions*, Springer Verlag, Berlin, (1969).
- [8] P. L. Butzer and U. Westphal, *An introduction to fractional calculus*, in R. Hilfer (ed.) Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, (2000).
- [9] E. Capelas de Oliveira, *Funções especiais com aplicações*, 2ª Edição, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2011).
- [10] E. Capelas de Oliveira, *Representações integrais e teoremas de adição para as funções especiais*, Tese de Doutorado, IFGW-Unicamp, (1982).
- [11] E. Capelas de Oliveira, *New sum rules of special functions*, N. Cimento, **104B**, 701-707, (1989).

- [12] E. Capelas Oliveira, F. S. Costa and J. Vaz, *The fractional Schrödinger equation for delta potentials*, J. Math. Phys., **51**, 123517, (2010).
- [13] E. Capelas de Oliveira, F. Mainardi and J. Vaz Jr., *Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics*, Eur. Phys. J. Special Topics, **193**, 161-171, (2011).
- [14] M. Caputo, *Elasticità e Dissipazione*, Zanichelli, Bologna, (1969).
- [15] M. Caputo, *The splitting of the free oscillations of the Earth caused by rheology*, Rend. Fis. Acc. Lincei, **1**, 119-125, (1990).
- [16] R. C. Cascaval, E. C. Eckstein, C. L. Frota and J. A. Goldstein, *Fractional telegraph equation*, J. Math. Anal. Appl. **276**, 145-159, (2002).
- [17] W. Chen and S. Holm, *Physical interpretation of fractional diffusion-wave equation via lossy media obeying frequency power law*, arXiv.org/abs/math-ph/0303040, (2003).
- [18] F. S. Costa and E. Capelas de Oliveira, *Fractional thermal systems*, ICMT2011, (2011). (aceito)
- [19] F. S. Costa and E. Capelas de Oliveira, *Wave-diffusion equation with periodic conditions*. A ser submetido para publicação (2011).
- [20] F. S. Costa, J. Vaz, E. Capelas de Oliveira e R. Figueiredo Camargo, *As integrais de Mellin-Barnes e a Função de Fox*, TEMA. Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **12**, 157-169, (2011).
- [21] J. Chen, F. Liu, and V. Anh, *Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables*, J. Math. Anal. Appl., **338**, 1364-1377, (2008).
- [22] R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, NY, (1960).
- [23] C. Li, Dao and P Guo, *Fractional derivatives in complex plane*, Nonl. Anal: Theory, Methods and Applications, **71**, 1857-1869, (2009).
- [24] A. L. Dixon and W. L. Ferrar, *A class of discontinuous integrals*, Quart. J. Math. (Oxford Series) **7**, 81-96, (1936).

- [25] J. Dong and M. Xu, *Some solutions to the space fractional equation using momentum representation method*, J. Math. Phys. **48**, 072105, (2007).
- [26] J. S. Duan, M. Y. Xu, *The problem for fractional diffusion-wave equations on finite interval and Laplace transform*, Appl. Math. J. Chin. Univ. ser. A, **19**, 165-171, (2004).
- [27] D. Dyer, *The convolution of generalized F distribution*, J. Amer. Statist. Assoc., **77**, 184-189, (1982).
- [28] J. S. Duan, *Time- and space-fractional partial differential equations*, J. Math. Phys., **46**, 013504, (2005).
- [29] A. Ebaid, *Analysis of projective motion in view of fractional calculus*, Appl. Math. Modell., **35**, 1231-1239, (2011).
- [30] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, Vols. I, II e III, McGraw-Hill, New York, (1953).
- [31] H. Exton, *Multiple hypergeometric functions and applications*, Wiley, New York, (1976).
- [32] R. Figueiredo Camargo, *Cálculo fracionário e aplicações*, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, Campinas, (2009).
- [33] R. Figueiredo Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *On Some Fractional Green's Functions*, J. Math. Phys., **50**, 043514, (2009).
- [34] R. Figueiredo Camargo, A. O. Chiacchio, and E. Capelas de Oliveira, *Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation*, J. Math. Phys., **49**,1-12, (2008).
- [35] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira, and J. Vaz, Jr., *On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator*, J. Math. Phys. **50**, 123518, (2009).
- [36] C. Fox, *A class of null series*, Proc. London Math. Soc. (2), **24**, 478-493, (1925).
- [37] C. Fox, *Some further contributions to the theory of null series and their connection with null integrals*, Proc. London Math. Soc., (2), **26**, 395-402, (1927).

- [38] C. Fox, *The potential function due to certain plane boundary distributions*, Philos. Mag., (2), **6**, 994-1008, (1928).
- [39] C. Fox, *The orthocenter and some properties of conic sections*, Math. Gaz., **14**, 451-454, (1929).
- [40] C. Fox, *Note on tangential equations of conics sections*, Math. Gaz., **14**, 289-291, (1929).
- [41] C. Fox, *Some kinematical properties of a moving lamina*, Math. Gaz., **14**, 351, (1929).
- [42] C. Fox, *The polar equation of a curve*, Math. Gaz., **14**, 486-487, (1930).
- [43] C. Fox, *A note on Hankel's theorem*, Proc. London Math. Soc. (2), **30**, 18-22, (1938).
- [44] C. Fox, *Applications of Mellin's transformation to integral equations*, Proc. London Math. Soc. (2), **38**, 495-502, (1935).
- [45] C. Fox, *The solution of a moment problem*, J. London Math. Soc., **13**, 12-14, (1938).
- [46] C. Fox, *A problem in dynamic balancing of scanners for radar*, Philos. Mag., **37**, 830-842, (1946).
- [47] C. Fox, *Chain transforms*, J. London Math. Soc., **23**, 229-235, (1948).
- [48] C. Fox, *The mechanical determination of position and velocity of the Earth's surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **45**, 311-315, (1949).
- [49] C. Fox, *The determination of position and velocity on Earth's surface*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **30**, 146-155, (1951).
- [50] C. Fox, *Iterated transforms*, Can. J. Math., **4**, 149-161, (1952).
- [51] C. Fox, *The inversion of convolution transform by differential operators*, Proc. Math. Soc., **4**, 880-887, (1953).
- [52] C. Fox, *Chain transforms*, Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 677-688, (1954).
- [53] C. Fox, *Magic matrices*, Math. Gaz., **40**, 209-211, (1956).

- [54] C. Fox, *A classification of kernels which possess integral transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 401-412, (1956).
- [55] C. Fox, *A generalization of the Cauchy principal value*, Can. J. Math., **9**, 110-117, (1957).
- [56] C. Fox, *A composition theorem for general unitary transforms*, Proc. Amer. Math. Soc., **8**, 880-883, (1957).
- [57] C. Fox, *The Pascal line and its generalizations*, Amer. Math. Monthly, **65**, 185-190, (1958).
- [58] C. Fox, *An application of Mellin transforms to the theory of bivariate statistical distributions*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **53**, 620-628, (1957).
- [59] C. Fox, *The G- and H- functions as symmetrical Fourier kernels*, Trans. Amer. Proc. Amer. Math. Soc., **98**, 395-429, (1961).
- [60] C. Fox, *Integral transforms based upon fractional integration*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **59**, 63-71, (1963).
- [61] C. Fox, *Matrix integral transforms*, J. London Math. Soc., **38**, 407-414, (1963).
- [62] C. Fox, *An inversion formula for a kernel*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **61**, 457-467, (1965).
- [63] C. Fox, *A formal solution of certain dual integral equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **119**, 389-398, (1965).
- [64] C. Fox, *A family of distributions with the same ratio property as normal distribution*, Can. Math. Bull., **8**, 631-636, (1965).
- [65] C. Fox, *Solving integral equations by  $L$  and  $L^{-1}$  operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **29**, 299-306, (1971).
- [66] C. Fox, *Applications of Laplace transform and their inverses*, Proc. Amer. Math. Soc., **35**, 193-200, (1972).

- [67] C. Fox, *Finding latitude and longitude by calculators*, J. Inst. Navigation, **22**, 293-301, (1975).
- [68] X. Guo and M. Xu, *Some physical applications of fractional Schrödinger equation*, J. Math. Phys. **47**, 082104, (2006).
- [69] R. E. Gutiérrez, J. Mauricio Rosário and J. Tenreiro Machado, *fractional order calculus: basic concepts and engineering applications*, Math. Prob. Eng., **2010**, 375858, (2010).
- [70] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7th ed., Academic Press, NY, (2007).
- [71] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, 3rd ed., Wiley, NY, (2003).
- [72] H. J. Haulbddd, A. M. Mathai and R. R. Saxena, *ML functions and their applications*, Int. j. Math. Math. Sci, **8**, 1155-1170, (2005).
- [73] A. Hanyga, *Multi-dimensional solutions of space-time-fractional diffusion equations*, Proc. Royal Soc. A, **458**, 429-450, (2002).
- [74] J. Horn, *Ueber die Convergenz der Hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen*, Math. Ann., **34**, 544-600, (1889) e *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen*, Math. Ann., **105**, 381-407, (1931).
- [75] P. Inizan, *Homogeneous fractional embeddings*, J. Math. Phys., **49**, 082901, (2008).
- [76] X. Jiang, h. Qi and M. Xu, *Exact solutions of fractional Schrödinger equation with a non local term*, J. Math. Phys., **52**, 042105, (2011).
- [77] M. Jeng, S.-L.-Y. Xu, E. Hawkins, and J. M. Schwarz, *On the nonlocality of the fractional Schrödinger equation*, J. Math. Phys., **51**, 062102, (2010).
- [78] A. A. Kilbas, M. Saigo, *On the H-function*, J. Appl. Math. and Stoch. Anal., **12**, 191-204, (1999).
- [79] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, *Mathematics Studies*, Vol.204, Edited by Jan Van Mill, Elsevier, Amsterdam, (2006).

- [80] V. Kiryakova, *In memorian of C. S. Meijer*, *Fract. Cal. Appl. Anal.*, **5**, No 2, 227-237, (2002).
- [81] G. Lauricella, *Sulla funzione ipergeometriche a più variabili*, *Rend. Circ. Math. Palermo*, **7**, 111-158, (1893).
- [82] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics*, *Phys. Rev. E*, **62**, 3135-3145, (2000).
- [83] N. Laskin, *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, *Phys. Lett. A*, **268**, 298-305, (2000).
- [84] E. K. Lenzi, H. V. Ribeiro, H. Mukai and R. S. Mendes, *Continuous-time random walk as a guide to fractional Schrödinger equation*, *J. Math. Phys.*, **51**, 092102, (2010)
- [85] C. P. Li and W. H. Deng, *Remarks on fractional derivatives*, *Appl. Math. and Comp.*, **187**, 777-784, (2007).
- [86] Y. F. Luchko, M. Rivero, J. J. Trujillo and M. P. Velasco, *Fractional models, non-locality, and complex systems*, *Comp. Math. Appl.*, **59**, 1048-1056, (2010).
- [87] E. K. Lenzi, L. R. Evangelista, M. K. Lenzi, h. V. Ribeiro and E. Capelas de Oliveira, *Solutions for a non- Markovian diffusion*, *Phys. Lett. A*, **374**, 4193-4198, (2010).
- [88] N. Laskin, *Fractal and quantum mechanics*, *Chaos*, **10**, 780-790, (2000).
- [89] T. M. MacRobert, *Induction proofs of the relations between certain asymptotic expansions and corresponding generalized hypergeometric series*, *Proc. Roy. Soc. Edinburg*, **58**, 1-13, (1937-38) e *Some formulæ for the E-function*, *Philos. Mag.*, **31**, 254-260, (1941).
- [90] T. M. MacRobert, *Some integrals involving Legendre and Bessel functions*, *Quart. J. Math.*, **11**, 95-100, (1940).
- [91] F. Mainardi, A. Mura and G. Pagnini, *The M-Wright function in time-fractional diffusion process: tutorial survey*, *Int. J. Diff. Eq.*, **2010**, 104505, (2010).
- [92] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, *SIAM Review*, **10**, 422-437, (1968).

- [93] F. Mainardi, *On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation*, Proceeding of VII WASCOM, World Scientific, Singapore (1994).
- [94] F. Mainardi and G. Pagnini, *Salvatore Pincherle: the pioneer of the Mellin-Barnes integrals*, J. Comput. Appl. Math., **153**, 331-342, (2003).
- [95] H. Margenau and G. M. Murphy, *The mathematics of physics and chemistry*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, (1956).
- [96] F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini, *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*, Fract. Calc. Appl. Anal., **4**, 153-192, (2001).
- [97] C. S. Meijer, *On the G-function*, Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam, **49**, 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175, (1946).
- [98] C. S. Meijer, *Über eine Erweiterung der Laplace-Transformation*, Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam **43**, 599-608, 702-711, (1940).
- [99] C. S. Meijer, *Eine neue Erweiterung der Laplace-Transformation*, Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam **44**, 727-737, 831-839, (1941).
- [100] C. S. Meijer, *Multiplikationstheoreme für die Funktion  $G_{p,q}^{m,n}(z)$* , Proc. Kon. Akad. Wet. Amsterdam, **44**, 1062-1070, (1941).
- [101] C. S. Meijer, *Convergentie en divergentie*, Inaugural lecture, P. Noordhoff, Groningen, (1946).
- [102] C. S. Meijer, *Neue Integraldarstellungen für Besselsche Funktionen*, Compositio Math., **8**, 49-60, (1951).
- [103] C. S. Meijer, *Über Wittakersche Bezw. Besselsche Funktionen und deren Produkte*, Nieuw. Archief Wisk. (2), **18**, 10-39, (1936).
- [104] H. Mellin, *Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma und der Hypergeometrischen Funktionen*, Math. Ann., **68**, 305-337, (1910).
- [105] A. M. Mathai, R. K. Saxena, H. J. Haubold, *The H- function, theory and applications*, Springer, New York, (2009).

- [106] F. Mainardi, *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation*, Appl. Math. Lett., **9**, 23-28, (1996).
- [107] S. Momani, *Analytic and approximate solutions of the space- and time-fractional telegraph equations*, Appl. Math. and Comp., **170**, 1126-1134, (2005).
- [108] M. Naber, *Fractional Schrödinger equation*, J. Math. Phys., **45**, 3339-3352, (2004).
- [109] B. N. Narahari and J. W. Hanneken, *Fractional radial diffusion in a cylinder*, J. Mol. Liq., **114**, 147-151, (2004).
- [110] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transforms*, Springer-Verlag, Berlin, (1974).
- [111] M. D. Ortigueira and A.G. Batista, *On the relation between the fractional Brawnian motion and the fractional derivatives*, Phys. Lett. A, **372**, 958-968, (2008).
- [112] M. D. Ortigueira, *The fractional quantum derivative and its integral representations*, Commun. Non. Sci. Num. Sim., **15**, 956-962, (2010).
- [113] E. Orsingher and L. Beghin, *Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with Brownian time*, Prob. Theory and Rel. Fields, **128**, 141-160, (2004).
- [114] E. Orsingher and X. Zhao, *The space-fractional telegraph equation and the related fractional telegraph process*, Chinese Annals of Mathematics Series B, **24**, 45-56, (2003).
- [115] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, (1999).
- [116] A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov and O. I. Marichev, *Integrals and series*, **3**: More special functions, Gordon and Breach, Newark, NJ, (1990).
- [117] R. B. Paris, D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin-Barnes integrals*, Cambridge University Press, Cambridge, (2001).
- [118] S. Pincherle, *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate*, Atti R. Accad. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 4, 694-700, (1888).
- [119] S. Pincherle, *Sulle funzioni ipergeometriche generalizzate*, Atti R. Accad. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 4, 792-799, (1888).

- [120] T. R. Prabhakar, *A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel*, Yokohama Math. J., **19**, 7-25,(1971).
- [121] T. D. Riney, *Coefficients in certain asymptotic factorial expansions*, Proc. Amer. Math. Soc.,**7**, 245-249, (1956).
- [122] T. D. Riney, *A finite recursion formula for the coefficients in asymptotic expansions*, Trans. Amer. Math. Soc., **88**, 214-226, (1958).
- [123] G. Rangarajan and M. Ding, *The first passage time distribution for anomalous diffusion*, Phys. Lett. A, **273**, 322-330, (2000).
- [124] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. **81**, 1-222, (1948).
- [125] R. K. Saxena, *In memorium of Charles Fox*, Fract. Cal. Appl. Anal., **12**, 337-344, (2009).
- [126] H. Silva Oliveira, *Cálculo de ordem arbitrária*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, Campinas, (2010).
- [127] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky and U. Frish (eds.), *Lévy flights and related topics in physics*, Lecture Notes in Physics, **450**, Springer, New York, (1995).
- [128] T. C. Scott, J. F. Babb, A. Dalmano, and J. D. Morgan, *The calculation of exchange forces: general results and specific models*, J. Chem. Phys. **99**, 2841-2854, (1993).
- [129] Y. Singh and M. Kamarujjama, *N-fractional calculus of generalized H-function*, South. Asian Bull. Math., **34**, 481-184, (2010).
- [130] S. Selcuk Bayin, *Fox's H-Functions and the time fractional Schrödinger equation*: arXiv: 1103.3295v2, (2011).
- [131] H. M. Srivastava and P. W. Karlsson, *Multiple Gaussian hypergeometric series*, Chichester, England, (1985).
- [132] I. Tamara Pedron e R. dos Santos Mendes, *Difusão anômala e equações generalizadas de difusão*, Rev. Bras. Ens. Fisi., **27**, n. 2, p. 251-258, (2005).

- [133] J. A. Tenreiro Machado, *Time-Delay in fractional derivatives*, Adv. Diff. Eq., **2011**, 934094, (2011).
- [134] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1969).
- [135] W. Wyss, *The fractional diffusion equation*, J. Math. Phys., **27**, 2782-2785, (1986).
- [136] H. Zhang and F. Liu, *The fundamental solutions of the space, space-time Riesz fractional partial differential equations with periodic conditions*, Numer. Math. J. Chinese Univ., **16**, 181-192, (2007).