

ELASTICIDADE NÃO LINEAR COM SIMETRIA RADIAL PARA MATERIAIS  
PRÉ-ESTICADOS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por *Artur Lewis Gower* e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 11 de Julho de 2011



Prof. Dr.: Lúcio Tunes dos Santos  
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos
- 2 Prof. Dr. Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher
- 3 Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR  
MARIA FABIANA BEZERRA MÜLLER – CRB8/6162  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA – UNICAMP

G747e Gower, Artur Lewis  
Elasticidade não linear com simetria radial para  
materiais pré-esticados / Artur Lewis Gower. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Lúcio Tunes dos Santos.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica.

1. Elasticidade. 2. Propagação de ondas.  
3. Ondas de choque. 4. Mecânica não-linear. I. Santos,  
Lúcio Tunes dos, 1962-. II. Universidade Estadual de  
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Nonlinear elastodynamics with radial symmetry for  
pre-stressed materials

**Palavras-chave em inglês:**

Elasticity

Wave propagation

Shock waves

Nonlinear mechanics

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Mestre em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Lúcio Tunes dos Santos [Orientador]

Joerg Dietrich Wilhelm Schleicher

Jessé Carvalho Costa

**Data da defesa:** 11-07-2011

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 11 de julho de 2011 e aprovada

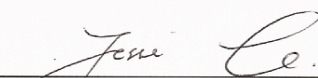
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). LÚCIO TUNES DOS SANTOS



Prof.(a). Dr(a). JOERG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER



Prof.(a). Dr(a). JESSÉ CARVALHO COSTA

Dedicated to my parents  
Elza Maria Gower and David Michael Gower.

A good fort needs a gap to lure the enemy in,  
so that we can attack them.  
Those who only defend always lose the war.

(adapted from Akira Kurosawa – The Seven  
Samurai)

**Em ordem cronológica, agradeço aos meus pais por me ensinarem a enxergar o mundo sob múltiplas perspectivas, instigando minha curiosidade fazendo as perguntas corretas e terem me encorajado a ter um pensamento independente e duvidar das respostas prontas.**

**Agradeço a oportunidade de ter estudado na Unicamp, o curso de graduação unificado de Matemática, Física, Matemática Aplicada e Computacional, cuja flexibilidade e diversificação me permitiu descobrir os assuntos que mais aguçam minha curiosidade e a oportunidade de me aprofundar neles. A qualidade desses cursos deve-se aos excelentes professores, por exemplo: Paulo Régis Ruffino, Margarida Pinheiro Mello, Maria Amélia Novais, Roberto Andreani, Nir Cohen, Lúcio Tunes dos Santos, Ary Orozimbo, Felipe Paulo Bergo, Sindo Dias, Antonio Manoel Mansanares e Pedro Cunha de Holanda.**

**Sou grato a assistência financeira dada pelo CNPq, a meu orientador Lúcio Tunes dos Santos por me dar a liberdade de escolher a minha área de pesquisa e ambos Lúcio e Margarida Mello por seus conselhos e amizade durante todos esses anos. Obrigado Milton da Costa pelas discussões que me ajudaram a tirar várias dúvidas, Jörg Schleicher por suas correções focadas em como elaborar um texto científico, Alvaro de Pierro por deixar usufruir o MiLab.**

**Aos meus amigos do Laboratório de Problemas Inversos, pela amizade e, por todos os cafés, chás e frutas que compartilhamos. E agora, claramente quebrando a ordem cronológica, obrigado ao meu clan da república, entidade e fraternidade abreviada: Nerv.**

## Resumo

Nesta tese expomos uma investigação qualitativa e quantitativa sobre a propagação de ondas com simetria radial em materiais elásticos pré-esticados, isotrópicos e homogêneos. Esse tipo de modelo se aproxima a uma explosão em um sólido como, por exemplo, uma fonte em sísmica. Além disso, o comportamento qualitativo da dinâmica radial ajuda o melhor entendimento do caso tridimensional. O trabalho tem um enfoque mais específico na modelagem, condições de choques, a dinâmica próximo do centro do corpo e análise da solução analítica do material linearizado.

**Palavras-chave:** Elasticidade Não Linear, Propagação de Ondas, Simetria Radial, Choques.

## Abstract

This thesis is an exploration into the qualitative and quantitative behaviour of wave propagation with radial symmetry in materials which are prestressed elastic, isotropic and homogeneous. This type of model approximates an explosion in a solid, such as a seismic source. Also, an understanding of the radial dynamics can bring insight and contribute to our comprehension of the general 3D case. This thesis focuses on modelling, shock conditions, the dynamics close to the centre of the body and examining the analytical solution of an linearised material.

**Keywords:** Nonlinear Elasticity, Wave Propagation, Radial Symmetry, Shocks.

# Sumário

Resumo . . . . .	vii
Abstract . . . . .	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelando com Simetria Radial</b>	<b>3</b>
2.1 Deformação Radial . . . . .	5
O Tensor de Cauchy . . . . .	7
2.2 O Modelo . . . . .	8
2.3 Condições de Descontinuidade . . . . .	13
Choques Fracos . . . . .	15
2.4 Material Pré-Estressado . . . . .	16
<b>3 O Modelo Localizado</b>	<b>20</b>
3.1 Características . . . . .	21
3.2 Soluções Analíticas do Material Linear . . . . .	24
Resolvendo a Equação Integral . . . . .	27
Propriedades Físicas . . . . .	29
<b>4 Fenômenos Analíticos e Condições Iniciais</b>	<b>32</b>
Uma Onda Prega Viajando para o Centro . . . . .	32
Propagação de Condições Iniciais . . . . .	33
<b>5 Coordenadas da Frente de Onda</b>	<b>39</b>
5.1 Material Linear . . . . .	42
5.2 Esquema Numérico . . . . .	43
Simulação Linear Longe da Origem . . . . .	45
Simulação Linear Próxima da Origem . . . . .	47



<b>Sumário</b>	<b>ix</b>
<b>6 Conclusão</b>	<b>51</b>
<b>Appendices</b>	<b>52</b>
<b>A Pressupostos da Elasticidade</b>	<b>53</b>
Suposições . . . . .	54
Equação Constitutiva em Coordenadas Esféricas . . . . .	56
<b>B Leis de Equilíbrio</b>	<b>58</b>
B.1 Teorema do Fluxo . . . . .	58
B.2 Leis de Equilíbrio . . . . .	61
<b>C Resultados da Geometria Diferencial</b>	<b>71</b>
Pullback e Pushforward . . . . .	71
Derivadas de Lie . . . . .	72
Usando Teorema de Stokes . . . . .	74
Teorema Clássico do Fluxo . . . . .	77

# Capítulo 1

## Introdução

Teorias de ondas em sólidos elásticos não-lineares têm alcançado resultados importantes em vários campos científicos e na engenharia. Por exemplo, scanners ultra-rápidos são uma ferramenta poderosa para detectar ondas de cisalhamento em tecidos biológicos ditos “soft”, e em experimentos de “phantom gels in transient elastography”, como os conduzidos pelo “*Laboratoire Ondes et Acoustique*” em Paris [6]; esta oportunidade abre portas para novos horizontes em imageamento não-invasivo de massas tumorais. O grupo de geofísica do “*Los Alamos National Laboratory*” [8] observou o que eles denominaram de “elasticidade não-linear dinâmica” em materiais da Terra, provavelmente devido à presença de regiões “soft”. Essa observação abre novas perspectivas em geofísica experimental, numérica e teórica e em espectroscopia não-linear de materiais.

Esta dissertação possui o intuito de estudar o caso mais simples de elasticidade não-linear do tipo Cauchy-Green, ou seja, um material isotrópico e homogêneo submetido a uma deformação com simetria radial. Mesmo simples, um modelo deste tipo é útil no estudo de explosões. Analisar e simular a propagação não-linear em 3D pode ser uma tarefa realmente desafiadora; reduzindo o problema para uma equação radial 1D, fazemos com que a investigação seja mais tratável matematicamente e as simulações numéricas mais precisas. Além disso, o comportamento qualitativo da dinâmica radial ajuda o melhor entendimento do caso tridimensional. O relatório [9] aborda a propagação de ondas com simetria radial em um material moderadamente não-linear; porém, o autor parte de uma aproximação que não capta nenhum fenômeno “near-field”. O artigo [10] apresenta simulações para o mesmo tipo de material. Apesar de que o algoritmo não aparente gerar oscilações não físicas, próximo a choques, não há garantia de

que choques sejam propagados corretamente. De fato, as condições de descontinuidade não foram abordadas. Além disso, não há um enfoque a respeito da dinâmica no centro do corpo. A contribuição principal desta tese é uma análise da dinâmica próxima ao centro do corpo.

Este trabalho parte de princípios físicos básicos usadas na mecânica do meio contínuo, como pressupor que podemos aproximar o meio estudado por um contínuo e aplicar as leis de conservação. Optamos desenvolver a teoria elástica a partir de um tratamento axiomático, como pode ser encontrado [12]. Para encontrar as condições de choques bastante geometry diferencial é usado nos Apêndices. Essa embasamento teorico, junto com a notação utilizada, pode ser encontrado no livro do Marsden e Hughes [7]. No Capítulo 2.1, deduzimos e apresentamos uma estrutura para o modelo, junto com uma investigação qualitativa de deformação confinada pela simetria radial. Depois seguem as condições de descontinuidade provenientes da formulação integral das leis físicas utilizadas, que constituem a diferença crucial entre o modelo localizado e o modelo integral. O capítulo encerra sugerindo uma aproximação para um material pré-esticado. O Capítulo 3 estuda a forma localizada do modelo geral e discute seu domínio de dependência. Segue uma especialização para materiais linearizados, suas soluções analíticas e uma análise destas. Essas soluções ajuda a entender que tipo de choque pode aparecer e ser mantido. O Capítulo 4 apresenta uma família de condições iniciais e soluções do material linearizado são exibidas para duas condições iniciais que representam bem o comportamento geral. Também, exibimos a solução de uma condição inicial com uma prega espacial (uma descontinuidade na derivada espacial). O capítulo 5 toma como inspiração as curvas características do modelo localizado para introduzir um sistema de coordenadas que segue a frente de onda; em outras palavras, coordenadas que cubram o domínio de dependência. Um esquema numérico é desenvolvido nesta base e resultados são apresentados para o material linearizado. Comparamos tais simulações com a solução analítica. Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos alguns comentários finais bem como uma proposta de possíveis trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Modelando com Simetria Radial

A estrutura teórica e anotação que utilizamos provém da referência [7]. Primeiramente mostraremos como definimos e descrevemos um corpo, seu estado de equilíbrio e seu estado atual. Para cada instante de tempo  $t$ , um corpo é um conjunto de pontos  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ . Para cada ponto  $x \in \mathcal{S}$  denotamos sua posição inicial, no instante  $t = 0$ , como  $X$ . O conjunto formado por todas essas posições iniciais é denotado por  $\mathcal{B}$ . Denominamos  $\mathcal{B}$  a configuração de referência, em nosso caso  $\mathcal{B}$  será também a configuração de equilíbrio, ou seja, se em um determinado momento todo  $x \in \mathcal{S}$  se encontra na sua posição inicial  $X$ , com velocidade nula, o corpo permanecerá imóvel até perturbado por uma força externa. Chamamos  $\mathcal{S}$  de configuração atual. Podemos relacionar esses dois conjuntos por meio de um mapa  $\phi : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$  que leva cada partícula  $X$  à sua posição atual  $x$  no instante de tempo  $t$ , ou seja,  $\phi(X, t) = x$ . Assumimos que  $\phi(\cdot, t)$  preserva orientação e é inversível. Na mecânica dos sólidos é conveniente utilizar a posição de equilíbrio  $X$  como parâmetro para as variáveis de estado, em vez de  $x$ . Por exemplo, o valor  $\rho(x, t)$  é a densidade do material no ponto  $x$  do corpo no instante de tempo  $t$ . Agora é possível usar a inversa de  $\phi(\cdot, t)$  para localizar a posição de equilíbrio  $X = \phi^{-1}(x, t)$ , e assim definimos a função  $\rho_{Ref}$  tal que para cada conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{\mathcal{U}} \rho_{Ref}(X) dV(X) = \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \rho(x, t) dv(x),$$

onde  $dV$  e  $dv$  são as formas diferenciais do elemento de volume da configuração de referência e da configuração atual. Fazendo uma mudança de variável na integração  $\phi(X, t) = x$ , podemos concluir que  $\rho_{Ref}(X) = \rho(\phi(X, t), t) \det(\partial_X \phi(X, t))$ . Dizemos que  $\rho_{Ref}$  é a densidade descrita no sistema da referência, utilizando

pontos  $X \in \mathcal{B}$ , enquanto que  $\rho$  é a densidade descrita no sistema atual, utilizando pontos  $x \in \mathcal{S}$ .

O foco da nossa atenção é um mapa  $\phi^r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de tal forma que se  $R$  é a posição de equilíbrio radial de uma partícula, então  $\phi^r(R, t)$  é a posição da partícula no instante  $t$ . Usando condições iniciais com simetria radial em um material homogêneo e isotrópico implica que cada partícula permanece presa na linha que une-a à origem  $r = 0$ . Em outras palavras, seja  $(R, \Theta, \phi)$  a posição de equilíbrio descrita em coordenadas esféricas, dessa forma a posição atual da partícula no tempo  $t$  é

$$\phi(R, \theta, \varphi, t) = (r, \theta, \varphi), \quad (2.1)$$

onde  $(r, \theta, \varphi)$  é a posição atual no tempo  $t$  da partícula com posição de equilíbrio  $(R, \theta, \varphi)$ , ou seja,  $\theta$  e  $\varphi$  são constantes.

Após deduzir o modelo que descreve a evolução de  $r(R, t)$ , que denominamos de PIE (Partial Integral Equation - Equação Parcial Integral), veja a equação (2.15), investigamos qualitativamente como as forças atuam neste modelo.

O próximo passo natural é definir uma classe de materiais. O comportamento de um material é caracterizado pela função da energia interna livre por unidade de massa  $\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ . Para um material elástico de Cauchy-Green e homogêneo, a energia-livre  $\Psi$  depende somente do tensor de deformação Cauchy-Green  $\mathbf{C} = D\phi(\cdot, t)^T D\phi(\cdot, t)$  e a temperatura  $\Theta$ , no qual  $D\phi(\cdot, t)$  e  $D\phi(\cdot, t)$  é o Jacobiano de  $\phi(\cdot, t)$ , que é demonstrado na Teorema 2.10 do [7]. O tensor  $\mathbf{C}$  é estudado na Seção 1.3 do [7]. Resumidamente, podemos identificar o estiramento local no ponto  $X$  com temperatura  $\Theta$  no instante  $t$  a partir do tensor  $\mathbf{C}(X, \Theta, t)$ . Usando simetria radial a dependência da energia interna  $\Psi$  em  $\mathbf{C}$ , se da através de  $(\partial_{Rr})^2$  e  $r^2/R^2$ , isso é estabelecido no apêndice A. Observe que se ocorrerem grandes deslocamentos não poderíamos aproximar  $r/R \approx 1$ ; portanto, foi necessário usar o sistema de coordenadas da referência, ou seja, as coordenadas  $(R, t)$ .

É importante notar que os autovalores do tensor  $\mathbf{C}$  são independentes do sistema de coordenadas escolhido. Dessa forma, podemos usar dados experimentais provenientes de qualquer sistema de coordenadas para determinar a função de energia interna livre  $\Psi$ . Em coordenadas euclidianas seja  $(X, Y, Z)$  a posição inicial do partícula no corpo da referência e  $(\phi^x, \phi^y, \phi^z)$  a posição atual no tempo  $t$ , então se alinharmos uma base Euclidiana com a base das coordenadas esféricas, os autovalores do tensor de Cauchy-Green serão  $(\partial_X \phi^x)^2$ ,  $(\partial_Y \phi^y)^2$  e  $(\partial_Z \phi^z)^2$ , que é um ponto de vista útil para interpretar o tipo de alongamento e

contração que o corpo está sofrendo em qualquer sistema de coordenadas.

Não iremos abordar a teoria matemática da elasticidade, porém iremos enfatizar uma compreensão qualitativa do comportamento elástico do modelo. Para uma exposição mais completa da teoria de elasticidade não linear, veja [7], [12] ou [4].

## 2.1 Deformação Radial

Devido à simetria radial da deformação, podemos reduzir o problema a uma dimensão se usamos coordenadas esféricas para o sistema espacial

$$(x, y, z) = r(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi). \quad (2.2)$$

Os vetores  $e_\theta$ ,  $e_\varphi$  e  $e_r$  são os vetores de base do sistema de coordenadas. Para o sistema de referência empregamos as coordenadas abaixo,

$$(X, Y, Z) = R(\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi). \quad (2.3)$$

Com base na simetria do problema, que inclui condições iniciais com simetria radial e um material isotrópico, sabemos que o movimento  $\phi$  exibe simetria radial,

$$\phi(X, t) = (\phi^r(R, t), \phi^\theta(\theta), \phi^\varphi(\varphi)) = (r, \theta, \varphi), \quad (2.4)$$

onde  $\phi^r$ ,  $\phi^\theta$  e  $\phi^\varphi$  são as coordenadas  $r$ ,  $\theta$  e  $\varphi$  do mapa  $\phi$ . Uma compreensão qualitativa da dinâmica do sistema em coordenadas esféricas será valiosa. Um bom ponto de partida é examinar como a deformação de um elemento de volume finito, em coordenadas esféricas, altera a função de energia interna livre. Relembremos que tal função tem como parâmetros  $(\partial_R r)^2$ ,  $r^2/R^2$  e a temperatura  $\Theta$ . Para simplificar a questão, consideramos a deformação nas direções  $e_r$  e  $e_\varphi$ ; o deslocamento na direção  $e_\theta$  aumenta a energia interna livre qualitativamente análoga à direção  $e_\varphi$ .

Primeiro variamos  $\lambda_2 = r^2/R^2$  enquanto mantemos  $\lambda_1 = (\partial_R r)^2$  fixo. Note que qualquer elemento de volume originalmente entre os ângulos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , permanecerá preso entre os trilhos definidos por  $\varphi = \varphi_1$  e  $\varphi = \varphi_2$  (veja a Figura 2.1). Agora suponha que algum tempo passou e o elemento de volume inicialmente em  $R_1$  foi deslocado para  $r(R_1, t)$  acima da posição original (veja a Figura 2.1a). Para

isso, o volume foi esticado na direção  $e_\varphi$  e  $e_\theta$ , o que levou ao aumento da energia interna livre. Agora mantemos  $\lambda_2 = r^2/R^2$  fixos e variamos  $\lambda_1 = (\partial_{Rr})^2$ . Isto é exemplificado pela Figura 2.1b, onde pontos inicialmente próximos a  $R_1$ , após um tempo  $t$ , se distanciam de  $R_1$ . Dessa forma,  $\Delta r/\Delta R \approx \partial r/\partial R > 1$  e  $r(R_1, t) = R_1$ , que permaneceu parado<sup>1</sup>, o que implica mais uma vez que a energia interna aumentou. Qualquer combinação desses deslocamentos podem ocorrer, tais como na Figura 2.1c, onde o elemento de volume foi comprimido em ambas as direções  $e_r$  e  $e_\varphi$ .

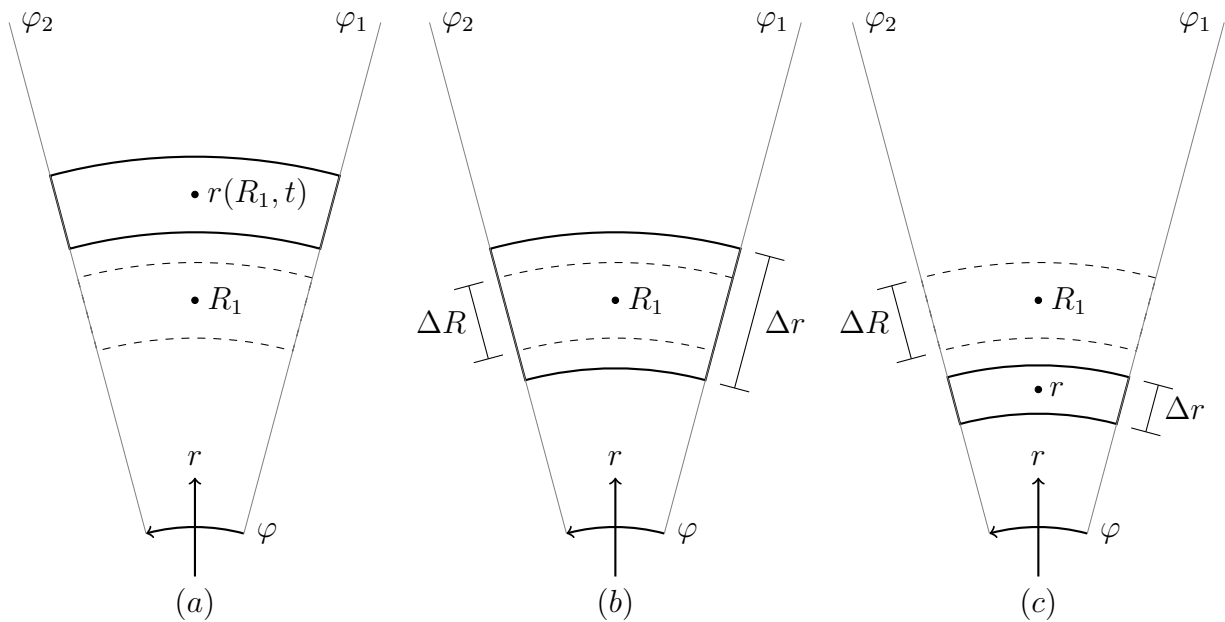


Figura 2.1: Representação de um elemento de volume que inicialmente se encontra em sua posição de equilíbrio (borda tracejada) e que depois sofre três deformações distintas.

A partir dessa investigação básica já podemos prever o comportamento qualitativo do sistema. Um elemento de volume atingirá o equilíbrio na direção radial  $e_r$  e na direção angular  $e_\varphi$  provavelmente em instantes diferentes. Enquanto  $\partial_{Rr}$  oscila em torno do seu valor de equilíbrio  $\partial_{Rr} = 1$ , o valor  $r/R$  oscila em torno de 1, onde ambos os ciclos se manifestem como uma resposta à tensão interna na direção radial. Esta mudança na tensão vai determinar o movimento. Para ilus-

<sup>1</sup>Na Figura 2.1b o elemento de volume aparenta ter sido esticado na direção  $e_\varphi$  em pontos acima de  $R_1$ , e comprimido em pontos abaixo de  $R_1$ . Isso ocorre porque estamos lidando com um volume finito, em vez de um elemento de volume no limite  $\Delta R \rightarrow 0$ .

trar, é como se existissem dois modos de oscilação sobrepostos uns aos outros, no entanto eles não podem ser separados porque um afeta o outro de uma forma não linear. Por exemplo: uma compressão na direção  $e_\varphi$  iria mudar a dificuldade de comprimir o material na direção  $e_r$ .

Saber qualitativamente o que esperar do modelo é vital quando formos sugerir aproximações numéricas e usarmos esta compreensão para eliminar, ou evitar, soluções fisicamente inviáveis, tais como oscilações falsas.

A seguir apresentamos a relação entre o tensor de tensão de Cauchy  $\sigma$  e a função de energia interna livre  $\Psi$ . Com esta expressão para  $\sigma$  podemos deduzir o modelo geral.

## O Tensor de Cauchy

A energia interna livre  $\Psi$  continuará a ser uma incógnita nesta seção, porque explicitar  $\Psi$  em termos dos seus parâmetros é equivalente a escolher um material em específico. Iremos apresentar uma classe de materiais após deduzir o modelo geral. Quanto ao tensão interna, exercida na superfície com normal unitário  $\mathbf{n}$ , pode ser representado por  $\sigma : \mathbf{n} = e_a \sigma^{ab} n^c g_{bc}$ , onde  $g_{bc} = \langle e_b, e_c \rangle$  e definimos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  como sendo o produto interno. A razão pelo qual podemos representar a tensão interna dessa forma é devido o Teorema de Cauchy (veja o Teorema 2.2 p.134 de [7]). Podemos relacionar  $\sigma$  com  $\Psi$ , veja o Teorema A.1, usando hipótese constitutiva elástica para materiais hiperelásticos e isotrópicos, leis de equilíbrio e outras hipóteses fundamentais de mecânica do contínuo, encontradas no [7]. Dessas suposições concluímos que, para coordenadas esféricas,  $\sigma$  é um tensor diagonal com coeficientes descritos pelas equações (A.7) que são

$$\begin{aligned}\sigma^{rr} &= 2\rho_{Ref} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial R} \frac{R^2}{r^2}, \\ \sigma^{\theta\theta} &= 2\rho_{Ref} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^{-1} \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi}, \\ \sigma^{\varphi\varphi} &= 2\rho_{Ref} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^{-1} \frac{1}{r^2}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Note que apenas  $\sigma^{\theta\theta}$  depende de um dos ângulos. Isso é de se esperar, porque, embora o movimento seja simétrico na direção  $e_\theta$ , a norma do vetor de base  $e_\theta$  é  $r \sin \varphi$ . O artigo [5] de E. Kanso et al. demonstra que o tensor de tensão



de Cauchy pode ser considerado como uma “differential two-form”. As leis de conservação e outras leis fundamentais da mecânica do meio contínuo podem ser reescritas em termos desse tensão geométrica .

## 2.2 O Modelo

Derivando no tempo a equação do movimento (2.4) concluímos as coordenadas angulares do vetor velocidade  $\mathbf{v} = \dot{\phi}$ , são  $v^\theta = v^\varphi = 0$ . Para permitir a possibilidade de descontinuidades na velocidade  $\mathbf{v}$  e na derivada espacial  $\partial_R r$ , o que chamaremos de “pregas”, impomos a formulação integral de conservação de momento. A formulação integral clássica de conservação de momento só é valido numa direção fixa [7]. A direção constante que escolhemos é  $\mathbf{e}_{r_o} = \mathbf{e}_r(\theta_o, \varphi_o)$ , onde  $\theta_o$  e  $\varphi_o$  são constantes. Definimos  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  como o produto interno,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  são os vetores de base das coordenadas esféricas em  $\mathcal{S}$  e  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} = \sigma^{cb} \langle \mathbf{e}_b, \mathbf{n} \rangle \mathbf{e}_c$ . Então, para qualquer conjunto aberto com fronteira suave por partes  $\mathcal{U}_t \subset \mathcal{S}$ , a conservação de momento implica que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_t} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_{r_o} \rangle dv &= \int_{\partial \mathcal{U}_t} \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}, \mathbf{e}_{r_o} \rangle da \implies \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_t} \rho v^r \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r_o} \rangle dv &= \int_{\partial \mathcal{U}_t} \sigma^{cb} \langle \mathbf{e}_b, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbf{e}_c, \mathbf{e}_{r_o} \rangle da, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $dv$  e  $da$  são, respectivamente, os elementos de volume e de área,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário que aponta para fora do conjunto  $\mathcal{U}_t$ . Essas equações declaram que a mudança do momento radial no tempo da massa que se encontra no conjunto  $\mathcal{U}_t$  é devido às forças exercidas pelo material exterior a  $\mathcal{U}_t$  atuando na fronteira  $\partial \mathcal{U}_t$ , onde  $\rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_{r_o} \rangle$  é a densidade do momento radial e  $\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}, \mathbf{e}_{r_o} \rangle$  é densidade da força na direção radial exercida pelo material externo a  $\mathcal{U}_t$  na fronteira  $\partial \mathcal{U}_t$ .

Vamos usar  $\mathcal{U}_t$  como um setor de uma esfera. Logo, no lado direito da equação há seis integrais com seis domínios que são as superfícies do elemento de volume esférico. Estes domínios são definidos pelas superfícies

$$\theta = \theta_o + \delta\theta, \theta = \theta_o - \delta\theta, \varphi = \varphi_o + \delta\varphi, \varphi = \varphi_o - \delta\varphi, r = r_2, r = r_1,$$

onde os vetores normais unitários são, respectivamente,

$$\hat{e}_\theta, -\hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi, -\hat{e}_\varphi, \mathbf{e}_r, -\mathbf{e}_r,$$

os vetores  $\hat{e}_i$  se referem ao vetor unitário na direção  $e_i$ . Os vetores  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  e  $\mathbf{e}_r$  são encontrados por derivar a equação (2.2) respectivamente em  $\theta$ ,  $\varphi$  e  $r$ , o que implica que

$$\mathbf{e}_\theta = r(-\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta \sin \varphi, 0), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = r(\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, -\sin \varphi), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{e}_r = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi). \quad (2.9)$$

Usamos as equações acima, junto com as equações (2.5), para fatorar as integrais no lado direita da equação (2.6) em duas partes, uma que depende de  $\theta$  e  $\varphi$  e outra que depende de  $r$ . As equações (2.7), (2.8), (2.9) e (2.5) nos informa a dependência que os vetores de base e  $\sigma$  tem nas coordenadas angulares  $\theta$  e  $\varphi$ . Em seguida, integramos em  $\theta$  e/ou  $\varphi$ , e depois expandimos em uma série de  $\delta\theta$  e  $\delta\varphi$ . Primeiro somamos as integrais de superfície definidas por  $\theta = \theta_o + \delta\theta = \theta_2$  e  $\theta = \theta_o - \delta\theta = \theta_1$  encontradas no lado direito da equação (2.6), resultando em

$$\begin{aligned} \int \langle \sigma : \hat{e}_\theta, \mathbf{e}_{r_o} \rangle da \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} &= \int \langle \sigma : \hat{e}_\theta, \mathbf{e}_{r_o} \rangle r d\varphi dr \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \\ &= \int \sigma^{\theta\theta} \sin(\varphi) \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_{r_o} \rangle r^2 d\varphi dr \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \\ &= \int \sigma^{\theta\theta} \sin^2(\varphi) r^3 dr \int_{\varphi_o - \delta\varphi_o}^{\varphi_o + \delta\varphi_o} \langle \hat{e}_\theta, \mathbf{e}_{r_o} \rangle d\varphi \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \\ &= \int \sigma_o^{\theta\theta} \sin^2(\varphi_o) r^3 dr \int_{\varphi_o - \delta\varphi_o}^{\varphi_o + \delta\varphi_o} \langle \hat{e}_\theta, \mathbf{e}_{r_o} \rangle d\varphi \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} \\ &= -4\delta\varphi \sin(\delta\theta) \sin^3(\varphi_o) \int \sigma_o^{\theta\theta} r^3 dr, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde  $\sigma_o^{\theta\theta}$  é avaliado em  $\theta = \theta_o$  e  $\varphi = \varphi_o$  e trocamos  $\sigma^{\theta\theta} \sin^2(\varphi)$  por  $\sigma_o^{\theta\theta} \sin^2(\varphi_o)$  porque esse termo não depende de  $\theta$  ou  $\varphi$ . Somando as integrais de superfície definidas

por  $\varphi = \varphi_o + \delta\varphi = \varphi_2$  e  $\varphi = \varphi_o - \delta\varphi = \varphi_1$ , resulta em

$$\begin{aligned}
\int \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_{r_o} \rangle da \Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1} &= \int \sigma_o^{\varphi\varphi} \langle \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_{r_o} \rangle \sin(\varphi) r d\theta dr \Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1} \\
&= \int \sigma_o^{\varphi\varphi} r^3 dr \int \langle \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \mathbf{e}_{r_o} \rangle \sin(\varphi) d\theta \Big|_{\varphi_2}^{\varphi_1} \\
&= \sin(2\delta\varphi) ((-\delta\theta - \sin(\delta\theta)) \sin(\varphi_o) + (\sin(\delta\theta) - \delta\theta) \sin(3\varphi_o)) \int \sigma_o^{\varphi\varphi} r^3 dr \\
&= -4\delta\theta\delta\varphi \sin(\varphi_o) \int \sigma_o^{\varphi\varphi} r^3 dr + \mathcal{O}(\delta\theta\delta\varphi).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

onde  $\sigma_o^{\varphi\varphi}$  é avaliado em  $\theta = \theta_o$  e  $\varphi = \varphi_o$  e trocamos  $\sigma^{\varphi\varphi}$  por  $\sigma_o^{\varphi\varphi}$  porque esse termo não depende de  $\theta$  ou  $\varphi$ . Por último somamos as integrais de superfície definidas por  $r = r_2$  e  $r = r_1$ , que resulta em

$$\begin{aligned}
\int \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r_o} \rangle da \Big|_{r_2}^{r_1} &= \int \sigma^{rr} r^2 \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r_o} \rangle \sin(\varphi) d\theta d\varphi \Big|_{r_2}^{r_1} \\
&= 4\delta\theta\delta\varphi \sin(\varphi_o) \sigma_o^{rr} r^2 \Big|_{r_1}^{r_2} + \mathcal{O}(\delta\theta\delta\varphi).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A integral a esquerda da equação pode ser reformulado da seguinte forma,

$$\frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} \rho v^r \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r_o} \rangle dv = \frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} \rho v^r r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi = 4 \sin(\varphi) \delta\theta\delta\varphi \frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} \rho v^r r^2 dr. \tag{2.13}$$

A conservação de momento é válida para todo volume finito  $\mathcal{U}_t$ , dessa forma a conservação de momento é também válida para qualquer  $\delta\theta$  e  $\delta\varphi$ . Logo, podemos substituir as equações (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13) na equação (2.6) e igualar os termos da mesma ordem em  $\delta\theta$  e  $\delta\varphi$  e reduzir a conservação de momento para,

$$\frac{d}{dt} \int_{r_1}^{r_2} \rho v^r r^2 dr = \sigma^{rr} r^2 \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} (\sigma^{\theta\theta} \sin^2 \varphi + \sigma^{\varphi\varphi}) r^3 dr. \tag{2.14}$$

Se assumimos que  $\rho, v^r, r$  são diferenciáveis por partes, e  $r$  é regular por partes, podemos usar a hipótese constitutiva e substituir o tensor de Cauchy usando as equações (2.5). Quando pregas aparecem na solução para  $r(R, t)$  é esperado que sejam discretas na coordenada  $R$ , portanto, podemos usar a teoria constitutiva para substituir o tensor de Cauchy e os valores das integrais acima não serão alterados. Também levando em conta que  $r(\cdot, t)$  é monótona e diferenciável em

$R$ , podemos fazer uma mudança de variável e integrar em  $R$ ,

$$\int_{r_1}^{r_2} \rho v^r r^2 dr = \int_{R_1}^{R_2} \rho V^r r^2 \frac{\partial r}{\partial R} dR = \int_{R_1}^{R_2} \rho_{Ref} V^r R^2 dR,$$

onde

$$V^r(R, t) = v^r(r, t) \text{ e } \rho_{Ref}(R) = \rho(r, t) \frac{\partial r}{\partial R} r^2.$$

Substituindo as equações (2.5) para o tensor de Cauchy na equação (2.14), concluímos que

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial r}{\partial t} R^2 dR = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial R} R^2 \Big|_{R_1}^{R_2} - 4 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} r dR.} \quad (2.15)$$

Iremos denominar equações integrais de PIE (Partial Integral Equation - Equação Parcial Integral). A forma localizada deste modelo chega na mesma EDP encontrada na literatura (ver [7] p.208). Agora vamos investigar qualitativamente a origem desses termos. Para facilitar a compreensão, vamos exemplificar o tensão exercido na superfície de um setor de uma esfera, delimitada pelas superfícies definidas por  $R = R_1, R = R_2, \varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2, \theta = \theta_1$  e  $\theta = \theta_2$ . Para simplificar a análise, restringimos a nossa atenção somente nas coordenadas  $\varphi$  e  $r$ .

Note que a integral abaixo representa o momento total do material entre os pontos  $r(R_1, t)$  e  $r(R_2, t)$

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial r}{\partial t} R^2 dR,$$

daí a equação (2.15) afirma que a taxa de variação do momento no tempo, dessa parte do material, é devido a dois fenômenos. O primeiro é devido a diferença da força radial aplicada as superfícies definidas por  $R = R_1$  e  $R = R_2$ , e é representado pelos termos

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial R} R^2 \Big|_{R_1}^{R_2}. \quad (2.16)$$

Lembrando que

$$2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial R} = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1^{1/2}} \text{ e } \lambda_1 = (\partial_R r)^2,$$

o termo  $\partial \Psi / \partial \lambda_1^{1/2}$  está relacionado com quanta energia é necessária para esticar o material na direção radial. O termo  $R^2$  é um fator geométrico proveniente do fato que a expressão acima representa a força total aplicada à superfície de uma esfera. Veja a Figura 2.2a.

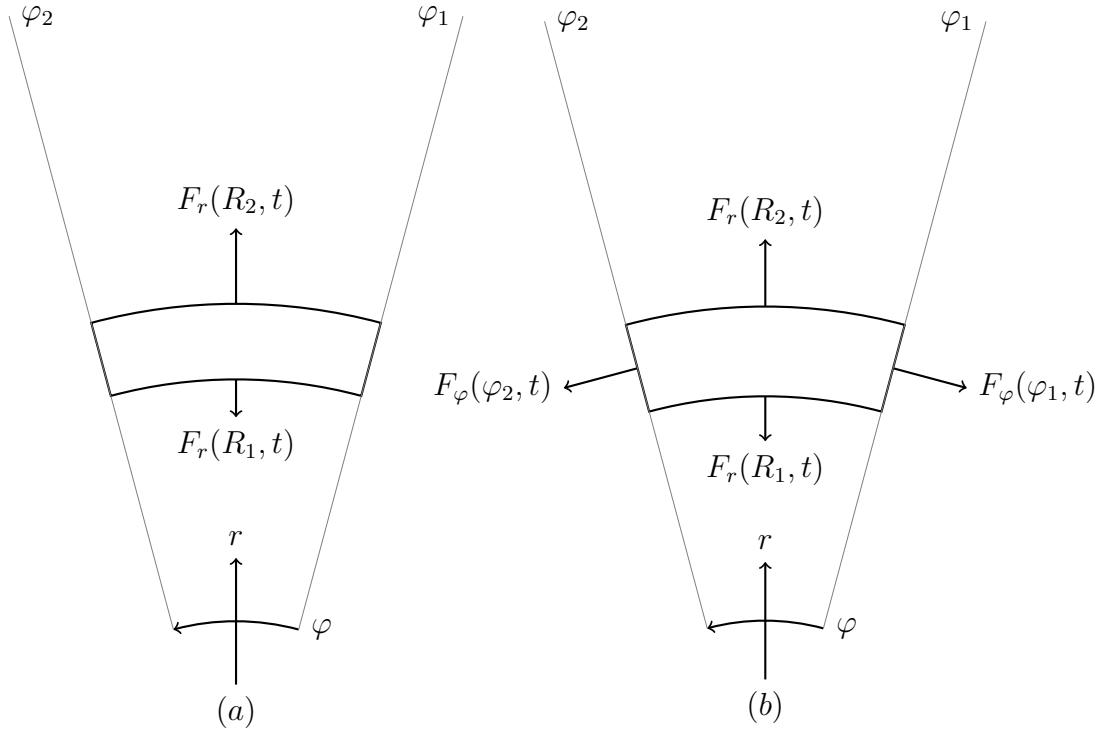


Figura 2.2: a) Diferença entre as forças aplicadas às superfícies  $R = R_1$  e  $R = R_2$ , expressadas pelo termos (2.16). b) Possível estado de equilíbrio do elemento de volume.

O segundo fenômeno que contribui à mudança de momento radial é devido ao tensão interna nas direções  $e_\theta$  e  $e_\varphi$ , representado por

$$-4 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} r dR = -2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2^{1/2}} R dR,$$

e o termo  $2RdR$  é um fator geométrico. Veja o estado de equilíbrio deste elemento de volume representado na Figura 2.2b, onde a soma do tensão na superfície toda se cancela. A integral no lado direito do nosso sistema (2.14) representa a projeção radial da tensão na direção  $e_\varphi$ , que é representado por  $F_\varphi(\varphi_1, t) + F_\varphi(\varphi_2, t)$  na Figura 2.2b. Observe que esta força sempre age para puxar o elemento de volume para a origem, enquanto a força exercido nas superfícies  $R = R_1$  e  $R = R_2$  tende a afastar o elemento de volume da origem, que é representado por  $F_r(R_2, t) + F_r(R_1, t)$  na Figura 2.2a.

A seguir uma representação que pode ajudar a entender o comportamento

qualitativo da dinâmica do modelo é

$$2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2^{1/2}}(R, t) R dR = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2^{1/2}}(R_m, t) R^2 \Big|_{R_1}^{R_2},$$

para algum  $R_m \in [R_1, R_2]$  e que ao substituir na PIE (2.15) resulta em

$$\frac{d}{dt} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial r}{\partial t}(R, t) R^2 dR = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1^{1/2}}(R, t) - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2^{1/2}}(R_m, t) \right) R^2 \Big|_{R_1}^{R_2}.$$

Todavia, uma visão mais clara do fenômeno só é possível após determinar a função de energia interna, o que, para o caso isotérmico, especifica a dinâmica do modelo. Mais a frente no Capítulo 3, mostramos que podemos expressar a forma local do modelo (2.15) como um sistema de equações parciais hiperbólicas. Deste fato estabelecemos que uma solução clássica, ou seja, continuamente diferenciável, não deve existir para todo tempo, mesmo se as condições iniciais são continuamente diferenciáveis, veja Teorema 7.8.1 em [4]. A dinâmica do sistema indica que tipo de descontinuidades podem aparecer, logo, definir o tipo de material determina os tipos de descontinuidades que podem se formar. Porém, calcular todas as possíveis condições de descontinuidades só é necessário a forma integral das leis de conservação empregados, e estas condições são válidas para qualquer função de energia interna. Por isso, apresentamos as condições de descontinuidade primeiramente.

## **2.3 Condições de Descontinuidade**

Supondo a existência de uma superfície móvel  $r(\Sigma(t), t) \subset \mathcal{S}$ , onde  $\Sigma(t) \subset \mathcal{B}$ , sobre a qual as variáveis de estado são descontínuas, mas são pelo menos contínuas fora de  $r(\Sigma(t), t)$ . Usaremos  $S$  como sendo a coordenada radial da velocidade de  $\Sigma(t)$  no corpo referencial. As condições de salto apropriadas são uma consequência dos Teoremas B.3 e B.4 encontrados no Apêndice B ou em [4] p.15. No apêndice, o component normal da velocidade da onda de choque é  $W^N$ , aqui denominamos de  $S = W^N$ . Vamos supor que o material não fratura, ou seja, que não surge nenhum rasgo. Portanto,  $r(\cdot, t)$  é pelo menos contínuo em  $R$ . Nesse contexto, cada lei de equilíbrio requer, ou impõe, uma condição de salto descontínuo diferente, apresentadas a seguir.

**Conservação de massa:** usando a equação (B.25),

$$\llbracket \rho_{Ref} \rrbracket S = 0, \quad (2.17)$$

onde  $\rho : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a densidade do material e  $\rho_{Ref} : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a densidade do material na configuração da referência. A equação acima é satisfeita, a priori, devido à continuidade de  $r(\cdot, t)$  e  $\rho_{Ref}(\cdot)$ .

**Equilíbrio de momento:** usando qualquer uma das equações (B.27) concluímos que

$$\llbracket \partial_t r \rrbracket S = \llbracket P^{Rr} \rrbracket, \quad (2.18)$$

onde  $P^{Rr} = 2\partial_{\lambda_1} \Psi(\partial_{Rr}, r/R)\partial_{Rr}$ , o que é o único coeficiente não-nulo do primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{P}$ . Veja o Apêndice A para uma definição do tensor  $\mathbf{P}$ .

**Conservação de Energia:** usando qualquer uma das equações (B.30),

$$\llbracket E + \frac{1}{2} (\partial_t r)^2 \rrbracket S = \llbracket P^{Rr} \partial_t r \rrbracket, \quad (2.19)$$

onde a função  $e : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a energia interna por unidade de massa, o que assumimos que satisfaça a seguinte equação:

$$e = \eta\theta + \psi,$$

onde a função  $\psi : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a energia interna livre,  $\theta : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a temperatura e  $\eta : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a entropia por unidade de massa.

Se assumirmos que a temperatura  $\theta$  é constante e que  $\partial\Psi/\partial\theta = 0$ , então a entropia  $\eta$  será constante em todo o material, e combinando as condições de descontinuidade das equações (2.18) e (2.19), podemos eliminar o salto de velocidade e concluir que

$$(\rho^- \omega_r^-)^2 \llbracket \psi \rrbracket = \frac{1}{2} \llbracket (\sigma^{rr})^2 \rrbracket \quad \text{ou} \quad S^2 \llbracket \Psi \rrbracket = \frac{1}{2} \llbracket (P^{Rr})^2 \rrbracket. \quad (2.20)$$

Para aplicar diretamente os resultados em [4] p.15, seja

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} q & -P^{Rr}(\epsilon_1, \epsilon_2) \\ \Psi(\epsilon_1, \epsilon_2) + q^2/2 & -P^{Rr}(\epsilon_1, \epsilon_2)q \\ \rho_{Ref} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

e  $\text{div} = [\partial_t, \partial_R]$  é um operador que atua em linhas. As variáveis de estado são  $U = (q, \epsilon_1, \epsilon_2) = (\partial_t r, \partial_{Rr}, r/R)$ . Dessa forma  $\text{div} \mathbf{G} = 0$  e  $[[\mathbf{GN}]] = 0$  onde, em nosso contexto,  $\mathbf{N} = (S, 1)^T$  (o sobrescrito  $T$  no vetor significa o transposto do vetor).

**Desigualdade da produção de entropia:** Se  $N$  e  $Q^R$  são respectivamente a entropia e fluxo de calor por unidade de massa no sistema de referência na direção radial, e  $\Theta$  a temperatura, então usando a desigualdade (B.32) concluímos que,

$$[[\rho\eta\omega^r]] \leq \left[ \left[ \frac{q^r}{\Theta} \right] \right] \implies [[SN]] \leq \left[ \left[ \frac{Q^R}{\Theta} \right] \right].$$

Se considerarmos que a temperatura não muda, então essa equação torna-se

$$\eta^+ \leq \eta^-,$$

que afirma que a entropia do lado onde a superfície já passou é maior que a entropia do lado em que ela ainda não passou.

## Choques Fracos

Um choque fraco para nosso contexto seria assumir que  $r(R, t)$  além de ser contínuo é  $C^1$ , mas que as segundas derivadas de  $r(R, t)$  admitem descontinuidades. Para considerar a possibilidade de choques fracos permite-se que sua segunda derivada espaciais é descontínua ao longo de uma superfície  $\Sigma(t)$ . Seja  $\mathbf{G}$  definida pela equação (2.21) e  $\mathbf{N} = (S, 1)^T$ , então aplicando os resultados da teorema (B.4) com  $X^N = R$  concluímos que

$$\left[ \left[ \frac{\partial}{\partial R}(\mathbf{GN}) \right] \right] = (\mathbf{D}_U \mathbf{GN}) \cdot \left[ \left[ \frac{\partial U}{\partial R} \right] \right] = 0, \quad (2.22)$$



ou de uma forma mais explícita para nosso contexto,

$$\begin{pmatrix} S & -\partial_{\epsilon_1} P^{Rr} & -\partial_{\epsilon_2} P^{Rr} \\ Sq - P^{Rr} & SP^{Rr} - \partial_{\epsilon_1} P^{Rr} q & S\partial_{\epsilon_2} \Psi - \partial_{\epsilon_2} P^{Rr} q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \frac{\partial U}{\partial R} \right] = 0. \quad (2.23)$$

A última coordenada de  $[\partial_R U]$  é zero porque estamos assumindo que  $\partial_{Rr}$  é contínuo. Portanto,  $S$  pode ser determinado impondo que o determinante da seguinte matrix 2x2 abaixo é zero

$$\begin{pmatrix} S & -\partial_{\epsilon_1} P^{Rr} \\ Sq - P^{Rr} & SP^{Rr} - \partial_{\epsilon_1} P^{Rr} q \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

resultando em

$$S^2 = \partial_{\epsilon_1} P^{Rr}. \quad (2.25)$$

Todas as condições de saltos apresentadas acima não são suficientes para definir a velocidade do choque (no nosso caso uma prega), ou choque fraco, e a evolução de  $\partial_{Rr}^+$  e  $\partial_{Rr}^-$  no espaço-tempo. Seriam necessárias mais hipóteses para definir unicamente o choque em movimento.

Note que para choques fracos podemos determinar a velocidade do choque, o Capítulo 3 mostra que a equação (2.25) implica que choques fracos andam ao longo das características. Mas o mesmo não é necessariamente verdadeiro para ondas de choques normais logo, é vital que estabelecemos que tipos de choque podem aparecer e se manter para o modelo que empregamos. Podemos fazer isso analisando a forma local do modelo (o EDP), todavia, para determinar o EDP precisamos determinar o tipo de material.

## 2.4 Material Pré-Estressado

O livro [13] é uma referência mais completa e auto-contida sobre determinar o tipo de um material elástico baseado em uma combinação de argumentos fenomenológicos e argumentos físicos. O que segue é uma aproximação simples que segue em parte o livro [13]. Para especificar o material precisamos especificar como a energia interna depende explicitamente de  $\lambda_1 = (\partial_{Rr})^2$  e  $\lambda_3 = \lambda_2 = (r/R)^2$ . Esses valores para os autovalores do tensor de Cauchy-Green ( $\lambda_i$ ), resultam da

simetria assumida e do uso de coordenadas esféricas (veja a equação (A.6)).

Para o nosso propósito, queremos um modelo para  $\Psi$  que é o mais simples possível, porém ainda capta fenômenos essencialmente não-lineares. Um modelo para  $\Psi$  muito convincente seria utilizar uma interpolação tipo Spline, porém os dados são, muitas vezes, escassos demais para isso. Um modelo mais simples possibilita usar os dados experimentais disponíveis para melhor escolher os parâmetros do modelo.

Uma escolha que satisfaz os requisitos acima seria aproximar  $\Psi$  perto do ponto de equilíbrio pré-esticado, ou “prestressed”,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, \lambda, \lambda)$ , que para nosso uso  $\lambda > 2$ , como,

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \overset{\circ}{\Psi} + \frac{\partial \overset{\circ}{\Psi}}{\partial \lambda_j} (\lambda_j - \lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \overset{\circ}{\Psi}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} (\lambda_i - \lambda)(\lambda_j - \lambda) + \sum_{i=1}^3 \mathcal{O}(\lambda_i - \lambda)^2,$$

onde  $\overset{\circ}{\Psi} = \Psi(\lambda, \lambda, \lambda)$ . O valor de  $\Psi(\lambda, \lambda, \lambda)$  é arbitrário, uma vez que apenas a taxa de variação de  $\Psi$  em relação aos autovalores  $\lambda_i$  influencia a dinâmica, por isso adotamos  $\overset{\circ}{\Psi} = 0$ . Além disso, a isotropia do material garante a simetria  $\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Psi(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = \Psi(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2)$  para todo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ . Com isso, podemos reduzir a nossa expressão acima para  $\Psi$  e adotaremos

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^3 [\kappa(\lambda_i - \lambda) + \nu(\lambda_i - \lambda)^2] + \sum_{i \neq j} \zeta(\lambda_i - \lambda)(\lambda_j - \lambda), \quad (2.26)$$

onde renomeamos as constantes envolvidas. Para interpretar essa aproximação, recordamos que em coordenadas euclidianas:  $\lambda_1 = (\partial_X \phi^x)^2$ ,  $\lambda_2 = (\partial_Y \phi^y)^2$  e  $\lambda_3 = (\partial_Z \phi^z)^2$ . Portanto, apenas o termo multiplicando  $\zeta$  captura a não-linearidade da resposta do material quando deformado simultaneamente em duas direções, como por exemplo,  $e_x$  e  $e_y$ .

A escolha das constantes  $\kappa, \nu$  e  $\zeta$  é geralmente restrita por pressupostos físicos. Quando  $\lambda_i > 1$ , uma restrição comum é que diminuir  $\lambda_i$  causa a diminuição da energia interna, o que também implica que aumentar  $\lambda_i$  aumentará a energia interna. A versão local desta declaração é a seguinte: para cada  $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma > 0$

$$D\Psi(1 + \alpha, 1 + \beta, 1 + \gamma) \cdot (a, b, c)^T > 0.$$

Para  $b = c = 0$  esta desigualdade implica que,

$$\kappa + 2\nu(1 - \lambda + \alpha) + \zeta(2 - 2\lambda + \beta + \gamma) > 0,$$

assumindo que  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  não têm limite superior, podemos concluir que  $\nu \geq 0$  e  $\zeta \geq 0$ . Agora, a condição mais restritiva para  $\kappa$  é quando  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , o que leva a desigualdade

$$\kappa > 2(\nu + \zeta)(\lambda - 1). \quad (2.27)$$

Outro requisito típico é que a função da energia interna  $\Psi$  seja convexa. Para satisfazer esta condição exigimos que o hessiano de  $\Psi$  seja definido positivo, que resulta em  $\nu > \zeta$ . Há outras restrições relacionados as configurações nas quais os  $\lambda_i$  oscilam em torno de 1 (veja [13]). Iremos restringir a nossa atenção para configurações onde  $\lambda_i > 1$  e  $\lambda_i$  oscilam em torno de  $\lambda > 1$ , por isso não iremos considerar essas restrições.

Respeitando as desigualdades estabelecidas acima, podemos escolher  $\kappa, \nu$  e  $\zeta$  de acordo com dados experimentais disponíveis. Usando o tipo de material definido pela equação (2.26), e simetria radial que garante que  $\lambda_2 = \lambda_3$ , temos que

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda_1} \Psi &= \kappa + 2\nu(\lambda_1 - \lambda) + 2\zeta(\lambda_2 - \lambda), \quad \text{e} \\ \partial_{\lambda_2} \Psi &= \kappa + 2\nu(\lambda_2 - \lambda) + \zeta((\lambda_2 - \lambda) + (\lambda_1 - \lambda)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Substituindo  $\lambda_i = 1$ , para  $i = 1, 2$  e  $3$  e usando a desigualdade (2.27), podemos concluir que  $\partial_{\lambda_1} \Psi > 0$  e  $\partial_{\lambda_2} \Psi > 0$ .

Posteriormente mostraremos que se  $2\sqrt{\lambda_1} \partial_{\lambda_1}^2 \Psi + \partial_{\lambda_1} \Psi > 0$ , o modelo acima será uma EDP hiperbólica e, portanto, gera ondas. Esse critério é garantido pela convexidade de  $\Psi$  na direção  $\lambda_1$  e por  $\partial_{\lambda_1} \Psi > 0$ . Usando simetria radial, a função  $\Psi$  torna-se

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) &= (\lambda_1 - \lambda)[\kappa + \nu(\lambda_1 - \lambda) + 2\zeta(\lambda_2 - \lambda)] \\ &\quad + (\lambda_2 - \lambda)[2\kappa + 2\nu(\lambda_2 - \lambda) + \zeta(\lambda_2 - \lambda)]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Substituindo as equações (2.28) em nosso modelo (2.15), concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial r}{\partial t} R^2 dR = & 2 \left[ \kappa + 2\nu \left( \frac{r^2}{R^2} - \lambda \right) + 2\zeta \left( \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 - \lambda \right) \right] \frac{\partial r}{\partial R} R^2 \Big|_{R_1}^{R_2} \\ & - 4 \int_{R_1}^{R_2} \left[ \kappa + 2\nu \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 - \lambda \right] + \zeta \left[ \left( \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 - \lambda \right) + \left( \frac{r^2}{R^2} - \lambda \right) \right] \right] r dR. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Esperamos que, dado o comportamento elástico do sistema, ambos os valores de  $\partial_{\lambda_1} \Psi$  e  $\partial_{\lambda_2} \Psi$  irão oscilar em torno do equilíbrio pré-esticado  $\partial_{\lambda_1} \Psi = \partial_{\lambda_2} \Psi = \kappa$ . Se ambos  $\partial_{\lambda_1} \Psi$  e  $\partial_{\lambda_2} \Psi$  fossem constantes, estaríamos lidando com um modelo de um material linearizado, ou seja, uma relação linear entre o estiramento e a tensão, isso é, especificamente para o tensor de tensão “First Piola-Kirchhoff”. O modelo resultante seria uma EDP linear hiperbólica. A solução deste modelo linear é extremamente útil por uma série de razões:

- i) O modelo linear representa um material fisicamente viável, daí a solução deste modelo exibir “reflexão” da origem  $R = 0$ . O que isso significa exatamente será esclarecido na próxima seção.
- ii) Uma vez que os valores de  $\partial_{\lambda_1} \Psi$  e  $\partial_{\lambda_2} \Psi$  oscilarão em torno de  $\kappa$ , esperamos que a solução da EDP não-linear, em certo sentido, irá oscilar em torno da solução do modelo linear.
- iii) Dadas as características acima, assumimos que as imposições físicas necessárias sobre as condições iniciais para o modelo linear serão imposições necessárias para a solução do modelo não-linear, tais como critérios de suavidade.

# Capítulo 3

## O Modelo Localizado

Primeiro vamos escrever a forma localizada de PIE (2.15) na Página 11 em forma de conservação

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} R^2 - 2 \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial R} R^2 \right) + 4 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} r = 0. \quad (3.1)$$

Esta EDP é equivalente a PIE (2.15) no sentido das distribuições. Para transformar esse modelo em um sistema hiperbólico, sejam  $q = \partial_t r$ ,  $\varepsilon_1 = \partial_R r$ ,  $\varepsilon_2 = r/R$  e usando o material definido pelas equações (2.28), temos que

$$\partial_t q R^2 = \partial_R (f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) R^2) - 2g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) R = 0, \partial_t \varepsilon_1 = \partial_R q, \partial_t \varepsilon_2 = q/R, \quad (3.2)$$

onde<sup>1</sup>  $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\varepsilon_1 \partial_{\lambda_1} \Psi = \partial_{\varepsilon_1} \Psi$  e  $g(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\varepsilon_2 \partial_{\lambda_2} \Psi = \partial_{\varepsilon_2} \Psi$ . Lembrando que para os símbolos usados em capítulos anteriores  $P^{rR} = f$ ,  $\lambda_1 = \varepsilon_1^2$  e  $\lambda_2 = \varepsilon_2^2$ . Este conjunto de equações já não é equivalente a PIE (2.15) no sentido de distribuições, porque se supomos que o sistema acima resulta de um conjunto de leis de conservação e aplicamos as condições salto (B.10), obtemos uma nova condição de salto,

$$[[\partial_R r]] S = [[\partial_t r]],$$

mesmo não sendo equivalente no sentido de distribuições, o sistema (3.2) é equivalente a PIE (2.15) para soluções suaves,  $C^2$ , dessa forma o sistema (3.2) pode ajudar a entender como choques formam, e como soluções suaves propaguem.

---

<sup>1</sup>Atenção para não usar a equação (2.29) para obter as expressões acima, para que não se inclua falsamente a contribuição de  $\lambda_3$ . Para evitar isso use as equações (2.28) para calcular as derivadas de  $\Psi$ .

### 3.1 Características

O conjunto de equações (3.2) pode ser expresso como o seguinte sistema,

$$\partial_t \begin{pmatrix} q \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{\varepsilon_1} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \partial_{\varepsilon_2} f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \partial_R \begin{pmatrix} q \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) - g(\varepsilon_1, \varepsilon_2))/R \\ 0 \\ q/R \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ou simplesmente,

$$\partial_t Q = F(Q) \partial_R Q + H(Q)/R. \quad (3.4)$$

Se para cada  $Q$  na parte fisicamente relevante do espaço de estados a matriz  $F(Q)$  é diagonalizável com autovalores reais, então o modelo representado pelas equações (3.2) é chamado de a lei de conservação (fortemente) hiperbólica [4] com uma fonte, ou simplesmente uma lei de equilíbrio [7] ( “Balance Law” ou “Balance Principal” ). A matriz  $F(Q)$  tem os seguintes autovalores e autovetores,

$$\lambda_1 = \sqrt{\partial_{\varepsilon_1} f}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\partial_{\varepsilon_1} f}, \quad \lambda_3 = 0, \\ y_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\partial_{\varepsilon_1} f} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\partial_{\varepsilon_1} f} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_{\varepsilon_2} f \\ \partial_{\varepsilon_1} f \end{pmatrix}.$$

Sejam as coordenadas de cada autovetor acima uma das colunas que definem a matriz  $Y = (y_1|y_2|y_3)$ , e decomponha  $F = YDY^{-1}$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal. Em seguida, multiplique o sistema (3.4) à esquerda com a matriz  $Y^{-1}$ , resultando em,

$$Y^{-1} \partial_t Q = DY^{-1} \partial_R Q + Y^{-1} H/R. \quad (3.5)$$

Seja  $Q_i$  o  $i$ -ésimo elemento de  $Q$ , então cada linha deste sistema pode ser reescrita no seguinte formato,

$$\sum_{k=1}^3 M_{ki}(Q) \frac{dQ_k}{dt}(\Gamma_i(t), t) = G_i(Q)/R, \quad (3.6)$$

para algum  $M_{kj}, G_j \in C^1$  e onde

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} + \lambda_i(Q) = 0.$$

As curvas  $\Gamma_i(t)$  para  $i = 1, 2, 3$  definidas pela equação diferencial ordinária acima são chamadas das *curvas características* do sistema (3.5) associado a um solução clássica  $Q$ . Veja Capítulo VII do [4] para uma referência mais aprofundada sobre características e hiperbolicidade. Supondo causalidade, assumimos que o domínio de dependência é dado pelo cone de espaço-tempo cuja fronteira é delimitada pelas características mais rápidas voltando no tempo. Posteriormente, para elaborar uma esquema numérica veja Capítulo 5, iremos supor que essa propriedade é verdadeira para o modelo não linear geral (3.1), porém, para o material linearizado abaixo iremos mostrar que esse domínio de dependência é correto.

Linearizar o material em torno de qualquer estado, resulta na seguinte função de energia-tensão

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{V^2}{2}(\lambda_1 - \bar{\lambda}_1) + \frac{W^2}{2}(\lambda_2 - \bar{\lambda}_2), \quad (3.7)$$

que pode ser considerado como uma aproximação de primeira ordem da função de energia-tensão próxima ao estado  $(\lambda_1, \lambda_2) = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ , onde

$$V^2 = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2}, \text{ e } W^2 = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2}.$$

Essa renomeação serve para sugerir que  $V$  e  $W$  representam velocidades, em algum sentido, lembrando que  $\Psi$  é a energia livre por unidade de massa, logo  $V$  e  $W$  tem unidade de comprimento por unidade de tempo. Os casos em que  $V \neq W$  resultam de uma linearização em torno de um estado fora de equilíbrio. Usando esses modelos para o material,  $F(Q)$  do sistema (3.4) é constante e, portanto, podemos expressar o sistema (3.6) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{q(\Gamma_1(t), t) - V\varepsilon_1(\Gamma_1(t), t)\} &= \frac{2V^2\varepsilon_1(\Gamma_1(t), t) + 2W^2\varepsilon_2(\Gamma_1(t), t)}{\Gamma_1(t)}, \\ \frac{d}{dt} \{q(\Gamma_2(t), t) + V\varepsilon_1(\Gamma_2(t), t)\} &= \frac{2V^2\varepsilon_1(\Gamma_2(t), t) + 2W^2\varepsilon_2(\Gamma_2(t), t)}{\Gamma_2(t)}, \\ \frac{d}{dt} \{\varepsilon_2(R_0, t)\} &= \frac{q(R_0, t)}{R_0}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

renomeando

$$k_1(X, t) = q(X, t) - V\varepsilon_1(X, t), \quad k_2(X, t) = q(X, t) + V\varepsilon_1(X, t)$$

e integrando em  $t$  o sistema (3.9), concluímos que

$$\begin{aligned} k_1(\Gamma_1(t), t) &= k_1(\Gamma_1(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t \frac{V[k_2(\Gamma_1(\tau), \tau) - k_1(\Gamma_1(\tau), \tau)] + 2W^2\varepsilon_2(\Gamma_1(\tau), \tau)}{\Gamma_1(\tau)} d\tau, \\ k_2(\Gamma_2(t), t) &= k_2(\Gamma_2(t_0), t_0) + \int_{t_0}^t \frac{V[k_2(\Gamma_2(\tau), \tau) - k_1(\Gamma_2(\tau), \tau)] + 2W^2\varepsilon_2(\Gamma_2(\tau), \tau)}{\Gamma_2(\tau)} d\tau, \\ \varepsilon_2(R_0, t) &= \varepsilon_2(R_0, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{k_1(R_0, \tau) + k_2(R_0, \tau)}{2R_0} d\tau, \end{aligned} \quad (3.9)$$

As curvas  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são retas com tangente igual a  $V$  e  $-V$ . Nesta forma, qualquer discretização numérica para o sistema acima, que obedece causalidade, teria um domínio de dependência delimitado pelas *características*  $(\Gamma_1(t), t)$  e  $(\Gamma_2(t), t)$ . A Figura 3.1 abaixo, mostra um conjunto de características, voltando no tempo a partir do ponto  $(R_1, t_1)$  para algum campo de velocidade não-linear, que contornam o domínio de dependência.

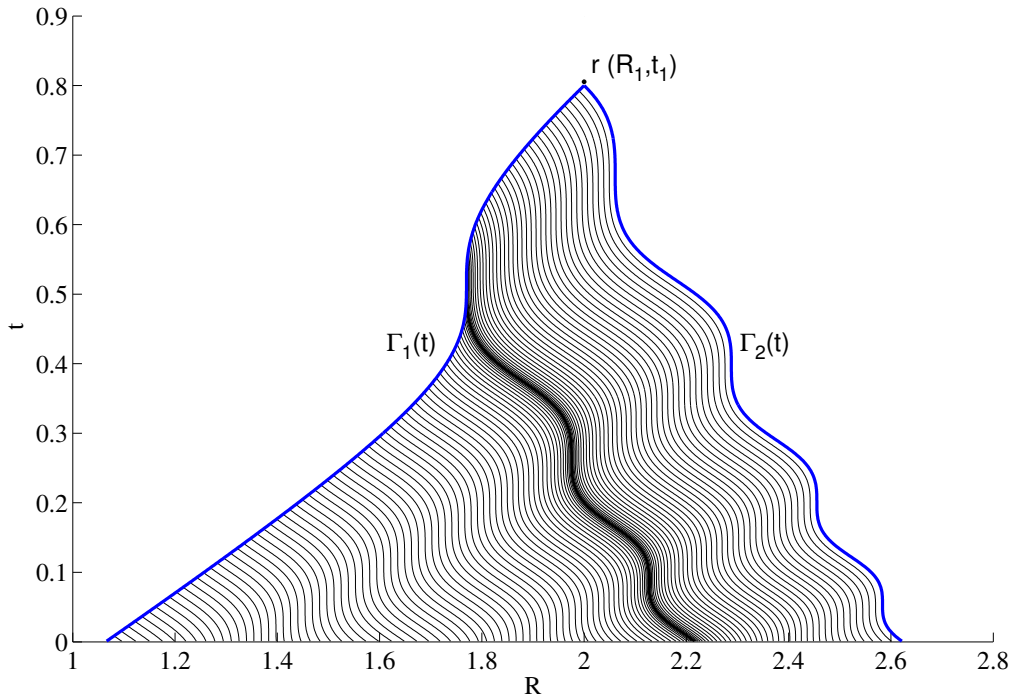


Figura 3.1: Mostra um conjunto de características, voltando no tempo a partir do ponto  $(R, T)$  para algum campo de velocidade não-linear, que contornam o domínio de dependência.



Como esse conjunto de materiais linearizados se aproxima de qualquer estado do material não-linear, e devido às razões dadas no final do capítulo anterior, iremos investigar o comportamento desses modelos lineares.

## 3.2 Soluções Analíticas do Material Linear

Agora, estabelecido o domínio de dependência para resolver o modelo linearizado, voltamos à (3.1) com linearização (3.7),

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} R^2 - \frac{\partial}{\partial R} \left( V^2 \frac{\partial r}{\partial R} R^2 \right) + 2W^2 r = 0. \quad (3.10)$$

Expandindo essa equação e reorganizando-a

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 r}{\partial R^2} + \frac{2V^2}{R} \frac{\partial r}{\partial R} - 2W^2 \frac{r}{R^2} \implies \frac{\partial^2(Rr)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2(Rr)}{\partial R^2} - 2W^2 \frac{Rr}{R^2},$$

temos finalmente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - 2W^2 \frac{u}{R^2}, \quad (3.11)$$

onde  $u = Rr$ . Primeiro encontramos condições para  $V$  e  $W$ , tal que a solução estacionária é um estado uniformemente esticado, onde  $u(R, t) = \lambda^{1/2} R^2$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{2W^2}{V^2} \frac{u}{R^2} \implies 2\lambda^{1/2} = \frac{2W^2}{V^2} \lambda^{1/2} \implies W^2 = V^2. \quad (3.12)$$

Disso, concluímos que se  $V \neq W$ , então estamos lidando com uma linearização na vizinhança de um estado fora do equilíbrio uniformemente esticado. Esse resultado é consistente com o modelo material apresentado na seção (2.4), que tem as derivadas  $\partial_{\lambda_1} \Psi$  e  $\partial_{\lambda_2} \Psi$ , dadas por (2.28), iguais no equilíbrio  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_2 = \lambda$ . Logo, somente o modelo linear com  $V = W$  oscila em torno do equilíbrio do modelo não-linear pré-esticado. Isso, em parte, é a razão pela qual somente esse modelo linear exhibe “reflexão” na origem.

Uma família de soluções de equilíbrio para  $W \neq V$  é a seguinte

$$u(R, t) = \lambda^{1/2} R^{(1 \pm \sqrt{1+8W^2/V^2})/2}, \quad (3.13)$$

que pode ser útil ao examinar as diferentes soluções da equação (3.11).

Para resolver a EDP (3.11) convertamos em uma EDO aplicando a transfor-

mada de Fourier no tempo em ambos os lados da equação, resultando em

$$2V^2 \partial_R^2 \hat{u} + (\omega^2 - 4W^2/R^2) \hat{u} = -i\omega u(R, 0) - \partial_t u(R, 0), \quad (3.14)$$

dessa forma, agora procuramos uma solução para

$$\hat{u}(R, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u(R, t) e^{-i\omega t} dt,$$

supondo conhecido  $u(R, 0)$  e  $\partial_t u(R, 0)$ . Em seguida substituímos a série de potência

$$\hat{u}(R, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\omega) R^{n+\alpha}$$

em (3.14) e igualando os termos com a mesma potência de  $R$ , concluímos que

$$b_1 = 0, \quad \alpha = 1/2 \pm (1 + 8V^2/W^2)^{1/2}/2,$$

e

$$b_{n+2} = -b_n \frac{\omega^2}{2V^2} ((n+1)(n+1 \pm \beta))^{-1}, \quad \text{para } \beta = \sqrt{1 + \frac{8W^2}{V^2}},$$

resolve o ODE (3.14). Fomos capazes de simplificar essa série em termos de funções elementares, dadas por  $\sin(R\omega/V)$  vezes potências de  $R\omega/V$  somada com  $\cos(R\omega/V)$  vezes potências de  $R\omega/V$ , somente para os valores

$$\frac{W^2}{V^2} = \frac{(2n+1)^2 - 1}{8}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Com a solução fundamental para os casos em que (3.15), podemos resolver a EDO (3.14) supondo as condições iniciais  $\hat{u}(R_0, \omega)$  e  $\partial_R \hat{u}(R_0, \omega)$  são conhecidas para algum  $R_0$  e para todo  $\omega$  real. Para realizar a inversa da Transformada de Fourier, e defini-lo de forma única, é necessário usar causalidade e o Teorema de Cauchy-Goursat. Depois de muitas simplificações, o resultado será uma solução em termos dos quarto condições iniciais  $\partial_t u(R, 0)$ ,  $u(R, 0)$ ,  $u(R_0, t)$  e  $\partial_R u(R_0, t)$ . Apesar que ao longo do trajeto de encontrar essa solução assumimos que os quatros funções iniciais são conhecidas, não temos a liberdade para escolher quarto funções quaisquer, somente temos a liberdade de escolher duas dessas funções. Para retirar as duas condições iniciais  $u(R, 0)$  e  $\partial_t u(R, 0)$  e encontrar uma forma mais simples da solução, impomos as condições iniciais que não são

satisfeitas de imediato. O resultado desse processo para o caso  $V = W$  e  $R_0 = 0$  é o seguinte,

$$u(R, t) = \frac{1}{2}u(|R - Vt|, 0) + \frac{1}{2}u(R + Vt, 0) + \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \frac{-Vt}{2RP} u(P, 0) dP \\ + \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \frac{(P^2 + R^2 - V^2t^2)}{4VRP} \partial_t u(P, 0) dP. \quad (3.16)$$

Outra forma útil para a solução  $u(R, t)$  é expressá-la em termos das condições iniciais  $u(R_0, \tau)$  e  $\partial_R u(R_0, \tau)$  para  $\tau \in [t - T, t + T]$ , onde  $T = (R - R_0)/V$ . Note que  $T$  pode ser menor que zero, porém nessa forma a solução é mais fácil de verificar e adaptar. Isso resulta na solução

$$u(R, t) = \frac{1}{2}u(R_0, t - T) + \frac{1}{2}u(R_0, t + T) + \int_{t-T}^{t+T} \frac{R^2 - R_0^2 - V^2(t - \tau)^2}{4R_0^2R} u(R_0, \tau) V d\tau \\ + \int_{t-T}^{t+T} \frac{R^2 + R_0^2 - V^2(t - \tau)^2}{4R_0R} \frac{\partial u}{\partial R}(R_0, \tau) V d\tau. \quad (3.17)$$

A solução para o caso  $W/V = \sqrt{3}$  e  $R_0 = 0$ , que não apresenta reflexão da origem espacial<sup>2</sup>, é

$$u_2(R, t) = \frac{1}{2}u(|R - Vt|, 0) + \frac{1}{2}u(R + Vt, 0) \\ + \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \frac{(3Vt(V^2t^2 - P^2 - R^2))}{4P^2R^2} u(P, 0) dP \\ + \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \left( \frac{3P^2 + 2(R^2 - 3V^2t^2)}{16VR^2} + \frac{3(R^2 - V^2t^2)^2}{16VP^2R^2} \right) \frac{\partial u(P, 0)}{\partial t} dP. \quad (3.18)$$

A solução para o caso limite  $W/V = 0$  e  $R_0 = 0$  é

$$u_0(R, t) = \frac{1}{2}u(|R - Vt|, 0) + \frac{1}{2}u(R + Vt, 0) + \frac{1}{2V} \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \frac{\partial u(P, 0)}{\partial t} dP.$$

A forma obtida para as soluções do material linearizado para os casos

---

<sup>2</sup>Só pode haver reflexão se o material ondula em torno do estado de repouso  $V = W$ , logo, a reflexão não ocorre para o modelo linearizado em torno de um estado que não está em equilíbrio.

$W/V = \sqrt{3}$ ,  $W/V = 1$  e  $W/V = 0$  têm o seguinte formato:

$$u(R, t) = \frac{1}{2}u(|R - Vt|, 0) + \frac{1}{2}u(R + Vt, 0) + \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \partial_t Z(R, P, t, V^2/W^2)u(P, 0) dP \\ + \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} Z(R, P, t, V^2/W^2)\partial_t u(P, 0) dP, \quad (3.19)$$

para alguma função  $Z$ . Acreditamos que todas as soluções para o material linearizado possuem o formato acima, porém, não cabe a este trabalho comprovar esta afirmação, todas as soluções apresentadas podem ser verificados por substituí-los no EDP (3.11). Todavia, o domínio de integração é correto, como foi mostrado ao expressar esse sistema através de suas características (3.9), os termos advectivos obedecem as condições de descontinuidade e a linearidade da EDP prediz o tipo de dependência em  $u(\cdot, 0)$  e  $\partial_t u(\cdot, 0)$ , ou seja, integrados no domínio de dependência. A estrutura dessas soluções poderia ser usada para sugerir uma base de funções capazes de aproximar a solução linear geral.

## Resolvendo a Equação Integral

Uma questão importante é se, além de satisfazer a EDP localizada (3.11), essas soluções satisfazem a equação integral parcial (2.15)? Em uma região onde  $r$  é continuamente diferenciável em ambos  $R$  e  $t$ , uma solução para a versão localizada é claramente uma solução para a equação integral. Se assumirmos que a formação de descontinuidades em  $\partial_R r$  e  $\partial_t r$ , ou pregas, só podem se propagar ao longo de uma superfície móvel  $\sigma(t) \subset \mathbb{R}^3$ , então a solução (3.16) deve satisfazer as condições de salto descontínuo para que também seja uma solução da PIE (2.15). Essas condições envolvem a velocidade da onda de choque, por isso vamos supor que há uma descontinuidade nos dados iniciais de modo que podemos extrair a velocidade de propagação do choque, como previsto pela solução acima.

Para simplificar os seguintes cálculos, restringimos  $R > Vt$ . Sempre podemos dar um passo no tempo pequeno o suficiente para que isso seja verdade para  $R \neq 0$ . Procuramos uma prega espacial, ou seja, uma descontinuidade em  $\partial_R u$ . Derivando a solução (3.16) em  $R$  e depois descartando os termos que são

contínuos, devido à natureza de suavizar da integração, sobra

$$\frac{1}{2V} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(R + Vt, 0) + V \frac{\partial u}{\partial R}(R + Vt, 0) \right) - \frac{1}{2V} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(R - Vt, 0) - V \frac{\partial u}{\partial R}(R - Vt, 0) \right).$$

Para seguir a dobra nos dados iniciais localizado em  $(R_1, 0)$ , podemos fixar  $R + Vt = R_1$  e, dessa forma, definir a curva  $(-V, 1)t + (R_1, 0)$  no plano  $(R, t)$ ; ou podemos fixar  $R - Vt = R_1$ , que define a curva  $(V, 1)t + (R_1, 0)$ . A expressão acima é descontínua ao longo de ambas essas características, e delas estabelecemos que a velocidade de propagação da prega através do material é  $\pm V$ . Analogamente, o mesmo resultado aplica para todas as soluções da EDP (3.11) linearizada, como a solução (3.18). As condições de salto descontínuo para um material geral não determinam a velocidade de uma onda de choque. No entanto, para a função-tensão de energia especial  $\partial_{\lambda_1} \Psi = V^2$  constante, as condições de saltos resultam na equação (2.20), o que nos diz a velocidade que uma onda de choque propaga. Considere a forma um pouco mais geral  $\Psi = V^2 \lambda_1 / 2 + g(\lambda_2)$ , então

$$\llbracket \Psi \rrbracket = \frac{V^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 \right]. \quad (3.20)$$

Equação (2.20) afirma que para essa função de energia-tensão acima

$$(S)^2 \llbracket \Psi \rrbracket = 2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r^+}{\partial R} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r^-}{\partial R} \right)^2 = \frac{V^4}{2} \left[ \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^2 \right],$$

portanto, substituindo (3.20) na equação acima, resulta que

$$S = \pm V. \quad (3.21)$$

Dessa mesma forma, a velocidade de propagação de um choque fraco, dada pela equação (2.25), é a mesma que a velocidade de choque fraco previsto pelas soluções analíticas das EDPs lineares (3.11). Sem suposições adicionais, tais como considerações relacionadas à entropia, as condições de salto não determinam mais sobre o choque. Todavia, conseguimos concluir que a solução dada pela equação (3.16), junto com todas as soluções analíticas encontradas, são também soluções para a equação integral parcial (2.15). Mesmo não sendo as únicas soluções, assumimos que são fisicamente relevantes e continuamos a

analisar da solução (3.16).

### Propriedades Físicas

A primeira propriedade que investigamos é se a origem do mapa espacial permanece parada, ou seja,  $r(0, t) = 0$ . Sabemos que isso deveria ser verdadeiro através de simetria, isso é, forças esfericamente simétricas não causam translação. Vamos agora verificar essa propriedade. Para o teorema abaixo e o que se segue, utilizamos a solução  $u(R, t)$ , em vez de  $r(R, t)$ , pois é um pouco mais simples.

**Teorema 3.1.** *Assuma que as condições iniciais  $u(\cdot, 0)$  e  $\partial_t u(\cdot, 0)$  são respectivamente  $C^2$  e  $C^0$ , onde  $u(R, t)$  é dada pela equação (3.16). Então, para cada  $t > 0$ ,*

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{u(R, t)}{R} = 0 \text{ ou, equivalentemente } \lim_{R \rightarrow 0} r(R, t) = 0.$$

**Prova:** Para qualquer  $t$  dado, escolha  $\delta > 0$  suficientemente pequeno para que

$$|R| < \delta \implies |R - Vt| = Vt - R.$$

Iremos analisar cada termo da equação (3.16). Primeiro, analisando

$$\frac{-Vt}{2R} \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \frac{1}{P} u(P, 0) dP = \frac{-Vt}{2R} \int_{Vt-R}^{R+Vt} \frac{1}{P} u(P, 0) dP.$$

Usando o teorema de Taylor, podemos substituir

$$u(P, 0) = u(Vt, 0) + \partial_R u(Vt, 0)(P - Vt) + \partial_{RR} u(\xi(Vt, P), 0)(P - Vt)^2/2,$$

para algum  $\xi(Vt, P) \in [Vt, P]$ , e podemos escolher  $\xi(Vt, \cdot)$  de forma que seja contínuo. Em seguida, expandimos um série em  $R$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{-Vt}{2R} \int_{Vt-R}^{R+Vt} \frac{1}{P} u(P, 0) dP \\ &= -u(Vt, 0) + \left( -\frac{u(Vt, 0)}{3t^2 V^2} + \frac{\partial_R u(Vt, 0)}{3tV} - \frac{\partial_{RR} u(\xi(Vt, Vt), 0)}{6} \right) R^2 + \mathcal{O}(R^3) \\ &= -u(Vt, 0) + \mathcal{O}(R^2). \end{aligned}$$

Ao realizar o limite  $\delta \rightarrow 0$ , o que implica que  $R \rightarrow 0$ , o termo acima cancelará os

termos

$$\frac{1}{2}u(Vt - R, 0) + \frac{1}{2}u(R + Vt, 0) = u(Vt, 0) + \mathcal{O}(R),$$

pelo menos até uma ordem em  $R$ . O termo remanescente é de ordem  $\mathcal{O}(R^2)$ . Para provar isso, sabemos que existe um  $\bar{R}_2 \in [R - Vt, R + Vt]$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{|R-Vt|}^{R+Vt} \frac{(P^2 + R^2 - V^2t^2)}{4VRP} \frac{\partial u(P, 0)}{\partial t} dP \\ &= \frac{\partial u(\bar{R}_2, 0)}{\partial t} \int_{Vt-R}^{R+Vt} \frac{(P^2 + R^2 - V^2t^2)}{4VRP} dP \\ &= \frac{\partial u(\bar{R}_2, 0)}{\partial t} \frac{1}{4VtR} (2VtR - (R^2 - V^2t^2) [\log(Vt - R) - \log(Vt + R)]) \\ &= \frac{\partial u(\bar{R}_2, 0)}{\partial t} \frac{1}{4VtR} \left( 2VtR - (R^2 - V^2t^2) \left[ \frac{-2R}{Vt} + \mathcal{O}(R^3) \right] \right) \\ &= \frac{R^2}{2Vt} \frac{\partial u(\bar{R}_2, 0)}{\partial t} + \mathcal{O}(R^2), \end{aligned}$$

portanto  $\lim_{R \rightarrow 0} u(r, t)/R = \lim_{R \rightarrow 0} r(R, t) = 0$ . ■

Note que a exigência de que  $u(\cdot, t) \in C^1$  é vital. Por exemplo, se  $\partial_R u(R, 0)$  fosse descontínua para  $R = Vt$  então

$$\frac{1}{2}u(Vt - R, 0) + \frac{1}{2}u(R + Vt, 0) = u(Vt, 0) + R\alpha + \mathcal{O}(R),$$

onde

$$\alpha = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{u(Vt + R, 0) - u(Vt - R, 0)}{2R}.$$

Com isso, podíamos mostrar que o teorema acima não é verídico. Em suma, isso implica que pregas espaciais (descontinuidades nas derivadas espaciais) não podem se propagar em direção à origem  $R = 0$ , pois se existissem, a restrição física essencial que  $r(R, t) \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow 0$  não seria verdade. Dada a importância desse fato, apresentamos algumas simulações no final deste capítulo que utilizam condições iniciais com um descontinuidade na derivada espacial. No entanto, note que para o modelo não-linear esse fato apenas impede que pregas espaciais próximas à origem propaguem em direção à origem. Todas as simulações numéricas para a solução não-linear, que não foram suficientemente suaves perto da origem, tornaram-se completamente instáveis. O teorema acima nos dá um forte motivo para impor que  $\partial_{Rr}$  seja suave perto da origem.

Outra restrição física fundamental é que a solução seja monótona. Para a função  $r(\cdot, t)$ , monotonicidade implica que  $\partial_R r(R, t) \geq 0$ , para cada  $R \in \mathcal{B}$  e  $t \geq 0$ . Considerando que  $r$  é diferenciável, se tivesse um ponto tal que  $\partial_R r < 0$ , então teria dois pontos originalmente separados no material, que seriam mapeados para o mesmo lugar: uma impossibilidade físico. Quando escolhemos a função de energia-tensão (2.29), assumimos que  $\partial_R r(R, t) > 1$ , ou seja, que o material esta sempre estendido. No entanto, que garantia temos de que isso permanecerá válido mesmo que a condição inicial satisfaz a restrição?

Para materiais mais realísticos, esperamos monotonicidade global porque há um limite para o quanto o material pode ser comprimido, ou um limite de quão pequeno  $\partial_R r$  e  $r/R$  podem atingir. Ao aproximarmos a esses limites, esperamos que a energia interna aumente drasticamente o que por sua vez causa uma força expansiva que aumenta drasticamente. Essa impossibilidade de continuar a comprimir o material pode ser modelada pela adição de uma barreira de energia infinita. É evidente que a nossa aproximação para função de energia-tensão (2.29) não aumenta drasticamente quando  $\lambda_k$  tende a zero. Lembrando que, se pudéssemos alinhar a base de um sistema de coordenadas euclidianas com autovetores ortogonais do tensor de Cauchy-Green,  $C$  (veja a equação (A.5)), teríamos  $\lambda_k = (\partial_{X_k} \phi_k)^2$ . Para o model material (2.29), a intuição física nos leva a acreditar que para cada escolha dos parâmetros  $\kappa, \nu, \zeta$ , deveria existir uma limitação na amplitude da condição inicial de forma que  $\partial_R r(R, t) \geq 0$  continua a ser válida. A questão é quanto temos que limitar a amplitude; simulações na Seção (4) mostra alguns casos.



# Capítulo 4

## Fenômenos Analíticos e Condições Iniciais

Neste capítulo apresentamos as condições iniciais que utilizamos para o modelo (2.30) e algumas soluções do EDP linearizado ao redor do equilíbrio prestressado  $r = \lambda^{1/2}R$ . Ou seja, as soluções (3.16) onde  $u = r/R$ . Essas integrais são calculadas por aproximar os integrandos por trapézios. Primeiro apresentamos um exemplo que ilustra quando as condições iniciais não satisfazem as hipótese do Teorema (3.1). Depois mostramos como propaga duas condições iniciais.

### Uma Onda Prega Viajando para o Centro

Apresentamos um exemplo de uma prega espacial viajando em direção à origem para o modelo de um material linearizado e, em seguida, de acordo com o capítulo anterior, o ponto  $r(0, t)$  não permanece parado e, portanto, é fisicamente impossível. Aproximamos numericamente a solução analítica dada pela equação (3.16) na Página 26, com as seguintes condições iniciais,

$$r(R, 0) = 2R[H(a - R) + (R - a + 1) \cdot H(R - a) \cdot H(b - R) + (b - a + 1) \cdot H(R - b)],$$
$$\partial_t r(R, 0) = 0, \text{ com } a = 0.6 \text{ e } b = 0.8,$$

onde  $H(x) = 1$  se  $x \geq 0$  e  $H(x) = 0$  se  $x < 0$ . Essa condição inicial é representada na Figura 4.1, a evolução espacial da onda prega no tempo é mostrada na Figura 4.2 abaixo.

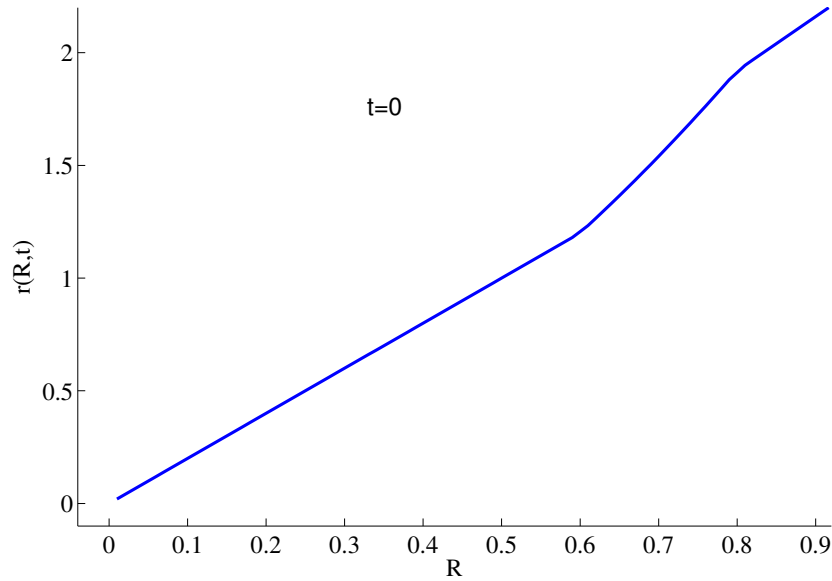


Figura 4.1: Gráfico de  $r(R,t)/R$  com as condições iniciais definidas por  $A = 0.6$ ,  $D = 0.1$  e  $\lambda = 4$ . A ordem temporal é da esquerda para a direita, onde o tempo das imagens são respectivamente  $t = 0\text{s}$ ,  $t = 0.1\text{s}$  e  $t = 0.4\text{s}$ .

## Propagação de Condições Iniciais

Claramente, as condições iniciais devem ser monótonas e devem satisfazer as restrições físicas discutidas na seção sobre o modelo material (veja a Seção 2.4). Também apreciaríamos alguma flexibilidade na escolha da amplitude, localização e forma da onda. Abaixo apresentamos uma classe de condições iniciais, que têm uma variedade de amplitudes e que podem ser colocadas tão próximo da origem quanto desejado. Também, como demonstrado no Teorema 3.1, a condição inicial  $r(R,0)$  deve ser 2-vezes continuamente diferenciável pelo menos perto da origem  $R = 0$ . Além disso, pode ser útil fazer  $r(R,0)$  anti-simétrica em torno da origem de  $R = 0$ . Por exemplo, se quisesse usar um esquema numérico com um “stencil” grande, pontos com  $R < 0$  poderiam ser necessários. Um exemplo de uma família de condições iniciais que satisfaçam aos requerimentos acima é o seguinte

$$r(R,0) = \sqrt{\lambda}R + \frac{AR}{1+R^2}e^{-n\frac{(|R|-D)^2}{0.1+A^3}}. \quad (4.1)$$

A amplitude da crista pode ser alterada variando  $A$ , e  $D$  pode ser usado para controlar a distância entre a crista da onda e a origem. Um possível conjunto

de parâmetros que satisfaz aos critérios necessários acima são  $\sqrt{\lambda} \geq 2$  e  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  juntamente com qualquer escolha para  $A$  e  $D$ .

Para ilustrar, mostramos dois conjuntos de condições iniciais, depois apresentaremos a evolução no tempo de  $r/R$  para essas configurações. A evolução de  $r(R, t)$  é muito bem comportada em relação à evolução de  $r(R, t)/R$ . Note que não precisa especificar o pré-estiramento  $\sqrt{\lambda}$ , porque a adição de um pré-estiramento à condição inicial não altera a dinâmica, como é mostrado abaixo usando a familiar EDP (3.11) para  $u(R, t) = r(R, t)R$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} + 2V^2 \frac{1}{R^2} \right) (u + \sqrt{\lambda}R^2) = 0 \implies \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2}{\partial R^2} + 2V^2 \frac{1}{R^2} \right) u = 0.$$

Também não é necessário especificar a velocidade, porque uma mudança na velocidade  $V$  iria apenas reescalonar o tempo, isto é,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial (Vt)^2} - \frac{\partial^2}{\partial R^2} + 2 \frac{1}{R^2} \right) u = 0.$$

Portanto, as simulações apresentadas a seguir representam uma classe de materiais com pré-estiramento diferentes e por isso, representam uma resposta muito geral do modelo. As duas condições iniciais que usamos para ilustrar a família (4.1) são Figura 4.3a e 4.3b. Devemos tomar cuidado pois nosso modelo material (veja a Seção 2.4) exigia fisicamente que  $r/R > 1$  e  $\partial_R r > 1$ . Simulação demonstram que ambas as condições são consistentemente satisfeitas distante da origem, se as condições iniciais satisfizerem essa restrição. No entanto, próximo à origem, onde  $r/R \rightarrow \partial_R r$ , estas variáveis oscilam drasticamente e, frequentemente, condições iniciais que apresentam pequenas oscilações em torno de um estado pré-esticado maior que um, podem quebrar as imposições físicas  $r/R > 1$  e  $\partial_R r > 1$  próxima à origem (veja as Figuras 4.4 e 4.5)<sup>1</sup>.

Note que a condição inicial representada na Figura 4.3b começa com uma amplitude menor que 0.5 para  $\partial_R r$ , no entanto, mais tarde  $\partial_R r$  triplica sua amplitude para 1.5 na origem, como mostrado na sexta imagem da Figura 4.5.

As simulações apresentadas nas Figuras 4.4 e 4.5 enfatizam a importância de captar a evolução de  $\partial_R r$ . Para aproximar numericamente a dinâmica perto de  $R = 0$ , onde  $r(0, t)$  permanece parado, devemos garantir que estamos capturando a característica mais fundamental da dinâmica: a evolução de  $r/R$  ou de forma

<sup>1</sup>Para obter uma visão mais claro da evolução temporal dessas ondas, veja a Figura 5.1

---

similar  $\partial_R r$ . O valor de  $r/R$  muda rapidamente perto de  $R = 0$ , se essas mudanças não são capturadas com precisão os erros cometidos serão propagados para fora e diminuirão a qualidade da simulação. Para remediar isso, projetamos de fato esquemas numéricos para a variável  $r/R$ , ao invés de aproximar  $r$ , e depois quando  $R$  e  $r$  ambas tendem a zero, tentar numericamente extrair  $\partial_R r$ . Isso funcionaria mal porque, por menor que seja o erro cometido ao aproximar  $r$ , esse erro afetaria severamente o valor calculado para  $\partial_R r$  perto da origem.

No capítulo seguinte, vamos descrever o modelo (3.11) em um sistema de coordenadas que segue a frente de onda. Dentro desse sistema de coordenadas vamos projetar esquemas numéricos para  $\mu(R, t) = r(R, t)/R$  que impõem as condições físicas necessárias para a solução linear, e também obedecem às condições de salto descontínuo.

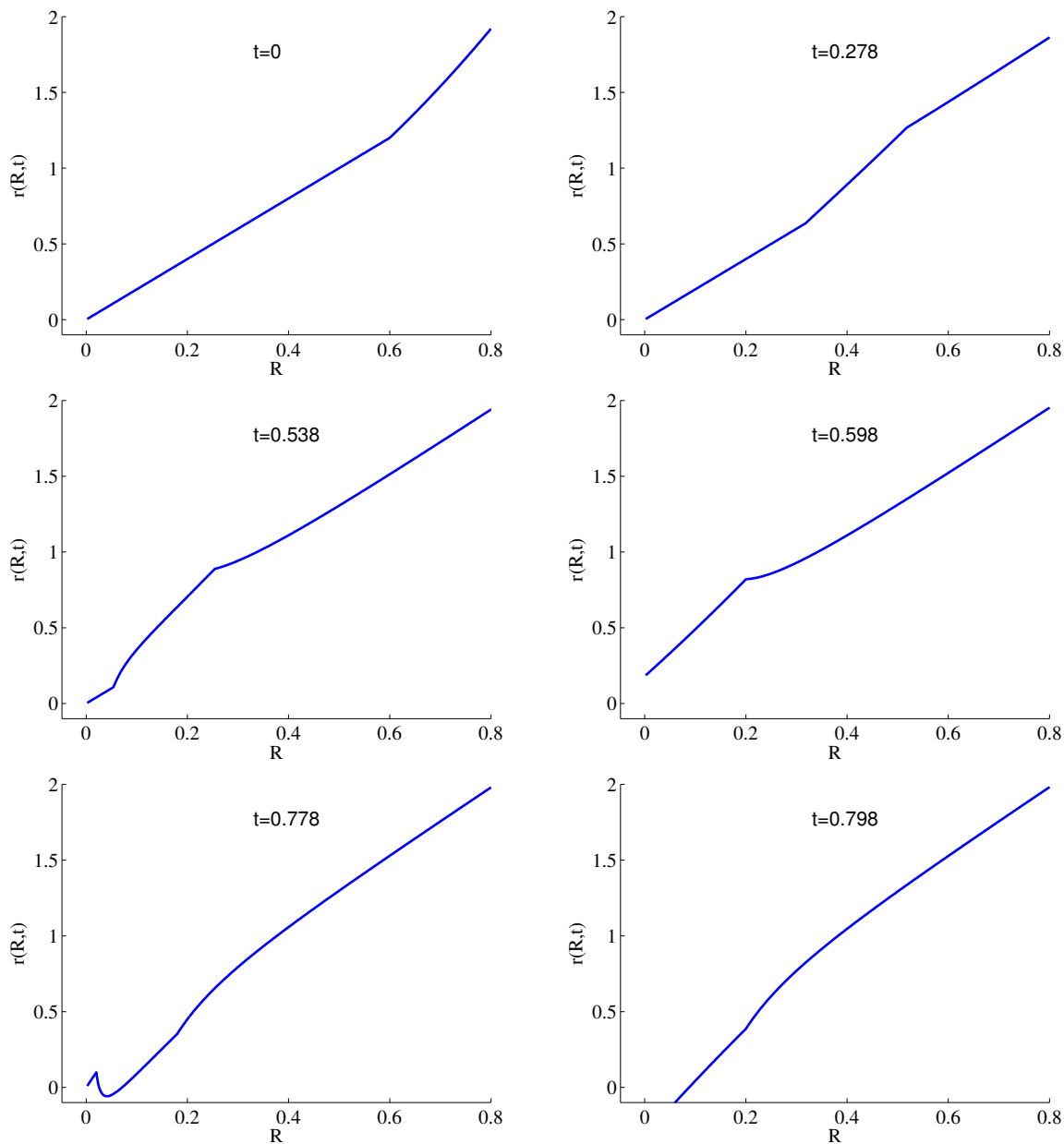


Figura 4.2: Gráficos de  $r(R,t)$ , onde  $r(R,0)$  é uma condição inicial com uma prega. As figuras evoluem no tempo da esquerda para a direita e de cima para baixo.

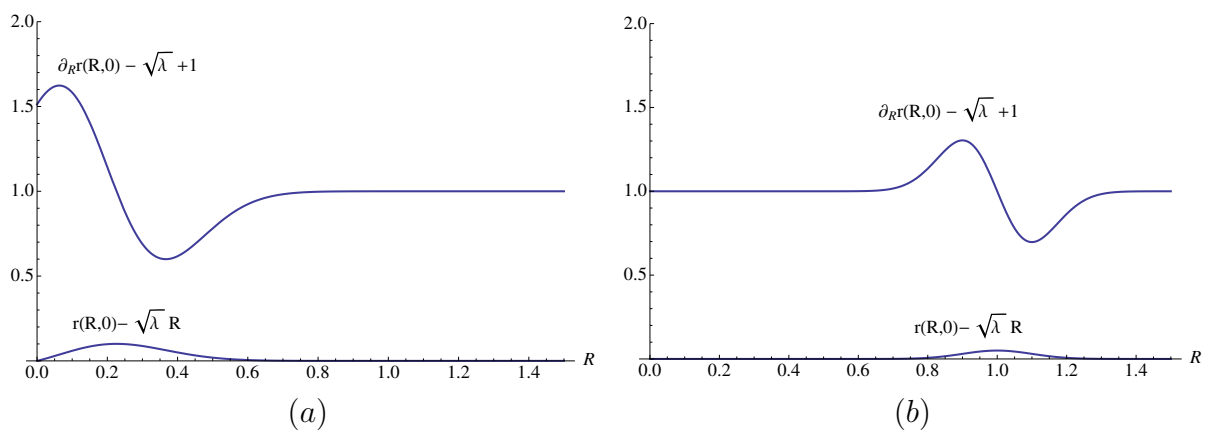


Figura 4.3: Condições Iniciais (4.1) para  $n = 5$ : (a)  $A = 0.6$  e  $D = 0.1$ , (b)  $A = 0.1$  e  $D = 1.0$ .

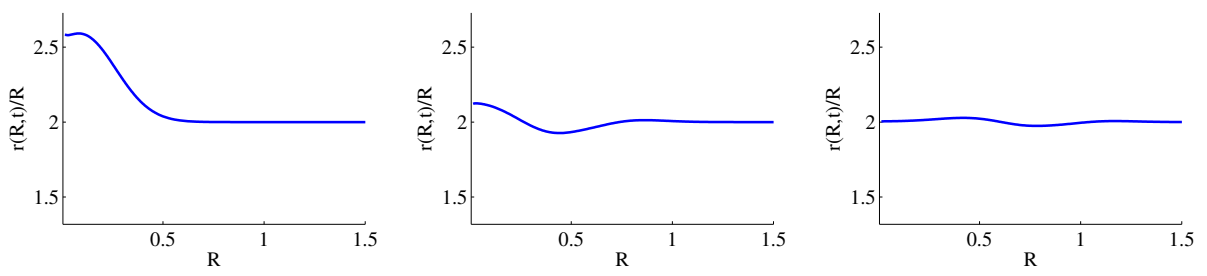


Figura 4.4: Gráfico de  $r(R,t)/R$  com as condições iniciais definidas por  $A = 0.6$ ,  $D = 0.1$  e  $\lambda = 4$ . A ordem temporal é da esquerda para a direita, onde o tempo das imagens são respectivamente  $t = 0$ s,  $t = 0.1$ s e  $t = 0.4$ s.

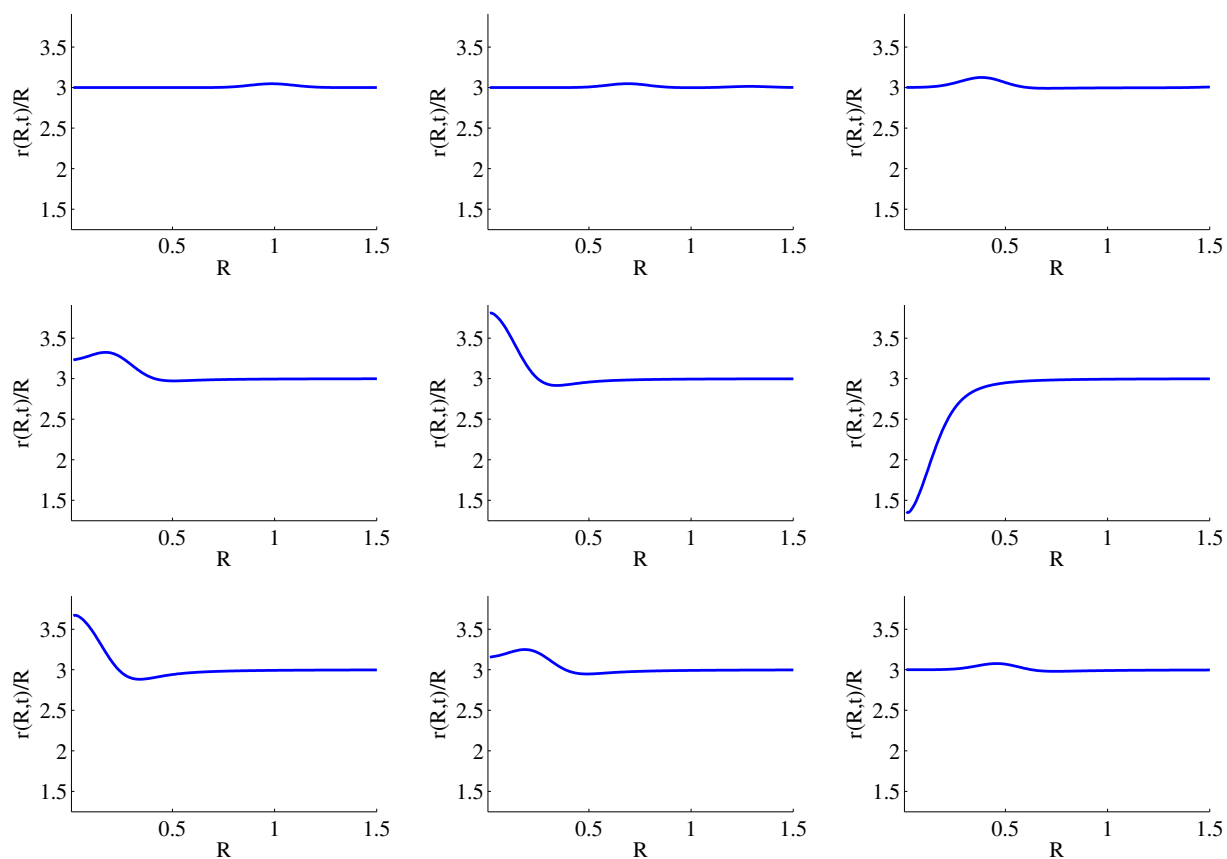


Figura 4.5: Gráficos de  $r(R,t)$  com as condições iniciais definidas por  $A = 0.1$ ,  $D = 1.0$  e  $\lambda = 9$ . A ordem temporal é da esquerda para a direita e de cima para baixo, as imagens foram tomados em intervalos de tempo aproximadamente iguais a  $0.2s$ .

# Capítulo 5

## Coordenadas da Frente de Onda

Tomando como inspiração a Seção 3.1, definimos um sistema de coordenadas que segue as curvas características que cobrem o domínio de dependência. Tais curvas são definidas pelas equações (3.6). Definimos o que chamamos de sistema de coordenadas da frente de onda pelo seguinte sistema,

$$\partial_\xi R(\xi, \eta) = V(\xi, \eta)\partial_\xi t \quad \text{e} \quad \partial_\eta R(\xi, \eta) = -V(\xi, \eta)\partial_\eta t, \quad (5.1)$$

ou equivalentemente,

$$\partial_t \xi = V(\xi, \eta)\partial_R \xi \quad \text{e} \quad \partial_t \eta = -V(\xi, \eta)\partial_R \eta, \quad (5.2)$$

onde

$$V = \sqrt{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varepsilon_1^2}} \quad \text{e} \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial r}{\partial R}.$$

Esse sistema de coordenadas está bem definido quando  $V(\xi, \eta) > 0$ , que é garantido diretamente pela condição (2.27) para  $\Psi$  definida pelas equações (2.28). Usando a regra da cadeia, junto com as equações (5.1), temos que

$$\partial_R = \partial_R \xi \partial_\xi + \partial_R \eta \partial_\eta \quad \text{e} \quad \partial_t = V \partial_R \xi \partial_\xi - V \partial_R \eta \partial_\eta,$$

que implicam em,

$$\partial_t \xi = \frac{1}{2\partial_\xi t}, \quad \partial_t \eta = \frac{1}{2\partial_\eta t}, \quad \partial_R \xi = \frac{1}{2\partial_\xi R} \quad \text{e} \quad \partial_R \eta = \frac{1}{2\partial_\eta R}. \quad (5.3)$$



Utilizamos o sistema de coordenadas determinado pelas equações (5.1) para descrever a dinâmica da EDP (3.1), a qual após substituir  $\lambda_1 = \varepsilon_1^2$  e  $\lambda_2 = \varepsilon_2^2$  é reescrita por

$$R^2(\partial_t^2 - V^2\partial_R^2)r = 2R\partial_{\varepsilon_1}\Psi + R^2(\partial_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Psi\partial_R\varepsilon_2) - 2\partial_{\varepsilon_2}\Psi R. \quad (5.4)$$

Devemos ser cautelosos e usar as equações (2.28) para calcular  $\partial_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Psi$  e  $\partial_{\varepsilon_2}\Psi$ , onde a equação para  $\partial_{\lambda_1}\Psi$  deve ser usada para calcular a  $\partial_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Psi$ . As equações abaixo serão utilizadas para realizar a mudança de coordenadas e são calculadas pelo uso da regra de cadeia junto com as equações (5.1),

$$\begin{aligned} \partial_t r &= V(\partial_{\xi}r \partial_R \xi - \partial_{\eta}r \partial_R \eta), \quad \partial_R r = \partial_{\xi}r \partial_R \xi + \partial_{\eta}r \partial_R \eta, \\ \partial_t^2 r &= V^2 \partial_{\xi}^2 r \partial_R \xi^2 + \partial_{\xi}r (2V \partial_{\xi} V \partial_R \xi^2 + V^2 \partial_R^2 \xi) - 2V^2 \partial_{\xi\eta}r \partial_R \xi \partial_R \eta \\ &\quad + \partial_{\eta}r (2V \partial_{\eta} V \partial_R \eta^2 + V^2 \partial_R^2 \eta) + V^2 \partial_{\eta}^2 r \partial_R \eta^2, \\ \partial_R^2 r &= \partial_{\xi}^2 r \partial_R \xi^2 + \partial_{\xi}r \partial_R^2 \xi + 2\partial_{\xi\eta}r \partial_R \xi \partial_R \eta + \partial_{\eta}^2 r \partial_R \eta^2 + \partial_{\eta}r \partial_R^2 \eta. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ao substituir as equações acima na EDP (5.4), obtemos

$$\partial_{\xi}r (2V \partial_{\xi} V \partial_R \xi^2) - 4V^2 \partial_{\xi\eta}r \partial_R \xi \partial_R \eta + \partial_{\eta}r (2V \partial_{\eta} V \partial_R \eta^2) = 2 \frac{\partial_{\varepsilon_1}\Psi}{R} + \partial_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Psi \partial_R \varepsilon_2 - 2 \frac{\partial_{\varepsilon_2}\Psi}{R},$$

que, após substituir as equações (5.5) e (5.3), e alguma manipulação algébrica, resulta em

$$\begin{aligned} \partial_{\xi\eta}\varepsilon_2 &= 2\left(\frac{\partial_{\varepsilon_2}\Psi}{V^2} - \frac{\partial_{\varepsilon_1}\Psi}{V^2}\right)\partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta} \ln R + \partial_{\eta} \ln R \partial_{\xi}\varepsilon_2 \left(\frac{\partial_{\xi} \ln V}{2\partial_{\xi} \ln R} - 1 - \frac{\partial_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Psi}{2V^2}\right) \\ &\quad + \partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta}\varepsilon_2 \left(\frac{\partial_{\eta} \ln V}{2\partial_{\eta} \ln R} - 1 - \frac{\partial_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\Psi}{2V^2}\right), \end{aligned}$$

onde

$$\partial_{\xi} \ln R = \frac{\partial_{\xi}R}{R}, \quad \partial_{\eta} \ln R = \frac{\partial_{\eta}R}{R}, \quad \partial_{\xi} \ln V = \frac{\partial_{\xi}V}{V} \quad \text{e} \quad \partial_{\eta} \ln V = \frac{\partial_{\eta}V}{V}$$

para que não haja confusão sobre o significado de um logaritmo de um quantia não adimensional, por exemplo,  $\ln(5\text{metros})$ . Integrando ambos os lados em  $\xi$  e  $\eta$

chegamos em

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 \Big|_{\eta_0}^{\eta} \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \int \left[ 2\partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta} \ln R \left( \frac{\partial_{\varepsilon_2} \Psi}{V^2} - \frac{\partial_{\varepsilon_1} \Psi}{V^2} \right) + \partial_{\eta} \ln R \partial_{\xi} \varepsilon_2 \left( \frac{\partial_{\xi} \ln V}{2\partial_{\xi} \ln R} - 1 - \frac{\partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi}{2V^2} \right) \right. \\ \left. + \partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta} \varepsilon_2 \left( \frac{\partial_{\eta} \ln V}{2\partial_{\eta} \ln R} - 1 - \frac{\partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi}{2V^2} \right) \right] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Observe que em nenhum lugar dentro da integral acima aparece uma derivada de  $\varepsilon_2$  de ordem maior que um. As derivadas de  $\Psi$  são deduzidas a partir do modelo de material apresentado na Seção 2.4, equações (2.28), e por conveniência são dadas a seguir,

$$\begin{aligned} V^2 = \partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} \Psi &= 2(\kappa + 2\nu(3\varepsilon_1^2 - \lambda) + 2\zeta(\varepsilon_2^2 - \lambda)), \\ \partial_{\varepsilon_1} \Psi &= 2\varepsilon_1(\kappa + 2\nu(\varepsilon_1^2 - \lambda) + 2\zeta(\varepsilon_2^2 - \lambda)), \\ \partial_{\varepsilon_2} \Psi &= 2\varepsilon_2(\kappa + 2\nu(\varepsilon_2^2 - \lambda) + \zeta((\varepsilon_2^2 - \lambda) + (\varepsilon_1^2 - \lambda))), \\ \partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi &= 8\zeta\varepsilon_1\varepsilon_2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para acompanhar a evolução de  $R$  e  $t$ , integramos as equações (5.1)

$$\begin{aligned} R(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta) &= R(\xi, \eta + \Delta\eta) + \int_{\xi}^{\xi + \Delta\xi} V(\zeta, \eta + \delta\eta) t_{\xi}(\zeta, \eta + \delta\eta) d\zeta, \text{ e} \\ R(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta) &= R(\xi + \Delta\xi, \eta) - \int_{\eta}^{\eta + \Delta\eta} V(\xi + \Delta\xi, \alpha) t_{\eta}(\xi + \Delta\xi, \alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Supondo que conhecemos  $V$  e as coordenadas  $(R, t)$  nos pontos  $(\xi, \eta)$ ,  $(\xi + \Delta\xi, \eta)$  e  $(\xi, \eta + \Delta\eta)$ , então podemos interpolar as funções envolvidas, integrar e em seguida resolver este sistema discreto para  $t(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$  e  $R(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$ . Para o modelo não linear os valores  $\varepsilon_2(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$  e  $R(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$ , ou  $\varepsilon_2(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$  e  $t(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta)$  serão definidos implicitamente.

Para determinar completamente a mudança de coordenadas, condições iniciais precisam ser especificadas para  $R$  e  $t$  em termos de  $\xi$  e  $\eta$ . Vamos trabalhar com as condições iniciais  $\varepsilon_2(\cdot, 0)$  e  $\partial_t \varepsilon_2(\cdot, 0)$ , por isso, é útil especificar as condições iniciais  $\xi(R, 0)$  e  $\eta(R, 0)$ , em vez de especificar condições iniciais para  $R$  e  $t$ . Duas opções interessantes são  $(\xi(R, 0), \eta(R, 0)) = (R, -R)$ , uma escolha simples, e

$$\xi(R, 0) = \int_0^R V(P, 0) dP = -\eta(R, 0)$$

o qual é útil porque o menor o  $V(R, 0)$  o mais esparsa a malha  $\xi$  e  $\eta$  fica no plano  $R \times t$ , veja as equações (5.8). Entre as muitas possíveis escolhas para  $\xi(R, 0)$  e  $\eta(R, 0)$ , argumentamos que uma boa restrição é  $\xi(R, 0) = -\eta(R, 0)$ . Assim, a posição de  $R = 0$  no sistema de coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  será definido por  $\xi = \eta$ . Isso é, uma vez definida a relação entre  $\xi, \eta$  e  $R, t$ , podemos determinar onde conjuntos em  $R \times t$  estão localizados em  $\xi \times \eta$ . De fato, assumamos que conhecemos campo de velocidade  $V$ . Vamos examinar como  $\xi$  e  $\eta$  alteram ao longo de  $R = 0$ . Para tanto, note que ao longo da curva definida por  $\dot{X} = V(X(t), t)$ ,  $\xi$  é constante, assim, a partir de qualquer ponto  $(0, t_1)$  podemos traçar uma curva até atingir a linha  $t = 0$ , por exemplo no ponto  $(R_1, 0)$ , onde  $\xi(R_1, 0) = \xi(0, t_1)$  e, portanto,  $\xi(0, t_1) = \xi(R_1, 0) = -\eta(R_1, 0)$ . Repetindo esse procedimento para  $\eta$  seguimos a partir do ponto  $(0, t_1)$  a curva definida por  $\dot{X} = -V(X(t), t)$ , ao longo da qual  $\eta$  é constante, até atingir a linha  $t = 0$ . Através da simetria, sabemos que para todo  $(-R, t)$  ao longo dessa curva  $\varepsilon_2(-R, t) = \varepsilon_2(R, t)$ , logo  $V(\varepsilon_1(-R, t), \varepsilon_2(-R, t)) = V(\varepsilon_1(R, t), \varepsilon_2(R, t))$ , disso concluímos que a curva irá acertar o ponto  $(-R_1, 0)$  onde  $\eta(-R_1, 0) = -\eta(R_1, 0) = \xi(R_1, 0)$ , ou seja,  $\eta = \xi$  na linha  $R = 0$ .

Uma questão importante é: como o sistema (5.6) propaga choques? Como  $\varepsilon_2$  é pelo menos contínua, para responder essa pergunta devemos derivar a equação (5.6) em  $\xi$  ou  $\eta$ . Só as primeiras derivadas de  $\varepsilon_2$  aparecerão no integrando resultante, de onde concluímos que choques fracos somente serão propagadas ao longo das características, com velocidade  $\pm V$ . Foi demonstrado que essa é a velocidade de propagação correta para choques fracos (equação (2.25), p. 16), e para materiais linearizados (equação (3.21), p. 28). Todas as condições de choques são satisfeitas, porém, lembre-se que essas condições não estabelecem uma forma única de propagar choques e, portanto, alguma espécie de arbitrariedade foi incluída.

## 5.1 Material Linear

O esquema numérico para o material linear é importante por vários motivos. O mais importante deles é baseado no fato que a solução do material linear oscila freneticamente próximo à origem  $R = 0$ , e esperamos o mesmo da solução do modelo não-linear. Para capturar esse comportamento corretamente, podemos usar um esquema numérico da solução linear como uma estimativa inicial para o

esquema não-linear. Para validar a esquema linear comparamos o com a solução analítica. Usando uma linearização geral para o modelo material, definida pela equação (3.7) na Página 22, obtemos

$$\varepsilon_2 \Big|_{\eta_0}^{\eta} \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \int \left[ 2\partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta} \ln R \left( \frac{\partial_{\varepsilon_2} \Psi}{V^2} - \frac{\partial_{\varepsilon_1} \Psi}{V^2} \right) - \partial_{\eta} \ln R \partial_{\xi} \varepsilon_2 - \partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta} \varepsilon_2 \right] d\xi d\eta.$$

Usando (5.1) e (5.3), podemos substituir  $\varepsilon_1 = \partial_R r = \varepsilon_2 + R(\partial_{\xi} \varepsilon_2 / (2\partial_{\xi} R) + \partial_{\eta} \varepsilon_2 / (2\partial_{\eta} R))$ , e usando o model material linear (3.7) temos que  $\partial_{\varepsilon_2} \Psi = \varepsilon_2 W^2$  e  $\partial_{\varepsilon_1} \Psi = \varepsilon_1 V^2$ , usando essas substituições a equação acima é reduzida a

$$\varepsilon_2 \Big|_{\eta_0}^{\eta} \Big|_{\xi_0}^{\xi} = \int \left[ 2\partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta} \ln R \varepsilon_2 \left( \frac{W^2}{V^2} - 1 \right) - 2\partial_{\eta} \ln R \partial_{\xi} \varepsilon_2 - 2\partial_{\xi} \ln R \partial_{\eta} \varepsilon_2 \right] d\xi d\eta.$$

Note que, se utilizamos a solução do material linearizado para ajudar a alcançar uma solução para o sistema não-linear, devemos esperar que para cada passo, pelo menos localmente a solução não-linear, em certo sentido, seja uma perturbação do caso linear.

## 5.2 Esquema Numérico

Para acompanhar a evolução de  $R$  e  $t$ , considere  $R(\xi + \Delta\xi, \eta + \Delta\eta) = R_{i+1}^{n+1}$ ,  $R(\xi + \Delta\xi, \eta) = R_i^{n+1}$ ,  $R(\xi, \eta + \Delta\eta) = R_{i+1}^n$  e  $R(\xi, \eta) = R_i^n$ . Discretizando as equações (5.8) obtemos

$$\begin{aligned} R_{i+1}^{n+1} &= R_{i+1}^n + (V_{i+1}^{n+1}/2 + V_{i+1}^n/2)(t_{i+1}^{n+1} - t_{i+1}^n), \\ R_{i+1}^{n+1} &= R_i^{n+1} - (V_{i+1}^{n+1}/2 + V_i^{n+1}/2)(t_{i+1}^{n+1} - t_i^{n+1}). \end{aligned}$$

Resolvendo para  $R_{i+1}^{n+1}$  e  $t_{i+1}^{n+1}$  resulta em

$$t_{i+1}^{n+1} = \frac{-2R_{i+1}^n + 2R_i^{n+1} + t_{i+1}^n V_{i+1}^n + t_i^{n+1} V_i^{n+1} + (t_{i+1}^n + t_i^{n+1}) V_{i+1}^{n+1}}{V_{i+1}^n + V_i^{n+1} + 2V_{i+1}^{n+1}}, \quad (5.9)$$

$$R_{i+1}^{n+1} = \frac{2R_i^{n+1}(V_{i+1}^n + V_{i+1}^{n+1}) + 2R_{i+1}^n(V_i^{n+1} + V_{i+1}^{n+1}) - (t_{i+1}^n - t_i^{n+1})(V_i^{n+1} + V_{i+1}^{n+1})(V_{i+1}^n + V_{i+1}^{n+1})}{2(V_{i+1}^n + V_i^{n+1} + 2V_{i+1}^{n+1})}. \quad (5.10)$$

Para o modelo linearizado  $V$  é constante, logo essas esquemas para  $R_{i+1}^{n+1}$  e  $t_{i+1}^{n+1}$  seriam explícitos. No caso não-linear  $V_{i+1}^{n+1}$  dependerá de  $R_{i+1}^{n+1}$  e  $\varepsilon_{2i+1}^{n+1}$ .

Para propagar numericamente  $\varepsilon_2$ , de forma que imite a suavização da integração, e assim assegurar que choques se propaguem ao longo das características, equacionamos a integral na equação (5.9) à sua média discreta. Além disso, sabemos da Seção (4) que o modelo linearizado apresenta uma oscilação brusca próximo à origem, para captar essa oscilação projetamos a esquema para  $\varepsilon_2$  de forma que seja uma esquema explícito para o modelo linearizado e implícita quando o material for não-linear.

Existem no entanto alguns fatores que devemos levar em consideração, todos os termos dentro da integral, na equação (5.6), que tem  $1/R$  precisam ser ajustados quando  $R \rightarrow 0$ , caso contrário, uma grande instabilidade numérica aparece perto da origem. Para ajustar esses termos, vamos multiplicá-los por  $R/(R + \delta R)$ , onde  $\delta R$  é comparativamente muito pequeno em relação a escala que queremos investigar. Se expandirmos os termos  $\partial_\xi \ln R$  e  $\partial_\eta \ln R$ , e depois multiplicamos por  $R/(R + \delta R)$ , isso equivale a substituir todo  $1/R$  por  $1/(R + \delta R)$ . Para tanto, substituímos no integrando da equação (5.6)

$$\begin{aligned}
\partial_\xi R &\leftarrow (R_{1+i}^{1+n} - R_{1+i}^n)/2 + (R_i^{1+n} - R_i^n)/2 = \Delta_\xi R, \\
\partial_\eta R &\leftarrow (R_{1+i}^{1+n} - R_i^{1+n})/2 + (R_{1+i}^n - R_i^n)/2 = \Delta_\eta R, \\
\partial_\xi \varepsilon_2 &\leftarrow (\varepsilon_{21+i}^{1+n} - \varepsilon_{21+i}^n)/2 + (\varepsilon_{2i}^{1+n} - \varepsilon_{2i}^n)/2 = \Delta_\xi \varepsilon_2, \\
\partial_\eta \varepsilon_2 &\leftarrow (\varepsilon_{21+i}^{1+n} - \varepsilon_{2i}^{1+n})/2 + (\varepsilon_{21+i}^n - \varepsilon_{2i}^n)/2 = \Delta_\eta \varepsilon_2, \\
\partial_\xi V &\leftarrow (V_{1+i}^{1+n} - V_{1+i}^n)/2 + (V_i^{1+n} - V_i^n)/2 = \Delta_\xi V, \\
\partial_\eta V &\leftarrow (V_{1+i}^{1+n} - V_i^{1+n})/2 + (V_{1+i}^n - V_i^n)/2 = \Delta_\eta V, \\
V &\leftarrow (V_{1+i}^{1+n} + V_{1+i}^n + V_i^{1+n} + V_i^n)/4 = V_m, \\
\partial_{\varepsilon_1} \Psi &\leftarrow (2\varepsilon_{11+i}^{1+n} \partial_{\lambda_1} \Psi_{1+i}^{1+n} + 2\varepsilon_{11+i}^n \partial_{\lambda_1} \Psi_{1+i}^n + 2\varepsilon_{1i}^{1+n} \partial_{\lambda_1} \Psi_i^{1+n} + 2\varepsilon_{1i}^n \partial_{\lambda_1} \Psi_i^n)/4, \\
\partial_{\varepsilon_2} \Psi &\leftarrow (2\varepsilon_{21+i}^{1+n} \partial_{\lambda_2} \Psi_{1+i}^{1+n} + 2\varepsilon_{21+i}^n \partial_{\lambda_2} \Psi_{1+i}^n + 2\varepsilon_{2i}^{1+n} \partial_{\lambda_2} \Psi_i^{1+n} + 2\varepsilon_{2i}^n \partial_{\lambda_2} \Psi_i^n)/4, \\
\partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi &\leftarrow (\partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi_{1+i}^{1+n} + \partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi_{1+i}^n + \partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi_i^{1+n} + \partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi_i^n)/4, \\
1/R &\leftarrow 4/(R_{1+i}^{1+n} + R_{1+i}^n + R_i^{1+n} + R_i^n + \delta R) = 1/\bar{R}.
\end{aligned}$$

Para o modelo linearizado  $\partial_{\lambda_1} \Psi$ ,  $\partial_{\lambda_2} \Psi$  e  $\partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi$  são constantes (veja a equação (3.7)), assim, após substituir as equações no integrando de (5.6), a equação resultante será linear em  $\varepsilon_{2i+1}^{n+1}$ . Logo, podemos resolver essa equação discreta para  $\varepsilon_2$  e

obter um esquema explícito para o model linearizado,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2_{1+i}}^{n+1} = & \varepsilon_{2_i}^n + (\varepsilon_{2_{1+i}}^n - \varepsilon_{2_i}^n) + (\varepsilon_{2_i}^{1+n} - \varepsilon_{2_i}^n) \\ & \left( [-\Delta_\eta R(2 \Delta_\xi R \mathcal{D}_V + \bar{R}(\bar{R} L_\xi - \mathcal{V})) - \Delta_\xi R \bar{R}(\bar{R} L_\eta - \mathcal{V})] \varepsilon_{2_i}^n \right. \\ & + [-\Delta_\eta R(2 \Delta_\xi R \mathcal{D}_V + \bar{R}(\bar{R} L_\xi - \mathcal{V})) + \Delta_\xi R \bar{R}(\bar{R} L_\eta - \mathcal{V})] \varepsilon_{2_{i+1}}^n \\ & \left. + [-\Delta_\eta R(2 \Delta_\xi R \mathcal{D}_V - \bar{R}(\bar{R} L_\xi - \mathcal{V})) - \Delta_\xi R \bar{R}(\bar{R} L_\eta - \mathcal{V})] \varepsilon_{2_i}^{n+1} \right) / \\ & [\Delta_\eta R(2 \Delta_\xi R \mathcal{D}_V - \bar{R}(\bar{R} L_\xi - \mathcal{V})) + \bar{R}(-\Delta_\xi R(\bar{R} L_\eta - \mathcal{V}) + 2 \bar{R} V^2)], \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_V &= \partial_{\lambda_1} \Psi - \partial_{\lambda_2} \Psi, \quad \mathcal{V} = 2\partial_{\lambda_1} \Psi + V^2 + \frac{\partial_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \Psi}{2}, \\ \Delta_\xi V^2 &= (V_{1+i}^{2^{1+n}} - V_{1+i}^{2^n})/2 + (V_i^{2^{1+n}} - V_i^{2^n})/2, \\ \Delta_\eta V^2 &= (V_{1+i}^{2^{1+n}} - V_i^{2^{1+n}})/2 + (V_{1+i}^{2^n} - V_i^{2^n})/2, \\ L_\xi &= \frac{\Delta_\xi V^2}{8\Delta_\xi R}, \quad L_\eta = \frac{\Delta_\eta V^2}{8\Delta_\eta R}. \end{aligned}$$

Para o model não-linear esse esquema é implícito. Para o sistema não-linear utilizamos a solução linear como uma estimativa inicial. Isso ajuda a captar a oscilação frenética que a solução linear e não linear sofrem perto da origem.

Para um material linearizado em torno do estado de equilíbrio, onde  $\nu = \zeta = 0$  nas equações (5.7) ou, equivalentemente  $W = V$  na equação (3.7), temos que  $\mathcal{D}_V = L_\xi = L_\eta = 0$  e  $\mathcal{V} = 2V^2$ . A seguir, apresentamos alguns resultados de simulações para este material com as condições iniciais que foram apresentadas na seção sobre fenômenos analíticos e condições iniciais.

### Simulação Linear Longe da Origem

As condições iniciais utilizadas são  $n = 5$ ,  $A = 0.1$ ,  $D = 1$ ,  $\lambda = 9$  e  $V = 1$ , lembrando que nem  $\lambda$  ou  $V$  são aspectos importantes da dinâmica linear. As condições iniciais para o sistema de coordenadas são  $\xi(R, 0) = R$  e  $\eta(R, 0) = -R$ . Uma malha uniforme foi utilizada com  $\Delta\xi = \Delta\eta = 0,002$  e  $1400 \times 1400$  pontos. O resultado pode ser visto na Figura 5.1 do espaço  $\times$  tempo abaixo, que usa cores para indicar o deslocamento. À medida que a frente de onda se move em direção à origem, a energia se concentra, consequentemente aumentando a amplitude

da onda. No entanto, pouco antes de chegar a  $R = 0$ , a solução  $r$  rapidamente tende a zero, por que o centro do corpo não se desloca. Todavia, note a rápida oscilação próxima à origem. Veja a Figura 5.2 da evolução de  $\varepsilon_2$ .

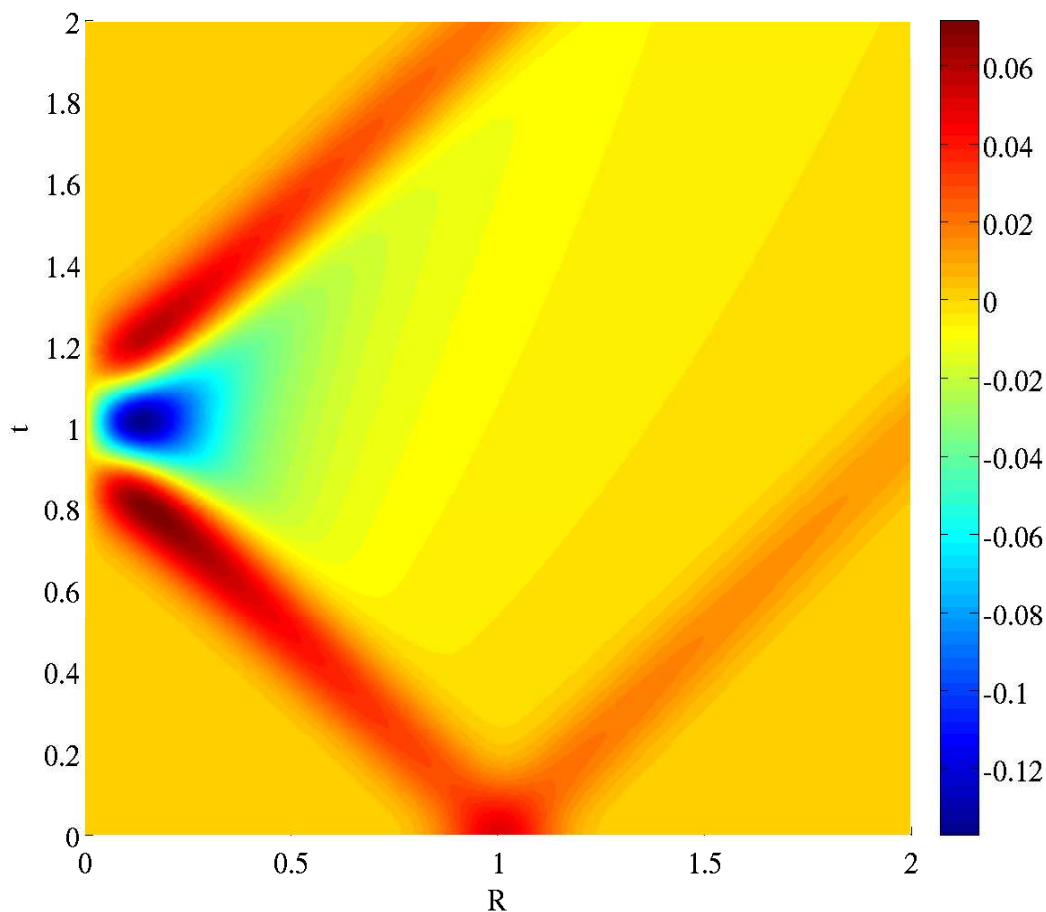


Figura 5.1: Representa o deslocamento  $r(R, t) - \lambda^{1/2}R$ . As cores com menor frequência, ou seja, mais próximo do vermelho, representam um deslocamento positivo e as cores com maior frequência, um deslocamento negativo.

Para validar esse esquema numérico, comparamos com um cálculo numérico da solução analítica (3.16), veja a Figura 5.3, onde a máxima diferença em módulo entre essas duas soluções foi aproximadamente 0.004 ou cerca de 6% de sua amplitude. O erro da onda resultante que sai da origem foi 0,002 ou 3% de sua amplitude. Para ver quanto tempo dura cada fenômeno, veja a Figura 5.1 do espaço  $\times$  tempo.

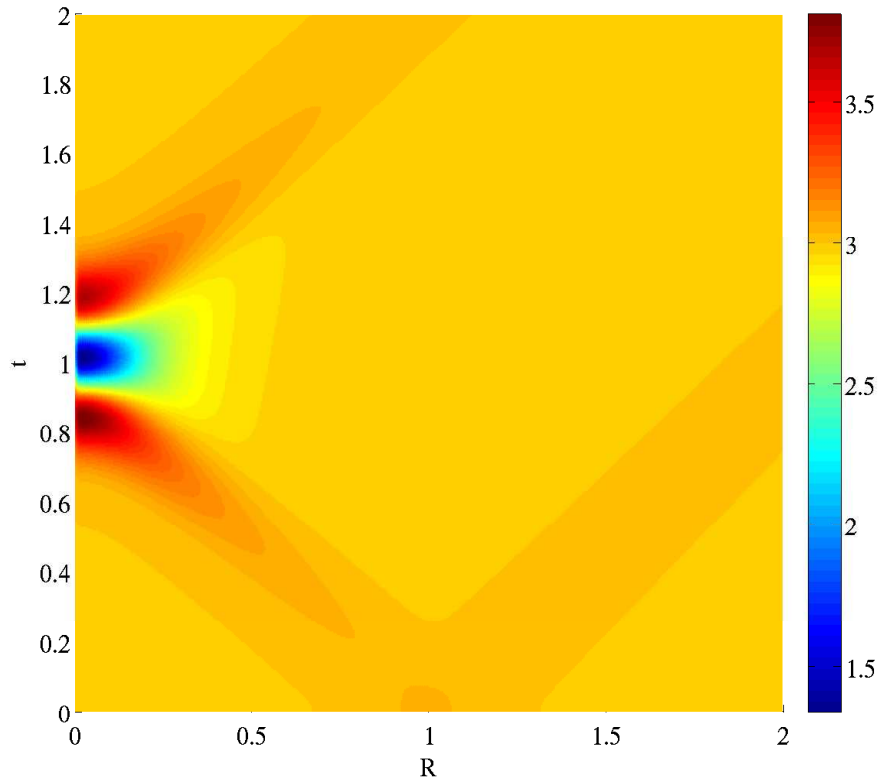


Figura 5.2: Um gráfico de  $r(R, t)/R$ . As cores com menor frequência, ou seja, mais próximo do vermelho, representam valores superiores a  $\lambda^{1/2} = 3$  enquanto as cores com maior frequência representam valores menores que  $\lambda^{1/2}$ . Na Seção 2.1 vimos que o valor  $r/R$  corresponde a estiramento local na direção radial.

### Simulação Linear Próxima da Origem

As condições iniciais utilizadas são  $n = 5$ ,  $A = 0.6$ ,  $D = 1$ ,  $\lambda = 9$  e  $V = 1$ . As condições iniciais para o sistema de coordenadas são  $\xi(R, 0) = R$  e  $\eta(R, 0) = -R$ . Uma malha uniforme foi utilizada com  $\Delta\xi = \Delta\eta = 0,002$  e  $1000 \times 1000$  pontos. O resultado pode ser visto na Figura 5.4 abaixo que representa a evolução de  $\varepsilon_2$ , onde as linhas pretas indicam as curvas características. Para validar esse esquema numérico comparamos com um cálculo numérico da solução analítica (3.16), veja a Figura 5.5, onde a máxima diferença em módulo entre essas duas soluções foi aproximadamente 0.004 ou cerca de 12% de sua amplitude. O erro da onda resultante que sai da origem foi 0,002 ou 6% de sua amplitude. Para ver por quanto tempo dura cada fenômeno, veja a Figura 5.4.



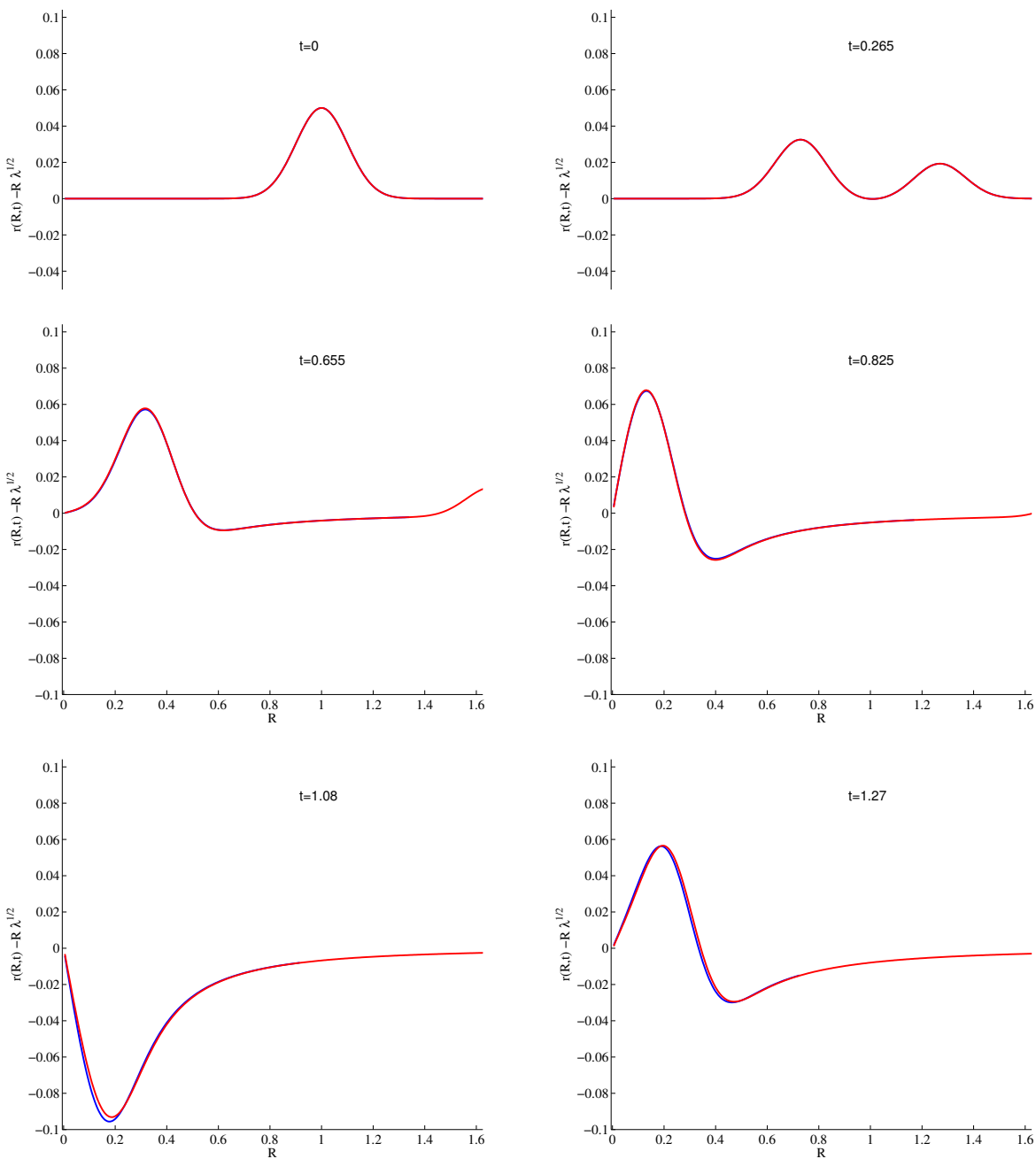


Figura 5.3: Gráfico de  $r(R,t) - \lambda^{2/1}R$ . A linha vermelha é a solução analítica, enquanto a linha azul é a solução calculada pelo sistema numérico. A ordem temporal dos gráficos é da esquerda para a direita e depois de cima para baixo.

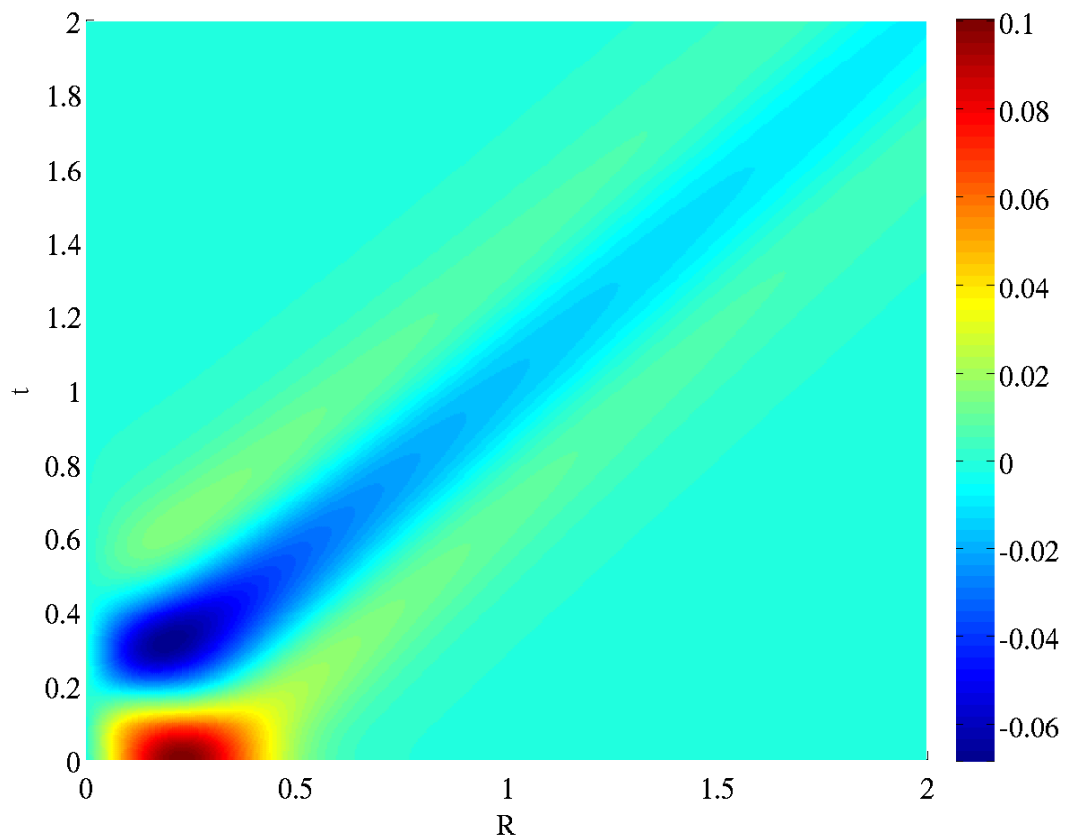


Figura 5.4: Representa o deslocamento  $r(R, t) - \lambda^{1/2}R$ . As cores com menor frequência, ou seja, mais próximo do vermelho, possuem um deslocamento positivo e as cores com maior frequência, um deslocamento negativo.

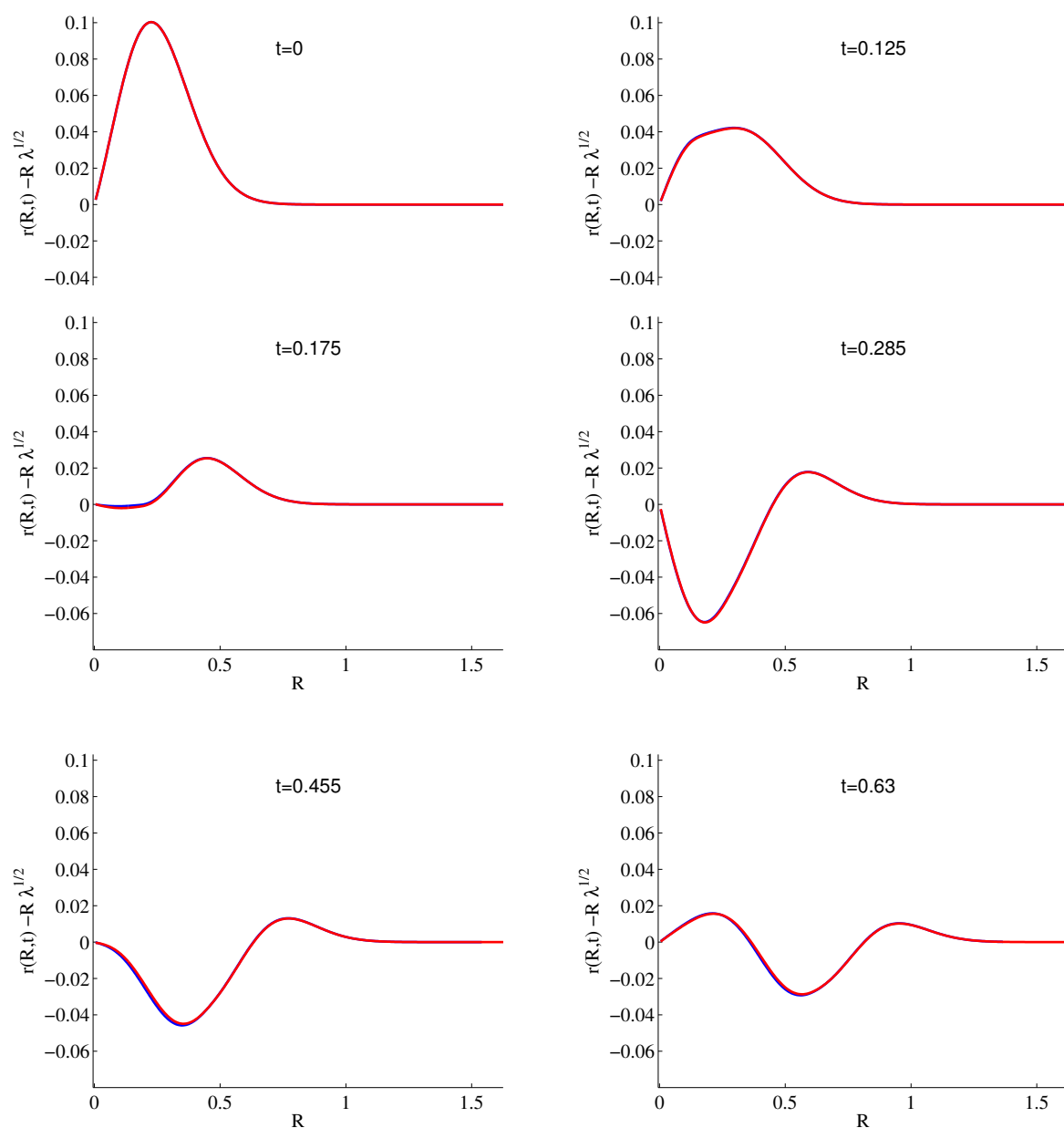


Figura 5.5: Gráfico de  $r(R,t) - \lambda^{2/1}R$ . A linha vermelha é a solução analítica, enquanto a linha azul é a solução calculada pelo sistema numérico. A ordem temporal dos gráficos é da esquerda para a direita e depois de cima para baixo.

# Capítulo 6

## Conclusão

As principais contribuições deste trabalho foram:

- Apresentamos uma dedução sucinta da equação integral válida para ondas em materiais termoelásticos;
- Resumimos as condições de descontinuidade para este contexto e para o caso geral descrito no Apêndice B.
- Encontramos, para um material linearizado, uma família de soluções e mostramos que essas soluções propagam choques corretamente de acordo com as condições de descontinuidade.
- Para a solução advinda da linearização ao redor do estado de equilíbrio (fisicamente mais interessante) demonstramos que pregas espaciais não podem propagar para a origem. Este é um resultado crucial se quisermos simular a dinâmica do modelo próxima ao centro do corpo.
- Propomos um esquema numérico que foi arquitetado para capturar e imitar todas as propriedades físicas e matemáticas discutidas durante o trabalho. Para o caso particular da linearização ao redor do estado de equilíbrio, o esquema apresentou resultados promissores.

Uma proposta para trabalhos futuros seria finalizar a implementação do esquema numérico não-linear, uma vez que testes preliminares demonstraram que os resultados parecem ser fisicamente viáveis. Um aspecto importante que não foi concluído neste trabalho, é a obtenção de um conjunto de condições suficientes para garantir a unicidade da solução na presença de descontinuidades

das derivadas. Isso seria uma peça importante do quebra-cabeça e pode ser feita analisando as soluções com “vanishing viscosity” levando em consideração condições de entropia, como pode ser encontrado em [4].

# Apêndice A

## Pressupostos da Elasticidade

Este apêndice resume brevemente os pressupostos que são específicos para a teoria elástica. A partir daí, esperamos que o leitor possa perceber qual tipo de aproximação idealizada é descrita pela teoria da elasticidade. Este apêndice é um mere esboço de teoria constitutiva elástica, com o objetivo principal de concluir as equações A.7. Um tratamento mais completo do assunto, que use a mesma notação empregado abaixo, pode ser encontrada no Capítulo 3, *Constitutive Theory*, do [7]. Um tratamento extensivo do assunto se encontra em [12].

O objetivo deste apêndice é determinar a energia livre  $\Psi$ , o tensor de tensão interna  $\sigma$  e o vetor fluxo de calor  $q$ , em termos do movimento  $\phi$  e a temperatura  $\Theta$ . Para definir esses tensores precisamos do seguinte: seja  $G$  e  $g$  as métricas Riemannianas respectivamente para o corpo da referência  $\mathcal{B}$  e no corpo atual  $\mathcal{S}$ , que são definidos por

$$g_{ab} = \langle \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b \rangle, \quad G_{AB} = \langle \mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B \rangle,$$

onde os vetores  $\mathbf{e}_a, \mathbf{E}_A$  formam a base do sistema de coordenadas do corpo atual e do corpo de referência. Assim podemos definir:  $h = - \langle q, n \rangle$  como a densidade do fluxo de calor através do superfície com normal unitário  $n$  e  $\sigma : n = \mathbf{e}_a \sigma^{ab} n^c g_{bc}$  como a tensão interna exercida no superfície com normal unitário  $n$ . A razão pelo qual podemos representar  $h$  por  $- \langle q, n \rangle$  e a força interna por  $\sigma : n$  para qualquer superfície e vetor normal  $n$  é devido o Teorema de Cauchy (veja o Teorema 2.2 p.134 de [7]). Para continuar precisamos de funções constitutivas, como a função constitutiva  $\hat{\Psi}$  que recebe um movimento  $\phi$  e um campo de temperatura  $\Theta$  e retorna uma função para a energia interna livre  $\Psi$ . Abaixo

definiremos informalmente tal função constitutiva.

**Definição A.1.** *Uma função constitutiva para termoelasticidade*

$$\hat{\Psi} : (\phi, \Theta) \mapsto \Psi$$

é chamado de local e independe da história se, para qualquer conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  e quaisquer dois movimentos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  e campos de temperatura  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  tais que  $\phi_1(X, t) = \phi_2(X, t)$  e  $\Theta_1(X, t) = \Theta_2(X, t)$  para todo  $X \in \mathcal{U}$ , então  $\hat{\Psi}(\phi_1, \Theta_1)$  e  $\hat{\Psi}(\phi_2, \Theta_2)$  concordam em  $\mathcal{U}$ .

Todas as função constitutivas são definidas analogamente, ou seja para uma função qualquer  $f$ ,  $\hat{f} : (\phi, \Theta) \mapsto f$ . A idéia de usar a localidade como um postulado básico é devido a Noll [2]. No entanto, é conveniente salientar que isso não nos impede de impor restrições não-locais, tais como a incompressibilidade.

**Exemplo 1.** *Operador não-local:*

$$f : C^0[0, 1] \mapsto C^0[0, 1] \text{ onde } f(\phi)(x) = \int_0^x \phi(s) ds.$$

As funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  podem concordar em uma bola na vizinhança de  $x$ , porém  $f(\phi_1)(x)$  não é igual a  $f(\phi_2)(x)$  nesta mesma bola.

## Suposições

**Axioma A.1** (Axioma da Localidade). *Funções constitutivas para termoelasticidade são consideradas locais.*

**Axioma A.2** (Axioma da Independência da História). *Funções constitutivas para termoelasticidade não dependem de todas as histórias do passado, mas apenas do mapa atual  $\phi(\cdot, t)$  e da distribuição de temperatura  $\Theta(\cdot, t)$ , ambos para  $t$  fixo.*

Essas suposições captam a essência da termoelasticidade, por exemplo, uma consequência<sup>1</sup> do axioma A.2 é que a energia interna-livre  $\Psi$  depende de quanto o material é esticado e não quão rápido esse material está sendo esticado. Independentemente do que aconteceu com o material, ao retornar a sua posição

<sup>1</sup>juntamente com muitos outros axiomas típicos da mecânica do contínuo e leis de equilíbrio físico.

inicial a energia interna livre será a mesma para cada ponto, o que exclui plasticidade.

Usando esses axiomas, podemos relacionar de forma única a energia interna-livre com o tensão interna ao assumir que a desigualdade de produção de entropia é válida para todos os possíveis movimentos regulares e configurações de temperatura, que é a conclusão da Teorema A.1. Para tanto, precisamos definir o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff do primeiro tipo  $\mathbf{P}$  e o fluxo de calor no corpo de referência  $\mathbf{Q}$  da seguinte maneira

$$P^{aA} = J(D\phi^{-1})_b^A \sigma^{ab}, \quad Q^A = J(D\phi^{-1})_a^A q^a,$$

onde

$$J(X, t) = \frac{\partial(\phi^x, \phi^y, \phi^z)}{\partial(X, Y, Z)} \frac{\sqrt{\det g_{ab}(x)}}{\sqrt{\det G_{AB}(X)}}.$$

Dizemos que  $\mathbf{P}$  é o resultado de aplicar a transformação de Piola no primeiro indice de  $\sigma$  e  $\mathbf{Q}$  é o resultado de aplicar a transformação de Piola em  $q$ . Um detalhamento maior sobre esta transformação e a relação entre  $\mathbf{P}$  e  $\sigma$  pode ser encontrado na Seção 1.7 do [7].

**Axioma A.3** (Axioma da Produção de Entropia). *Seja as variedades  $\mathcal{B}$  o corpo de referência e  $\mathcal{S}$  o corpo atual, então para qualquer movimento regular  $\phi$  de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{S}$ , configuração de temperatura  $\Theta$ , entropia  $N$ , fluxo de calor  $\mathbf{Q}$ , densidade  $\rho_{Ref}$  no corpo  $\mathcal{B}$  e o tensor de tensão interna do Piola-Kirchhoff do primeiro tipo  $\mathbf{P}$ , as funções constitutivas termoelásticas são assumidas a satisfazer a desigualdade da produção de entropia:*

$$\rho_{Ref} \hat{N} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \rho_{Ref} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} - \hat{P} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{1}{\Theta} \langle \hat{\mathbf{Q}}, \nabla \Theta \rangle \leq 0,$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto interno,  $\mathbf{F} = D\phi(\cdot, t)$ , ou seja, o gradiente de  $\phi$  tomado para  $t$  fixo,  $\hat{f}$  se refere a função constitutiva do  $f$ , para qualquer função  $f$ . A desigualdade acima é válida para qualquer configuração  $\phi$ , campo de temperatura  $\Theta$ , ponto  $X \in \mathcal{B}$  e instante de tempo  $t$ .

**Teorema A.1** (Noll & Coleman [3]). *Suponha os axiomas da localidade e da produção de entropia. Então  $\hat{\Psi}$  depende apenas das variáveis  $X$ ,  $F$  e  $\Theta$ . Além*



disso, temos

$$\hat{N} = -\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \Theta} \text{ e } \hat{P} = \rho_{Ref} \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{F}}, \text{ isto é, } \hat{P}_a^A = \rho_{Ref} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial F_A^a}, \quad (\text{A.1})$$

onde as derivadas são tomadas no sentido de Fréchet, e a desigualdade da produção de entropia se reduz a

$$\langle \mathbf{Q}, \nabla \Theta \rangle \leq 0.$$

**Prova:** [veja o original Gurtin & Nemat-Nasser [11]] ■

Pode ser mostrado<sup>2</sup> que uma função da energia interna isotrópica  $\Psi$  depende somente dos autovalores de  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  e Temperatura  $\Theta$ .

Agora, usando o teorema acima, e sabendo que  $\Psi$  depende de  $\mathbf{C}$  apenas através dos seus autovalores  $\lambda_i$  para  $i = 1, 2$  e  $3$ , podemos relacionar o tensor de tensão de Cauchy  $\sigma$  com o mapa  $\phi(\cdot, t)$  e  $\Psi$ ,

$$\sigma^{ab} = P^{aA} \frac{\partial \phi^b}{\partial X^A} J^{-1} = \rho_{Ref} g^{ab} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial F_A^a} \frac{\partial \phi^b}{\partial X^A} J^{-1} = \rho_{Ref} g^{ab} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial F_A^a} \frac{\partial \phi^b}{\partial X^A} J^{-1}. \quad (\text{A.2})$$

Abaixo usaremos esta equação para o caso específico de coordenadas esféricas.

## Equação Constitutiva em Coordenadas Esféricas

Vamos desenvolver a equação constitutiva para o tensor de tensão de Cauchy  $\sigma$  em coordenadas esféricas, para o corpo de referência e o corpo atual, nos mesmos sistemas de coordenadas usados na seção *Modelagem com simetria radial* p.5. No entanto, para maior clareza, as coordenadas  $(R, \Theta, \Phi)$  serão utilizadas para parametrizar o corpo de referência  $\mathcal{B}$ , ou seja,

$$\phi(R, \Theta, \Phi, t) = (r(R, t), \theta, \varphi),$$

onde  $\Theta = \theta$  e  $\Phi = \varphi$ . Usando a fórmula acima para o Jacobiano  $J$ , concluímos que

$$J(X, t) = \frac{\partial(\phi^r, \phi^\theta, \phi^\varphi)}{\partial(R, \Theta, \Phi)} \frac{\sqrt{\det g_{ab}(x)}}{\sqrt{\det G_{AB}(X)}} = \frac{\partial r}{\partial R} \frac{r^2}{R^2}.$$

---

<sup>2</sup>p.217 de [7].

A densidade  $\rho_{Ref}(X)$  é uma função constante conhecida. As métricas para as coordenadas esféricas são determinadas por

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = (r \sin \varphi)^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \quad (\text{A.3})$$

e de forma semelhante para o sistema de coordenadas do corpo de referência,

$$G_{RR} = 1, \quad G_{\Theta\Theta} = (R \sin \Phi)^2, \quad G_{\Phi\Phi} = R^2. \quad (\text{A.4})$$

Precisamos também do tensor de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ . Em coordenadas, ele é definido por

$$C_{AB} = g_{ab} F_C^a F_B^b G^{AC}, \quad (\text{A.5})$$

onde  $\mathbf{F} = D\phi(\cdot, t)$  o tensor  $G^{AB}$  é o inverso do  $G_{AB}$ , em outras palavras,  $G_{CD}G^{CB} = \delta_C^B$ , que é 1 caso  $C = B$  e 0 caso contrário. Com esses tensores podemos obter o tensor de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ , o que é representado através da seguinte matriz,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (F_R^r)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (F_\Theta^\theta)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (F_\Phi^\varphi)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Apesar de  $F_\Theta^\theta$  e  $F_\Phi^\varphi$  serem a função identidade em nosso contexto, elas foram escritas explicitamente pois a equação constitutiva - a qual relaciona as forças internas  $\sigma$  com a energia interna livre  $\Psi$  - usa a dependência geral que  $\Psi$  possui dos autovalores de  $\mathbf{C}$  neste sistema de coordenadas. Substituindo os autovalores  $\lambda_i$ 's, o Jacobiano  $J$ , a métrica  $g$  e o gradiente do mapa  $\phi$  o tensor  $\mathbf{F}$  na equação (A.2), depois derivando no sentido de Fréchet, avaliada na configuração deste sistema resulta em,

$$\begin{aligned} \sigma^{rr} &= 2\rho_{Ref} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \frac{\partial r}{\partial R} \frac{R^2}{r^2}, \\ \sigma^{\theta\theta} &= 2\rho_{Ref} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^{-1} \frac{1}{\sin^2 \varphi r^2}, \\ \sigma^{\varphi\varphi} &= 2\rho_{Ref} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_3} \left(\frac{\partial r}{\partial R}\right)^{-1} \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

# Apêndice B

## Leis de Equilíbrio

Esta seção apresenta as equações básicas da dinâmica da mecânica do contínuo na forma de Leis de Equilíbrio (“Balance Principals”). Todas essas leis são provenientes de uma equação integral postulada no corpo atual<sup>1</sup> e são traduzidas para o sistema do corpo de referência. Essas leis são usadas para dar uma forma funcional para os tensores de tensão e para adquirir as condições de salto descontínuo. Condições de salto para ondas de choques são apresentados em [4] p.15, as provas aqui encontradas são parecidos com as demonstrações feitas no Box 1.1 *The Transport Theorem and Discontinuous Surfaces* em [7]. As leis de conservação aqui encontradas seguem o estilo de apresentação, e com notação semelhante, do Capítulo 2 em [7].

### B.1 Teorema do Fluxo

Todas as leis de equilíbrio clássico envolvem equacionar uma quantidade extensiva<sup>2</sup> em qualquer domínio com um fluxo através da fronteira. Para tanto, precisaremos dos seguintes teoremas.

**Teorema B.1** (Teorema do Fluxo). *Seja  $f(x, t)$  uma dada função  $C^1$  escalar do tempo  $t$  e posição  $x \in \mathcal{W}(t) \subset \mathcal{S}$ , onde  $\mathcal{W}(t)$  é um conjunto aberto em movimento. Suponha que  $\partial\mathcal{W}(t)$  está se movendo com velocidade  $w(x, t)$  no ponto  $x \in \partial\mathcal{W}(t)$ .*

---

<sup>1</sup>Isto é, usar  $x \in \mathcal{S}$  e  $t \in \mathbb{R}$  como os parâmetros das variáveis de estado.

<sup>2</sup>Uma quantidade proporcional ao tamanho do sistema ou à quantidade de material no sistema.

Então,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}(t)} f dv = \int_{\mathcal{W}(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{W}(t)} f w^n da}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $w^n$  é a componente normal do campo de velocidade  $w$  em  $\partial \mathcal{W}$  que aponta para fora de  $\mathcal{W}(t)$ .

*Prova:* extenda  $w$  para um campo de vetores a partir da qual podemos definir o fluxo<sup>3</sup>: um mapa  $\psi : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$  tal que  $w(\cdot, t) = \dot{\psi} \circ \psi^{-1}(\cdot, t)$ , onde  $\circ$  indica a composição de funções:  $\psi \circ \psi^{-1}(x, t) = \psi(\psi^{-1}(x, t), t)$  para todo  $x \in \mathcal{S}$ . Se assumirmos que  $\psi$  é um mapa  $C^1$  regular que preserva a orientação, então podemos aplicar o Teorema C.2. Para ver como isso é feito classicamente veja a última seção da apêndice C.  $\square$

**Teorema B.2** (Teorema do Fluxo com Descontinuidade). *Sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{S}$  variedades,  $\phi(\cdot, t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  e  $f(\cdot, t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ . Suponha que  $f(\cdot, t)$  e  $\phi(\cdot, t)$  tenham um salto descontínuo atravessando uma superfície  $\Sigma(t) \subset \mathcal{B}$ , mas ambos são  $C^1$  e  $\phi(\cdot, t)$  é regular em qualquer outro lugar, e que  $\partial f / \partial x^a$ ,  $\partial f / \partial t$  e  $\partial v / \partial x^a$  são integráveis em  $\phi(\mathcal{U}, t)$ , onde  $v = \partial_t \phi$ . Então, para um conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  qualquer<sup>4</sup> com uma fronteira  $C^1$  por partes, temos que*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} f dv = \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \phi(\mathcal{U}, t)} f v^n da - \int_{\phi(\mathcal{U}, t) \cap \phi(\Sigma(t), t)} \llbracket f(v^n + \omega^n) \rrbracket da}. \quad (\text{B.2})$$

Os colchetes  $\llbracket * \rrbracket$  denotam o valor do salto descontínuo em cima da superfície  $\Sigma(t)$ . Se um dos lados de  $\Sigma(t)$  é o limite do material (tal fronteira pode aparecer após um rasgo) o valor de  $f$  será considerada zero neste lado. O vetor normal  $n$  aponta para fora de  $\phi(\mathcal{U}, t)$  em  $\partial \phi(\mathcal{U}, t)$ , porém em  $\phi(\Sigma(t), t)$  a normal  $n$  aponta na direção do movimento de  $\phi(\Sigma(t), t)$ . Então,  $v^n$  e  $\omega^n$  são os componentes normais de  $v$  e  $\omega$ , o qual é definido para cada  $Y \in \Sigma(t)$  através de

$$\omega(x, t) = \frac{\partial \phi(Y, t)}{\partial X^A} W^A(Y, t),$$

onde  $W(Y, t)$  é a velocidade material (no corpo de referência) de  $\Sigma(t)$  no ponto  $Y \in \Sigma(t)$ .

<sup>3</sup>Para definir o fluxo unicamente, basta que  $w(x, t)$  seja Lipschitz em  $\mathcal{W}(t)$ .

<sup>4</sup>Onde  $\Sigma(t)$  divide  $\mathcal{U}$  em duas partes.

*Prova:* divida  $\phi(\mathcal{U}, t) = \mathcal{U}_t^+ \cup \sigma(t) \cup \mathcal{U}_t^-$ , onde  $\mathcal{U}_t^+$  é aberto em  $\mathcal{S}$  e na frente de  $\sigma(t)$ , em outras palavras, no lado pelo qual  $\sigma(t)$  ainda não passou, então  $\partial\mathcal{U}_t^+ = (\partial\mathcal{U}_t \cap \overline{\mathcal{U}_t^+}) \cup \sigma(t)$ , e analogamente para  $\partial\mathcal{U}_t^-$ . Para usar o Teorema B.1 precisamos da velocidade da fronteira  $\sigma(t)$ . Para esse fim, seja  $Y \in \Sigma(t)$  uma partícula que acompanha esta superfície em movimento, então

$$\frac{d\phi(Y, t)}{dt} = \frac{\partial\phi(Y, t)}{\partial t} + \frac{\partial\phi(Y, t)}{\partial X^A} W^A(Y, t) = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} = \mathbf{w}.$$

Adotamos  $-\mathbf{n}$  como o vetor normal que aponta para o exterior com base localizada em  $\partial\mathcal{U}_t^+$ , essa escolha é para que  $\mathbf{n}$  aponte na direção na qual a superfície está se movendo. Então o Teorema de Fluxo (Teorema B.1) afirma que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_t^+} f dv = \int_{\mathcal{U}_t^+} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{U}_t \cap \overline{\mathcal{U}_t^+}} f v^n da - \int_{\phi(\Sigma(t), t)} f^+ (v^{n^+} + \omega^{n^+}) da, \quad (\text{B.3})$$

onde  $f^+$  é o valor limite de  $f$  definido em  $\mathcal{U}_t^+$  aproximando a  $\phi(\Sigma(t), t)$ , analogamente para  $v^{n^+}$  e  $\omega^{n^+}$ . Repetindo este argumento para  $\mathcal{U}_t^-$  obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_t^-} f dv = \int_{\mathcal{U}_t^-} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\mathcal{U}_t \cap \overline{\mathcal{U}_t^-}} f v^n da + \int_{\phi(\Sigma(t), t)} f^- (v^{n^-} + \omega^{n^-}) da,$$

onde encima de  $\partial\mathcal{U}_t^-$  e  $\phi(\Sigma(t), t)$  o vetor normal  $\mathbf{n}$  aponta para fora de  $\mathcal{U}_t^-$ . Somando essas duas equações podemos concluir o Teorema B.2. ■

**Corolário B.1.** *No sistema do corpo referencial temos*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} F J dV = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial F}{\partial t} J dV + \int_{\partial\mathcal{U}} F J V^N dA - \int_{\mathcal{U} \cap \Sigma_t} \llbracket F J (V^N + W^N) \rrbracket da}, \quad (\text{B.4})$$

onde  $F = f \circ \phi(\cdot, t)$ ,  $\mathbf{W} = d\phi^{-1}\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{V} = d\phi^{-1}\mathbf{v}$  e  $J$ , o Jacobiano, é o determinante da transformação linear  $D\phi$ ,

$$D\phi = e^a \frac{\partial\phi^a}{\partial X^A} dX^A, \quad e J = \frac{\partial(\phi^1, \dots, \phi^n)}{\partial(X^1, \dots, X^n)} \sqrt{\frac{\det g_{ab}}{\det G_{AB}}}.$$

*Prova:* essa afirmação é estabelecida através de uma “pullback” do Teorema do Fluxo com Descontinuidade<sup>5</sup>. O “pullback” e “pushforward” são ferramen-

<sup>5</sup>Uma prova possivelmente mais evidente seria a utilização de uma versão material do Teorema do Fluxo B.1 e, em seguida, repetir um argumento análogo ao do teorema do Fluxo Descontínuo

tas comuns em geometria diferencial, referências sobre o assunto estão no Apêndice C. Utilizando os resultados e a anotação do Apêndice C concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U},t)} f dv &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} F J dV = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial F}{\partial t} J dV + \int_{\partial \mathcal{U}} F \phi_t^*(\mathbf{i}_v d\mathbf{v}) - \int_{\mathcal{U} \cap \Sigma(t)} \llbracket F \phi_t^*(\mathbf{i}_v d\mathbf{v} + \mathbf{i}_\omega d\mathbf{v}) \rrbracket \\ &= \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial F}{\partial t} J dV + \int_{\partial \mathcal{U}} F J V^N dv - \int_{\mathcal{U} \cap \Sigma(t)} \llbracket F J (V^N + W^N) \rrbracket dA, \end{aligned}$$

onde usamos que  $\phi(\cdot, t)$  é regular<sup>6</sup>, o que implica que  $\partial\phi(\mathcal{U}, t) = \phi(\partial\mathcal{U}, t)$  e assume que  $\Sigma(t) \subset \mathcal{U}$ , levando-nos a concluir que  $\phi(\mathcal{U}, t) \cap \phi(\Sigma(t), t) = \phi(\mathcal{U} \cap \Sigma(t), t)$ . ■

## B.2 Leis de Equilíbrio

Todas as leis de equilíbrio podem ser escritas na forma da lei de equilíbrio mestre.

**Definição B.1.** *Sejam  $f(x, t)$  e  $h(x, t)$  funções escalares definidas para  $x \in \phi(\mathcal{B}, t)$  para cada  $t$  em algum intervalo aberto, e  $\mathbf{u}(x, t)$  um determinado campo vetorial em  $\phi(\mathcal{B}, t)$ . Dizemos que  $f$ ,  $h$  e  $\mathbf{u}$  satisfazem a lei de equilíbrio mestre se para todo conjunto aberto  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$  com fronteira  $C^1$  por partes, a seguinte equação integral é satisfeita*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U},t)} f dv = \int_{\phi(\mathcal{U},t)} h dv + \int_{\partial\phi(\mathcal{U},t)} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle da.} \quad (\text{B.5})$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal unitário que aponta para fora de  $\partial\phi(\mathcal{U}, t)$ . Se a igualdade acima é substituída pela desigualdade

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U},t)} f dv \geq \int_{\phi(\mathcal{U},t)} h dv + \int_{\partial\phi(\mathcal{U},t)} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle da,} \quad (\text{B.6})$$

dizemos que  $f$ ,  $h$  e  $\mathbf{u}$  satisfazem a lei de desigualdade mestre.

Essas leis descritas no corpo de referência chamam-se *lei de equilíbrio (de-*

---

no sistema do corpo de referência.

<sup>6</sup>A regularidade de  $\phi(\cdot, t)$  implica que dois pontos no domínio não podem ser mapeados para o mesmo ponto na imagem, pois se fosse verdade, então haveria um ponto com uma derivada direcional zero.

sigualdade) mestre material, e tornam-se,

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} F J dV = \int_{\mathcal{U}} H J dV + \int_{\partial \mathcal{U}} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G dA,} \quad (\text{B.7})$$

e

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} F J dV \geq \int_{\mathcal{U}} H J dV + \int_{\partial \mathcal{U}} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G dA,} \quad (\text{B.8})$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  é o produto interno com a métrica do sistema de coordenadas do corpo de referência  $G$ . O vetor  $\mathbf{N}$  é a normal unitário que aponta para fora de  $\partial \mathcal{U}$  no sistema do material e, novamente o mapa  $\phi(\cdot, t)$ , para  $t$  fixo, deve ser regular, de modo que  $\partial \phi(\mathcal{U}, t) = \phi(\partial \mathcal{U}, t)$ ; e também para que as funções no material sejam bem definidas da seguinte forma

$$\begin{aligned} F J dV &= \phi_t^*(f dv) = f \circ \phi J dV, \\ H J dV &= \phi_t^*(h dv) = h \circ \phi J dV, \\ \mathbf{i}_{\mathbf{U}} dV &= \phi_t^*(\mathbf{i}_{\mathbf{u}} dv) = \mathbf{i}_{\phi_t^* \mathbf{u}} \phi_t^* dv = \mathbf{i}_{\phi_t^* \mathbf{u}} J dV = \mathbf{i}_{J \phi_t^* \mathbf{u}} dV \\ &\implies \mathbf{U} = \left( \frac{\partial \phi_t^{-1}}{\partial x^a} u^a \right) \circ \phi J, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde  $\phi_t^{-1}$  e  $\phi_t^*$  é, respectivamente, inversa e “pull-back” da função  $\phi(\cdot, t)$ . Mais detalhes sobre a notação pode ser encontrados no Apêndice C.

Esperamos que uma lei física seja válida em qualquer região do espaço, da mesma maneira, esperamos que as funções  $f$ ,  $h$  e  $\mathbf{u}$  satisfazem a lei de equilíbrio para todo conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  com fronteira  $C^1$  por partes. Usando isso vamos simplificar as condições de descontinuidade.

**Teorema B.3** (Lei de Equilíbrio Descontínuo). *Seja  $f$ ,  $h$ ,  $\mathbf{u}$  funções que satisfazem a lei de equilíbrio mestre. Vamos pressupor a existência de uma superfície  $\sigma(t) = \phi(\Sigma(t), t)$  em que  $f$ ,  $h$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\phi$  são descontínuas, mas em qualquer outro conjunto no domínio  $f \in C^1$ ,  $h, \mathbf{u} \in C^0$  e  $\phi(\cdot, t)$  é regular. Então, para  $X \in \Sigma(t)$  é válido*

$$[[f\omega^n]] = [[\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle]], \text{ ou } [[FJ]]W^N = [[\langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G]]. \quad (\text{B.10})$$

*Prova:* Divida o domínio da mesma forma como no Teorema do Fluxo Descontínuo, ou seja,  $\phi(\mathcal{U}_0, t) = \mathcal{U}_t = \mathcal{U}_t^- \cup \sigma_t \cup \mathcal{U}_t^+$ , onde ambos  $\mathcal{U}_t^-$  e  $\mathcal{U}_t^+$  são abertos

em  $\mathcal{S}$ , então o Teorema B.2 afirma que

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_t} f dv = \int_{\mathcal{U}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{U}_t} f v^n da - \int_{\mathcal{U}_t \cap \sigma(t)} \llbracket f(v^n + \omega^n) \rrbracket da,$$

onde  $v^n$  é a componente normal do vetor  $\mathbf{v} = \partial_t \phi$  que aponta para o exterior em  $\partial \mathcal{U}_t$  e na direção do movimento de  $\sigma(t)$ . O campo vetorial  $\boldsymbol{\omega}(y, t)$  é a velocidade relativa entre um ponto que segue a superfície  $y \in \sigma(t)$  e uma partícula do material que se encontra em  $y$ , ou simplesmente

$$\boldsymbol{\omega}(y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial X^A}(Y, t) W^A(Y, t),$$

onde  $y = \phi(Y, t)$  e  $\mathbf{W}$  é a velocidade de  $\Sigma(t)$  descrita no sistema do corpo referencial, tal como foi definido no Teorema B.2. Substituindo a equação acima na lei de equilíbrio mestre (B.5), obtemos

$$\int_{\mathcal{U}_t} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{U}_t} f v^n da - \int_{\mathcal{U}_t \cap \sigma(t)} \llbracket f(v^n + \omega^n) \rrbracket da = \int_{\mathcal{U}_t} h dv + \int_{\partial \mathcal{U}_t} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle da. \quad (\text{B.11})$$

As funções  $f$ ,  $h$ ,  $\mathbf{u}$  satisfazem a lei de equilíbrio mestre em quaisquer dois conjuntos abertos  $\mathcal{W}^+ \subset \mathcal{U}_t^+$  e  $\mathcal{W}^- \subset \mathcal{U}_t^-$  separadamente<sup>7</sup>, i.e. ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}^+} f dv = \int_{\mathcal{W}^+} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{W}^+} f v^n da = \int_{\mathcal{W}^+} h dv + \int_{\partial \mathcal{W}^+} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle da, \quad (\text{B.12})$$

e,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{W}^-} f dv = \int_{\mathcal{W}^-} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{W}^-} f v^n da = \int_{\mathcal{W}^-} h dv + \int_{\partial \mathcal{W}^-} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle da. \quad (\text{B.13})$$

Subtraindo as equações (B.12) e (B.13) da equação (B.11) e, depois tomando o limite  $\mathcal{W}^+$  para  $\mathcal{U}_t^+$  e  $\mathcal{W}^-$  para  $\mathcal{U}_t^-$ . Tendo cuidado que  $v^n$  em  $\partial \mathcal{W}^+$  tende para  $-v^n$  em  $\sigma(t)$ , pois a normal em  $\sigma(t)$  aponta para o interior do conjunto  $\mathcal{W}^+$ , como no Teorema do Fluxo Descontínuo. O resultado será,

$$- \int_{\mathcal{U}_t \cap \sigma(t)} \llbracket f \omega^n \rrbracket da = - \int_{\mathcal{U}_t \cap \sigma(t)} \llbracket \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle \rrbracket da. \quad (\text{B.14})$$

---

<sup>7</sup>note que a lei de equilíbrio não é necessariamente satisfeita em  $\bar{\mathcal{U}}^+$ , o que resultaria em uma equação semelhante à equação (B.3), porque  $\bar{\mathcal{U}}^+$  é fechado. Para o equilíbrio do momento, isso seria como exigir que duas placas em contato devem exercer nenhuma força sobre a outra para equilibrar a força total.



Deve ser enfatizado que o vetor normal  $\mathbf{n}$  aponta na direção do movimento da superfície  $\sigma(t)$ . Essa afirmação é válida para todo  $\mathcal{U}$  e  $[[f\omega^n]], [[\langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle]]$  que são, pelo menos, contínuas ao longo de  $\sigma(t)$ , portanto concluímos o teorema. Pode-se obter a versão material do teorema simplesmente substituindo as equações (B.9), ou aplicando o mesmo argumento acima para a versão material da lei de equilíbrio mestre. ■

Se a função  $FJ$  for contínua e diferenciável em  $X \in \mathcal{B}$ , podemos extrair condições de descontinuidade para as derivadas espaciais. Esse tipo de descontinuidade é chamado de um choque fraco.

**Teorema B.4** (Equilíbrio Normal Descontínuo). *Sejam  $F, H, \mathbf{U}$  funções que satisfazem a lei de equilíbrio mestre, pressupõe-se a existência de uma superfície  $\Sigma(t) \subset \mathcal{B}$  em que  $\nabla F, \nabla H, \nabla \mathbf{U}$  e  $\nabla \phi$  são descontínuas, porém em qualquer outro ponto essas funções são contínuas e  $\phi(\cdot, t)$  é regular. Então, para  $X \in \Sigma(t)$*

$$\left[ \left[ \frac{\partial(FJ)}{\partial X^N} \right] \right] = \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial X^N} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G \right] \right], \quad (\text{B.15})$$

onde  $X^N$  é uma coordenada que define curvas que perfuram  $\Sigma(t)$  ortogonalmente e  $\mathbf{N}$  é o vetor normal unitário que aponta na direção de propagação da superfície  $\Sigma(t)$ .

*Prova:* Primeiro vamos alterar a forma da lei de equilíbrio (B.8) usando as novas hipóteses e em seguida aplicar o teorema (B.2). Seja  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  um conjunto aberto com fronteira  $C^1$  por partes, que é cortado em duas partes pela superfície  $\Sigma(t)$ . Agora seja  $(Y^1, Y^2, Y^3)$  um sistema de coordenadas tal que para cada  $t > 0$  temos que em  $\Sigma(t)$ : as coordenadas  $Y^2$  e  $Y^3$  parametrizam a superfície  $\Sigma(t)$ , o vetor de base  $\mathbf{E}_{Y^1} = \mathbf{N}$  o vetor normal unitário de  $\Sigma(t)$ , que aponta na direção do movimento  $\Sigma(t)$ . Observe que esse sistema de coordenadas está bem definido para  $t$  em algum intervalo aberto em volta do tempo inicial. Então, a Lei de Equilíbrio (B.8) torna-se,

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} FJ dY^1 \wedge dA = \int_{\mathcal{U}} HJ dY^1 \wedge dA + \int_{\partial \mathcal{U}} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G dA. \quad (\text{B.16})$$

Denota a fronteira  $\partial \mathcal{U}$  acima de  $\Sigma(t)$  como  $\partial \mathcal{U}^+$  e analogamente para  $\partial \mathcal{U}^-$ . Por acima de  $\Sigma(t)$  entendemos a região que  $\Sigma(t)$  está entrando, ou movendo em direção. Podemos localizar cada ponto  $X_B \in \partial \mathcal{U}$  no nosso recém-definido sis-

tema de coordenadas  $X_B(Y_B^1, Y_B^2, Y_B^3)$ . Se variarmos  $Y_B^1$  estaremos movendo  $\partial U$ . Primeiro vamos permitir que  $\partial U^+$  varia com  $Y_B^1$  enquanto mantemos  $\partial U^-$  fixo, e, neste contexto derivamos a equação integral (B.16) em  $Y_B^1$ , resultando em

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial U^+} F J dA = \int_{\partial U^+} H J dA + \int_{\partial U^+} \frac{\partial}{\partial Y^1} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G dA. \quad (\text{B.17})$$

Agora mantenha a superfície  $\partial U^+$  fixa e permita que  $\partial U^-$  varie com  $Y_B^1$ , e neste contexto deriva a equação integral (B.16) em  $Y_B^1$ , resultando em

$$-\frac{d}{dt} \int_{\partial U^-} F J dA = - \int_{\partial U^-} H J dA - \int_{\partial U^-} \frac{\partial}{\partial Y^1} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G dA. \quad (\text{B.18})$$

Ambos os lados da equação acima são negativos devido à orientação que escolhemos para a coordenada  $Y^1$ . Subtraindo (B.18) de (B.17), temos como resultado a seguinte equação integral

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial U} F J dA = \int_{\partial U} H J dA + \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial Y^1} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G dA. \quad (\text{B.19})$$

Para aplicar o Teorema de Stokes na equação acima, falta estabelecer que

$$d(FJd\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial Y^1} (FJ) dY^1 \wedge d\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial Y^1} (FJ) d\mathbf{V},$$

Assim, (B.19) resulta em,

$$\frac{d}{dt} \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial Y^1} (FJ) dV = \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial Y^1} (HJ) dV + \int_{\partial U} \frac{\partial}{\partial Y^1} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G dA.$$

Agora podemos usar o Teorema da Lei de Equilíbrio Descontínuo B.3 para obter,

$$\left[ \left[ \frac{\partial}{\partial X^N} (FJ) \right] \right] W^N = \left[ \left[ \frac{\partial}{\partial X^N} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G \right] \right],$$

onde usamos o fato da coordenada  $Y^1$  definir uma curva que atravessa  $\Sigma(t)$  ortogonalmente. Note que  $\langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle_G = U^N$ , a coordenada do vetor normal unitário  $\mathbf{N}$  de  $U$ . Dessa forma, a igualdade acima torna-se,

$$\left[ \left[ \frac{\partial (FJ)}{\partial X^N} \right] \right] W^N = \left[ \left[ \frac{\partial U^N}{\partial X^N} \right] \right].$$

Isto deixa claro que a coordenada  $X^N$  pode ser redimensionada de modo que  $E_N$  não seja necessariamente o vetor unitário. ■

**Teorema B.5** (Teoria Localizada). *Se  $f, \phi(\cdot, t), \mathbf{u} \in C^1$ ,  $\phi(\cdot, t)$  é regular,  $h \in C^0$  e  $\mathbf{v} = \partial_t \phi$ , então eles satisfazem a lei de equilíbrio mestre se e somente se*

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{d(f\mathbf{v})}{dx^a} \right)^a = h + \left( \frac{d\mathbf{u}}{dx^a} \right)^a.} \quad (\text{B.20})$$

*Essas mesmas variáveis respeitam a lei de desigualdade mestre se e somente se*

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left( \frac{d(f\mathbf{v})}{dx^a} \right)^a \leq h + \left( \frac{d\mathbf{u}}{dx^a} \right)^a.} \quad (\text{B.21})$$

A prova desse teorema é uma aplicação direta do Teorema do Fluxo (B.1). A seguir, as leis de equilíbrio mestre no sistema do corpo referencial localizadas são:

$$\boxed{\frac{\partial(FJ)}{\partial t} = HJ + \left( \frac{d\mathbf{U}}{dX^A} \right)^A \quad \text{e} \quad \frac{\partial(FJ)}{\partial t} \leq HJ + \left( \frac{d\mathbf{U}}{dX^A} \right)^A.} \quad (\text{B.22})$$

## Conservação de Massa

Esta lei afirma que a massa total do conjunto  $\phi(\mathcal{U}, t)$  não muda no tempo.

**Definição B.2** (Conservação de Massa). *Dado um mapa regular  $\phi(\cdot, t)$ ,  $\rho(x)$  a densidade, dizemos que a massa é conservado se para todo conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  com fronteira  $C^1$  por partes,*

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \rho dv = 0. \quad (\text{B.23})$$

Para encontrar as condições de descontinuidade substituímos  $f = \rho$ ,  $\mathbf{u} = 0$  e  $F = \rho \circ \phi$ ,  $\mathbf{U} = 0$  nas equação (B.10), resultando em

$$\rho^+ \omega_n^+ = \rho^- \omega_n^-, \text{ ou } \llbracket J\rho \circ \phi \rrbracket W^N = 0.$$

Mudando para as variáveis do sistema do corpo referencial, concluímos que

$$\rho_{Ref}(X) = \rho(x, t)J(X, t), \quad (\text{B.24})$$

onde

$$J(X, t) = \frac{\partial(\phi^1, \phi^2, \phi^3)}{\partial(X^1, X^2, X^3)} \frac{\sqrt{\det g_{ab}(x)}}{\sqrt{\det G_{AB}(X)}}.$$

Logo, combinando as equações (B.24) e (B.2), estabelecemos que

$$[[\rho_{Ref}]]W^N = 0, \tag{B.25}$$

ou seja, o choque não se move através do material de referência:  $W^N = 0$ , como uma falha no material, ou  $\rho_{Ref}(X)$  é pelo menos contínuo.

### **Equilíbrio de Momento**

A forma integral da conservação de momento clássica está sujeita a uma crítica importante: ela não é invariante sob mudança de coordenadas gerais, embora as equações dinâmicas próprias o sejam, para maiores detalhes veja Box 4.2, página 169 do [7]. Uma maneira de contornar esse problema no  $\mathbb{R}^3$  é o seguinte: dado um vetor constante  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , a conservação de momento será válida na direção fixa  $\mathbf{w}$ .

**Definição B.3** ( Conservação de Momento). *Dado um mapa regular  $\phi(\cdot, t)$  com velocidade  $\mathbf{v} = \partial\phi/\partial t$ ,  $\rho(x)$  a densidade,  $\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n})$  o tensão interna e uma força externa  $\mathbf{b}(x, t)$ , dizemos que o momento é conservado se, para cada  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$  fixo e para todo conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  com fronteira  $C^1$  por partes, temos que*

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle dv = \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \rho \langle \mathbf{b}, \mathbf{w} \rangle dv + \int_{\partial\phi(\mathcal{U}, t)} \langle \mathbf{t}, \mathbf{w} \rangle da, \tag{B.26}$$

onde  $\mathbf{t}$  é avaliado com a normal  $\mathbf{n}$  que aponta para fora de  $\partial\phi(\mathcal{U}, t)$ .

Usando o Teorema de Cauchy sobre tensão interna (veja o Teorema 2.2 p.134 de [7]), podemos substituir o tensão interna com o tensor de tensão de Cauchy, que depende linearmente do vetor normal da fronteira  $\partial\phi(\mathcal{U}, t)$  e é definido por:  $\mathbf{t} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{n} \rangle$ . Para adquirir as condições de salto descontínuo usamos as equações (B.10) com:

$$f = \rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \mathbf{e} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle, \quad \text{ou}$$

$$FJ = \rho_{Ref} \langle \mathbf{V}, \mathbf{w} \rangle \quad \mathbf{e} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{P} : \mathbf{N}, \mathbf{w} \rangle,$$

onde  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n} = \sigma^{ab} g_{bc} n^c \mathbf{e}_a$ ,  $\mathbf{P} : \mathbf{N} = P^{AB} G_{BC} N^C \mathbf{E}_A$ ,  $\mathbf{e}_a$  e  $\mathbf{E}_A$  são respectivamente os vetores de base dos sistemas de coordenadas de  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{B}$ , e  $g_{ab}$  e  $G_{AB}$  são respectivamente as métricas Riemannianas utilizadas para  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{B}$ . Esta substituição resulta nas condições,

$$[[\rho \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \omega^n]] = [[\langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle]] \text{ ou } [[\rho_{Ref} \langle \mathbf{V}, \mathbf{w} \rangle]] W^N = [[\langle \mathbf{P} : \mathbf{N}, \mathbf{w} \rangle]],$$

onde  $\mathbf{P}$  é o primeiro tensor de tensão de Piola-Kirchhoff. Observando que as equações acima são válidas para todo  $\mathbf{w}$  fixo e, juntamente com as condições de descontinuidade para a conservação da massa (B.25), obtemos

$$\rho^- \omega_n^- [[\mathbf{v}]] = [[\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}]] \text{ ou } [[\mathbf{V}]] \rho_{Ref} W^N = [[\mathbf{P} : \mathbf{N}]]. \quad (\text{B.27})$$

Uma possível interpretação para essas equações é que o fluxo de massa vezes a diferença de velocidade compensa a diferença das forças internas na descontinuidade.

## Conservação de Energia

Uma referência adequado é Seção 2.3 do [7]. Seja  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$  um conjunto aberto com fronteira  $C^1$  por partes e  $\mathcal{S} = \mathbb{R}^3$ ,  $\phi$  um mapa diferenciável e regular de  $\mathcal{B}$  em  $\mathcal{S}$  com  $\mathbf{v} = \partial\phi/\partial t$ ,  $h(x, t, \mathbf{n})$  o fluxo de calor através de uma superfície com vetor normal  $\mathbf{n}$  e  $e(x, t)$  a função de energia interna por unidade de massa.

**Definição B.4** (Conservação de Energia). *Dado um mapa regular  $\phi(\cdot, t)$  e as funções  $\rho(x)$ ,  $\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n})$ ,  $e(x, t)$ ,  $\mathbf{b}(x, t)$  e  $h(x, t, \mathbf{n})$ , dizemos que a conservação da energia é satisfeita se para cada aberto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  com fronteira  $C^1$  por partes, for verdade que,*

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \right) dv = \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \rho \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle dv - \int_{\partial\phi(\mathcal{U}, t)} (\langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle) da, \quad (\text{B.28})$$

onde usamos o Teorema de Cauchy, [7] p.127, para substituir  $\mathbf{t} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{n} \rangle e$   
 $h(x, t, \mathbf{n}) = - \langle \mathbf{q}(x, t), \mathbf{n} \rangle.$

Para obter as condições de salto descontínuo, usamos a equação (B.10) com:

$$f = \rho(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle), \quad \mathbf{e} \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = - \langle \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{n} \rangle, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{q}, \mathbf{n} \rangle, \quad \text{ou}$$

$$FJ = \rho_{Ref}(E + \frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle), \quad \mathbf{e} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N} \rangle = - \langle \langle \mathbf{P}, \mathbf{N} \rangle_G, \mathbf{V} \rangle \langle \mathbf{Q}, \mathbf{N} \rangle_G,$$

resultando nas condições

$$\llbracket \rho(e + \frac{1}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle) \omega^n \rrbracket = \llbracket \langle \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{n} \rangle, \mathbf{v} \rangle \rrbracket \quad \text{ou}, \quad (\text{B.29})$$

$$\llbracket E + \frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \rrbracket \rho_{Ref} W^N = \llbracket \langle \langle \mathbf{P}, \mathbf{N} \rangle_G, \mathbf{V} \rangle \rrbracket, \quad (\text{B.30})$$

onde  $\mathbf{V} = \mathbf{v} \circ \phi(\cdot, t)$  e

$$P^{aA} = J(D\phi^{-1})^A_b \sigma^{ab}, \quad Q^A = J(D\phi^{-1})^A_a q^a.$$

## Desigualdade da Produção de Entropia

A segunda lei da termodinâmica é frequentemente descrita num jargão misterioso da física. Neste trabalho os resultados necessários serão tratados matematicamente de uma forma muito concisa. Essa "lei" é essencial para a elasticidade, pois com ela podemos definir unicamente o tensão interna em termos da taxa de variação da energia interna livre  $\psi$ , onde  $e = \psi + \boldsymbol{\theta}\eta$ ,  $\eta(\cdot, tx)$  é a entropia específica por unidade de massa<sup>8</sup> e  $\boldsymbol{\theta}(x, t) > 0$  é a temperatura absoluta.

**Definição B.5** (A inequação de Clausius-Duhem). *Dado um mapa regular  $\phi(\cdot, t)$  e as funções  $\rho(x)$ ,  $\mathbf{b}(x, t)$ ,  $h(x, t, \mathbf{n})$ ,  $\boldsymbol{\theta}(x, t)$  e  $\eta(x, t)$  dizemos que obedecem a **desigualdade da produção de entropia** ou a **inequação Clausius-Duhem** se, para todo  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ , com o normal unitário de  $\partial\phi(\mathcal{U}, t)$  sendo  $\mathbf{n}$ , temos que*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{U}, t)} \rho \eta \, dv \geq - \int_{\partial\phi(\mathcal{U}, t)} \frac{\langle \mathbf{q}(x, t), \mathbf{n} \rangle}{\boldsymbol{\theta}} \, da,} \quad (\text{B.31})$$

onde usamos o Teorema de Cauchy para substituir  $h(x, t, \mathbf{n}) = - \langle \mathbf{q}(x, t), \mathbf{n} \rangle$ .

Usando o exato analogia das equações (B.10), porém com uma desigualdade

---

<sup>8</sup>Para um tratamento matemático mais avançado do assunto, em que a entropia é considerada como uma medida de desordem e tem suas origens na mecânica estatística através da equação de Boltzmann, veja Ruelle[14]

ao em vez do igualdade, podemos estabelecer as condições de salto descontínuos para que a produção de entropia continua válido. Usando

$$f = \rho\eta, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\langle q(x, t), \mathbf{n} \rangle}{\theta}$$

e uma desigualdade ao em vez de igualdade nas equações (B.10), obtemos a desigualdade de salto

$$\boxed{[[\rho\eta\omega_n]] \leq [[\frac{q^n}{\theta}]]}. \quad (\text{B.32})$$

# Apêndice C

## Resultados da Geometria Diferencial

Queremos uma estrutura teórica que independe do sistema de coordenadas usado, assim podemos posteriormente escolher qualquer sistema de coordenadas e focamos em buscar verdades que independe das coordenadas. Além disso, pode ser conceitualmente mais claro pensar geometricamente e representar corpos como variedades. Para tanto usaremos noções da geometria diferencial, se o leitor não quiser investir o tempo necessário para aprender esses conceitos, sugerimos que use diretamente os resultados do Apêndice B. Uma referência muito resumido, porém suficiente, e que usa a mesma notação seria os Capítulos 1 e 2 do [7]. Uma referência mais completo e mesmo assim exuto é [1].

### Pullback e Pushforward

Sejam  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{S}$  variedades suaves e  $\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  um mapa  $C^1$  regular cujo imagem cobre  $\mathcal{S}$ . O pushforward e pullback são operações que recebem um vetor, 1-forma ou ponto em  $\mathcal{B}$  e retorna uma forma natural de representa-lo em  $\mathcal{S}$  por meio do mapa  $\phi$ , e vice-versa para um vetor, 1-forma ou ponto originalmente em  $\mathcal{S}$ . Denominamos as operações  $\phi^*$  como pullback e  $\phi_*$  como pushforward, as ações destes são definidos abaixo<sup>1</sup>.

#### Definições:

---

<sup>1</sup>A função inversa  $\phi^{-1}$  será usada da seguinte forma  $\phi^{-1}(x, t) = X$  onde  $x = \phi(X, t)$ .



- Seja  $f : \mathcal{B} \rightarrow R$ , então  $\phi_* f = f \circ \phi^{-1}(\cdot, t)$ , ou seja,  $\phi_* f(x) = f(X)$  se  $x = \phi(X, t)$ .
- Seja  $g : \mathcal{S} \rightarrow R$ , então  $\phi^* g = g \circ \phi(\cdot, t)$ , ou seja,  $\phi_* g(X) = g(x)$  se  $x = \phi(X, t)$ .
- Seja  $W$  um vetor no espaço tangente de  $X \in \mathcal{B}$ , então  $\phi_* W = D\phi(X, t)W$  que é um vetor no espaço tangente de  $\phi(X, t) \in \mathcal{S}$ .
- Seja  $w$  um vetor no espaço tangente de  $x \in \mathcal{S}$ , então  $\phi^* w = D\phi^{-1}(x, t)w$  que é um vetor no espaço tangente de  $\phi^{-1}(X, t) \in \mathcal{B}$ .
- Seja  $W$  um campo vetorial em  $\mathcal{B}$ , ou seja,  $W(X)$  é um vetor no espaço tangente a  $X$ . Dessa forma  $\phi_* W = D\phi(\cdot, t)W \circ \phi^{-1}(\cdot, t)$ .
- Seja  $w$  um campo vetorial em  $\mathcal{S}$ , ou seja,  $w(x)$  é um vetor no espaço tangente a  $x$ . Dessa forma  $\phi_* w = D\phi^{-1}(\cdot, t)w \circ \phi(\cdot, t)$ .
- Seja  $\alpha$  um  $k$ -forma em  $\mathcal{S}$  e  $w_1, w_2, \dots, w_k$  vetores do espaço tangente a  $\mathcal{S}$ , então  $\phi^* \alpha$  é definido de tal forma que  $\phi^*[\alpha(w_1, w_2, \dots, w_k)] = \phi^* \alpha(\phi^* w_1, \phi^* w_2, \dots, \phi^* w_k)$  é um scalar que independe do sistema de coordenadas.

## Derivadas de Lie

Primeiro mostraremos como a derivada de Lie aparece em nossa aplicação. Seja  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{B}$  variedades suaves e  $\phi(\cdot, t) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{B}$  é uma função  $C^1$  e regular. Em todas as leis de conservação, integrais da seguinte forma aparecem,

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{P}, t)} \alpha,$$

onde  $\alpha$  é uma  $k$ -forma em  $\mathcal{S}$ . Abaixo adotaremos  $\phi_t = \phi(\cdot, t)$  quando nos referirmos apenas ao parâmetro espacial  $x$  mantendo  $t$  fixo. Nas regiões em que assumimos  $\alpha$  diferenciável, podemos reformular esta integral de outra forma,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{P})} \alpha &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \phi_t^* \alpha = \int_{\mathcal{P}} \frac{d}{dt} (\phi_t^* \alpha) = \int_{\phi_t(\mathcal{P})} \phi_{t*} \frac{d}{dt} (\phi_t^* \alpha) \\ &= \int_{\phi_t(\mathcal{P})} \left( \phi_{s*}^{-1} \frac{d}{dt} (\phi_t^* \alpha) \right)_{s=t} = \int_{\phi_t(\mathcal{P})} \left( \frac{d}{dt} (\phi_{t,s}^* \alpha) \right) \Big|_{s=t} = \int_{\phi_t(\mathcal{P})} \mathbf{L}_\nu \alpha \quad (\text{C.1}) \end{aligned}$$

onde  $\phi_t^*$  e  $\phi_{t*}$  são respectivamente, um “push-forward” e um “pull-back” por meio do mapa  $\phi_t$ ,  $\phi_{t,s}(x) = \phi(\phi^{-1}(x, s), t)$  e  $\nu = \partial_t \phi$ . A última igualdade resultou da utilização da definição da derivada de Lie.

**Definição C.1.** *Seja  $\nu$  um campo vetorial  $C^1$  em  $S$  que depende do tempo  $t$ , onde  $\phi_{t,s}$  denota o seu fluxo, ou seja,  $\partial_t \phi_{t,s} = \nu$ . Se  $\mathbf{T}$  é um campo tensorial  $C^1$  em  $S$ , então a derivada de Lie de  $\mathbf{T}$  em relação a  $\nu$  é definida por*

$$\mathbf{L}_\nu \mathbf{T} = \left( \frac{d}{dt} \phi_{t,s}^* \mathbf{T} \right) \Big|_{s=t}. \quad (\text{C.2})$$

**Exemplo 2.** *Seja  $f : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar  $C^1$  dependente do tempo, então*

$$\mathbf{L}_\nu(f dx^k) = \left( \frac{d}{dt} \phi_{t,s}^* f dx^k \right) \Big|_{s=t} = \left( \frac{d}{dt} f(\phi_{t,s}(x), t) \frac{\partial \phi_{t,s}^k(x)}{\partial x^j} dx^j \right) \Big|_{s=t},$$

onde o sobrescrito  $k$  do  $\phi$ ,  $\phi^k$ , se refere ao  $k$ -ésimo coordenada do  $\phi$ , e dois índice iguais no mesmo termo significa um somatório neste índice. Nesta última expressão, todo  $x$  encontra-se na imagem de  $\phi_s$ , a qual não muda com o tempo. Portanto

$$\mathbf{L}_\nu(f dx^k) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial \phi_{t,s}^k(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial f}{\partial x^m} \nu_t^m \circ \phi_s^{-1} \frac{\partial \phi_{t,s}^k(x)}{\partial x^j} + f \frac{\partial \nu_t^k}{\partial x^j} \circ \phi_s^{-1} \right) dx^j \Big|_{s=t} \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} dx^k + \frac{\partial f}{\partial x^j} \nu_t^j dx^k + f \frac{\partial \nu_t^k}{\partial x^j} dx^j, \quad (\text{C.4})$$

onde usamos que  $(\phi_{t,s})_{s=t} = i_d$ , o mapa identidade.

Para facilitar a compreensão da derivada de Lie e seu uso, a separamos da seguinte forma: mantenha  $t$  fixo em  $\mathbf{T}$  para obter a *derivada de Lie autônoma*, que é definido por:

$$\mathcal{L}_\nu \mathbf{T} = \left( \frac{d}{dt} \phi_{t,s}^* \mathbf{T}_s \right) \Big|_{s=t}.$$

Daí  $\mathbf{L}_\nu \mathbf{T} = \mathcal{L}_\nu T + \partial_t T$ . Na equação integral (C.1), se  $\alpha = f dv$ , onde  $dv$  é a forma de volume<sup>2</sup>, então a derivada de Lie autônoma pode ser interpretada como quanto a integral (C.1) muda devido ao movimento da fronteira  $\partial \phi(\mathcal{P}, t)$ . Isso nos motiva a buscar um integral de superfície do fluxo que é igual à integral de volume da

---

<sup>2</sup>Iremos utilizar  $dv$  e  $da$  em negrito para enfatizar que são formas diferenciais.

derivada de Lie autônoma. A intuição sugere que

$$\int_{\phi(\mathcal{P},t)} \mathcal{L}_\nu(f \, d\mathbf{v}) = \int_{\partial\phi(\mathcal{P},t)} f \nu^n \, d\mathbf{a},$$

onde  $\nu^n$  é o componente de  $\nu$  na direção do vetor normal unitário que aponta para fora. Em coordenadas onde  $x^2$  e  $x^3$  parametrizam a fronteira  $\partial\phi(\mathcal{P},t)$  e  $\mathbf{e}_1$  é a normal unitário da fronteira  $\partial\phi(\mathcal{P},t)$ , temos que

$$d\mathbf{v} = \sqrt{\det g_{ab}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad \mathbf{e} \, d\mathbf{a} = \sqrt{\det g_{ab}} dx^2 \wedge dx^3,$$

onde  $g$  é a métrica Riemanniana em  $\mathcal{S}$ , o símbolo  $\wedge$  se refere ao “wedge product” e  $da$  é a forma de área (ou “area form”). A definição do “wedge product” e de derivada exterior podem ser encontradas no Capítulo 1 do [7]. Assim, precisamos mostrar que a derivada exterior  $d(f\nu^n da) = \mathcal{L}_\nu(f d\mathbf{v})$ , daí segue pelo Teorema de Stokes que as integrais acima serão iguais. O que segue abaixo será utilizado para mostrar essa identidade.

## Usando Teorema de Stokes

**Definição C.2.** Se  $w$  é um campo vetorial no variedade suave  $\mathcal{M}$  e  $\alpha$  é uma  $k$ -forma, a contração de  $w$  com o primeiro índice de  $\alpha$  é chamada de produto interior e é denotada por  $i_w \alpha$ . Assim  $i_w \alpha$  é uma  $(k-1)$ -forma, definido por

$$\boxed{(i_w \alpha)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1})}$$

para quaisquer vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$  em  $\mathcal{M}$ .

A proposição que segue fornece uma interpretação geométrica.

**Proposição C.1.** Seja  $n$  a normal unitário que aponta para fora de  $\partial\mathcal{M}$  e  $w$  um campo vetorial em  $\mathcal{M}$ . Então, sobre  $\partial\mathcal{M}$  temos que  $w^n da = i_w d\mathbf{v}$ , onde  $da$  é a forma de área de  $\partial\mathcal{M}$

**Prova:** A equação que queremos provar é composta de quantidades que independem das coordenadas, portanto, sem perda de generalidade, podemos escolher coordenadas para  $\mathcal{M}$ ,  $\{x^a\}$ , em que  $\partial\mathcal{M}$  é o plano<sup>3</sup>  $x^1 = 0$ ,  $\mathcal{M}$  é descrito por

<sup>3</sup>O conjunto  $\partial\mathcal{M}$  precisa ser pelo menos  $C^1$  por partes. Em cada uma dessas partes podemos

$x^1 < 0$  e  $\mathbf{n} = (1, 0, \dots, 0)$  é a normal unitário. Dessa forma,

$$\mathbf{i}_w \mathbf{d}\mathbf{v} = \mathbf{i}_w \sqrt{g_{ab}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sqrt{g_{ab}} (-1)^{1-i} w^i \underbrace{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}_{\text{faltando } dx^i}.$$

Se formos avaliar esta expressão no domínio  $\partial\mathcal{M}$ ,  $x^1 = 0$ , sobra apenas o primeiro termo

$$\mathbf{i}_w \mathbf{d}\mathbf{v} = \sqrt{g_{ab}} w^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = w^n \mathbf{d}\mathbf{a},$$

o que prova a proposição. ■

**Teorema C.1.** *A derivada exterior  $d(\mathbf{f}\mathbf{i}_\nu \mathbf{d}\mathbf{v})$  é igual a derivada de Lie  $\mathcal{L}_\nu(\mathbf{f}\mathbf{d}\mathbf{v})$ .*

**Prova:**

$$\begin{aligned} d(\mathbf{f}\mathbf{i}_\nu \mathbf{d}\mathbf{v}) &= d(f \sqrt{\det g_{ab}} (\nu^1 dx^2 \wedge dx^3 - \nu^2 dx^1 \wedge dx^3 + \nu^3 dx^1 \wedge dx^2)) \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^m} \nu^m + \frac{1}{\sqrt{\det g_{ab}}} \frac{\partial}{\partial x^m} (\nu^m \sqrt{\det g_{ab}}) \right) \mathbf{d}\mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial x^m} \nu^m \mathbf{d}\mathbf{v} + \left( \frac{\partial \nu}{\partial x^m} \right)^m \mathbf{d}\mathbf{v} = \mathcal{L}_\nu(\mathbf{f}\mathbf{d}\mathbf{v}), \end{aligned}$$

onde usamos a proposição C.2. ■

Comumente o operador denominado de divergente, e denotada por  $\text{div}$ , é definido da seguinte forma

$$\text{div } \nu = \left( \frac{\partial \nu}{\partial x^m} \right)^m. \quad (\text{C.5})$$

**Proposição C.2.** *Usando os símbolos e definições anteriores,*

$$\mathcal{L}_\nu(\mathbf{d}\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ab}}} \frac{\partial}{\partial x^m} (\nu^m \sqrt{\det g_{ab}}) \mathbf{d}\mathbf{v} = \left( \frac{\partial \nu}{\partial x^m} \right)^m \mathbf{d}\mathbf{v}.$$

**Prova:** Sejam  $\gamma_{ab}^c$  os símbolos de Christoffel, deduzidos da métrica  $g$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^m} (\nu^m \sqrt{\det g_{ab}}) &= \frac{\partial \nu^m}{\partial x^m} \sqrt{\det g_{ab}} + \frac{\nu^m}{2\sqrt{\det g_{ab}}} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^m} (\text{Cof}g)^{ab} \\ &= \frac{\partial \nu^m}{\partial x^m} \sqrt{\det g_{ab}} + \frac{\nu^m}{2\sqrt{\det g_{ab}}} (g_{kb} \gamma_{am}^k + g_{ak} \gamma_{bm}^k) (\text{Cof}g)^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

---

definir um sistema de coordenadas tal que  $\partial\mathcal{M}$  é o plano  $x^1 = 0$ . Dessa forma, para cada parte definimos uma transformação linear de coordenadas  $H$ , de modo que os coeficientes da métrica  $\mathbf{G}$  satisfaçam  $G_{1A} = \delta_{1A}$ .

Vamos considerar  $G$  a matriz dos coeficientes de  $g_{ab}$ . Fixa os indicies  $a$  e  $k$  no termo  $g_{kb}(Cofg)^{ab}$  e some para  $b = 1, 2$  e  $3$ , o resultado será o determinante de alguma matriz  $G'$ , que é igual a  $G$  com a  $a$ -ésima coluna substituída pela  $k$ -ésima coluna. Em outras palavras, se  $k \neq a$  o determinante de  $G'$  será zero. A expressão em questão é uma soma de termos da forma  $g_{kb}(Cofg)^{ab}$ , e portanto, podemos substituir  $k = a$  nesta expressão e  $k = b$  na expressão  $g_{ak}(Cofg)^{ab}$ , e concluir que

$$\begin{aligned} \frac{\nu^m}{2}(g_{kb}\gamma_{am}^k + g_{ak}\gamma_{bm}^k)(Cofg)^{ab} &= \frac{\nu^m}{2}(g_{ab}\gamma_{am}^a + g_{ab}\gamma_{bm}^b)(Cofg)^{ab} \\ &= \nu^m \gamma_{am}^a \det g_{ab}. \end{aligned}$$

Usando este resultado, estabelecemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\det g_{ab}}} \frac{\partial}{\partial x^m} (\nu^m \sqrt{\det g_{ab}}) &= \frac{\partial \nu^m}{\partial x^m} + \frac{\nu^m}{2 \det g_{ab}} (g_{kb}\gamma_{am}^k + g_{ak}\gamma_{bm}^k)(Cofg)^{ab} \\ &= \frac{\partial \nu^m}{\partial x^m} + \nu^m \gamma_{am}^a = \left( \frac{\partial \nu}{\partial x^m} \right)^m, \end{aligned}$$

o que termina a proposição. ■

Finalmente, combinando todos os resultados anteriores podemos enunciar o seguinte Teorema.

**Teorema C.2.** *Seja  $\phi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  um mapa  $C^1$  regular que preserva a orientação,  $\partial\phi(\mathcal{P}, t)$  positivamente orientada, e seja  $f : \phi(\mathcal{P}, t) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^1$ . Então é verdade que*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{P}, t)} f \, d\mathbf{v} = \int_{\phi(\mathcal{P}, t)} \partial_t f \, d\mathbf{v} + \int_{\partial\phi(\mathcal{P}, t)} f \nu^n \, d\mathbf{a}.} \quad (\text{C.7})$$

**Prova:** Voltamos para a equação (C.1) onde encontramos a derivada de Lie e substituímos  $\alpha$  por  $f \, d\mathbf{v}$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{P}, t)} f \, d\mathbf{v} = \int_{\phi(\mathcal{P}, t)} \partial_t f \, d\mathbf{v} + \int_{\phi(\mathcal{P}, t)} \mathcal{L}_\nu f \, d\mathbf{v}.$$

Nesta seção mostramos que

$$\mathcal{L}_\nu(f \, d\mathbf{v}) = d(fi_\nu d\mathbf{v}) = d(f\nu^n d\mathbf{a}),$$

assim, pelo teorema de Stokes,

$$\int_{\phi(\mathcal{P},t)} \mathbf{d}(f\nu^n \mathbf{da}) = \int_{\partial\phi(\mathcal{P},t)} f\nu^n \mathbf{da},$$

o que prova o teorema. ■

## Teorema Clássico do Fluxo

Usando os mesmos pressupostos feitos no Teorema C.2 e seja  $J = \det(D\phi_t)$  o Jacobiano de  $\phi$ , com  $t$  mantido fixo e  $\nu = d\phi/dt$  (para não confundir símbolos), mostraremos um esboço de como o teorema do fluxo é calculada classicamente. Para maiores detalhes veja o Capítulo 1 do [7]. Usando a mudança de variáveis duas vezes, a identidade  $dJ/dt = J \operatorname{div} \nu$  e a definição do operador  $\operatorname{div}$  (veja equação (C.5)), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi(\mathcal{P},t)} f(x,t) dv &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} f(\phi(X,t), t) J(X,t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}} J(X,t) \frac{d}{dt} f(\phi(X,t), t) + f(\phi(X,t), t) \frac{d}{dt} J(X,t) dV \\ &= \int_{\mathcal{P}} J \frac{\partial f}{\partial x^a} \nu^a + J \frac{\partial f}{\partial t} + f J \operatorname{div} \nu \, dV = \int_{\mathcal{P}} J \frac{\partial f}{\partial t} + J \operatorname{div}(f \nu) dV \\ &= \int_{\phi(\mathcal{P},t)} \frac{\partial f}{\partial t} dv + \int_{\partial\phi(\mathcal{P},t)} f \nu_n da. \end{aligned}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] S. I. Goldberg & R. L. Bishop. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Publications, December 1980.
- [2] W. Noll & B. D. Coleman. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Arch. Rat. Mech. An.*, 2:197–226, 1958.
- [3] W. Noll & B. D. Coleman. La mécanique classique basée sur un axiome d'objectivité. *La Méthode axiomatique dans les mécaniques classiques et nouvelles*, pages 47–56, 1963.
- [4] C. M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer, third edition, 2010.
- [5] E. Kanso & M. Arroyo & Y. Tong & A. Yavari & J. E. Marsden & M. Desbrun. On the geometric character of stress in continuum mechanics. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 58 (5):843–856, 2007.
- [6] M. Tanter & M. Fink. *Time Reversing Waves For Biomedical Applications*, volume 1983 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin - Heidelberg, 2009.
- [7] J. E. Marsden & T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover, 1994.
- [8] R. A. Guyer & P. A. Johnson. *Nonlinear Mesoscopic Elasticity*. Springer-Verlag, first edition, 2000.
- [9] V. Korneev. Spherical wave propagation in a nonlinear elastic medium. *LBNL Paper: Lawrence Berkeley National Laboratory*, LBNL-2509E, 2009.

- [10] H. Zheng & Z. Zhang & E. Liu. Non-linear seismic wave propagation in anisotropic media using the flux-corrected transport technique. *Geophysical Journal International*, 165(3):943–956, 2006.
- [11] M. E. Gurtin & S. Nemat-Nasser. *Time Reversing Waves For Biomedical Applications*, volume 1 of *Mathematics Today*. Springer-Verlag, 1972.
- [12] C. Truesdell & W. Noll. *The non-linear field theories of mechanics*, volume VIII. Springer, 3rd edition, 2004.
- [13] R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, 1997.
- [14] D. Ruelle. *Thermodynamics Formalism*, *Encyclopedia of Math. Vol. 5. Reading*. Addison-Wesley, 1969.