ASPECTOS ANALÍTICOS E GEOMÉTRICOS DA PROPRIEDADE DE RADON-NIKODYM EM ESPAÇOS DE BANACH

Geraldo Márcio de Azevedo Botelho
Orientador : Raymundo Alencar

Dissertação apresentada no Departamento de Matemática do Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como pré-requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ASPECTOS ANALÍTICOS E GEOMÉTRICOS DA PROPRIEDADE DE RADON-NIKODYM EM ESPAÇOS DE BANACH

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 15 de agosto de 1989

Raymundo Luiz de Alencar

Prof.Dr. Raymundo Luis de Alencar
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa, Marisa, pelo apoio durante toda realização deste trabalho, e pela paciência durante os momentos críticos.

Ao meu orientador, Raymundo, pela orientação amiga, paciente, exigente e sobretudo, competente.

Aos meus pais, Geraldo e Carmen, pois como em tudo o que faço, neste trabalho ele têm grande participação.

Aos professores Otília T. W. Paques, Antônio V. W. Kumpera, Marco Antônio Teixeira e Mário C. Matos, pois todos, de uma forma ou de outra, muito me ajudaram e/ou me influenciaram.

Aos colegas Joselito de Oliveira, Emília de Mendonça Rosa, Eugênia Opazo Uribe e Carlos Roberto de Moraes, todos sempre presentes nos melhores e piores momentos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ, pelo apoio financeiro.

A minha irmã, Maria Lúcia e a Fausto Mendonça, por suas inestimáveis contribuições.

Agradeço finalmente a Deus, por ter possibilitado todos os agradecimentos acima.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como objetivo principal fazer um estudo detalhado da Propriedade de Radon-Nikodym em espaços de Banach de dimensão infinita, bem como de algumas técnicas a ela relacionadas, e estabelecer a demonstração de uma caracterização desta propriedade.

No Capítulo 1 fazemos uma rápida recordação da Teoria da Medida, tanto escalar quanto vetorial, enunciando alguns teoremas que serão utilizados no desenrolar do texto.

No Capítulo 2 fazemos um estudo resumido da Integral de Bochner, pois é a partir dela que a Propriedade de Radon-Nikodym é definida. Neste resumo apresentamos várias propriedades desta integral, e demonstramos aquelas que julgamos mais relevantes. É também neste capítulo que definimos a propriedade de Radon-Nikodym, e fazemos alguns comentários com o intuito de motivar o estudo dos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3 demonstramos a seguinte caracterização da propriedade de Radon-Nikodym:

Um espaço de Banach tem a Propriedade de Radon-Nikodym se e somente se ele a tem em relação à medida de Lebesgue nos borelianos de $[0, 1]$.

As demonstrações mais recentes desse resultado utilizam técnicas geométricas mais elaboradas da Teoria dos Espaços de Banach. A demonstração que aqui apresentamos lida quase que exclusivamente com a linguagem dos espaços L_p. Esta demonstração baseia-se principalmente nos artigos de Chatterji [7] e Rønnow [25], onde as demonstrações aparecem resumidamente, fazendo uso de outros resultados cujas demonstrações não encontramos na literatura e não mencionam vários fatos que são utilizados. Consequentemente, uma das preocupações foi estabelecer as demonstrações de todos os resultados diretamente envolvidos com esse objetivo, com a exceção daqueles por demais conhecidos e cujas demonstrações são encontradas em qualquer livro da área.

No Capítulo 4 estudamos algumas técnicas mais elaboradas da Geometria dos Espaços de Banach, que surgiram com o estudo da propriedade de Radon-Nikodym. Aqui tentamos também mostrar a interrelação destes conceitos e técnicas geométricas com o que foi estudado anteriormente, mostrando o grau de importância que esta propriedade teve no desenvolvimento mais recente de algumas áreas da Matemática.

O estudo feito neste capítulo baseia-se nos artigos de Davis e Phelps [8], Huff [20] e Huff e Morris [21].

No Apêndice provamos alguns resultados usados ao longo do texto e cujas demonstrações foram omitidas. Definições e enunciados de teoremas também aparecem neste Apêndice.

Finalizando, diríamos que uma preocupação também foi a de tornar esta dissertação um texto acessível ao aluno que após tomar cursos introdutórios de Teoria da Medida, Topologia Geral e Análise Funcional, venha a se interessar pela área. Nesse sentido incluimos as demonstrações de alguns teoremas da Teoria da Medida (escalar), notadamente o Teorema do Isomorfismo de Halmos e Von Neumann, que são frequentemente utilizados, mas cujas demonstrações quase sempre são omitidas. Estes teoremas encontram-se em Halmos [19], e utilizam uma linguagem que hoje não é mais usada, o que nos levou a traduzi-la para a linguagem atual.

Nesse sentido, preocupamo-nos em escrever todas as demonstrações deste texto de maneira clara e completa, tornando-o o mais acessível possível. O Apêndice também foi incluído com esse mesmo objetivo.

Capítulo 1

MEDIDAS ESCALARES E VETORIAIS

Neste capítulo introduzimos a notação e as definições relativas à teoria da medida, tanto escalar como vetorial, bem como resultados desta teoria que faremos uso ao longo deste trabalho. As demonstrações serão omitidas, visto que elas aparecem nos textos clássicos.

1.1 - Definição:

- Seja Ω um conjunto e Σ uma coleção de subconjuntos de Ω. Σ será uma σ-álgebra de Ω, se :
  - i) $\emptyset, \Omega \in \Sigma$;
  - ii) Se A $\in \Sigma$, então $A^c = (\Omega - A) \in \Sigma$;
  - iii) Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de elementos de Σ, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.
- Se C é uma coleção de subconjuntos de Ω, a menor σ-álgebra de Ω que contém C é chamada de σ-álgebra gerada por C.
- Se $(X, \Im)$ é um espaço topológico, a σ-álgebra gerada por $\Im$ é chamada de σ-álgebra de Borel de X; e seus elementos são chamados de borelianos.
  Notação : $\beta(X)$.
- Se Σ é uma σ-álgebra de Ω, uma medida sobre Σ é uma aplicação $\mu : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tal que:

- i) $\mu(E) \geq 0$, para todo $E \in \Sigma$;
- ii) μ é σ-aditiva; isto é:

Se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de elementos de Σ, dois a dois disjuntos, então $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

- Uma medida μ sobre Σ é finita se $\mu(\Omega) < \infty$.

- Um espaço de medida é uma terna (Ω, Σ, μ) onde Σ é uma σ-álgebra de Ω e μ é uma medida sobre Σ.

- Uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow E$, onde E é um espaço vetorial, é chamada simples se existirem escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ e elementos $A_1, A_2, ..., A_n$ de Σ, disjuntos, tais que:

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(\omega)$$

onde $\chi_{Ai}(\omega) = 0$ se $\omega \notin A_i$ e $\chi_{Ai}(\omega) = 1$ se $\omega \in A_i$.

- Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ é dita mensurável se para todo $\varepsilon \in \mathbf{R}$, o conjunto $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < \varepsilon\}$ pertencer a Σ.

- Sejam f, g funções definidas em Ω. Dizemos que $f = g$ $\mu - q.s.$ se existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) = 0$ e $f(\omega) = g(\omega)$ para todo $\omega \in A^C$.

- Seja $1 \leq p < \infty$. $L_p(\mu)$ é o espaço de Banach das classes de funções p-integráveis definidas em Ω, com a norma

$$\|f\|_p = (\int_{\Omega} | f |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

- $L_\infty(\mu)$ é o espaço de Banach das classes de funções μ-essencialmente limitadas definidas em Ω, com a norma

$$\|f\|_\infty = inf\{\alpha \in \mathbf{R} : \mu(\mathrm{f}^{-1}((\alpha, \infty)) = 0\}$$

- Uma medida com sinal é uma aplicação $\lambda : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ definida em uma σ-álgebra Σ que seja σ-aditiva.

- Dizemos que λ é absolutamente contínua em relação à medida $\mu : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ se $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$.
Notação : $\lambda \ll \mu$ ou λ é μ-contínua.

- λ é finita se $| \lambda(\Omega) | < \infty$.

- A variação de λ é uma aplicação $| \lambda |: \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$,
  definida por $| \lambda | (E) = sup_\pi \{\Sigma_{A\in\pi} \lambda(A)\}$;
  onde o supremo é calculado sobre todas as partições π de E em um número finito de elementos disjuntos de Σ. Note que $| \lambda |$ é uma medida.

- Se A é um boreliano de $\mathbf{R}$, o espaço de medida $(A, \beta(A), m)$ denotará a medida de Lebesgue nos borelianos de A. Neste caso usaremos $L_p(A)$ para denotar $L_p(m)$.

Enunciaremos agora alguns resultados básicos que serão utilizados em demonstrações futuras. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita.

1.2 Proposição :
Seja $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência decrescente em Σ, isto é: para todo n, $A_{n+1} \subseteq A_n$; tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, então $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

Demonstração : veja [27] pág. 17.

1.3 Teorema da Convergência Monótona:
Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas em Ω tais que:

- i) para todo $x \in \Omega, 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...$

- ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$;

então f é mensurável e $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, para todo $E \in \Sigma$.

Demonstração : veja [27] pág. 22.

1.4 Corolário:
Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas em Ω. tais que:

- i) para cada n e para cada $x \in \Omega, f_n(x) \geq 0$

- ii) para cada $x \in \Omega, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$;

então f é mensurável e $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$ para todo $E \in \Sigma$.

Demonstração: veja [27] pág. 23.

1.5 Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue:
Sejam $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas em Ω e $g \in L_1(\mu)$ tais que para todo n, $| f_n | \leq g$. Então se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f pontualmente $\mu - q.s.$, f é integrável e $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$.

Demonstração: veja [2] pág. 44.

1.6 Observação:
No Teorema acima, a hipótese da convergência $\mu - q.s.$ pode ser trocada pela convergência em medida, isto é:
Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergir a f em medida, ou seja: para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{\omega \in \Omega : | f_n(\omega) - f(\omega) | \geq \varepsilon\}) = 0$$

então o Teorema 1.5 continua verdadeiro. Para a demonstração desse fato veja [26] pág. 92.

1.7 Lema de Riemann-Lebesque:
Seja $f \in L_1(\mathbf{R})$. Então

$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f(x) sen(tx) dm = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f(x) cos(tx) dm = 0.$

Demonstração: veja [17] pág. 93 ou [18] pág. 56.

1.8 Teorema de Radon-Nikodym:
Dadas $\lambda : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$ medida com sinal finita e $\mu : \Sigma \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, medida tais que $\lambda \ll \mu$, existe $f \in L_1(\mu)$ tal que $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. Neste caso f é dita derivada de Radon-Nikodym de λ em relação a μ. Notação: $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$.

Demonstração: ver [2] pág. 85.

1.9 Observação:
Em [27] pág. 129 está demonstrada a versão complexa do Teorema 1.8, isto é: quando μ e λ assumem valores em $\mathbf{C}$.

1.10 Teorema de Egoroff:

Se μ é finita e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções mensuráveis definidas em Ω tais que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f pontualmente $\mu-q.s.$, então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f quase uniformemente, isto é: dado $\varepsilon > 0$, existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \varepsilon$ e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f em A^c.

Demonstração: veja [2] pág. 74.

Passemos agora à Teoria das Medidas Vetoriais:

1.11 Definição:

Seja $(X, \| \, \|)$ um espaço de Banach.

- uma medida vetorial em X é uma aplicação $F : \Sigma \longrightarrow X$, onde Σ é uma σ-álgebra (ou álgebra) e F é finitamente aditiva, isto é: Se E_1 e E_2 são elementos disjuntos de Σ, então:

  $F(E_1 \bigcup E_2) = F(E_1) + F(E_2)$.

- uma medida vetorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ é σ-aditiva se para toda sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos disjuntos de Σ com $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, tivermos que $F(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n)$ em norma, ou seja:

  $\lim_{m \to \infty} \|F(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \sum_{n=1}^{m} F(A_n)\| = 0$

- a variação de uma medida vetorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ é definida por: $\mid F \mid (E) = sup_{\pi} \sum_{A \in \pi} \|F(A)\|$ onde o supremo é calculado sobre todas as partições π de E em um número finito de elementos disjuntos de Σ.

- a medida vetorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ é dita de variação limitada se $\mid F \mid (\Omega) < \infty$.

- se μ é uma medida em Σ e $F : \Sigma \longrightarrow X$ é medida vetorial, dizemos que F é μ-contínua ($F \ll \mu$) se

$$\lim_{\mu(E) \to 0} F(E) = 0.$$

1.12 Teorema (Pettis):

Seja Σ σ-álgebra, $F : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial σ-aditiva e μ medida finita em Σ. Então F é μ-contínua se e somente se $\mu(E) = 0$ implicar $F(E) = 0$.

Demonstração: veja [11] pág. 10.

1.13 Exemplo:

Seja Σ a σ-álgebra dos subconjuntos Lebesque-mensuráveis de $[0, 1]$ e seja X um espaço de Banach, $X \neq \{0\}$. Do Teorema de Hahn-Banach, sabemos que existe um operador linear contínuo não nulo

$$T : L_1([0,1]) \longrightarrow X.$$

Para cada $E \in \Sigma$, defina $F(E) = T(\chi_E)$.

Sejam E_1 e E_2 elementos disjuntos de Σ. Então

$$F(E_1 \bigcup E_2) = T(\chi_{E1 \bigcup E2}) = T(\chi_{E1} + \chi_{E2}) = T(\chi_{E_1}) + T(\chi_{E_2}) = F(E_1) + F(E_2),$$

e portanto F é medida vetorial. Mais ainda, para cada $E \in \Sigma$, temos

$$\|F(E)\| = \|T(\chi_E)\| \leq \|T\| \|\chi_E\| = \|T\|. \int_{[0,1]} \chi_E dm = \|T\|.m(E).$$

Dessa forma, se $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de elementos disjuntos de Σ, usando 1.2 e o fato de que T ser linear e contínua implica que $\|T\| < \infty$, temos que:

$$\lim_{m \to \infty} \|F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - \sum_{n=1}^{m} F(E_n)\| = \lim_{m \to \infty} \|F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) - F(\bigcup_{n=1}^{m} E_n)\| = \lim_{m \to \infty} \|F(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n)\| \leq$$

$\leq \lim_{m \to \infty} \|T\|.m(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n) = 0$. Portanto F é σ-aditiva.

Mostremos que F é de variação limitada: se $E \in \Sigma$, então:

$$| F | (E) = sup_{\pi} \Sigma_{A \in \pi} \|F(A)\| \leq \|T\|.sup_{\pi} \Sigma_{A \in \pi} m(A) = \|T\|. | m | (E) < \infty.$$

Mais ainda se m(E) = 0, então $\|T\|m(E) = 0$, o que implica que $\|F(E)\| = 0$, o que por sua vez implica que F(E) = 0. Logo por 1.12 temos que $F \ll m$.

1.14 Observação:

É possível mostrar que a variação de F é sempre finitamente aditiva, e será σ-aditiva quando e apenas quando F for σ-aditiva.

Para as demonstrações dos resultados acima, bem como para um estudo detalhado da Teoria de Medidas Vetoriais e suas aplicações, a melhor referência é, sem dúvida alguma, [11]. Ver também [12].

Utilizando a mesma técnica usada para demonstrar a σ-aditividade da medida vetorial do exemlo 1.13, demonstra-se facilmente o seguinte resultado:

1.15 Proposição:

Toda medida vetorial que é absolutamente contínua em relação a uma medida finita é σ-aditiva.

1.16 Teorema:

Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra de $\Omega, F : \mathcal{F} \longrightarrow X$ uma medida vetorial μ-contínua de variação limitada e Σ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{F}$. Então existe uma única medida vetorial μ-contínua de variação limitada $\bar{F} : \Sigma \longrightarrow X$, extensão de F a Σ; isto é

$\bar{F}(E) = F(E)$ sempre que $E \in \mathcal{F}$.

Demonstração: veja [11] pág. 27.

Vários outros resultados da Teoria da Medida e de Medidas Vetoriais são necessários neste trabalho, mas optamos por enunciá-los apenas no momento em que serão usados.

Capítulo 2

A INTEGRAL DE BOCHNER E A PROPRIEDADE DE RADON-NIKODYM

Depois de formulada a Teoria da Integral de Lebesgue, e de comprovada sua utilidade, apareceram várias versões de Teoria de Integração generalizando a integral de Lebesgue. Uma extensão natural é a formulação de uma teoria de integração para funções a valores em um espaço de Banach, em relação a uma medida escalar. Nesta direção surgiu a integral de Bochner(1933), também conhecida como integral de Dunford e Schwartz, ou ainda como primeira integral de Dunford.

Existem outras formulações para esse tipo de integral, tais como a integral de Pettis e a integral de Gelfand, cada uma com seus próprios méritos, mas nenhuma se mostrou tão rica em propriedades como a integral de Bochner. Nesta, vários dos teoremas fundamentais da integral de Lebesgue têm sua versão correspondente no caso vetorial. Apesar disso, um dos principais teoremas da Teoria de Integração de Lebesgue falha para a integral de Bochner, como veremos mais tarde.

Vejamos agora como é definida a integral de Bochner, sua relação com a integral de Lebesgue e as extensões ao caso vetorial de várias propriedades da integral de Lebesgue, bem como alguns teoremas do Capítulo 1.

Ao longo deste capítulo, (Ω, Σ, μ) é uma espaço de medida finita, X é um espaço de Banach e X' é o seu dual topológico.

2.1 Definição:

- Uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow X$ é μ-mensurável se existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples modeladas em Σ a valores em X, tais que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 \ \mu - q.s..$$

- f é fracamente μ-mensurável, se $x'f$ é μ-mensurável, para todo $x' \in X'$, onde $x'f(\omega) = x'(f(\omega))$ para todo $\omega \in \Omega$.

Obviamente toda função mensurável é fracamente mensurável. Mais tarde veremos um contraexemplo da recíproca.

Cumpre observar que quando μ é uma medida completa, isto é, todo sub-conjunto de um conjunto de medida nula pertence à σ-álgebra, e f tem imagem μ-essencialmente separável, a definição acima coincide com a definição de mensurabilidade contida em 1.1. Para demonstração veja o Apêndice.

2.2 Proposição:

- i) se $f, g : \Omega \to X$ são μ-mensuráveis, então $f + g$ é μ-mensurável.
- ii) se $f : \Omega \to X$ é μ-mensurável e α é um número real, então αf é μ-mensurável.
- iii) se para cada n, $f_n : \Omega \to X$ é μ-mensurável e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f pontualmente $\mu - q.s.$; então f é μ-mensurável.

Demonstração: i) e ii) decorrem imediatamente da definição 2.1.

Façamos iii): para cada n, como f_n é μ-mensurável, existe uma função simples g_n e um conjunto $E_n \in \Sigma$ tais que $\mu(E_n) = 0$ e

$$\|g_n(x) - f_n(x)\| < \tfrac{1}{n} \text{ para todo } x \notin E_n.$$

Considere $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Como $\lim_{n\to\infty} f_n = f \ \mu - q.s.$, existe $F \in \Sigma$ com $\mu(F) = 0$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \notin F$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $N_1 \in \mathbf{N}$, $N_1 \geq \frac{2}{\varepsilon}$.

Portanto, se $n \geq N_1$, $\|g_n(x) - f(x)\| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_1} < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x \notin E$.

Seja $N_2 \in \mathbf{N}$ tal que se $n \geq N_2$ então $\|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \notin F$.

Agora, se $x \notin E \cup F$ e $n \geq$ máx $\{N_1, N_2\}$ temos:

$$\|g_n(x) - f(x)\| \leq \|g_n(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = 0$ $\mu - q.s.$; e portanto f é μ-mensurável.

Neste ponto, já podemos generalizar um resultado de Capítulo 1, a saber o Teorema 1.10.

2.3 Teorema de Egoroff:
Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções μ-mensuráveis, definida em Ω a valores em X que converge pontualmente $\mu - q.s.$ a f, então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge μ-quase uniformemente a f.

Demonstração: Basta substituir módulo por norma na demonstração de 1.10.

A fim de demonstrar o Teorema de Pettis (2.7), que é muito importante, torna-se necessária a definição abaixo, bem como o Lema que se segue.

2.4 Definição:

- uma aplicação $f : \Omega \to X$ é elementar se assume apenas um número enumerável de valores; isto é: existem sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X e $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ tais que $E_i \cap E_j = 0$ se $i \neq$ e $f = \sum_{n=1}^{\infty} x_i \chi_{E_i}$.

- sejam B um subconjunto de X e $\varepsilon > 0$. O conjunto $M_\varepsilon \subseteq X$ é uma ε-rede para B se para todo $z \in B$, existe $y \in M_\varepsilon$ tal que $\|y - z\| \leq \varepsilon$. Se M_ε for finito, dizemos que é uma rede ε-rede finita para B.

- $B \subseteq X$ é totalmente limitado se para cada $\varepsilon > 0$, existir uma ε-rede finita para B.

2.5 Lema:
Todo subconjunto totalmente limitado de X é separável em X.

Demonstração: ver [22] pág. 413.

2.6 Proposição:
Seja $f : \Omega \to X$ μ-mensurável e $Y \subseteq X$ aberto ou fechado. Então $f^{-1}(Y)$ pode ser escrito como a união de um elemento de Σ e um subconjunto de um conjunto de medida nula.

Demonstração: Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sequência de funções simples tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n(\omega) - f(\omega)\| = 0$ para todo $\omega \in A^c$ onde $\mu(A) = 0$;
e seja Y um subconjunto fechado de X.

Defina $E_{nk} = \{\omega \in A^c : dist(f_n(\omega), Y) \leq \frac{1}{k}\}$.
Cada $E_{nk} \in \Sigma$ e

$$f^{-1}(Y) \cap A^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_{nk};$$

e portanto $f^{-1}(Y) \cap A^c \in \Sigma$ e $\mu(A) = 0$.

Logo $f^{-1}(Y) = (f^{-1}(Y) \cap A^c) \cup B$; onde $B \subseteq A$.

Se Y é aberto, $f^{-1}(Y) \cap A^c = A^c - f^{-1}(Y^c)$. Mas Y^c é fechado, logo $f^{-1}(Y^c)$ pode ser escrito da forma desejada. A demonstração termina ao escrevermos

$$f^{-1}(Y) = [f^{-1}(Y) \cap A^c] \bigcup [f^{-1}(Y) \cap A].$$

2.7 Teorema da mensurabilidade de Pettis:
Uma aplicação $f : \Omega \to X$ é μ-mensurável se e somente se as condições abaixo são satisfeitas:

- i) existe $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$ e $f(E^c)$ é separável em X;
- ii) f é fracamente μ-mensurável.

Demonstração: Suponha que f seja μ-mensurável. Logo existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de função simples definidas em Ω a valores em X tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ $\mu - q.s.$.

Pelo Teorema 2.3, temos que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f μ-quase uniformemente. Dessa forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $E_n \in \Sigma$ tal que $\mu(E_n) < \frac{1}{n}$ e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f em E_n^c, isto é:
dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $x \in E_n^c$ e $m \geq n_\varepsilon$, então $\|f_m(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Logo, para cada $\varepsilon > 0$, tome $M_\varepsilon = f_{n_\varepsilon}(\Omega)$, que é um conjunto finito, e então para cada $z \in f(E_n^c)$, $z = f(x)$ onde $x \in E_n^c$, considere $y = f_{n_\varepsilon}(x) \in M_\varepsilon$ e $\|f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Portanto M_ε é uma ε-rede finita para $f(E_n^c)$; e consequentemente $f(E_n^c)$ é totalmente limitado. De acordo com o Lema 2.5, $f(E_n^c)$ é separável, para todo n; e nesse caso, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n^c) = f(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c)$ é separável.

Mas $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\mu(E_n) < \frac{1}{n}$ para todo n, logo $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ por 1.2.

Chame $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ e obtenha i) . ii) é óbvia.

Reciprocamente, de acordo com i) seja $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ e $f(E^c)$ é separável. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência densa em $f(E^c)$. Para cada n, $x_n \in X$ e pelo Teorema de Hahn-Banach existe um funcional linear contínuo $x'_n \in X'$ tal que

$$x'_n(x_n) = \|x_n\| \text{ e } \|x'_n\| = 1.$$

Então se $x \in E^c$, por um lado temos que

$$\|f(x)\| = sup_{x' \in X'_{\|x'\| \leq 1}} \mid x'f(x) \mid \geq sup_n \mid x'_n f(x) \mid,$$

e por outro lado que $f(x) \in f(E^c)$.

Logo existe uma subsequência $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a $f(x)$, e portanto $\|f(x)\| = \lim_{j\to\infty} \|x_{n_j}\|$, e como $(x'_{n_j}(x_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$ converge a $x'_{n_j}(f(x))$, temos que

$$(\|x'_{nj}(x_{nj})\|)_{n=1}^{\infty}$$

converge a $| x'_{nj}(f(x)) |$ e então temos que

$$\|f(x)\| = \lim_{n\to\infty} | x'_{nj}(f(x) | \leq sup_n | x'_n f(x) | .$$

Logo para todo $x \in E^c$, $\|f(x)\| = sup_n | x'_n f(x) |$.

Em consequência a função $\|f(\ )\|$ é μ-mensurável, por ser o supremo de $| x'_n f(\ ) |$, que por ii) são μ-mensuráveis.

Da mesma maneira as funções $g_n = \|f - x_n\|$ são μ-mensuráveis para cada n.

Seja agora $\varepsilon > 0$ e $E_n = \{\omega \in \Omega : g_n(\omega) < \varepsilon\}$. Por 2.6, para cada n, existe $B_n \in \Sigma$ tal que $E_n = B_n \cup A_n$, onde $A_n \subseteq C_n$ e $\mu(C_n) = 0$. Definimos:

- $g_\varepsilon : \Omega \longrightarrow X$;
- $g_\varepsilon(\omega) = x_n$ se $\omega \in (B_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j) = E_{n,\varepsilon}$;
- $g_\varepsilon(\omega) = 0$ caso contrário.

Assim temos que, se $\omega \in (B_n - \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j)$ então $\omega \in E_n$ e $\|g_\varepsilon(\omega) - f(\omega)\| < \varepsilon$. Se $\omega \notin E_n$ para todo n, $\omega \in E$ e $\mu(E) = 0$. Portanto f pode ser aproximada por funções de imagem μ-essencialmente separáveis ($g_\varepsilon(E^c)$ é enumerável e $\mu(E) = 0$).

Além disso, como $E_{n,\varepsilon} \cap E_{k,\varepsilon} = \emptyset$ para $n \neq k$; g_ε tem a forma

$$g_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{E_{n,\varepsilon}}.$$

Agora, fazendo $\varepsilon = \frac{1}{m}$ para $m = 1, 2, ...,$ obtemos uma sequência $(g_m)_{m=1}^{\infty}$ de funções elementares tal que:

$\|f(\omega) - g_m(\omega)\| < \frac{1}{m}$ $\mu - q.s.$ para todo $\omega \in E^c$.

Indicando $g_m = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n,m}\chi_{E_{n,m}}$ onde para cada m, $(E_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de elementos disjuntos de Σ, como μ é finita, para cada m existe $q_m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\bigcup_{n=q_m+1}^{\infty} E_{n,m}) < \frac{1}{m}$; e considere a sequência $(g'_m)_{m=1}^{\infty}$ de funções simples definidas por

$$g'_m = \sum_{n=1}^{q_m} x_{n,m}\chi_{E_{n,m}}$$

Logo $\lim_{m\to\infty} \|g'_m - f\| = 0$ $\mu - q.s.$, e consequentemente f é μ-mensurável.

2.8 Corolário:
$f : \Omega \to X$ é μ-mensurável se e somente se f é o limite uniforme $\mu - q.s.$ de uma sequência de funções elementares μ-mensuráveis.

Demonstração: Basta olhar o final da demonstração anterior.

2.9 Exemplo:
Uma aplicação fracamente μ-mensurável que não é μ-mensurável. Considere o espaço de Hilbert $l_2([0,1])$ que não é separável, e $\{e_t : t \in [0,1]\}$ sua base ortonormal.

Definimos $f : [0,1] \to l_2([0,1])$, $f(t) = e_t$.

Para cada $x' \in (l_2([0,1]))'$, pelo Teorema da Representação de Riesz-Frechet(ver [5], pág. 81), sabemos que existe um único elemento e $\in l^2([0,1])$ tal que
$x'(x) =< x, e >$ para todo $x \in l_2([0,1])$; logo $x'f(t) =< f(t), e >=< e_t, e >$.

Mas como $\{e_t : t \in [0,1]\}$ é ortonormal, demonstra-se a partir da desigualdade de Bessel (ver [1], pág. 122) que $< e_t, e >= 0$ a menos de um número enumerável de índices.

Logo, a menos de um conjunto E, de medida de Lebesgue nula, $x'f = 0$, isto é: $x'f = 0$ $m - q.s$, para todo $x' \in (l_2([0,1]))'$; e dessa forma provamos que f é fracamente m-mensurável.

Por outro lado, se $E \subseteq [0,1]$, então $f(E^c)$ é separável se e somente se E^c é enumerável, pois se E^c não for enumerável, então $f(E^c)$ também não será, dado que f é injetora.

Logo $f(E^c)$ é separável apenas se $m(E^c) = 0$, e neste caso teríamos $m(E) = 1$. Portanto f não satisfaz 2.7.ii), logo f não é m-mensurável.

Vejamos agora a definição da integral de Bochner, e notemos que esta definição, bem como os resultados que a seguem, mostram o quão estreita é a relação desta integral com a de Lebesgue.

2.10 Definição:

Uma aplicação $f : \Omega \to X$, μ-mensurável, é μ-Bochner-integrável se existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples definidas em Ω a valores em X tal que

$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0$, onde $\int$ é a integral de Lebesgue.

Neste caso, se $f_n = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{E_i}$, defina $\int_E f_n d\mu = \sum_{i=1}^{m} x_i \mu(E_i \cap E)$ e

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

para cada $E \in \Sigma$.

$\int_E f d\mu$ é chamado de integral de Bochner de f sobre E em relação a μ.

2.11 Observação:

Demonstra-se que o limite acima existe e que independe da sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ (ver Apêndice). Dessa forma a integral fica bem definida.

O teorema abaixo caracteriza as funções Bochner-integráveis por meio de funções Lebesgue-integráveis.

2.12 Teorema:

Uma aplicação $f : \Omega \to X \mu$-mensurável é μ-Bochner-integrável, se e somente se $\|f\|$ é μ-Lebesgue-integrável, isto é:

$$\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty.$$

Demonstração: Suponha f μ-Bochner-integrável. Logo existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de função simples definidas em Ω a valores em X tal que
$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0$. Então:

$$\int_\Omega \|f\| d\mu = \int_\Omega \|f_n - f + f_n\| d\mu \leq \int_\Omega \|f_n - f\| d_\mu + \int_\Omega \|f_n\| d\mu < \infty$$

para n suficientemente grande, pois cada f_n é simples e μ é finita. Logo, $\|f\|$ é μ-Lebesgue-integrável.

Reciprocamente temos, por hipótese, que f é μ-mensurável e $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$. Por 2.8, existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de aplicações elementares μ-mensuráveis tal que

$\|f - f_n\| \leq \frac{1}{n}\ \mu - q.s.$ para todo n.

Logo

$$\tfrac{1}{n} \geq \|f_n - f\| \geq |\ \|f_n\| - \|f\|\ | \geq \|f_n\| - \|f\|\ \mu - q.s.,$$

para todo n. Portanto, $\|f_n\| \leq \|f\| + \frac{1}{n}\ \mu - q.s.$ para todo n, o que implica que $\int_\Omega \|f_n\| d\mu \leq \int_\Omega (\|f\| + \frac{1}{n}) d\mu$; e então

$$\int_\Omega \|f_n\| d\mu \leq \int_\Omega \|f\| d\mu + \frac{1}{n}\mu(\Omega) < \infty$$

pois $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$ e μ é finita. Logo $\|f_n\|$ é μ-Lebesgue-integrável, para todo n.

Mas cada f_n é elementar, então
$f_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_n^m \chi_{E_n^m}$ onde para todo $m, n \in \mathbf{N}$, $x_n^m \in X$, $E_n^m \in \Sigma$, e $E_n^i \cap E_n^j = \emptyset$ se $i \neq j$; para todo n.

Como $\int_\Omega \|f_n\| d\mu < \infty$ para cada n, 1.2. implica que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\bigcup_{m=j}^{\infty} E_n^j} \|f_n\| d\mu = 0.$$

Logo, para cada n, existe $p_n \in \mathbf{N}$, tal que

$$\int_{\bigcup_{m=P_n+1}^{\infty} E_n^m} \|f_n\| d\mu < \frac{\mu(\Omega)}{n}.$$

Chame $g_n = \sum_{m=1}^{p_n} x_n^m \chi_{E_n^m}$. Logo $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções simples e

$$\int_\Omega \|f - g_n\| d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu + \int_\Omega \|f - g_n\| d\mu \leq \int_\Omega \frac{1}{n} d\mu +$$

$$+ \int_\Omega \|\sum_{m=P_n+1}^{\infty} x_n^m \chi_{E_n^m}\| d\mu = \frac{\mu(\Omega)}{n} + \int_{\bigcup_{m=P_n+1}^{\infty} E_n^m} \|f_n\| d\mu < \frac{\mu(\Omega)}{n} + \frac{\mu(\Omega)}{n} = \frac{2\mu(\Omega)}{n}$$

Logo $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - g_n\| d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2\mu(\Omega)}{n} = 0$; o que implica que f é μ-Bochner-integrável.

Abaixo demonstramos a extensão do Teorema 1.5. para o caso vetorial. A validade desta extensão esboça a alta aplicabilidade da integral de Bochner.

2.13 Teorema da convergência dominada:
Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de aplicações de Ω em X, μ-Bochner-integráveis. Se $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge em medida para f μ-mensurável, isto é: para todo $\varepsilon > 0$,
$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in \Omega : \|f_n(x) - f(x)\| \geq \varepsilon\}) = 0$, e se existe uma função g, definida em Ω μ-Lebesgue-integrável tal que $\|f_n\| \leq g$ $\mu - q.s.$, para todo n; então f é μ-Bochner-integrável, e para todo $E \in \Sigma$,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu, \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

Demonstração: Como $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ em medida, então $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ em medida, logo existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_{n_k} - f\| = 0 \mu - q.s.$, (ver [1] pág. 93). Portanto $\|f\| \leq g$.

Agora para cada n, $\|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\|$, portanto

$$\int_\Omega \|f\| d\mu \leq \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu + \int_\Omega \|f_n\| d\mu \leq 2\int_\Omega g d\mu + \int_\Omega \|f_n\| d\mu < \infty,$$

pois cada f_n é μ-Bochner-integrável e g é μ-Lebesgue- integrável. Logo, f é μ-Bochner-integrável.

Como $\|f - f_n\| \leq 2g$ e $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ em medida, pelo Teorema da Convergência Dominada escalar com a hipótese da convergência em medida (ver 1.6), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - f_n\| d\mu = 0;$$

e portanto $\int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu$.

Vejamos mais algumas propriedades conhecidas da integral de Lebesgue que continuam válidas para a de Bochner.

2.14 Teorema:
Se $f : \Omega \longrightarrow X$ é μ-Bochner-integrável, então

- i) para todo $E \in \Sigma$, $\|\int_E f d\mu\| \leq \int_E \|f\| d\mu$.

- ii) $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f d\mu = 0$
- iii) se $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de elementos disjuntos de Σ,

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Demonstração:

- i) Seja $E \in \Sigma$. Se f for simples, isto é: $f = \sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{A_i}$, onde para cada i, $x_i \in X$ e $A_i \in \Sigma$, temos que: $\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E \cap A_i)$, e portanto

$$\| \int_E f d\mu \| = \| \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(A_i \cap E) \| \le \sum_{i=1}^{n} \| x_i \mu(A_i \cap E) \| = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| \mid \mu(A_i \cap E) \mid = \int_E \| f \| d\mu.$$

Para o caso geral existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples tal que $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$. Logo,

$$\| \int_E f d\mu \| = \lim_{n\to\infty} \| \int_E f d\mu \| \le \lim_{n\to\infty} \int_E \| f_n \| d\mu = \int_E \| f \| d\mu.$$

- ii)usando este resultado para funções escalares,temos que $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \| f \| d\mu = 0$; e de i) decorre que

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \| \int_E f d\mu \| \le \lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \| f \| d\mu = 0.$$

- iii) como f é μ-Bochner-integrável, temos que $\| \int_{E_n} f d\mu \| \le \int_E \| f \| d\mu$ para cada n, e $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} \| f \| d\mu \le \int_{\Omega} \| f \| d\mu < \infty$. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f d\mu$ é uma série absolutamente convergente, e portanto, convergente.

  Como $(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n)_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência decrescente em Σ cuja interseção é vazia, temos que

  $\lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n) = 0$; logo por i), temos:

$$\lim_{m\to\infty} \| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \sum_{n=1}^{m} \int_{E_n} f d\mu \| = \lim_{m\to\infty} \| \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu - \int_{\bigcup_{n=1}^{m} E_n} f d\mu \| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \| \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} f d\mu \| \le \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{n=m+1}^{\infty} E_n} \| f \| d\mu = 0$$

Logo

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

2.15 Observação:
A integral de Bochner goza também das duas propriedades abaixo. Para as demonstrações, veja [11] págs. 46 e 47.

- Se $f : \Omega \longrightarrow X$ é μ-Bochner-integrável, ao definirmos $F(E) = \int_E f d\mu$ para cada $E \in \Sigma$, temos que F é medida vetorial de variação limitada, absolutamente contínua em relação a μ e para cada $E \in \Sigma$, $| F | (E) = \int_E \|f\| d\mu$.
- Se $f, g : \Omega \longrightarrow X$ são μ-Bochner-integráveis e para todo $E \in \Sigma$, $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$, então $f = g$ $\mu - q.s.$.

De forma análoga àquela feita em 1.1, podemos definir os espaços L_p em função da integral de Bochner.

2.16 Definição:
Seja $1 \leq p < \infty$. Definimos $L_p(\mu, X)$ como sendo o conjunto das classes de funções definidas em Ω a valores em X tais que $\int_\Omega \|f\|^p d\mu < \infty$.

A relação $\|f\|_p = (\int_\Omega \|f\|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ define uma norma em $L_p(\mu, X)$; e $(L_p(\mu, X); \|.\|_p)$ é um espaço de Banach.

Definimos $L_\infty(\mu, X)$ como sendo o conjunto das classes de funções $f : \Omega \longrightarrow X$ tais que $\|f\|$ é μ- essencialmente limitada.
A relação $\|f\|_\infty = supess\|f\| = inf\{\alpha \in \mathbf{R} : \mu(\|f\|^{-1}((\alpha, \infty)) = 0\}$ define uma norma em $L_\infty(\mu, X)$; e $(L_\infty(\mu, X); \|.\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

2.17 Observação:
As demonstrações das afirmações acima são exatamente análogas às do caso escalar (ver [5] pág. 57).

Como já dissemos, um importante teorema da teoria de integração de Lebesgue não é válido para a integral de Bochner. Trata-se do Teorema de Radon-Nikodym(1.8).

Mas ao contrário do esperado, esse fato propiciou um maior desenvolvimento da teoria dos espaços de Banach, quando se procurou classificar os espaços para os quais o teorema 1.8 é verdadeiro.

Tais espaços constituem uma classe importante de espaços de Banach, chamados espaços de Banach que têm a propriedade de Radon-Nikodym. A definição abaixo formaliza este conceito.

2.18 Definição:

- X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a μ se dada $F : \Sigma \to X$ medida vetorial de variação limitada e μ-contínua, existe $f : \Omega \to X$ μ-Bochner-integrável tal que $F(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$. Neste caso, f é chamada de derivada de Radon-Nikodym de F em relação a μ.
  Notação: X tem $\mu - PRN$ e $f = \frac{dF}{d\mu}$.
- X tem a propriedade de Radon-Nikodym se X tem $\mu - PRN$ para toda medida μ finita.

2.19 Exemplos:

De acordo com 1.7 e 1.8, $\mathbf{R}$ e $\mathbf{C}$ têm a PRN. Prova-se que os seguintes espaços tem a PRN: l_1, espaços de Banach reflexivos e $L_p(\mu, X)$ onde $1 < p < \infty$ e X tem a PRN. Logo, se $1 < p < \infty$, $L_p(\mu)$ tem a PRN. No Apêndice provamos que espaços de dimensão finita têm a PRN.

Como contraexemplos, podemos citar $L_1([0,1])$ e c_0.

Provemos que $c_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty};\ x_n \in \mathbf{R}$ para todo n e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ com a norma $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\| = \sup_n\{|\ x_n\ |\}$ não tem a PRN: tomemos $\Omega = [0,1]$ e m= medida de Lebesgue definida nos subconjuntos Lebesgue-mensuráveis de $[0,1]$.

Defina $F(E) = (\lambda_1(E), \lambda_2(E), ..., \lambda_n(E), ...)$, onde para cada n, $\lambda_n(E) = \int_E sen(2^n \pi t)dt$; para todo $E \subseteq [0,1]$ Lebesgue-mensurável. Da aditividade da integral, temos que F é finitamente aditiva; e do Lema de Riemann-Lebesgue(1.7) temos que F assume valores em c_0. Mais ainda, para cada $E \subseteq [0,1]$, Lebesgue- mensurável,

$$\|F(E)\|_{c_0} = sup_n\{|\ \lambda_n(E)\ |\} = sup_n\{|\ \int_E sen(2^n\pi t)dt\ |\} \leq$$

$$\leq sup_n \int_E \mid sen(2^n\pi t) \mid dt \leq sup_n \int_E dt = m(E).$$

Logo, F é m-contínua, por 1.15 é σ-aditiva e $\mid F \mid (E) \leq \mid m \mid (E)$, isto é: F é de variação limitada.

Suponha que exista $f : [0,1] \longrightarrow c_0$, m-Bochner-integrável tal que $F(E) = \int_E f dm$ para todo $E \subseteq [0,1]$, Lebesgue-mensurável.

Para cada n, seja $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ a n-ésima coordenada de f, ou seja: $f = (f_1, f_2, ..., f_n, ...)$.

Como as projeções em c_0 são funcionais lineares contínuos, cada f_n é m-mensurável e $\lambda_n(E) = \int_E f_n dm$ para todo n e todo E. Dessa forma, $f_n(t) = sen(2_n \pi t)$ $m - q.s.$

Para cada n, considere o conjunto $E_n = \{t \in [0,1] : f_n(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Logo

$$E_n = \{t \in [0,1] : sen(2^n\pi t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\} \supseteq \{t \in [0,1] : \frac{\pi}{4} \leq 2^n\pi t \leq \frac{3\pi}{4}\} =$$

$$= \{t \in [0,1] : \frac{1}{4.2^n} \leq t \leq \frac{3}{4.2^n}\}.$$

Logo

$$m(E_n) = \frac{2^n}{2} m(\{t : \frac{1}{4.2^n} \leq t \leq \frac{3}{2^n.4}\}) = \frac{2^n}{2}(\frac{3}{4.2^n} - \frac{1}{4.2^n}) = \frac{2^n}{2}.\frac{2}{2^n.4} = \frac{1}{4};$$

portanto $m(E_n) = \frac{1}{4}$ para todo n e então $m(\lim_{j\to\infty} sup(E_j)) \geq \lim_{j\to\infty} m(E_j) = \frac{1}{4}$.

Logo, $m(\{t \in [0,1] : f(t) \in c_0\}) \leq \frac{3}{4}$, o que é um absurdo, pois $f(t) \in c_0$, para todo $t \in [0,1]$. Logo F não tem derivada de Radon-Nikodym em relação a m; e portanto, c_0 não tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Provemos agora que l_1 tem a propriedade de Radon-Nikodym.
Para isso seja $G : \Sigma \to l_1$ medida vetorial, μ-contínua de variação limitada. Para cada n, considere $P_n : l_1 \to l_1$ dada por $P_n(x) = \Sigma_{k=1}^n x_k e_k$; onde $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ e e_k é a sequência que tem 1 na k-ésima coordenada e zero nas demais. Portanto $P_n \circ G(E) = \Sigma_{k=1}^n (G(E))_k e_k$; e

$$\|P_n \circ G(E)\|_1 = \Sigma_{k=1}^n \mid (G(E))_k \mid \leq \Sigma_{k=1}^\infty \mid (G(E))_k \mid = \|G(E)\|_1;$$

e como $G \ll \mu$, temos que para cada n, $P_n \circ G \ll \mu$.

Mais ainda, cada P_n tem imagem de dimensão finita, logo para cada n existe $f_n : \Omega \longrightarrow l_1$ Borel-mensurável tal que $P_n \circ G(E) = \int_E f_n d\mu$ para todo $E \in \Sigma$.

Como para cada n, $P_n \circ G$ é μ-contínua, podemos supor que $\|f_n(\omega)\| \leq \mu(\Omega)$ para todo n e todo $\omega \in \Omega$. Indicando $f_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n}(f_n(\omega))_k e_k$, temos que
$sup_n\|f_n(\omega)\| = sup_n\|\sum_{k=1}^{n}(f_n(\omega))_k e_k\| \leq \mu(\Omega) < \infty$.

Provemos agora que a base canônica de $l_1, (e_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder limitadamente completa (veja no Apêndice a definição).

Para isso, seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $sup_n\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| < \infty$ e indique $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Mas $\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| = \sum_{k=1}^{n} \mid a_t \mid$, logo $\sum_{k=1}^{n} a_i$ é uma série absolutamente convergente, e portanto dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$\mid \sum_{k=1}^{n} \mid a_k \mid - \sum_{k=1}^{m} \mid a_k \mid \mid < \varepsilon$$

sempre que $m, n \geq n_0$.

Dessa forma $\|S_n - S_m\|_1 = \sum_{k=m+1}^{n} \mid a_k \mid < \varepsilon$ e portanto $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em l_1, logo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ converge em l_1.

Diante disso temos que para todo $\omega \in \Omega$, $\sum_{k=1}^{\infty}(f_n(\omega))_k e_k$ converge em l_1. Logo existe $f : \Omega \longrightarrow l_1$ dada por

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}(f_n(\omega))_k e_k.$$

Então $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge pontualmente a f e $\|f_n(\omega)\| \leq \mu(\Omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Dessa forma pelo Teorema 1.5 temos que $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$ para todo $E \in \Sigma$, logo

$$\lim_{n\to\infty} P_n \circ G(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

e portanto $G(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma$; e então l_1 tem a propriedade de Radon-Nikodym.

2.20 Observação:

Dunford provou que qualquer espaço de Banach que tenha base de Schauder limitadamente completa tem a propriedade de Radon-Nikodym. Para a demonstração veja [11] pág. 64.

2.21 Caracterizações :

Demonstrar que um espaço de Banach tem ou não a Propriedade de Radon-Nikodym, usando apenas a definição, revelou-se ser uma tarefa árdua, e em alguns casos, impossível. Isso fez com que os matemáticos procurassem propriedades equivalentes à propriedade de Radon-Nikodym; isto é: foram procuradas caracterizações dos espaços de Banach que têm a propriedade de Radon-Nikodym.

Desse esforço surgiram várias caracterizações (ver [11] pág. 217), inclusive várias que relacionavam o problema a outras áreas da Análise, como a Teoria dos Operadores Lineares, Geometria dos Espaços de Banach, a propriedade de Krein-Milman, Operadores Nucleares e Integrais, e a propriedade da convergência de Martingales.

À título de ilustração, enunciamos abaixo dois resultados que convertem o problema de testar se um espaço de Banach tem a propriedade de Radon-Nikodym em um problema da Teoria dos Operadores Lineares.

2.22 Definição:

Um operador linear contínuo $T : L_1(\mu) \longrightarrow X$ é Riesz-representável se existe $g \in L_1(\mu, X)$ tal que

$$Tf = \int_\Omega fg d\mu, \text{ para toda } f \in L_1(\mu).$$

2.23 Teorema:

X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a μ se e somente se todo operador linear contínuo definido em $L_1(\mu)$ a valores em X é Riesz-representável.

Demonstração: ver [11] pág. 63.

2.24 Teorema (Lewis-Stegall):

X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a μ se e somente se todo operador linear contínuo $T : L_1(\mu) \longrightarrow X$ fatora através l_1; isto é: existem operadores lineares contínuos $L : L_1(\mu) \longrightarrow l_1$ e $S : l_1 \longrightarrow X$, tais que $T = L \circ S$.

Demonstração: ver [11] pág. 66.

2.25 Observação:

Consideremos a medida de Lebesgue nos borelianos de $[0,1]$; ou seja: consideremos o espaço $([0,1]; \beta([0,1]); m)$. Como $m([0,1]) = 1 < \infty$, é claro que se X tem a propriedade de Radon-Nikodym então ele a tem em relação a m. O que chega a ser surpreendente é que este condição, que obviamente é necessária, também é suficiente para que X tenha a propriedade de Radon-Nikodym. Dessa forma temos a seguinte caracterização :

$*$ X tem a propriedade de Radon-Nikodym se e somente se X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação à medida de Lebesgue nos borelianos de $[0,1]$.

Esta afirmação deixa claro o papel central desempenhado pela medida de Lebesgue no conjunto de todas as medidas finitas.

É no sentido de demonstrar a caracterização acima que o próximo capítulo se desenvolve. A motivação para isso surgiu devido à importância dessa caracterização e devido ao fato de que a demonstração mais conhecida desse fato lida com delicados conceitos e com técnicas mais elaboradas da geometria dos espaços de Banach. Dessa forma, no capítulo 3 apresentamos uma demonstração puramente analítica e, no nosso modo de entender, extremamente elegante. Essa demonstração foi baseada em [7].

Capítulo 3

A PROPRIEDADE DE RADON-NIKODYM E A MEDIDA DE LEBESGUE

Neste capítulo apresentamos uma demonstração de que o fato de um espaço de Banach ter a propriedade de Radon-Nikodym em relação à medida de Lebesgue nos borelianos de $[0,1]$ é suficiente para que ele tenha a propriedade de Radon-Nikodym.

Ao contrário da demonstração mais conhecida desse fato (ver cap. 4), a demonstração por nós apresentada não se utiliza de conceitos geométricos, como por exemplo dentabilidade; e além disso evitamos o uso de técnicas mais sofisticadas que são usadas para lidar com esses conceitos.

O objetivo do capítulo é mostrar que esse resultado, apesar de extremamente poderoso, pode ser demonstrado à partir de conceitos e técnicas relativamente simples.

Novamente (Ω, Σ, μ) denotará um espaço de medida finita, e X um espaço de Banach.

3.1. Definição:

- Um elemento $A \in \Sigma$ é um átomo para μ se $\mu(A) > 0$ e se para cada B, subconjunto de A que seja elemento de Σ, tivermos $\mu(B) = 0$ ou $\mu(A) = \mu(B)$.

- μ é puramente atômica se existir uma sequência $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de átomos para μ tal que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\Omega)$.

- μ é não-atômica se Σ não contém átomos para μ.

Trabalharemos agora no sentido de demonstrar que se X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação à qualquer medida finita não-atômica, então X tem a propriedade de Radon-Nikodym.

3.2. Proposição:
Todo espaço de Banach tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação à qualquer medida puramente atômica.

Demonstração: Suponhamos que μ seja puramente atômica e mostremos que X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a μ.

Seja $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de átomos disjuntos para μ tal que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\Omega)$, e seja $F : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial de variação limitada e μ-contínua. Defina

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(A_n)}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}.$$

Para mostrar que f é μ-mensurável, exibiremos uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples tal que $\lim \|f_n - f\| = 0 \mu - q.s.$. Para cada n, tome

$$f_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{F(A_j)}{\mu(A_j)} \chi_{A_j}$$

e note que para n, f_n é simples e para cada x de Ω, existe um único natural k tal que $x \in A_k$ ou x não pertence à união dos A_k. No primeiro caso temos que $\chi_{A_j}(x) = 0$ para todo j maior que k, o que garante que

$$\|f - f_n\| = \| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{F(A_j)}{\mu(A_j)} \chi_{A_j} \| = 0$$

para todo n maior que k, e no segundo caso $f(x) = f_n(x) = 0$ para todo n.

Logo $\lim_{n \to \infty} \|f(x) - f_n(x)\| = 0$ para todo $x \in \Omega$. Portanto f é μ-mensurável.

Por outro lado, como $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\Omega)$ temos que $\mu((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = 0$, logo

$$\int_{\Omega} \|f\| d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \|f\| d\mu + \int_{(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c} \|f\| d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \|f\| d\mu.$$

E como $\|f(x)\| \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, temos que

$$\int_{\Omega} \|f\| d\mu = \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \|f\| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \|f\| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{\|f(a_n)\|}{\mu(A_n)} d\mu =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|F(A_n)\|}{\mu(A_n)} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \|F(A_n)\| \leq | F | (\Omega) < \infty$$

pois F é de variação limitada. Logo, pelo teorema 2.12, temos que f é μ-Bochner-integrável.

É claro que $\|f_n\| \leq \|f\|$ para todo n e acima vimos que $\|f\|$ é μ-integrável. Logo, usando $\|f\|$ como função dominante, temos pelo Teorema da Convergência Dominada, que para cada $E \in \Sigma$,

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E \sum_{j=1}^{n} \frac{F(A_j)}{\mu(A_j)} \chi_{A_j} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(A_j)}{\mu(A_j)} \mu(A_j \cap E).$$

Tomemos $E_j = A_j \cap E$ para cada j.

Logo $\int_E f d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F(A_j)}{\mu(A_j)} \mu(E_j)$ (*)

Defina : $\mathbf{N}^+ = \{j \in \mathbf{N} : \mu(A_j) = \mu(E_j)\}$, $\mathbf{N}^- = \{j \in \mathbf{N} : \mu(A_j) = 0\}$

Como para cada $j \in \mathbf{N}$, $E_j \subseteq A_j$ e A_j é átomo, temos que $\mathbf{N} = \mathbf{N}^+ \cup \mathbf{N}^-$ e se $j \in \mathbf{N}^+$, $\mu(A_j - E_j) = 0$ e então $F(A_j) = F(E_j)$ pois $F \ll \mu$; e se $j \in \mathbf{N}^-$, $F(E_j) = 0$. Como F é σ-aditiva, pois é finitamente aditiva e μ-contínua, temos que $F(\bigcup_{j \in \mathbf{N}^-} E_j) = 0$. Então (*) implica que

$$\int_E f d\mu = \Sigma_{j \in \mathbf{N}^+} \frac{F(A_j)}{\mu(A_j)} \mu(E_j) = \Sigma_{j \in \mathbf{N}^+} \frac{F(E_j)}{\mu(E_j)} \mu(E_j) = \Sigma_{j \in \mathbf{N}^+} F(E_j) =$$

$$= F(\cup_{j \in \mathbf{N}^+} E_j) = F(E) - F(\cup_{j \in \mathbf{N}^-} E_j) = F(E),$$

pois como $\mu(\Omega) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, temos que $F(\Omega - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$ implica que

$F(E) = F(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cap E)) = \sum_{j=1}^{\infty} F(A_j \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} F(E_j) = F(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$; isto é:

$F(E) = F(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = F(\bigcup_{j\in N^+} E_j) + F(\bigcup_{j\in N^-} E_j)$. Dessa forma para todo $E \in \Sigma$, $F(E) = \int_E f d\mu$, portanto X tem a PRN em relação a μ.

3.3 Proposição:
Toda medida finita pode ser escrita como a soma de uma medida puramente atômica e uma medida não-atômica.

Demonstração: Mostremos que existem medidas μ_1, puramente atômica e μ_2 não-atômica tais que $\mu = \mu_1 + \mu_2$.Para isso considere $(A_i)_{i\in I}$ a coleção maximal de todos os átomos para μ disjuntos dois a dois.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $I_n = \{i \in I$ tal que $\mu(A_i) \geq \frac{1}{n}\}$. Claramente $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, e como μ é finita, segue que I_n é finito para todo n. Portanto I é enumerável.

Fazendo uma enumeração para I, consideremos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ os átomos para μ, disjuntos dois a dois.

Defina $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\mu_1(E) = \mu(A \cap E)$ e $\mu_2 = \mu(A^c \cap E)$ para cada $E \in \Sigma$. Claramente μ_1 e μ_2 são medidas, e para cada $E \in \Sigma$,

$\mu_1(E)+\mu_2(E) = \mu(A\cap E)+\mu(A^c\cap E) = \mu((A\cap E)\bigcup(A^c\cap E)) = \mu((A\cup A^c)\cap E) = \mu(\Omega \cap E) = \mu(E)$; ou seja $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Para cada n, tomemos $B \in \Sigma$, subconjunto de A_n. Portanto $B = B \cap A_n$, logo $\mu_1(B) = \mu_1(B \cap A_n) = \mu(B)$. Como cada A_n é um átomo para μ, temos que
$\mu_1(B) = \mu(B) = \mu(A_n)$ ou $\mu_1(B) = 0$. Mas $\mu(A_n) = \mu_1(A_n)$, logo $\mu_1(B) = \mu_1(A_n)$ ou $\mu_1(B) = 0$. Logo para todo n, A_n é átomo para μ_1, e

$$\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\Omega \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \mu(\Omega \cap A) = \mu_1(\Omega),$$

portanto μ_1 é puramente atômica.

Seja $E \in \Sigma$, tal que $\mu_2(E) > 0$, logo $\mu(A^c \cap E) > 0$.

Mas $A^c \cap E \subseteq A^c$, logo $A^c \cap E$ não é átomo para μ, então existe $B \in \Sigma$, subconjunto de $A^c \cap E$ tal que $0 < \mu(B) < \mu(A^c \cap E) = \mu_2(E)$.

Mas como $B \subseteq A^c \cap E$, sabemos que $B \subseteq A^c$; e então $B = B \cap A^c$, logo $\mu(B) = \mu(B \cap A^c) = \mu_2(B)$; portanto $0 < \mu_2(B) < \mu_2(E)$ e é claro que $B \subseteq E$. Dessa forma, μ_2 é não-atômica e a demonstração está completa.

3.4 Proposição:
Sejam μ_1 e μ_2 uma decomposição de μ, conforme a proposição 3.3. Se X tem a PRN em relação a μ_2, então X tem a PRN em relação a μ.

Demonstração: Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ como na demonstração de 3.3. Defina $B = A^c$. De acordo com as definições de μ_1 e μ_2, temos que $\mu_1(B) = 0$ e $\mu_2(A) = 0$.

Seja $F : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial, μ-contínua de variação limitada. Defina :

$$F_A(E) = F(E \cap A) \text{ e } F_B(E) = F(E \cap B).$$

Logo se $\mu_1(E) = 0$ temos $\mu(A \cap E) = 0$ e como $F \ll \mu$, $F(E \cap A) = 0 = F_A(E)$ e então $F_A \ll \mu_1$. Como μ_1 é puramente atômica, X tem a PRN em relação a μ_1, logo existe $f_1 \in L_1(\mu_1, X)$ tal que $F_A(E) = \int_E f_1 d\mu$, para todo $E \in \Sigma$.

Se $\mu_2(E) = 0$, então $\mu(E \cap B) = 0$ e como $F \ll \mu$, $F(E \cap B) = F_B(E) = 0$, isto é: $F_B \ll \mu_2$. Por hipótese X tem a PRN em relação a μ_2, logo existe $f_2 \in L_1(\mu_2, X)$ tal que $F_B(E) = \int_E f_2 d\mu_2$, para cada $E \in \Sigma$.

Dessa forma temos $F(E) = F_A(E) + F_B(E) = \int_E f_1 d\mu_1 + \int_E f_2 d\mu_2$, para todo $E \in \Sigma$. Defina $f = f_1 \chi_A + f_2 \chi_B$.

$$\int_\Omega \|f\| d\mu = \int_{\Omega \cap A} \|f\| d\mu + \int_{\Omega \cap B} \|f\| d\mu = \int_{\Omega \cap A} \|f_1\| d\mu_1 + \int_{\Omega \cap B} \|f_2\| d\mu_2 < \infty$$

pois $f_1 \in L_1(\mu_1, X)$ implica que $\int_\Omega \|f_1\| d\mu_1 < \infty$ e $f_2 \in L_1(\mu_2, X)$ implica que $\int_\Omega \|f_2\| d\mu_2 < \infty$; logo $\int_\Omega \|f_1\| d\mu_1 < \infty$ e então $f \in L_1(\mu, X)$.

Além disso, para cada $E \in \Sigma$, temos

$$\int_E f d\mu = \int_E (f_1 \chi_A + f_2 \chi_B) d\mu = \int_{E \cap A} f_1 d\mu + \int_{E \cap B} f_2 d\mu =$$

$$= \int_{E\cap A} f_1 d\mu_1 + \int_{E\cap B} f_2 d\mu_2 = \int_E f_1 d\mu_1 + \int_E f_2 d\mu_2$$

que por (*) é igual a $F(E)$. Logo, $F(E) = \int_E f d\mu$. Portanto, X tem PRN em relação a μ.

3.5 Observação:

A recíproca da proposição 3.4. é verdadeira, pois se $F : \Sigma \longrightarrow X$ é medida vetorial de variação limitada e $F \ll \mu_2$ temos que se $\mu_2(E \cap A) = 0$, então $F(E \cap A) = 0$ e neste caso teremos $F(E) = F(E \cap B)$. Logo, se $\mu(E) = 0$, então $\mu_1(E) = \mu_2(E) = 0$, então $F(E) = 0$ ou seja $F \ll \mu$. Se X tem a PRN em relação a μ, existe $f \in L_1(\mu, X)$ tal que $F(E) = \int_E f d\mu$. Logo,

$$F(E) = F(E \cap B) = \int_{E\cap B} f d\mu = \int_{E\cap B} f d\mu_2 = \int_E f d\mu_2.$$

Logo X tem a PRN em relação a μ_2.

O corolário abaixo combina as proposições anteriores de forma a estabelecer o resultado anunciado antes da proposição 3.2.

3.6 Corolário:

Se X tem a PRN em relação a toda medida não-atômica, então X tem a PRN.

Demonstração: Seja μ medida finita. Pela proposição 3.3, existem μ_1 puramente atômica e μ_2 não-atômica tais que $\mu = \mu_1 + \mu_2$.

Pela proposição 3.3, X tem PRN em relação a μ_1 e por hipótese X tem a PRN em relação a μ_2, logo pela proposição 3.4, X tem a PRN em relação a μ. Portanto X tem a PRN.

No momento em que sabemos que para mostrar que um espaço de Banach tem a PRN, basta mostrar que ele a tem em relação a toda medida não-atômica, trabalharemos no sentido de demonstrar que se o espaço tem a PRN em relação à medida de Lebesgue m nos borelianos de $[0,1] = \beta([0,1])$, então ele a terá em relação a toda medida não-atômica.

Para demonstrar isso, precisamos de alguns teoremas da Teoria da Medida que não aparecem nos textos mais recentes sobre o assunto, e por isso apresentaremos aqui suas demonstrações. As demonstrações de 3.10, 3.11 e 3.14 podem ser encontradas no clássico [19].

3.7 Definições:

- i) uma sub-σ-álgebra de Σ é uma subcoleção Σ_o de Σ que é, por sua própria vez, uma σ-álgebra e que contenha Ω; isto é: $\Omega \in \Sigma_o$.
- ii) uma σ-álgebra que pode ser gerada por uma família enumerável de conjuntos é dita separável.
- iii) um isomorfismo entre os espaços de medida (Ω, Σ, μ) e $(\Omega_o, \Sigma_o, \mu_o)$ é uma aplicação $T : \Sigma \to \Sigma_o$, bijetora que satisfaz:
  - $T(E - F) = T(E) - T(F)$ para cada E e cada F em Σ;
  - $T(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(E_n)$ para toda sequência $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ;
  - $\mu_o(T(E)) = \mu(E)$ para todo $E \in \Sigma$.
- iv) um isomorfismo entre os espaços de Banach X e Y é uma aplicação $\tilde{T} : X \to Y$, bijetora linear e contínua. Se para todo $x \in X$, $\|\tilde{T}x\| = \|x\|$, $\tilde{T}$ é um isomorfismo métrico.

3.8 Lema:
Se $T : \Sigma \to \Sigma_o$ é um isomorfismo entre espaços de medida, então :

- i) $T(\emptyset) = \emptyset$;
- ii) Se $A, B, \in \Sigma$ e $A \subseteq B$ então $T(A) \subseteq T(B)$;
- iii) $T(\Omega) = \Omega_o$;
- iv) $T(A^c) = T(A)^c$ para todo $A \in \Sigma$;
- v) Se $A, B \in \Sigma$ e $A \cap B = \emptyset$, então $T(A) \cap T(B) = \emptyset$;
- vi) Se $A, B \in \Sigma$, $T(A \cap B) = T(A) \cap T(B)$.

Demonstração:

- i) $T(\emptyset) = T(\emptyset - \emptyset) = T(\emptyset) - T(\emptyset) = \emptyset$;

- ii) Se $A \subseteq B$, então $A = A \cup B$, logo $T(A) = T(A) \cup T(B)$ e então $T(A) \subseteq T(B)$;
- iii) Para todo $A \in \Sigma$, temos $A \subseteq \Omega$, logo $T(A) \subseteq T(\Omega)$, para todo $A \in \Sigma$. Como T é sobrejetora, $E \subseteq T(\Omega)$, para todo $E \in \Sigma_*$; logo $\Omega_* = T(\Omega)$.
- iv) $T(A^c) = T(\Omega - A) = T(\Omega) - T(A) = \Omega_* - T(A) = T(A)^c$.
- v) Se $A \cap B = \emptyset$, então $A \subseteq B^c$, logo $T(A) \subseteq T(B^c) = T(B)^c$ ou seja $T(A) \cap T(B) = \emptyset$;
- vi) $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ então $T(A \cap B) = T((A^c \cup B^c)^c) = T(A^c \cup B^c)^c = (T(A^c) \cup T(B^c))^c = (T(A^c) \cup T(B^c))^c = T(A) \cap T(B)$.

3.9 <u>Definições</u>:

- uma <u>partição</u> de um elemento $E \in \Sigma$, é um conjunto finito P formado por elementos disjuntos de Σ cuja união é E.
- a <u>norma</u> da partição $P = \{E_1, ..., E_k\}$ é definida por:
  $\mid P \mid = \text{máx } \{\mu(E_1), ..., \mu(E_k)\}$
- se P_1 e P_2 são partições, dizemos que $P_1 \leq P_2$ se cada elemento de P_1 está contido em algum elemento de P_2.
- uma sequência $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de partições é dita <u>decrescente</u> se para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se $P_{n+1} \leq P_n$.
- uma sequência $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de partições é dita <u>densa</u> se para cada $\varepsilon > 0$ e para cada $E \in \Sigma$, existem um $n \in \mathbb{N}$ e um $E_0 \in \Sigma$ tais que E_0 pode ser escrito como uma união de elementos de P_n e $\mu(E \Delta E_0) = \mu((E - E_0) \cup (E_0 - E)) < \epsilon$.
- se $P = \{E_1, ..., E_k\}$ é uma partição de $E \in \Sigma$ e se $F \in \Sigma$ é um subconjunto de Σ, a seguinte partição de $F : \{E_1 \cap F, ..., E_k \cap F\}$ é denotada por $P \cap F$.

3.10 <u>Teorema</u>:
Se μ é não-atômica e $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de partições densa e decrescente de Ω, então

$$\lim_{n \to \infty} \mid P_n \mid = 0.$$

Demonstração: Como $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente e μ é finita, temos que a sequência numérica $(| P_n |)_{n=1}^{\infty}$ é decrescente e limitada, pois $0 \leq | P_n | \leq \mu(\Omega)$ para todo n. Logo, $(| P_n |)_{n=1}^{\infty}$ é convergente, isto é: existe $\delta \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} | P_n | = \delta$. É claro que $\delta \geq 0$.

Suponhamos que $\delta > 0$ e cheguemos a uma contradição. Se $P_1 = \{E_1^1, ..., E_{k_1}^1\}$, então $| P_1 | \geq \delta$, logo pelo menos um dos elementos E_i^1 é tal que $| P_n \cap E_i^1 | \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$; pois se existisse $n \in \mathbb{N}$ tal que $| P_n \cap E_i^1 | < \delta$ para todo $j = 1, ..., k_1$, como $E_j^n \subseteq E_{k_j}^1$ teríamos que

$\mu(E_j^n) = \mu(E_j^n \cap E_{k_j}^1) < \delta$, e neste caso $| P_n | < \delta$, o que é uma contradição. Chame de F_1 este elemento e tome a sequência $(P_n \cap F_1)_{n=1}^{\infty}$ de partições de F_1.

Procedendo da mesma forma para $P_2, P_3, ...$, obtemos uma sequência $(F_m)_{m=1}^{\infty}$ tal que para cada m,

$$F_m \in P_m,\ F_m \subseteq F_{m-1} \text{ e } | P_n \cap F_m | \geq \delta \text{ para } n = 1, 2, ...$$

Logo, $\mu(F_n) \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, então $F \in \Sigma$ e $\mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) \geq \delta > 0$.

Como μ é não-atômica, F não é átomo para μ, logo existe $F_o \in \Sigma$, subconjunto de F tal que $0 < \mu(F_o) < \mu(F)$. E como cada $F_n \in P_n$ e F_o é subconjunto de todos F_n, segue que para cada n, F_o está contido ou é disjunto de cada elemento de P_n. Em outras palavras : dados n e $E \in P_n$, então $F_o \subseteq E$ ou $F_o \cap E = \emptyset$.

Dessa forma se $\varepsilon < \min \{\mu(F_o), \mu(F) - \mu(F_o)\}$ e $\varepsilon > 0$, então qualquer elemento E que é a união de elementos de alguma partição P_n satisfaz $\mu(E \Delta F_o) > \varepsilon$; pois se $F_o \subseteq E$, F_o estará contido em apenas um dos elementos cuja união é E, e neste caso $\mu(E \Delta F_o) = \mu(E - F_o) = \mu(E) - \mu(F_o) > \mu(F_n) - \mu(F_o) > \mu(F) - \mu(F_o) > \varepsilon$; e se $F_o \cap E = \emptyset$, então $\mu(E \Delta F_o) = \mu(E) + \mu(F_o) \geq \mu(F_o) > \varepsilon$. Logo, F_o e ε contradizem o fato de $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ ser densa; mas por hipótese ela é densa. Logo, $\delta = \lim_{n\to\infty} | P_n | = 0$.

3.11 Teorema:
Considerando o espaço $([0,1]; \beta([0,1]); m)$, se $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de partições de $[0,1]$ formadas por intervalos tal que

$\lim_{n\to\infty} \mid Q_n \mid= 0$, então $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ é densa.

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ e E um subintervalo fechado de $[0,1]$. Como $\lim_{n\to\infty} \mid Q_n \mid= 0$, existe um natural n tal que $\mid Q_n \mid< \frac{\varepsilon}{2}$.

Se $E = [a,b]$, existe um único intervalo E_1 da partição Q_n tal que $b \in E_1$. Caso $a \in E_1$, seja E_2 o intervalo de Q_n adjacente à esquerda de E_1. Caso $a \in E_2$, seja E_3 o intervalo de Q_n adjacente à esquerda de E_2. Ao final de um número finito de passos conseguimos um intervalo E_k da partição Q_n tal que $a \in E_k$.

Logo, $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} E_j$ e $[(\bigcup_{j=1}^{k} E_j) - E] \subseteq E_1 \cup E_k$; e então

$$\mu(E\triangle \cup_{j=1}^{k} E_j) = \mu((\cup_{j=1}^{k}E_j) - E) \leq \mu(E_1 \cup E_k) = \mu(E_1) + \mu(E_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pois E_1 e E_k são elementos de Q_n.

Logo, todo subintervalo fechado de $[0,1]$ pode ser aproximedo por uma união de elementos de Q_n. A demonstração termina ao observarmos que a coleção das uniões finitas de subintervalos fechados de $[0,1]$ gera $\beta([0,1])$. (ver [1] pág. 8).

3.12 Definição:

Dados $E, F \in \Sigma$, definimos $\rho(E,F) = \mu(E\triangle F)$. Demonstra-se (ver proposição abaixo) que ρ é uma pseudo-métrica em Σ, e se identificarmos dois conjuntos de Σ pela relação:

$E = F$ se e somente se $\mu(E\triangle F) = 0$, ρ será uma métrica em Σ; chamada de métrica associada a μ e (Σ,ρ) é o espaço métrico associado a (Ω,Σ,μ).

3.13 Proposição:

Considerando a identificação acima temos que ρ é uma métrica em Σ, e as aplicações:

- $f : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$; $f(E,F) = E \cup F$;
- $g : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \Sigma$; $g(E,F) = E \cap F$;
- $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$

são uniformemente contínuas.

Demonstração: É claro que ρ é positiva definida e simétrica; e usando as inclusões: $(E-G)\subseteq(E-F)\cup(F-G)$ e $(G-E)\subseteq(G-F)\cup(F-E)$, temos que :

$\rho(E,G)=\mu(E\Delta G)=\mu(G-E)+\mu(E-G)\leq\mu(E-F)+\mu(F-G)+$
$+\mu(G-F)+\mu(F-E)=\mu(E\Delta F)+\mu(F\Delta G)=\rho(E,F)+\rho(F,G)$ para todos E, F, G em Σ. Logo ρ é métrica.

As continuidades uniformes de f, g e μ resultam das seguintes desigualdades:

$\mu((E_1\cup F_1)-(E_2\cup F_2))+\mu((E_2\cup F_2)-(E_1\cup F_1))\leq\mu(E_1-E_2)+\mu(F_1-F_2)+\mu(E_2-E_1)+\mu(F_2\cup F_1)$;

$\mu((E_1\cap F_1)-(E_2\cap F_2))+\mu((E_2\cap F_2)-(E_1\cap F_1))\leq\mu(E_1-E_2)+\mu(F_1-F_2)+\mu(E_2-E_1)+\mu(F_2\cup F_1)$; e

$\mid\mu(E)-\mu(F)\mid=\mid\mu(E-F)-\mu(F-E)\mid\leq\mu(E-F)+\mu(F-E)$.

3.14 Teorema (Halmos-Von Newmann) :

Se μ é não-atômica, Σ é separável e $\mu(\Omega)=1$, então existe um isomorfismo T entre $([0,1],\beta([0,1]),m)$ e (Ω,Σ,μ).

Demonstração: Como Σ é separável, existe uma sequência $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ em Σ que a gera. Para cada n, defina P_n como a coleção formada pelos conjuntos da forma $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ onde para cada $i=1,...,n$, $A_i=E_i$ ou $A_i=E_i^c$. Logo, $P_1=\{E_1,E_1^c\}$, $P_2=\{E_1\cap E_2, E_1^c\cap E_2, E_1\cap E_2^c, E_1^c\cap E_2^c\};...$

Dessa forma, $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de partições de Ω que claramente é decrescente. Mais ainda, $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ é densa, pois $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ gera Σ. Como μ é não-atômica, o Teorema 3.10 garante que $\lim_{n\to\infty}\mid P_n\mid=0$.

Para definir T, suponhamos que:

$$P_1=\{E_1^1,E_2^1\}; P_2=\{E_1^2,E_2^2,E_3^2,E_4^2\},...,P_n=\{E_i^n\}_{i=1}^{2^n}.$$

Para $E_1^1\in P_1$, definimos $F_1^1\subseteq[0,1]$, por $F_1^1=[0,\mu(E_1^1)]$. Isto é possível pois $\mu(\Omega)=1$. Logo $m(F_1^1)=\mu(E_1^1)$.

Para $E_1^2\in P_1$, definimos $F_1^2\subseteq[0,1]$ por $F_1^2=[\mu(E_1^1),1]$, logo
$m(F_2^1)=1-\mu(E_1^1)=\mu(\Omega)-\mu(E_1^1)=\mu(E_2^1)$. E procedendo desta forma, na

n-ésima partição fazemos:

Para E_1^n, definimos $F_1^n = [0, \mu(E_1^n))$, logo $m(F_1^n) = \mu(E_1^n)$, e para cada $i = 2, ..., 2^n$, para $E_i^n \in P_n$, definimos $F_i^n \subseteq [0,1]$, por $F_i^n = [\mu(E_1^n) + ... + \mu(E_{i-1}^n), \mu(E_1^n) + ... + \mu(E_i^n))$, logo $m(F_i^n) = \mu(E_i^n)$.

Dessa forma obtemos uma sequência $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Q_n\} = \{F_1^n, ..., F_{2^n}^n\}$, de partições de $[0,1]$ em intervalos e tal que $\lim_{n\to\infty} | Q_n |= 0$ pois $\lim_{n\to\infty} | P_n |= 0$.

Logo pelo Teorema 3.11, $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ é densa. Podemos definir

$T : \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ por
$T(E_i^n) = F_i^n$; e então $\mu(E) = m(T(E))$ para todo $E \in \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Podemos ainda estender T às uniões finitas de elementos das partições P_n de forma a continuar preservando medida, fazendo $T(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) = \bigcup_{i=1}^{n} T(E_i)$, onde para todo $i = 1, ..., k, E_i \in P_n$ para algum natural n.

Então T é uma isometria de um sub-conjunto denso de (Σ, ρ) sobre um sub-conjunto denso de $(\beta([0,1]), \lambda)$ onde λ é a métrica associada a m, e ρ é a métrica associada a μ; e como tal pode ser estendida de forma única a um isomorfismo $T : \Sigma \longrightarrow \beta([0,1])$. Observe que o fato de T ser isomorfismo segue o fato de T preservar uniões, interseções, medida e da continuidade uniforme destas aplicações.

3.15 <u>Corolário</u>:
Nas condições do Teorema 3.14 existe um isomorfismo métrico
$\bar{T} : L_1([0,1], X) \longrightarrow L_1(\mu, X)$ tal que para cada $f \in L_1([0,1], X)$ e cada $E \in \Sigma$, $\int_E f dm = \int_{T(E)} \bar{T} f d\mu$.

<u>Demonstração</u>: Seja S_1 o conjunto das funções simples modeladas em $\beta([0,1])$ a valores em X, e S_2 o conjunto das funções simples modeladas em Σ a valores em X. Defina:

$\bar{T} : S_1 \longrightarrow S_2$
$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \longrightarrow \bar{T} f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi T(A_i)$; onde $\sum_{j=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ é a representação canônica de f, isto é:
se $i \neq j$, então $a_i \neq a_j$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$. Logo $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T(A_i)}$ também está na forma canônica pois $T(A_i) \cap T(A_j) = 0$ desde que $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Provemos algumas propriedades de $\bar{T}$:

- i) $\tilde{T}$ é linear :

  - Se $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T(A_i)} \in S_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\tilde{T}(\alpha f) = \tilde{T}(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}) = \tilde{T}(\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \chi_{A_i}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i \chi_{T(A_i)} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T(A_i)} = \alpha \tilde{T} f.$$

  - Se $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ e $g = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i}$; ambos em S_1,
    para obtermos a expressão de $f + g$, definimos os conjuntos:

$C_1 = A_1 - \bigcup_{j=1}^{m} B_j; C_2 = A_2 - \bigcup_{j=1}^{m} B_j; ...; C_n = A_n - \bigcup_{j=1}^{m} B_j;$

$C_{n+1} = B_1 - \bigcup_{i=1}^{n} A_i; C_{n+2} = B_2 - \bigcup_{i=1}^{n} A_i; ...; C_{n+m} = B_m - \bigcup_{i=1}^{m} A_i;$

$C_{n+m+1} = A_1 \cap B_1; C_{n+m+2} = A_1 \cap B_2; ...; C_{n+2m} = A_1 \cap B_m;$

$C_{n+2m+1} = A_2 \cap B_1; C_{n+2m+2} = A_2 \cap B_2; ...; C_{n+3m} = A_2 \cap B_m;$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$C_{n+nm+1} = A_n \cap B_1; C_{n+nm+2} = A_n \cap B_2; ...; C_{n+(n+1)m} = A_n \cap B_m;$

e as escalares:

$\gamma_1 = a_1; \gamma_2 = a_2; ...; \gamma_n = a_n;$

$\gamma_{n+1} = b_1; \gamma_{n+2} = b_2; ...; \gamma_{n+m} = b_n;$

e à partir daí, defina:

para $1 \leq j \leq n$ e $0 \leq k \leq m-1$, $\gamma_{n+jm+k} = a_j + b_k$ se $k \neq 0$ e

$\gamma_{n+jm+k} = a_{j-1} + b_k$ se $k = 0$;

e então

$$f + g = \sum_{i=1}^{n+(n+1)m} \gamma_i \chi_{C_i};$$

e neste caso temos

$$\bar{T}(f+g) = \sum_{i=1}^{n+(n+1)m} \gamma_i \chi_{T(C_i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T(A_i - \cup_{j=1}^{m} B_j)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{T(B_j - \cup_{i=1}^{i} A_i)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)\chi_{T(A_i \cap B_j)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{(T(A_i) - \cup_{j=1}^{m} T(B_j))} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{(T(B_j) - \cup_{i=1}^{i} T(A_i))} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i + b_j)\chi_{[T(A_i) \cap (B_j)]} = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T(A_i)} + \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{T(B_j)} =$$

$$= \bar{T}f + \bar{T}g.$$

- ii) $\bar{T}$ independe da representação de f : decorre imediatamente de i).
- iii) $\bar{T}$ é sobrejetora : dada $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{C_i} \in S_2$, como T é isomorfismo, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T^{-1}(C_i)} \in S_1$, e $\bar{T}f = \bar{f}$.
- iv) $\bar{T}$ é injetora:

  Como $\bar{T}$ é linear, basta mostrar que $\bar{T}f = 0$ implica $f = 0$.

  Se $\bar{T}f = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T(A_i)} = 0$ a menos de um conjunto $B \in \Sigma$ tal que $\mu(B) = 0$. Mas $\bar{T}f(x) = 1$ para todo $x \in \bigcup_{i=1}^{n} T(A_i)$, logo $\bigcup_{i=1}^{n} T(A_i) \subseteq B$ e então $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} T(A_i)) = \mu(T(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = 0$; e como T é isomorfismo, $m(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 0$ e portanto $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} = 0$. Logo, $\bar{T}$ é injetora.
- v) Para cada $E \in \beta([0,1])$ e cada $f \in S_1$, temos $\int_E f dm = \int_{T(E)} \bar{T} f d\mu$.

$$\int_E f dm = \int_E \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} dm = \sum_{i=1}^{n} a_i m(A_i \cup E) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(T(A_i \cup E)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(T(A_i) \cap T(E)) = \int_{T(E)} \bar{T} f d\mu.$$

- vi) $\tilde{T}$ é isometria, pois se $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} \in S_i$, então $\|f\| = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|\chi_{A_i}$, e portanto

$$\|f\|_1 = \int_{[0,1]} \|f\|dm = \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|\chi_{A_i}dm = \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|m(A_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|\mu(T(A_i)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \|a_i\|\chi_{TA_i}d\mu = \int_{\Omega} \|\tilde{T}f\|d\mu = \|\tilde{T}f\|_1.$$

Dessa forma, podemos estender $\tilde{T}$ ao fecho de S_1, $\bar{S}_1 = L_1([0,1], X)$, da seguinte maneira: dada $f \in L_1([0,1], X)$, existe $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em S_1 tal que $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$; e então definimos

$$\tilde{T}f = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}f_n.$$

Provemos que esta extensão é sobre $L_1(\mu, X)$: dada $\bar{f} \in L_1(\mu, X)$, seja $(\bar{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em S_2 que converge em norma para $\bar{f}$. Como $\tilde{T}$ é sobre S_2, para cada n existe $f_n \in S_1$ tal que $\tilde{T}f_n = \bar{f}_n$; e como $\tilde{T}$ é isometria entre S_1 e S_2, e $(\bar{f}_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência convergente em S_2, então $(f_n)_{n=1}^{\infty} = (T^{-1}(\bar{f}_n))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em S_1, isto é: existe $f \in L_1([0,1], X)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Mais ainda, $\tilde{T}f = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}f_n = \lim_{n\to\infty} \bar{f}_n = \bar{f}$. Portanto a extensão de $\tilde{T}$ a $L_1([0,1], X)$ é sobre $L_1(\mu, X)$.

Além disso, se $E \in \mathcal{B}([0,1])$ e $f \in L_1([0,1], X)$ observamos que a aplicação $L_1([0,1], X) \to X$.

$f \longrightarrow \int_E f dm$ é contínua; pois de acordo com 2.14 temos que

$$\|\int_E f dm\| \leq \int_E \|f\|dm \leq \int_{[0,1]} \|f\|dm = \|f\|_1$$

Logo temos que

$$\int_E f dm = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n dm = \lim_{n\to\infty} \int_{T(E)} \tilde{T}f_n d\mu =$$

$$= \int_{T(E)} \lim_{n\to\infty} \tilde{T}f_n d\mu = \int_{T(E)} \tilde{T}f d\mu$$

onde $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em S_1 que converge a f em norma.

Portanto $T : L_1([0,1], X) \longrightarrow L_1(\mu, X)$ é isometria e $\int_E f dm = \int_{T(E)} Tf d\mu$ para todo $E \in \beta([0,1])$ e toda $f \in L_1([0,1], X)$.

3.16 Observação:
Suponha que o seguinte resultado já tenha sido provado: X tem $\mu - PRN$ se e somente se X tem $\mu \mid \Sigma_0 - PRN$ para toda sub-σ-álgebra separável Σ_0 de Σ.

Logo se μ é não-atômica, para provar que X tem $\mu - PRN$, basta provar que X tem $\mu \mid \Sigma_0 - PRN$ onde Σ_0 é uma sub-σ-álgebra separável de Σ tal que $\mu \mid \Sigma_0$ também é não-atômica, pois caso contrário fazemos $\mu \mid \Sigma_0 = \mu_1 + \mu_2$ como em 3.3; e logo se X tem $\mu_2 - PRN$, por 3.4 X tem $\mu \mid \Sigma_0 - PRN$. Note que μ_2 é medida não-atômica e Σ_0 é separável.

Os dois próximos resultados são de [11].

3.17 Lema:
Seja $f \in L_1(\mu)$ e Σ_0 uma sub-σ-álgebra de Σ, então existe uma única $g \in L_1(\mu \mid \Sigma_0)$ tal que

$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ para todo $E \in \Sigma_0$. Mais ainda $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$ e se f for positiva, então g também será positiva.

Demonstração: Defina $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ para cada $E \in \Sigma$.

$$| \lambda(\Omega) | = | \int_\Omega f d\mu | \leq \int_\Omega | f | d\mu < \infty$$

pois $f \in L_1(\mu)$, logo λ é finita; e se $E \in \Sigma_0$ e $\mu(E) = 0$, então $\lambda(E) = \int_E f d\mu = 0$. Portanto $\lambda \ll \mu \mid \Sigma_0$ e pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe $g \in L_1(\mu \mid \Sigma_0)$ tal que $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma_0$.

Logo $\int_E g d\mu = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma_0$. Mais ainda, sabemos que $| \lambda | (E) = \int_E | g | d\mu$, para todo $E \in \Sigma_0$ e

$$| \lambda | (\Omega) = sup \sum_{i=1}^{n} | \lambda | (E_i) = sup \sum_{i=1}^{n} | \int_E f d\mu | \leq$$

$$\leq sup \sum_{i=1}^{n} \int_E | f | d\mu = \int_\Omega | f | d\mu.$$

Logo,

$$\|g\|_1 = \int_\Omega | g | d\mu = | \lambda | (\Omega) \le \int_\Omega | f | d\mu = \|f\|_1.$$

Portanto $\|g\|_1 \le \|f\|_1$. A última afirmação e a unicidade são óbvias.

3.18 Proposição:

Se $f \in L_1(\mu, X)$ e Σ_0 é uma sub-σ-álgebra de Σ, então existe uma única $g \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ tal que $\int_E g d\mu = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma_0$ e $\|g\|_1 \le \|f\|_1$.

Demonstração: Primeiramente tome $f \in L_1(\mu, X)$ simples, $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$. Para cada $i = 1, ..., n$; sabemos que $\chi_{E_i} \in L_1(\mu)$, logo pelo Lema 3.17, para cada i, existe $g_i \in L_1(\mu \mid \Sigma_0)$ tal que $\int_E \chi_{E_i} d\mu = \int_E g_i d\mu$ para todo $E \in \Sigma_0$.

Defina $g = \sum_{i=1}^n x_i g_i$. É claro que $g \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ e que a aplicação T que vai das funções simples de $L_1(\mu, X)$ em $L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ e leva f em g é linear.

Além disso, utilizando novamente o Lema 3.17, temos que:

$$\|g\|_1 = \int_\Omega \|g\| d\mu \le \int_\Omega \sum_{i=1}^n \|x_i\| g_i d\mu \le \int_\Omega \sum_{i=1}^n \|x_i\| \chi_{E_i} d\mu \le$$

$$\le \| \sum_{i=1}^n \|x_i\| \chi_{E_i} \|_1 = \int_\Omega \|f\| d\mu = \|f\|_1.$$

Portanto $\|g\|_1 \le \|f\|_1$, isto é, T é contínua. Logo T tem extensão linear contínua a $L_1(\mu, X)$. Seja $f \in L_1(\mu, X)$, e $(f_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de funções simples que convergem para f. Para cada n, tome $g_n \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ tal que $\int_E g_n d\mu = \int_E f_n d\mu$ para todo $E \in \Sigma_0$ e defina $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ que existe por continuidade. Logo,

$$\int_E f d\mu = \int_E \lim f_n d\mu = \lim \int_E f_n d\mu = \lim \int_E g_n d\mu = \int_E \lim g_n d\mu = \int_E g d\mu$$

para todo $E \in \Sigma_0$; e por continuidade também, $\|g\|_1 \le \|f\|_1$.

3.19 Teorema (Chatterji [6]):

Seja $(\Sigma_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência crescente, isto é: para cada n $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$, de sub-$\sigma$-álgebras de Σ, e $f \in L_1(\mu, X)$. Para cada n, seja $f_n \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ tal que $\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma_n$ e defina Σ_∞ como sendo a σ-álgebra gerada por

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$.

Se $f_\infty \in L_1(\mu \mid \Sigma_\infty, X)$ é tal que $\int_E f d\mu = \int_E f_\infty d\mu$ para todo $E \in \Sigma_\infty$, então $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\infty\|_1 = 0$.

Demonstração: Seja $\Sigma_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$ e defina para cada n, a seguinte aplicação:

$$T_n : L_1(\mu, X) \longrightarrow L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$$

dada por $\int_E T_n g d\mu = \int_E g d\mu$, para todo $E \in \Sigma_n$ e toda $g \in L_1(\mu, X)$.

Logo pela proposição 3.18, $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de operadores lineares contínuas, $\|T_n\| \leq 1$ para todo n e por hipótese $T_n f = f_n$.

Seja f_0 uma função simples modelada em Σ_0 a valores em X, isto é:
$f_0(\omega) = \chi_F(\omega).a$; onde $a \in X$ e $F \in \Sigma_0$. Mas para algum $N \in \mathbb{N}$, $F \in \Sigma_n$, logo para todo $n \geq N$, temos $T_n f_0 = f_0$, e então

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f_0 - f_0\|_1 = 0 \text{ . Seja } \varepsilon > 0.$$

Como o conjunto das funções simples modeladas em Σ_0 é denso em $L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$, dada $g \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ tome h simples modelada em Σ_0 tal que $\|g-h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ Sabemos que existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, temos que $\|T_n h - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, logo para $n \geq n_0$;

$$\|T_n g - g\|_1 \leq \|T_n h - h\|_1 + \|T_n g - T_n h\|_1 + \|g - h\|_1 = \|T_n h - h\|_1 +$$

$$+\|T_n(g-h)\|_1 + \|g-h\|_1 \leq \|T_n h - h\|_1 + 2\|g-h\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Logo para toda $g \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$, $\lim_{n\to\infty} \|T_n g - g\|_1 = 0$.

Mas $f \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ portanto $\lim_{n\to\infty} \|T_n f_\infty - f_\infty\|_1 = 0$. Como $\Sigma_n \subsetneq \Sigma_\infty$ para todo n, segue que $T_n f = T_n f_\infty$ para todo n, logo

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f_\infty - f_\infty\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|T_n f - f_\infty\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\infty\|_1 = 0.$$

3.20 Notação:

De agora em diante P vai denotar uma partição de Ω em um número finito de elementos de Σ, de medida positiva. Isto é: $P = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$ onde para cada $i = 1, 2, ..., n$, $E_i \in \Sigma$ e $\mu(E_i) > 0$ e além disso $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ e se $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$. E

$\{P\}$ vai denotar um conjunto das partições P de Ω.

Dadas P_1 e P_2 em $\{P\}$, defina $P_1 < P_2$ se para cada $A \in P_2$, existe $B \in P_1$ de forma que $\mu(A - B) = 0$. Então $(\{P\}, <)$ é um conjunto dirigido.

Para cada $P \in \{P\}$, defina:

$$f_P : \Omega \longrightarrow X; f_P = \sum_{A \in P} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A;$$

onde $F : \Sigma \longrightarrow X$ é uma medida vetorial. É claro que para toda $P \in \{P\}$, f_P é simples, logo $(f_P)_{P \in \{P\}}$ é uma rede em $L_1(\mu, X)$.

3.21 <u>Teorema</u> (Rønnow [25]):
Uma medida vetorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ tem derivada de Radon-Nikodym $f \in L_1(\mu, X)$ em relação a μ se e somente se a rede $(f_P)_{P \in \{P\}}$ é de Cauchy em $L_1(\mu, X)$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que $F(A) = \int_A f d\mu$ para cada $A \in \Sigma$ e mostremos que $\{f_P\}_{P \in \{P\}}$ é rede de Cauchy; isto é: queremos provar que dado $\varepsilon > 0$, existe $P_\varepsilon \in \{P\}$ tal que se P, $P' > P_\varepsilon$, então $\|f_P - f_{P'}\|_1 < \varepsilon$.

Suponha que isto seja falso. Logo existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda $P \in \{P\}$, existem P', $P'' > P$ tais que $\|f_{P'} - f_{P''}\| \geq 2\varepsilon_0$.

Logo $2\varepsilon_0 \leq \|f_{P'} - f_{P''}\|_1 \leq \|f_{P'} - f_P\|_1 + \|f_P - f_{P''}\|$, logo

$$\text{máx}\,\{\|f_{P'} - f_P\|_1; \|f_{P''} - f_P\|\} \geq \varepsilon_0$$

Construa indutivamente uma sequência de partições, funções e sub-σ-álgebras da seguinte forma:

Para $i = 1$, tome $P_1 = \{\Omega\}$, $f_{P_1} = \frac{F(\Omega)}{\mu(\Omega)} \chi_\Omega$ e $\Sigma_1 = \{\Omega\}$.

Para $i = n$, suponha $P_1 < P_2 < ... < P_n$ partições tais que $\|f_{P_{i+1}} - f_{P_i}\| \geq \varepsilon_0$ para $i = 1, ..., n-1$. Logo existem P', $P'' > P_n$ tais que
$\|f_{P''} - f_{P'}\| \geq 2\varepsilon_0$, logo P' ou P'' pode ser tomada como P_{n+1} de forma de $\|f_{P_{n+1}} - f_{P_n}\| \geq \varepsilon_0$.

Tome $\Sigma_n = \sigma(P_n)$; $\Sigma_\infty = \Sigma$ e $f_\infty = f$.

Logo $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de sub-σ-álgebras de Σ, $f \in L_1(\mu, X)$ e $\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$ para todo $A \in \Sigma_n$.

Então pelo Teorema 3.19, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\infty\|_1 = 0$; o que é falso, pois $\lim_{n\to\infty} \|f_{P_{i+1}} - f_{P_i}\|_1 = \varepsilon_0$ para todo i. Portanto $\{f_P\}$ é de Cauchy.

Reciprocamente, se $\{f_P\}_{P\in\{P\}}$ é uma rede de Cauchy, existe $f \in L_1(\mu, X)$ tal que $\lim_P \|f_P - f\|_1 = 0$. Mostremos que para cada $A \in \Sigma$, temos $F(A) = \int_A f d\mu$.

A aplicação

$L_1(\mu, X) \longrightarrow X$; $g \longrightarrow \int_A g d\mu$; onde $A \in \Sigma$ é claramente contínua, pois

$$\|\int_A g d\mu\| \leq \int_A \|g\| d\mu \leq \int_\Omega \|g\| d\mu = \|g\|_1,$$

logo $\int_A f d\mu = \lim_P \int_A f_P d\mu$.
Mas se P é uma partição que contém A, isto é:
$P > \{A, \Omega - A\}$, temos

$$\int_A f_P d\mu = \int_A \sum_{B\in P} \frac{F(B)}{\mu(B)} \chi_B d\mu = \sum_{B\in P} \frac{F(B\cap A)}{\mu(B\cap A)} \mu_{(B\cap A)} = F(A)$$

logo $F(A) = \int_A f_P d\mu$, para toda $P > \{A, \Omega - A\}$, portanto

$F(A) = \lim_P \int_A f_P d\mu = \int_A f d\mu$ e então f é a derivada de Radon-Nikodym de F.

3.22 <u>Corolário</u> (Rønnow [25]):
Uma medida vetorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ tem derivada de Radon-Nikodym $f \in L_1(\mu, X)$ se e somente se para toda sequência crescente $\{P_i\}$, a sequência (f_{P_i}) é de Cauchy em $L_1(\mu, X)$.

<u>Demonstração</u>: Se $F(A) = \int_A f d\mu$, para todo $A \in \Sigma$, é imediato do Teorema 3.21, que (f_{P_i}) é sequência de Cauchy.

Reciprocamente, se F não tem serivada de Radon-Nikodym em $L_1(\mu, X)$ pelo teorema 3.21, (f_P) não é uma rede de Cauchy, e dela podemos extrair uma sequência

(f_{P_i}) que não é de Cauchy, de forma que (P_i) seja crescente, o que nos dá o absurdo.

3.23 Proposição:
Uma medida vetorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ tem derivada de Radon-Nikodym em relação a μ se a restição de F a toda sub-σ-álgebra Σ_0 separável de Σ, $F \mid \Sigma_0$, tem derivada de Radon-Nikodym em relação a μ.

Demonstração: Seja (P_i) uma sequência crescente em $\{P\}$ e $\Sigma_0 = \sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i)$. Logo Σ_0 é sub-σ-álgebra separável de Σ. Por hipótese existe $f_0 \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ tal que $F(A) = \int_A f d\mu$ para todo $A \in \Sigma_0$.

Pelo teorema 3.21 sabemos que (f_{P_i}) é de Cauchy em $L_1(\mu, X)$. Portanto, pelo corolário 3.22 temos que F tem derivada de Radon-Nikodym em $L_1(\mu, X)$.

3.24 Corolário:
Se X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação à restrição de μ a toda sub-σ-álgebra separável Σ_0 de Σ então X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a μ.

Demonstração: Seja $F : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial de variação limitada, μ-contínua e seja Σ_0 uma sub-σ-álgebra separável de Σ.

Considere a restrição de F a Σ_0, $F \mid \Sigma_0$. Logo $F \mid \Sigma_0 \ll \mu \mid \Sigma_0$ e
$\mid F \mid_{\Sigma_0} \mid (\Omega) \leq \mid F \mid (\Omega) < \infty$.

Como X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a $\mu \mid \Sigma_0$, $F|\Sigma_0$ tem derivada de Radon-Nikodym em relação a μ. Logo pela proposição 3.23, F tem derivada de Radon-Nikodym em relação a μ. Portanto X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a μ.

3.25 Observação:
A recíproca do corolário acima é verdadeira, sendo necessária para sua demonstração o resultado que garante que uma medida vetorial de variação limitada e μ-contínua definida em uma sub-σ-álgebra de Σ, tem extensão μ-contínua de variação limitada a Σ. (ver Chatterji [7], "note added in proof").

Abaixo demonstramos o Teorema principal deste capítulo.

3.26 Teorema:

Se um espaço de Banach X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação à medida de Lebesgue m nos borelianos de $[0,1]$, então X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a toda medida finita não-atômica.

Demonstração: Suponhamos μ não-atômica. Podemos supor que $\mu(\Omega) = 1$, pois caso contrário se $F : \Sigma \longrightarrow X$ é medida vetorial de variação limitada e μ-contínua então a derivada de Radon-Nikodym de F em relação a μ será $\mu(\Omega).f$, onde f é a derivada de Radon-Nikodym de F em relação a $\frac{\mu}{\mu(\Omega)}$.

Pelo corolário 3.24, basta mostrar que X tem a PRN em relação a $\mu \mid \Sigma_0$, onde Σ_0 é uma sub-σ-álgebra separável de Σ. Pela observação 3.16 podemos supor que $\mu \mid \Sigma_0$ também é não-atômica, e é claro que $\mu \mid \Sigma_0(\Omega) = \mu(\Omega) = 1$. Logo, pelo corolário 3.15, existe um isomorfismo

$$\bar{T} : L_1([0,1]), X) \longrightarrow L_1(\mu \mid \Sigma_0, X),$$

tal que para todo $E \in \beta([0,1])$, $\int_E f dm = \int_{T(E)} \bar{T} f d\mu$, onde T é o isomorfismo entre $\beta([0,1])$ e Σ_0, que o Teorema 3.14 garante que existe.

Agora seja $F : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial de variação limitada e $F \ll \mu \mid \Sigma_0$.
Defina

$$\bar{F} : \beta([0,1]) \longrightarrow X$$
$$\bar{F}(E) = F(T(E)).$$

Logo se $m(E) = 0$, então $\mu(T(E)) = 0$ e neste caso $F(T(E)) = 0$; então $\bar{F}(E) = 0$. Portanto $\bar{F} \ll m$ e $\mid \bar{F} \mid ([0,1]) = \mid F \mid (\Omega) < \infty$.

Como X tem a propriedade de Radon-Nikodym em relação a m, existe
$f \in L_1([0,1], X)$ tal que $\bar{F}(E) = \int_E f dm$, para todo $E \in \beta([0,1])$.
Como $f \in L_1([0,1], X)$, $\bar{T} f \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$, e

$$\bar{F}(E) = \int_E f dm = \int_{T(E)} \bar{T} f dm$$

e então $F(T(E)) = \int_{T(E)} \tilde{T}f d\mu$ para todo $E \in \beta([0,1])$. Como T é sobre Σ_0, temos que

$$F(A) = \int_A \tilde{T}f d\mu$$

para todo $A \in \Sigma_0$; isto é: $\tilde{T}f$ é a derivada de Radon-Nikodym de F em relação a $\mu \mid \Sigma_0$. Portanto X tem a PRN em relação a $\mu|\Sigma_0$.

No corolário abaixo demonstramos a caracterização dos espaços de Banach que tem a PRN, que nos dispuzemos a demonstrar desde o início.

3.27 Corolário :

Para que um espaço de Banach tenha a PRN é necessário e suficiente que ele a tenha em relação a medida de Lebesgue nos borelianos de $[0,1]$.

Demonstração: A necessidade é óbvia a partir da definição 2.18. A suficiência é decorrência imediata do Corolário 3.6 e do Teorema 3.26.

Capítulo 4

MARTINGALES, DENTABILIDADE E A PROPRIEDADE DE RADON-NIKODYM

No capítulo anterior vimos que algumas técnicas dos espaços L_p permitem relacionar intimamente a propriedade de Radon-Nikodym com a medida de Lebesgue nos borelianos de $[0,1]$. Neste capítulo estudaremos técnicas mais elaboradas usadas principalmente nos espaços de Banach. A motivação para esse estudo ainda é a propriedade de Radon-Nikodym, tendo em vista a sua grande importancia no desenvolvimento mais recente da Teoria do Espaços de Banach.

Para ilustrar a importância da propriedade de Radon-Nikodym no desenvolvimento da matemática como um todo, estudaremos técnicas que surgiram com a análise desta propriedade nos espaços de Banach. Como exemplos podemos citar a introdução do conceito de espaços uniformemente convexos por J.A.Clarkson em 1936, e o conceito da dentabilidade introduzido por M.A.Rieffel na década de 60. Estudaremos também o conceito de Martingales, que apesar de não ter se originado com a análise da propriedade de Radon-Nikodym, está a ela intimamante relacionado.

O conceito de conjuntos dentáveis, apesar de puramente geométrico, mostrou-se perfeitamente adequado ao estudo da propriedade de Radon-Nikodym, e foi utilizando-o que vários pesquisadores conseguiram chegar a resultados muito relevantes. Por isso o estudo da relação do conceito da dentabilidade e das técnicas que dele surgiram com a propriedade de Radon-Nikodym foi escolhido como tema central deste capítulo.

Como anteriormente, ao longo deste capítulo (Ω, Σ, μ) será um espaço de medida finita e X em espaço de Banach.

Usando uma linguagem mais especializada, reintroduzimos abaixo alguns conceitos que estudamos no capítulo anterior.

4.1 Definição:

- Se Σ_0 é uma sub-σ-álgebra de Σ e $f \in L_1(\mu, X)$, dizemos que uma aplicação $g \in L_1(\mu \mid \Sigma_0, X)$ é a esperança condicional de f em relação a Σ_0 se para todo $E \in \Sigma_0$, tivermos que
$$\int_E g d\mu = \int_E f d\mu.$$
Notação: $g = E(f|\Sigma_0)$.
- Seja $(T, \leq)$ um conjunto dirigido e $(\Sigma_t)_{t \in T}$ uma rede de sub-σ-álgebras de Σ. Uma rede $(f_t)_{t \in T}$ é uma X-martingale em (Ω, Σ, μ) se para cada $t \in T$, $f_t \in L_1(\mu|\Sigma_t, X)$ e se $t_1 \leq t_2$ implicar que $\Sigma_{t_1} \subseteq \Sigma_{t_2}$ e $E(f_{t_2}|\Sigma_{t_1}) = f_{t_1}$.

O conceito de martingales está estreitamente ligado à Estatística, tendo na verdade dela se originado. Inicialmente a rede $(f_t)_{t \in T}$ era formada por variáveis aleatórias definidas em um espaço amostral, que nada mais é que um espaço de medida finita. De acordo com Doob [13], os probabilistas já lidavam com integrais de funções definidas em conjuntos abstratos mesmo antes dos analistas sequer sonharem com a Teoria da Medida.

4.2 Observação:
A proposição 3.18 e o Teorema 3.19 garantem a validade dos seguintes resultados:

- 4.2.1- Proposição: Se $f \in L_1(\mu, X)$ e Σ_0 é uma sub-σ-álgebra de Σ, então $E(f|\Sigma_0)$ existe, é única e
$$\|E(f|\Sigma_0)\|_1 \leq \|f\|_1.$$

- 4.2.2 - Teorema (Chatterji): Se $f \in L_1(\mu, X)$ e $(\Sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de sub-σ-álgebras de Σ, então a X-martingale $(E(f|\Sigma_n))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em norma, isto é: existe $f_\infty \in L_1(\mu, X)$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \|E(f|\Sigma_n) - f_\infty\|_1 = 0.$$

Mais ainda $f_\infty = E(f|\Sigma_\infty)$, onde Σ_∞ é a σ-álgebra gerada por $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma_n$.

4.3 Exemplos:

- i) Seja $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos disjuntos de Σ cuja união é Ω; e seja Σ_0 a σ-álgebra de todas as uniões de membros de $(A_n)_{n=1}^{\infty}$. Se $f \in L_1(\mu, X)$, vejamos que, convencionando $\frac{0}{0} = 0$ quando necessário, temos que

$$E(f|\Sigma_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{A_n} f d\mu}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}.$$

Seja $E \in \Sigma_0$. Logo

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{A_n} f d\mu}{\mu(A_n)} \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{E \cap A_n} f d\mu}{\mu(A_n \cap E)} \cdot \int_E \chi_{A_n} d\mu =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{A_n \cap E} f d\mu}{\mu(A_n \cap E)} \mu(A_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n \cap E} f d\mu = \int_E f d\mu,$$

pois $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)$; dado que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

- ii) Seja $F : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial.

$I = \{\pi = \{A_1, A_2, ..., A_n\}; A_i \in \Sigma, \mu(A_i) > 0 \text{ e } \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega\}$ o conjunto das partições de Ω em um número finito de elementos de Σ de medida positiva. Defina $\pi_1 \leq \pi_2$ se π_2 é mais fina que π_1, como em 3.9. Logo, $(I, \leq)$ é um conjunto dirigido. Para cada $\pi \in I$, defina

$$f_\pi(\omega) = \frac{F(A_i)}{\mu(A_i)}$$

se $\omega \in A_i$ e Σ_π a σ-álgebra gerada por todos os elementos da partição π.

Provemos que $(f_\pi)_{\pi \in I}$ é uma X-martingale. Note que $f_\pi = \sum_{A \in \pi} \frac{F(A)}{\mu(A)} \chi_A$.

Para cada $\pi \in I$, f_π assume apenas um número finito de valores, a saber:

$$\frac{F(A_1)}{\mu(A_1)}, \frac{F(A_2)}{\mu(A_2)}, \ldots, \frac{F(A_n)}{\mu(A_n)}.$$

Logo, f_π é simples e portanto $f_\pi \in L_1(\mu, X)$ para todo $\pi \in I$.

Agora, sejam $\pi_1, \pi_2, \in I$ tais que $\pi_1 \leq \pi_2$. É claro que $\Sigma_{\pi_1} \subseteq \Sigma_{\pi_2}$, e se $E \in \Sigma_{\pi_1}$, então $\int_E f_{\pi_2} d\mu = \int_E f_{\pi_1} d\mu$ pois cada elemento de π_2 é uma união de elementos de π_1 e F é aditiva.

É fato que a propriedade de Radon-Nikodym está intimamante relacionada com a convergência de martingales, e os várias resultados demonstrados em [7] comprovam isso. Como exemplo provaremos que PRN implica na convergência de toda martingale uniformemente limitada.

4.4 Proposição:
Se X tem μ-PRN e $(f_n)_{n=1}^\infty$ é uma X-martingale em (Ω, Σ, μ) uniformemente limitada, isto é: $sup_n \|f_n\|_1 < \infty$; então $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge em $L_1(\mu, X)$.

Demonstração: Defina $\Sigma_0 = \bigcup_{n=1}^\infty \Sigma_n$ e $F(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$ para todo $E \in \Sigma_0$. Este limite existe pois se $E \in \Sigma_0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $E \in \Sigma_m$ e da definição de martingale temos que se $m_1 \geq m$,

$$\int_E f_{m_1} d\mu = \int_E f_m d\mu;$$

isto é:

$$F(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f_m d\mu.$$

Logo, F é medida vetorial de variação limitada e μ-contínua definida em Σ_0, pois $|\,F\,|\,(\Omega) = sup_\pi \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| \leq sup_n \int_\Omega \|f_n\| d\mu < \infty$, e se $\mu(E) = 0$, então $\int_E f_n d\mu = 0$ para todo n, logo $F(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = 0$.

Por 1.16 F admite extensão à σ-álgebra gerada por Σ_0, denotada por Σ_∞ que mantém todas estas propriedades. Como X tem a PRN, existe $f \in L_1(\mu, X)$ tal que

$F(E) = \int_E f d\mu$ para todo $E \in \Sigma_\infty$.

Para cada n, tome $E_n = E(f|\sum_n)$. Se $f_\infty = E(f|\sum_\infty)$ por 4.2.2 temos que $\lim_{n\to\infty} \|E_n - f_\infty\| = 0$. Mas, se $E \in \Sigma_n$,

$$\int_E E_n d\mu = \int_E f d\mu = F(E) = \int_E f_n d\mu;$$

portanto, $E_n = f_n\ \mu - q.s.$, e então $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_\infty\|_1 = 0$; isto é: $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge em $L_1(\mu, X)$.

4.5 Definição:

- um subconjunto $A \subseteq X$ é convexo se para todos $x, y \in A$ e $t \in [0,1]$, $tx + (1-t)y \in A$.
- se $A \subseteq X$, a envoltória convexa de A é o menor subconjunto convexo de X que contém A. Notação: $co(A)$.
- se $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : \|y - x\| \leq \varepsilon\}$ é a bola fechada de centro x e raio ε.
- um conjunto $A \subseteq X$ é dentável se para todo $\varepsilon > 0$ existir um elemento $x \in A$ tal que
$$x \notin \overline{co}(A - B_\varepsilon(x)).$$

O lema abaixo estabelece outras caracterizações de dentabilidade para conjuntos limitados.

4.6 Lema (Diestel e Uhl [11]) :
As seguintes afirmações são equivalentes:

- i)todo subconjunto limitado de X é dentável;
- ii)todo subconjunto limitado e fechado de X é dentável;
- iii)todo subconjunto limitado, fechado e convexo de X é dentável.

Demonstração: as implicações i) $\Rightarrow$ ii) e ii) $\Rightarrow$ iii) são triviais, logo basta mostrar que iii) implica em i).

Para isso, seja $A \subseteq X$ limitado e $\epsilon > 0$. Logo $\bar{co}(A)$ é limitado, fechado e convexo, e por iii) temos que $\bar{co}(A)$ é dentável. Portanto existe $x_\epsilon \in \bar{co}(A)$ tal que

$$x_\epsilon \notin co(\bar{co}(A) - B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_\epsilon)) = Q.$$

Mostremos que $(A - Q) \neq \emptyset$.

Suponha que $(A - Q) = A \cap Q^c = \emptyset$. Neste caso teríamos que $A \subseteq Q$, e como Q é convexo e fechado, $\bar{co}(A) \subseteq Q$. Mas $x_\epsilon \in \bar{co}(A)$ e $x_\epsilon \notin Q$ o que nos dá uma contradição, logo $(A - Q) \neq \emptyset$.

Seja $d \in (A - Q)$. Logo, $d \in A$. Mostremos que $d \notin \bar{co}(A - B_\epsilon(d))$.

Para isso, vejamos que $d \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_\epsilon)$. Se $d \notin B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_\epsilon)$, teríamos que

$$d \in (A - B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_\epsilon)) \subseteq \bar{co}(A - B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_\epsilon)) \subseteq Q;$$

e então $d \in Q$ o que não é verdade. Logo, $d \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_\epsilon)$, e portanto $(A - Q) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_\epsilon)$.

Dessa forma $(A - B_\epsilon(d)) \subseteq Q$, pois se $d_0 \in (A - B_{\frac{\epsilon}{2}}(d))$, $d_0 \in A$ e $\|d_0 - d\| \geq \epsilon$ e se $d_0 \notin Q$, d_0 e $d \in (A - Q)$ e então

$\|d_0 - d\| \leq \|d_0 - x_\epsilon\| + \|d - x_\epsilon\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, um absurdo.

Logo, $(A - B_\epsilon(d)) \subseteq Q$, e portanto $\bar{co}(A - B_\epsilon(d)) \subseteq Q$ uma vez que Q é fechado e convexo. Como $d \notin Q$, $d \notin \bar{co}(A - B_\epsilon(d))$, logo $d \in A$ e $d \notin \bar{co}(A - B_\epsilon(d))$, ou seja: A é dentável.

As proposições abaixo contém os primeiros indícios de como os conceitos de martingales e dentabilidade são interligados com a propriedade de Radon-Nikodym.

4.7 Proposição (Rieffel):
Se todo subconjunto fechado e limitado de X é dentável, então X tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Para demonstrar esta proposição, precisamos dos dois lemas provados abaixo. Para as suas demonstrações seguimos Diestel [9].

4.8. Lema:

Se todo subconjunto fechado e limitado de X é dentável e se $F : \Sigma \longrightarrow X$ é medida vetorial μ-contínua e de variação limitada, então para todo $\varepsilon > 0$ e todo $E \in \Sigma^+ = \{A \in \Sigma : \mu(A) > 0\}$, existe $F_E \in \Sigma^+$, $F_E \subseteq E$ tal que o conjunto

$$A(F_E) = \{\frac{F(G)}{\mu(G)} : G \subseteq F_E, G \in \Sigma^+\};$$

tem diâmetro menor ou igual a ε.

Demonstração: De acordo com o lema 4.6, podemos supor que todo limitado é dentável. Considere $| F |: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ a variação de F. Logo, pelo Teorema 1.8, existe $h \in h_1(\mu)$, $h \geq 0$ tal que

$$| F | (E) = \int_E h d\mu \text{ para todo } E \in \Sigma.$$

No caso em que h for limitada em F, teremos

$$\|\frac{F(G)}{\mu(G)}\| \leq \frac{| F | (G)}{\mu(G)} = \frac{1}{\mu(G)} \int_G h d\mu \leq$$

$$\leq \frac{\mu(G)}{\mu(G)} \cdot \sup_{x \in G} | h(x) | \leq \sup_{x \in F} | h(x) | < \infty$$

para todo $G \subseteq F$, $G \in \Sigma^+$. Ou seja: $A(F)$ é um conjunto limitado quando h for limitada em F.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $E \in \Sigma^+$. Como $E = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{\omega \in E : h(\omega) \leq n\}$, dado que procuramos um subconjunto de E, podemos supor que h é limitada em E, pois caso contrário passamos para um subconjunto de E. Logo podemos supor que $A(E)$ é limitado, e portanto dentável.

Então existe $x \in A(E)$ tal que $x \notin \overline{co}(A(E) - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)) = Q$; ou seja: existe $G_0 \subseteq E$, $G_0 \in \Sigma^+$ tal que

$$x = \frac{F(G_0)}{\mu(G_0)}$$

e

$$\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)} \notin \overline{co}(A(E) - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)}) = Q.$$

Se diam $A(G_0) \leq \varepsilon$, temos o resultado. Caso contrário existe $B \subseteq G_0$, $B \in \Sigma^+$ tal que $\|\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)} - \frac{F(B)}{\mu(B)}\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ (essa afirmação é uma simples aplicação da desigualdade triangular); logo $\frac{F(B)}{\mu(B)} \notin B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$.

Mas $B \subseteq G_0 \subseteq E$, $B \in \Sigma^+$, logo $\frac{F(B)}{\mu(B)} \in A(E)$ e portanto $\frac{F(B)}{\mu(B)} \in \bar{co}(A(E) - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)) = Q$. Como $B \in \Sigma^+$, existe um menor inteiro positivo k_1 tal que $\mu(B) \geq \frac{1}{k_1}$.

Chame $E_1 = B$ e $B_1 = G_0 - E_1$. Se $\mu(B_1) = 0$, como $E_1 \subseteq G_0$; teríamos $\mu(G_0) - \mu(E_1) = \mu(G_0 - E_1) = \mu(B_1) = 0$, ou seja: $\mu(G_0) = \mu(E_1)$.

Mas da μ-continuidade de F, teríamos $F(G_0 - E_1) = 0$ o que implica $F(G_0) = F(E_1)$ pois $E_1 \subseteq G_0$. Logo $\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)} = \frac{F(E_1)}{\mu(E_1)}$, o que é um absurdo pois $\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)} \notin Q$ e $\frac{F(E_1)}{\mu(E_1)} = \frac{F(B)}{\mu(B)} \in Q$. Disso tiramos que $B_1 \in \Sigma^+$.

Se diam $A(B_1) \leq \varepsilon$, temos o resultado. Caso contrário, procedendo como anteriormente e aplicando a hipótese para B_1, obtemos um menor inteiro positivo $k_2 \geq k_1$ para o qual existe $E_2 \subseteq B_1$, $E_2 \in \Sigma$, $\mu(E_2) \geq \frac{1}{k_2}$ e $\frac{F(E_2)}{\mu(E_2)} \in Q$. Chame $B_2 = B_1 - E_2$, e como antes $\mu(B_2) > 0$.

Se diam $A(B_2) \leq \varepsilon$, temos o resultado. Caso contrário, existe um menor inteiro positivo $k_3 \geq k_2$ para o qual existe $E_3 \subseteq B_2$, $\mu(E_3) \geq \frac{1}{k_3}$ e $\frac{F(E_3)}{\mu(E_3)} \in Q$.

Se nenhum B_i é tal que diam $A(B_i) \leq \varepsilon$, repetimos o processo indefinidamente para obter uma sequência $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos disjuntos de Σ, e uma sequência não-decrescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que

$$\mu(E_n) \geq \frac{1}{k_n}$$

e

$$\frac{F(E_n)}{\mu(E_n)} \in \bar{co}(A(E) - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)) = Q$$

para todo n.

Note que, por construção, se $E' \in \Sigma$, $E' \subseteq (G_0 - \bigcup_{k=1}^{n} E_k)$ e $\frac{F(E')}{\mu(E')} \in Q$, então $\mu(E') \leq \frac{1}{k_n - 1}$. (*)

Como os elementos de $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ são disjuntos, temos que

$$\mu(E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \mu(\Omega) < \infty$$

logo $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$ e portanto $\lim_{n\to\infty} k_n = 0$. Indique $F_E = (G_0 - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Provemos que diam $A(F_E) \leq \varepsilon$.

Se F_E tivesse medida nula, da μ-continuidade de F, teríamos que $F(F_E) = 0$, e logo $\mu(G_0) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ e $F(G_0) = F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Neste caso

$$\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)} = \frac{F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)}{\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)}{\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(E_n)}{\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)} \cdot \frac{\mu(E_n)}{\mu(E_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)} \cdot \frac{F(E_n)}{\mu(E_n)}$$

Logo $\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)} \in Q$, pois para cada n, $E_n \subseteq G_0 \subseteq E$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(E_n)}{\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)} = 1.$$

Mas $\frac{F(G_0)}{\mu(G_0)} \notin Q$, logo $\mu(F_E) > 0$, isto é: $F_E \in \Sigma^+$.

Seja $E' \subseteq F_E$, $E' \in \Sigma$. Logo $E' \subseteq G_0 - \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ para todo n.

Logo, se $\frac{F(E')}{\mu(E')} \notin B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, então $\frac{F(E')}{\mu(E')} \in (A(E) - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)) \subseteq Q$. E por (*) temos $\mu(E') \leq \frac{1}{k_n - 1}$ para todo n, isto é: $\mu(E') = 0$.

Dessa forma se $E' \in \Sigma^+$, $E' \subseteq F_E$ então $\frac{F(E')}{\mu(E')} \notin Q$. Logo se $E' \in \Sigma^+$, $E' \subseteq F_E$ então

$$\|\frac{F(E')}{\mu(E')} - \frac{F(G_0)}{\mu(G_0)}\| \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

e pela desigualdade triangular temos que diam $A(F_E) \leq \varepsilon$; e com isso provamos o lema.

4.9 Lema:

Sob as mesmas condições do Lema 4.8, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição enumerável $\pi = (E_i)_{i=1}^{\infty}$ de Ω formada por elementos de Σ, tal que para cada i,

$$\text{diam } A(E_i) \leq \varepsilon.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Usando 4.8, para $E = \Omega$, considere n_1 o menor inteiro positivo para o qual existe $E_1 \in \Sigma$ tal que

$$\mu(E_1) \geq \frac{1}{n_1} \text{ e diam } A(E_i) \leq \varepsilon.$$

Agora usando 4.8 para $E = E_1^c$ (note que se $\mu(E_1^c) = 0$, a partição desejada seria (E_1, E_1^c)), considere n_2 o menor inteiro positivo maior ou igual a n_1 para o qual existe $E_2 \in \Sigma$, $E_2 \subseteq E_1^c$ tal que

$$\mu(E_2) \geq \frac{1}{n_2} \text{ e diam } A(E_2) \leq \varepsilon.$$

Caso seja necessário, procedendo dessa forma indefinidamente, construimos uma sequência $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ de elementos disjuntos de Σ e uma sequência não-decrescente $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ tais que:

$$\mu(E_i) \geq \frac{1}{n_i} \text{ e diam } A(E_i) \leq \varepsilon \text{ para todo } i.$$

Mais ainda: de acordo com a construção, se $E' \in \Sigma$, $E' \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j\right)^c$ e diam $A(E') \leq \varepsilon$, então $\mu(E') \leq \frac{1}{n_i - 1}$.

Como $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ é formada por elementos disjuntos de Σ, temos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \mu(\Omega) < \infty,$$
$$\text{logo } \lim_{i \to \infty} \mu(E_i) = 0 \text{ e portanto } \lim_{i \to \infty} n_i = \infty.$$

Tomando $E' = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c$, temos que para todo i, $E' \subsetneq \left(\bigcup_{j=1}^{i} E_j\right)^c$.

Ao supormos que $\mu(E') > 0$, pelo Lema 4.8 temos que existe $E'' \subsetneq E'$, $\mu(E'') > 0$ e diam$A(E'') \leq \varepsilon$. Logo, pela observação acima, temos que

$$\mu(E'') \leq \frac{1}{n_i - 1} \text{ para todo } i, \text{ e então } \mu(E'') \leq \lim_{i \to \infty} \frac{1}{n_i - 1} = 0$$

isto é $\mu(E'') = 0$, um absurdo.

Portanto, $\mu(E') = 0$, ou seja $\mu(\Omega) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)$.

Dessa forma ao definirmos $E_0 = (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)^c$, temos que $\pi = (E_i)_{i=0}^{\infty}$ é uma partição de Ω tal que diam $A(E_i) \leq \varepsilon$ para todo i. pois por construção diam $A(E_i) \leq \varepsilon$ para todo $i \geq 1$ e diam $A(E_0) = 0$ pois $A(E_0) = \emptyset$ uma vez que $\mu(E_0) = 0$.

Em [28], Wilansky utiliza-se do mesmo argumento usado nas demonstrações dos Lemas 4.8 e 4.9 para demonstrar uma versão mais geral do Teorema de Radon-Nikodym(1.8), onde a medida com sinal λ não necessariamente é finita ou mesmo σ-finita.

Demonstração de 4.7:

Seja $F : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial μ-contínua de variação limitada. Utilizando 4.9 repetidas vezes para $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$, considere $(\pi_n)_{n=1}^{\infty} = ((E_i^n)_{i=1}^{\infty})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente em relação ao refinamento de partições de Ω, tal que diam $A(E_i^n) < \frac{1}{2^{n+1}}$ para todo i e todo n. Defina para cada n:

$$g_n : \Omega \longrightarrow X$$

$$g_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{F(E_i^n)}{\mu(E_i^n)} \chi_{E_i^n}.$$

Logo, cada g_n é uma função elementar modelada em Σ, logo $g_n \in L_1(\mu, X)$ para todo n. Mostremos que $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L_1(\mu, X)$.

Para cada n, defina: $F_n = \int_E g_n d\mu$, para todo $E \in \Sigma$. Logo, se π é uma partição de Ω em elementos disjuntos de Σ, temos:

$$\sum_{E\in\pi} \|F(E) - F_n(E)\| = \sum_{E\in\pi} \|F(E) - \int_E g_n d\mu\| =$$

$$\sum_{E\in\pi} \|F(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E \cap E_i^n)) - \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty}(E\cap E_i^n)} g_n d\mu\| \leq \sum_{E\in\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \|F(E \cap E_i^n) - \int_{(E\cap E_i^n)} g_n d\mu\| =$$

$$= \sum_{E\in\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \| \frac{F(E \cap E_i^n)}{\mu(E \cap E_i^n)} - \frac{F(E_i^n)}{\mu(E_i^n)} \| \mu(E \cap E_i^n) \leq$$

$$\leq \sum_{E\in\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(E\cap E_i^n)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{E\in\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E\cap E_i^n) = \frac{\mu(\Omega)}{2^{n+1}}.$$

Logo $\lim_{n\to\infty}\sum_{E\in\pi}\|F(E)-F_n(E)\| = 0$ pois μ é finita.

Dessa maneira $\lim_{n\to\infty} \mid F - F_n \mid (\Omega) = 0$, e portanto $\lim_{m,n\to\infty} \mid F_m - F_n \mid (\Omega) = 0$, e por 2.5 temos:

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_\Omega \|g_m - g_n\| d\mu = \lim_{m,n\to\infty}\|g_m - g_n\|_1 = 0,$$

ou seja: $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L_1(\mu, X)$; logo existe $g \in L_1(\mu, X)$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|g - g_n\|_1 = 0$. Para cada $E \in \Sigma$, como cada π_n é partição de Ω, temos

$$\|F(E) - \int_E g_n d\mu\| = \|\sum_{i=1}^{\infty}F(E_i^n\cap E) - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{F(E_i^n)}{\mu(E_i^n)}.\mu(E_i^n\cap E)\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\|\frac{F(E_i^n\cap E)}{\mu(E_i^n\cap E)} - \frac{F(E_i^n)}{\mu(E_i^n)}\|\mu(E_i^n\cap E) < \frac{1}{2^{n+1}}\mu(E_i^n\cap E) = \frac{\mu(E)}{2^{n+1}}$$

que tende a zero se $n \longrightarrow \infty$. Logo $\lim_{n\to\infty}\|F(E) - \int_E g_n d\mu\| = 0$. Portanto, $F(E) = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu = \int_E g d\mu$. Logo, X tem a propriedade de Radon-Nikodym.

4.10 <u>Proposição</u>:
Se toda X-martingale em $([0,1], \beta([0,1]), m)$ uniformemente limitada é convergente, então para todo $A \subseteq X$ limitado e todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x \notin co(A - B_\varepsilon(x))$.

<u>Demonstração</u>: Suponha que exista $A \subseteq X$ limitado e $\varepsilon > 0$
tais que $x \in co(A - B_\varepsilon(x))$ para todo $x \in A$. Inicialmente suponhamos que todo $x \in A$ pode ser escrito da forma $\alpha y + (1-\alpha)z$; onde $\alpha \in (0,1)$; $y, z \in A$; $\|x - z\| > \varepsilon$ e $\|x - z\| > \varepsilon$.

Então escolhendo arbitrariamente $x_1 \in A$, podemos escolher uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A tal que, para cada n,

$x_n = \alpha_n x_{2n} + (1-\alpha_n)x_{2n+1}$; $\|x_n - x_{2n}\| > \varepsilon$ e
$\|x_n - x_{2n+1}\| > \varepsilon$ e $\alpha_n \in (0,1)$.

Seja $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de intervalos semi-abertos superiormente de $[0,1)$ tais que: $I_1 = [0,1)$, $I_2 = [0,\alpha_1)$, $I_3 = [\alpha_1, 1)$ e para $n = 4, 5, \ldots$

$$I_n = I_{2n} \cup I_{2n+1}, m(I_{2n}) = \alpha_n m(I_n), m(I_{2n+1}) = (1-\alpha_n)m(I_n).$$

Seja Σ_k a σ-álgebra gerada por $\{I_n : 2^k \leq n \leq 2^{k+1}\}$; e

defina: $f_k : [0,1) \longrightarrow X$

$$f_k = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} x_k \chi_{I_k}.$$

É claro que $\Sigma_k \subseteq \Sigma_{k+1}$ para todo k, e cada f_k é simples, logo $f_k \in L_1(m, X)$.

Da construção dos intervalos $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, se $E \in \Sigma_k$, e $k_1 > k$, então $\int_E f_k dm = \int_E f_{k_1} dm$.

Logo, $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma X-martingale em $([0,1], \beta([0,1]), m)$. Mais ainda: esta martingale é uniformemente limitada, pois

$$sup_k \|f_k\|_1 = sup_k \| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} x_k I_k \|_1 = sup_k \int_{\Omega} \| \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} x_k \chi_{I_k} \| dm \leq$$

$$\leq sup_k \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \int_{I_k} \|x_k\| dm = sup_k \|x_k\| \int_{[0,1]} dm = sup_k \|x_k\| < \infty,$$

pois $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq A$, e A é limitado.

Para todo $t \in [0,1)$, $\|f_k(t) - f_{k+1}(t)\| > \varepsilon$, pois se $t \in I_k$, $f_k(t) = x_k$ e $f_{k+1}(t) = x_{2k}$ ou x_{2k+1}, e $\|x_k - x_{2k}\| > \varepsilon$ e $\|x_k - x_{2k+1}\| > \varepsilon$.

Logo $\|f_k - f_{k+1}\|_1 = \int_{[0,1]} \|f_k - f_{k+1}\| dm \geq \varepsilon . m([0,1]) = \varepsilon$; portanto $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ não é de Cauchy em $L_1(m, X)$, logo não é convergente, o que contradiz a hipótese.

Para o caso geral, cada ponto $x \in A$ pode ser escrito como combinação convexa de um numero finito de pontos de A cujas distâncias a x são maiores que ε. E então, procedendo como antes, em cada etapa os intervalos são divididos em um número finito de sub-intervalos cujas amplitudes são proporcionais aos coeficientes da combinação convexa. Exemplificando:

Escolha $x_0 \in A$. Logo existem $x_1, x_2, ..., x_n \in A$ e $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$ em $[0,1]$ tais que $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ e $\|x_0 - x_i\| > \varepsilon$ para $i = 1, ..., n$, e $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Chame $I_0 = [0,1]$ e subdivida I_0 em subintervalos $I_1, ..., I_n$ cujas amplitudes são proporcionais a $\alpha_1, ..., \alpha_n$.

Agora para cada i, existem $x_i^1, x_i^2, ..., x_i^{n_i} \in A$ e $\alpha_i^1, ..., \alpha_i^{n_i} \in [0,1]$ tais que $x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^j x_i^j$ e $\|x_i - x_i^j\| > \varepsilon$ para todo $j = 1, ..., n_i$. Subdivida cada I_i em n_i subintervalos $I_i^1, ..., I_i^{n_i}$ cujas amplitudes são proporcionais a $\alpha_i^1, ..., \alpha_i^{n_i}$.

E assim sucessivamente, como antes, conseguimos uma X-martingale em $([0,1], \beta([0,1]), m)$ uniformemente limitada que não é convergente.

Veremos agora três lemas essencialmente geométricos, cujas demonstrações são devidas a Huff e Morris [21].

4.11 Lema:
Se $K \subseteq X$ é não-dentável, fechado, limitado e convexo, então existe $\varepsilon > 0$ tal que todo $x' \in X'$ e todo $\alpha < sup\ x'(K)$, o conjunto $S(x', \alpha, K) = \{x \in K : x'(X) \geq \alpha\}$ não admite ε-rede finita.

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que $K \subseteq B_1(0)$, e usemos a seguinte caracterização de dentabilidade: $A \subseteq X$ é não-dentável se e somente se existir $\rho > 0$ tal que para todos $x' \in X'$ e $\alpha < sup\ x'(A)$, diam$S(x', \alpha, A) \geq \rho$. (Para a demonstração desse fato, veja o Apêndice).

Logo existe $\rho > 0$ tal que para todos $x' \in X'$ e $\alpha < sup\ x'(K)$, diam$S(x', \alpha, K) \geq \rho$. Seja $\varepsilon = \frac{\rho}{3}$.

Sejam $x' \in X'$, $\alpha < sup\ x'(K)$, $S = S(x', \alpha, K)$ e $H = \{x \in K : x'(x) = \alpha\} \subseteq S$.

Suponha que S tenha ε-rede finita; isto é: suponha que existam $x_1, ..., x_n \in S$ tais que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. Como $\alpha < sup\ x'(K)$, existe $\omega \in K$ tal que $\alpha < x'(\omega)$, logo $S \neq H$; e como o hiperplano H é fechado e convexo, temos que $S \neq H = \overline{co}(H)$, logo podemos supor que para algum $m \leq n$,

$$S = \bar{co}(H \cup (S \cap (B_\epsilon(x_1) \cup ... \cup B_\epsilon(x_m))))$$

mas

$$S \neq K_1 = \bar{co}(H \cup (S \cap (B_\epsilon(x_2) \cup ... \cup B_\epsilon(x_m)))).$$

No caso em que $m = 1$, basta tomar $K_1 = H$. Seja $y_0 \in [(S \cap (B_\epsilon(x_1)) - K_1]$ e tome $y' \in X'$ tal que

$$c = supy'(S) \geq y'(y_0) > supy'(K_1) = a.$$

Tome β tal que $a < \beta < c$ e

$$\frac{\beta - a}{c - a} > 1 - \frac{\rho}{12}$$

e defina $S' = S(y', \beta, S) = \{x \in S : y'(x) \geq \beta\}$. Mostremos que diam$S' \leq \rho$.

Para isso seja $L = \{x \in B_\epsilon(x_1) \cap S : y'(x) \geq a\}$ e $K_2 = \{x \in S : y'(x) \leq a\}$.

É claro que $K_1 \subseteq K_2$ e $y_0 \in L$. Mais ainda:

$$L \cup K_2 \supseteq H \cup (S \cap (B_\epsilon(x_1) \cup ... \cup B_\epsilon(x_m)))$$

logo $S = \bar{co}(L \cup K_2)$.

Como $\{x \in S : y'(x) > \beta\}$ é denso em S' e relativamente aberto em S, e como $co(L \cup K_2)$ é denso em S, temos que $co(L \cup K_2) \cap \{x \in S : y'(x) > \beta\}$ é denso em $\{x \in S : y'(x) > \beta\}$, logo $[co(L \cup K_2)] \cap S'$ é denso em S'.

Seja $\lambda x + (1 - \lambda)y \in [co(L \cup K_2)] \cap S'$, onde $0 \leq \lambda \leq 1$, $x \in L$ e $y \in K_2$. Como L e K_2 são convexos, todo elemento de $co(L \cup K_2)$ tem essa forma. Portanto

$$\beta \leq y'(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda c + (1 - \lambda)a = \lambda(c - a) + a,$$

e então

$$\lambda \geq \frac{\beta - a}{c - a} > 1 - \frac{\rho}{12},$$

isto é:

$$(1 - \lambda) < \frac{\rho}{12}.$$

Seja $\bar{\lambda}\bar{x}+(1-\bar{\lambda})\bar{y}$ outro ponto de $[co(L\cup K_2)\cap S']$ com $\bar{x}\in L$, $\bar{y}\in K_2$ e $0\leq\bar{\lambda}\leq 1$. Logo $(1-\bar{\lambda})<\frac{\rho}{12}$, e então:

$$\|(\lambda x+(1-\lambda)y)-(\bar{\lambda}\bar{x}+(1-\bar{\lambda})\bar{y})\|\leq\|(\lambda x-\bar{\lambda}\bar{x}\|+\|(1-\lambda)y\|+\|(1-\bar{\lambda})\bar{y})\|\leq$$

$$\leq\|x-(1-\lambda)x-\bar{x}+(1-\bar{\lambda})\bar{x}\|+\frac{\rho}{12}+\frac{\rho}{12}\leq\|x-\bar{x}\|+\frac{4\rho}{12}=$$

$$=\|x-\bar{x}\|+\frac{\rho}{3}\leq 2\varepsilon+\frac{\rho}{3}=2\frac{\rho}{3}+\frac{\rho}{3}=\rho,$$

pois $K\subseteq B_1(0)$ e $x,\bar{x}\in B_\varepsilon(x_1)$. Logo, diam $S'\leq\rho$, e portanto $S'=S(y',\beta,S)$ está contido propriamente em $S(y',\beta,K)$; pois diam$S'=S(y',\beta,K)>\rho$.

Dessa forma existe $z\in[S(y',\beta,K)-S']$, logo $y'(z)\geq\beta$ e $z\notin S'$, o que implica que $z\notin S$, isto é: $x'(z)<\alpha$.

Seja $\omega\in S'$. Como $K_1\cap S'=\emptyset$ (pois se $t\in K_1$, $y'(t)\leq\alpha<\beta$ e se $t\in S'$, $y'(t)\geq\beta$), temos que $\omega\notin K_1$, e como $H\subseteq K_1$, $x'(\omega)>\alpha$. Logo, existe $0<\mu<1$ tal que $\mu z+(1-\mu)\omega\in H$.

Mas $y'(\mu z+(1-\mu)\omega)=\mu y'(z)+(1-\mu)y'(\omega)\geq\mu\beta+(1-\mu)\beta=\beta$; logo $\mu z+(1-\mu)\omega\in S'$; o que é uma contradição pois $S'\cap H=\emptyset$, uma vez que $K_1\cap S'=\emptyset$ e $H\subseteq K_1$. Logo S não tem ε-rede finita.

4.12 <u>Lema:</u>
Sob as mesmas condições do Lema 4.11, existe $\varepsilon>0$ tal que:

$$K=\bar{co}(K-(B_\varepsilon(x_1)\cup...B_\varepsilon(x_n))),$$

para todo conjunto finito $\{x_1,...,x_n\}\subseteq K$.

<u>Demonstração:</u> Suponha que para todo $\varepsilon>0$, exista $\{x_1,...,x_n\}\subseteq K$ tal que $K\neq\bar{co}(K-(B_\varepsilon(x_1)\cup...B_\varepsilon(x_n)))$, o que equivale a dizer que K contém propriamente $\bar{co}(K-(B_\varepsilon(x_1)\cup...B_\varepsilon(x_n)))$, pois K é fechado e convexo.

Logo existe $x\in K$ tal que $x\notin\bar{co}(K-(B_\varepsilon(x_1)\cup...B_\varepsilon(x_n)))$. Aplicando a segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach (ver Apêndice) para o compacto $\{x\}$ e o fechado $\bar{co}(K-(B_\varepsilon(x_1)\cup...B_\varepsilon(x_n)))$, temos que existem $x'\in X'$ e α tais que:

$$x'(x) > \alpha \text{ e } x'(y) < \alpha \text{ para todo } y \in \bar{co}(K - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... B_\varepsilon(x_n))).$$

Logo, $\alpha < sup\ x'(K)$, pois $x \in K$. Mostremos que $\{x_1, ..., x_n\}$ é uma ε-rede finita para $S(x', \alpha, K)$. Para isso seja $z \in S(x', \alpha, K)$. Logo, $x'(z) \geq \alpha$, portanto $z \notin \bar{co}(K - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... B_\varepsilon(x_n)))$.

Mas $z \in K$ e K é convexo, logo $z \in \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$, ou seja, $S(x', \alpha, K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$ e portanto $\{x_1, ..., x_n\}$ é ε-rede finita para $S(x', \alpha, K)$, o que contradiz o Lema 4.11, e completa a demonstração.

4.13 Lema:

Se K é um subconjunto não-dentável, fechado, limitado e convexo de X, cujo interior K^0 é não-vazio, então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$K^0 = \bar{co}(K^0 - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n)))$$

para todo conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\}$ de K.

Demonstração: Como K satisfaz as hipóteses de 4.12, seja $\varepsilon > 0$ tal que $K = \bar{co}(K - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n)))$ para todo $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq K$.

Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ um subconjunto finito de K, e seja $J = \bar{co}(K - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n)))$.

Então $K = \bar{co}(J)$ e $J^0 = K^0 - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))$; pois

$$J^0 = (K - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))^0 = (K \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))^c)^0 =$$
$$= K^0 \cap ((B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))^c)^0 = K^0 \cap ((B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))^c)^- =$$
$$= K^0 \cap (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))^c = K^0 - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n)).$$

ver [29] pág. 27. Note que $J \subseteq \bar{J^0}$, pois se $x \in J$ então $x \in K$ e $x \notin (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))$.

Seja $y \in K^0$, logo o intervalo $[y, x)$ está totalmente contido em K^0, e para pontos $\omega \in [y, x)$ suficientemente próximos a x, $\omega \notin (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))$. Logo, x é ponto limite de pontos em $K^0 - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n)) = J^0$; logo $x \in \bar{J^0}$ e portanto $J \subseteq \bar{J^0}$.

Dessa forma,
$$co(J) \subseteq \bar{co}(J^0),$$
e como o interior de um convexo não vazio coincide com o interior de seu fecho, temos
$$K^0 = (\bar{co}(J))^0 = (coJ)^0 \subseteq (\bar{co}(J^0))^0 = co(J^0).$$

4.14 Proposição (Davis e Phelps [8]) :
Se X contém um subconjunto fechado, limitado, convexo e não-dentável, então X também contém um subconjunto fechado, limitado, convexo, não-dentável cujo interior é não-vazio.

Demonstração: Seja $K \subseteq X$ fechado, limitado, convexo e não-dentável. Se $K^0 = \emptyset$, considere $K_1 = K + B_1(0)$. Provemos que K_1 é não-dentável.

Como K é não-dentável, existe $\epsilon > 0$, tal que $x \in \bar{co}(K - B_\epsilon(x))$ para todo $x \in K$. Logo se $y \in (K + B_1(0))$, $y = x + v$ onde $x \in K$ e $v \in B_1(0)$. Mas $x \in \bar{co}(K - B_\epsilon(x))$, logo
$$(x+v) \in [\bar{co}(K - B_\epsilon(x)) + B_1(0)] \subseteq \bar{co}((K + B_1(0)) - B_\epsilon(x+v))$$
(veja no Apêndice a demonstração desta última continência); logo
$y = (x+u) \in \bar{co}((K + B_1(0)) - B_\epsilon(y))$, e portanto $K + B_1(0)$ é não-dentável.

Agora basta tomar $K_2 = \bar{K}_1 = (K + B_1(0))^-$, e então K_2 é claramente fechado, limitado, convexo e $K_2^0 \neq \emptyset$. E como K_1 é não-dentável, K_2 também é não-dentável (veja Apêndice).

Uma consequência importante de proposição acima e dos lemas anteriores é a seguinte proposição:

4.15 Proposição: (Huff [20])
Se para todo $A \subseteq X$ fechado e limitado e para todo $\epsilon > 0$, existir $x \in A$ tal que $x \notin co(A - B_\epsilon(x))$, então todo subconjunto fechado e limitado de X é dentável.

Demonstração: Suponha que exista $A \subseteq X$ fechado, limitado não-dentável. Por 4.6, existe $K_1 \subseteq X$ fechado, limitado, convexo não-dentável, e por 4.14 existe $K \subseteq X$

fechado, limitado, convexo não-dentável e $K^0 \neq \emptyset$.

Logo, pelo Lema 4.13, temos que para todo $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq K$,

$$K^0 = co(K^0 - (B_\varepsilon(x_1) \cup ... \cup B_\varepsilon(x_n))).$$

Escolha arbitrariamente $x_0 \in K^0$ e indique $F_1 = \{x_0\}$.

Mas $x_0 \in K^0 = co(K - B_\varepsilon(x_0))$; logo existem $x_1, ..., x_n \in K^0$ tais que x_0 é uma combinação convexa de $\{x_1, ..., x_n\}$.

Chame $F_2 = \{x_1, ..., x_n\}$. Logo $F_1 \subseteq co(F_2)$ e como cada $x_i \notin B_\varepsilon(x_0)$, temos que

$\|x_0 - x_i\| \geq \varepsilon$, para todo $i = 1, ..., n$.

Repetindo indefinidamente este procedimento, podemos escolher uma sequência $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos finitos de K^0 tal que para cada n, $F_n \subseteq co(F_{n+1})$ e se $x \in F_n$, $y \in F_m$ e $n \neq m$, então $\|x - y\| \geq \varepsilon$.

Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Logo $A \subseteq K^0$ e portanto A é limitado.

Seja $x \in A$. Logo $x \in F_n$, para algum n e consequentemente $x \in co(F_{m+1})$; e então $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$; onde para cada $j = 1, ..., k$, $0 < \alpha_1 < 1$ e $x_j \in F_{m+1}$.

Mas por construção, $\|x - x_j\| \geq \varepsilon$ para todo j, pois $x \in F_n$ e $x_j \in F_{m+1}$. Dessa forma $x_j \notin B_\varepsilon(x)$, para todo j. Logo, $x \in co(F_{m+1} - B_\varepsilon(x)) \subseteq co(A - B_\varepsilon(x))$, e então $x \in co(A - B_\varepsilon(x))$ para todo $x \in A$.

Vejamos que A é fechado. Para isso seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em A. Logo, cada x_n pertence a algum $F_n{}'$; e como $\|x_n - x_m\| \geq \varepsilon$ se $n' \neq m'$, então existe m tal que a partir de um determinado índice, $x_n \in F_m$. Mas como F_m é finito, ele é fechado e então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para um ponto de F_m que está contido em A. Logo, A é fechado.

Dessa forma, A é fechado limitado e para todo $x \in A$, $x \in co(A - B_\varepsilon(x))$; o que contradiz a hipótese. Logo, todo fechado e limitado é dentável.

Podemos agora combinar os resultados anteriores de forma a demonstrar o principal Teorema do capítulo 3.

4.16 Teorema:

X tem a propriedade de Radon-Nikodym se e somente se X a tem em relação à medida de Lebesgue nos borelianos de $[0,1]$.

Demonstração: Suponha que X tenha a PRN em relação a m, e que X não tenha a PRN.

Pela proposição 4.7, existe $A \subsetneq X$ fechado, limitado não-dentável, logo pela proposição 4.15 existem $B \subseteq X$ fechado e limitado e $\varepsilon > 0$ tal que para $x \in B$, $x \in co(B - B_\varepsilon(x))$.

Dessa forma, pela proposição 4.10 existe uma X-martingale em $([0,1], \beta([0,1]), m)$ uniformemente limitada não-convergente. Finalmente, pela proposição 4.4, X não tem a PRN em relação à medida de Lebesgue em $\beta([0,1])$, o que nos dá uma contradição.

Com isso provamos que o fato de X ter a PRN em relação à medida de Lebesgue em $\beta([0,1])$ é suficiente para que X tenha a PRN. A necessidade é óbvia.

APÊNDICE

Neste Apêndice apresentamos as demonstrações de alguns resultados que aparecem no texto, mas cujas demonstrações, por motivos didáticos, foram omitidas num primeiro momento.

Novamente (Ω, Σ, μ) é um espaço de medida finita, e X é um espaço de Banach.

À seguir demonstramos que sob algumas condições, as definições de mensurabilidade de 2.1 e 1.1 são equivalentes.

A.1 Definição:

- μ é uma medida completa se todo subconjunto de um conjunto de medida nula pertencer à σ-álgebra.
- Uma aplicação $f : \Omega \longrightarrow X$ tem imagem μ-essencialmente separável se existe $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ e $f(E^c)$ é separável em X.

A.2 Proposição:
Se μ é completa e $f : \Omega \longrightarrow X$ tem imagem μ-essencialmente separável, então existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $f_n : \Omega \longrightarrow X$, de funções simples modeladas em Σ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ $\mu - q.s.$ se e somente se para todo aberto $Y \subseteq X$, tivermos $f^{-1}(Y) \in \Sigma$.

Demonstração: Suponha que exista tal sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e seja $Y \subseteq X$ um aberto.

Logo, pela proposição 2.6 existem $E \in \Sigma$ e F um subconjunto de um conjunto de medida nula tais que

$$f^{-1}(Y) = E \cup F.$$

Mas como μ é completa, $F \in \Sigma$, logo $f^{-1}(Y) \in \Sigma$, pois Σ é σ-álgebra.

Para a recíproca considere E um conjunto de medida nula tal que $f(E^c)$ é separável em X. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência densa em $f(E^c)$.

Para cada n, defina $X_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Seja $y \in E^c$ e defina f_n da seguinte forma: se $\operatorname{dist}(f(y), X_n) > 1$, então $f_n(y) = 0$. Caso contrário, seja i o maior inteiro em $\{1, ..., n\}$ tal que $\operatorname{dist}(f(y), X_n) < \frac{1}{i}$, e seja j o maior inteiro para o qual $\|f(y) - x_j\| < \frac{1}{i}$. Defina $f_n(y) = x_j$.

Dessa forma, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de funções simples.

Mostremos que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ $\mu - q.s.$. Para isso seja $y \in E^c$ e $0 < \varepsilon < 1$. Tome um inteiro k tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$ e um inteiro $m \geq k$ tal que $\|x_m - f(y)\| < \frac{1}{k}$ (isso é possível pois $f(y) \in f(E^c)$, conjunto no qual $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é densa). Logo, para todo $n \geq m$, $x_m \in X_n$ e $\operatorname{dist}(f(y), X_n) < \frac{1}{k}$, logo

$$\|f_n(y) - f(y)\| = \|x_m - f(y)\| \leq \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Abaixo demonstramos a afirmação feita na observação 2.11, que garante que a integral de Bochner está bem definida.

A.3 Proposição:

De acordo com a notação da definição 2.10, o limite de $\int_E f_n d\mu$ quando n tende a infinito existe, e independe da sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ considerada.

Demonstração: Para provar a existência do limite, basta provar que $(\int_E f_n d\mu)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X, e isso é verdade pois

$$\|\int_E f_n d\mu - \int_E f_m d\mu\| \leq \int_\Omega \|f_n - f_m\| d\mu \leq \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu + \int_\Omega \|f_m - f\| d\mu,$$

e $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0$.

Provemos agora a independência da sequência. Para isso, sejam $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências de funções simples tais que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\| d\mu = 0.$$

Dessa forma temos:

$$\lim_{n\to\infty} \| \int_E f_n d\mu - \int_E g_n d\mu \| \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - g_n\| d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f - g_n\| d\mu = 0$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Passemos agora à demonstração de que todo espaço de dimensão finita tem a propriedade de Radon-Nikodym.

A.4 Proposição:
Para todo n, $\mathbf{R}^n$ tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Demonstração: Seja $F : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}^n$ medida vetorial μ-contínua de variação limitada. Sejam $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ as projeções canônicas de $\mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$, e considere as compostas $\pi_j \circ F : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R}$, para $j = 1, ..., n$.

Se $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de elementos disjuntos de Σ, então

$$\pi_j \circ F(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \pi_j(\sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\pi_j \circ F(E_n)).$$

Se $\mu(E) = 0$, então $F(E) = 0$, pois $F \ll \mu$; logo $\pi_j \circ F(E) = 0$. Mais ainda,

$$| \pi_j \circ F | (\Omega) = sup_\pi \sum_{A\in\pi} | \pi_j \circ F(A) | \leq sup_\pi \sum_{a\in\pi} \|\pi_j\| \|F(A)\| = \|\pi_j\| sup_\pi \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| =$$

$$= \|\pi_j\| \mid F \mid (\Omega) < \infty;$$

pois cada π_j é um funcional linear contínuo e F é de variação limitada.

Dessa forma provamos que cada $\pi_j \circ F$ é medida de variação limitada e μ-contínua. Logo pelo Teorema 1.8 existem funções $f_1, f_2, ..., f_n$ em $L_1(\mu)$ tais que:

$\pi_j \circ F(E) = \int_E f_j d\mu$; para todos $E \in \Sigma$ e $j = 1, ..., n$; (*)

Considere agora $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dada por $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$.

Para cada j, como $f_j \in L_1(\mu)$, tome $(f_j^i)_{i=1}^{\infty}$ sequência de funções simples que converge a f_j, e considere a sequência $((f_1^i, ..., f_n^i))_{i=1}^{\infty}$. Utilizando o fato de que quaisquer duas normas em $\mathbf{R}^n$ são equivalentes, podemos trabalhar com a norma l_1, e neste caso temos:

$$\lim_{i\to\infty} \|f - (f_1^i, f_2^i, ..., f_n^i)\|_1 = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \|(f_1 - f_1^i, ..., f_n - f_n^i)\| d\mu =$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega | f_1 - f_1^i | + ... | f_n - f_n^i | \, d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lim_{i\to\infty} \int_\Omega | f_k - f_k^i | \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \lim_{i\to\infty} \|f_k - f_k^i\|_1 = 0.$$

Com isso provamos que $f \in L_1(\mu, \mathbf{R}^n)$.

Seja $E \in \Sigma$. Por (*) temos que

$$F(E) = (\int_E f_1 d\mu, ..., \int_E f_n d\mu).(**)$$

Provemos que se $g : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $g = (g_1, ..., g_n)$ é simples, então $\int_E g d\mu = (\int_E g_1 d\mu, ..., \int_E g_n d\mu)$.

Suponha $g = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}$, onde cada $a_i = (a_i^1, ..., a_i^n) \in \mathbf{R}^n$.

Logo,

$$g = \sum_{i=1}^{m} (a_i^1, ..., a_i^n)\chi_{E_i} = (\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{E_i}, ..., \sum_{i=1}^{m} a_i^n \chi_{E_i}),$$

e

$$\int_E g d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{m} (a_i^1, ..., a_i^n)\mu(E_i) = (\sum_{i=1}^{m} a_i^n \mu(E_i), ..., \sum_{i=1}^{m} a_i^1 \mu(E_i)) =$$

$$= (\int_E \sum_{i=1}^{m} a_i^1 \chi_{E_i} d\mu, ..., \int_E \sum_{i=1}^{m} a_i^n \chi_{E_i} d\mu) = (\int_E g_1 d\mu, ..., \int_E g_2 d\mu).$$

Com isso temos que para cada $j = 1, ..., n$:

$$\pi_j(\int_E f d\mu) = \pi_j(\lim_{i\to\infty} \int_E (f_1^i, ..., f_n^i) d\mu) = \lim_{i\to\infty} \pi_j(\int_E (f_1^i, ..., f_n^i) d\mu) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \pi_j\Big(\int_E f_1^i d\mu, \dots, \int_E f_n^i d\mu\Big) = \lim_{i\to\infty} \int_E f_j^i d\mu = \int_E f_j d\mu.$$

Logo, $\int_E f d\mu = (\int_E f_1 d\mu, \dots \int_E f_n d\mu) = F(E)$, por (**). Portanto, $\mathbb{R}^n$ tem a propriedade de Radon-Nikodym.

Passemos ao estudo do conceito de base de Schauder.

A.5 Definição:

- A sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X é uma base de Schauder para X se:

  i) Para todo x pertencente ao fecho do subespaço gerado pela sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ existe uma única sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge a x em norma;

  ii) X é igual ao fecho do subespaço gerado por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

- Uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X é limitadamente completa, se para toda sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de escalares tal que $\sup_n \|\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\| < \infty$, tivermos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge em norma.

Os espaços de Banach que têm base de Schauder apresentam diversas propriedades interessantes. Em [3] pág. 85 temos a demonstração que c_0 tem base de Schauder, e que se $1 \leq p < \infty$, l^p e $L^p([0,1])$ também têm. É claro que se um espaço tem base de Schauder, ele é separável. Mas a recíproca não é verdadeira: em [16], P. Enflo provou que se $p \neq 2$, $1 \leq p < \infty$, então $L^p([0,1])$ possui um subespaço que não tem base de Schauder.

Enunciamos abaixo o resultado conhecido como "Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach".

A.6 Teorema:

Sejam A e B subconjuntos convexos, não vazios e disjuntos de X. Suponhamos que A seja fechado e B seja compacto. Então existem um funcional linear $x' \in X'$ e um número real α, tais que:

$x'(x) > \alpha$ para todo $x \in A$, e
$x'(y) < \alpha$ para todo $y \in B$.

Isto é: existe um hiperplano fechado que separa A e B estritamente.

Demonstração: ver [5] pág. 7.

Demonstraremos agora duas caracterizações de conjuntos dentáveis que foram úteis em demonstrações do capítulo 4.

A.7 Lema:
$A \subseteq X$ é não-dentável se e somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todos $x' \in X'$ e $\alpha < \sup x'(A)$, o conjunto

$$S(x', \alpha, A) = \{x \in A : x'(x) \geq \alpha\}$$

tem diâmetro maior ou igual a ε.

Demonstração: Suponha A não-dentável. Por definição existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in A$, $x \in \bar{co}(A - B_\varepsilon(x))$. (*)

Suponha que para todo $\varepsilon > 0$, exista $x' \in X'$ e $\alpha < sup\ x'(A)$ tal que diam$S(x', \alpha, A) < \varepsilon$. Tome $y \in A$ tal que $x'(y) > \alpha$. Logo $S(x', \alpha, A) \subseteq B_\varepsilon(y)$.

Seja $z \in co(A - B_\varepsilon(y))$. Logo, $z = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$, onde $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ e $x_j \in A$, $\|x_j - y\| > \varepsilon$ para todo j. Portanto

$$x'(z) = x'(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x'(x_j) < \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha = \alpha$$

pois $x_j \in A$ para todo j.

Logo, para todo $z \in co(A - B_\varepsilon(x))$, $x'(z) < \alpha$, e então para todo $z \in \bar{co}(A - B_\varepsilon(x))$, $x'(z) \leq \alpha$. Portanto $y \notin \bar{co}(A - B_\varepsilon(x))$, o que contradiz (*).

Reciprocamente, suponha que exista $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x' \in X'$ e $\alpha < sup\ x'(A)$, diam$S(x', \alpha, A) \geq \varepsilon$. (**)

Suponha que A seja dentável. Por definição, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $x \notin \bar{co}(A - B_\varepsilon(x))$. Aplicando A.6 para o compacto $\{x\}$ e o fechado $\bar{co}(A - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$, temos que existe $x' \in X'$ e α tais que:

$x'(x) > \alpha$ e $x'(y) < \alpha$ para todo $y \in \bar{co}(A - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$.

Logo, $\alpha < sup\ x'(A)$ pois $x \in A$. Seja $z \in S(x', \alpha, A)$.

Logo, $x'(z) \geq \alpha$ e então $z \notin \bar{co}(A - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$, e então $z \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Dessa forma, provamos que $S(x', \alpha, A) \subseteq B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, logo diam$S(x', \alpha, A) < \varepsilon$, o que contradiz (**). Portanto, A é não-dentável.

A.8 <u>Lema</u> (Davis-Phelps [8]):
$A \subseteq X$ é não-dentável se e somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subseteq \bar{co}(A - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$ para todo $x \in A$.

<u>Demonstração</u>: Uma implicação decorre imediatamente da definição de dentabilidade. Para a outra, suponha A não-dentável. Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in A$, $y \in \bar{co}(A - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y))$.

Suponha $x, y \in A$, $\|x - y\| > \frac{\varepsilon}{2}$. Então, $y \in \bar{co}(A - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$. Por outro lado, se $\|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, então $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subseteq B_{\varepsilon}(y)$, logo $y \in \bar{co}(A - B_{\varepsilon}(y))$ e portanto $y \in \bar{co}(A - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$.

A.9 <u>Corolário</u>:
$A \subseteq X$, A não-dentável, então $\bar{A}$ é não-dentável.

<u>Demonstração</u>: Pelo Lema A.8, existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subseteq \bar{co}(A - B_{\varepsilon}(x))$ para todo $x \in A$. Logo, $\bar{A} \subseteq \bar{co}(A - B_{\varepsilon}(x)) \subseteq \bar{co}(\bar{A} - B_{\varepsilon}(x))$ para todo $x \in A$. (*)

Portanto, para todo $x \in A$, $\bar{A} \subseteq \bar{co}(\bar{A} - B_{\varepsilon}(x)) \subseteq \bar{co}(\bar{A} - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$.

Seja $x \in (\bar{A} - A)$. Tome $\bar{x} \in A$ tal que $\|x - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}$, logo por (*)

$$\bar{A} \subseteq \bar{co}(\bar{A} - B_{\varepsilon}(\bar{x})),$$

mas é claro que

$$\bar{co}(\bar{A} - B_{\varepsilon}(\bar{x})) \subseteq \bar{co}(\bar{A} - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)).$$

Logo, para todo $x \in \bar{A}$, $\bar{A} \subseteq \bar{co}(\bar{A} - B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x))$. Agora basta tomar $\rho = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ que pelo Lema A.8 temos que $\bar{A}$ é não-dentável.

Demonstramos abaixo uma relação entre conjuntos que foi utilizada na demonstração da proposição 4.14.

A.10 Lema:
Sejam $K \subseteq X$, $x \in K$ e $v \in B_1(0)$. Então se $\varepsilon > 0$,

$$[\bar{co}(K - B_\varepsilon(x)) + B_1(0)] \subseteq \bar{co}((K + B_1(0)) - B_\varepsilon(x + v)).$$

Demonstração: Seja $y \in [\bar{co}(K - B_\varepsilon(x)) + B_1(0)]$, então $y = z + v$, onde $z \in \bar{co}(K - B_\varepsilon(x))$ e $v \in B_1(0)$. Logo, existe uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $co(K - B_\varepsilon(x))$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = z$; dessa forma, para cada n, $x_n = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n x_j^n$ onde $\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n = 1$, $x_j^n \in K$ e $\|x_j^n - x\| > \varepsilon$ para todo $j = 1, ..., k_n$.

Chame $y_j^n = x_j^n + v$, logo $y_j^n \in K + B_1(0)$ e $\|y_j^n - (x+v)\| = \|x_j^n - x\| > \epsilon$, ou seja

$$y_j^n \in [(K + B_1(0)) - B_\varepsilon(x + v)]$$

para todo $j = 1, ..., k_n$ e para todo n. Dessa forma, se $y_n = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n y_j^n$, temos que $y_n \in co((K + B_1(0)) - B_\varepsilon(x + v))$.

Mas $y_n = x_n + v$, logo $\lim_{n\to\infty} y_n = z + v = y$, e portanto $y \in \bar{co}((K + B_1(0)) - B_\varepsilon(x + v))$.

Bibliografia

[1] Ash, R.B. - Measure, Integration and Functional Analisys. Academic Press, Inc. New York and London, 1972

[2] Bartle, R.G. - The elements of integration. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966

[3] Beauzamy, B. - Introduction to Banach Spaces and Their Geometry. Notas de Matemática (86), North-Holland Publishing Company, 1982

[4] Bourguin, R. D. - Geometric aspects of convex sets with the Radon-Nikodym Property. Springer Lecture Notes in Math., vol 993, 1983

[5] Brezis, H. - Analyse Fonctionelle - Théorie et applications. Masson, Paris, 1983

[6] Chatterji, S. D. - A note on the convergence of Banach Space valued martingales, Math. Ann. 153, 142-149, 1964

[7] Chatterji, S. D. - Martingale convergence and the Radon-Nikodym Property in Banach Spaces, Math. Scand. 22, 21-41, 1968

[8] Davis, W. J. and Phelps, R. R. - The Radon-Nikodym Property and Dentable Sets in Banach Spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 45, 119-121, 1974

[9] Diestel, J. - Geometry of Banach Spaces - Selected Topics. Springer Lecture Notes in Math., vol. 485, 1975

[10] Diestel, J. and Uhl, J. J. - The Radon-Nikodym Theorem for Banach Space Valued Measures, Rocky Mountain J. Math. 6, 1-46, 1976

[11] Diestel, J. and Uhl, J. J. - Vector Measures. Mathematical Surveys of the A.M.S. vol 15, 1977

[12] Dinculeanu, N. - Vector Measures, Pergamon Press, New York, 1967

[13] Doob, J. L. - What is a Martingale? The American Mathematical Monthly, 78, 451-462, 1971

[14] Dugundji, J. - Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1966

[15] Dunford, N. and Schwartz, T. - Linear Operators, Part I, Interscience, New York and London, 1958

[16] Enflo, P. - A counter-example to the approximation problem in Banach Spaces. Acta Math., 130, 309-317, 1973

[17] Fernandez, P. J. - Medida e Integração, Projeto Euclides, IMPA, 1976

[18] Figueiredo, D. G. - Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, Projeto Euclides, IMPA, 1977

[19] Halmos, P. R. - Measure Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol. 18, Springer-Verlag, Inc., New York, 1974

[20] Huff, R. E. - The Radon-Nikodym Property for Banach Spaces, Measure Theory, Springer Lecture Notes in Math., vol. 541, 1976

[21] Huff, R. E. and Morris, P. D. - Geometric Characterizations of the Radon-Nikodym Property in Banach Spaces. Studia Math., T.LVI, 157-164, 1976

[22] Kreyszig, E. - Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, Inc., 1978

[23] Light, W. A. and Cheney, E. W. - Approximation Theory in Tensor Product Spaces. Springer Lecture Notes in Math., vol. 1169, 1985

[24] Phelps, R. R. - Dentability and extreme points in Banach Spaces. J. Functional Analysis, 17, 79-90, 1974

[25] Rønnow, U. - On Integral representation of vector valued measures, Math. Scand. 21, 45-53, 1967

[26] Royden, W. L. - Real Analysis. 2a. Ed. Macmillan, New York, 1968

[27] Rudin, W. - Real and Complex Analysis. 2a. Ed. Mac Graw Hill Book Company, 1970

[28] Wilansky, A. - On the proof of the Radon-Nikodym Theorem. The American Mathematical Monthly, 96, 441, 1989

[29] Willard, S. - General Topology. Addison-Wesley Publishing Company, 1970