

MODELOS DE REGRESSÃO WEIBULL E SARKAR PARA TESTES ACELERADOS EM PROBLEMAS DE RISCOS COMPETITIVOS



1150023089



IMECC

T/UNICAMP Sh62m

SILVIA EMIKO SHIMAKURA

Orientadora

Profa. Dra. CÍCILIA YUKO WADA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, da Universidade Estadual de Campinas, para obtenção do título de Mestre em Estatística.

CAMPINAS - S.P.

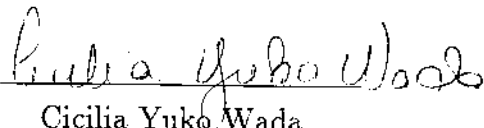
Agosto, 1994

IMECC
BIBLIOTECA

MODELOS DE REGRESSÃO WEIBULL E SARKAR PARA TESTES ACELERADOS EM PROBLEMAS DE RISCOS COMPETITIVOS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Silvia Emiko Shimakura e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 16 de Setembro de 1994.

Profa. Dra. 
Cílicia Yuko Wada

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Para minha família.

AGRADECIMENTOS

Foram muitos os colaboradores que possibilitaram a realização desta dissertação. Em especial, gostaria de agradecer:

- à Profa. Dra. Círcia Yuko Wada, pela orientação;
- à CAPES, pelo apoio financeiro;
- à amiga, Suely Ruiz Giolo, pela amizade e ajuda na elaboração dos gráficos e na revisão ortográfica;
- aos amigos conquistados no mestrado, em especial a Dione M. Valença, Damião Nóbrega da Silva, Fledson M. Guedes e Luz C. Bullon;
- aos funcionários da biblioteca, do laboratório de estatística e da limpeza da Unicamp, pelo cumprimento eficiente de seu trabalho propiciando condições para a realização desta dissertação.

A todos, meus sinceros agradecimentos.

SUMÁRIO

	Página
INTRODUÇÃO	vi
1 - MODELOS DE REGRESSÃO PARAMÉTRICOS PARA TESTES ACELERADOS: CONCEITOS BÁSICOS	1
1.1 - Introdução	1
1.2 - Tipos de Censura	3
1.3 - Conceitos Básicos de Distribuição de Tempo de Vida	6
1.4 - Estimação e Testes de Hipóteses	13
1.4.1 - Função de Verossimilhança	13
1.4.2 - Estimador de Máxima Verossimilhança	14
1.4.3 - Método Iterativo de Newton-Raphson	15
1.4.4 - Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança	16
1.5 - Procedimentos Gráficos para a Escolha de um Modelo Paramétrico	18
1.5.1 - Método Não-Paramétrico para Estimação da Função de Sobrevivência e do Risco Acumulado	18

1.5.2 - Gráficos Envolvendo as Estimativas das Funções de Sobrevivência e do Risco Acumulado	20
1.6 - Modelos de Regressão Paramétricos	21
1.6.1 - Modelos de Riscos Proporcionais	21
1.6.2 - Modelos de Tempos de Falha Acelerados	22
1.6.3 - Função de Verossimilhança Incorporando Variáveis Concomitantes	25
1.7 - Testes Acelerados	26
1.7.1 - Testes Acelerados em Modelos Paramétricos	28
1.7.2 - Estimação de Funções no Stress Usual	31
1.7.3 - Análise Não-Paramétrica	33
1.7.4 - Avaliação Gráfica do Modelo	34
1.7.4.1 - Avaliação da Proporcionalidade do Risco	34
1.7.4.2 - Avaliação da Distribuição de Vida	34
1.7.4.3 - Avaliação da Relação Stress-Vida	35
2 - MODELOS DE REGRESSÃO PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS	38
2.1 - Introdução	38
2.2 - Conceitos Básicos e Notações	39
2.2.1 - Abordagem de Prentice et al (1978)	39
2.2.2 - Abordagem de Cox (1959) e Moeschberger e David (1971)	42
2.2.3 - Tempos de Falha Latentes Independentes	47
2.3 - Problema da Identificabilidade	49
2.4 - Modelos de Regressão Paramétricos em Riscos Competitivos	51
2.4.1 - Modelos de Riscos Proporcionais	52
2.4.2 - Modelos de Tempos de Falha Acelerados	52
2.5 - Estimação de Parâmetros por Máxima Verossimilhança	53
2.6 - Testes Acelerados em Riscos Competitivos	58
2.6.1 - Testes Acelerados em Modelos Paramétricos em Riscos Competitivos	58

2.6.2 - Função de Verossimilhança para Testes Acelerados	60
2.6.3 - Avaliação Gráfica do Modelo	62
3 - MODELOS DE REGRESSÃO WEIBULL PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS	63
3.1 - Introdução	63
3.2 - Modelo de Regressão Weibull Independente para Testes Acelerados em Riscos Competitivos	64
3.2.1 - Estimação de Máxima Verossimilhança	65
3.2.2 - Estimação de Funções no Stress Usual	67
3.3 - Modelo Weibull Dependente em Riscos Competitivos	72
3.3.1 - Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin (BVW)	72
3.3.2 - Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin em Riscos Competitivos	74
3.4 - Modelo de Regressão BVW para Testes Acelerados em Riscos Competitivos	76
3.4.1 - Estimação de Máxima Verossimilhança	76
3.4.2 - Estimação de Funções no Stress Usual	83
4 - MODELO DE REGRESSÃO EXPONENCIAL BIVARIADO PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS	91
4.1 - Introdução	91
4.2 - Distribuição Exponencial Bivariada de Sarkar (ACBVE ₂)	92
4.3 - Distribuição Exponencial Bivariada de Sarkar em Riscos Competitivos	95
4.4 - Modelo de Regressão Exponencial Bivariado de Sarkar em Riscos Competitivos	97

4.5 - Estimação e Testes de Hipóteses	98
4.5.1 - Estimação de Máxima Verossimilhança	98
4.5.2 - Estimação de Funções no Stress Usual	100
4.5.3 - Testes de Hipóteses para Comparação das Distribuições de Sobrevivência	104
5 - APLICAÇÕES NUMÉRICAS	107
5.1 - Introdução	107
5.2 - Aplicação Numérica para Situações de Riscos Competitivos Independentes	110
5.2.1 - Descrição dos Dados	110
5.2.2 - Procedimentos Gráficos	113
5.2.2.1 - Avaliação da Proporcionalidade dos Riscos e do Modelo Weibull	113
5.2.2.2 - Avaliação da Relação Arrhenius	114
5.2.3 - Estimação de Parâmetros	116
5.2.4 - Testes de Hipóteses para os Parâmetros	117
5.2.5 - Análise Residual	118
5.2.6 - Estimação de Funções no Stress Usual	119
5.3 - Aplicação Numérica para Situações de Riscos Competitivos Dependentes com Distribuição BVW	124
5.3.1 - Descrição dos Dados	124
5.3.2 - Procedimentos Gráficos	126
5.3.2.1 - Avaliação da Proporcionalidade dos Riscos e do Modelo Weibull	127
5.3.2.2 - Avaliação da Relação Arrhenius	129
5.3.3 - Estimação de Parâmetros	130
5.3.4 - Testes de Hipóteses para os Parâmetros	131
5.3.5 - Análise Residual	131
5.3.6 - Estimação de Funções no Stress Usual	133

5.4 - Aplicação Numérica para Situações de Riscos	
Competitivos Dependentes com Distribuição $ACBVE_2$	138
5.4.1 - Descrição dos Dados	138
5.4.2 - Procedimentos Gráficos	141
5.4.3 - Estimação de Parâmetros	144
5.4.4 - Testes de Hipóteses para Comparação das Sobrevivências Marginais	144
5.4.5 - Estimação de Funções no Stress Usual	145
5.4.6 - Estimação do Risco e Sobrevivência Marginais Supondo Independência das Causas de Falha	148
5.4.7 - Comparação entre \tilde{G}_i e \tilde{S}'_i	150
 CONCLUSÕES	 152
 APÊNDICES	 154
A - Método Delta	155
B - Procedimento para Estimação Não-Paramétrica de P_i^* e π_i^*	157
C - Cálculo da Matriz de Informação de Fisher para o Modelo Weibull Independente	159
D - Tabelas	173
E - Programas Computacionais	184
 BIBLIOGRAFIA	 212

INTRODUÇÃO

Em análise de sobrevivência e confiabilidade existem algumas situações de teste de vida onde as falhas das unidades experimentais podem ocorrer devido a uma dentre k causas de falha. Nestas situações, frequentemente chamadas de *problemas de riscos competitivos*, observa-se de cada unidade o par (T, I) , onde T é o tempo de vida e I a correspondente causa de falha. Uma abordagem muito utilizada desse problema (Cox (1959), Moeschberger e David (1971), Gail (1975), dentre outros), associa à i -ésima causa um tempo de falha latente (ou teórico) T_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Assim, o tempo de vida observado de uma unidade é então $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_k)$ e a causa de falha é o valor de i tal que $T_i = \min(T_1, T_2, \dots, T_k)$.

Tais problemas de riscos competitivos também podem surgir em experimentos de testes acelerados industriais, onde as unidades são expostas a condições mais severas do que as de uso normal para a redução do tempo de teste e custos. Nesses casos, além do par (T, I) , outras informações são disponíveis, tais como variáveis concomitantes, denominadas "stress", que descrevem as diferentes condições nas quais o experimento foi conduzido.

Comumente suposta na literatura, a independência das causas de falha não é realística em diversos problemas de análise de sobrevivência e confiabilidade. Portanto, é desejável um modelo que permita incorporar tal dependência. No contexto de uma

única causa ou de k causas supostamente independentes, o modelo Weibull (e também o exponencial) tem encontrado considerável aceitação na modelagem de tempos de vida. Assim, pode ser razoável desenvolver procedimentos de estimação no contexto de riscos competitivos dependentes para algum modelo multivariado cujas distribuições marginais são Weibull (ou exponenciais).

O objetivo desta dissertação é desenvolver modelos paramétricos dependentes com distribuições marginais Weibull (ou exponenciais) para testes acelerados em problemas de riscos competitivos com causas de falha dependentes.

No Capítulo 1 primeiramente são introduzidas algumas notações e conceitos básicos de distribuição de tempo de vida; a seguir, é feita uma revisão dos modelos de regressão paramétricos mais utilizados. Ainda neste capítulo, é apresentada a teoria de testes acelerados. No Capítulo 2 são feitas revisões da teoria de riscos competitivos e dos conceitos básicos de confiabilidade e sobrevivência estendidos a riscos competitivos. Os modelos independentes e bivariados dependentes com marginais Weibull são utilizados em experimentos de testes acelerados no Capítulo 3, no contexto de riscos competitivos. No Capítulo 4 é investigado o modelo bivariado de Sarkar com marginais exponenciais, para testes acelerados no contexto de riscos competitivos. Finalmente, no Capítulo 5 são apresentadas aplicações numéricas ilustrativas dos modelos estudados nos Capítulos 3 e 4.

CAPÍTULO 1

MODELOS DE REGRESSÃO PARAMÉTRICOS PARA TESTES ACELERADOS: CONCEITOS BÁSICOS

1.1 - INTRODUÇÃO

A análise estatística de dados de tempo de vida tem sido realizada em estudos de diversas áreas especialmente em engenharia e ciências biomédicas, de forma que os objetos em estudo não precisam ser necessariamente organismos vivos (embora eles possam ser). Eles podem ser objetos inanimados, por exemplo, artigos produzidos em massa tal como lâmpadas elétricas, componentes elétricos ou vários tipos de equipamentos, com falha significando inabilidade para desempenhar uma função específica. Esses dados de tempo de vida frequentemente apresentam uma característica que causa problemas especiais para a sua análise e portanto requerem os métodos estatísticos especializados desenvolvidos em análise de sobrevivência e confiabilidade. Esta característica é conhecida como censura e surge em determinadas situações quando não é possível esperar que todas as unidades experimentais em teste falhem e é

necessário que o experimento se encerre num determinado tempo fixo, ou ainda, que ele se encerre depois que um certo número de falhas tenha ocorrido. Essas unidades que sobrevivem ao tempo fixo ou a um certo número de falhas chamam-se **Dados Censurados** e os correspondentes tempos, **Tempos de Censura**. Uma razão importante para especializar métodos estatísticos para dados de tempo de vida é a necessidade de acomodar a censura aos dados, uma vez que esta não é utilizada na análise clássica pois usualmente sua presença complica a distribuição teórica dos estimadores até mesmo quando o mecanismo de censura é simples.

→ Na indústria, mais precisamente na análise de confiabilidade de componentes manufaturados tais como, dispositivos elétricos, eletrônicos ou mecânicos, os resultados de interesse são: o percentual de falhas num determinado tempo t e algum percentil de vida sob condições normais de operação. Para estimá-los realiza-se um experimento de forma a se obter uma amostra de tempos de vida. No entanto, devido a alta confiabilidade dos atuais componentes, encontram-se dificuldades na obtenção de uma quantidade razoável de dados quando as condições de operação (ou stress) se aproximam das normais. Estes são então forçados a falhar mais rapidamente através de testes sob condições muito mais severas do que as condições pretendidas. Dessa forma, o tempo para a realização do experimento bem como seus custos são reduzidos. Tais testes são chamados **Testes Acelerados**. Os resultados obtidos nessas condições são então extrapolados para condições normais de forma a se obter uma estimativa da distribuição de vida sob essas condições. Nesses testes qualquer um dos mecanismos de censuras podem ser usados.

Este capítulo tem como objetivo introduzir os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento dos demais capítulos. Na seção 1.2 são explicados os tipos de censura e na seção 1.3, conceitos básicos de distribuições de tempo de vida e alguns modelos paramétricos contínuos que serão utilizados neste e em capítulos posteriores são apresentados. Métodos assintóticos para estimação e testes de hipóteses são introduzidos na seção 1.4. Na seção 1.5 são apresentados procedimentos gráficos para verificação do modelo assumido. Na seção 1.6 são abordados os modelos de regressão paramétricos, e finalmente, na seção 1.7 é apresentada a teoria de testes acelerados.

1.2 - TIPOS DE CENSURA

Formalmente, uma observação pode ser censurada à direita ou à esquerda. É dita censurada à direita em L se o seu tempo de falha não é conhecido mas somente que é maior ou igual a L . Similarmente, é dita censurada à esquerda em L se é apenas sabido que o seu tempo de falha é menor ou igual a L . A censura à direita é muito mais comum em dados de tempo de vida e é referida simplesmente por "censura". Somente a censura à direita será discutida aqui embora muitas das idéias transferem-se de forma óbvia para o caso de censura à esquerda. Dessa forma, quando uma unidade tiver seu tempo de vida censurado em L , chamaremos L o seu tempo de censura.

Os tipos de censura mais comumente encontrados nos estudos em geral são as censuras aleatórias, do Tipo I, Tipo II e Progressivas. Considerando n o número de unidades em estudo e supondo Y_i o tempo de vida associado a cada uma das unidades, tem-se que:

a) Censura Tipo I:

Algumas vezes os objetos de um experimento são observados por um período de tempo fixo de forma que o tempo de vida dos mesmos serão conhecidos exatamente somente se forem menores do que um valor pré-fixado. Seja τ_i , $i=1, 2, \dots, n$, o tempo de seguimento pré-fixado para cada objeto em estudo:

Se $Y_i \leq \tau_i$ ocorre a falha e se $Y_i > \tau_i$ ocorre a censura tipo I.

Quando os τ_i , $i=1, 2, \dots, n$, são iguais, ou seja, os n itens entram simultaneamente no estudo, as censuras são chamadas **Censuras Simples do Tipo I**; e quando estes são diferentes, no caso dos itens entrarem no estudo em tempos diferentes, as censuras são chamadas **Múltiplas do Tipo I**. As figuras 1.1a e 1.1b ilustram as diferenças entre ambas.

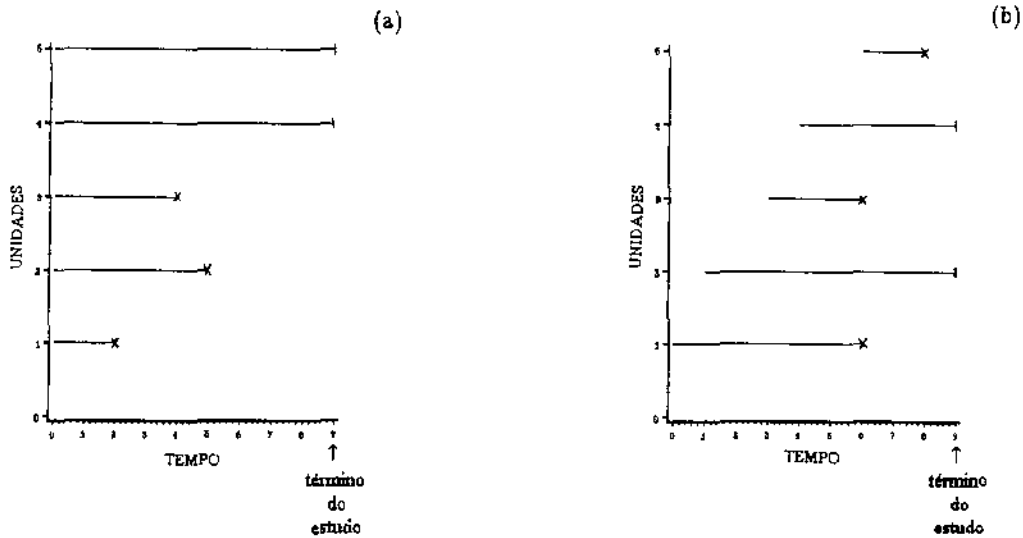


Figura 1.1: Censuras Simples do Tipo I (a), Censuras Múltiplas do Tipo I (b)
(x falha, | censura).

Assim, os tempos de vida dos ítems podem ser representados pelo par (T_i, δ_i) , onde:

$$T_i = \min(Y_i, \tau_i) \quad \text{e} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se falha} \\ 0 & \text{se censura.} \end{cases}$$

A censura Tipo I é muito comum na prática. Por exemplo, num teste de vida de componentes mecânicos ou eletrônicos, pode-se decidir terminar o teste em uma data na qual nem todos os tempos de vida dos componentes são conhecidos. Nesse tipo de experimento,

- o tempo de término do estudo é fixo e
- o número de falhas é aleatório.

b) Censura Tipo II:

Esse tipo de censura ocorre, por exemplo, quando n unidades são observadas até que ocorra a falha de r delas ($r \leq n$). As restantes $(n-r)$ são chamadas censuras do tipo II. O teste termina quando a r -ésima unidade falhar. Portanto, na amostra de n tempos de vida Y_1, Y_2, \dots, Y_n , r deles são tempos de falha e $n-r$ de censura. Esse esquema reduz o tempo de teste, uma vez que um tempo muito longo poderia ser necessário até que todas as unidades falhassem.

Uma generalização desse tipo de censura é a censura Tipo II Progressiva. Nesta observam-se r_1 falhas numa amostra de n unidades; então n_1 das $n-r_1$ unidades que não falharam são removidas do experimento, restando $n-r_1-n_1$ unidades ainda presentes. Quando mais r_2 unidades falharem, n_2 das unidades que ainda não falharam são removidas e assim por diante. O experimento termina após uma série pré-estabelecida de repetições deste procedimento.

Se todas as unidades são colocadas em teste simultaneamente ocorrem as censuras simples do tipo II. Caso contrário, ocorrem as censuras múltiplas do tipo II. As mesmas encontram-se ilustradas nas figuras 1.2a, 1.2b e 1.2c.

Neste tipo de experimento, ao contrário da censura do tipo I, tem-se:

- o tempo para término do estudo aleatório e
- o número de falhas fixo.

Segundo Nelson (1990, pag13), esse tipo de censura é mais comum na teoria pois é matematicamente mais tratável do que os demais esquemas de censura.

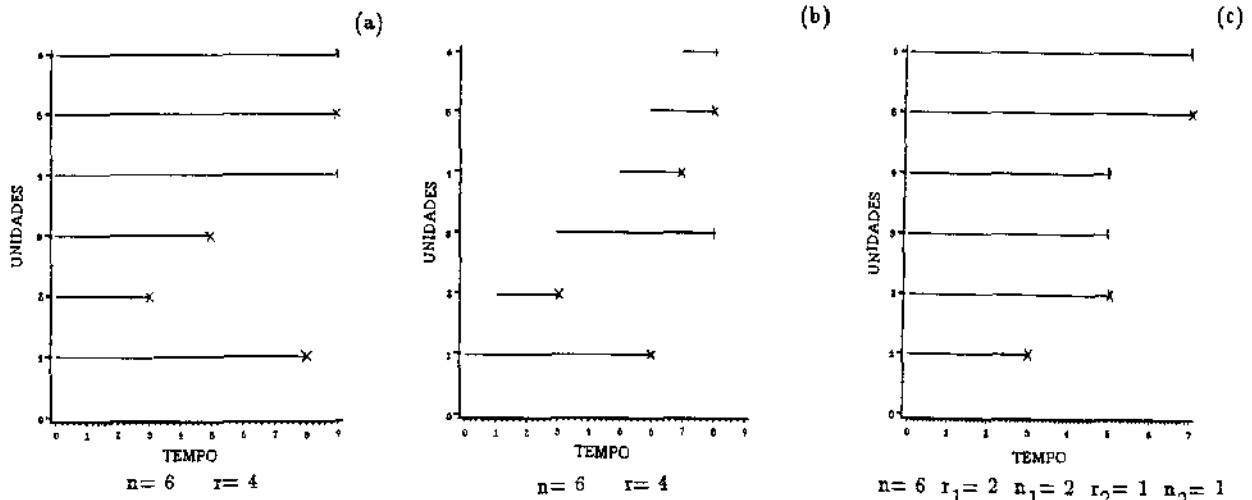


Figura 1.2: Censuras Simples do Tipo II (a), Censuras Múltiplas do Tipo II (b), Censuras Progressivas do Tipo II (c) (x falha, | censura).

c) Censura Aleatória:

Para esse esquema de censura, assume-se que o tempo de censura τ_i , $i=1, 2, \dots, n$, para a i -ésima unidade é uma variável aleatória contínua com funções

de sobrevivência e de densidade $G_i(t)$ e $g_i(t)$, respectivamente. Além disso, assume-se que $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ são estocasticamente independentes uns dos outros e dos tempos de falha Y_1, Y_2, \dots, Y_n (comumente denominada *censura independente*). Por exemplo, em um ensaio clínico os pacientes podem entrar no estudo de uma forma aproximadamente aleatória de acordo com seu tempo de diagnóstico. As censuras podem ocorrer devido às seguintes situações:

- término do estudo,
- o paciente não retorna ao tratamento e a observação é perdida,
- o paciente é retirado do experimento devido ao efeito negativo do tratamento.

Note que esse modelo de censura aleatória possui como caso especial a censura Tipo I. Para cada item observa-se, como na censura do Tipo I:

$$T_i = \min(Y_i, \tau_i) \quad \text{e} \quad \delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se falha} \\ 0 & \text{se censura.} \end{cases}$$

d) Censura Progressiva:

Nesse esquema, consideram-se que $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ são os tempos de censura fixos nos quais um número fixo de unidades c_1, c_2, \dots, c_m são removidas do teste. No tempo τ_m , ou um número fixo de c_m unidades são removidas do teste ou o teste termina com um número aleatório de c_m unidades ainda funcionando. Este procedimento também é muito comum na área industrial.

1.3 - CONCEITOS BÁSICOS DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPO DE VIDA

Considere uma variável aleatória contínua não-negativa T , representando o tempo de vida de um indivíduo ou dispositivo de uma população homogênea. A distribuição de probabilidade de T pode ser especificada de várias formas, três das quais são particularmente úteis em aplicações na sobrevivência: a Função de Densidade, a Função de Sobrevivência e a Função Risco.

A **Função de Densidade** é definida por:

$$f(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + dt)}{dt}, \quad 0 < t < \infty.$$

A probabilidade de um indivíduo sobreviver ao tempo t é dada pela **Função de Sobrevivência**:

$$S(t) = P(T \geq t) = \int_t^{\infty} f(x) dx. \quad (1.3.1)$$

Em alguns contextos, especialmente aqueles envolvendo tempos de vida de itens manufaturados, $S(t)$ é chamada **Função de Confiabilidade**. Note que $S(t)$ é uma função contínua monótona decrescente com $S(0) = 1$ e $S(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$. Reciprocamente,

$$f(t) = -\frac{\partial}{\partial t} S(t). \quad (1.3.2)$$

A **Função Risco** que especifica a taxa instantânea de falha em $T = t$, condicionada à sobrevivência ao tempo t é definida como:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + dt | T \geq t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t + dt)}{dt P(T \geq t)} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[P(T \geq t) - P(T \geq t + dt)]}{dt S(t)} = -\frac{\partial S(t)}{\partial t} \frac{1}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Em particular, $\lambda(t) dt$ é a probabilidade aproximada de falha em $[t, t + dt)$ dado que sobreviveu a t .

As funções $f(t)$, $S(t)$ e $\lambda(t)$ fornecem especificações matematicamente equivalentes da distribuição de T . Expressões para $S(t)$ e $f(t)$ são facilmente derivadas em termos de $\lambda(t)$. Das expressões (1.3.2) e (1.3.3) tem-se que

$$\lambda(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \ln S(x).$$

Assim,

$$\ln S(x) \Big|_0^t = - \int_0^t \lambda(x) dx,$$

e desde que $S(0) = 1$, encontra-se:

$$S(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right]. \quad (1.3.4)$$

Para alguns propósitos é útil definir a **Função Risco Acumulada**, a qual é expressa por:

$$H(t) = \int_0^t \lambda(x) dx. \quad (1.3.5)$$

Conseqüentemente,

$$S(t) = \exp[-H(t)].$$

Finalmente, em adição a (1.3.4), segue imediatamente de (1.3.3) que:

$$f(t) = \lambda(t) S(t) = \lambda(t) \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right]. \quad (1.3.6)$$

Desde que a taxa de falha $\lambda(t)$ varia com o tempo, é útil definir um único número médio o qual represente o comportamento da taxa de falha sob um intervalo de tempo. Uma forma natural de definir uma **Taxa de Falha Média (AFR)** entre o tempo t_1 e t_2 é integrar a taxa de falha sob o intervalo e dividir por $t_2 - t_1$. Isto é,

$$AFR(t_1, t_2) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}{t_2 - t_1} = \frac{\ln S(t_1) - \ln S(t_2)}{t_2 - t_1}. \quad (1.3.7)$$

Se o intervalo de tempo é de 0 a t , a AFR simplifica-se a

$$AFR(t) = -\frac{\ln S(t)}{t}. \quad (1.3.8)$$

A $f(t)$ e a $S(t)$ são representações comuns da distribuição de um variável aleatória. A função risco é uma caracterização mais especializada, mas é particularmente útil na modelagem de dados de sobrevivência. Frequentemente em aplicações, tem-se disponível a informação de como a taxa de falha muda com o tempo. Esta informação pode ser usada para modelar $\lambda(t)$ e facilmente traduzida em implicações para $S(t)$ e $f(t)$ usando as fórmulas acima. Por exemplo, na modelagem da idade na morte de populações humanas, $\lambda(t)$ é inicialmente grande devido à mortalidade por doenças infantis. Este é seguido de um período de relativamente baixa mortalidade depois da qual a taxa de mortalidade cresce muito rapidamente. Em outras aplicações,

riscos monotonicamente crescentes ou decrescentes podem ser sugeridos. Modelos com a função risco constante são importantes e têm uma estrutura particularmente simples. Tal informação qualitativa sobre $\lambda(t)$ é frequentemente útil na seleção de uma família de modelos de probabilidade para T. A seguir, para fins de ilustração consideram-se as seguintes distribuições:

a) A Distribuição Exponencial

A distribuição exponencial tem sido amplamente usada em estudos sobre tempos para falha de itens manufaturados e em pesquisas envolvendo tempos de sobrevivência ou remissão de doenças crônicas. A distribuição é caracterizada por uma função risco constante

$$\lambda(t) = \lambda, \quad t \geq 0, \tag{1.3.9}$$

onde $\lambda > 0$. A taxa de falha instantânea é independente de t, o que significa que a chance de falha em um intervalo de tempo de comprimento específico não depende do tempo que o objeto tenha permanecido no ensaio (propriedade da *Falta de Memória da Exponencial*). A $S(t)$ e a $f(t)$ são obtidas de (1.3.4) e (1.3.6) e são, respectivamente,

$$S(t) = \exp(-\lambda t) \quad \text{e} \quad f(t) = \lambda \exp(-\lambda t). \tag{1.3.10}$$

No caso particular onde $\lambda = 1$ a distribuição é chamada exponencial padrão. A figura 1.3 fornece um esboço das funções $\lambda(t)$, $f(t)$ e $S(t)$ para $\lambda = 1$.

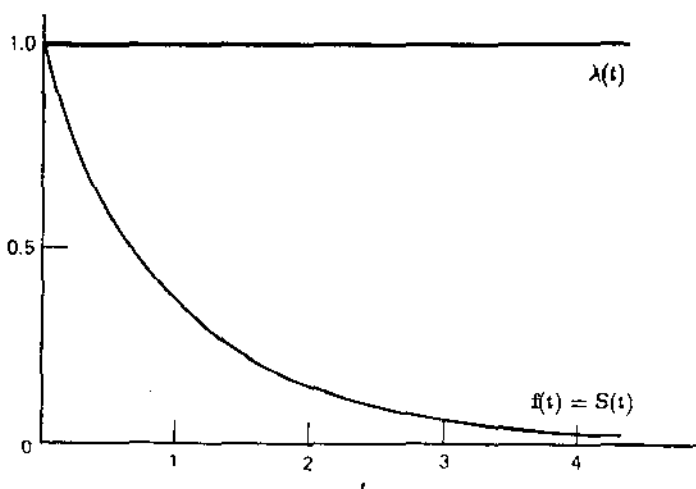


Figura 1.3: Função Risco, Função de Densidade e Função de Sobrevivência para o Modelo Exponencial Padrão.

O (100P)-ésimo percentil dessa distribuição é dado por:

$$t_P = -\frac{\ln(1-P)}{\lambda} \quad (1.3.11)$$

b) A Distribuição Weibull

A distribuição Weibull é talvez o modelo de distribuição de vida mais amplamente usado. Sua aplicação em conexão com tempos de vida de vários tipos de itens manufaturados, tais como: válvulas eletrônicas (Kao, 1959), rolamentos (Lieblein e Zelen, 1956) e isolamentos elétricos (Nelson, 1972), tem sido amplamente defendida (Weibull, 1951; Berretoni, 1964). É também amplamente usada em aplicações biomédicas. Por exemplo, em estudos sobre o tempo para a ocorrência de tumores em populações humanas (Whittemore e Altschuler, 1976) ou em animais de laboratório (Pike, 1966; Peto et al, 1972) e em muitas outras situações. Essa distribuição tem uma função risco da forma:

$$\lambda(t) = \delta t^{\delta-1} \alpha, \quad t > 0, \quad (1.3.12)$$

onde $\alpha > 0$, $\delta > 0$ são parâmetros de escala e de forma, respectivamente. Este modelo inclui o modelo exponencial como caso particular onde $\alpha = \lambda$ e $\delta = 1$. A forma da função de densidade Weibull depende do valor de δ , por isso, δ é chamado parâmetro de forma. De (1.3.4) e (1.3.6) obtem-se:

$$S(t) = \exp[-\alpha t^\delta], \quad t > 0 \quad (1.3.13)$$

e

$$f(t) = \delta t^{\delta-1} \alpha \exp[-\alpha t^\delta], \quad t > 0. \quad (1.3.14)$$

Os valores típicos de δ variam de caso a caso, mas em muitas situações distribucionais. δ na variação de 1 a 3 parece apropriada. A figura 1.4a mostra a forma da densidade para $\alpha = 1$ e vários valores de δ . A figura 1.4b apresenta as correspondentes funções risco. É possível notar que o risco é monotonicamente decrescente para $\delta < 1$, crescente para $\delta > 1$ e constante para $\delta = 1$. O (100P)-ésimo percentil da Weibull é dado por:

$$t_P = \left(-\frac{\ln(1-P)}{\alpha} \right)^{1/\delta} \quad (1.3.15)$$

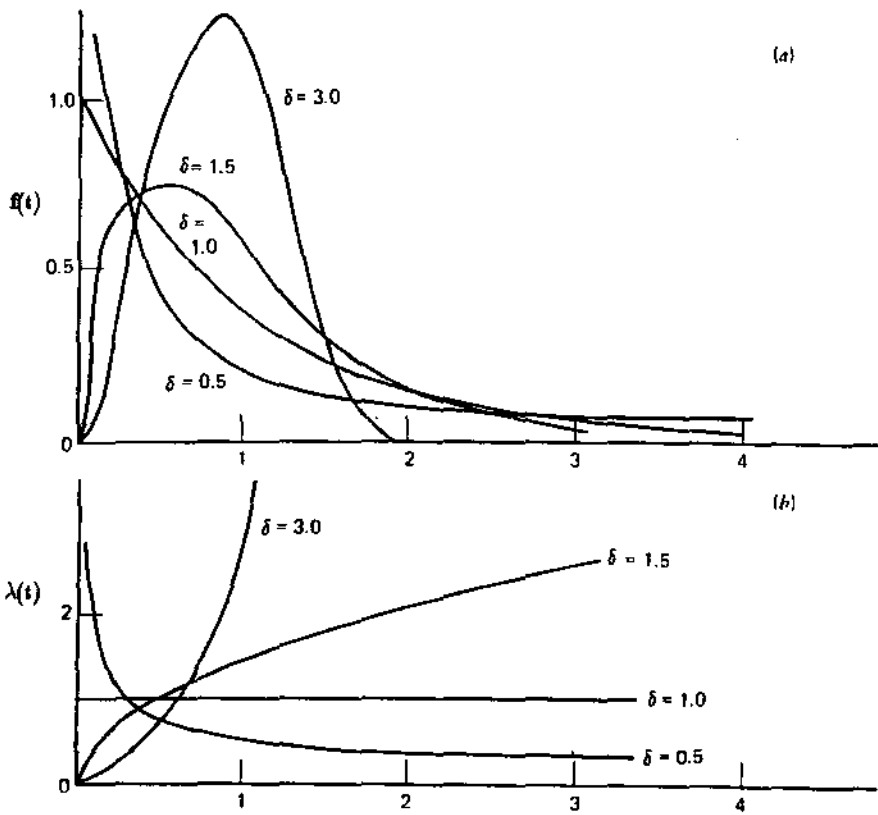


Figura 1.4: Funções de Densidade Weibull (a) e Funções Risco (b) para $\alpha=1$ e $\delta=0.5, 1.0, 1.5, \text{ e } 3.0$.

c) A Distribuição Valor Extremo

Esta distribuição é também conhecida como a Distribuição de Gumbel. Passou a ser assim também chamada depois que Gumbel (1958) a utilizou extensivamente em estudos de marés, aeronáutica, meteorologia, resistência a quebras, geologia e engenharia naval. A distribuição valor extremo tem função risco dada por:

$$\lambda(y) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < y < \infty, \tag{1.3.16}$$

onde $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala e $-\infty < \mu < \infty$ é o parâmetro de locação. De (1.3.4) e (1.3.6) obtém-se, respectivamente, as funções de sobrevivência e de densidade:

$$S(y) = \exp\left[-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < y < \infty \tag{1.3.17}$$

e

$$f(y) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[\frac{y-\mu}{\sigma} - \exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < y < \infty. \tag{1.3.18}$$

Esta distribuição está diretamente relacionada com a distribuição Weibull, pois se a variável aleatória T tem uma distribuição Weibull(α, δ), então $Y = \ln T$ tem uma distribuição valor extremo com parâmetro de escala $\sigma = \delta^{-1}$ e de locação $\mu = -\frac{\ln \alpha}{\delta}$. De fato, usando (1.3.13) tem-se:

$$S(y) = P(Y > y) = P(\ln T > y) = P(T > \exp[y]) = \exp[-\alpha(\exp[y])^\delta].$$

Fazendo $\mu = -\frac{\ln \alpha}{\delta}$ e $\sigma = \delta^{-1}$, obtém-se a forma mais comum da função de sobrevivência da valor extremo:

$$S(y) = \exp\left[-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right], \quad -\infty < y < \infty,$$

onde $\sigma > 0$ e $-\infty < \mu < \infty$. Quando os parâmetros μ e σ são, respectivamente, iguais a 0 e 1, a distribuição é conhecida como valor extremo padrão. O (100P)-ésimo percentil dessa distribuição é dado por:

$$\eta_P = \mu + u_P \sigma, \tag{1.3.19}$$

onde $u_P = \ln(-\ln(1-P))$ é o (100P)-ésimo percentil da valor extremo padrão.

d) A Distribuição LogNormal

Essa distribuição tem sido usada em diversas situações, como por exemplo, na análise de tempos de falha de isolamentos elétricos e no estudo de tempo para surgimento de câncer de pulmão em fumantes de cigarro.

Uma variável aleatória é dita log-normalmente distribuída se $\ln T$ é normalmente distribuída com média μ e variância σ^2 . A função de sobrevivência e a função de densidade são, respectivamente, dadas por:

$$S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right), \quad t > 0, \tag{1.3.20}$$

onde $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$, é a função de distribuição acumulada da Normal Padrão, e

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad t > 0. \tag{1.3.21}$$

De (1.3.3), a função risco pode ser obtida por: $\lambda(t) = \frac{f(t)}{S(t)}$. O (100P)-ésimo percentil é encontrado por:

$$t_p = \exp[\mu + z_p \sigma], \quad (1.3.22)$$

onde z_p é o (100P)-ésimo percentil da normal padrão. E para utilização em capítulos posteriores, é útil definir a média e a variância de T que são dadas por:

$$E(T) = \exp\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right] \quad (1.3.23)$$

e

$$V(T) = [\exp(\sigma^2) - 1] \exp[2\mu + \sigma^2]. \quad (1.3.24)$$

1.4 - ESTIMAÇÃO E TESTES DE HIPÓTESES

1.4.1 - Função de Verossimilhança

Lawless (1982) mostrou que embora de diferentes origens, a forma da função de verossimilhança obtida para amostras censuradas do tipo I, tipo II ou até mesmo para processos de censuras mais complicados que satisfazem a condição de existência de um tipo de quase-independência entre censura e falha, é a mesma. Nela, cada tempo de falha observado contribui com um termo $f(t_i)$ para a verossimilhança e cada tempo de censura contribui com um termo $S(\tau_i)$.

Supondo que os dados consistem de n observações independentes dos pares (t_i, δ_i) $i = 1, 2, \dots, n$, onde t_i é o tempo de falha ou de censura da i -ésima unidade e $\delta_i = 1$ se a i -ésima unidade falha e $\delta_i = 0$ se censura e cuja distribuição envolve um vetor de parâmetros desconhecidos $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$. A função de verossimilhança de θ é proporcional a:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i)^{\delta_i} S(t_i)^{1-\delta_i}.$$

Como $f(t) = \lambda(t)S(t)$, $L(\theta)$ pode ser reescrita por:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i)^{\delta_i} S(t_i) = \prod_{i=1}^n L_i(\theta), \quad (1.4.1)$$

com $L_i(\theta) = \begin{cases} f(t_i) = \lambda(t_i) S(t_i) & \text{se falha} \\ S(t_i) & \text{se censura.} \end{cases}$

Uma notação alternativa, denota F como o conjunto de observações que falharam e C como o conjunto de observações que censuraram. Então a verossimilhança pode ser escrita neste caso como:

$$L(\theta) = \prod_{i \in F} f(t_i) \prod_{i \in C} S(t_i). \quad (1.4.2)$$

1.4.2 - Estimador de Máxima Verossimilhança

O método utilizado para estimação dos parâmetros de modelos paramétricos requer a maximização da função de verossimilhança $L(\theta)$. Se $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ é o vetor de parâmetros desconhecidos e se $L(\theta)$ satisfaz certas condições de regularidade, então o estimador de máxima verossimilhança (EMV) de θ , denotado por $\hat{\theta}$, é assintoticamente a única solução para o vetor "score":

$$U(\theta)' = [U_1(\theta), U_2(\theta), \dots, U_p(\theta)] = \mathbf{0}_{1 \times p}, \quad (1.4.3)$$

onde $U_i(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta)$, $i = 1, 2, \dots, p$, são chamados "scores". As propriedades do estimador $\hat{\theta}$ são:

- $\hat{\theta}$ é consistente para θ ;
- sua distribuição assintótica é Normal Multivariada, com média θ e matriz de variância-covariância $\Sigma = I(\theta)^{-1}$, onde $I(\theta)$ é uma matriz $(p \times p)$, finita e positiva definida chamada Matriz de Informação de Fisher e é obtida por:

$$I(\theta) = \left(E \left(- \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln L(\theta) \right) \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, p. \quad (1.4.4)$$

Esta matriz pode ser consistentemente estimada por $I(\hat{\theta})$ ou ainda pela informação observada $I_0(\hat{\theta})$, também denotada por I_0 , onde:

$$I_0(\hat{\theta}) = \left(- \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln L(\theta) \right) \Big|_{\theta = \hat{\theta}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, p. \quad (1.4.5)$$

Assim, pode-se equivalentemente empregar a seguinte aproximação assintótica:

$$\hat{\theta} \approx N(\theta, I_0^{-1}). \quad (1.4.6)$$

1.4.3 - Método Iterativo de Newton-Raphson

Normalmente os estimadores não podem ser encontrados analiticamente, e portanto métodos numéricos iterativos de maximização são empregados. O mais utilizado é o método de Newton-Raphson, o qual baseia-se na expansão em Série de Taylor de primeira ordem de $U(\theta)$.

Metodologia:

Dado um valor inicial θ_0 , a estatística score em $\hat{\theta}$ pode ser escrita por:

$$U(\hat{\theta}) = U(\theta_0) - I_0(\theta^*) (\hat{\theta} - \theta_0),$$

onde θ^* está entre θ_0 e $\hat{\theta}$. Para um θ_0 na vizinhança de $\hat{\theta}$, $I_0(\theta^*)$ é aproximadamente igual a $I_0(\theta_0)$. Assim, fazendo $U(\hat{\theta}) = 0$ segue que:

$$\hat{\theta}_i = \theta_{i-1} + I_0(\theta_{i-1})^{-1} U(\theta_{i-1}). \quad (1.4.7)$$

Repete-se esse processo iterativo para $i = 1, 2, \dots$, até que algum critério de parada pré-estabelecido seja satisfeito. Por exemplo, parar quando em uma dada iteração o máximo do valor absoluto do vetor "score" for menor do que um especificado valor ϵ . Alguns comentários acerca do método podem ser feitos:

- Se os valores iniciais dos parâmetros são próximos a $\hat{\theta}$, o método converge rapidamente.

- A teoria de verossimilhança assintótica garante a forma normal para amostras grandes de $\hat{\theta}$, e neste caso o método é eficiente.

- O método tipicamente falha se a verossimilhança é multimodal.

1.4.4 - Testes de Hipóteses e Intervalos de Confiança

Quando os dados são censurados, testes e estimativas intervalares para os parâmetros podem ser baseadas em métodos assintóticos, isto é, baseados em grandes amostras.

a) Relacionados a θ_{px1}

Suponha que se deseja testar $H_0: \theta = \theta_0$ contra a alternativa $H_a: \theta \neq \theta_0$. Usualmente três estatísticas de teste são empregadas para testar H_0 .

a.1) Estatística de Wald

$$W = (\hat{\theta} - \theta_0)' I_0(\theta_0) (\hat{\theta} - \theta_0). \quad (1.4.8)$$

a.2) Estatística de Wilks (ou da Razão de Verossimilhança)

$$Q_W = -2 \ln R(\theta_0), \quad (1.4.9)$$

$$\text{onde } R(\theta_0) = \frac{L(\theta_0)}{L(\hat{\theta})}.$$

a.3) Estatística de Rao

$$Q_R = U(\theta_0)' I_0(\theta_0)^{-1} U(\theta_0). \quad (1.4.10)$$

As três estatísticas acima, sob H_0 , possuem distribuição assintótica χ^2 com p graus de liberdade.

b) Envolvendo Parâmetros de Perturbação

Suponha que o vetor θ de dimensão p seja particionado como $\theta' = (\theta_1', \theta_2')$, onde θ_1 tem dimensão q e θ_2 tem dimensão $(p-q)$ e a matriz de informação de Fisher particionada da seguinte forma:

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} i_{11}(\theta)_{q \times q} & i_{12}(\theta)_{q \times (p-q)} \\ i_{21}(\theta)_{(p-q) \times q} & i_{22}(\theta)_{(p-q) \times (p-q)} \end{bmatrix}$$

A inversa da matriz de informação de Fisher também é particionada como segue:

$$I(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} i^{11}(\theta) & i^{12}(\theta) \\ i^{21}(\theta) & i^{22}(\theta) \end{bmatrix}$$

onde $i^{11}(\theta) = (i_{11}(\theta) - i_{12}(\theta) (i_{22}(\theta))^{-1} i_{21}(\theta))^{-1}$.

Se é de interesse testar, $H_0: \theta_1 = \theta_0$ x $H_1: \theta_1 \neq \theta_0$, onde $\theta_0' = (\theta_{01}, \dots, \theta_{0q})$ é conhecido e se $\tilde{\theta}_2$ é o estimador de máxima verossimilhança de θ_2 sob H_0 , as três estatísticas são formuladas como:

b.1) Estatística de Wald

$$W = (\hat{\theta}_1 - \theta_0)' (i_0^{11}(\theta_0, \tilde{\theta}_2))^{-1} (\hat{\theta}_1 - \theta_0), \tag{1.4.11}$$

onde $i_0^{11}(\theta_0, \tilde{\theta}_2)$ é a submatriz de informação observada, sob H_0 , correspondendo a $i^{11}(\theta)$.

b.2) Estatística de Wilks

$$Q_W = -2 \ln R(\theta_0, \tilde{\theta}_2), \tag{1.4.12}$$

onde $R(\theta_0, \tilde{\theta}_2) = \frac{L(\theta_0, \tilde{\theta}_2)}{L(\hat{\theta})}$.

b.3) Estatística de Rao

$$Q_R = U(\theta_0, \tilde{\theta}_2)' i_0^{11}(\theta_0, \tilde{\theta}_2) U(\theta_0, \tilde{\theta}_2). \tag{1.4.13}$$

onde $U(\theta_0, \tilde{\theta}_2) = \left[\frac{\partial}{\partial \theta_{1j}} \ln L(\theta) \right]_{\theta_1 = \theta_0, \theta_2 = \tilde{\theta}_2}, j = 1, 2, \dots, q$.

Sob H_0 , as três estatísticas acima possuem distribuição assintótica χ^2 com q graus de liberdade.

Os intervalos de confiança aproximados para θ_i , $i=1, 2, \dots, p$, podem ser obtidos assumindo-se a normalidade assintótica de $\hat{\theta}$, ou seja, $\hat{\theta} \approx N(\theta, I_0^{-1})$. Alternativamente, pode-se usar a estatística Q_W para a obtenção dos intervalos de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para θ_i encontrando-se o conjunto de todos os valores θ_0 tais que $Q_W \leq \chi^2_{(1),\alpha}$.

1.5 - PROCEDIMENTOS GRÁFICOS PARA A ESCOLHA DE UM MODELO PARAMÉTRICO

Em geral não se tem conhecimento "a priori" da distribuição associada à variável em estudo. Uma escolha errônea da distribuição obviamente pode induzir a conclusões errôneas quando da realização de inferências sobre a população amostrada. Para evitar esse problema pode-se estimar a própria distribuição desconhecida através de um método não-paramétrico e depois disso realizar uma verificação gráfica com o objetivo de obter alguma evidência do modelo probabilístico do qual os dados foram extraídos, bem como obter estimativas iniciais dos parâmetros.

1.5.1 - Método Não-Paramétrico Para Estimação da Função de Sobrevivência e do Risco Acumulado

Considere uma amostra aleatória não censurada t_1, t_2, \dots, t_n de uma população com função de sobrevivência $S(t)$ e seja $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(n)}$ os dados ordenados. A função de sobrevivência $S(t)$ é estimada então através da **função de sobrevivência empírica** ou **amostral**, denotada por $\hat{S}(t)$, que é definida por:

$$\hat{S}(t) = \frac{(\text{número de observações} > t)}{n},$$

ou equivalentemente,

$$\hat{S}(t) = \frac{n-i}{n} = 1 - \frac{i}{n}. \tag{1.5.1}$$

o que implica em: $\hat{S}(t_{(0)})= 1$ e $\hat{S}(t_{(n)})= 0$. $\hat{S}(t)$ é uma função escada que decresce por $(1/n)$ exatamente depois de cada tempo de vida observado se todas as observações são distintas.

Para a incorporação de dados censurados na estimação de $S(t)$, Kaplan e Meier (1958) apresentaram uma modificação de (1.5.1) que tem sido chamada estimativa Produto Limite (P.L.) da função de sobrevivência, ou simplesmente, estimativa de Kaplan-Meier. Assim, sejam $t_{(1)} \leq t_{(2)} \leq \dots \leq t_{(r)}$ os r tempos de falha ordenados ($r \leq n$). Os tempos de censura l_i entram na ordenação e se censura e falha ocorrem ao mesmo tempo, convencionou-se ordenar censura depois da falha. A estimativa P.L. de $S(t)$ é definida como:

$$\hat{S}(t) = \prod_{j: t_{(j)} < t} \left[1 - \frac{d_j}{n_j} \right], \tag{1.5.2}$$

onde d_j = número de falhas no tempo j e
 n_j = número de unidades em risco no tempo j .

A variância de $\hat{S}(t)$ é estimada por:

$$\hat{V}(\hat{S}(t)) = (\hat{S}(t))^2 \sum_{j: t_{(j)} < t} \frac{d_j}{n_j(n_j - d_j)}. \tag{1.5.3}$$

As propriedades do estimador de Kaplan-Meier têm sido estudadas sob diversos aspectos. Basicamente $\hat{S}(t)$:

- É um estimador consistente de $S(t)$ sob certas condições;
- É estimador de máxima verosimilhança de $S(t)$;
- Possui distribuição assintótica normal.

Desde que a função risco acumulada é definida como $H(t) = -\ln S(t)$, uma estimativa natural da mesma é:

$$\hat{H}(t) = -\ln \hat{S}(t). \tag{1.5.4}$$

Uma estimativa alternativa de $H(t)$, que é algumas vezes chamada **função risco acumulada empírica**, é definida por:

$$\tilde{H}(t) = \sum_{j: t_{(j)} < t} \frac{d_j}{n_j} \quad (1.5.5)$$

A variância de $\hat{H}(t)$ (ou $\tilde{H}(t)$) é estimada por:

$$\hat{V}[\hat{H}(t) \text{ (ou } \tilde{H}(t))] = \frac{\hat{V}(\hat{S}(t))}{(\hat{S}(t))^2} \quad (1.5.6)$$

1.5.2 - Gráficos Envolvendo as Estimativas das Funções de Sobrevivência e do Risco Acumulado

Alguns gráficos podem ser usados para verificar se uma suposta e específica família paramétrica de modelos é razoável. A idéia básica é fazer gráficos que devem ser aproximadamente lineares se a família de modelos proposta é adequada, desde que a não linearidade pode ser prontamente visualizada.

Para verificar se uma determinada amostra é proveniente de uma população com distribuição exponencial, utiliza-se o fato que $\ln S(t) = -\lambda t$. Portanto se o modelo exponencial for apropriado, o gráfico $-\ln \hat{S}(t)$ x t resultante, além de ser aproximadamente linear deve passar pela origem. A inclinação da reta ajustada pode ser utilizada como uma estimativa inicial para o parâmetro de escala λ .

No caso da verificação do modelo Weibull, uma vez que $S(t) = \exp(-\alpha t^\delta)$, pode-se utilizar o gráfico $\ln(-\ln \hat{S}(t))$ x $\ln t$. Se o modelo Weibull for apropriado, o gráfico resultante deve ser aproximadamente linear. A inclinação da reta ajustada é útil como uma estimativa inicial para parâmetro de forma δ e o intercepto uma estimativa inicial para o \ln do parâmetro de escala α .

Alternativamente, pode-se traçar $\tilde{H}(t)$ ($\ln \tilde{H}(t)$) versus t ($\log t$), no caso exponencial (Weibull) com as mesmas características sendo esperadas.

Procedimentos similares aos descritos acima podem ser usados para modelos nos quais alguma transformação do tempo de vida T , $X = g(T)$, tem uma distribuição com parâmetro de locação-escala. Neste caso X tem função de sobrevivência da forma

(assumindo que X é uma função crescente de T):

$$P(X \geq x) = S_1\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = S(t) = P(T \geq t),$$

onde $t = g^{-1}(x)$. Então, $S_1^{-1}[S(t)] = \frac{x-\mu}{\sigma}$ é uma função linear de $x = g(t)$, e um gráfico de $S_1^{-1}[\hat{S}(t)]$ x $g(t)$ deve ser aproximadamente linear se a família de modelos sendo considerada é razoável. Ambas as distribuições, Weibull e exponencial, pertencem a esta categoria. Verificações similares podem ser feitas com outras distribuições. A distribuição log-normal para T , por exemplo, pode ser verificada pelo gráfico de $Q^{-1}[\hat{S}(t)]$ (ou $\phi^{-1}[\hat{S}(t)]$) x $\ln t$, onde

$$Q(x) = 1 - \phi(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,$$

é a função de sobrevivência da normal padrão.

1.6 - MODELOS DE REGRESSÃO PARAMÉTRICOS

Nas seções anteriores considerou-se a variável aleatória T representando o tempo de vida de um objeto de uma população homogênea. No entanto, pode ser de interesse analisar tempos de vida provenientes de populações heterogêneas. Uma forma de fazê-lo é através de modelos de Regressão Paramétricos.

O modelo de regressão paramétrico é assim chamado por envolver a especificação de um modelo para a distribuição do tempo de vida T dado o vetor de variáveis concomitantes z . Essa seção apresenta duas classes de modelos de regressão amplamente utilizadas na análise de dados de tempo de vida: a *Classe de Modelos de Riscos Proporcionais* e a *Classe de Modelos de Tempos de Falha Acelerados*.

1.6.1 - Modelos de Riscos Proporcionais

Nessa classe de modelos a razão entre as funções risco para duas observações com variáveis concomitantes z_1 e z_2 é constante com respeito ao tempo. Esse modelo assume que as variáveis concomitantes atuam multiplicativamente sobre a função risco.

Ou seja, a função risco pode ser escrita por:

$$\lambda(t|z) = \lambda_0(t) C(z; \beta), \quad (1.6.1)$$

onde

$z' = (z_1, z_2, \dots, z_p)$: vetor de variáveis concomitantes;

$\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$: vetor de coeficientes da regressão;

$C(z; \beta)$: é qualquer função de z e β tal que $C(z; \beta) \geq 0$ e

$\lambda_0(t)$: função risco básica, para uma observação com $C(z; \beta) = 1$.

O efeito de z na função de sobrevivência é dado por:

$$S(t|z) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u|z) du\right] = \exp\left[-\int_0^t \lambda_0(u) C(z; \beta) du\right] = [S_0(t)]^{C(z; \beta)}, \quad (1.6.2)$$

onde $S_0(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_0(u) du\right]$ é a função de sobrevivência básica quando $C(z; \beta) = 1$.

Várias formas funcionais para $C(z; \beta)$ são possíveis, mas a mais utilizada é $C(z; \beta) = \exp(\beta'z)$. Uma vantagem dessa forma é que a condição $C(z; \beta) \geq 0$ é automaticamente satisfeita para todo z e β . Em análises de experimentos de testes acelerados existem, em geral, razões físicas para a escolha dessa parametrização. Por esse motivo somente esta é tratada explicitamente, embora procedimentos similares possam ser desenvolvidos para modelos nos quais $C(z; \beta)$ é alguma outra função de z .

1.6.2 - Modelos de Tempos de Falha Acelerados

Essa classe de modelos assume que as variáveis concomitantes atuam multiplicativamente sobre T , ou em outras palavras, z atua aditivamente sobre a escala de $Y = \ln T$. Quando Y dado z , tem uma distribuição com parâmetro de locação $\mu(z)$ e um parâmetro de escala constante $\sigma > 0$, o modelo pode ser escrito na forma:

$$Y = \mu(z) + \sigma \mathfrak{E}, \quad (1.6.3)$$

onde \mathfrak{E} é o erro associado à Y cuja distribuição independe de z . Em termos da função

risco para T , pode-se demonstrar que esta é modelada por:

$$\lambda(t|z) = \lambda_0\left(t \exp[-\mu(z)]\right) \exp[-\mu(z)]. \quad (1.6.4)$$

Demonstração:

Utilizando a relação (1.6.3) e fazendo $T' = \exp(\sigma \mathfrak{E})$ obtem-se:

$$T = \exp Y = \exp[\mu(z) + \sigma \mathfrak{E}] = \exp[\mu(z)] T'.$$

Reciprocamente,

$$T' = T \exp[-\mu(z)].$$

Além disso, a função de sobrevivência de T é da forma:

$$\begin{aligned} S(t|z) &= P(T > t | z) = P\left(\exp[\mu(z) + \sigma \mathfrak{E}] > t\right) = \\ &= P\left(\mu(z) + \sigma \mathfrak{E} > \ln t\right) = P\left(\mathfrak{E} > \frac{\ln t - \mu(z)}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(\mathfrak{E} > \ln \left[\frac{t}{\exp[\mu(z)]}\right]^{1/\sigma}\right) = S_{\mathfrak{E}}\left[\ln \left[\frac{t}{\exp[\mu(z)]}\right]^{1/\sigma}\right]. \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{1}{\sigma} = \delta$ e $S_{\mathfrak{E}}(\ln w^{\delta}) = S_1(w^{\delta}) = S_0(w)$ pode-se reescrever $S(t|z)$ como:

$$S(t|z) = S_1\left[\left[\frac{t}{\exp[\mu(z)]}\right]^{\delta}\right] = S_0\left[\frac{t}{\exp[\mu(z)]}\right],$$

e usando o fato $\lambda(t|z) = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{S(t|z)}{S(t|z)}$ conclui-se que:

$$\begin{aligned} \lambda(t|z) &= -\frac{\frac{\partial}{\partial t} S_0\left[\frac{t}{\exp[\mu(z)]}\right]}{S_0\left[\frac{t}{\exp[\mu(z)]}\right]} = \frac{f_0\left(t \exp[-\mu(z)]\right)}{S_0\left(t \exp[-\mu(z)]\right)} \exp[-\mu(z)] = \\ &= \lambda_0\left(t \exp[-\mu(z)]\right) \exp[-\mu(z)]. \quad \square \end{aligned}$$

Essa classe de modelos é essencialmente distinta da classe de modelos de riscos proporcionais. Como será visto a seguir, o modelo Weibull (e consequentemente o modelo exponencial) pertence a ambas as classes.

A distribuição Weibull de dois parâmetros tem um parâmetro de escala α e um de forma δ , que pode ser estendido para um modelo de regressão fazendo α e δ depender de \mathbf{z} . Os modelos de regressão Weibull mais comumente usados são aqueles nos quais somente α , e não δ , depende de \mathbf{z} . A f.d.p. do tempo de vida dado \mathbf{z} é da forma:

$$f(t|\mathbf{z}) = \delta t^{\delta-1} \alpha(\mathbf{z}) \exp[-\alpha(\mathbf{z}) t^\delta], \quad t \geq 0. \quad (1.6.5)$$

A função de sobrevivência dado \mathbf{z} é expressa por:

$$S(t|\mathbf{z}) = \exp[-\alpha(\mathbf{z}) t^\delta], \quad t \geq 0, \quad (1.6.6)$$

e a função risco dado \mathbf{z} por:

$$\lambda(t|\mathbf{z}) = \frac{f(t|\mathbf{z})}{S(t|\mathbf{z})} = \delta t^{\delta-1} \alpha(\mathbf{z}), \quad t \geq 0. \quad (1.6.7)$$

É possível verificar que a razão entre $\lambda(t|\mathbf{z}_1)$ e $\lambda(t|\mathbf{z}_2)$ é constante com respeito ao tempo t , ou seja,

$$\frac{\lambda(t|\mathbf{z}_1)}{\lambda(t|\mathbf{z}_2)} = \frac{\alpha(\mathbf{z}_1)}{\alpha(\mathbf{z}_2)}.$$

Logo, a Weibull pertence à classe dos modelos de riscos proporcionais dada em (1.6.1). Para isso, com $\lambda_0(t) = \delta t^{\delta-1}$ e com $C(\mathbf{z}; \beta) = \alpha(\mathbf{z}) = \exp(\beta' \mathbf{z})$, a função risco da Weibull pode ser reescrita por:

$$\lambda(t|\mathbf{z}) = \delta t^{\delta-1} \exp(\beta' \mathbf{z}), \quad t \geq 0. \quad (1.6.8)$$

Para mostrar que a Weibull pertence à classe dos modelos de tempos de falha acelerados, considere $Y = \ln T$ cuja distribuição é valor extremo $(\mu(\mathbf{z}), \sigma)$ onde o parâmetro de locação $\mu(\mathbf{z}) = -\frac{\ln \alpha(\mathbf{z})}{\delta} = -\frac{\beta' \mathbf{z}}{\delta}$ e o parâmetro de escala $\sigma = \frac{1}{\delta}$. Então Y pode ser escrito como um modelo de Tempo de Falha Acelerado

$$Y = \mu(\mathbf{z}) + \sigma \mathbf{E} = -\frac{\beta' \mathbf{z}}{\delta} + \sigma \mathbf{E}, \quad (1.6.9)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ tem distribuição valor extremo padrão, desde que:

$$S_{\varepsilon}(e) = P(\boldsymbol{\varepsilon} > e) = P\left[\frac{Y - \mu(\mathbf{z})}{\sigma} > e\right] = P(Y > \sigma e + \mu(\mathbf{z})) = \exp[-\exp(e)].$$

Desse modo, de (1.6.4), a função risco de T é dada por:

$$\lambda(t | \mathbf{z}) = \lambda_0 \left(t \exp\left[\frac{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{z}}{\delta}\right] \right) \exp\left[\frac{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{z}}{\delta}\right] = \delta \left(t \exp\left[\frac{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{z}}{\delta}\right] \right)^{\delta-1} \exp\left[\frac{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{z}}{\delta}\right] = \delta t^{\delta-1} \exp(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{z}),$$

que é exatamente a função risco em (1.6.8). Logo, a Weibull pertence às duas classes de modelos acima. Kalbfleisch e Prentice (1980) mostraram que o modelo Weibull (e conseqüentemente o modelo Exponencial) é o único modelo em ambas as classes.

1.6.3 - Função de Verossimilhança Incorporando Variáveis Concomitantes

Suponha que a cada unidade esteja associado um tempo de falha ou de censura t_i e um vetor de variáveis concomitantes $\mathbf{z}_i' = (z_{i1}, \dots, z_{ip})$. Na seção (1.4.1) foi visto que a verossimilhança pode ser inteiramente escrita em termos da função risco $\lambda(t | \mathbf{z})$. Assim, as variáveis concomitantes e seus correspondentes parâmetros de regressão podem ser imediatamente incorporados a ela, possibilitando que a estimação e inferência procedam como usualmente. Dessa forma, a verossimilhança baseada em n observações sujeitas à censura é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n \lambda(t_i | \mathbf{z}_i)^{\delta_i} S(t_i | \mathbf{z}_i) = \prod_{i=1}^n L_i(\boldsymbol{\theta}), \quad (1.6.10)$$

com $L_i(\boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \lambda(t_i | \mathbf{z}_i) S(t_i | \mathbf{z}_i) & \text{se falha} \\ S(t_i | \mathbf{z}_i) & \text{se censura} \end{cases}$, ou equivalentemente,

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i \in F} f(t_i | \mathbf{z}_i) \prod_{i \in C} S(t_i | \mathbf{z}_i).$$

A estimação e testes de hipóteses para $\boldsymbol{\theta}$ podem ser feitos de maneira análoga aos obtidos nas seções (1.4.2), (1.4.3) e (1.4.4).

1.7 - TESTES ACELERADOS

Como dito na introdução do capítulo, o teste de vida acelerado de um produto é comumente usado para reduzir o tempo de teste e os custos operacionais. Este teste é realizado submetendo-se as unidades em teste a condições de stress mais severas do que as de uso normal. O conceito básico de aceleração é simples. Por hipótese, um componente operando sob certos níveis crescentes de stress tem exatamente os mesmos mecanismos de falha como visto quando usado sob stress normal (ou também chamado stress nominal). A única diferença é que as falhas "ocorrem mais rapidamente". Por exemplo, se as falhas por corrosão ocorrem sob temperatura e umidade de uso normal, então o mesmo tipo de corrosão acontecerá mais rapidamente num ambiente úmido sob temperatura elevada. Em outras palavras, pode-se pensar no tempo como sendo acelerado, como se o processo de falha fosse filmado e então repetido em uma velocidade maior. Todo passo na sequência de eventos químicos ou físicos levando ao estado de falha ocorre exatamente como em stress mais baixo; somente a escala do tempo que mede a duração de evento é mudada. Isto significa que na escolha de valores mais altos dos níveis de stress, deve-se assegurar que o stress não seja tão severo a ponto de introduzir modos de falha completamente diferentes ou a ponto de causar falhas instantâneas das unidades em teste implicando numa distribuição degenerada (possivelmente em zero) dos tempos de falha. Quando se encontra uma classe de valores de stress sobre a qual esta suposição é satisfeita é dito que se tem **Aceleração Verdadeira**.

Existem vários métodos para condução de um teste acelerado. O método mais simples tanto do ponto de vista físico quanto da análise e inferência e que será adotado nesse e em capítulos posteriores, é conhecido como **Teste Acelerado de Stress-Constante**. Este envolve a escolha de vários níveis de um ou mais tipos de stress, e então executa-se um teste de vida de stress constante para cada uma das combinações dos níveis de stress escolhidos. Por exemplo, na situação onde k níveis de um único stress são escolhidos, k testes de vida devem ser executados, um para cada nível do stress. Na situação de dois tipos de stress, supondo que se tenha escolhido K níveis de um stress e l níveis do outro, um total de $(k \times l)$ testes devem ser realizados, um para cada combinação de seus níveis. A figura 1.7a mostra um gráfico que ilustra a situação de um teste com um único stress com três níveis. O símbolo "x" denota falha da

unidade em teste no correspondente tempo, e "o→" denota censura.

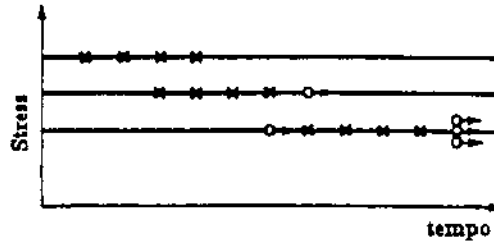


Figura 1.7a: Teste Acelerado de Stress-Constante (x falha, o→ censura)

Um segundo método comumente empregado na prática, porém com uma quantidade literária limitada a respeito da análise de dados obtidos de tal teste, é o chamado **Teste Acelerado de Stress-Escada**. Ao invés de escolher um determinado nível do stress e mantê-lo constante por todo tempo, como no teste anterior, os níveis crescentes do stress são introduzidos em estágios, assim eles formam uma função escada sobre o tempo. Usualmente todas as unidades são testadas com o mesmo padrão pré-especificado de níveis de stress. No entanto, algumas vezes diferentes padrões podem ser aplicados a diferentes grupos de unidades. A figura 1.7b mostra um exemplo com dois de tais padrões.

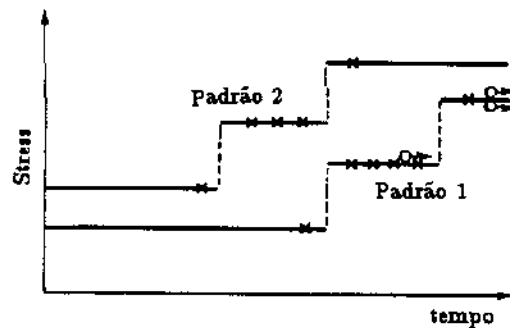


Figura 1.7b: Teste Acelerado de Stress-Escada (x falha, o→ censura)

Finalmente, no terceiro e último método chamado **Teste Acelerado de Stress-Progressivo**, é assumido que o stress é uma função crescente do tempo. Analogamente ao teste de stress-escada, diferentes grupos de unidades podem ser testadas em diferentes padrões de stress-progressivo. Uma versão simples desse teste com um único stress, admite um crescimento linear do stress sobre o tempo. Allen (1959) discute

métodos para análise de dados provenientes de tal teste. A figura 1.7c ilustra o referido teste com três padrões - cada um admitindo um stress linearmente crescente.

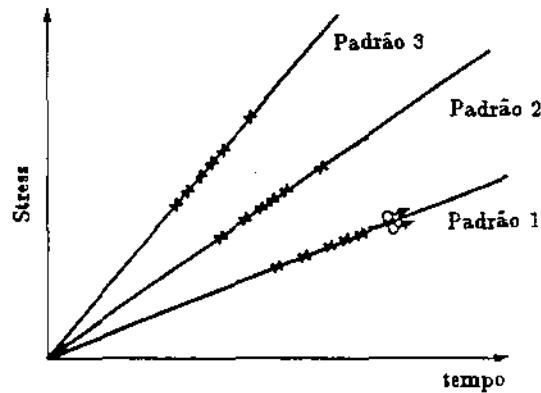


Figura 1.7c: Teste Acelerado de Stress-Progressivo (x falha, o → censura).

Como mencionado anteriormente, o método adotado nesse e em capítulos posteriores baseia-se somente em **Teste Acelerado de Stress-Constante**, que de agora em diante será simplesmente referido como **Teste Acelerado**.

1.7.1 - Testes Acelerados em Modelos Paramétricos

O principal problema com inferência de testes acelerados, é que afirmativas acerca do comportamento de falha das unidades sob stress normal têm que ser feitas usando dados obtidos de testes com níveis de stress acima do nominal. Uma forma paramétrica de abordar este problema e que foi discutido por Pieruschka (1961), assume que as distribuições de vida das unidades sob vários níveis de stress pertencem à mesma família de distribuições e que seus parâmetros mudam com os níveis de stress de acordo com **relações de stress-vida** especificadas com parâmetros desconhecidos. Assim o modelo resultante, que nada mais é do que um modelo de regressão paramétrico, é uma combinação de uma distribuição de vida com uma relação de stress-vida. Uma vez que se tem como objetivo fazer a extrapolação a níveis de stress de uso normal, essas relações de stress-vida são normalmente derivadas do entendimento da física de falha do dispositivo em discussão.

Mais formalmente, seja $f(t; \theta)$ onde $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$, a função de densidade da variável aleatória tempo de falha da unidade experimental sujeita ao j -ésimo nível do stress V , $j = 1, 2, \dots, s$. Cada parâmetro θ_i , $i = 1, 2, \dots, p$, da distribuição paramétrica é expresso como uma função desse nível de stress V_j , $j = 1, 2, \dots, s$, segundo a relação:

$$\theta_i(V_j) = \phi_i(V_j, \beta_i), \quad (1.7.1)$$

onde $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{iq})$, $i = 1, 2, \dots, p$. Esta relação é conhecida e válida para certos níveis de V . Observe que uma unidade experimental pode estar sujeita a mais de um tipo de stress. Nesse caso, na relação acima, V_j é uma combinação dos níveis dos diferentes tipos de stress. O objetivo passa a ser então, obter as estimativas dos parâmetros β_{il} , $i = 1, 2, \dots, p$, $l = 0, 1, 2, \dots, q$, utilizando-se a teoria de regressão e então usa-las para fazer inferências acerca de θ para as condições de uso normal.

Desde que a distribuição Weibull é extremamente flexível tendo como caso particular a distribuição exponencial, a mesma é amplamente usada na prática. Desse modo, a discussão dessa seção limita-se a essa distribuição. A definição de um modelo Weibull-Stress-Vida é feita supondo, em concordância com Mann (1972), que o parâmetro de forma da Weibull, δ , é constante e que somente o parâmetro de escala α muda quando mudam-se os níveis do stress. Então, sob uma aplicação constante do j -ésimo nível do stress V , $j = 1, 2, \dots, s$, uma unidade com distribuição de tempo de falha Weibull possui a seguinte função de densidade:

$$f(t; \delta, \alpha_j) = \delta t^{\delta-1} \alpha_j \exp[-\alpha_j t^\delta], \quad t \geq 0,$$

onde $\alpha_j = \phi(V_j, \beta)$, $j = 1, 2, \dots, s$. Em situações de um único tipo de stress, três relações entre α e V_j têm sido sugeridas na literatura:

a) Relação Lei de Potência

$$\alpha_j = [\exp(\gamma_0) V_j^{\gamma_1}]^\delta = \exp[\beta_0 + \beta_1 \ln V_j] = \exp(\beta' V_j), \quad (1.7.1)$$

onde $V_j' = (1, \ln V_j)$, $\beta' = (\beta_0, \beta_1)$ e V é voltagem. Este modelo foi derivado via considerações da teoria cinética e energia de ativação. Aplicações incluem, dentre

outras, testes para:

- Isolamentos elétricos e dielétricos;
- lâmpadas incandescentes e
- lâmpadas para flash.

b) Relação Taxa de Reação de Arrhenius

$$\alpha_j = [\exp(\gamma_0 + \gamma_1 g_1(V_j))]^\delta = \exp(\beta_0 + \beta_1 g_1(V_j)) = \exp(\beta' V_j), \quad (1.7.2)$$

onde $g_1(V_j) = -\frac{1000}{V_j}$, V é a temperatura absoluta obtida pela soma da temperatura em graus Celsius mais 273.16, $V_j' = (1, -\frac{1000}{V_j})$ e $\beta' = (\beta_0, \beta_1)$. Este modelo foi derivado empiricamente e é utilizado quando somente stresses termais são significantes. É usada para descrever a falha de muitos produtos como um resultado da degradação devido a reações químicas ou difusão de metal. Suas aplicabilidades para diversos materiais, principalmente para os materiais semi-condutores, foram discutidas por Thomas (1964) e Pershing e Hollingsworth (1964).

c) Relação Eyring Para Um Único Stress

$$\begin{aligned} \alpha_j &= [V_j \exp(\gamma_0 + \gamma_1 g_1(V_j))]^\delta = V_j^\delta \exp(\beta_0 + \beta_1 g_1(V_j)) = \\ &= \exp(\beta_0 + \beta_1 g_1(V_j) + \beta_2 \ln V_j) = \exp(\beta' V_j). \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

onde $V_j' = (1, -\frac{1000}{V_j}, \ln V_j)$, $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ e V é a temperatura absoluta. Este modelo tem derivação teórica baseada nos princípios da mecânica quântica e expressa o parâmetro de escala como uma função da temperatura operante. É uma relação alternativa para a relação Arrhenius. Para a maioria das aplicações ambas ajustam-se bem aos dados.

Essas relações, conjuntamente com as suposições acima, definem os modelos Weibull-Lei de Potência, Weibull-Arrhenius e Weibull-Eyring, respectivamente.

1.7.2 - Estimação de Funções no Stress Usual

Desde que um dos objetivos em testes acelerados é também obter estimativas de percentis e de frações de sobrevivência (ou de falha) em um dado tempo t em stress de uso normal, intervalos de confiança aproximados para estas quantidades podem ser encontrados utilizando-se aproximações normais usuais. Seja V_u o stress de uso normal e a forma geral para α_u :

$$\alpha_u = \exp(\beta' V_u), \tag{1.7.4}$$

onde $V_u' = (g_0(V_u), g_1(V_u), \dots, g_p(V_u))$ $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$, que inclui as relações anteriormente mencionadas como casos particulares. Seguem-se as seguintes estimativas:

a) Estimativa de percentil no stress usual V_u

Da relação em (1.3.13) verifica-se que, $S(t | V_u) = \exp[-\alpha_u t^\delta]$. Fazendo $P = 1 - S(t | V_u)$, obtem-se reciprocamente que o $(100P)$ -ésimo percentil em stress V_u é estimado por:

$$\hat{t}_{P_u} = \left(-\frac{\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_u} \right)^{1/\hat{\delta}} \tag{1.7.5}$$

onde $\hat{\alpha}_u$ e $\hat{\delta}$ são os EMV de α_u e δ , respectivamente.

Limites de confiança aproximados para essa quantidade podem ser obtidos por exponenciação do intervalo de confiança para $\ln \hat{t}_{P_u}$. A aproximação $(\hat{\delta}, \hat{\beta}) \approx N((\delta, \beta), \hat{\Sigma})$, onde $\hat{\Sigma} = I_0^{-1}$ é a matriz de variância-covariância assintótica estimada de $(\hat{\delta}, \hat{\beta})$, resulta na seguinte aproximação para grandes amostras:

$$\ln \hat{t}_{P_u} \approx N(\ln t_{P_u}, \sigma_{P_u}^2),$$

onde $\sigma_{P_u}^2$ é obtida pelo método delta (Apêndice A) por:

$$\sigma_{P_u}^2 = \hat{H}' \hat{\Sigma} \hat{H}, \tag{1.7.6}$$

com

$$\hat{H}' = \left[\frac{\partial}{\partial \delta} \ln t_{P_u}, \frac{\partial}{\partial \beta_0} \ln t_{P_u}, \dots, \frac{\partial}{\partial \beta_p} \ln t_{P_u} \right]_{(\delta, \beta) = (\hat{\delta}, \hat{\beta})}$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln t_{P_u} = -\frac{1}{\delta^2} \left[\ln(-\ln(1-P)) - \beta' \mathbf{V}_u \right],$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \beta_v} \ln t_{P_u} = -\frac{1}{\delta} g_v(\mathbf{V}_u), \quad v = 0, 1, \dots, p.$$

Assim, o intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para t_{P_u} é dado por:

$$[\hat{t}_{P_u} \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{P_u}); \hat{t}_{P_u} \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{P_u})]. \quad (1.7.7)$$

A aproximação normal para $\ln \hat{t}_{P_u}$ implica em uma distribuição assintótica LogNormal($\ln t_{P_u}$, $\sigma_{P_u}^2$) para \hat{t}_{P_u} . Por consequência, \hat{t}_{P_u} é um estimador viciado para t_{P_u} com vício $\exp(\frac{\sigma_{P_u}^2}{2})$, desde que sua esperança é dada por:

$$E(\hat{t}_{P_u}) = \exp\left(\ln t_{P_u} + \frac{\sigma_{P_u}^2}{2}\right).$$

Portanto, um estimador não-viciado para t_{P_u} , denotado por \tilde{t}_{P_u} , é da forma:

$$\tilde{t}_{P_u} = \hat{t}_{P_u} \exp\left(-\frac{\sigma_{P_u}^2}{2}\right). \quad (1.7.8)$$

b) Estimativa da função risco acumulada no stress usual V_u

Em um dado tempo t_0 , a função risco acumulada estimada em stress normal V_u é obtida por:

$$\hat{H}(t_0 | V_u) = \hat{\alpha}_u t_0^{\hat{\delta}}. \quad (1.7.9)$$

Analogamente a \hat{t}_{P_u} , este estimador é viciado para $H(t_0 | V_u)$ com vício $\exp(\sigma_u^2(t_0)/2)$, desde que a aproximação normal para $(\hat{\delta}, \hat{\beta})$, pelo método delta, implica que $\ln \hat{H}(t_0 | V_u)$ tem distribuição assintótica normal com média $\ln H(t_0 | V_u)$ e variância estimada por:

$$\sigma_u^2(t_0) = (g_0(\mathbf{V}_u), g_1(\mathbf{V}_u), \dots, g_p(\mathbf{V}_u), \ln t_0) \hat{\Sigma} (g_0(\mathbf{V}_u), g_1(\mathbf{V}_u), \dots, g_p(\mathbf{V}_u), \ln t_0)'. \quad (1.7.10)$$

Portanto, $\hat{H}(t_0 | V_u) \approx \text{LogNormal}(\ln H(t_0 | V_u), \sigma_u^2(t_0))$. Um estimador não-viciado para $H(t_0 | V_u)$ é dado por:

$$\hat{H}(t_0 | V_u) = \hat{H}(t_0 | V_u) \exp\left(-\frac{\sigma_u^2(t_0)}{2}\right). \quad (1.7.11)$$

O intervalo de confiança aproximado de $(1-\alpha)100\%$ para $H(t_0 | V_u)$, obtido por exponenciação do intervalo para $\ln \hat{H}(t_0 | V_u)$, possui a forma:

$$\left[\hat{H}(t_0 | V_u) \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_u(t_0)); \hat{H}(t_0 | V_u) \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_u(t_0)) \right].$$

c) Estimativa da função de sobrevivência no stress usual V_u

A sobrevivência no tempo t_0 e stress V_u pode ser estimada por:

$$\hat{S}(t_0 | V_u) = \exp(-\hat{H}(t_0 | V_u)). \quad (1.7.12)$$

Ou alternativamente, utilizando o estimador não-viciado $\tilde{H}(t_0 | V_u)$.

O intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para $S(t_0 | V_u)$ pode ser calculado por exponenciação do intervalo para $H(t | V_u)$ e é escrito por:

$$\left[\hat{S}(t_0 | V_u)^{\exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_u(t_0))}; \hat{S}(t_0 | V_u)^{\exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_u(t_0))} \right]. \quad (1.7.13)$$

1.7.3 - Análise Não-Paramétrica

A análise não-paramétrica de dados não envolve uma forma paramétrica da distribuição, ou seja, o ajuste é livre de distribuição. O modelo de regressão semi-paramétrico de Cox que é amplamente difundido na literatura médica, emprega relações paramétricas entre stress e vida, somente a distribuição de vida não tem uma forma paramétrica assumida. Apesar de ser amplamente usada para dados de vida biomédicos, estimativas não-paramétricas são raramente usadas para dados de engenharia. Primeiro, estimativas não-paramétricas não são tão acuradas quanto as paramétricas uma vez que a distribuição paramétrica assumida é adequada. Segundo, estimativas não-paramétricas de percentis ou de fração de falha fora da amplitude dos dados amostrais não existe, ou seja, não se pode extrapolar para as caudas inferior e superior da distribuição. Portanto, pode ser usado para extrapolar em stress mas não em tempo, porque é livre de

distribuição. Dessa forma, é útil somente para estimar a amplitude observada da distribuição de vida em condições de uso normal. Por esse motivo tal modelo não será abordado.

1.7.4 - Avaliação Gráfica do Modelo

A acuidade de estimativas e de intervalos de confiança dependem de quão bem estão satisfeitas certas suposições:

- os riscos são proporcionais, ou equivalentemente, o parâmetro de forma da Weibull possui o mesmo valor em todos os níveis do stress;
- a relação stress-vida é adequada;
- a distribuição de vida assumida é adequada.

Para verificação dessas suposições alguns métodos gráficos são úteis.

1.7.4.1 - Avaliação da Proporcionalidade dos Riscos

A verificação dessa suposição pode ser feita calculando-se as estimativas P.L. da sobrevivência para os dados em cada nível do stress, V_j , $j= 1, 2, \dots, s$. Os gráficos do $\ln(-\ln\hat{S}(t|V_j)) \times t$, ou alternativamente $\ln(-\ln\hat{S}(t|V_j)) \times \ln t$, $j= 1, 2, \dots, s$, devem ser aproximadamente paralelos se a suposição de proporcionalidade dos riscos for apropriada.

1.7.4.2 - Avaliação da Distribuição de Vida

Para a avaliação dessa suposição dois métodos são comumente usados:

No primeiro, se a suposição de distribuição Weibull for adequada, os gráficos do $\ln(-\ln\hat{S}(t|V_j)) \times \ln t$ para cada nível do stress, V_j , $j= 1, 2, \dots, s$, devem ser grosseiramente lineares. A inclinação da reta ajustada pode ser usada como uma estimativa aproximada do parâmetro δ .

O segundo método, baseia-se em uma análise gráfica de resíduos. Como visto em (1.6.6), a função de sobrevivência dado V_j , $j= 1, 2, \dots, s$, no modelo Weibull é expressa por:

$$S(t| V_j)= \exp(-\alpha_j t^\delta).$$

Seja a amostra aleatória de tempos t_1, t_2, \dots, t_{n_j} , correspondendo a cada nível V_j , $j= 1, 2, \dots, s$ e $\hat{\alpha}_j$ e $\hat{\delta}$ os EMV de α_j e δ obtidos desses dados. Desde que as quantidades:

$$e_{ij}= \alpha_j t_i^\delta,$$

para $i= 1, 2, \dots, n_j$ $j = 1, 2, \dots, s$, são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.) com distribuição exponencial padrão, os resíduos podem ser definidos por:

$$\hat{e}_{ij}= \hat{\alpha}_j t_i^{\hat{\delta}}. \tag{1.7.14}$$

Tal resíduo é censurado se a observação é censurada. Estes comportam-se aproximadamente como uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial padrão. Então, seja $\hat{S}(\hat{e})$ a estimativa P.L. de Kaplan-Meier descrita na seção (1.5.1), se a distribuição Weibull é adequada, o gráfico do $-\ln\hat{S}(\hat{e})$ x \hat{e} deve ser aproximadamente linear passando pela origem.

1.7.4.3 - Avaliação da Relação Stress-Vida

Desde que $\alpha_j= \exp(\beta'V_j)$, onde $V_j' = (g_0(V), g_1(V), \dots, g_p)$, $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ e

$$t_{Pj}= \left(-\frac{\ln(1-P)}{\alpha_j} \right)^{1/\delta},$$

então,

$$\ln t_{Pj}= \frac{1}{\delta} \left(\ln(-\ln(1-P)) - \beta'V_j \right).$$

Para o caso particular onde $V_j' = (1, g_1(V_j))$, $j= 1, 2, \dots, s$, segue que:

$$\ln t_{Pj}= \frac{1}{\delta} \left(\ln(-\ln(1-P)) - \beta_0 - \beta_1 g_1(V_j) \right) = \beta_0^* + \beta_1^* g_1(V_j),$$

ou seja, $\ln \hat{t}_{P_j}$ é uma função linear de $g_1(V_j)$, $j= 1, 2, \dots, s$. Para o caso onde $g_1(V_j) = -\frac{1000}{V_j}$, α_j segue uma relação Arrhenius e para o caso onde $g_1(V_j) = \ln V_j$, este segue uma relação Lei de Potência. Assim, para a verificação da adequação da relação de stress-vida Arrhenius ou Lei de Potência, utilizam-se os seguintes métodos gráficos:

a) Relação Arrhenius

Para cada nível j do stress, $j= 1, 2, \dots, s$, calcula-se a estimativa P.L. de Kaplan-Meier da sobrevivência e desta a distribuição acumulada empírica. A seguir estima-se um percentil especificado t_{P_j} , a partir da distribuição acumulada empírica. Para avaliação da suposição deve-se traçar o gráfico $\ln \hat{t}_{P_j} \times -\frac{1000}{V_j}$, $j= 1, 2, \dots, s$, que deve ser aproximadamente linear se a relação Arrhenius for adequada.

b) Relação Lei de Potência

Para avaliar a adequação dessa relação obtém-se os percentis t_{P_j} , $j= 1, 2, \dots, s$, como anteriormente. Se o gráfico $\ln \hat{t}_{P_j} \times \ln V_j$, $j= 1, 2, \dots, s$, for aproximadamente linear existem indicativas de que a relação Lei de Potência ajusta-se adequadamente aos dados.

c) Relação Eyring

Para avaliar a adequação da relação Eyring pode-se demonstrar que basta aplicar a transformação:

$$\hat{t}_{P_j}' = \hat{t}_{P_j} V_j, \quad j= 1, 2, \dots, s,$$

e verificar se a relação Arrhenius ajusta-se adequadamente a esses dados transformados.

Demonstração:

A relação Eyring para α_j , como apresentada na subseção 1.7.1, pode ser escrita por:

$$\alpha_j = \left[V_j \exp(\gamma_0 + \gamma_1 g_1(V_j)) \right]^\delta.$$

Então,

$$\begin{aligned} \ln t_{P_j} &= \frac{1}{\delta} \left(\ln(-\ln(1-P)) - \ln \alpha(V_j) \right) = \frac{1}{\delta} \left(\ln(-\ln(1-P)) - \delta(\ln V_j + \gamma_0 + \gamma_1 g_1(V_j)) \right) = \\ &= -\ln V_j + \frac{1}{\delta} \left(\ln(-\ln(1-P)) - \delta(\gamma_0 + \gamma_1 g_1(V_j)) \right), \end{aligned}$$

implicando em:

$$\ln t_{P_j} + \ln V_j = \frac{1}{\delta} \left(\ln(-\ln(1-P)) - \delta(\gamma_0 + \gamma_1 g_1(V_j)) \right).$$

Exponenciando os dois membros obtém-se:

$$t_{P_j}' = t_{P_j} V_j = \left[\frac{-\ln(1-P)}{[\exp(\gamma_0 + \gamma_1 g_1(V_j))]^\delta} \right]^{1/\delta} = \left[-\frac{\ln(1-P)}{\alpha_j} \right]^{1/\delta},$$

onde α_j segue uma relação Arrhenius. Portanto $\ln t_{P_j}'$ pode ser tratado como uma função linear de $g_1(V_j) = -1000/V_j$, $j = 1, 2, \dots, s$. \square

Os gráficos acima apresentados poderiam ser alternativamente feitos utilizando-se os n_j tempos observados em cada nível j do stress ao invés dos percentis estimados, uma vez que no modelo Weibull o i -ésimo \ln do tempo de falha no stress V_j , $Y_{ij} = \ln T_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n_j$ $j = 1, 2, \dots, s$, pode ser escrito como um modelo tempo de falha acelerado dado por:

$$Y_{ij} = \ln T_{ij} = -\frac{\ln \alpha_j}{\delta} + \sigma \mathfrak{E}_{ij} = -\frac{(\beta_0 + \beta_1 g_1(V_j))}{\delta} + \sigma \mathfrak{E}_{ij},$$

onde $\mathfrak{E}_{ij} \sim$ valor extremo padrão, para $i = 1, 2, \dots, n_j$ e $j = 1, 2, \dots, s$, e portanto Y_{ij} é uma função linear de $g_1(V_j)$. No entanto, as censuras podem dificultar a visualização da linearidade da relação. Desde que os percentis são estimados utilizando-se a informação contida nos dados censurados, os mesmos são preferíveis ao conjunto total de dados.

CAPÍTULO 2

MODELOS DE REGRESSÃO PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS

2.1 - INTRODUÇÃO

Uma grande quantidade de estudos apresentam métodos para análise de dados quando existe um único modo de falha para cada objeto em estudo (dados de tempo de vida univariados). Entretanto, esses dados podem ser mais gerais se a falha de um objeto puder ser classificada em uma dentre k classes mutuamente exclusivas, usualmente causas de falha (também chamadas causas de falha competitivas), como se existissem mecanismos de falha competindo entre si de forma que o primeiro a atingir o estado de falha causa a falha do objeto. Problemas que originam tais tipos de dados são comumente denominados **problemas de riscos competitivos**. Estes podem ocorrer em muitos contextos, como por exemplo, na teoria de riscos competitivos da área médica onde se lida com o interesse em estimar o efeito sobre o padrão de mortalidade de uma dada população quando certas doenças são eliminadas, ou no contexto de confiabilidade, num teste de vida de um produto que pode falhar em um dos k possíveis

lugares ou falhar de uma das k possíveis causas (nesse caso diz-se que o produto é um sistema em série). A informação básica disponível neste tipo de ensaio ou teste de vida é o tempo de falha e a correspondente causa de falha do objeto em observação. Outras informações podem também estar disponíveis, como no caso de variáveis adicionais (ou seja, variáveis concomitantes) que descrevem as diferentes condições nas quais o experimento foi conduzido (por exemplo: níveis de stress num teste de vida acelerado, tratamentos, etc). Tais informações precisam ser incorporadas na análise.

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos apresentados no capítulo 1 estendidos a problemas de riscos competitivos. Na seção 2.2 é apresentada primeiramente uma abordagem feita por Prentice et al (1978), que leva em consideração somente dados observáveis, ou seja, o tempo observado que pode ser de falha ou de censura e a causa correspondente à falha. Posteriormente, é apresentada uma outra abordagem mais detalhada que tem sido amplamente discutida na literatura de riscos competitivos por diversos autores, dentre outros, Cox (1959), Moeschberger e David (1971), Gail (1975), que introduz o conceito de "tempos de falha latentes". Na seção 2.3 é discutido o "problema da identificabilidade" que surge da abordagem de tempos de falha latentes. Na seção 2.4 são apresentados os modelos de regressão do capítulo 1, estendidos a riscos competitivos. Na seção 2.5 é tratada a estimação dos parâmetros de regressão por máxima verossimilhança e, finalmente, na seção 2.6 é introduzida a teoria de testes acelerados para essa situação de riscos competitivos.

2.2 - CONCEITOS BÁSICOS E NOTAÇÕES

2.2.1 - Abordagem de Prentice et al (1978)

Essa primeira parte da seção introduz uma notação que é inicialmente devida a Prentice et al (1978). Suponha que uma amostra é sujeita a um experimento e que cada objeto de estudo dessa amostra tenha um tempo de falha contínuo T que pode ser sujeito a censura e um vetor de variáveis concomitantes z . Suponha também que a falha pode ocorrer devido a uma dentre k causas denotadas por $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Portanto, para cada objeto associa-se a tripla (T, I, z) onde,

$$I = \begin{cases} i, & \text{se falha da causa } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

As funções de Sobrevivência e Risco para T , com tais variáveis concomitantes são definidas por:

$$S_T(t | z) = P(T > t | z) \tag{2.2.1}$$

e

$$\lambda_T(t | z) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(T \in [t, t+dt] | T \geq t, z)}{dt} = \frac{f_T(t | z)}{S_T(t | z)}, \tag{2.2.2}$$

onde $f_T(t | z)$ é a função de densidade de probabilidade de T dado z . Similarmente, a Distribuição Conjunta de T e I dado z , pode ser caracterizada através das funções de sobrevivência, de densidade (também denominada de sub-densidade por Kalbfleisch e Prentice (1980)) ou de Risco de Causa-Específica como segue para $i = 1, 2, \dots, k$:

$$S_i(t | z) = P(T \geq t, I = i | z), \tag{2.2.3}$$

$$f_i(t | z) = -\frac{\partial}{\partial t} S_i(t | z), \tag{2.2.4}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_i(t | z) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t+dt, I = i | T \geq t, z)}{dt} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t+dt, I = i, T \geq t | z)}{dt P(T \geq t | z)} \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{[P(T \geq t, I = i | z) - P(T \geq t+dt, I = i | z)]}{dt P(T \geq t | z)} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial t} S_i(t | z)}{S_T(t | z)} = \frac{f_i(t | z)}{S_T(t | z)}. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

A função $\lambda_i(t | z)$ representa a taxa instantânea de falha da causa i no tempo t dado z , na presença de todas as outras causas de falha.

Assumindo que a causa de falha i deve ser um único elemento do conjunto de causas $\{1, 2, \dots, k\}$, pode-se reescrever a função risco de T dado z , definida em (2.2.2), em termos das funções risco de causa-específica como:

$$\lambda_T(t | z) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(t | z). \tag{2.2.6}$$

Em alguns estudos podem ocorrer duas ou mais causas de falha simultâneas. Nessa estrutura de trabalho quando duas ou mais causas de falhas ocorrem simultaneamente tais eventos conjuntos podem ser tomados como tipos de falhas adicionais.

A função de sobrevivência de T dado \mathbf{z} , definida em (2.2.1), devido a formulação (2.2.6) pode ser fatorizada no tempo t da seguinte forma:

$$S_T(t|\mathbf{z}) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_T(u|\mathbf{z}) du\right] = \exp\left[-\int_0^t \sum_{i=1}^k \lambda_i(u|\mathbf{z}) du\right] = \prod_{i=1}^k G_i(t|\mathbf{z}), \quad (2.2.7)$$

onde $G_i(t|\mathbf{z}) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(u|\mathbf{z}) du\right) = \exp(-H_i(t|\mathbf{z}))$, $i = 1, 2, \dots, k$, é interpretada por Elandt-Johnson e Johnson (1980) como uma distribuição associada com a causa i somente. A distribuição marginal de I é definida por:

$$\pi_i = P(I = i | \mathbf{z}) = S_i(0 | \mathbf{z}). \quad (2.2.8)$$

Finalmente, usando (2.2.7) em (2.2.5), a função sub-densidade do tempo de falha para a causa i dado o vetor de variáveis concomitantes \mathbf{z} , pode ser reescrita como

$$f_i(t|\mathbf{z}) = \lambda_i(t|\mathbf{z}) \prod_{m=1}^k G_m(t|\mathbf{z}), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.2.9)$$

Note que devido a fatoração de $S_T(t|\mathbf{z})$ em (2.2.7), (2.2.9) é completamente especificada pela função risco de causa-específica. Kalbfleisch e Prentice (1980) mostraram que $\lambda_i(t|\mathbf{z})$ pode ser estimada dos dados do tipo (T, I) em uma dada covariável \mathbf{z} sem suposições adicionais, o que permite a estimação de quantidades relacionadas tal como $f_i(t|\mathbf{z})$, $\lambda_T(t|\mathbf{z})$ e $S_T(t|\mathbf{z})$, que podem ser definidas em termos de $\lambda_i(t|\mathbf{z})$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Para o estudo de inter-relações entre as causas de falha, Kalbfleisch e Prentice (1980) sugerem uma abordagem alternativa utilizando covariáveis tempo-dependente.

2.2.2 - Abordagem de Cox (1959) e Moeschberger e David (1971)

Alternativamente, grande parte da literatura de riscos competitivos tem presumido para um sistema a existência de tempos de falha "latentes" ou "potenciais" correspondendo a cada uma das k causas de falha. Esses tempos são denotados por $T = (T_1, T_2, \dots, T_k)$, onde a coordenada T_i é o tempo para ocorrência da i -ésima causa de falha. O tempo de falha real do sistema é definido por:

$$T = \min(T_1, T_2, \dots, T_k).$$

Nesta formulação, restringindo-se a um vetor de variáveis concomitantes z independentes do tempo e assumindo que T dado z , tem função de densidade conjunta $f(t|z) = f(t_1, t_2, \dots, t_k|z)$, a **Função de Sobrevivência Conjunta** dado z pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} S(t_1, t_2, \dots, t_k|z) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_k > t_k|z) = \\ &= \int_{t_1}^{\infty} \dots \int_{t_k}^{\infty} f(u_1, u_2, \dots, u_k|z) du_k \dots du_1, \\ &0 < t_i < \infty, i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Pela definição acima é possível notar que, $S(0, 0, \dots, 0|z) = 1$ e $S(\infty, \infty, \dots, \infty|z) = 0$. Claramente, a **Sobrevivência Marginal do Tempo de Falha Latente T_i** dado z , obtida para $i = 1, 2, \dots, k$ é dada por:

$$\begin{aligned} S_i(t_i|z) &= P(T_i > t_i|z) = P(T_1 > 0, T_2 > 0, \dots, T_i > t_i, \dots, T_k > 0|z) = \\ &= S(0, 0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0|z) \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

e a sua **Função "Risco"** (ou "taxa de risco líquida", na notação de Elandt-Johnson e Johnson (1980)) correspondente é definida por:

$$h_i(t_i | \mathbf{z}) = -\frac{\frac{\partial}{\partial t_i} S_i(t_i | \mathbf{z})}{S_i(t_i | \mathbf{z})} = -\frac{\partial}{\partial t_i} \ln S_i(t_i | \mathbf{z}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.2.12)$$

assumindo que tais derivadas existam. Esta função é interpretada como a taxa de falha instantânea associada ao tempo de falha latente T_i . Ainda, se S é diferenciável em $t_1 = t_2 = \dots = t_k = t$, a **Função Risco de Causa-Específica** (ou "taxa de risco bruta" na notação de Elandt-Johnson e Johnson (1980)) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t | \mathbf{z}) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T < t+dt, I = i | T \geq t, \mathbf{z})}{dt} \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial t_i} S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z}) |_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t}}{S(t, t, \dots, t | \mathbf{z})} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t_i} \ln S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z}) |_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Essa função fornece a taxa instantânea de falha pela causa i no tempo t dado \mathbf{z} , na presença de todas as outras causas de falha. A **Função de Sobrevivência de T dado z**, também conhecida como Função de Sobrevivência Total pode ser obtida como em (2.2.7) ou por:

$$S_T(t | \mathbf{z}) = P(T > t | \mathbf{z}) = P(T_1 > t, T_2 > t, \dots, T_k > t | \mathbf{z}) = S(t, t, \dots, t | \mathbf{z}), \quad (2.2.14)$$

e a **Função Risco de T dado z**, também chamada Função Risco Total, pode ser escrita por:

$$\lambda_T(t | \mathbf{z}) = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} S_T(t | \mathbf{z})}{S_T(t | \mathbf{z})} = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S_T(t | \mathbf{z}) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S(t, t, \dots, t | \mathbf{z}), \quad (2.2.15)$$

que é interpretada como a taxa de falha instantânea por qualquer causa de falha no tempo t dado \mathbf{z} . Esta corresponde à função risco dada em (2.2.6).

Assumindo agora que sempre que o sistema falhar pode-se observar somente o par (T, I) e a covariável z , comumente chamado **Mínimo Identificado**, onde T é a vida do sistema e $I = i$ quando $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_k) = T_i$ para $i = 1, 2, \dots, k$. Por suposição a falha do sistema é devida a uma única causa, i.é,

$$\boxed{P(T_i = T_j) = 0 \text{ para } i \neq j.} \quad (2.2.16)$$

Sendo assim, a **Distribuição de Probabilidade Conjunta** de (T, I) dado z , que representa a distribuição de probabilidade do tempo observado para falha devido a causa i pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} Q_i^*(t|z) &= P(T \leq t, I = i | z) = P(T_i \leq t, T_i < T_j, \text{ p/ } i \neq j | z) = \\ &= \int_0^t \left[\int_{t_i}^{\infty} \dots \int_{t_i}^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_k | z) \prod_{r \neq i} dt_r \right] dt_i, \\ & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Obs: O símbolo "∗" é usado para denotar que a falha ou distribuição de sobrevivência para a causa i é observada na presença de todas as causas atuando simultaneamente na população.

A **Probabilidade de um sistema falhar da causa i** , denotado por π_i^* , com variáveis concomitantes z é obtida por:

$$\pi_i^* = P(I = i | z) = P(T < \infty, I = i | z) = Q_i^*(\infty | z), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.2.18)$$

com

$$\pi_1^* + \pi_2^* + \dots + \pi_k^* = 1. \quad (2.2.19)$$

A **Probabilidade do sistema sobreviver além do tempo t e então falhar devido a causa i** dado z , (correspondendo a $S_i(t|z)$ na notação de Prentice et al) é dada por:

$$\begin{aligned} P_i^*(t|z) &= P(T > t, I = i | z) = P(T \leq \infty, I = i | z) - P(T \leq t, I = i | z) = \pi_i^* - Q_i^*(t|z) = \\ &= \int_t^{\infty} \left[\int_{t_i}^{\infty} \dots \int_{t_i}^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_k | z) \prod_{r \neq i} dt_r \right] dt_i, \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

As funções de distribuição e de sobrevivência de T dado \mathbf{z} , podem ser escritas em termos de (2.2.17) e (2.2.20), respectivamente, por:

$$F_T(t|\mathbf{z}) = P(T \leq t, I = i|\mathbf{z}) + \dots + P(T \leq t, I = k|\mathbf{z}) = Q_1^*(t|\mathbf{z}) + \dots + Q_k^*(t|\mathbf{z}), \quad (2.2.21)$$

e

$$S_T(t|\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^k P_i^*(t|\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^k \pi_i^* - \sum_{i=1}^k Q_i^*(t|\mathbf{z}) = 1 - \sum_{i=1}^k Q_i^*(t|\mathbf{z}). \quad (2.2.22)$$

Pela definição em (2.2.20) pode-se notar que, $\pi_i^* = Q_i^*(\infty|\mathbf{z}) = P_i^*(0|\mathbf{z})$ e ainda segue de (2.2.19) que:

$$\sum_{i=1}^k P_i^*(0|\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^k Q_i^*(\infty|\mathbf{z}) = 1. \quad (2.2.23)$$

Logo, $P_i^*(0|\mathbf{z})$ não precisa ser necessariamente 1 e portanto $P_i^*(t|\mathbf{z})$ não é uma função de sobrevivência de acordo com a definição em (1.3.1). Pode-se contudo, definir uma função de distribuição acumulada ou função de sobrevivência verdadeira em termos dessas funções. A **função de distribuição condicional de T dado $I = i$ e \mathbf{z}** , que representa a distribuição de tempo de falha observado dentre aqueles que falharam da causa i , na presença de todas as causas é dada por:

$$F_i^*(t|\mathbf{z}) = P(T \leq t | I = i, \mathbf{z}) = \frac{P(T \leq t, I = i|\mathbf{z})}{P(I = i|\mathbf{z})} = \frac{Q_i^*(t|\mathbf{z})}{\pi_i^*}, \quad (2.2.24)$$

e conseqüentemente,

$$S_i^*(t|\mathbf{z}) = 1 - F_i^*(t|\mathbf{z}) = \frac{P_i^*(t|\mathbf{z})}{\pi_i^*}. \quad (2.2.25)$$

A correspondente função de densidade é então:

$$f_i^*(t|\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi_i^*} \frac{\partial}{\partial t} Q_i^*(t|\mathbf{z}) = -\frac{1}{\pi_i^*} \frac{\partial}{\partial t} P_i^*(t|\mathbf{z}), \quad (2.2.26)$$

e como demonstrado a seguir, esta pode ser reescrita por:

$$f_i^*(t|\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi_i^*} \lambda_i(t|\mathbf{z}) S_T(t|\mathbf{z}). \quad (2.2.27)$$

Demonstração:

Derivando com relação a t os dois lados da igualdade em (2.2.20) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i^*(t | \mathbf{z}) = \int_t^\infty \dots \int_t^\infty f(t_1, t_2, \dots, t, \dots, t_k | \mathbf{z}) \prod_{r \neq i} dt_r.$$

Procedendo de maneira análoga para a relação em (2.2.10) obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z}) |_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t} = \int_t^\infty \dots \int_t^\infty f(t_1, t_2, \dots, t, \dots, t_k | \mathbf{z}) \prod_{r \neq i} dt_r.$$

Logo, tem-se a seguinte identidade:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i^*(t | \mathbf{z}) = \frac{\partial}{\partial t_i} S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z}) |_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t}. \tag{2.2.28}$$

Além disso, de (2.2.13):

$$\begin{aligned} \lambda_i(t | \mathbf{z}) &= - \frac{\frac{\partial}{\partial t_i} S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z}) |_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t}}{S(t, t, \dots, t | \mathbf{z})} = \\ &= - \frac{\frac{\partial}{\partial t_i} S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z}) |_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t}}{S_T(t | \mathbf{z})}, \end{aligned}$$

implicando em:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z}) |_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t} = - \lambda_i(t | \mathbf{z}) S_T(t | \mathbf{z}).$$

A identidade em (2.2.28) torna-se então:

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i^*(t | \mathbf{z}) = - \lambda_i(t | \mathbf{z}) S_T(t | \mathbf{z}), \tag{2.2.29}$$

e portanto a densidade em (2.2.26) pode ser reescrita por:

$$f_i^*(t | \mathbf{z}) = \frac{1}{\pi_i^*} \lambda_i(t | \mathbf{z}) S_T(t | \mathbf{z}). \quad \square$$

Lawless (1980) mostrou que $Q_i^*(t)$ e π_i^* , podem ser estimados dos dados da forma (T, I) sem suposições adicionais e este resultado estende-se diretamente a dados do tipo (T, I, \mathbf{z}) , com \mathbf{z} fixo no planejamento (como é o caso de testes acelerados). Estes resultados encontram-se no apêndice B.

Esta abordagem de tempos de falha latentes foi criticada por Prentice et al (1978) por sua suposição de que o tempo de falha da causa i sob um conjunto de condições em estudo, no qual todas as causas estão atuando, é precisamente o mesmo sob um conjunto alterado de condições em que todas as causas, exceto a i -ésima, são removidas. Esta suposição pode não ser verdadeira desde que a eliminação de certas causas de falha pode alterar os riscos de falha das demais causas, como já indicado por Makehan (1874) e Cornfield (1957). Prentice et al, criticaram também a falta de significado físico para os $k-1$ tempos não observados. Contudo, Elandt-Johnson e Johnson apontam que esses tempos hipotéticos de falha são introduzidos "puramente por conveniência matemática", desde que a formulação latente para o problema de riscos competitivos não leva a dificuldades na interpretação das distribuições básicas da causa i , G_i e P_i^* , as quais podem ser estimadas dos dados.

2.2.3 - Tempos de Falha Latentes Independentes

A situação em que T_1, T_2, \dots, T_k são mutuamente independentes na abordagem de tempos de falha latentes é de especial interesse. Neste caso, a função de sobrevivência conjunta simplifica-se à forma:

$$S(t_1, t_2, \dots, t_k | z) = \prod_{i=1}^k S_i(t_i | z). \quad (2.2.30)$$

Além disso, como um resultado interessante pode-se demonstrar que para todo $i=1, 2, \dots, k$

$$h_i(t | z) = \lambda_i(t | z) \quad (2.2.31)$$

e

$$G_i(t | z) = S_i(t | z). \quad (2.2.32)$$

Demonstração:

De fato, pois pela definição de função risco de causa-específica e de (2.2.30):

$$\begin{aligned} \lambda_i(t | \mathbf{z}) &= -\frac{\partial}{\partial t_i} \ln S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z})|_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t_i} \ln \prod_{i=1}^k S_i(t_i | \mathbf{z})|_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_{i=1}^k \ln S_i(t_i | \mathbf{z})|_{t_1 = t_2 = \dots = t_k = t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t_i} \ln S_i(t_i | \mathbf{z})|_{t_i = t} = h_i(t | \mathbf{z}). \end{aligned}$$

De (2.2.12) e usando o resultado anterior, obtém-se que:

$$S_i(t | \mathbf{z}) = \exp\left[-\int_0^t h_i(u | \mathbf{z}) du\right] = \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(u | \mathbf{z}) du\right] = G_i(t | \mathbf{z}). \quad \square$$

Assim, a função de sobrevivência total dado \mathbf{z} , pode ser obtida por:

$$S_T(t | \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^k S_i(t | \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^k G_i(t | \mathbf{z}). \quad (2.2.33)$$

Contudo, deve-se enfatizar que $S_i^*(t | \mathbf{z}) \neq S_i(t | \mathbf{z})$, pois de (2.2.25) e (2.2.29):

$$S_i^*(t | \mathbf{z}) = \frac{1}{\pi_i^*} \int_t^\infty \lambda_i(u | \mathbf{z}) S_T(u | \mathbf{z}) du,$$

ao passo que,

$$S_i(t | \mathbf{z}) = \exp\left[-\int_0^t h_i(u | \mathbf{z}) du\right] = \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(u | \mathbf{z}) du\right].$$

Ainda pode ser de interesse estudar as mudanças que ocorrem na distribuição de vida de um objeto quando algumas causas são eliminadas. Para esse caso de independência, supondo que a causa j é eliminada, onde a causa j pode ser um grupo de causas, $S_j(t | \mathbf{z}) = 1$ e a distribuição com as $r = (k-j)$ causas restantes é expressa por:

$$S_T^r(t | \mathbf{z}) = S_1(t | \mathbf{z}) S_2(t | \mathbf{z}) \dots S_{j-1}(t | \mathbf{z}) S_{j+1}(t | \mathbf{z}) \dots S_k(t | \mathbf{z}).$$

Esta equação assume que:

- as distribuições das causas de falha restantes não são afetadas,
- nenhuma outra causa de falha é introduzida quando a causa j é eliminada,
- a causa de falha eliminada é completamente eliminada.

2.3 - PROBLEMA DA IDENTIFICABILIDADE

Define-se uma **Família de Distribuições** (segundo Elandt-Johnson e Johnson), como um conjunto de distribuições da mesma forma matemática onde cada membro da família é determinado pelos valores dos parâmetros.

O problema de identificabilidade é verificado na teoria de tempos de falha latentes no contexto de riscos competitivos. Primeiro, dada a distribuição de (T, I) , o problema de identificabilidade questiona a possibilidade da identificação da família das distribuições de sobrevivência conjunta e marginais de (T_1, T_2, \dots, T_k) . Segundo, assumindo que a função de sobrevivência conjunta pertence a uma família específica questiona-se a identificabilidade de um membro desta função conjunta a partir da distribuição de (T, I) .

Berman (1963) mostrou que, se é assumido que as causas atuam independentemente, a distribuição do par (T, I) determina unicamente a distribuição de T_i , $i= 1, 2, \dots, k$, e conseqüentemente a distribuição conjunta de (T_1, \dots, T_k) e seus parâmetros. Esse resultado pode ser estendido para o caso em que se tem disponível um vetor de variáveis concomitantes z fixo no planejamento, como nos experimentos de testes acelerados apresentados anteriormente.

No entanto, desde que a suposição de independência dos tempos de falha não é realística em muitos problemas de riscos competitivos, alguns estudos consideraram o problema da identificabilidade para tempos de falha latentes dependentes; entre outros, Tsiatis (1975), Peterson (1976), Langberg et al (1978, 1981) e Elandt-Johnson e Johnson (1980) (estes estudos não consideraram variáveis concomitantes). Eles concluíram de que sem a suposição de independência, a família de distribuição de sobrevivência conjunta e suas marginais não são identificáveis a partir da distribuição de (T, I) , uma vez que a partir de dados desse tipo não é possível distinguir entre um modelo de riscos competitivos independentes e uma infinidade de modelos dependentes com as mesmas

funções risco de causa específica.

Assim, para obter conclusões à respeito da distribuição dos tempos de falha latentes quando estes não são supostamente independentes, é usual assumir que a função de distribuição de sobrevivência conjunta pertence a uma família paramétrica específica e o problema consiste na identificabilidade dos parâmetros dessa distribuição a partir da distribuição de (T, I) . Este problema pode ser resolvido dependendo da família particular assumida para $S(t_1, t_2, \dots, t_k)$. Alguns resultados particulares que dizem respeito ao estudo da identificabilidade dos parâmetros da distribuição de sobrevivência conjunta para o caso de tempos de falha dependentes em populações homogêneas, são conhecidos. Por exemplo, Nádas (1971) e Basu e Ghosh (1978) mostraram que se a função de distribuição de sobrevivência é Normal Bivariada, então seus parâmetros podem ser determinados unicamente a partir da distribuição de (T, I) . Basu e Ghosh (1978) provaram que a distribuição de (T, I) identifica os parâmetros da distribuição Exponencial Bivariada de Marshall e Olkin (1967), de Gumbel (1960) e da distribuição Weibull Bivariada.

Deve-se enfatizar contudo, que mesmo sendo possível estimar os parâmetros do modelo paramétrico assumido não se pode verificar a sua validade, desde que, como mencionado anteriormente, a partir de dados do tipo (T, I) não é possível distinguir entre um modelo de riscos competitivos independentes e uma infinidade de modelos dependentes que possuem as mesmas funções risco de causa-específica. Até mesmo se um modelo paramétrico com riscos dependentes for assumido para S e todos os parâmetros forem estimáveis, é impossível fazer a distinção entre este e um com causas independentes, mas com as mesmas funções risco de causa-específica. Conseqüentemente é impossível avaliar a adequação de tal modelo e pela mesma razão é impossível avaliar a independência das causas. Então os modelos devem ser confirmados através de evidências físicas ou do conhecimento do processo de falhas, caso contrário se é forçado a acreditar na adequação de tal modelo. Essa situação é ilustrada no exemplo 2.1 a seguir:

Exemplo 2.1: Considere a função de Sobrevivência Conjunta:

$$S(t_1, t_2) = \exp[1 - \lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \exp[\lambda_{12}(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)]]], \quad t_1 > 0, t_2 > 0,$$

onde, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_{12} > -1$. O parâmetro λ_{12} mede a dependência entre T_1 e T_2 , com T_1 independente de T_2 quando $\lambda_{12} = 0$. As correspondentes funções risco de causa-específica são:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i \left(1 + \lambda_{12} \exp[\lambda_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)t] \right), \quad i = 1, 2.$$

A função de verossimilhança, que é escrita totalmente em termos da função risco de causa-específica (como será demonstrado na seção 2.5), obtida dessa distribuição é contudo, idêntica àquela resultante de um modelo com causas independentes com as mesmas funções risco de causa-específica e função de sobrevivência conjunta definida por:

$$S^*(t_1, t_2) = \exp \left[1 - \lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \frac{\lambda_1 \exp(\lambda_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)t_1) + \lambda_2 \exp(\lambda_{12}(\lambda_1 + \lambda_2)t_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} \right].$$

Então, um valor estimado de $\lambda_{12} \neq 0$ não deveria ser tomado como uma indicativa de dependência entre T_1 e T_2 , a menos que exista alguma evidência externa para confirmar o modelo paramétrico dependente. A estimativa do grau de dependência entre T_1 e T_2 surge da suposição de um modelo que não pode ser testado pelos dados.

2.4 - MODELOS DE REGRESSÃO PARAMÉTRICOS EM RISCOS COMPETITIVOS

Vários autores, tais como, Farewell e Prentice (1977), Lagakos (1978), Holt (1978), Kalbfleisch e Prentice (1980), estudaram modelos de regressão em situações de riscos competitivos. Qualquer um dos modelos de regressão apresentados no capítulo 1, que permitem incorporar variáveis concomitantes \mathbf{z} tempo independentes, pode ser estendido a riscos competitivos simplesmente impondo a formulação apropriada às funções risco de causa-específica. Sob a abordagem de tempos de falha latentes, assumindo uma família paramétrica para $S(t_1, t_2, \dots, t_k | \mathbf{z})$ onde \mathbf{z} é tempo independente, pode-se modelar o risco de causa-específica como mostrado a seguir:

2.4.1 - Modelos de Riscos Proporcionais

Essa classe de modelos assume que as variáveis regressoras atuam multiplicativamente sobre a função risco de causa específica, quando para cada causa i , $i=1, 2, \dots, k$, quaisquer observações com variáveis concomitantes \mathbf{z}_1 e \mathbf{z}_2 resultarem em uma razão $\lambda_i(t|\mathbf{z}_1)/\lambda_i(t|\mathbf{z}_2)$ invariante no tempo. Assim, tem-se a seguinte formulação:

$$\lambda_i(t|\mathbf{z}) = \lambda_{0i}(t) C(\mathbf{z}; \beta_i), \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (2.4.1)$$

onde

$\beta_i' = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})$: vetor de parâmetros correspondendo a \mathbf{z} , variando arbitrariamente sobre as k causas de falha,

$C(\mathbf{z}; \beta_i)$: qualquer função de \mathbf{z} e β_i tal que, $C(\mathbf{z}; \beta_i) > 0$ e $C(\mathbf{z}; \mathbf{0}) = 1$,

$\lambda_{0i}(t)$: função risco básica para a causa i , sendo a função risco de causa-específica para a causa i quando $C(\mathbf{z}; \beta_i) = 1$.

Como anteriormente, é usual tomar $C(\mathbf{z}; \beta_i) = \exp(\beta_i' \mathbf{z})$, uma vez que se tem garantido $C(\mathbf{z}; \beta_i) > 0$ para todo \mathbf{z} e β_i . Em particular quando $\lambda_{0i}(t)$, $i=1, 2, \dots, k$, é arbitrário e $C(\mathbf{z}; \beta_i) = \exp(\beta_i' \mathbf{z})$, (2.4.1) define o modelo semi-paramétrico de Cox para riscos competitivos como estudado por Holt (1978).

2.4.2 - Modelos de Tempos de Falha Acelerados

Para cada causa de falha i , $i=1, 2, \dots, k$, Kalbfleisch e Prentice (1980) sugeriram a seguinte extensão do modelo de tempo de falha acelerado apresentado no capítulo 1:

$$\lambda_i(t|\mathbf{z}) = \lambda_{0i}(t \exp[-\mu_i(\mathbf{z})]) \exp[-\mu_i(\mathbf{z})], \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (2.4.2)$$

onde

$\mu_i(\mathbf{z})$: parâmetro de locação da distribuição de $Y = \ln T$ dado \mathbf{z} , para a causa i ,

λ_{0i} : tem uma forma paramétrica particular.

Equivalentemente, para cada causa assume-se que as variáveis regressoras atuam multiplicativamente sobre T .

Para ilustração, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2: O modelo Weibull($\alpha_i(\mathbf{z}), \delta_i$) independente associado a cada causa de falha i , com $\alpha_i(\mathbf{z}) = \exp(\beta_i' \mathbf{z})$, tem λ_{0i} formulado como:

$$\lambda_{0i}(t) = \delta_i t^{\delta_i - 1}, \quad t \geq 0.$$

Quando descrito em termos do modelo de Riscos Proporcionais, assumindo que $C(\mathbf{z}, \beta_i) = \alpha_i(\mathbf{z})$, obtém-se:

$$\lambda_i(t | \mathbf{z}) = \delta_i t^{\delta_i - 1} \exp(\beta_i' \mathbf{z}), \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

onde $\delta_i > 0$. Quando escrito em termos do modelo Tempo de Falha Acelerado:

$$\lambda_i(t | \mathbf{z}) = \delta_i (t \exp[-\mu_i(\mathbf{z})])^{\delta_i - 1} \exp[-\mu_i(\mathbf{z})],$$

onde $\mu_i(\mathbf{z}) = -\frac{\beta_i' \mathbf{z}}{\delta}$ é o parâmetro de locação da distribuição Valor Extremo para a causa i .

2.5 - ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS POR MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Utilizando a notação de Moeschberger e David (1971), pode-se equivalentemente denotar o tempo de vida observado ($T | I$) como X_i , onde $X_i = T_i | T_i = \min_l T_l$. Sendo assim, a fdp de X_i é dada por:

$$f_i^*(x_i | \mathbf{z}) = \frac{1}{\pi_i^*} \lambda_i(x_i | \mathbf{z}) S_T(x_i | \mathbf{z}).$$

Considerando primeiramente o caso em que *não existem dados censurados*, ou seja, se n_i objetos falham da causa i e x_{ij} denota o tempo de vida do j -ésimo objeto falhando da causa i associado ao vetor de covariáveis \mathbf{z} , então a fdp conjunta de x_{ij} é escrita por:

$$f(x_{11}, \dots, x_{1n_1}, \dots, x_{k1}, \dots, x_{kn_k} | \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\pi_i^* n_i} \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i(x_{ij} | \mathbf{z}) S_T(x_{ij} | \mathbf{z}). \quad (2.5.1)$$

Esta f.d.p. é condicional sobre os n_i os quais são variáveis aleatórias com função de probabilidade multinomial:

$$f(n_1, \dots, n_k | \mathbf{z}) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \prod_{i=1}^k \pi_i^{n_i}, \text{ onde } n = \sum_{i=1}^k n_i. \quad (2.5.2)$$

Então, de (2.5.1) e (2.5.2), a função de verossimilhança de interesse é dada por:

$$L = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k n_i!} \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i(x_{ij} | \mathbf{z}) S_T(x_{ij} | \mathbf{z}).$$

Como o primeiro termo na verossimilhança é uma constante, esta pode ser reescrita simplesmente por:

$$L \approx \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i(x_{ij} | \mathbf{z}) S_T(x_{ij} | \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} \lambda_i(x_{ij} | \mathbf{z}) \prod_{m=1}^k G_m(x_{ij} | \mathbf{z}). \quad (2.5.3)$$

Nota-se portanto, que a j -ésima unidade que falha da causa i contribui com um termo $\lambda_i(x_{ij} | \mathbf{z}) \prod_{m=1}^k G_m(x_{ij} | \mathbf{z})$ para a verossimilhança.

Para o caso em que *algumas observações são censuradas*, dentre as n associadas ao vetor de variáveis concomitantes \mathbf{z} , e utilizando a notação abaixo:

Notação:

i : causa de falha $i = 1, 2, \dots, k$,

n : número de itens no início do estudo,

r_i : número de falhas devido a causa i ,

r : número total de falhas $(r = \sum_{i=1}^k r_i)$,

w : número de censuras,

t_r : tempo de falha ou censura do r -ésimo item, $r = 1, 2, \dots, n$,

x_{il} : tempo de falha do l -ésimo item pela causa i , $l = 1, 2, \dots, r_i$,

x_{wl} : tempo de censura do l -ésimo item censurado, $l = 1, 2, \dots, n-r$,

a contribuição do l -ésimo item que falhou devido a causa i dado \mathbf{z} , para a verossimilhança é:

$$\lambda_i(x_{il} | \mathbf{z}) \prod_{m=1}^k G_m(x_{il} | \mathbf{z}), \quad (2.5.4)$$

e a contribuição dos r_i itens que falharam devido a causa i , para a verossimilhança é:

$$\prod_{i=1}^{r_i} \left[\lambda_i(x_{il} | \mathbf{z}) \prod_{m=1}^k G_m(x_{il} | \mathbf{z}) \right]. \quad (2.5.5)$$

A contribuição das censuras para a verossimilhança é dada por:

$$\prod_{l=1}^w P(T_1 > x_{wl}, \dots, T_k > x_{wl} | \mathbf{z}) = \prod_{l=1}^w \left[\prod_{m=1}^k G_m(x_{wl} | \mathbf{z}) \right]. \quad (2.5.6)$$

Dessa forma, a verossimilhança total é expressa por:

$$L(\boldsymbol{\beta}) \approx \prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{l=1}^{r_i} \left[\lambda_i(x_{il} | \mathbf{z}) \prod_{m=1}^k G_m(x_{il} | \mathbf{z}) \right] \right\} \prod_{l=1}^w \left[\prod_{m=1}^k G_m(x_{wl} | \mathbf{z}) \right], \quad (2.5.7)$$

onde $\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\beta}'_1, \boldsymbol{\beta}'_2, \dots, \boldsymbol{\beta}'_k)$. Elandt-Johnson (comunicação pessoal) demonstrou que esta pode ser equivalentemente escrita por:

$$L(\boldsymbol{\beta}) \approx \prod_{i=1}^k \left\{ \left[\prod_{l=1}^{r_i} \lambda_i(x_{il} | \mathbf{z}) \right] \left[\prod_{l=1}^w G_i(t_r | \mathbf{z}) \right] \right\}. \quad (2.5.8)$$

Demonstração:

De fato, pois a contribuição para a verossimilhança das:

- r_1 falhas pela causa 1 é:

$$I \equiv \prod_{l=1}^{r_1} \lambda_1(x_{1l} | \mathbf{z}) \prod_{l=1}^{r_1} G_1(x_{1l} | \mathbf{z}) G_2(x_{1l} | \mathbf{z}) \dots G_k(x_{1l} | \mathbf{z}),$$

- r_2 falhas pela causa 2 é:

$$J \equiv \prod_{l=1}^{r_2} \lambda_2(x_{2l} | \mathbf{z}) \prod_{l=1}^{r_2} G_1(x_{2l} | \mathbf{z}) G_2(x_{2l} | \mathbf{z}) \dots G_k(x_{2l} | \mathbf{z}),$$

⋮

- r_k falhas pela causa k é:

$$K \equiv \prod_{l=1}^{r_k} \lambda_k(x_{kl} | \mathbf{z}) \prod_{l=1}^{r_k} G_1(x_{kl} | \mathbf{z}) G_2(x_{kl} | \mathbf{z}) \dots G_k(x_{kl} | \mathbf{z}),$$

- w censuras é:

$$W \equiv \prod_{l=1}^w G_1(x_{wl} | \mathbf{z}) G_2(x_{wl} | \mathbf{z}) \dots G_k(x_{wl} | \mathbf{z}).$$

A verossimilhança em (2.5.7) é obtida por, $1*2*...*k*W$. Agora combinando os tempos com índices 1 obtém-se:

$$\prod_{l=1}^{r_1} \lambda_1(x_{1l} | \mathbf{z}) \prod_{l=1}^{r_1} G_1(x_{1l} | \mathbf{z}) \prod_{l=1}^{r_2} G_1(x_{2l} | \mathbf{z}) \dots \prod_{l=1}^{r_k} G_1(x_{kl} | \mathbf{z}) \prod_{l=1}^w G_1(x_{wl} | \mathbf{z}) =$$

$$= \left[\prod_{l=1}^{r_1} \lambda_1(x_{1l} | \mathbf{z}) \right] \left[\prod_{r=1}^n G_1(t_r | \mathbf{z}) \right].$$

De forma análoga, pode-se combinar os tempos com os índices 2, 3, ..., k, obtendo-se então:

$$\prod_{i=1}^k \left\{ \prod_{l=1}^{r_i} \lambda_i(x_{il} | \mathbf{z}) \right\} \left\{ \prod_{r=1}^n G_i(t_r | \mathbf{z}) \right\},$$

a qual é a verossimilhança em (2.5.8).□

No caso particular onde os T_i , $i= 1, 2, \dots, k$, são independentes as funções de verossimilhança em (2.5.3) e (2.5.8) simplificam-se, respectivamente, a:

$$L(\beta) \approx \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} h_i(x_{ij} | \mathbf{z}) \prod_{m=1}^k S_m(x_{ij} | \mathbf{z})$$

e

$$L(\beta) \approx \prod_{i=1}^k \left\{ \left[\prod_{l=1}^{r_i} h_i(x_{il} | \mathbf{z}) \right] \left[\prod_{r=1}^n S_i(t_r | \mathbf{z}) \right] \right\}.$$

Kalbfleisch e Prentice (1980), utilizando a abordagem de riscos competitivos de Prentice et al (1978), obtiveram uma verossimilhança equivalente à função de verossimilhança (2.5.7) (e conseqüentemente equivalente à verossimilhança em (2.5.8)). Supondo que associado a cada uma das n observações encontra-se associada a quádrupla $(t_j, \delta_j, I_j, \mathbf{z}_j)$, $j= 1, 2, \dots, n$, onde:

t_j : tempo observado de falha ou de censura para a j -ésima unidade,

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{se a } j\text{-ésima unidade falha} \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$I_j = \begin{cases} i & \text{se a } j\text{-ésima unidade falha da causa } i, i= 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{se a } j\text{-ésima unidade censura,} \end{cases}$$

\mathbf{z}_j : vetor de variáveis concomitantes para a j -ésima unidade,

sob um mecanismo de censura independente, a tal função de verossimilhança é expressa, utilizando a notação acima, por:

$$L(\beta) \approx \prod_{j=1}^n \{[\lambda_{i_j}(t_j | \mathbf{z}_j)]^{\delta_j} S_T(t_j | \mathbf{z}_j)\} = \prod_{j=1}^n \{[\lambda_{i_j}(t_j | \mathbf{z}_j)]^{\delta_j} \prod_{m=1}^k G_m(t_j | \mathbf{z}_j)\}. \quad (2.5.9)$$

Pode-se verificar que, igualmente à função de verossimilhança em (2.5.7), a contribuição do j-ésimo item que falhou ($\delta_j=1$) devido a causa i dado \mathbf{z}_j , para a verossimilhança é:

$$\lambda_{i_j}(t_j | \mathbf{z}_j) \prod_{m=1}^k G_m(t_j | \mathbf{z}_j), \quad (2.5.10)$$

e a contribuição do j-ésimo item que censurou ($\delta_j=0$) dado \mathbf{z}_j , para a verossimilhança é:

$$\prod_{m=1}^k G_m(t_j | \mathbf{z}_j). \quad (2.5.11)$$

Portanto, a função de verossimilhança (2.5.9), da mesma forma que a verossimilhança em (2.5.7), é obtida pelo produto de termos da forma (2.5.10) e (2.5.11).

As estimativas de máxima verossimilhança dos β_i , $i=1, 2, \dots, k$, podem ser obtidas resolvendo-se iterativamente as equações:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i} \ln L(\beta) = 0, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (2.5.12)$$

pelo método iterativo de Newton-Raphson.

Agora, se $\lambda_i(t | \mathbf{z}) = \lambda_i(t | \beta_i, \mathbf{z})$ depende somente dos parâmetros β_i e estes parâmetros não estão presentes em nenhuma outra função risco de causa-específica, então o vetor de parâmetros β_i pode ser estimado usando somente o i-ésimo fator de (2.5.8):

$$\left[\prod_{i=1}^{r_i} \lambda_i(x_{it} | \mathbf{z}) \right] \left[\prod_{r=1}^n G_r(t_r | \mathbf{z}) \right] = \left[\prod_{i=1}^{r_i} \lambda_i(x_{it} | \mathbf{z}) \right] \left[\prod_{r=1}^n \exp\left(-\int_0^{t_r} \lambda_i(t | \mathbf{z}) dt\right) \right], \quad (2.5.13)$$

ou seja, usando os r_i tempos de falha da causa i sozinha e tratando os $n-r_i$ tempos restantes como censuras, $i=1, 2, \dots, k$.

2.6 - TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS

É muito comum em experimentos industriais, realizar testes de vida acelerados de produtos que podem falhar em um dos k possíveis lugares ou falhar de uma das k possíveis causas (também chamadas modos de falhas). Tais produtos são chamados **sistemas em série**. A "causa de falha" pode ser definida de qualquer forma útil. Por exemplo, pode ser a falha de um particular componente ou pode ser uma causa de falha propriamente dita dentro de um componente. Exemplos incluem:

- um motor elétrico pode falhar em um dos isolamentos:
"turn", "phase" ou "ground",
- um dispositivo semi-condutor pode falhar em uma junção ou em um "led".

No contexto de um único risco, foram tratados no capítulo 1 os modelos de testes acelerados e estes nada mais são do que modelos de regressão paramétricos com parâmetros assumindo formas de acordo com relações de stress-vida derivadas do entendimento da física de falha do dispositivo em questão. Os mesmos modelos de testes acelerados tratados em tal capítulo serão abordados nessa seção, uma vez que estes podem ser facilmente estendidos ao contexto de riscos competitivos. A discussão dessa seção, como no capítulo 1, limita-se ao modelo paramétrico Weibull. Primeiramente será tratado o caso onde os tempos de falha latentes são assumidos independentes e posteriormente serão feitas algumas considerações sobre o caso onde essa independência não pode ser assumida.

2.6.1 - Testes Acelerados em Modelos Paramétricos em Riscos Competitivos

Considerando-se a situação onde os tempos de falha latentes são supostamente independentes, o modelo para dados com causas de falha competitivas Weibull independentes pode ser estendido como um modelo Weibull-stress-vida para cada causa de falha. Então sob uma aplicação constante do j -ésimo nível do stress V_j , $j=1, 2, \dots, s$, a i -ésima causa de falha terá a seguinte densidade:

$$f(t|V_j) = \delta_i t^{\delta_i - 1} \alpha_{ij} \exp(-\alpha_{ij} t^{\delta_i}), \quad t \geq 0 \quad i=1, 2, \dots, k \quad j=1, 2, \dots, s, \quad (2.6.1)$$

onde $\delta_i > 0$, $\alpha_{ij} = \phi(V_j, \beta_i)$. Para caracterização do modelo Weibull-Lei de Potência, Weibull-Arrhenius e Weibull-Eyring para cada causa de falha seguem as respectivas relações de stress-vida:

a) Relação Lei de Potência

$$\alpha_{ij} = [\exp(\gamma_{i0}) V_j^{\gamma_{i1}}]^{\delta_i} = \exp(\beta_{i0} + \beta_{i1} \ln V_j) = \exp(\beta_i' V_j), \quad (2.6.2)$$

onde V é voltagem, $V_j' = (1, \ln V_j)$ e $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1})$.

b) Relação Taxa de Reação de Arrhenius

$$\alpha_{ij} = [\exp(\gamma_{i0} + \gamma_{i1} g_1(V_j))]^{\delta_i} = \exp(\beta_{i0} + \beta_{i1} g_1(V_j)) = \exp(\beta_i' V_j), \quad (2.6.3)$$

onde V é temperatura absoluta, $g_1(V_j) = -\frac{1000}{V_j}$, $V_j' = (1, -\frac{1000}{V_j})$ e $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1})$.

c) Relação Eyring Para Um Único Stress

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= [V_j \exp(\gamma_{i0} + \gamma_{i1} g_1(V_j))]^{\delta_i} = V_j^{\delta_i} \exp(\beta_{i0} + \beta_{i1} g_1(V_j)) = \\ &= \exp(\beta_{i0} + \beta_{i1} g_1(V_j) + \beta_{i2} \ln V_j) = \exp(\beta_i' V_j), \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

onde V é temperatura absoluta, $V_j' = (1, -\frac{1000}{V_j}, \ln V_j)$ e $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2})$.

Para o caso em que os tempos de falha latentes não são supostamente independentes não se pode ajustar um modelo Weibull-stress-vida para cada causa. Neste caso, assume-se um modelo Weibull multivariado e uma relação de stress-vida para os parâmetros de escala α_{ij} , $i = 1, 2, \dots, k$ $j = 1, 2, \dots, s$, como acima.

Vários tipos distintos de modelos Weibull multivariados são propostos na literatura. No entanto, pouco se encontra à respeito de modelos multivariados para análise de dados obtidos de testes acelerados, menos ainda para dados de testes

acelerados de sistemas em série (ou seja, em situações de riscos competitivos).

2.6.2 - Função de Verossimilhança para Testes Acelerados

Em experimentos industriais de testes de vida acelerados, estes são conduzidos sob diversos níveis de stress pré-fixados no planejamento. Devido a esse fato, para a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo paramétrico assumido, além das verossimilhanças em (2.5.7) e (2.5.8), pode-se alternativamente utilizar uma verossimilhança equivalente a essas anteriores. Considerando testes acelerados conduzidos em s níveis de um único stress V , com n_j ítems testados em cada nível V_j , $j= 1, 2, \dots, s$, e utilizando a seguinte notação:

Notação:

- i : causa de falha $i= 1, 2, \dots, k$,
- r_{ij} : número de falhas devido a causa i dentre os n_j ítems testados,
- w_j : número de censuras dentre os n_j ítems testados,
- t_{jr} : tempo de falha ou censura do r -ésimo item em V_j , $r= 1, 2, \dots, n_j$,
- x_{ijl} : tempo de falha do l -ésimo item dentre aqueles que falharam da causa i em V_j ,
- x_{wjl} : tempo de censura do l -ésimo item censurado em V_j ,

a contribuição do l -ésimo objeto que falhou pela causa i , em um dado nível de stress V_j para essa verossimilhança equivalente é:

$$\lambda_i(x_{ijl} | V_j) \prod_{m=1}^k G_m(x_{ijl} | V_j). \tag{2.6.5}$$

A contribuição dos r_{ij} ítems que falharam da causa i sob o nível V_j para a verossimilhança é:

$$\prod_{l=1}^{r_{ij}} \left[\lambda_i(x_{ijl} | V_j) \prod_{m=1}^k G_m(x_{ijl} | V_j) \right], \tag{2.6.6}$$

e a contribuição das censuras para a verossimilhança é:

$$\prod_{l=1}^{w_j} \left[\prod_{m=1}^k G_m(x_{jwl} | V_j) \right]. \tag{2.6.7}$$

Dessa forma, a verossimilhança total equivalente é expressa por:

$$\begin{aligned} L(\beta) &\approx \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{i=1}^k \prod_{l=1}^{r_{ij}} \left[\lambda_i(x_{ijl} | V_j) \prod_{m=1}^k G_m(x_{ijl} | V_j) \right] \prod_{l=1}^{w_j} \left[\prod_{m=1}^k G_m(x_{jwl} | V_j) \right] \right\} = \\ &= \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^s \left\{ \left[\prod_{l=1}^{r_{ij}} \lambda_i(x_{ijl} | V_j) \right] \left[\prod_{r=1}^{n_j} G_i(t_{jr} | V_j) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

Novamente, se $\lambda_i(t | V_j) = \lambda_i(t | \beta_i, V_j)$ depende somente dos parâmetros $\beta_i = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ip})$ e estes parâmetros não estão presentes em nenhuma outra função risco de causa-específica, então o vetor de parâmetros β_i pode ser estimado usando somente o i -ésimo fator de (2.6.8):

$$\begin{aligned} &\prod_{j=1}^s \left[\left\{ \prod_{l=1}^{r_{ij}} \lambda_i(x_{ijl} | V_j) \right\} \left\{ \prod_{r=1}^{n_j} G_i(t_{jr} | V_j) \right\} \right] = \\ &= \prod_{j=1}^s \left[\left\{ \prod_{l=1}^{r_{ij}} \lambda_i(x_{ijl} | V_j) \right\} \left\{ \prod_{r=1}^{n_j} \exp\left(-\int_0^{t_{jr}} \lambda_i(t | V_j) dt\right) \right\} \right], \quad i=1, 2, \dots, k, \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

ou seja, usando os $\sum_{j=1}^s r_{ij}$ tempos de falha da causa i sozinha e tratando os $\sum_{j=1}^s (n_j - r_{ij})$ tempos restantes como censuras.

Procedimentos de estimação e inferências para o modelo paramétrico Weibull dependem das suposições feitas acerca do comportamento dos tempos de falha latentes e serão tratados no capítulo 3.

2.6.3 - Avaliação Gráfica do Modelo

Como mencionado na seção 2.3, não é possível avaliar a adequação do modelo utilizado nem avaliar a independência das causas a partir da distribuição de (T, I) . No entanto se, nesses experimentos de testes acelerados, de alguma forma existirem evidências externas para acreditar na independência das causas, baseado em evidências físicas ou na experiência do pesquisador, pode-se verificar a validade das seguintes suposições para cada causa:

- os riscos são proporcionais, ou equivalentemente, o parâmetro de forma da Weibull possui o mesmo valor em todos os níveis do stress,
- a relação stress-vida é adequada,
- a distribuição de vida assumida é adequada.

Para verificação dessas suposições basta fazer, para cada causa em separado, análises gráficas análogas às apresentadas na seção 1.7.4. Para confecção dos gráficos para uma dada causa, considera-se que cada unidade tem um tempo de falha da correspondente causa ou caso contrário um tempo de censura. Tal tempo de censura resulta quando a unidade falha por uma outra causa, ou quando a unidade é removida ou ainda pelo término do teste.

CAPÍTULO 3

MODELOS DE REGRESSÃO WEIBULL PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS

3.1 - INTRODUÇÃO

A suposição frequentemente utilizada de independência das causas de falha em problemas de riscos competitivos pode não ser verdadeira em algumas situações físicas reais, ou seja, o tempo de falha latente associado a uma causa de falha de uma unidade experimental pode estar correlacionado com o tempo de falha latente da mesma unidade associado a uma causa diferente. Desse modo, é desejável um modelo que permita incorporar tal dependência.

Em estudos de tempo de vida onde a falha ocorre devido a apenas uma única causa, a distribuição Weibull tem encontrado considerável aceitação. Consequentemente, uma distribuição multivariada com distribuições marginais Weibull pode ser adequada a diversos dados de riscos competitivos.

Este capítulo tem como objetivo estudar modelos Weibull em ambas as situações, causas independentes e dependentes, em experimentos de testes acelerados

onde a variável concomitante é um stress.

O modelo Weibull com causas independentes em testes acelerados, estudado por Klein e Basu (1981), é revisado na seção 3.2. Na seção 3.3 é discutido um modelo bivariado, estudado por Moechberger (1974), que considera a dependência de duas causas de falha, a distribuição Weibull bivariada sugerida por Marshall e Olkin (1967). Esse modelo é útil em situações onde ocorre uma causa de falha comum, ou seja, a falha pode ocorrer por ambas as causas simultaneamente. Na seção 3.4 é realizada a extensão do modelo para experimentos de testes acelerados.

Métodos de máxima verossimilhança são empregados para a estimação dos parâmetros dos modelos abordados.

Aplicações numéricas referentes a esses modelos são apresentadas nas seções 5.2 e 5.3 do capítulo 5, respectivamente.

3.2 - MODELO DE REGRESSÃO WEIBULL INDEPENDENTE PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS

Klein e Basu (1981) consideram testes de vida acelerados conduzidos em s níveis de um único stress V quando o objeto em estudo é um sistema em série com k causas de falha. Assume-se que os k tempos de falha latentes, correspondentes às k causas, são independentes com distribuição Weibull possuindo diferentes parâmetros de forma e escala. Uma relação de stress-vida geral para o parâmetro de escala é utilizada:

$$\alpha_{ij} = \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (3.2.1)$$

onde $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \dots, \beta_{ip_i})$ e $\mathbf{V}_{ij} = (g_{i0}(V_j), g_{i1}(V_j), \dots, g_{ip_i}(V_j))$ com $g_{i0}(V_j) = 1$ e $g_{i1}(V_j), g_{i2}(V_j), \dots, g_{ip_i}(V_j)$ são p_i funções não-decrescentes de $V_j, j = 1, 2, \dots, s$. Os $g_i(\cdot), i = 1, 2, \dots, k$, podem diferir de um componente para outro. Essa relação inclui como casos especiais:

- a relação lei de potência quando $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1})$ e $\mathbf{V}_{ij}' = (1, \ln V_j)$,
- a relação Arrhenius quando $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1})$ e $\mathbf{V}_{ij}' = (1, -1000/V_j)$,
- a relação Eyring para um único stress quando $\beta_i' = (\beta_{i0}, \beta_{i1}, \beta_{i2})$ e $\mathbf{V}_{ij}' = (1, -1000/V_j, \ln V_j)$.

O modelo assumido para cada função risco de causa-específica é o de riscos proporcionais dado em (2.4.1), com $C(V_j, \beta_i) = \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij})$.

3.2.1 - Estimação de Máxima Verossimilhança

Como visto na seção 2.5, a verossimilhança pode ser escrita inteiramente em função do risco de causa-específica. Dessa forma, as variáveis concomitantes e seus correspondentes parâmetros de regressão podem ser imediatamente incorporados a ela, possibilitando que a estimação e inferências procedam como usualmente. Métodos de máxima verossimilhança serão empregados para o cálculo dessas estimativas.

Considerando n_j itens testados no nível V_j do stress V , $j = 1, 2, \dots, s$, utilizando a mesma notação da seção 2.6.2, e seja

$$\lambda_i(x_{ijl} | V_j) = h_i(x_{ijl} | V_j) = \delta_i x_{ijl}^{\delta_i - 1} \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}),$$

e

$$\begin{aligned} G_i(t_{jr} | V_j) &= S_i(t_{jr} | V_j) = \exp\left[- \int_0^{t_{jr}} \delta_i u^{\delta_i - 1} \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) du\right] = \\ &= \exp\left[- t_{jr}^{\delta_i} \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij})\right], \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, k$, $l = 1, 2, \dots, r_{ij}$, $r = 1, 2, \dots, n_j$, a verossimilhança total será definida como em (2.5.8) por:

$$L(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \approx \prod_{i=1}^k L_i, \tag{3.2.2}$$

onde

$$\begin{aligned} L_i &= \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{l=1}^{r_{ij}} \delta_i x_{ijl}^{\delta_i - 1} \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \right\} \prod_{r=1}^{n_j} \exp\left[- t_{jr}^{\delta_i} \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij})\right] = \\ &= \prod_{j=1}^s \left\{ \delta_i^{r_{ij}} \exp[r_{ij} \beta_i' \mathbf{V}_{ij}] \prod_{l=1}^{r_{ij}} x_{ijl}^{\delta_i - 1} \exp\left[- \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^{\delta_i}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\ln L_i = \sum_{j=1}^s \left\{ r_{ij} \ln \delta_i + r_{ij} \beta_i' \mathbf{V}_{ij} + (\delta_i - 1) \sum_{l=1}^{r_{ij}} \ln x_{ijl} - \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^{\delta_i} \right\}.$$

Fazendo $\sum_{r=1}^{n_j} t_{jr} \delta_i = T_j(\delta_i)$, a primeira e segunda derivadas do $\ln L_i$, $i= 1, 2, \dots, k$ são:

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} \ln L_i = \sum_{j=1}^s \left[\frac{r_{ij}}{\delta_i} + \sum_{l=1}^{r_{ij}} \ln x_{ijl} - \exp(\beta_i' V_{ij}) \frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) \right], \quad (3.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{iu}} \ln L_i = \sum_{j=1}^s [r_{ij} g_{iu}(V_j) - g_{iu}(V_j) \exp(\beta_i' V_{ij}) T_j(\delta_i)], \quad u= 0, 1, \dots, p_i, \quad (3.2.4)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} \ln L_i = \sum_{j=1}^s \left[\frac{r_{ij}}{\delta_i^2} + \exp(\beta_i' V_{ij}) \frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i) \right], \quad (3.2.5)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{iu} \partial \beta_{iw}} \ln L_i = \sum_{j=1}^s [g_{iu}(V_j) g_{iw}(V_j) \exp(\beta_i' V_{ij}) T_j(\delta_i)], \quad u, w= 0, 1, \dots, p_i, \quad (3.2.6)$$

e

$$-\frac{\partial^2}{\partial \delta_i \partial \beta_{iu}} \ln L_i = \sum_{j=1}^s \left[\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) g_{iu}(V_j) \exp(\beta_i' V_{ij}) \right], \quad u= 0, 1, \dots, p_i, \quad (3.2.7)$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) = \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr} \delta_i \ln t_{jr},$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i) = \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr} \delta_i (\ln t_{jr})^2.$$

As equações de máxima verossimilhança $\frac{\partial}{\partial \delta_i} \ln L_i = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \beta_{iu}} \ln L_i = 0$, $i= 1, 2, \dots, k$ $u= 0, 1, \dots, p_i$, podem ser resolvidas pelo Método de Newton-Raphson ou algum outro procedimento iterativo para os estimadores de máxima verossimilhança, $\hat{\delta}_i, \hat{\beta}_{i0}, \dots, \hat{\beta}_{ip_i}$.

A matriz de informação de Fisher I_i , correspondendo a L_i , é $[k(p_i+1)] \times [k(p_i+1)]$ e é escrita de forma particionada por:

$$I_i = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{iu} \partial \beta_{iw}} \ln L_i\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \delta_i \partial \beta_{iu}} \ln L_i\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \delta_i \partial \beta_{iu}} \ln L_i\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} \ln L_i\right) \end{bmatrix}, \quad i= 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.8)$$

Um estimador dessa matriz pode ser obtido substituindo δ_i e β_i por $\hat{\delta}_i$ e $\hat{\beta}_i$ nas expressões acima, de forma que:

$$\hat{I}_i = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\beta_{iu}\partial\beta_{iw}} \ln L_i\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\delta_i\partial\beta_{iu}} \ln L_i\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\delta_i\partial\beta_{iu}} \ln L_i\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial\delta_i^2} \ln L_i\right) \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.9)$$

$(\beta_i, \delta_i) = (\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i)$

Um estimador consistente da matriz de variância-covariância assintótica $\hat{\Sigma}_i$ de $(\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i)$ é dado por:

$$\hat{\Sigma}_i = \hat{I}_i^{-1}$$

ou

$$\hat{\Sigma}_i = I_{i0}^{-1}, \quad (3.2.10)$$

onde I_{i0} é a matriz de informação observada e é escrita como:

$$I_{i0} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial\beta_{iu}\partial\beta_{iw}} \ln L_i & -\frac{\partial^2}{\partial\delta_i\partial\beta_{iu}} \ln L_i \\ -\frac{\partial^2}{\partial\delta_i\partial\beta_{iu}} \ln L_i & -\frac{\partial^2}{\partial\delta_i^2} \ln L_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.11)$$

$(\beta_i, \delta_i) = (\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i)$

As expressões das esperanças da matriz de informação de Fisher serão distintas para cada tipo de censura. Estas devem ser avaliadas numericamente e encontram-se desenvolvidas no apêndice C.

3.2.2 - Estimação de Funções no Stress Usual

Sejam $\hat{\beta}_i$ e $\hat{\delta}_i$ os respectivos estimadores de máxima verossimilhança de β_i e δ_i para $i = 1, 2, \dots, k$, obtidos de um teste de vida acelerado e seja $\hat{\Sigma}_i$ a matriz de variância-covariância assintótica de $(\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i)$, estimada por \hat{I}_i^{-1} ou I_{i0}^{-1} , como dado em (3.2.11), e particionada da seguinte forma:

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \Sigma_{(i,i)} & \Sigma_{(i,\delta_i)} \\ \Sigma'_{(i,\delta_i)} & \sigma^2_{(\delta_i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.2.12)$$

onde $\Sigma_{(i,i)}$: matriz de variância-covariância assintótica de $\hat{\beta}_i$;
 $\Sigma_{(i,\delta_i)}$: vetor coluna de covariâncias assintóticas entre $\hat{\beta}_{il}$ e $\hat{\delta}_i$, $l = 0, 1, \dots, p_i$;
 $\sigma^2_{(\delta_i)}$: variância assintótica de $\hat{\delta}_i$.

Para tamanhos amostrais suficientemente grandes, as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança implicam que:

$$(\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i) \stackrel{a}{\sim} N[(\beta_i, \delta_i), \hat{\Sigma}_i], \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

e

$$\hat{\beta}_i \stackrel{a}{\sim} N(\beta_i, \hat{\Sigma}_{(i,i)}), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Desse modo, utilizando-se o método delta (Apêndice A), obtém-se a seguinte aproximação:

$$\hat{\beta}_i' \mathbf{V}_{iu} \stackrel{a}{\sim} N[\beta_i' \mathbf{V}_{iu}, \sigma^2_{iu}], \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.2.13)$$

onde $\mathbf{V}_{iu} = (1, g_{i1}(V_u), \dots, g_{ip_i}(V_u))$, com V_u o stress de uso normal, e

$$\sigma^2_{iu} = (1, g_{i1}(V_u), \dots, g_{ip_i}(V_u)) \hat{\Sigma}_{(i,i)} (1, g_{i1}(V_u), \dots, g_{ip_i}(V_u))'. \quad (3.2.14)$$

Thomas, Bain e Antle (1969) recomendam a utilização de tamanhos amostrais de pelo menos cem itens em cada nível de stress para esta aproximação ser razoável.

Abaixo encontram-se os estimadores de máxima verossimilhança e intervalos de confiança para algumas funções de interesse no stress de uso normal V_u :

a) Estimação pontual e intervalo de confiança para $\lambda_i(t|V_u)$

O estimador de máxima verossimilhança da função risco de causa-específica no tempo t e stress V_u , é obtido por:

$$\hat{\lambda}_i(t|V_u) = \hat{\delta}_i t^{\hat{\delta}_i - 1} \hat{\alpha}_{ij} = \hat{\delta}_i t^{\hat{\delta}_i - 1} \exp(\hat{\beta}_i' \mathbf{V}_{iu}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad t > 0. \quad (3.2.15)$$

Utilizando-se o método delta (apêndice A), a aproximação normal para $(\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i)$ implica que:

$$\ln \hat{\lambda}_i(t | V_u) = \ln \hat{\delta}_i + (\hat{\delta}_i - 1) \ln t + \hat{\beta}_i' V_{iu} \stackrel{d}{\sim} N(\ln \lambda_i(t | V_u), \sigma_{iu}^2(t)),$$

onde

$$\sigma_{iu}^2(t) = \left(1, g_{i1}(V_u), \dots, g_{ip_i}(V_u), \frac{1}{\hat{\delta}_i} + \ln t\right) \hat{\Sigma}_i \left(1, g_{i1}(V_u), \dots, g_{ip_i}(V_u), \frac{1}{\hat{\delta}_i} + \ln t\right). \quad (3.2.16)$$

Portanto,

$$\hat{\lambda}_i(t | V_u) \stackrel{d}{\sim} \text{LogNormal}(\ln \lambda_i(t | V_u), \sigma_{iu}^2(t)), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Pode-se demonstrar que este é um estimador viciado para $\lambda_i(t | V_u)$ uma vez que sua esperança é dada por:

$$E(\hat{\lambda}_i(t | V_u)) = \exp\left[\ln \lambda_i(t | V_u) + \frac{1}{2} \sigma_{iu}^2(t)\right] = \lambda_i(t | V_u) \exp\left[\frac{1}{2} \sigma_{iu}^2(t)\right].$$

Assim, um estimador não viciado para $\lambda_i(t | V_u)$ é expresso como:

$$\bar{\lambda}_i(t | V_u) = \hat{\lambda}_i(t | V_u) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{iu}^2(t)\right), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.17)$$

O intervalo pode ser construído utilizando-se a distribuição assintótica normal de $\ln \hat{\lambda}_i(t | V_u)$, cujo intervalo de $(1-\alpha)100\%$ de confiança é:

$$[\ln \hat{\lambda}_i(t | V_u) - z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t); \ln \hat{\lambda}_i(t | V_u) + z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t)], \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Desse modo, o intervalo de confiança assintótico de $(1-\alpha)100\%$ para $\lambda_i(t | V_u)$ resulta em:

$$[\bar{\lambda}_i(t | V_u) \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t)); \bar{\lambda}_i(t | V_u) \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t))], \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.18)$$

b) *Estimação pontual e intervalo de confiança para $H_i(t | V_u)$*

O estimador de máxima verossimilhança do risco acumulado para a i -ésima causa no tempo t e stress V_u , é escrito por:

$$\hat{H}_i(t | V_u) = \int_0^t \bar{\lambda}_i(x | V_u) dx = t^{\hat{\delta}_i} \hat{\alpha}_{iu}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad t > 0. \quad (3.2.19)$$

Analogamente a $\hat{\lambda}_i(t|V_u)$, pode-se mostrar que $\hat{H}_i(t|V_u)$ é um estimador viciado de $H_i(t|V_u)$ desde que a aproximação Normal para $(\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i)$ implica que:

$$\ln \hat{H}_i(t|V_u) = \hat{\delta}_i \ln t + \ln \hat{\alpha}_{iu} \stackrel{L}{\sim} N[\ln H_i(t|V_u), \sigma_{iu}^{2*}(t)], \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

onde

$$\sigma_{iu}^{2*}(t) = (1, g_{i1}(V_u), \dots, g_{ip_i}(V_u), \ln t) \hat{\Sigma}_i(1, g_{i1}(V_u), \dots, g_{ip_i}(V_u), \ln t)', \quad t > 0. \quad (3.2.20)$$

Portanto,

$$\hat{H}_i(t|V_u) \stackrel{L}{\sim} \text{LogNormal}[\ln H_i(t|V_u), \sigma_{iu}^{2*}(t)], \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Um estimador não-viciado de $H_i(t|V_u)$ possui a forma:

$$\tilde{H}_i(t|V_u) = \hat{H}_i(t|V_u) \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma_{iu}^{2*}(t)\right], \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.21)$$

O intervalo de confiança assintótico de $(1-\alpha)100\%$ para $H_i(t|V_u)$, construído analogamente ao intervalo para $\lambda_i(t|V_u)$, é escrito como:

$$\left[\hat{H}_i(t|V_u) \exp\left(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^*(t)\right); \hat{H}_i(t|V_u) \exp\left(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^*(t)\right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.22)$$

c) *Estimação pontual e intervalo de confiança para $S_i(t|V_u)$*

A sobrevivência marginal $S_i(t|V_u)$ pode ser estimada por:

$$\hat{S}_i(t|V_u) = \exp(-\hat{H}_i(t|V_u)), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad t > 0, \quad (3.2.23)$$

ou utilizando o estimador não-viciado $\tilde{H}_i(t|V_u)$, resultando em:

$$\tilde{S}_i(t|V_u) = \exp(-\tilde{H}_i(t|V_u)), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad t > 0. \quad (3.2.24)$$

Exponenciando o intervalo de confiança para $H_i(t|V_u)$ em (3.2.22) é possível construir um intervalo de confiança aproximado para $S_i(t|V_u)$ da forma:

$$\left[\hat{S}_i(t|V_u) \exp\left(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^*(t)\right); \hat{S}_i(t|V_u) \exp\left(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^*(t)\right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.25)$$

d) *Estimação pontual e intervalo de confiança para $S_T^r(t|V_u)$*

Klein e Basu (1981) definem a sobrevivência com causas eliminadas $S_T^r(t|V_u)$, apresentada na seção 2.2.3, da seguinte maneira: supondo que um item é sujeito a k causas de falha independentes, seja r um subconjunto de $\{1, 2, \dots, k\}$ e ainda supondo que tal item possa falhar somente das causas indexadas pelos elementos de r , tem-se que:

$$S_T^r(t|V_u) = \prod_{i \in r} S_i(t|V_u). \tag{3.2.26}$$

Quando $r = \{1, 2, \dots, k\}$, então (3.2.26) é a função de sobrevivência total do sistema. Quando r é um subconjunto de $\{1, 2, \dots, k\}$, então (3.2.26) representa a função de sobrevivência de um sistema redesenhado de tal forma que as causas indexadas por r^c são completamente eliminadas. O estimador de $S_T^r(t|V_u)$ pode ser escrito por:

$$\hat{S}_T^r(t|V_u) = \prod_{i \in r} \hat{S}_i(t|V_u), \tag{3.2.27}$$

ou alternativamente por:

$$\hat{S}_T^r(t|V_u) = \prod_{i \in r} \hat{S}_i(t|V_u). \tag{3.2.28}$$

Para a obtenção do intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para $S_T^r(t|V_u)$, supõe-se que:

$$(1-\alpha)^{1/r} = P \left[\hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))} \leq \hat{S}_i(t|V_u) \leq \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(-z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))} \right] \text{ para } i \in r,$$

onde $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)^{1/r}}{2}$. E desde que $(\hat{S}_i(t|V_u), \hat{S}_j(t|V_u))$ são assintoticamente independentes para $i \neq j$ obtém-se:

$$\begin{aligned} (1-\alpha) &= \prod_{i \in r} P \left[\hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))} \leq \hat{S}_i(t|V_u) \leq \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(-z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))} \right] \leq \\ &\leq P \left[\prod_{i \in r} \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))} \leq \prod_{i \in r} \hat{S}_i(t|V_u) \leq \prod_{i \in r} \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(-z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))} \right] \end{aligned}$$

Portanto, o intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para $S^r(t|V_u)$ é:

$$\left[\prod_{i \in r} \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))}; \prod_{i \in r} \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(-z_\gamma \sigma_{iu}^*(t))} \right] \tag{3.2.29}$$

e) *Estimação pontual e intervalo de confiança para t_{iPu}*

O estimador de máxima verossimilhança do (100P)-ésimo percentil para a causa i no stress de uso normal V_u , é escrito como:

$$\hat{t}_{iPu} = \left(\frac{\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_{iu}} \right)^{1/\hat{\delta}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.30)$$

Desde que, $\ln \hat{t}_{iPu} \stackrel{d}{\sim} N(\ln t_{iPu}, \sigma_{iu}^2(p))$, onde $\sigma_{iu}^2(p) = \mathbf{H}' \hat{\Sigma}_i \mathbf{H}$ com

$$\mathbf{H}' = \left(\frac{1}{\hat{\delta}_i}, \frac{g_{i1}(V_u)}{\hat{\delta}_i}, \dots, \frac{g_{ip_i}(V_u)}{\hat{\delta}_i}, \frac{1}{\hat{\delta}_i} \ln \left(\frac{-\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_{iu}} \right) \right).$$

Então,

$$\tilde{t}_{iPu} = \hat{t}_{iPu} \exp\left(-\frac{\sigma_{iu}^2(p)}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3.2.31)$$

é o estimador não-viciado para t_{iPu} .

O intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para t_{iPu} , construído com base na aproximação normal de $\ln t_{iPu}$, é dado por:

$$\left[\hat{t}_{iPu} \exp\left(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(p)\right); \hat{t}_{iPu} \exp\left(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(p)\right) \right], \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2.32)$$

3.3 - MODELO WEIBULL DEPENDENTE EM RISCOS COMPETITIVOS

3.3.1 - Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin (BVW)

A distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin (1967), estudada por Moeschberger (1974) e denotada por $BVW(\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2, \alpha_{12})$, possui função de sobrevivência conjunta da forma:

$$S(t_1, t_2) = P[T_1 > t_1, T_2 > t_2] = \exp[-\alpha_1 t_1^{\delta_1} - \alpha_2 t_2^{\delta_2} - \alpha_{12} \max(t_1^{\delta_1}, t_2^{\delta_2})], \quad t_1, t_2 > 0, \quad (3.3.1)$$

onde $\alpha_i > 0$, $\delta_i > 0$ para $i = 1, 2$, e $\alpha_{12} \geq 0$, são os parâmetros da distribuição. Esta distribuição, tem a característica interessante de conter tanto uma parte absolutamente contínua quanto uma parte singular. A presença da parte singular ocorre porque

$P(T_1^{\delta_1} = T_2^{\delta_2}) > 0$. Num teste de vida tal característica significa que o tempo de falha latente associado a uma causa pode ser alguma potência do tempo de falha latente associado à outra, ou seja, $P(T_1 = T_2^{\delta_2/\delta_1}) > 0$. Se $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ em (3.3.1), então o evento $T_1 = T_2$ tem probabilidade positiva e poderia ocorrer se uma unidade experimental falha por ambas as causas simultaneamente, ou seja, a falha ocorre devido a uma combinação das duas causas.

Seguindo o método usado por Marshall e Olkin (1967), Moeschberger (1974) verificou que essa distribuição possui as seguintes propriedades:

P1) Marginais Weibull com parâmetros $(\alpha_i + \alpha_{12})$ e δ_i , $i = 1, 2$, uma vez que:

$$S_1(t_1) = S(t_1, 0) = \exp[-(\alpha_1 + \alpha_{12}) t_1^{\delta_1}],$$

e

$$S_2(t_2) = S(0, t_2) = \exp[-(\alpha_2 + \alpha_{12}) t_2^{\delta_2}].$$

P2) Uma condição necessária e suficiente para que T_1 e T_2 sejam independentes: $\alpha_{12} = 0$.

P3) A função de sobrevivência conjunta pode ser equivalentemente escrita como uma soma do tipo:

$$S(t_1, t_2) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha} S_a(t_1, t_2) + \frac{\alpha_{12}}{\alpha} S_s(t_1, t_2),$$

onde

$$S_a(t_1, t_2) = \frac{\alpha}{\alpha_1 + \alpha_2} S(t_1, t_2) - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_1 + \alpha_2} S_s(t_1, t_2)$$

e

$$S_s(t_1, t_2) = \exp[-\alpha \max(t_1^{\delta_1}, t_2^{\delta_2})].$$

P4) Se (T_1, T_2) é BVW $(\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2, \alpha_{12})$ tem-se que:

$$P(T_1^{\delta_1} > T_2^{\delta_2}) = \frac{\alpha_2}{\alpha} \quad \text{e} \quad P(T_1^{\delta_1} < T_2^{\delta_2}) = \frac{\alpha_1}{\alpha}.$$

Então,

$$P(T_1^{\delta_1} = T_2^{\delta_2}) = \frac{\alpha_{12}}{\alpha}.$$

Moeschberger interpreta (3.3.5) como uma medida de dependência entre T_1 e T_2 .

Quando $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, além das quatro propriedades acima mencionadas outras propriedades são encontradas, tais como:

P5) (T_1, T_2) é $BVW(\alpha_1, \delta, \alpha_2, \delta, \alpha_{12})$ se e somente se existem variáveis aleatórias Weibull independentes, X_1, X_2, X_3 , tais que $T_1 = \min(X_1, X_3)$ e $T_2 = \min(X_2, X_3)$.

Uma consequência dessa propriedade é que questões relativas a variáveis aleatórias Weibull dependentes com parâmetros de forma comum podem ser reduzidas a questões relativas a variáveis aleatórias Weibull independentes com formas iguais.

P6) $T = \text{Min}(T_1, T_2)$ tem distribuição Weibull (α, δ) , desde que:

$$S_T(t) = S(t, t) = \exp[-\alpha t^\delta]. \tag{3.3.6}$$

3.3.2 - Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin em Riscos Competitivos

Além das propriedades acima, Moeschberger estudou tal modelo bivariado para situações de riscos competitivos com duas causas de falha. Em seu estudo, foi demonstrado que a distribuição conjunta do par observável (T, I) quando $\delta_1 \neq \delta_2$, depende do intervalo a que pertence, $[0, 1]$ ou $(1, \infty)$, depende ainda dos tamanhos relativos de δ_1 e δ_2 , bem como da causa de falha. Assim, a função de densidade de (T, I) obtida é expressa por:

$$f_{T,I}(t, i | \delta_1 > \delta_2) = \begin{cases} \alpha_1 \delta_1 t^{\delta_1-1} \exp[-\alpha_1 t^{\delta_1} - (\alpha_2 + \alpha_{12}) t^{\delta_2}], & \text{se } i = 1 \text{ e } 0 \leq t \leq 1; \\ (\alpha_1 + \alpha_{12}) \delta_1 t^{\delta_1-1} \exp[-(\alpha_1 + \alpha_{12}) t^{\delta_1} - \alpha_2 t^{\delta_2}], & \text{se } i = 1 \text{ e } t > 1; \\ (\alpha_2 + \alpha_{12}) \delta_2 t^{\delta_2-1} \exp[-\alpha_1 t^{\delta_1} - (\alpha_2 + \alpha_{12}) t^{\delta_2}], & \text{se } i = 2 \text{ e } 0 \leq t \leq 1; \\ \alpha_2 \delta_2 t^{\delta_2-1} \exp[-(\alpha_1 + \alpha_{12}) t^{\delta_1} - \alpha_2 t^{\delta_2}], & \text{se } i = 2 \text{ e } t > 1. \end{cases}$$

$$e \quad f_{T,I}(t, i | \delta_2 > \delta_1) = \begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_{12}) \delta_1 t^{\delta_1 - 1} \exp[-(\alpha_1 + \alpha_{12}) t^{\delta_1} - \alpha_2 t^{\delta_2}], & \text{se } i = 1 \text{ e } 0 \leq t \leq 1; \\ \alpha_1 \delta_1 t^{\delta_1 - 1} \exp[-(\alpha_1 t^{\delta_1} - (\alpha_2 + \alpha_{12}) t^{\delta_2})], & \text{se } i = 1 \text{ e } t > 1; \\ \alpha_2 \delta_2 t^{\delta_2 - 1} \exp[-(\alpha_1 + \alpha_{12}) t^{\delta_1} - \alpha_2 t^{\delta_2}], & \text{se } i = 2 \text{ e } 0 \leq t \leq 1; \\ (\alpha_2 + \alpha_{12}) \delta_2 t^{\delta_2 - 1} \exp[-\alpha_1 t^{\delta_1} - (\alpha_2 + \alpha_{12}) t^{\delta_2}], & \text{se } i = 2 \text{ e } t > 1. \end{cases} \quad (3.3.7)$$

A distribuição de probabilidade do tempo de falha da causa i , $Q_i^*(t)$, $i = 1, 2$, é então:

$$Q_i^*(t) = \begin{cases} \int_0^t f_{T,I}(u, i | \omega) du, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \int_1^t f_{T,I}(u, i | \omega) du, & \text{se } t > 1, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

para $i = 1, 2$, onde $\omega = 1$ quando $\delta_1 > \delta_2$ e $\omega = 2$ quando $\delta_2 > \delta_1$. Ainda, para a obtenção da densidade condicional de $(T | I)$, equivalente à variável $X_i = T_i | (\min T_i = T_i)$, denota-se:

x_{ih} : tempo de falha pela causa i no intervalo h , $i = 1, 2$ $h = 1, 2$,

onde $h = 1$ e $h = 2$, referem-se aos intervalos $[0, 1]$ e $(1, \infty)$, respectivamente. Desse modo, a função de densidade de X_i é obtida por:

$$f_i^*(x_{ih} | \omega) = \frac{f_{T,I}(x_{ih} | \omega)}{\pi_{ih\omega}^*}, \quad x_{ih} > 0, \quad (3.3.9)$$

para $i, h, \omega = 1, 2$, onde $\pi_{ih\omega}^*$ é a probabilidade de falha devido a causa i no intervalo h dado ω . Por exemplo, π_{111}^* é a probabilidade de falha da causa 1 no intervalo 1 dado $\delta_1 > \delta_2$.

Pode-se observar da função em (3.3.7) que, no caso onde $\delta_1 \neq \delta_2$, todos os parâmetros são identificáveis a partir da distribuição de (T, I) . No caso em que $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, em consequência da propriedade P5, pode-se reduzir o problema de riscos competitivos com duas causas dependentes a um com três causas independentes. Portanto, todos os parâmetros são igualmente identificáveis a partir da distribuição de (T, I) .

3.4 - MODELO DE REGRESSÃO BVW PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS

Esta seção tem como objetivo estender os resultados de Moeschberger a um modelo de regressão BVW para o caso particular de testes acelerados, onde a variável concomitante considerada é um stress. Assim, supõe-se novamente que testes de vida são conduzidos em s níveis de um único stress V . Sob o nível normal do stress, V_u , assume-se que o par (T_1, T_2) , representando os tempos de falha latentes associados às causas 1 e 2, respectivamente, tem distribuição BVW($\alpha_{1u}, \delta_1, \alpha_{2u}, \delta_2, \alpha_{12u}$). Assume-se também que sob um determinado nível de stress $V_j, j=1, 2, \dots, s$, o par (T_1, T_2) tem distribuição BVW($\alpha_{1j}, \delta_1, \alpha_{2j}, \delta_2, \alpha_{12j}$). Portanto, a sobrevivência conjunta de (T_1, T_2) sob o nível de stress $V_j, j=1, 2, \dots, s$, é expressa por:

$$S(t_1, t_2 | V_j) = \exp[-\alpha_{1j} t_1^{\delta_1} - \alpha_{2j} t_2^{\delta_2} - \alpha_{12j} \max(t_1^{\delta_1}, t_2^{\delta_2})], \quad (3.3.10)$$

com relações de stress-vida para os parâmetros de escala $\alpha_{ij}, i=1, 2, 12$ escritas como em (3.2.1), isto é, $\alpha_{ij} = \exp(\beta_i V_j)$, $i=1, 2, 12, j=1, 2, \dots, s$.

3.4.1 - Estimação de Máxima Verossimilhança

Caso 1: $\delta_1 = \delta_2 = \delta$

Em vista da propriedade P5, o problema de estimação dos parâmetros do modelo pode ser reduzido a um no qual se tem interesse em estimar os parâmetros de três Weibull independentes com parâmetros de forma iguais e parâmetros de escala $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \alpha_{12j}$, respectivamente. Assim, em stress V_j a distribuição Weibull com parâmetro de escala α_{ij} corresponde à distribuição de vida associada a causa i somente, $i=1, 2$. A distribuição Weibull com parâmetro de escala α_{12j} corresponde à distribuição de vida associada com falha de uma combinação das duas causas. Então, similarmente ao procedimento usado por Marshall e Olkin (1967) para o modelo exponencial bivariado "shock fatal", toma-se a falha de um produto devido a falha de ambas as causas conjuntamente como uma causa de falha separada, por exemplo, causa 12.

Seja $\psi_i = (\delta, \beta_i), i=1, 2, 12$, o vetor de parâmetros desconhecidos do modelo, desde que o parâmetro δ é comum a todos os fatores da verossimilhança, ψ_i não pode ser

estimado usando somente o i -ésimo fator, como na seção 3.2. Deve-se utilizar a verossimilhança completa dada por:

$$L \approx \prod_i \prod_{j=1}^s \left\{ \left[\prod_{l=1}^{r_{ij}} \delta x_{ijl}^{\delta-1} \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \right] \left[\prod_{r=1}^{n_j} \exp[-t_{jr}^\delta \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij})] \right] \right\} =$$

$$= \prod_i \prod_{j=1}^s \left\{ \delta^{r_{ij}} \exp[r_{ij} \beta_i' \mathbf{V}_{ij}] \left(\prod_{l=1}^{r_{ij}} x_{ijl}^{\delta-1} \right) \exp \left[-\exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta \right] \right\} \quad (3.3.11)$$

Logo,

$$\ln L \approx \sum_i \sum_{j=1}^s \left\{ r_{ij} \ln \delta + r_{ij} \beta_i' \mathbf{V}_{ij} + (\delta-1) \sum_{l=1}^{r_{ij}} \ln x_{ijl} - \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta \right\} \quad (3.3.12)$$

A primeira e a segunda derivadas de $\ln L$ são:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln L = \sum_i \sum_{j=1}^s \left\{ \frac{r_{ij}}{\delta} + \sum_{l=1}^{r_{ij}} \ln x_{ijl} - \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta \ln t_{jr} \right\} =$$

$$= \frac{r}{\delta} + \sum_i \sum_{j=1}^s \sum_{l=1}^{r_{ij}} \ln x_{ijl} - \sum_i \sum_{j=1}^s \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta \ln t_{jr},$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{um}} \ln L = \sum_{j=1}^s \left\{ r_{uj} g_{um}(\mathbf{V}_j) - \exp(\beta_u' \mathbf{V}_{uj}) g_{um}(\mathbf{V}_j) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta \right\},$$

$$u = 1, 2, 12 \quad m = 0, 1, \dots, p_u \quad (3.3.13)$$

e

$$-\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \ln L = \frac{r}{\delta^2} + \sum_i \sum_{j=1}^s \exp(\beta_i' \mathbf{V}_{ij}) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta (\ln t_{jr})^2,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \beta_{un}} \ln L = \sum_{j=1}^s \left\{ \exp(\beta_u' \mathbf{V}_{uj}) g_{um}(\mathbf{V}_j) g_{un}(\mathbf{V}_j) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta \right\},$$

$$u = 1, 2, 12 \quad m, n = 0, 1, \dots, p_u,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \beta_{vn}} \ln L = 0, \quad u, v = 1, 2, 12, \quad u \neq v, \quad m = 0, 1, \dots, p_u, \quad n = 0, 1, \dots, p_v,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \delta} \ln L = \sum_{j=1}^s \left\{ \exp(\beta_u' \mathbf{V}_{uj}) g_{um}(\mathbf{V}_j) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^\delta \ln t_{jr} \right\},$$

$$u = 1, 2, 12 \quad m = 0, 1, \dots, p_u \quad (3.3.14)$$

As equações de máxima verossimilhança $\frac{\partial}{\partial \delta} \ln L = 0$ e $\frac{\partial}{\partial \beta_{um}} \ln L = 0$, podem ser resolvidas iterativamente pelo método de Newton-Raphson.

A matriz de informação de Fisher, I , escrita na forma particionada é dada por:

$$I = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \beta_{vn}} \ln L\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \delta} \ln L\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \delta} \ln L\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \ln L\right) \end{bmatrix}, \quad (3.3.15)$$

para $u, v = 1, 2, 12$ e $m = 0, 1, \dots, p_u$ e $n = 0, 1, \dots, p_v$. Um estimador consistente da matriz de variância-covariância assintótica Σ de $(\hat{\beta}, \hat{\delta})$ é obtido através de: \hat{I}^{-1} ou I_0^{-1} , onde I_0 é a matriz de informação observada.

Caso 2: $\delta_1 \neq \delta_2$

No ajuste de distribuições de sobrevivência aos dados pode ser desejável para uma particular causa, assumir uma distribuição marginal com risco crescente e para a outra assumir uma distribuição marginal possuindo um risco decrescente. Tal flexibilidade não é permitida no caso anterior. Então, quando se acredita que um determinado conjunto de dados requer tal flexibilidade, parece razoável ajustar uma distribuição Weibull bivariada com parâmetros de forma diferentes.

A extensão do modelo a testes acelerados para esse caso, é feita introduzindo-se a seguinte notação:

V_j : j -ésimo nível do stress V , $j = 1, 2, \dots, s$, e

x_{ihj} : tempo de falha devido a causa i no intervalo h e nível V_j , $i, h = 1, 2$
 $j = 1, 2, \dots, s$.

Assim, a função de densidade de X_i dado V_j é então escrita por:

$$f_i^*(x_{ihj} | \omega, V_j) = \frac{f_{T,I}(x_{ihj} | \omega, V_j)}{\pi_{ihj\omega}^*}, \quad x_{ihj} > 0, \quad (3.3.16)$$

onde $f_{T,I}(x_{ihj} | \omega, V_j)$ é a densidade em (3.3.7) com parâmetros: $\alpha_{1j}, \delta_1, \alpha_{2j}, \delta_2$ e α_{12j} , e $\pi_{ihj\omega}^*$ denota a probabilidade de falha da causa i no intervalo h e nível V_j dado ω .

Ainda, utilizando a notação abaixo:

- n_j : # de unidades em teste no nível V_j ;
- i : índice representado a i -ésima causa, $i=1, 2, 3$;
- r_i : # de unidades que falharam pela causa i ;
- w_j : # de censuras dentre as n_j unidades testadas no nível V_j ;
- h : índice representando o p -ésimo intervalo de tempo, com

$$h = \begin{cases} 1 & \text{se o tempo de falha pertence ao intervalo } [0, 1] \\ 2 & \text{se o tempo de falha pertence ao intervalo } (1, \infty); \end{cases}$$

- r_{ihj} : # de falhas devido a causa i no intervalo de tempo h e nível V_j ;
- x_{ihjl} : l -ésimo tempo de falha devido a causa i no intervalo h e nível V_j ,
 $l=1, 2, \dots, r_{ihj}$;
- x_{wjl} : l -ésimo tempo de censura no nível V_j , $l=1, 2, \dots, n_j - \sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 r_{ihj}$;
- t_{jr} : r -ésimo tempo de falha ou de censura no nível V_j , $r=1, 2, \dots, n_j$;

a função de verossimilhança, obtida como na seção 2.5, para $\delta_2 > \delta_1$, é expressa por:

$$L(\delta_2 > \delta_1) \approx \prod_{j=1}^s \left\{ (\pi_{11j2}^*)^{r_{11j}} (\pi_{12j2}^*)^{r_{12j}} (\pi_{21j2}^*)^{r_{21j}} (\pi_{22j2}^*)^{r_{22j}} * \right. \\ * \left(\prod_{l=1}^{r_{11j}} f_1^*(x_{11jl} | \delta_2 > \delta_1, V_j) \right) \left(\prod_{l=1}^{r_{12j}} f_1^*(x_{12jl} | \delta_2 > \delta_1, V_j) \right) * \\ * \left. \left(\prod_{l=1}^{r_{21j}} f_2^*(x_{21jl} | \delta_2 > \delta_1, V_j) \right) \left(\prod_{l=1}^{r_{22j}} f_2^*(x_{22jl} | \delta_2 > \delta_1, V_j) \right) * \eta \right\}, \quad (3.3.17)$$

onde η é a contribuição das censuras para a verossimilhança. Sem perda de generalidade tomando $x_{wjl} \geq 1$:

$$\eta = \prod_{l=1}^{w_j} P[T_1 > x_{wjl}, T_2 > x_{wjl} | \delta_2 > \delta_1, V_j] = \\ = \prod_{l=1}^{w_j} \exp[-\alpha_{1j} x_{wjl}^{\delta_1} - (\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) x_{wjl}^{\delta_2}]. \quad (3.3.18)$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
 L|(\delta_2 > \delta_1) \approx \prod_{j=1}^s \left\{ \prod_{l=1}^{r_{11j}} (\alpha_{1j} + \alpha_{12j}) \delta_1 x_{11jl}^{\delta_1 - 1} \exp[-(\alpha_{1j} + \alpha_{12j}) x_{11jl}^{\delta_1} - \alpha_{2j} x_{11jl}^{\delta_2}] * \right. \\
 * \prod_{l=1}^{r_{12j}} \alpha_{1j} \delta_1 x_{12jl}^{\delta_1 - 1} \exp[-\alpha_{1j} x_{12jl}^{\delta_1} - (\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) x_{12jl}^{\delta_2}] * \\
 * \prod_{l=1}^{r_{21j}} \alpha_{2j} \delta_2 x_{21jl}^{\delta_2 - 1} \exp[-(\alpha_{1j} + \alpha_{12j}) x_{21jl}^{\delta_1} - \alpha_{2j} x_{21jl}^{\delta_2}] * \\
 * \prod_{l=1}^{r_{22j}} (\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) \delta_2 x_{22jl}^{\delta_2 - 1} \exp[-\alpha_{1j} x_{22jl}^{\delta_1} - (\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) x_{22jl}^{\delta_2}] * \\
 \left. * \prod_{l=1}^{w_j} \exp[-\alpha_{1j} x_{wj}^{\delta_1} - (\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) x_{wj}^{\delta_2}] \right\}. \tag{3.3.19}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \ln L|(\delta_2 > \delta_1) = \sum_{i=1}^2 r_i \ln \delta_i + \sum_{j=1}^s \left\{ r_{11j} \ln(\alpha_{1j} + \alpha_{12j}) + r_{12j} \ln \alpha_{1j} + r_{21j} \ln \alpha_{2j} + \right. \\
 + r_{22j} \ln(\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) + \sum_{i=1}^2 (\delta_i - 1) \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} \ln x_{ihjl} - \\
 - \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i1j}} \left((\alpha_{1j} + \alpha_{12j}) x_{i1jl}^{\delta_1} + \alpha_{2j} x_{i1jl}^{\delta_2} \right) - \\
 - \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i2j}} \left(\alpha_{1j} x_{i2jl}^{\delta_1} + (\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) x_{i2jl}^{\delta_2} \right) - \\
 \left. - \sum_{l=1}^{w_j} \left(\alpha_{1j} x_{wj}^{\delta_1} + (\alpha_{2j} + \alpha_{12j}) x_{wj}^{\delta_2} \right) \right\}. \tag{3.3.20}
 \end{aligned}$$

Desde que, $\alpha_{vj} = \exp(\beta_v' \mathbf{V}_{vj})$, $v = 1, 2, 12$ $j = 1, 2, \dots, s$, onde $\beta_v' = (\beta_{v0}, \beta_{v1}, \dots, \beta_{vp_v})$ e $\mathbf{V}_{vj} = (g_{v0}(V_j), g_{v1}(V_j), \dots, g_{vp_v}(V_j))$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \delta_1} \ln L = \frac{r_1}{\delta_1} + \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{1hj}} \ln x_{1hjl} - \alpha_{12j} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i1j}} x_{i1jl}^{\delta_1} \ln x_{i1jl} - \right. \\
 \left. - \alpha_{1j} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} x_{ihjl}^{\delta_1} \ln x_{ihjl} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wj}^{\delta_1} \ln x_{wj} \right) \right\} = \\
 = \frac{r_1}{\delta_1} + \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{1hj}} \ln x_{1hjl} - \alpha_{12j} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i1j}} x_{i1jl}^{\delta_1} \ln x_{i1jl} - \alpha_{1j} \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^{\delta_1} \ln t_{jr} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta_2} \ln L &= \frac{r_2}{\delta_2} + \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{2hj}} \ln x_{2hjl} - \alpha_{12j} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i2j}} x_{i2jl}^{\delta_2} \ln x_{i2jl} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl}^{\delta_2} \ln x_{wjl} \right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{2j} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} x_{ihjl}^{\delta_2} \ln x_{ihjl} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl}^{\delta_2} \ln x_{wjl} \right) \right\} = \\ &= \frac{r_2}{\delta_2} + \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{2hj}} \ln x_{2hjl} - \alpha_{12j} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i2j}} x_{i2jl}^{\delta_2} \ln x_{i2jl} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl}^{\delta_2} \ln x_{wjl} \right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{2j} \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^{\delta_2} \ln t_{jr} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_{um}} \ln L &= \sum_{j=1}^s \left\{ r_{uu} \frac{\alpha_{uj}}{(\alpha_{uj} + \alpha_{12j})} g_{um}(V_j) + r_{uvj} g_{um}(V_j) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_{uj} g_{um}(V_j) \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} x_{ihjl}^{\delta_u} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl}^{\delta_u} \right) \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^s g_{um}(V_j) \left\{ r_{uu} \frac{\alpha_{uj}}{(\alpha_{uj} + \alpha_{12j})} + r_{uvj} - \alpha_{uj} \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^{\delta_u} \right\}, \quad u, v = 1, 2, \quad u \neq v, \\ &\quad m = 0, 1, \dots, p_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_{12m}} \ln L &= \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^2 r_{ii} \frac{\alpha_{12j}}{(\alpha_{ij} + \alpha_{12j})} g_{12m}(V_j) - \alpha_{12j} g_{12m}(V_j) * \right. \\ &\quad \left. * \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} x_{ihjl}^{\delta_h} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl}^{\delta_2} \right) \right\} = \\ &= \sum_{j=1}^s g_{12m}(V_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 r_{ii} \frac{\alpha_{12j}}{(\alpha_{ij} + \alpha_{12j})} - \alpha_{12j} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} x_{ihjl}^{\delta_h} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl}^{\delta_2} \right) \right\}, \\ &\quad m = 0, 1, \dots, p_{12}, \quad (3.3.21) \end{aligned}$$

e

$$-\frac{\partial^2}{\partial \delta_1^2} \ln L = \frac{r_1}{\delta_1^2} + \sum_{j=1}^s \left\{ \alpha_{12j} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i1j}} x_{i1jl}^{\delta_1} (\ln x_{i1jl})^2 + \alpha_{1j} \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^{\delta_1} (\ln t_{jr})^2 \right\},$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial \delta_2^2} \ln L &= \frac{r_2}{\delta_2^2} + \sum_{j=1}^s \left\{ \alpha_{12j} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i2j}} x_{i2jl}^{\delta_2} (\ln x_{i2jl})^2 + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl}^{\delta_2} (\ln x_{wjl})^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{2j} \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr}^{\delta_2} (\ln t_{jr})^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2}{\partial\beta_{um}\partial\beta_{un}}\ln L &= -\sum_{j=1}^s g_{um}(V_j) \left\{ \Gamma_{uu_j} g_{un}(V_j) \frac{(\alpha_{uj}(\alpha_{uj}+\alpha_{12j}) - (\alpha_{uj})^2)}{(\alpha_{uj}+\alpha_{12j})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_{uj} g_{un}(V_j) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr} \delta_m \right\} = \\
 &= \sum_{j=1}^s \alpha_{uj} g_{um}(V_j) g_{un}(V_j) \left\{ \Gamma_{uu_j} \frac{(-\alpha_{12j})}{(\alpha_{uj}+\alpha_{12j})^2} + \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr} \delta_u \right\},
 \end{aligned}$$

$$u = 1, 2, m, n = 0, 1, \dots, p_u,$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2}{\partial\beta_{12m}\partial\beta_{12n}}\ln L &= -\sum_{j=1}^s g_{12m}(V_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 r_{ii_j} g_{12n}(V_j) \frac{\alpha_{12j}(\alpha_{ij}+\alpha_{12j}) - (\alpha_{12j})^2}{(\alpha_{ij}+\alpha_{12j})^2} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha_{12j} g_{12n}(V_j) \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} x_{ihjl} \delta_h + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl} \delta_2 \right) \right\} = \\
 &= \sum_{j=1}^s \alpha_{12j} g_{12m}(V_j) g_{12n}(V_j) \left\{ \sum_{i=1}^2 r_{ii_j} \frac{-\alpha_{ij}}{(\alpha_{ij}+\alpha_{12j})^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^2 \sum_{h=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ihj}} x_{ihjl} \delta_h + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl} \delta_2 \right\}, \quad m, n = 0, 1, \dots, p_{12},
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\delta_1\partial\delta_2}\ln L = 0,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\beta_{um}\partial\delta_u}\ln L = \sum_{j=1}^s \alpha_{uj} g_{um}(V_j) \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr} \delta_u \ln t_{jr}, \quad u = 1, 2, m = 0, 1, \dots, p_u,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\beta_{vm}\partial\delta_u}\ln L = 0, \quad u, v = 1, 2, \quad u \neq v, m = 0, 1, \dots, p_v,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\beta_{12m}\partial\delta_1}\ln L = \sum_{j=1}^s \alpha_{12j} g_{12m}(V_j) \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{ilj}} x_{iljl} \delta_1 \ln x_{iljl}, \quad m = 0, 1, \dots, p_{12},$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\beta_{12m}\partial\delta_2}\ln L = \sum_{j=1}^s \alpha_{12j} g_{12m}(V_j) \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_{i2j}} x_{i2jl} \delta_2 \ln x_{i2jl} + \sum_{l=1}^{w_j} x_{wjl} \delta_2 \ln x_{wjl} \right),$$

$$m = 0, 1, \dots, p_{12},$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial\beta_{1m}\partial\beta_{2n}}\ln L = 0, \quad m = 0, 1, \dots, p_1, \quad n = 0, 1, \dots, p_2,$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \beta_{12n}} \ln L = \sum_{j=1}^g g_{um}(V_j) g_{12n}(V_j) r_{uu^j} \frac{\alpha_{uj} \alpha_{12j}}{(\alpha_{uj} + \alpha_{12j})^2},$$

$$u = 1, 2, \quad m = 0, 1, \dots, p_1, \quad n = 0, 1, \dots, p_{12}. \quad (3.3.22)$$

Para se obter a função de verossimilhança para $\delta_1 > \delta_2$, bem como as derivadas primeira e segunda do $\ln L | (\delta_1 > \delta_2)$, basta permutar as causas de falha em (3.3.20), (3.3.21) e (3.3.22), respectivamente. O problema consiste em encontrar o conjunto de estimativas dos parâmetros que maximizam cada verossimilhança sujeita à restrição dada, e então selecionar o conjunto de estimativas correspondente à maior das duas verossimilhanças restritas.

A matriz de informação de Fisher escrita na forma particionada é dada por:

$$I = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \beta_{vn}} \ln L\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \delta_w} \ln L\right) \\ E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{um} \partial \delta_w} \ln L\right) & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \delta_w \partial \delta_z} \ln L\right) \end{bmatrix}, \quad (3.3.23)$$

$$u, v = 1, 2, 12, \quad z, w = 1, 2, \quad m = 0, 1, \dots, p_u, \quad n = 0, 1, \dots, p_v.$$

A matriz de variância-covariância é estimada, como nas seções anteriores, por \hat{I}^{-1} ou por I_0^{-1} .

3.4.2 - Estimação de Funções no Stress Usual

Caso 1: $\delta_1 = \delta_2 = \delta$

Para esse caso, a estimação de funções dos parâmetros no stress usual V_u relacionadas ao modelo independente, é feita de forma análoga à seção 3.2.2. Basta substituir δ_i por δ nas expressões, com a matriz de variância-covariância assintótica Σ_i de $(\hat{\beta}_i, \hat{\delta})$, $i = 1, 2, 12$, particionada como em (3.2.12), onde agora:

- $\Sigma_{(i,i)}$: matriz de variância-covariância assintótica de $\hat{\beta}_i$;
- $\Sigma_{(i,\delta)}$: vetor coluna de covariâncias assintóticas entre $\hat{\beta}_i$ e $\hat{\delta}$;
- $\sigma^2_{(\delta)}$: variância assintótica de $\hat{\delta}$.

Além destas, pode ainda ser de interesse estimar funções relacionadas ao modelo dependente, tais como:

- $h_i(t|V_u)$, $i=1, 2$: o risco marginal para a causa i sob o nível V_u ;
- $S_i(t|V_u)$, $i=1, 2$: a sobrevivência marginal para a causa i sob o nível V_u ;
- t_{iPu} : o (100P)-ésimo percentil correspondente a $S_i(t|V_u)$;
- t_{Pu} : o (100P)-ésimo percentil correspondente a $S_T(t|V_u)$.

Utilizando o símbolo " ' " para as funções correspondentes ao modelo independente, obtêm-se os seguintes estimadores:

a) Estimação pontual e intervalos de confiança para $\lambda_i(t|V_u)$

O estimador de máxima verossimilhança do risco marginal para a causa i , $i=1, 2$, é expresso pela relação:

$$\hat{h}_i(t|V_u) = \hat{\lambda}'_i(t|V_u) + \hat{\lambda}'_{12}(t|V_u) = \hat{\delta} t^{\hat{\delta}-1}(\hat{\alpha}_{iu} + \hat{\alpha}_{12u}). \tag{3.3.24}$$

Este pode ser alternativamente estimado através do estimador assintoticamente não-viciado:

$$\hat{h}_i(t|V_u) = \hat{h}_i(t|V_u) \exp\left(-\frac{\sigma_{iu}^2(t)}{2}\right), \tag{3.3.25}$$

onde $\sigma_{iu}^2(t)$ é a variância assintótica de $\ln \hat{h}_i(t|V_u)$, obtida pelo método delta utilizando-se a aproximação normal de $\ln \hat{h}_i(t|V_u)$ e calculada por:

$$\sigma_{iu}^2(t) = \mathbf{C}' \hat{\Sigma}_{(i,12,\delta_i)} \mathbf{C}, \tag{3.3.26}$$

com

$$\mathbf{C}' = \left(\frac{\partial}{\partial \beta_i} \ln h_i(t|V_u), \frac{\partial}{\partial \beta_{12}} \ln h_i(t|V_u), \frac{\partial}{\partial \delta} \ln h_i(t|V_u) \right)_{(\beta_i, \beta_{12}, \delta) = (\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{12}, \hat{\delta})}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{vm}} \ln h_i(t|V_u) = g_{vm}(V_u) \left(\frac{\alpha_{vu}}{\alpha_{iu} + \alpha_{12u}} \right), \quad v=1, 2, 12 \quad m=0, 1, \dots, p_u,$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln h_i(t|V_u) = \frac{1}{\delta} + \ln t.$$

O intervalo de confiança de $(1-\alpha)100\%$ para $h_i(t|V_u)$, construído a partir da aproximação normal de $\ln \hat{h}_i(t|V_u)$, possui forma análoga à apresentada em (3.2.8).

b) Estimação pontual e intervalos de confiança para $S_i(t|V_u)$

Desde que,

$$S_i(t|V_u) = \exp[-(\alpha_{i1} + \alpha_{i2}) t^\delta] = S'_i(t|V_u) S'_3(t|V_u) = S'^*_T(t|V_u),$$

onde $r = \{i, 12\}$, $i = 1, 2$. O estimador de máxima verossimilhança de $S_i(t|V_u)$ é expresso por:

$$\hat{S}_i(t|V_u) = \hat{S}'_T(t|V_u), \quad i = 1, 2, \tag{3.3.27}$$

ou alternativamente por:

$$\tilde{S}_i(t|V_u) = \tilde{S}'^*_T(t|V_u), \quad i = 1, 2. \tag{3.3.28}$$

O intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para $S_i(t|V_u)$, equivalente ao intervalo para $S'^*_T(t|V_u)$, com $r = \{i, 12\}$, $i = 1, 2$, apresentado na seção 3.2, possui a seguinte forma:

$$\left[\hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(z_\gamma \sigma^*_{iu}(t))}; \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(-z_\gamma \sigma^*_{iu}(t))} \right], \quad i = 1, 2. \tag{3.3.29}$$

onde $\gamma = \frac{1}{2} + \frac{(1-\alpha)^{1/2}}{2}$ e $\sigma^*_{iu}(t)$ é dado em (3.2.20).

c) Estimação pontual e intervalo de confiança para t_{iP_u}

O estimador de máxima verossimilhança do $(100P)$ -ésimo percentil para a causa i em stress V_u é:

$$\hat{t}_{iP_u} = \left(- \frac{\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_{iu} + \hat{\alpha}_{12u}} \right)^{1/\hat{\delta}}, \quad i = 1, 2. \tag{3.3.30}$$

A aproximação $\ln \hat{t}_{iP_u} \stackrel{a}{\sim} N(\ln t_{iP_u}, \sigma^{2*}_{iu}(P))$, onde

$$\sigma^{2*}_{iu}(P) = \mathbf{D}' \hat{\Sigma}_{(i,12,\delta)} \mathbf{D}, \quad i = 1, 2, \tag{3.3.31}$$

com $\hat{\Sigma}_{(i,12,\delta)}$ a matriz de variância-covariância estimada de $(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{12}, \hat{\delta})$ particionada por:

$$\hat{\Sigma}_{(i,12,\delta)} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{(i,i)} & \hat{\Sigma}_{(i,12)} & \hat{\Sigma}_{(i,\delta)} \\ \hat{\Sigma}'_{(i,12)} & \hat{\Sigma}_{(12,12)} & \hat{\Sigma}_{(12,\delta)} \\ \hat{\Sigma}'_{(i,\delta)} & \hat{\Sigma}'_{(12,\delta)} & \hat{\sigma}^2_{(\delta)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \tag{3.3.32}$$

e

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \beta_i} \ln t_{iP_u}, \frac{\partial}{\partial \beta_{12}} \ln t_{iP_u}, \frac{\partial}{\partial \delta} \ln t_{iP_u} \right)_{(\beta_i, \beta_{12}, \delta)} = (\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{12}, \hat{\delta}),$$

para

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{vm}} \ln t_{iP_u} = -\frac{1}{\delta} g_{vm}(V_u) \left(\frac{\alpha_{vu}}{\alpha_{iu} + \alpha_{12u}} \right), \quad i=1, 2 \quad v=1, 2, 12 \quad m=0, 1, \dots, p_v,$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln t_{iP_u} = -\frac{1}{\delta^2} \ln \left(-\frac{\ln(1-P)}{\alpha_{iu} + \alpha_{12u}} \right), \quad i=1, 2,$$

resulta numa distribuição assintótica LogNormal($\ln t_{iP_u}$, $\sigma_{iu}^{2*}(p)$) para \hat{t}_{iP_u} , implicando em vício na estimação de t_{iP_u} . Assim, o estimador não-viciado para t_{iP_u} é da forma:

$$\tilde{t}_{iP_u} = \hat{t}_{iP_u} \exp \left(-\frac{\sigma_{iu}^{2*}(p)}{2} \right), \quad i=1, 2. \quad (3.3.33)$$

O intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ para t_{iP_u} , obtido por exponenciação do intervalo para $\ln t_{iP_u}$, é escrito como:

$$\left[\hat{t}_{iP_u} \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^*(p)); \hat{t}_{iP_u} \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^*(p)) \right], \quad i=1, 2. \quad (3.3.34)$$

d) Estimação pontual e intervalo de confiança para t_{P_u}

O estimador de máxima verossimilhança do $(100P)$ -ésimo percentil total em stress V_u é:

$$\hat{t}_{P_u} = \left(-\frac{\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_u} \right)^{1/\delta}, \quad (3.3.35)$$

onde $\hat{\alpha}_u = \hat{\alpha}_{1u} + \alpha_{2u} + \alpha_{12u}$. Utilizando a aproximação $\ln t_{P_u} \stackrel{a}{\sim} N(\ln t_{P_u}, \sigma_u^2(p))$, onde

$$\sigma_u^2(p) = E' \hat{\Sigma} E, \quad (3.3.36)$$

com $\hat{\Sigma}$: a matriz de variância-covariância estimada de $(\hat{\beta}, \hat{\delta})$, $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_{12})$, e

$$E' = \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln t_{P_u}, \frac{\partial}{\partial \delta} \ln t_{P_u} \right)_{(\beta, \delta)} = (\hat{\beta}, \hat{\delta}),$$

para

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{vm}} \ln t_{P_u} = -\frac{1}{\delta} g_{vm}(V_u) \left(\frac{\alpha_{vu}}{\alpha_u} \right), \quad v=1, 2, 12 \quad m=0, 1, \dots, p_v,$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \ln t_{P_u} = -\frac{1}{\delta^2} \ln \left(-\frac{\ln(1-P)}{\alpha_u} \right),$$

obtem-se, de forma análoga ao estimador \hat{t}_{P_u} , que:

$$\hat{t}_{P_u} = \hat{t}_{P_u} \exp \left(-\frac{\sigma_u^2(p)}{2} \right), \quad (3.3.37)$$

é o estimador não-viciado de t_{P_u} . Ainda dessa aproximação, o intervalo de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ de confiança obtido para t_{P_u} é expresso por:

$$\left[\hat{t}_{P_u} \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_u(p)); \hat{t}_{P_u} \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_u(p)) \right]. \quad (3.3.38)$$

Caso 2: $\delta_1 \neq \delta_2$

Seja $\hat{\Sigma}$ a matriz de variância-covariância assintótica estimada de $(\hat{\beta}, \hat{\delta})$, $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_{12})$ e $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)$, particionada como:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{(1,1)} & \hat{\Sigma}_{(1,2)} & \hat{\Sigma}_{(1,12)} & \hat{\Sigma}_{(1,\delta)} \\ \hat{\Sigma}'_{(1,2)} & \hat{\Sigma}_{(2,2)} & \hat{\Sigma}_{(2,12)} & \hat{\Sigma}_{(2,\delta)} \\ \hat{\Sigma}'_{(1,12)} & \hat{\Sigma}'_{(2,12)} & \hat{\Sigma}_{(12,12)} & \hat{\Sigma}_{(12,\delta)} \\ \hat{\Sigma}'_{(1,\delta)} & \hat{\Sigma}'_{(2,\delta)} & \hat{\Sigma}'_{(12,\delta)} & \hat{\Sigma}_{(\delta)} \end{bmatrix}, \quad i=1, 2, \quad (3.3.39)$$

onde $\hat{\Sigma}_{(i,j)}$: matriz de variância-covariância estimada de $(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)$, $i, j=1, 2, 12$;

$\hat{\Sigma}_{(i,\delta)}$: matriz de variância-covariância estimada de $(\hat{\beta}_i, \hat{\delta})$, $i=1, 2, 12$;

$\hat{\Sigma}_{(\delta)}$: matriz de variância-covariância estimada de $(\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2)$;

e seja $\hat{\Sigma}_{(i,12,\delta_i)}$ a matriz de variância-covariância estimada de $(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{12}, \hat{\delta}_i)$, $i=1, 2$, particionada como:

$$\hat{\Sigma}_{(i,12,\delta_i)} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{(i,i)} & \hat{\Sigma}_{(i,12)} & \hat{\Sigma}_{(i,\delta_i)} \\ \hat{\Sigma}'_{(i,12)} & \hat{\Sigma}_{(12,12)} & \hat{\Sigma}_{(12,\delta_i)} \\ \hat{\Sigma}'_{(i,\delta_i)} & \hat{\Sigma}'_{(12,\delta_i)} & \hat{\sigma}_{(\delta_i)}^2 \end{bmatrix}, i=1, 2, \quad (3.3.40)$$

onde $\hat{\Sigma}_{(i,j)}$: matriz de variância-covariância estimada de $(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)$, $i, j=1, 2, 12$;
 $\hat{\Sigma}_{(u,\delta_i)}$: vetor coluna de variância-covariância estimada de $(\hat{\beta}_u, \hat{\delta}_i)$, $u=1, 2, 12$;
 $\hat{\sigma}_{(\delta_i)}^2$: variância assintótica de $\hat{\delta}_i$.

Os estimadores pontuais e intervalos de confiança para as seguintes funções dos parâmetros no stress usual V_u :

- $h_i(t|V_u)$, $i=1, 2$: o risco marginal para a causa i sob o nível V_u ;
- $S_i(t|V_u)$, $i=1, 2$: a sobrevivência marginal para a causa i sob o nível V_u ;
- t_{iP_u} : o $(100P)$ -ésimo percentil correspondente a $S_i(t|V_u)$;
- $S_T(t|V_u)$: a sobrevivência total,

são obtidas por:

a) Estimação pontual e intervalos de confiança para $h_i(t|V_u)$

O estimadores do risco marginal para a causa i , $i=1, 2$, são escritos como em (3.3.24) e (3.3.25), com $\hat{\delta}$ substituído por $\hat{\delta}_i$ nas expressões.

Como anteriormente, o intervalo de confiança de $(1-\alpha)100\%$ para $h_i(t|V_u)$ possui forma análoga à apresentada em (3.2.8).

b) Estimação pontual e intervalo de confiança para $S_i(t|V_u)$

O estimador de máxima verossimilhança da sobrevivência marginal para a causa i no tempo t sob o nível de stress usual V_u , é escrito como:

$$\hat{S}_i(t|V_u) = \exp[-(\hat{\alpha}_{iu} + \hat{\alpha}_{12u}) t^{\hat{\delta}_i}] = \exp[-\hat{H}_i(t|V_u)], \quad (3.3.41)$$

onde $\hat{H}_i(t|V_u) = (\hat{\alpha}_{iu} + \hat{\alpha}_{12u}) t^{\hat{\delta}_i}$, é o estimador do risco marginal acumulado para a causa i no tempo t sob o nível de stress V_u . Alternativamente, esta pode ser estimada usando:

$$\hat{S}_i(t|V_u) = \exp[-\hat{H}_i(t|V_u)], \quad (3.3.42)$$

onde $\hat{H}_i(t|V_u) = \hat{H}_i(t|V_u) \exp\left(-\frac{\sigma_{iu}^2(t)}{2}\right)$, é o estimador não-viciado de $H_i(t|V_u)$ e $\sigma_{iu}^2(t)$ é a variância assintótica de $\ln\hat{H}_i(t|V_u)$, obtida pelo método delta utilizando-se aproximação normal de $\ln\hat{H}_i(t|V_u)$. Assim, tem-se:

$$\sigma_{iu}^2(t) = \mathbf{F}' \hat{\Sigma}_{(i,12,\delta_i)} \mathbf{F}, \tag{3.3.43}$$

onde

$$\mathbf{F}' = \left(\frac{\partial}{\partial \beta_i} \ln H_i(t|V_u), \frac{\partial}{\partial \beta_{12}} \ln H_i(t|V_u), \frac{\partial}{\partial \delta_i} \ln H_i(t|V_u) \right)_{(\beta_i, \beta_{12}, \delta_i)} = (\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{12}, \hat{\delta}_i)'$$

com

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{vm}} \ln H_i(t|V_u) = g_{vm}(V_u) \left(\frac{\alpha_{vu}}{\alpha_{iu} + \alpha_{12u}} \right), \quad v = 1, 2, 12 \quad m = 0, 1, \dots, p_v,$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} \ln H_i(t|V_u) = \ln t, \quad i = 1, 2.$$

Exponenciando o intervalo de confiança para $H_i(t|V_u)$ escrito por:

$$\left[\hat{H}_i(t|V_u) \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t)); \hat{H}_i(t|V_u) \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t)) \right], \quad i = 1, 2, \tag{3.3.44}$$

obtem-se o seguinte intervalo de confiança aproximado de $(1-\alpha)100\%$ para $S_i(t|V_u)$:

$$\left[\hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t))}; \hat{S}_i(t|V_u)^{\exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}(t))} \right], \quad i = 1, 2. \tag{3.3.45}$$

c) Estimação pontual e intervalo de confiança para t_{iP_u}

Os estimador de máxima verossimilhança, o estimador não-viciado e o intervalo de confiança de $(1-\alpha)100\%$ para t_{iP_u} possuem a mesma forma dada em (3.3.30), (3.3.33) e (3.3.34), respectivamente. Basta substituir δ por δ_i nas expressões e utilizar (3.3.40) para estimar a matriz de variância-covariância de $(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_{12}, \hat{\delta}_i)$, $i = 1, 2$.

d) Estimação pontual e intervalo de confiança para $S_T(t|V_u)$

O estimador de máxima verossimilhança da sobrevivência total no tempo t e nível de stress V_u é expresso por:

$$\hat{S}_T(t|V_u) = \exp\left[-\hat{\alpha}_{1u} t^{\hat{\delta}_1} - \hat{\alpha}_{2u} t^{\hat{\delta}_2} - \hat{\alpha}_{12u} \max(t^{\hat{\delta}_1}, t^{\hat{\delta}_2})\right] = \begin{cases} \exp(-\hat{C}_{1u}), & \text{se } \hat{\delta}_1 > \hat{\delta}_2 \\ \exp(-\hat{C}_{2u}), & \text{se } \hat{\delta}_2 > \hat{\delta}_1, \end{cases} \quad (3.3.46)$$

onde $\hat{C}_{iu} = (\hat{\alpha}_{iu} + \hat{\alpha}_{12u}) t^{\hat{\delta}_i} + \hat{\alpha}_{vu} t^{\hat{\delta}_v}$, $i, v = 1, 2$ $i \neq v$.

Para a construção do intervalo de confiança para $S_T(t|V_u)$ utiliza-se a aproximação $\ln \hat{C}_{iu} \stackrel{g}{\sim} N(\ln C_{iu}, \sigma_{C_{iu}}^2(t))$, onde $\sigma_{C_{iu}}^2(t)$ resulta do método delta em:

$$\sigma_{C_{iu}}^2(t) = \mathbf{G}' \hat{\Sigma} \mathbf{G}, \quad (3.3.47)$$

com

$$\mathbf{G}' = \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \hat{C}_{iu}, \frac{\partial}{\partial \delta} \ln \hat{C}_{iu} \right)_{(\beta, \delta) = (\hat{\beta}, \hat{\delta})}$$

para

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{im}} \ln C_{iu} = \frac{1}{C_{iu}} \alpha_{iu} g_{im}(V_u) t^{\delta_i}, \quad i = 1, 2, 12, \quad m = 0, 1, \dots, p_i;$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} \ln C_{iu} = \frac{1}{C_{iu}} (\alpha_{iu} + \alpha_{12u}) t^{\delta_i} \ln t, \quad i = 1, 2;$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \delta_v} \ln C_{iu} = \frac{1}{C_{iu}} \alpha_{vu} t^{\delta_v} \ln t, \quad i, v = 1, 2, \quad i \neq v.$$

Assim, o intervalo de confiança aproximado de $(1-\alpha)100\%$ para C_{iu} , resultante da aproximação normal para $\ln \hat{C}_{iu}$, é dado por:

$$\left[\hat{C}_{iu} \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{C_{iu}}(t)); \hat{C}_{iu} \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{C_{iu}}(t)) \right], \quad i = 1, 2, \quad (3.3.48)$$

a partir deste, obtém-se o seguinte intervalo de confiança aproximado de $(1-\alpha)100\%$ para $S_T(t|V_u)$:

$$\left[\hat{S}_T(t|V_u)^{\exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{C_{1u}}(t))}; \hat{S}_T(t|V_u)^{\exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{C_{1u}}(t))} \right], \quad \text{se } \hat{\delta}_1 > \hat{\delta}_2;$$

ou

$$\left[\hat{S}_T(t|V_u)^{\exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{C_{2u}}(t))}; \hat{S}_T(t|V_u)^{\exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{C_{2u}}(t))} \right], \quad \text{se } \hat{\delta}_2 > \hat{\delta}_1.$$

(3.3.49)

Obs: A forma do intervalo acima, assegura limites de confiança com valores dentro da amplitude $(0, 1)$ de $S_T(t|V_u)$.

CAPÍTULO 4

MODELO DE REGRESSÃO EXPONENCIAL BIVARIADO PARA TESTES ACELERADOS EM RISCOS COMPETITIVOS

4.1 - INTRODUÇÃO

Quando se considera um sistema que pode falhar devido a uma dentre k causas de falha, comumente o modelo paramétrico utilizado é o modelo independente que pressupõe a independência das causas de falha, como foi visto no capítulo 3. No entanto, essa independência pode não ser realística em algumas situações de riscos competitivos, tornando-se necessário assumir uma distribuição dos tempos de vida que permita incorporar a dependência das diferentes causas. Já foi estudado no capítulo 3 um modelo Weibull que assume essa dependência. Contudo, a distribuição Weibull dependente estudada não é absolutamente contínua, gerando a possibilidade de falhas simultâneas por diferentes causas que, embora possa ser de interesse em alguns experimentos industriais, pode não ser em outras situações, principalmente em ensaios clínicos.

O objetivo desse capítulo é desenvolver um modelo para testes acelerados em riscos competitivos cuja distribuição paramétrica dos tempos de vida por duas causas seja dependente e absolutamente contínua.

A distribuição exponencial tem encontrado considerável aceitação na análise de sobrevivência de um componente (ou de itens sujeitos a uma única causa de falha). Então, em experimentos envolvendo duas causas de falha, seria desejável trabalhar com alguma distribuição exponencial bivariada com marginais exponenciais. Um número de distribuições exponenciais bivariadas têm sido propostas na literatura para descrever, em particular, falhas de sistemas de dois componentes. Uma tal distribuição que satisfaz as condições acima é a distribuição exponencial bivariada de Sarkar (1987), pois ela é um modelo dependente e que possui marginais exponenciais. A distribuição é absolutamente contínua, o que a torna adequada para situações onde, teoricamente, a falha dos dois componentes não ocorre simultaneamente.

Na seção 4.2 é apresentado o modelo exponencial bivariado de Sarkar (1987) e suas propriedades. Na seção 4.3 o modelo é abordado sob o contexto de riscos competitivos. Na seção 4.4 é estudada a inclusão de variáveis concomitantes na função risco de causa-específica e finalmente, na seção 4.5 é tratada a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros e de algumas funções destes, bem como testes de hipóteses de interesse para tal modelo de regressão. Estes procedimentos são ilustrados na aplicação numérica apresentada na seção 5.4 do capítulo 5.

4.2 - DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE SARKAR ($ACBVE_2$)

Uma distribuição Exponencial Bivariada é um caso especial de uma distribuição Exponencial Multivariada. Especificadamente, uma distribuição Exponencial Multivariada é uma distribuição multivariada com marginais exponenciais. A distribuição Exponencial Bivariada pode ser usada, por exemplo, para descrever o comportamento de falha de sistemas de dois componentes com tempos de falha dependentes. Entre as várias distribuições exponenciais bivariadas propostas na literatura estatística a Exponencial Bivariada de Marshall e Olkin (1967), abreviadamente BVE, é amplamente aceita. Ela possui algumas propriedades que têm interpretações físicas muito úteis, no entanto, uma dessas propriedades que diz que se

(T_1, T_2) tem distribuição BVE então $P(T_1 = T_2) > 0$, a torna inapropriada em algumas situações práticas. Por exemplo, em certos tipos de doenças onde a ocorrência de falhas simultâneas de um par de órgãos é rara, uma distribuição exponencial bivariada apropriada para descrever a falha desses órgãos pareados deveria ser uma que fosse absolutamente contínua, pois nesse caso $P(T_1 = T_2) = 0$.

Sarkar (1987) derivou uma distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua que contém as propriedades desejáveis da BVE e a denotou por $ACBVE_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$, onde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_{12} \geq 0$ são os parâmetros da distribuição.

As respectivas funções de densidade e de sobrevivência de (T_1, T_2) são dadas por:

$$f(t_1, t_2) = \frac{\lambda_1 \lambda}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \exp\{-\lambda_1 t_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2\} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_{12}) - \lambda_2 \lambda \exp(-\lambda_1 t_2) \right\} \\ * [A(\lambda_1 t_1)]^\gamma [A(\lambda_1 t_2)]^{-(1+\gamma)}, \quad \text{se } 0 < t_1 < t_2, \\ = \frac{\lambda_2 \lambda}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2} \exp\{-\lambda_2 t_2 - (\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1\} \left\{ (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_{12}) - \lambda_1 \lambda \exp(-\lambda_2 t_1) \right\} \\ * [A(\lambda_2 t_2)]^\gamma [A(\lambda_2 t_1)]^{-(1+\gamma)}, \quad \text{se } t_1 > t_2 > 0 \quad (4.2.1)$$

e

$$S(t_1, t_2) = \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2\} \left\{ 1 - [A(\lambda_1 t_2)]^{-\gamma} [A(\lambda_1 t_1)]^{1+\gamma} \right\}, \quad \text{se } 0 < t_1 \leq t_2, \\ = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1\} \left\{ 1 - [A(\lambda_2 t_1)]^{-\gamma} [A(\lambda_2 t_2)]^{1+\gamma} \right\}, \quad \text{se } t_1 \geq t_2 > 0, \quad (4.2.2)$$

onde $\gamma = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2}$ e $A(z) = 1 - \exp(-z)$, para $z > 0$. Note que T_1 e T_2 são independentes quando $\lambda_{12} = 0$. Essa distribuição é caracterizada pelas seguintes propriedades:

P1) Marginais Exponenciais:

$$S_{T_1}(t) = S(t, 0) = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t\}, \quad t > 0. \quad (4.2.3)$$

$$S_{T_2}(t) = S(0, t) = \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t\}, \quad t > 0. \quad (4.2.4)$$

P2) $T = \text{Min}(T_1, T_2)$ é exponencial com parâmetro λ :

$$S_T(t) = S(t, t) = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12})t\} = \exp\{-\lambda t\}, \quad t > 0. \quad (4.2.5)$$

P3) (T_1, T_2) é $ACBVE_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$ se e somente se:

i) $\min(T_1, T_2) \sim \text{Exp}(\lambda)$;

ii) $\min(T_1, T_2)$ e $T_1 - T_2 + k(T_1, T_2)$ são independentes, onde

$$k(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\lambda_{12}}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_{12})} \ln\{A(\lambda_1 t_1)/A(\lambda_1 t_2)\}, & \text{se } 0 < t_1 \leq t_2, \\ \frac{\lambda_{12}}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_{12})} \ln\{A(\lambda_2 t_1)/A(\lambda_2 t_2)\}, & \text{se } t_1 \geq t_2 > 0, \end{cases} \quad (4.2.6)$$

e a função de distribuição de $T_1 - T_2 + k(T_1, T_2)$ é dada por:

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{(\lambda_2 + \lambda_{12})z\}, & \text{se } z < 0, \\ 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{(\lambda_1 + \lambda_{12})z\}, & \text{se } z \geq 0. \end{cases} \quad (4.2.7)$$

P4) A $ACBVE_2$ pode ser representada em termos de variáveis aleatórias independentes

Esta propriedade, útil para simulação, fornece uma forma de gerar a $ACBVE_2$ em termos de três variáveis aleatórias exponenciais independentes e de uma variável uniforme independente. Seja $A^{-1}(x) = -\log(1-x)$, $0 < x < 1$, e sejam Z_1, Z_2, Z_3 , e V variáveis aleatórias independentemente distribuídas, respectivamente, como $\text{Exp}(\lambda_1), \text{Exp}(\lambda_2), \text{Exp}(\lambda_{12})$, e $U(0,1)$. Defina:

$$T_1 = X_1 + \{1 - I(Z_1 > Z_2)\} \{\lambda_1^{-1} A^{-1}(V^{1/(1+\gamma)} A(\lambda_1 Y_1)) - X_1\}$$

e

$$T_2 = Y_1 + \{1 - I(Z_1 > Z_2)\} \{\lambda_2^{-1} A^{-1}(V^{1/(1+\gamma)} A(\lambda_2 X_1)) - Y_1\}. \quad (4.2.8)$$

onde $I(Z_1 > Z_2)$ denota a função indicadora do conjunto $\{Z_1 > Z_2\}$, $X_1 = \min(Z_1, Z_3)$ e $Y_1 = \min(Z_2, Z_3)$. Então, (T_1, T_2) é $ACBVE_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$.

4.3 - DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL BIVARIADA DE SARKAR EM RISCOS COMPETITIVOS

Wada e Sen (1993) utilizaram o modelo exponencial bivariado de Sarkar para situações de riscos competitivos com duas causas falha, com o objetivo primordial de realizar testes de hipóteses para comparações entre duas amostras. Neste contexto, um teste de hipótese para alternativa restrita (a sobrevivência do grupo experimental é maior do que a sobrevivência do grupo controle) foi proposto. A seguir são apresentadas as funções básicas em situações de riscos competitivos desenvolvidas por Wada e Sen (1993) utilizando o modelo de Sarkar.

As funções risco por causa específica na presença de cada uma das outras causas são:

$$\lambda_i(t) = \frac{-\frac{\partial}{\partial t_i} S(t_1, t_2)|_{t_1=t_2=t}}{S_T(t)} = \frac{\lambda \lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} = (1 + \gamma) \lambda_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.3.1)$$

Desde que,

$$\frac{\partial}{\partial t_1} S(t_1, t_2) = (1 + \gamma) \lambda_1 \exp\{-\lambda_1 t_1\} \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_2\} [A(\lambda_1 t_2)]^{-\gamma} [A(\lambda_1 t_1)]^\gamma, \quad \text{se } 0 < t_1 \leq t_2$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t_2} S(t_1, t_2) = (1 + \gamma) \lambda_2 \exp\{-\lambda_2 t_2\} \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1\} [A(\lambda_2 t_1)]^{-\gamma} [A(\lambda_2 t_2)]^\gamma, \quad \text{se } t_1 \geq t_2 > 0,$$

as quais avaliadas no ponto $t_1 = t_2 = t$ resultam, respectivamente, em:

$$(1 + \gamma) \lambda_1 \exp\{-\lambda t\}, \quad \text{se } t_1 \leq t_2$$

e

$$(1 + \gamma) \lambda_2 \exp\{-\lambda t\}, \quad \text{se } t_2 \leq t_1.$$

A distribuição de probabilidade do tempo de falha para a causa i , como definida em (2.2.17), sem considerar covariáveis é dada por:

$$Q_i^*(t) = \int_0^t \lambda_i(u) S_T(u) du = \int_0^t \lambda \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp(-\lambda u) du = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} [1 - \exp(-\lambda t)], \quad (4.3.2)$$

para $i = 1, 2$, e de (2.2.18), tem-se que a probabilidade de falha devido a causa i é:

$$\pi_i^* = P(I = i) = Q_i^*(\infty) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (4.3.3)$$

A partir destas relações, segue que a probabilidade de falha da causa i num tempo maior do que t é escrita por:

$$P_i^*(t) = \pi_i^* - Q_i^*(t) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp(-\lambda t), \quad (4.3.4)$$

e a função de distribuição condicional de T dado I por:

$$F_i^*(t) = \frac{Q_i^*(t)}{\pi_i^*} = 1 - \exp(-\lambda t), \quad (4.3.5)$$

ou seja, $(T|I) \sim \exp(\lambda)$. Como mencionado no capítulo 2, as funções Q_i^* e π_i^* , e consequentemente F_i^* , podem ser estimadas dos dados da forma (T, I) . Observando-se tais funções estimáveis, verifica-se que os parâmetros do modelo não são identificáveis. Da distribuição conjunta de (T, I) em (4.3.2), observa-se que somente funções destes, tais como, $\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$ e λ , são identificáveis. Desse modo, fazendo:

$$\theta' = \left(\theta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \theta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \theta_3 = \lambda \right),$$

a função risco de causa-específica reparametrizada é escrita por:

$$\lambda_i(t) = \theta_i \theta_3, \quad i = 1, 2, \quad (4.3.6)$$

onde $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_3 > 0$ e $\theta_1 + \theta_2 = 1$. Tsiatis (1975) provou que uma reparametrização permite escrever um modelo independente equivalente ao dependente que fornece parâmetros identificáveis. Por isso θ_1 , θ_2 e θ_3 que são os parâmetros do modelo independente equivalente para T_1 e T_2 são identificáveis. Esse modelo independente possui funções de sobrevivência marginais $G_i(t)$ estimáveis e dadas por:

$$G_i(t) = \exp[-\theta_i \theta_3 t], \quad i = 1, 2, \quad (4.3.7)$$

a qual pode ser interpretada como a distribuição de sobrevivência associada com a causa i somente (Elandt-Johnson e Johnson (1980)).

A função de verossimilhança obtida para estimação de θ , sujeita à restrição $\theta_1 + \theta_2 = 1$, é:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^2 \left\{ \left[\prod_{l=1}^{r_i} [\theta_i, \theta_3] \right] \left[\prod_{j=1}^{n_i} \exp[-\theta_i, \theta_3 t_j] \right] \right\}, \quad (4.3.8)$$

onde r_i é o número de falhas pela causa i , $i = 1, 2$. Os estimadores de máxima verossimilhança para θ (como em Wada e Sen (1993)) são:

$$\hat{\theta}_i = \frac{r_i}{r_1 + r_2}, \quad i = 1, 2, \quad \text{e} \quad \hat{\theta}_3 = \frac{r_1 + r_2}{\sum_{j=1}^n t_j}, \quad (4.3.9)$$

A seguir, nosso estudo propõe a inclusão de variáveis concomitantes à função risco por causa específica reparametrizada.

4.4 - MODELO DE REGRESSÃO EXPONENCIAL BIVARIADO DE SARKAR EM RISCOS COMPETITIVOS

O interesse nesta seção é incorporar variáveis concomitantes $\mathbf{z}' = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ no modelo de Sarkar. O modelo de Sarkar na situação de riscos competitivos foi revisto na seção anterior. Foi visto que os parâmetros $\theta' = \left(\theta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \theta_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \theta_3 = \lambda \right)$, são os parâmetros identificáveis na situação de riscos competitivos. De (4.3.9), observa-se que o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\theta}_3$ é função dos tempos observados. Em consequência, um modelo para a relação entre θ e \mathbf{z} é dado por:

$$\theta_3(\mathbf{z}) = \exp[\beta' \mathbf{z}], \quad (4.4.1)$$

onde $\beta' = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$. Portanto, a função risco de causa-específica pode ser formulada por:

$$\lambda_i(t | \mathbf{z}) = \theta_i \exp[\beta' \mathbf{z}], \quad i = 1, 2 \quad (4.4.2)$$

com a restrição de que $\theta_1 + \theta_2 = 1$.

No caso de testes acelerados conduzidos em s níveis de um único stress V , a relação de stress-vida para o parâmetro θ_3 é escrita por:

$$\theta_{3j} = \exp[\beta' \mathbf{V}_j],$$

onde $\mathbf{V}_j' = (g_0(V_j), g_1(V_j), \dots, g_p(V_j))$ e $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$. Nos casos particulares das relações Arrhenius e lei de potência, $\mathbf{V}_j' = (1, g_1(V_j))$ e $\beta' = (\beta_0, \beta_1)$; na relação Eyring, $\mathbf{V}_j' = (1, g_1(V_j), g_2(V_j))$ e $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$.

Note-se no modelo para o risco, definido em (4.4.2) para incorporação de variáveis concomitantes, que os parâmetros θ_1 , θ_2 e β , são identificáveis. Os parâmetros λ_1 , λ_2 e λ_{12} , continuam sendo não identificáveis, já que por exemplo, (λ_1, λ_2) e (λ_1', λ_2') poderiam determinar o mesmo θ_1 (θ_2). Portanto, prosseguindo encontram-se os estimadores de máxima verossimilhança para θ_1 , θ_2 e β .

4.5 - ESTIMAÇÃO E TESTES DE HIPÓTESES

4.5.1 - Estimação de Máxima Verossimilhança

Considerando n objetos em estudo associados ao vetor de variáveis concomitantes $\mathbf{z}' = (z_0, z_1, \dots, z_p)$, denotando por $\mathbf{z}_l' = (z_{0l}, z_{1l}, \dots, z_{pl})$ o valor correspondente à l -ésima observação e ainda utilizando a notação abaixo:

Notação:

i : causa de falha, $i = 1, 2$,

r_i : # de falhas da causa i ,

x_{il} : l -ésimo tempo de falha pela causa i , $l = 1, 2, \dots, r_i$,

t_r : tempo de falha ou de censura.

A função de verossimilhança total é dada por:

$$\begin{aligned}
 L(\theta, \beta) &= \prod_{i=1}^2 \left\{ \left[\prod_{l=1}^{r_i} \lambda_i(x_{il} | \mathbf{z}_l) \right] \left[\prod_{r=1}^n G_r(t_r | \mathbf{z}_r) \right] \right\} = \\
 &= \prod_{i=1}^2 \left\{ \left[\prod_{l=1}^{r_i} \theta_i \theta_3(\mathbf{z}_l) \right] \left[\prod_{r=1}^n \exp\left(-\int_0^{t_r} \lambda_i(u | \mathbf{z}_r) du\right) \right] \right\} = \\
 &= \prod_{i=1}^2 \left\{ \theta_i^{r_i} \left[\prod_{l=1}^{r_i} \theta_3(\mathbf{z}_l) \right] \left[\prod_{r=1}^n \exp(-t_r \theta_i \theta_3(\mathbf{z}_r)) \right] \right\} = \\
 &= \prod_{i=1}^2 \left\{ \theta_i^{r_i} \left[\prod_{l=1}^{r_i} \exp[\beta' \mathbf{z}_l] \right] \exp\left[-\theta_i \sum_{r=1}^n \exp[\beta' \mathbf{z}_r] t_r\right] \right\}. \quad (4.5.1)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\ln L(\theta, \beta) = \sum_{i=1}^2 \left\{ r_i \ln \theta_i + \sum_{l=1}^{r_i} \beta' \mathbf{z}_l - \theta_i \sum_{r=1}^n \exp[\beta' \mathbf{z}_r] t_r \right\}. \quad (4.5.2)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança de (θ, β) são as soluções do sistema de equações: $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta, \beta) = \mathbf{0}$ e $\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\theta, \beta) = \mathbf{0}$, sujeitas à restrição $\theta_1 + \theta_2 = 1$, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta, \beta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left\{ r_i \ln \theta_i + \sum_{l=1}^{r_i} \beta' \mathbf{z}_l \right\} - \sum_{r=1}^n \exp[\beta' \mathbf{z}_r] t_r + \sigma(\theta_1 + \theta_2 - 1) \right\}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\theta, \beta) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left\{ r_i \ln \theta_i + \sum_{l=1}^{r_i} \beta' \mathbf{z}_l \right\} - \sum_{r=1}^n \exp[\beta' \mathbf{z}_r] t_r + \sigma(\theta_1 + \theta_2 - 1) \right\}. \quad (4.5.3)$$

As primeiras e segundas derivadas parciais são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L(\theta, \beta) &= \frac{r_1}{\theta_1} - \frac{r_2}{(1-\theta_1)}, \\
 \frac{\partial}{\partial \beta_u} \ln L(\theta, \beta) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^{r_i} z_{lu} - \sum_{r=1}^n t_r z_{ru} \exp[\beta' \mathbf{z}_r], \quad u = 0, 1, 2, \dots, p,
 \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

e

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \ln L(\theta, \beta) &= \frac{r_1}{\theta_1^2} + \frac{r_2}{(1-\theta_1)^2}, \\
 -\frac{\partial^2}{\partial \beta_u \partial \beta_v} \ln L(\theta, \beta) &= \sum_{r=1}^n z_{ru} z_{rv} t_r \exp[\beta' \mathbf{z}_r], \quad u, v = 0, 1, 2, \dots, p.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \beta_u} \ln L(\theta, \beta) = 0, \quad u = 0, 1, 2, \dots, p. \tag{4.5.5}$$

Portanto,

$$\hat{\theta}_1 = \frac{r_1}{(r_1 + r_2)}, \quad \hat{\theta}_2 = 1 - \hat{\theta}_1 = \frac{r_2}{(r_1 + r_2)}. \tag{4.5.6}$$

As equações de verossimilhança $\frac{\partial}{\partial \beta_u} \ln L(\theta, \beta) = 0, u = 0, 1, 2, \dots, p$, podem ser resolvidas pelo método de Newton-Raphson para o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$.

A matriz de informação esperada I , correspondendo a L , escrita na forma particionada é dada por:

$$I = \begin{bmatrix} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \ln L(\theta, \beta)\right) & \underline{0} \\ \underline{0} & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_u \partial \beta_v} \ln L(\theta, \beta)\right) \end{bmatrix}, \tag{4.5.7}$$

para $u, v = 0, 1, 2, \dots, p$. Um estimador consistente da matriz de variância-covariância assintótica $\Sigma_{(\theta_1, \beta)}$ de $(\hat{\theta}_1, \hat{\beta})$ é dado por:

$$\hat{\Sigma}_{(\theta_1, \beta)} = I_0^{-1},$$

onde I_0 é a matriz de informação observada obtida de forma análoga às seções anteriores.

4.5.2 - Estimação de Funções no Stress Usual

Sejam $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\beta}$ os estimadores de máxima verossimilhança de θ_1, θ_2 e β respectivamente, obtidos como descrito na seção anterior. Seja $\hat{\Sigma}_{(\theta_1, \beta)}$ a matriz de variância-covariância assintótica estimada de $(\hat{\theta}_1, \hat{\beta})$ particionada da seguinte forma:

$$\hat{\Sigma}_{(\theta_1, \beta)} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{\theta_1}^2 & \underline{0} \\ \underline{0} & \hat{\Sigma}_{\beta} \end{bmatrix},$$

005-1114

onde $\hat{\sigma}_{\theta_i}^2$ é a variância assintótica estimada de $\hat{\theta}_i$, $i=1, 2$, e $\hat{\Sigma}_{\beta}$ é a matriz de variância-covariância assintótica estimada de $\hat{\beta}$. Para tamanhos amostrais suficientemente grandes, a teoria assintótica para os estimadores de máxima verossimilhança resulta na seguinte aproximação:

$$(\hat{\theta}_i, \hat{\beta}) \approx N((\theta_i, \beta), \hat{\Sigma}_{(\theta_i, \beta)}), i=1, 2. \quad (4.5.8)$$

Utilizando-se estes estimadores e a aproximação normal acima citada pode-se obter estimativas pontuais e intervalos de confiança para determinadas funções de interesse tais como: a função risco de causa-específica, a função de sobrevivência marginal G_i , a sobrevivência total e ainda percentis para cada causa bem como o percentil de vida do sistema. Em particular, para testes acelerados as funções acima citadas são obtidas para o stress de uso normal V_u , que serão objeto de detalhamento abaixo.

a) Estimação pontual e intervalo de confiança para $\lambda_i(t|V_u)$

O estimador de máxima verossimilhança para $\lambda_i(t|V_u)$ é dado por:

$$\hat{\lambda}_i(t|V_u) = \hat{\theta}_i \exp[\hat{\beta}'V_u], \quad (4.5.9)$$

onde $V_u' = (g_0(V_u), g_1(V_u), \dots, g_p(V_u))$ e $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$. A aproximação normal de $(\hat{\theta}_i, \hat{\beta}_3)$ em (4.5.8) resulta, pelo método delta (apêndice A), em:

$$\ln \hat{\lambda}_i(t|V_u) = \ln \hat{\theta}_i + \hat{\beta}'V_u \approx N(\ln \lambda_i(t|V_u), \sigma_{iu}^2),$$

onde

$$\sigma_{iu}^2 = \left(\frac{1}{\hat{\theta}_i}, g_0(V_u), \dots, g_p(V_u) \right) \hat{\Sigma}_{(\theta_i, \beta)} \left(\frac{1}{\hat{\theta}_i}, g_0(V_u), \dots, g_p(V_u) \right)'. \quad (4.5.10)$$

Assim, $\hat{\lambda}_i(t|V_u) \approx \text{LogNormal}(\ln \lambda_i(t|V_u), \sigma_{iu}^2)$ e portanto, este estimador é viciado para $\lambda_i(t|V_u)$ com vício $\exp\left(\frac{1}{2}\sigma_{iu}^2\right)$. Então, um estimador não-viciado para $\lambda_i(t|V_u)$ é escrito por:

$$\tilde{\lambda}_i(t|V_u) = \hat{\lambda}_i(t|V_u) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_{iu}^2\right). \quad (4.5.11)$$

O intervalo de confiança assintótico de $(1-\alpha)100\%$ para $\lambda_i(t|V_u)$ pode ser obtido a partir da distribuição assintótica normal de $\ln \hat{\lambda}_i(t|V_u)$ que resulta em:

$$[\hat{\lambda}_i(t|V_u) \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}); \hat{\lambda}_i(t|V_u) \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu})]. \quad (4.5.12)$$

b) *Estimação pontual e intervalo de confiança para $H_i(t|V_u)$*

A função risco acumulada pode ser estimada por:

$$\hat{H}_i(t|V_u) = \int_0^t \hat{\lambda}_i(x|V_u) dx = t \hat{\theta}_i \exp[\hat{\beta}'V_u]. \quad (4.5.13)$$

Da mesma forma $\hat{\lambda}_i(t|V_u)$, este estimador é viciado para $H_i(t|V_u)$. Um estimador não-viciado é dado por:

$$\hat{H}_i(t|V_u) = \hat{H}_i(t|V_u) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma_{iu}^2\right). \quad (4.5.14)$$

O intervalo de confiança aproximado para $H_i(t|V_u)$ pode ser obtido através de exponenciação do intervalo para $\ln H_i(t|V_u)$. Uma vez que:

$$\ln \hat{H}_i(t|V_u) = \ln t + \ln \hat{\theta}_i + \hat{\beta}'V_u \approx N(\ln H_i(t|V_u), \sigma_{iu}^2).$$

Assim, o intervalo de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ de confiança para $H_i(t|V_u)$ é expresso por:

$$[\hat{H}_i(t|V_u) \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}); \hat{H}_i(t|V_u) \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu})]. \quad (4.5.15)$$

c) *Estimação pontual e intervalo de confiança para $G_i(t|V_u)$*

A função $G_i(t|V_u)$ pode ser estimada através de:

$$\hat{G}_i(t|V_u) = \exp(-\hat{H}_i(t|V_u)), \quad (4.5.16)$$

ou alternativamente por:

$$\check{G}_i(t|V_u) = \exp(-\hat{H}_i(t|V_u)). \quad (4.5.17)$$

Seu intervalo de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ de confiança, obtido por exponenciação do intervalo acima, é dado por:

$$[\hat{G}_i(t|V_u)^{\exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu})}; \hat{G}_i(t|V_u)^{\exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu})}]. \quad (4.5.18)$$

d) Estimação pontual e intervalo de confiança para $S_T(t|V_u)$

A função de sobrevivência total $S_T(t|V_u)$ pode ser estimada através de:

$$\hat{S}_T(t|V_u) = \exp(-\exp[\hat{\beta}'V_u] t), \quad (4.5.19)$$

com um intervalo de confiança de aproximadamente $(1-\alpha)100\%$ escrito por:

$$[\hat{S}_T(t|V_u)^{\exp(z_{1-\alpha/2}\sigma_u)}; \hat{S}_T(t|V_u)^{\exp(-z_{1-\alpha/2}\sigma_u)}], \quad (4.5.20)$$

uma vez que, $\ln(-\ln(\hat{S}_T(t|V_u))) = \ln t + \hat{\beta}'V_u \approx N(\ln(-\ln(S_T(t|V_u))), \sigma_u^2)$, onde $\sigma_u^2 = V_u \hat{\Sigma} \beta V_u'$.

e) Estimação pontual e intervalo de confiança para t_{P_u}

O estimador do $(100P)$ -ésimo percentil do sistema possui a forma:

$$\hat{t}_{P_u} = -\frac{\ln(1-P)}{\exp[\hat{\beta}'V_u]}. \quad (4.5.21)$$

Da aproximação $\ln \hat{t}_{P_u} \approx N(\ln t_{P_u}, \sigma_u^2)$, segue que:

$$\tilde{t}_{P_u} = \hat{t}_{P_u} \exp\left(-\frac{\sigma_u^2}{2}\right), \quad (4.5.22)$$

é o estimador não-viciado para t_{P_u} , com um intervalo de confiança dado por:

$$[\hat{t}_{P_u} \exp(-z_{1-\alpha/2}\sigma_u); \hat{t}_{P_u} \exp(z_{1-\alpha/2}\sigma_u)]. \quad (4.5.23)$$

f) Estimação pontual e intervalo de confiança para t_{iP_u}

O estimador do $(100P)$ -ésimo percentil para a causa i no stress V_u , pode ser obtido por:

$$\hat{t}_{iP_u} = -\frac{\ln(1-P)}{\hat{\theta}_i \exp[\hat{\beta}'V_u]}. \quad (4.5.24)$$

Desde que, $\ln \hat{t}_{iPu} \stackrel{d}{\sim} N(\ln t_{iPu}, \sigma_{iu}^2)$, onde σ_{iu}^2 foi fornecida no item a) desta seção, o estimador:

$$\tilde{t}_{iPu} = \hat{t}_{iPu} \exp\left(-\frac{\sigma_{iu}^2}{2}\right), \quad (4.5.25)$$

é não-viciado para t_{iPu} e o intervalo de confiança é dado por:

$$[\hat{t}_{iPu} \exp(-z_{1-\alpha/2}\sigma_{iu}); \hat{t}_{iPu} \exp(z_{1-\alpha/2}\sigma_{iu})]. \quad (4.5.26)$$

4.5.3 - Testes de Hipóteses para Comparação das Distribuições de Sobrevivência

Para a comparação das distribuições de sobrevivência para as duas causas para um determinado \mathbf{z} , ou seja,

$$H_0: G_1(t|\mathbf{z}) = G_2(t|\mathbf{z}) \quad \text{x} \quad H_a: G_1(t|\mathbf{z}) \neq G_2(t|\mathbf{z}),$$

a formulação das hipóteses estatísticas envolvem a igualdade dos parâmetros das correspondentes distribuições, ou em uma forma equivalente, envolve a diferença entre os parâmetros correspondentes às duas distribuições. Em termos desses parâmetros, a hipótese acima pode ser reescrita por:

$$H_0: \theta_1 - \theta_2 = 0 \quad \text{x} \quad H_a: \theta_1 - \theta_2 \neq 0,$$

que sob a restrição $\theta_1 + \theta_2 = 1$ é ainda equivalente ao teste da seguinte hipótese:

$$H_0: \theta_1 = \frac{1}{2} \quad \text{x} \quad H_a: \theta_1 \neq \frac{1}{2}.$$

Para testar H_0 contra H_a acima, o vetor $\beta' = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ é tratado como um vetor de parâmetros de perturbação. Os testes utilizando as estatísticas de Rao, Wald e Wilks, apresentadas no capítulo 1, envolvem a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros de perturbação sob H_0 . Assim, sob a hipótese nula o ln da função de verossimilhança em (4.5.2), pode ser escrito por:

$$\ln L(\theta, \beta) = \sum_{i=1}^2 \left\{ r_i \ln \left(\frac{1}{2} \right) + \sum_{l=1}^{r_i} \beta' z_{il} \right\} - \sum_{r=1}^n \exp[\beta' z_r] t_r. \quad (4.5.27)$$

É possível notar que os estimadores de máxima verossimilhança de β obtidos sob H_0 , denotados por $\tilde{\beta}$, são idênticos a $\hat{\beta}$, uma vez que a primeira e segunda derivadas parciais do \ln da verossimilhança acima com relação a β são idênticas às obtidas em (4.5.4). Para a obtenção da estatística de Rao é necessário o cálculo da função escore sob H_0 . Esta é obtida de (4.5.4):

$$U_1(1/2; \tilde{\beta}) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \ln L(\theta, \beta) \Big|_{\theta_1 = 1/2; \beta = \tilde{\beta}} = \frac{r_1}{\theta_1} - \frac{r_2}{(1-\theta_1)} \Big|_{\theta_1 = 1/2; \beta = \tilde{\beta}} = 2(r_1 - r_2)$$

e

$$\begin{aligned} i^{11}(1/2; \tilde{\beta}) &= \left(-\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \ln L(\theta, \beta) \right)^{-1} \Big|_{\theta_1 = 1/2; \beta = \tilde{\beta}} = \\ &= \left(\frac{r_1}{\theta_1^2} + \frac{r_2}{(1-\theta_1)^2} \right)^{-1} \Big|_{\theta_1 = 1/2; \beta = \tilde{\beta}} = (4(r_1 + r_2))^{-1}. \end{aligned}$$

Então, a **estatística de Rao** para este teste é escrita por:

$$Q_R = U_1(1/2; \tilde{\beta}) i^{11}(1/2; \tilde{\beta}) U_1(1/2; \tilde{\beta}) = \frac{(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2)}. \quad (4.5.28)$$

A **estatística de Wald** é obtida por:

$$W = \left(\hat{\theta}_1 - \frac{1}{2} \right)^2 (i^{11}(1/2; \tilde{\beta}))^{-1} = 4 \left(\hat{\theta}_1 - \frac{1}{2} \right)^2 (r_1 + r_2). \quad (4.5.29)$$

Para a obtenção da **estatística de Wilks** (ou da razão de verossimilhança) para este teste, são necessários os cálculos das seguintes quantidades:

$$\ln L(1/2; \tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^2 \left\{ r_i \ln \left(\frac{1}{2} \right) + \sum_{l=1}^{r_i} \tilde{\beta}' z_{il} \right\} - \sum_{r=1}^n \exp[\tilde{\beta}' z_r] t_r,$$

e

$$\ln L(\hat{\theta}, \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^2 \left\{ r_i \ln \hat{\theta}_i + \sum_{l=1}^{r_i} \tilde{\beta}' z_{il} - \sum_{r=1}^n \exp[\tilde{\beta}' z_r] t_r \right\}.$$

Desde que, $\tilde{\beta} = \hat{\beta}$ tem-se:

$$\ln L(1/2; \tilde{\beta}) - \ln L(\hat{\theta}, \hat{\beta}) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^2 r_i - \sum_{i=1}^2 r_i \ln \hat{\theta}_i,$$

e portanto a estatística de Wilks resulta em:

$$Q_W = -2 \ln \left(\frac{L(1/2; \tilde{\beta})}{L(\hat{\theta}, \hat{\beta})} \right) = -2 \left\{ \ln \left(\frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^2 r_i - \sum_{i=1}^2 r_i \ln \hat{\theta}_i \right\}. \quad (4.5.30)$$

As três estatísticas estatísticas são assintoticamente equivalentes e sob a hipótese nula possuem distribuição assintótica χ^2 com 1 grau de liberdade.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo ilustrar a teoria exposta nos capítulos anteriores e para tanto são apresentadas algumas aplicações numéricas.

Na seção 5.2 é apresentada uma aplicação numérica a uma situação de um teste acelerado num contexto de riscos competitivos com causas de falha atuando independentemente. O objetivo desta seção é ajustar o modelo apresentado por Klein e Basu (1981), revisto na seção 3.2 do capítulo 3.

Os dados do teste acelerado considerado foram gerados aleatoriamente baseados em um exemplo de Nelson (1990). Este refere-se a um teste acelerado aplicado a sistemas de isolamento da Classe-H em motores elétricos, testados em temperaturas altas de 190, 220, 240 e 260 graus Celsius. Três tipos distintos de falha são consideradas na análise: "Turn", "Phase" e "Ground". Cada uma atua independentemente em uma parte separada do sistema de isolamento. Para obtenção do conjunto de dados gerou-se para cada causa de falha tempos seguindo o modelo Weibull-Arrhenius com parâmetros

(δ_i, β_i) , $i= 1, 2, 3$, e a seguir tomou-se o mínimo de cada tripla de tempos gerados. A esse mínimo observado foi associado o respectivo valor do stress (temperatura) e a causa de falha (0, 1, 2, 3), onde o valor "0" indica que o tempo observado corresponde a um dado censurado.

A partir desse conjunto de dados ajustou-se o modelo Weibull independente para testes acelerados. As estimativas dos parâmetros do modelo foram obtidas através dos procedimentos de máxima verossimilhança em conjunto com o método iterativo de Newton-Raphson descritos em tal capítulo. A seguir foi feita a verificação do ajuste do modelo através da análise de resíduos. Além do ajuste de um modelo paramétrico aos dados, o teste tem como propósito estimar a vida mediana de tal isolamento em sua temperatura de uso normal de 180 graus Celsius. Uma vida mediana de 20000 horas é necessária para a performance satisfatória desses sistemas de isolamento. Outros propósitos foram determinar a principal causa de falha na temperatura de uso normal e avaliar se uma mudança no desenho do isolamento, para eliminar tal causa, melhoraria a distribuição de vida apreciavelmente. Assim, as estimativas obtidas foram então utilizadas para a estimação das funções de interesse no stress normal de 180 graus Celsius.

Na seção 5.3, a aplicação numérica apresentada enfoca a situação de um teste acelerado no contexto de riscos competitivos dependentes com dados provenientes da distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin (BVW), estudada na seção 3.4 do capítulo 3.

Os dados utilizados nessa aplicação, como na seção anterior, foram gerados aleatoriamente por simulação de um teste acelerado hipotético de dispositivos sujeitos a altas temperaturas de 190, 220, 240 e 260 graus Celsius. Duas causas de falha foram consideradas e denominadas simplesmente, causa 1 e causa 2. A geração dos pares de tempos da distribuição bivariada acima citada foi feita utilizando-se a propriedade P5 apresentada no capítulo 3, que sugere uma forma de obtê-los a partir de variáveis aleatórias Weibull independentes. Assim, tais pares de tempos foram gerados seguindo o modelo BVW com parâmetros de forma $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ e uma relação de stress-vida Arrhenius para os parâmetros de escala $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$.

Desde que em situações de riscos competitivos o tempo de vida observado corresponde ao mínimo dos tempos de falha latentes, a seguir tomou-se o mínimo de cada par gerado e associou-se a esse mínimo observado o correspondente nível de stress

aplicado e a causa de falha (0, 1, 2, 12), onde causa "12" indica falha do dispositivo pelas causas 1 e 2 simultaneamente.

Ao conjunto de dados resultante, ajustou-se o modelo BVW com as estimativas dos parâmetros obtidas pelos procedimentos de máxima verossimilhança descritos em tal capítulo. Posteriormente, foi feita uma análise gráfica de resíduos para verificação do ajuste do modelo. Ainda, em testes acelerados se tem como propósito fazer extrapolações para o stress de uso normal. Desse modo, utilizando as estimativas dos parâmetros obtidas anteriormente, foram estimadas algumas funções de interesse no stress de uso normal de 180 graus Celsius.

Na seção 5.4 é apresentada a situação de um teste acelerado no contexto de riscos competitivos com duas causas de falha dependentes com distribuição de vida exponencial bivariada de Sarkar, conforme a metodologia estudada no capítulo 4.

Os dados para essa aplicação, como nas seções anteriores, foram gerados aleatoriamente com auxílio computacional considerando um teste acelerado hipotético de dispositivos sujeitos a altas temperaturas de 190, 220, 240 e 260 graus Celsius. O conjunto de dados dessa aplicação foi gerado utilizando-se a propriedade P4 apresentada no capítulo 4, que fornece uma forma de gerar os pares de tempos correspondentes às duas causas em termos de variáveis aleatórias independentes. Assim, os pares de tempos foram gerados seguindo um modelo exponencial bivariado de Sarkar e uma relação de stress-vida Arrhenius para os parâmetros λ_1 , λ_2 , λ_{12} . A seguir, tomou-se o mínimo de cada par gerado e associou-se a esse mínimo observado a correspondente causa de falha (0, 1, 2) e o nível de stress aplicado.

Ao conjunto de dados resultante ajustou-se o modelo de Sarkar reparametrizado. Os procedimentos de máxima verossimilhança descritos no capítulo 4 foram empregados para a estimação dos parâmetros desse modelo reparametrizado. Essas estimativas foram então utilizadas para a realização do teste de hipótese de homogeneidade das distribuições de sobrevivência marginais G_i , $i=1, 2$, do modelo reparametrizado, e para a estimação de algumas funções de interesse no stress normal de 180 graus Celsius.

Ainda para esse conjunto de dados foi ajustado um modelo exponencial independente para cada causa de falha com o objetivo de comparar as curvas de sobrevivência estimadas sob a suposição de independência e as \tilde{G}_i , $i=1, 2$, do modelo reparametrizado com relação à curva de sobrevivência marginal verdadeira (do modelo

original).

Para a obtenção dos conjuntos de dados bem como dos resultados e gráficos das aplicações numéricas utilizou-se o software estatístico SAS Institute Inc. (versão 6.04). Os programas desenvolvidos neste software encontram-se no apêndice E.

5.2 - APLICAÇÃO NUMÉRICA PARA SITUAÇÕES DE RISCOS COMPETITIVOS INDEPENDENTES

5.2.1 - Descrição dos Dados

Essa primeira aplicação refere-se a um conjunto de dados provenientes de um teste acelerado hipotético de sistemas de isolamento da Classe-H em motores elétricos, testados em quatro níveis de temperatura: 190, 220, 240 e 260 graus Celsius. Foram consideradas três causas distintas de falha atuando independentemente: "Turn" (Causa 1), "Phase" (Causa 2) e "Ground" (causa 3). A tabela D.1 (Apêndice D) sumariza os resultados de 200 motores elétricos com 50 motores testados em cada um dos quatro níveis do stress. Os dados contidos nessa tabela foram gerados pelo programa PRG1.SAS que se encontra no apêndice E. A primeira coluna da tabela contém o tempo de sobrevivência indicado por "t". Esses tempos foram obtidos gerando-se 200 tempos (50 em cada nível de temperatura) para cada causa de falha separadamente através do método da transformação inversa (Kennedy e Gentle (1980)), com sementes 378746, 267323 e 789651 respectivamente. O modelo utilizado para cada causa foi o modelo Weibull-Arrhenius com parâmetros de forma 2 e parâmetros de escala seguindo a relação de stress-vida Arrhenius:

$$\alpha_{ij} = \exp[\beta_{i0} + \beta_{i1}g_{i1}(V_j)], \quad i=1, 2, 3, \quad j=1, 2, 3, 4,$$

onde $g_{i1}(V_j) = \frac{-1000}{V_j}$ e V é a temperatura em graus absolutos. Com os seguintes valores de β_i , $i=1, 2, 3$:

Tabela 5.1: Verdadeiros Valores de (β_{i0}, β_{i1})

causa	β_{i0}	β_{i1}
Turn	8.2607	12.31006
Phase	3.7748	10.42530
Ground	13.0340	14.74870

A seguir tomou-se o mínimo para cada tripla de tempos gerados, ou seja,

$$t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}, t_{3l}), l = 1, 2, \dots, 200.$$

O tempo para término do teste foi fixado em 11000 horas e assim classificou-se o l -ésimo tempo observado, $l = 1, 2, \dots, 200$, como tempo de falha ou de censura por:

- Se $t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}, t_{3l}) \leq 11000$ então $t_l = t_l$;
- Se $t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}, t_{3l}) > 11000$ então $t_l = 11000$.

A segunda coluna da tabela contém o nível de temperatura aplicado denotada por "stress". A terceira coluna, denotada por "causa", contém o indicador de causa de falha, onde "0" indica censura. Da quarta à sexta coluna encontram-se listados os indicadores de censura para cada uma das causas denotadas por "C1", "C2" e "C3", onde

$$C1_l = \begin{cases} 1 & \text{se falha devido a causa 1} \\ 0 & \text{se censura ou falha por causa 2 ou 3, } l = 1, 2, \dots, 200. \end{cases}$$

Analogamente para C2 e C3 tem-se, respectivamente:

$$C2_l = \begin{cases} 1 & \text{se falha devido a causa 2} \\ 0 & \text{se censura ou falha por causa 1 ou 3, } l = 1, 2, \dots, 200 \end{cases}$$

e

$$C3_l = \begin{cases} 1 & \text{se falha devido a causa 3} \\ 0 & \text{se censura ou falha por causa 1 ou 2, } l = 1, 2, \dots, 200. \end{cases}$$

Como resultado dessa geração observou-se 196 falhas e 4 censuras. Na tabela 5.2 abaixo, encontra-se sumário do número de observações censuradas e não censuradas para cada causa de falha para cada um dos níveis do stress:

Tabela 5.2: Sumário do Número de Observações Censuradas e Não Censuradas

nível	causa	falhas	censuras	%censuras
190	1	20	30	60
	2	18	32	64
	3	08	42	84
220	1	18	32	64
	2	10	40	80
	3	22	28	56
240	1	18	32	64
	2	10	40	80
	3	22	28	56
260	1	19	31	62
	2	09	41	82
	3	22	28	56

OBS: Resultados obtidos pela PROC LIFETEST do SAS programa PRG2.SAS (Apêndice E)

Perfazendo um total para cada causa de:

Tabela 5.3: Número de Falhas de Cada Causa

causa	falhas	censuras	%censuras
1	75	125	62.5
2	47	153	76.5
3	74	126	63.0

O alto percentual de censuras em cada causa se deve ao fato de que tempos de falha por uma determinada causa são considerados tempos de censura para as demais causas. Por exemplo, se um motor falha pela causa 1 então seu tempo de falha é tomado como tempo de censura para as causas 2 e 3.

5.2.2 - Procedimentos Gráficos

Como primeiro passo para a análise desses dados fez-se uma verificação gráfica para cada causa em separado, com o objetivo de avaliar a validade dos procedimentos gráficos apresentados no capítulo 2, uma vez que é conhecido o modelo paramétrico que originou o conjunto de dados.

5.2.2.1 - Avaliação da Proporcionalidade dos Riscos e do Modelo Weibull

Para avaliar a proporcionalidade dos riscos (ou equivalentemente a igualdade do parâmetro de forma em todos os níveis do stress) e da adequação do modelo Weibull, utilizam-se os gráficos $\ln(-\ln(\hat{S}_i(t|V_j))) \times \ln t$ para cada causa de falha $i, i= 1, 2, 3$, e cada nível j do stress, $j= 1, 2, 3, 4$. Se o modelo de riscos proporcionais Weibull for adequado os gráficos devem ser aproximadamente paralelos e lineares. As figuras 5.1a, 5.1b e 5.1c mostram tais gráficos.

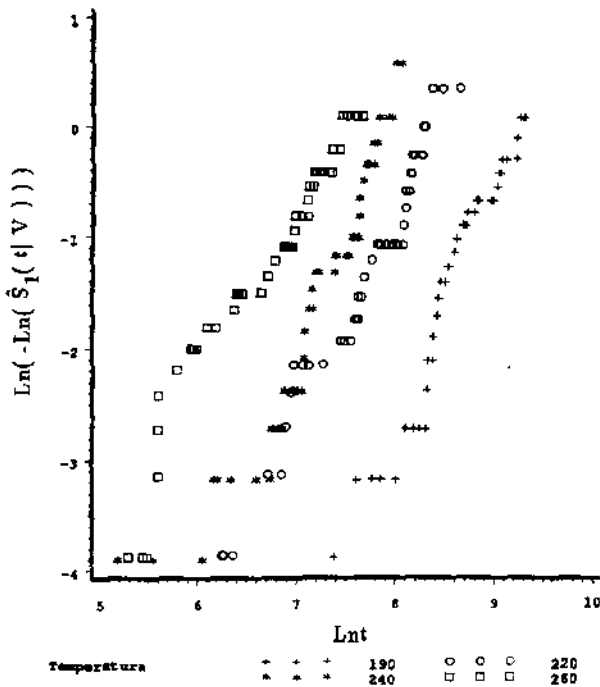


FIGURA 5.1a: Gráfico do $\ln(-\ln(\hat{S}_1(t|V))) \times \ln t$

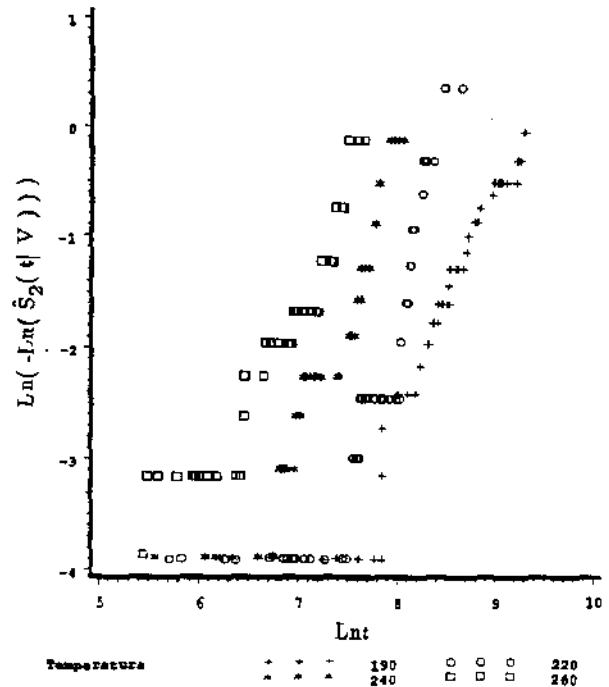


FIGURA 5.1b: Gráfico do $\ln(-\ln(\hat{S}_2(t|V))) \times \ln t$

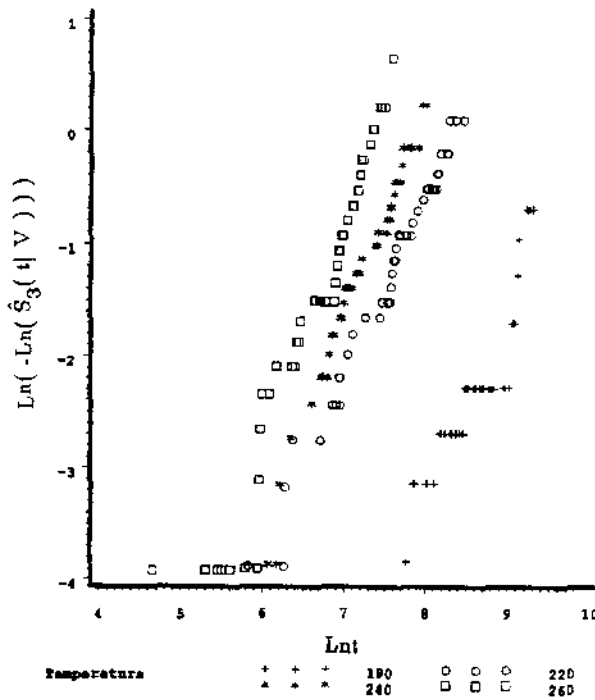


FIGURA 5.1c: Gráfico do $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_3(t|V))) \times \text{Lnt}$

Os gráficos acima não fornecem fortes evidências que violem a suposição de que os tempos sejam provenientes da distribuição Weibull e da proporcionalidade dos riscos. Deve ser levado em consideração, o alto percentual de censuras para as causas 1, 2 e 3 (62.5%, 76.5% e 63%, respectivamente).

5.2.2.2 - Avaliação da Relação Arrhenius

Para avaliar a adequação da relação Arrhenius para a causa de falha i , $i=1, 2, 3$, é necessário estimar em cada nível j da temperatura, $j=1, 2, 3, 4$, um percentil específico t_{iP_j} a partir da sobrevivência estimada pelo método de Kaplan-Meier. Os gráficos de $\text{Ln}(\hat{t}_{iP_j}) \times g_1(V_j) = -1000/V_j$, $j=1, 2, 3, 4$, para cada causa i , $i=1, 2, 3$, devem ser aproximadamente lineares se a relação Arrhenius for adequada. Os 25-ésimos percentis estimados em cada um dos níveis do stress para cada uma das causas encontram-se listados na tabela D.2 (Apêndice D). As figuras 5.2a, 5.2b e 5.2c abaixo mostram os gráficos para cada causa de falha.

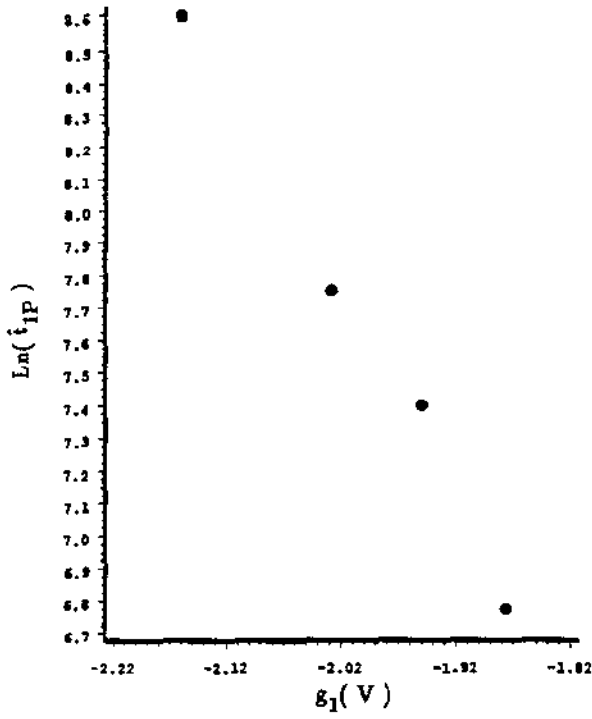


FIGURA 5.2a: Gráfico do $\text{Ln}(i_{1P}) \times -1000/V$

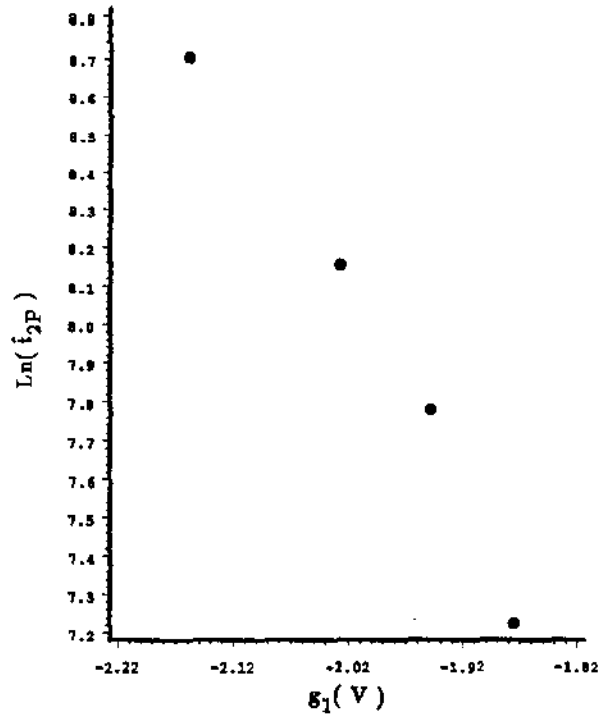


FIGURA 5.2b: Gráfico do $\text{Ln}(i_{2P}) \times -1000/V$

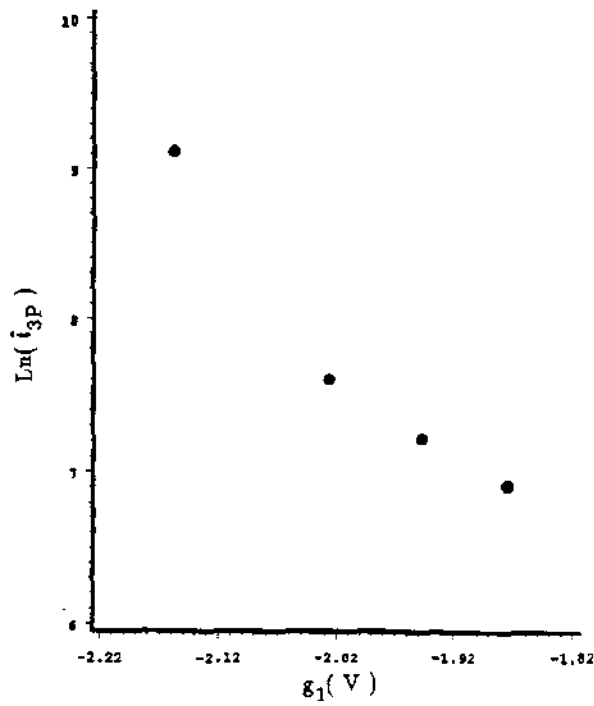


FIGURA 5.2c: Gráfico do $\text{Ln}(i_{3P}) \times -1000/V$

As figuras 5.2a e 5.2b acima (causas 1 e 2), sugerem que a relação de stress-vida Arrhenius para o parâmetro de escala da Weibull é adequada. Da figura 5.2c (causa 3), embora exista um ponto fora da reta ajustada visualmente para a temperatura 190 graus Celsius, não se pode concluir que a relação Arrhenius não é adequada uma vez que esse ponto distoante do gráfico foi obtido a partir de um nível do stress cujo percentual de censuras é de 84% (ver tabela 5.2).

As estimativas das sobrevivências foram obtidas utilizando a PROC LIFETEST do SAS (versão 6.03) no programa PRG2.SAS que encontra-se listado no apêndice E.

5.2.3 - Estimação de Parâmetros

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros obtidas pelo método iterativo de Newton-Raphson para cada uma das causas e seus desvios-padrão encontram-se na tabela 5.4 a seguir:

Tabela 5.4: Estimativas dos Parâmetros e D.P. do Modelo Weibull-Arrhenius

causa	$\hat{\delta}_i$	D.P.	$\hat{\beta}_{i0}$	D.P.	$\hat{\beta}_{i1}$	D.P.
1	1.9523071	0.1840442	8.7678969	2.3374468	12.450641	1.5930130
2	2.1697221	0.2538123	4.7552485	2.9823001	11.565001	2.1049947
3	1.9948098	0.1884289	14.930664	2.4946034	15.724625	1.6765298

Com as seguintes matrizes de variância-covariância estimadas:

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 5.4636574 & 3.3648451 & 0.1624344 \\ 3.3648451 & 2.5376906 & 0.2158865 \\ 0.1624344 & 0.2158865 & 0.0338723 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 8.8941138 & 5.6237032 & 0.3122125 \\ 5.6237032 & 4.4310026 & 0.4130778 \\ 0.3122125 & 0.4130778 & 0.0644207 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_3 = \begin{bmatrix} 6.223046 & 3.8009687 & 0.1657297 \\ 3.8009687 & 2.8107522 & 0.2241132 \\ 0.1657297 & 0.2241132 & 0.0355054 \end{bmatrix}$$

Esses resultados foram obtidos pelo programa PRG3.SAS (Apêndice E).

5.2.4 - Testes de Hipóteses para os Parâmetros

Testes das hipóteses $H_{i0}: \delta_i = 1, i = 1, 2, 3$, podem ser de interesse desde que $\delta_i = 1$ implica em uma distribuição exponencial dos tempos para a causa i . Essas hipóteses podem ser testadas usando a normalidade assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança em grandes amostras através da estatística:

$$z_i^2 = \left(\frac{\hat{\delta}_i - 1}{\text{d.p.}(\hat{\delta}_i)} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3,$$

que sob H_{i0} tem distribuição χ^2 com 1 grau de liberdade. Alternativamente, essas hipóteses podem ser testadas através do teste da razão de verossimilhança descrito no capítulo 1. Como nessa aplicação $n = 200$ para cada uma das causas, o teste de hipótese realizado baseou-se na estatística z_i^2 . Os resultados encontram-se na tabela abaixo:

Tabela 5.5: Testes das Hipóteses $H_{i0}: \delta_i = 1, i = 1, 2, 3$

causa	z_i^2	g.l.	p-valor
1	26.77	1	0.0000
2	21.24	1	0.0000
3	27.87	1	0.0000

As estatísticas calculadas demonstram que existem evidências estatisticamente significativas contra as hipóteses H_{i0} (p-valor = 0.0000) e consequentemente contra o modelo exponencial.

5.2.5 - Análise Residual

Para verificação do ajuste do modelo foi utilizado o método gráfico da análise de resíduos para cada causa de falha como descrito no capítulo 2. O conjunto de resíduos foi obtido para cada causa de falha separadamente pela seguinte relação:

$$\hat{\epsilon}_{ijl} = \hat{\alpha}_{ij} t_l^{\hat{\delta}_i} = \exp\left(\hat{\beta}_{i0} + \hat{\beta}_{i1} \frac{(-1000)}{V_j}\right) t_l^{\hat{\delta}_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad l = 1, 2, \dots, n_j \quad j = 1, 2, 3, 4$$

onde t_l é um tempo de falha ou de censura para a causa em questão. Como os resíduos devem se comportar como uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial padrão, se o modelo Weibull-Arrhenius for adequado os gráficos $-\ln(\hat{S}(\hat{\epsilon}_i)) \times \hat{\epsilon}_i$ para cada causa i , $i = 1, 2, 3$, devem ser aproximadamente lineares com inclinação 1 passando pela origem. $\hat{S}(\hat{\epsilon}_i)$ é a estimativa produto limite da função de sobrevivência de $\hat{\epsilon}_i$ e foram calculadas com o auxílio da PROC LIFETEST do SAS pelo programa SOBRES.SAS (Apêndice E). As figuras 5.3a, 5.3b e 5.3c mostram o gráficos dos resíduos para cada causa de falha respectivamente.

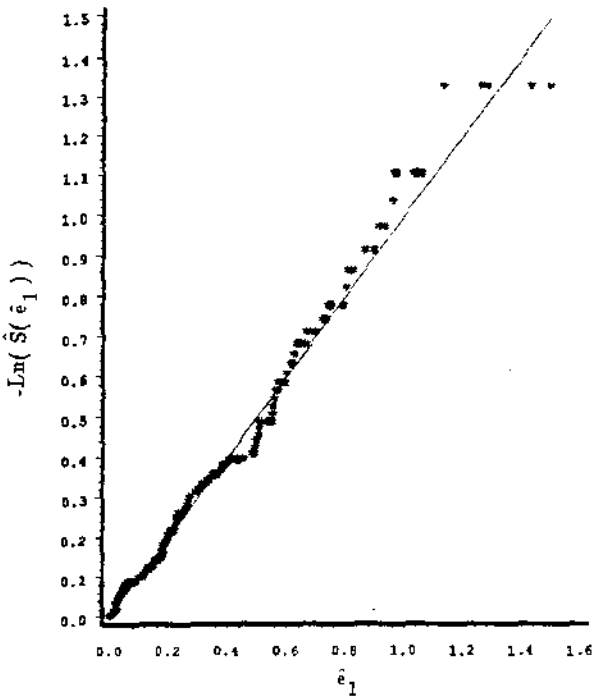


FIGURA 5.3a: Gráfico do $-\ln(\hat{S}(\hat{\epsilon}_1)) \times \hat{\epsilon}_1$

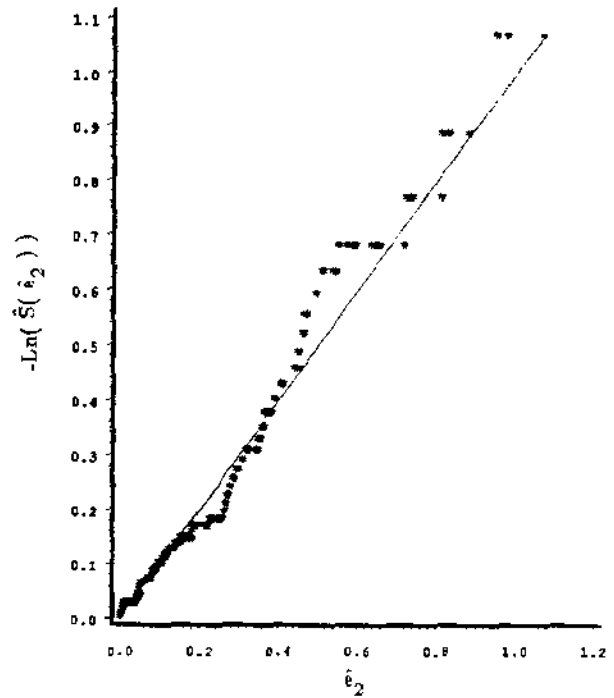


FIGURA 5.3b: Gráfico do $-\ln(\hat{S}(\hat{\epsilon}_2)) \times \hat{\epsilon}_2$

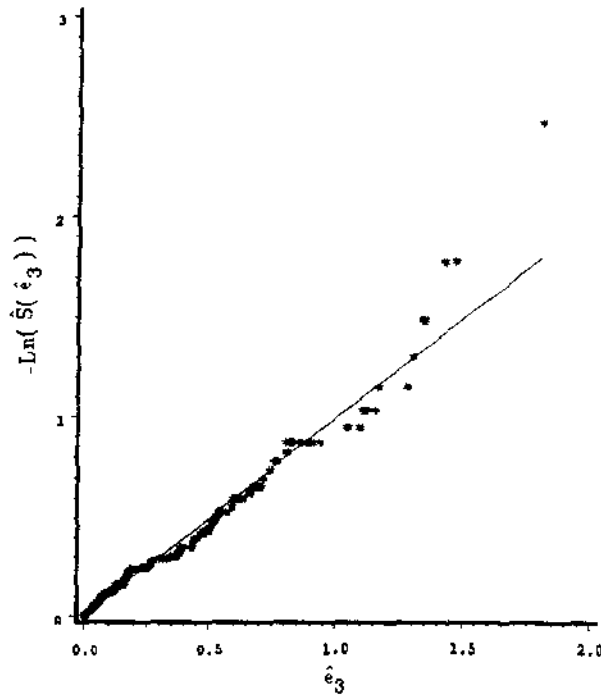


FIGURA 5.3c: Gráfico do $-\text{Ln}(\hat{S}(\hat{e}_3)) \times \hat{e}_3$

Pela análise visual dos gráficos verifica-se que os pontos situam-se aproximadamente em torno de uma reta com inclinação 1 e portanto não demonstram qualquer evidência contra a suposição de que os resíduos sejam uma amostra aleatória proveniente da distribuição exponencial. Consequentemente o modelo Weibull-Arrhenius para cada causa de falha ajusta-se bem aos dados desta aplicação.

5.2.6 - Estimação de Funções no Stress Usual

a) Estimação da sobrevivência, do risco e de percentis para cada causa

Utilizando-se os procedimentos descritos no capítulo 3, as funções risco e de sobrevivência para cada uma das causas de falha em um stress de uso normal de 180 graus Celsius foram estimadas por:

$$\lambda_i(t | V_u) = \hat{\delta}_i t^{\hat{\delta}_i - 1} \exp[\hat{\beta}_{i0} + \hat{\beta}_{i1} g_{i1}(V_u)] \exp\left[-\frac{\sigma_{iu}^2(t)}{2}\right], i = 1, 2, 3.$$

e
$$\hat{S}_i(t|V_u) = \exp\left[-t^{\hat{\delta}_i} \exp[\hat{\beta}_{i0} + \hat{\beta}_{i1}g_{i1}(V_u)] \exp\left[-\frac{\sigma_{iu}^{2*}(t)}{2}\right]\right], i = 1, 2, 3,$$

com $V_u = 180 + 273.16 = 453.16$, $g_{i1}(V_u) = -\frac{1000}{V_u}$ e

e
$$\sigma_{iu}^2(t) = \left(1, g_{i1}(V_u), \frac{1}{\delta_i} + \ln(t)\right) \hat{\Sigma}_i \left(1, g_{i1}(V_u), \frac{1}{\delta_i} + \ln(t)\right),$$

e
$$\sigma_{iu}^{2*}(t) = \left(1, g_{i1}(V_u), \ln(t)\right) \hat{\Sigma}_i \left(1, g_{i1}(V_u), \ln(t)\right).$$

As figuras 5.4a e 5.4b a seguir demonstram os comportamentos das curvas paramétricas estimadas para cada causa no stress de uso normal:

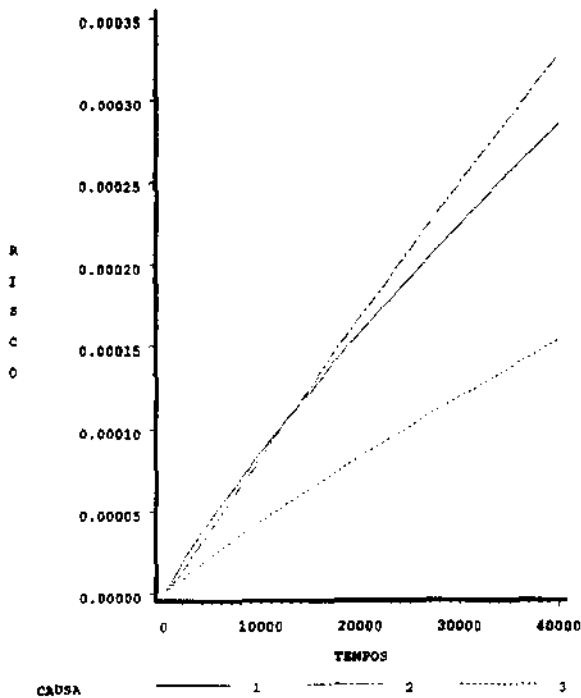


FIGURA 5.4a: Riscos Estimados no Stress de 180 graus Celsius.

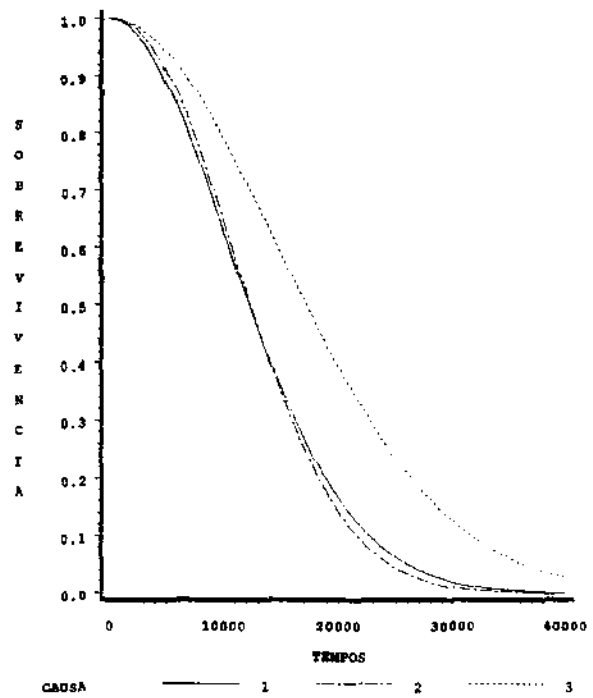


FIGURA 5.4b: Sobrevivências Estimadas no Stress de 180 graus Celsius.

É possível verificar que as curvas de sobrevivência para as causas 1 e 2 apresentam-se inferiores à curva de sobrevivência para a causa 3 e estas não sugerem diferenças entre si.

Ainda, para cada um dos riscos e sobrevivências calculados é possível obter seus respectivos intervalos de confiança. Para ilustração, as estimativas pontuais e

intervalares para essas funções num tempo $t= 20000$ horas e temperatura de 180 graus Celsius foram calculadas e encontram-se na tabela 5.6 abaixo:

Tabela 5.6: Estimativas e I.C. de 90% dos Riscos e Sobrevivências em 20000 horas e temperatura de 180 graus Celsius

causa	$\tilde{\lambda}_i$	I.C.	\tilde{S}_i	I.C.
1	0.0001735	(0.0001071, 0.0003120)	0.1691573	(0.0409012, 0.3338280)
2	0.0002074	(0.0001184, 0.0004216)	0.1477678	(0.0205314, 0.3358336)
3	0.0000919	(0.0000535, 0.0001808)	0.3979157	(0.1631781, 0.5846823)

Dos gráficos das sobrevivências é possível também obter estimativas aproximadas de percentis de interesse. Nessa aplicação, tem-se o interesse nas medianas para cada uma das causas que são graficamente estimadas por 12000, 12100 e 17000 horas, respectivamente. Pela teoria apresentada no capítulo 3, esses percentis podem ser calculados utilizando-se o estimador:

$$\hat{t}_{iPu} = \left(-\frac{\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_{iu}} \right)^{1/\hat{\delta}_i} \exp\left(-\frac{\sigma_{iPu}^2}{2} \right), \quad i=1, 2, 3,$$

com $\sigma_{iPu}^2 = \left(-\frac{1}{\hat{\delta}_i}, -\frac{g_{i1}(V_u)}{\hat{\delta}_i}, -\frac{1}{\hat{\delta}_i^2} \ln\left(-\frac{\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_{iu}} \right) \right) \hat{\Sigma}_i \left(-\frac{1}{\hat{\delta}_i}, -\frac{g_{i1}(V_u)}{\hat{\delta}_i}, -\frac{1}{\hat{\delta}_i^2} \ln\left(-\frac{\ln(1-P)}{\hat{\alpha}_{iu}} \right) \right)$,

e o intervalo de confiança:

$$[\hat{t}_{iPu} \exp(-z_{1-\alpha/2}\sigma_{iPu}); \hat{t}_{iPu} \exp(z_{1-\alpha/2}\sigma_{iPu})].$$

Os resultados dos percentis estimados são compatíveis com os obtidos graficamente e encontram-se na tabela 5.7 a seguir:

Tabela 5.7: Estimativas e I.C. de 90% para as Medianas sob a temperatura normal de 180 graus Celsius

causa	\hat{t}_{iPu}	I.C.
1	11924.980	(09755.88, 14811.58)
2	12011.011	(09815.19, 14938.07)
3	16554.184	(12946.42, 21691.43)

b) Estimação da sobrevivência total

Para esse caso de independência é possível estimar a sobrevivência total por:

$$\hat{S}_T(t | V_u) = \prod_{i=1}^3 \hat{S}_i(t | V_u).$$

A curva de sobrevivência obtida para o isolamento é apresentada na figura 5.5 abaixo:

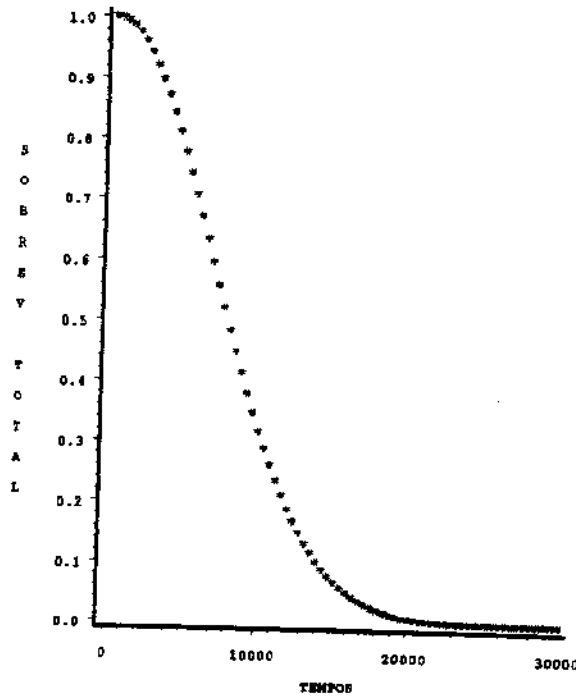


FIGURA 5.5: Sobrevivência Total Estimada
no Stress de 180 graus Celsius.

Pode-se portanto, observar que para uma sobrevivência total de 0.5 e temperatura de 180 graus Celsius o correspondente tempo observado é de aproximadamente 7650 horas, resultando em uma estimativa aproximada do tempo mediano de vida do isolamento sob tal temperatura.

Ainda pela teoria exposta no capítulo 3, pode-se obter intervalos de confiança para sobrevivências totais estimadas. Assim por exemplo, a sobrevivência total estimada no tempo $t = 20000$ horas e temperatura de 180 graus Celsius foi de 0.0099463 com um I.C. de aproximadamente 90% de (0.0000266, 0.0998611).

Para melhorar o produto, certas causas de falha podem ser eliminadas por mudanças em seu desenho. Eliminando-se a causa com o menor percentil estimado em uma temperatura de 180 graus Celsius (causa 1) e utilizando-se o mesmo procedimento anterior obteve-se a figura 5.6 abaixo:

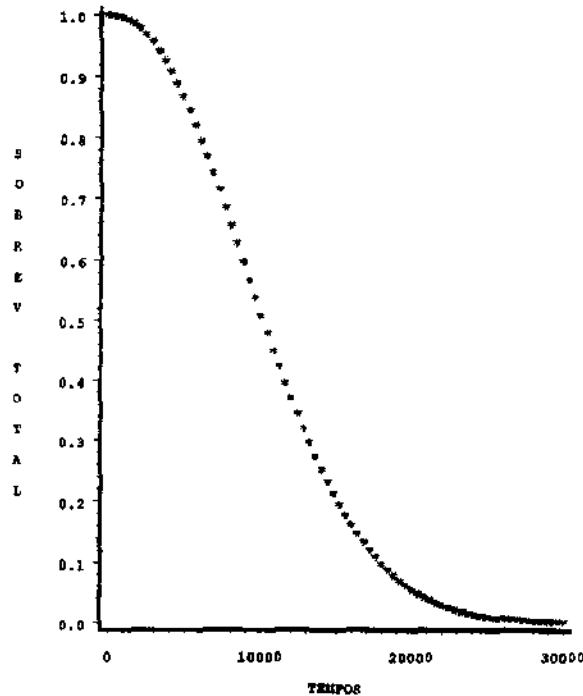


FIGURA 5.6: Sobrevivência Total Estimada Eliminada a causa 1, no Stress de 180 graus Celsius.

De forma análoga, pode-se observar que a mediana é de aproximadamente 10000 horas, e esta apresenta-se muito abaixo do desejado (20000 horas). Ainda é possível observar que a sobrevivência estimada em $t = 20000$ horas, bem como o I.C. de aproximadamente 90% para esse sistema redesenhado foram 0.0587991 e (0.0019914, 0.2249825), respectivamente. Esses resultados indicam portanto, que mesmo com a eliminação da causa 1 não seria verificado uma performance satisfatória do isolamento.

Todas as estimativas e os intervalos de confiança acima apresentados, foram obtidos através do programa PRG3.SAS listado no apêndice E.

5.3 - APLICAÇÃO NUMÉRICA PARA SITUAÇÕES DE RISCOS COMPETITIVOS DEPENDENTES COM DISTRIBUIÇÃO BVW

5.3.1 - Descrição dos Dados

O teste de vida hipotetizado para essa segunda aplicação, como na primeira, refere-se a um teste acelerado de 200 dispositivos sujeitos aos níveis de temperatura: 190, 220, 240 e 260 graus Celsius (com 50 ítems em cada nível). Considerou-se a existência de duas causas de falha: Causa 1 e Causa 2. Além disso, considerou-se também falhas por causa 1 e 2 simultaneamente como uma causa de falha adicional denominada causa 12.

Os dados gerados pelo programa BVW1.SAS (Apêndice E) encontram-se sumarizados na tabela D.3 (Apêndice D). Para a sua obtenção primeiramente foram gerados os pares de tempos da distribuição BVW utilizando-se a propriedade P5 do capítulo 3, que sugere uma forma de obtê-los a partir de três variáveis aleatórias Weibull independentes. Desse modo, gerou-se através do método da transformação inversa (Kennedy e Gentle, 1980), três vetores de tempos de dimensão 200: W_1 , W_2 , W_{12} , provenientes do modelo Weibull-Arrhenius com parâmetros de forma 2 e parâmetros de escala α_{ij} , $i=1, 2, 12$ $j=1, 2, 3, 4$, seguindo uma relação de stress-vida Arrhenius com os seguintes valores de β_i , $i=1, 2, 12$:

Tabela 5.8: Verdadeiros Valores de (β_{i0}, β_{i1})

i	β_{i0}	β_{i1}
1	8.2607	12.31006
2	13.0340	14.74870
12	3.7748	10.42530

A seguir tomou-se o mínimo de cada par (W_u, W_{12}) , $u=1, 2$, ou seja,

$$t_{1l} = \min(w_{1l}, w_{12l}), l=1, 2, \dots, 200,$$

e

$$t_{2l} = \min(w_{2l}, w_{12l}), l=1, 2, \dots, 200.$$

Desde que em problemas de riscos competitivos apenas o mínimo dos tempos latentes bem como a causa de falha são de fato observáveis, tomou-se o mínimo de cada par de tempos gerados:

$$t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}), l = 1, 2, \dots, 200,$$

e a correspondente causa de falha. O tempo para o término do teste foi fixado em 10000 horas e assim o l -ésimo tempo observado, $l = 1, 2, \dots, 200$, foi classificado como de falha ou de censura por:

- Se $t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}) \leq 10000$ então $t_l = t_l$,
- Se $t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}) > 10000$ então $t_l = 10000$.

A listagem dos tempos obtidos para essa aplicação encontra-se na primeira coluna da tabela D.3, indicada por "t". A segunda coluna, indicada por "stress", contém o correspondente nível de temperatura aplicado. A terceira coluna, indicada por "causa", contém o indicador de causa de falha, onde

$$\text{causa} = \begin{cases} 1 & \text{se falha pela causa 1,} \\ 2 & \text{se falha pela causa 2,} \\ 12 & \text{se falha pelas causas 1 e 2 simultaneamente,} \\ 0 & \text{se censura.} \end{cases}$$

Finalmente, da quarta à sexta coluna encontram-se listados os indicadores de censura para cada uma das causas denotadas por "C1", "C2" e "C12".

A tabela 5.9 abaixo sumariza o número de falhas e censuras para cada causa de falha em cada um dos níveis de stress:

Tabela 5.9: Sumário do Número de Observações Censuradas e Não Censuradas

nível	causa	falhas	censuras	%censuras
190	1	20	30	60
	2	13	37	74
	12	11	39	78
220	1	17	33	66
	2	21	29	58
	12	12	38	76

continuação da tabela 5.9:

	1	19	31	62
240	2	22	28	56
	12	09	41	82
	1	21	29	58
260	2	21	29	58
	12	08	42	84

OBS: Resultados obtidos pela PROC LIFETEST do SAS programa BVW2.SAS (Apêndice E)

Perfazendo um total para cada causa de:

Tabela 5.10: Número de Falhas de Cada Causa

causa	falhas	censuras	%censuras
1	77	123	61.5
2	77	123	61.5
12	40	160	80.0

Como na primeira aplicação, o alto percentual de censuras é resultado de falhas por outras causas serem consideradas como censuras para a causa em questão.

5.3.2 - Procedimentos Gráficos

Como observado no capítulo 2, em situações de riscos competitivos a suposição de independência não pode ser avaliada analiticamente nem graficamente. Partindo da suposição de dependência das causas de falha, resultante de alguma evidência física ou química ou até mesmo da experiência do pesquisador, depara-se com a necessidade de alguma indicação da família de modelos dependente a ser assumida. Em situações onde se considera a presença de duas causas de falha, as falhas por causas simultâneas fornecem uma indicativa do possível ajuste do modelo BVW com $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ uma vez que neste caso, como visto no capítulo 3, a probabilidade de ocorrência do evento ($T_1 = T_2$) é positiva. Tal modelo com $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, pela propriedade P5 (cap. 3), pode ser reduzido a um modelo Weibull-Arrhenius com três causas de falha

independentes e, pela propriedade P6, possui $\min(T_1, T_2) = T$ com distribuição Weibull(α_j, δ), onde $\alpha_j = \alpha_{1j} + \alpha_{2j} + \alpha_{12j}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Assim, o conjunto de procedimentos gráficos auxiliares na escolha do modelo BVW consiste dos procedimentos apresentados no capítulo 2 e do gráfico de $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_T(t|V_j))) \times \text{Lnt}$, $j = 1, 2, 3, 4$, que deve ter pontos aproximadamente paralelos e lineares se T tem distribuição Weibull. Nas sub-seções seguintes são apresentados os gráficos para essa aplicação.

5.3.2.1 - Avaliação da Proporcionalidade dos Riscos e do Modelo Weibull

O gráfico para a causa i , $i = 1, 2, 12$, de $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_i(t|V_j))) \times \text{Lnt}$, $j = 1, 2, 3, 4$, permite avaliar a proporcionalidade dos riscos bem como a adequação do modelo Weibull, desde que este apresenta pontos aproximadamente paralelos e lineares nos diferentes níveis de stress se o modelo for adequado. As figuras 5.7a, 5.7b e 5.7c mostram tais gráficos:

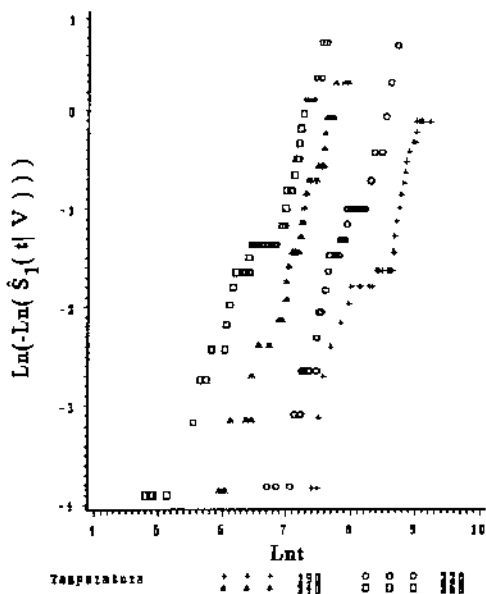


FIGURA 5.7a: Gráfico do $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_1(t|V))) \times \text{Lnt}$

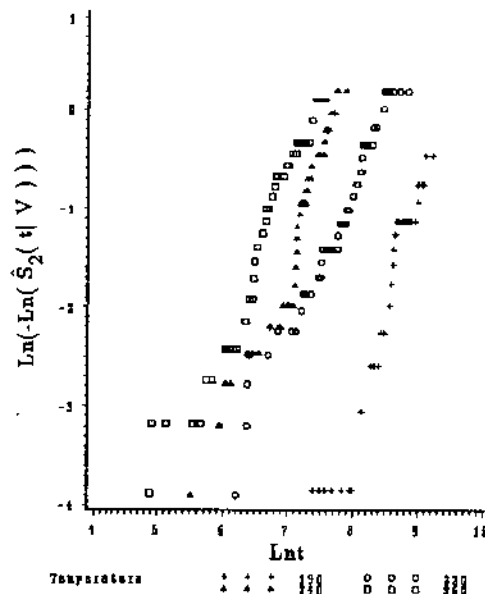


FIGURA 5.7b: Gráfico do $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_2(t|V))) \times \text{Lnt}$

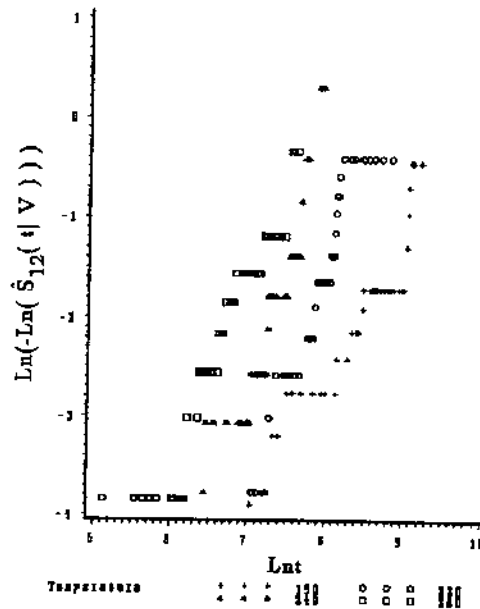


FIGURA 5.7c: Gráfico do $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_{12}(t|V))) \times \text{Ln}t$

Os gráficos acima apresentam-se aproximadamente paralelos e lineares sugerindo que o modelo de riscos proporcionais Weibull para cada causa pode ser razoável. Na figura 5.8 abaixo encontra-se o gráfico do $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_T(t|V_j))) \times \text{Ln}t$, $j= 1, 2, 3, 4$:

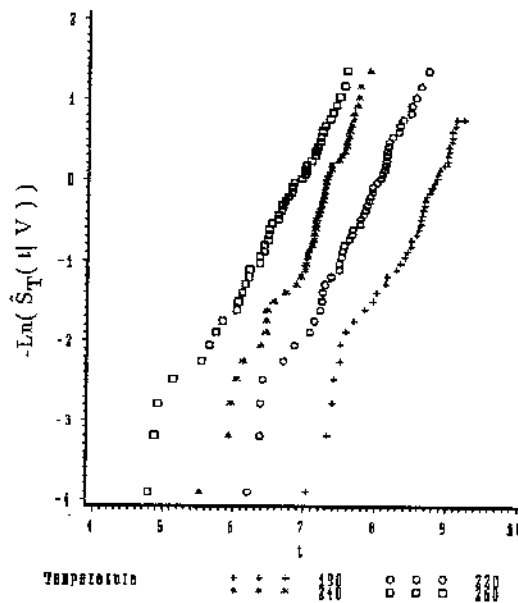


FIGURA 5.8: Gráfico do $\text{Ln}(-\text{Ln}(\hat{S}_T(t|V))) \times \text{Ln}t$

Novamente observa-se um padrão de pontos aproximadamente paralelos e lineares indicando uma possível adequação do modelo Weibull para T.

5.3.2.2 - Avaliação da Relação Arrhenius

Os 25-ésimos percentis estimados a partir das sobrevivências obtidas pelo método de Kaplan-Meier para cada uma das causas em cada um níveis de stress (temperatura), encontram-se listados na tabela D.4 (Apêndice D). As figuras 5.9a, 5.9b e 5.9c a seguir, mostram os gráficos do $\text{Ln}(\hat{t}_{iPj}) \times g_I(V_j) = -1000/V_j, j= 1, 2, 3, 4,$ para as causas 1, 2 e 12, respectivamente. Estes apresentam-se aproximadamente lineares sugerindo que uma relação Arrhenius para os parâmetros de escala $\alpha_{ij}, i= 1, 2, 12, j= 1, 2, 3, 4,$ pode ser adequada.

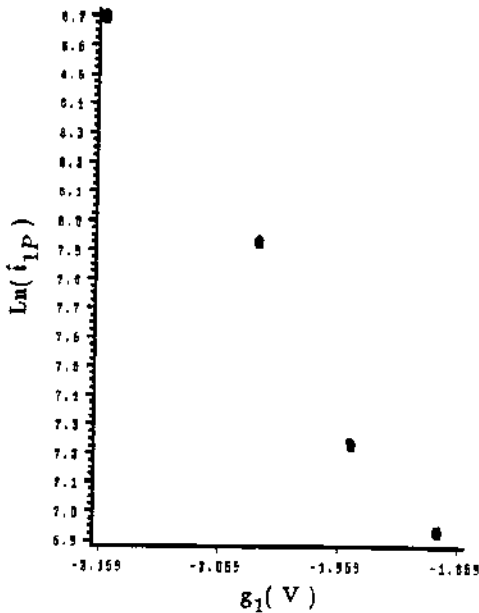


FIGURA 5.9a: Gráfico do $\text{Ln}(\hat{t}_{1P}) \times -1000/V$

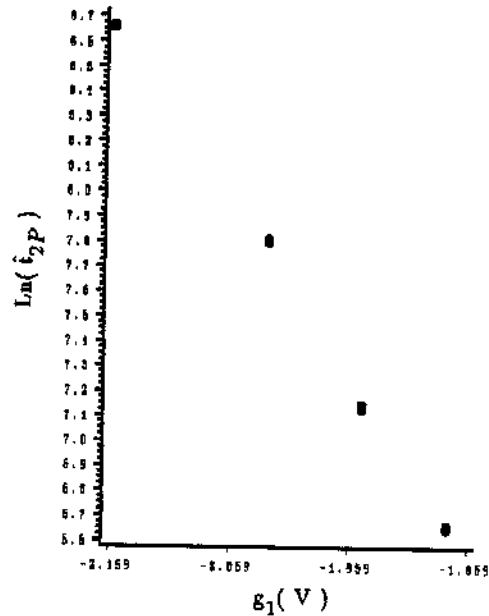


FIGURA 5.9b: Gráfico do $\text{Ln}(\hat{t}_{2P}) \times -1000/V$

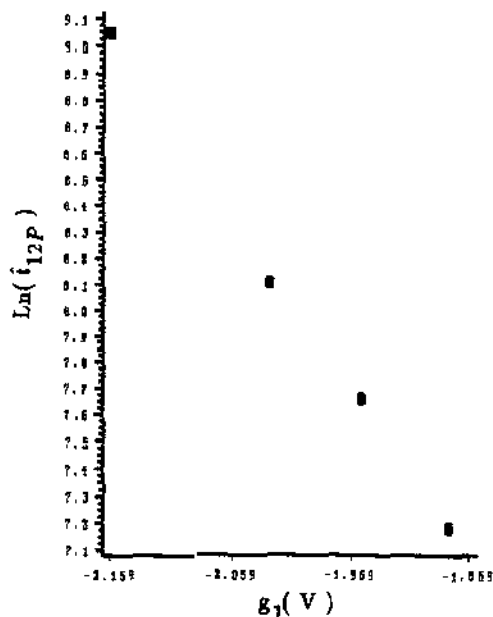


FIGURA 5.9c: Gráfico do $\ln(i_{12P}) \times 1000/V$

As estimativas utilizadas para o traçado dos gráficos foram obtidas através da PROC LIFETEST do SAS pelo programa BVW2.SAS (Apêndice E).

5.3.3 - Estimação de Parâmetros

Conforme os procedimentos de máxima verossimilhança descritos no capítulo 3 para o caso $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, foram obtidas as estimativas dos parâmetros do modelo bem como seus desvios-padrão. Estes encontram-se na tabela 5.11 a seguir:

Tabela 5.11: Estimativas dos Parâmetros e D.P. do Modelo BVW

$\hat{\delta}$	D.P.	causa	$\hat{\beta}_{i0}$	D.P.	$\hat{\beta}_{i1}$	D.P.
		1	10.654314	2.302507	13.542375	1.336665
2.000476	0.113674	2	13.590089	2.357273	15.015215	1.368882
		12	07.225430	3.114491	12.161069	1.686445

Com a seguinte matriz de variância-covariância de $(\hat{\beta}, \hat{\delta})$ estimada:

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5.301537 & 2.905284 & 0.342224 & 0.433197 & 0.332136 & 0.428157 & 0.066036 \\ 2.905284 & 1.786673 & 0.436879 & 0.553014 & 0.424001 & 0.546579 & 0.084301 \\ 0.342224 & 0.436879 & 5.556736 & 3.056171 & 0.336812 & 0.434184 & 0.066966 \\ 0.433197 & 0.553014 & 3.056171 & 1.873838 & 0.426346 & 0.549603 & 0.084767 \\ 0.332136 & 0.424001 & 0.336812 & 0.426346 & 9.700053 & 5.059177 & 0.064992 \\ 0.428157 & 0.546579 & 0.434184 & 0.549603 & 5.059177 & 2.844098 & 0.083781 \\ 0.066036 & 0.084301 & 0.066966 & 0.084767 & 0.064992 & 0.083781 & 0.129218 \end{bmatrix}$$

Esses resultados foram obtidos pelo programa BVW3.SAS (Apêndice E).

5.3.4 - Testes de Hipóteses para os Parâmetros

Pode ser de interesse testar a hipótese $H_0: \delta = 1$, uma vez que $\delta = 1$ implica na distribuição exponencial bivariada de Marshall e Olkin. Utilizando a propriedade de normalidade assintótica de $\hat{\delta}$, já que n é suficientemente grande ($n = 200$), a estatística:

$$z^2 = \left(\frac{\hat{\delta} - 1}{\text{d.p.}(\hat{\delta})} \right)^2,$$

sob H_0 , tem distribuição χ^2 com 1 grau de liberdade. Esta resulta em: $z^2 = 77.46$ ($p\text{-valor} < 0.00001$), fornecendo evidências estatisticamente significativas contra o modelo exponencial bivariado.

5.3.5 - Análise Residual

Ainda, para a verificação do ajuste do modelo Weibull para cada causa de falha, pode ser feita uma análise residual gráfica por procedimento análogo ao utilizado na primeira aplicação. Os resíduos foram estimados para cada causa pelo programa BVW3.SAS (Apêndice E). As figuras abaixo apresentam os gráficos de $-\text{Ln}(\hat{S}(\hat{e}_i)) \times \hat{e}_i$, $i = 1, 2, 12$. Em todos os gráficos observam-se pontos situados aproximadamente em torno da reta com inclinação 1 e portanto não demonstram fortes evidências contra o ajuste do modelo Weibull-Arrhenius para cada causa.

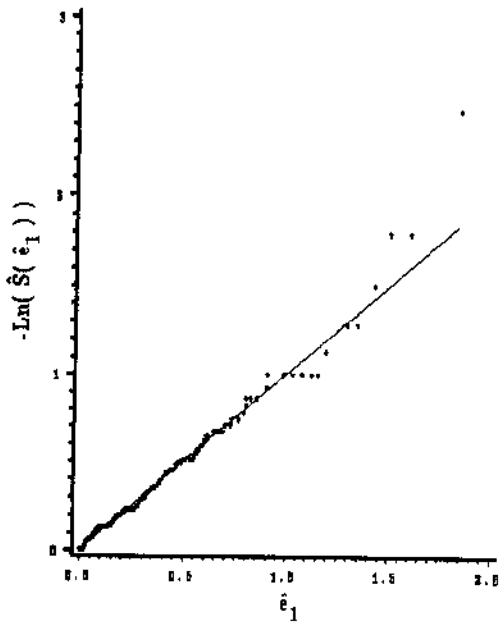


FIGURA 5.10a: Gráfico do $-\text{Ln}(\hat{S}(\hat{e}_1))$ x \hat{e}_1

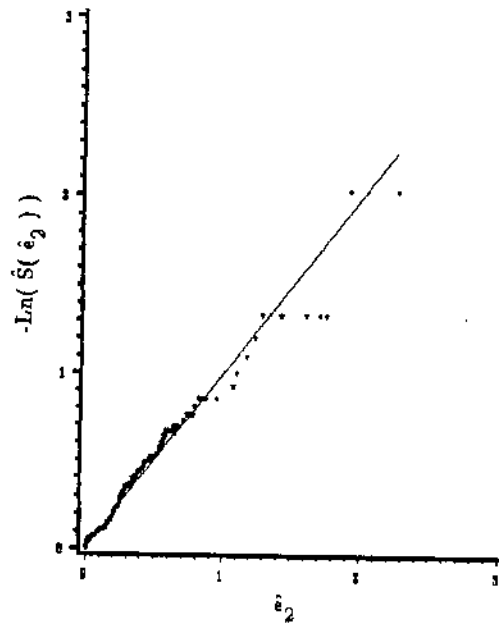


FIGURA 5.10b: Gráfico do $-\text{Ln}(\hat{S}(\hat{e}_2))$ x \hat{e}_2

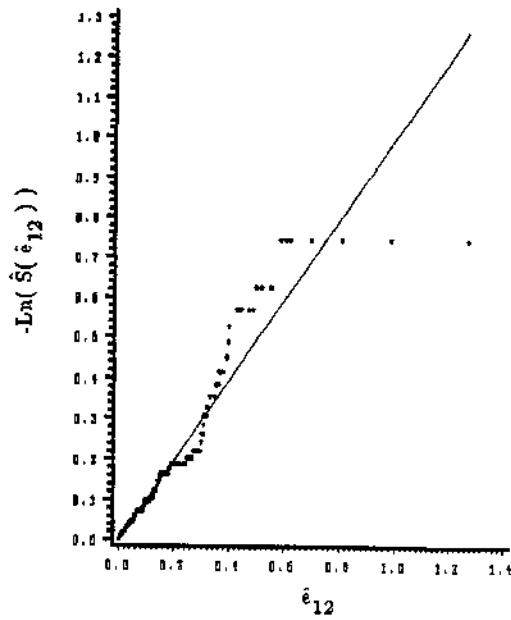


FIGURA 5.10c: Gráfico do $-\text{Ln}(\hat{S}(\hat{e}_{12}))$ x \hat{e}_{12}

5.3.6 - Estimação de Funções no Stress Usual

a) Estimação da sobrevivência, do risco e de percentis para cada causa

As estimativas das funções risco, de sobrevivência e percentis em stress de uso normal de 180 graus Celsius para cada uma das causas, foram obtidas através dos estimadores utilizados na primeira aplicação para $\delta_i = \delta$, $i = 1, 2$. As curvas de risco e de sobrevivência encontram-se traçadas nas figuras 5.11a, 5.11b abaixo:

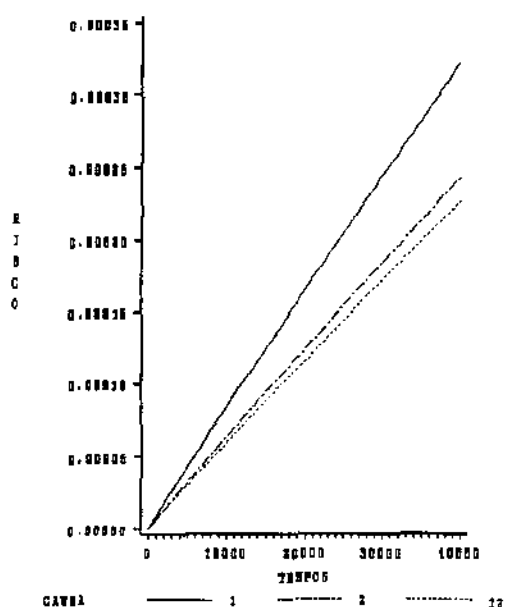


FIGURA 5.11a: Riscos Estimados no Stress de 180 graus Celsius.

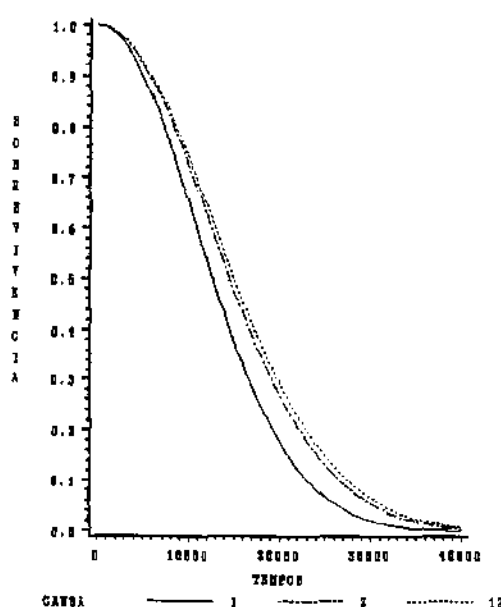


FIGURA 5.11b: Sobrevivências Estimadas no Stress de 180 graus Celsius.

Uma análise visual das curvas acima permite verificar que as curvas de sobrevivência estimadas para as causas 2 e 12 são bastante próximas entre si e superiores à curva de sobrevivência estimada para a causa 1.

Estimativas pontuais e intervalares para o risco e a sobrevivência para um tempo $t = 20000$ horas e temperatura de 180 graus Celsius foram calculadas por:

Tabela 5.12: Estimativas e I.C. de 90% dos Riscos e Sobrevivências em 20000 horas e temperatura de 180 graus Celsius

causa	$\tilde{\lambda}'_i$	I.C.	\tilde{S}'_i	I.C.
1	0.000172	(0.000112, 0.000287)	0.177774	(0.062593, 0.315046)
2	0.000125	(0.000079, 0.000216)	0.285387	(0.122946, 0.442947)
12	0.000115	(0.000068, 0.000219)	0.315117	(0.118308, 0.496449)

Os tempos medianos de vida (50-ésimos percentis) para cada causa estimados graficamente a partir da figura 5.11b, foram aproximadamente 12800, 14800 e 15000 horas, respectivamente. As estimativas não-viciadas e os intervalo de confiança obtidos foram:

Tabela 5.13: Estimativas e I.C. de 90% para as Medianas sob a temperatura normal de 180 graus Celsius

causa	\tilde{t}'_{iPu}	I.C.
1	12348.57	(10078.35, 15380.49)
2	14427.03	(11564.85, 18353.57)
12	14853.75	(11448.58, 19811.35)

b) Estimação da Sobrevivência, Risco e Percentis Marginais do Modelo BVW

Pode ainda ser de interesse estimar as funções risco, de sobrevivência e percentis das marginais do modelo BVW sob o stress usual de 180 graus Celsius. As figuras 5.12a e 5.12b abaixo, mostram as respectivas curvas de risco e de sobrevivência estimadas para os dados dessa aplicação a partir das relações definidas em (3.3.25) e (3.3.28):

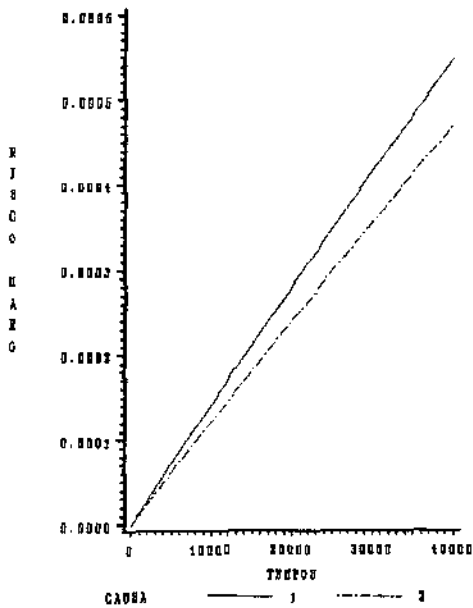


FIGURA 5.12a: Riscos Marginais Estimados no Stress de 180 graus Celsius.

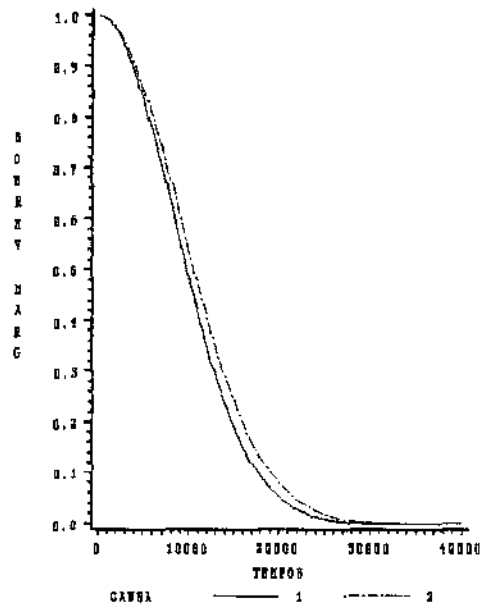


FIGURA 5.12b: Sobrevivências Marginais Estimadas no Stress de 180 graus Celsius.

Da figura 5.12b observa-se que a sobrevivência marginal estimada para a causa 2 é ligeiramente superior à sobrevivência marginal estimada para a causa 1. Como anteriormente, juntamente com as estimativas pontuais, pode-se obter as intervalares do risco e da sobrevivência para qualquer tempo t . No caso em que $t=20000$ horas, para a temperatura usual de 180 graus Celsius obtém-se:

Tabela 5.14: Estimativas e I.C. de 90% dos Riscos e Sobrevivências Marginais em 20000 horas e temperatura de 180 graus Celsius

causa	\hat{h}_i	I.C.	\hat{S}_i	I.C.
1	0.000287	(0.000193, 0.000471)	0.056019	(0.005236, 0.176465)
2	0.000240	(0.000158, 0.000406)	0.089930	(0.010613, 0.244066)

As estimativas gráficas dos tempos medianos de vida para as causas 1 e 2, a partir da figura 5.12b acima são, respectivamente: 9500 e 10100 horas. Estes podem ser alternativamente calculados utilizando o estimador não-viciado em (3.3.33) com

intervalo de confiança definido em (3.3.34). Os resultados obtidos encontram-se na tabela 5.15 a seguir:

Tabela 5.15: Estimativas e I.C. de 90% para as Medianas sob a temperatura normal de 180 graus Celsius

causa	\hat{t}_{iPu}	I.C.
1	9528.24	(7878.40, 11689.51)
2	10386.24	(8474.11, 12941.12)

Estes resultados são bastante próximos aos obtidos graficamente.

c) Estimação da Sobrevivência Total

A figura 5.13 a seguir mostra a curva de sobrevivência total estimada para um stress de uso normal de 180 graus Celsius:

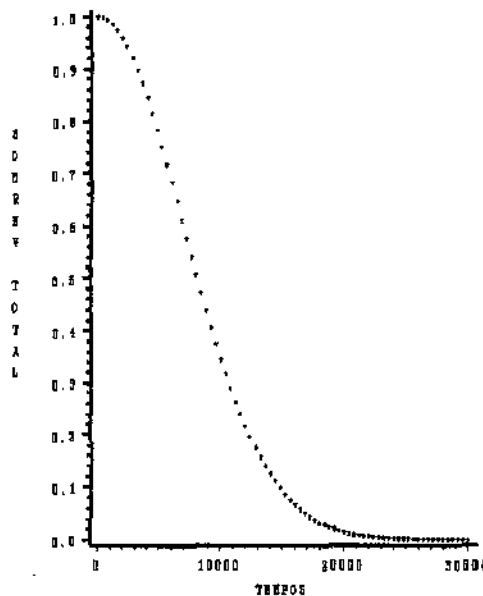


FIGURA 5.13: Sobrevivência Total Estimada no Stress de 180 graus Celsius.

A sobrevivência total estimada no tempo $t = 20000$ horas e temperatura de 180 graus Celsius foi de 0.015987 com um intervalo de aproximadamente 90% de confiança de (0.000323, 0.097403).

O tempo mediano de vida do dispositivo sob a temperatura de 180 graus Celsius estimado graficamente da figura acima foi de aproximadamente 8000 horas. Utilizando o estimador em (3.3.38) e o intervalo de confiança em (3.3.39), obteve-se um tempo mediano de vida estimado em 7986.61 horas com um intervalo de aproximadamente 90% de confiança de (6978.48, 9204.97).

Todas as estimativas acima apresentadas foram obtidas através do programa BVW4.SAS listado no Apêndice E.

5.4 - APLICAÇÃO NUMÉRICA PARA SITUAÇÕES DE RISCOS COMPETITIVOS DEPENDENTES COM DISTRIBUIÇÃO ACBVE₂.

5.4.1 - Descrição dos Dados

Essa aplicação refere-se a um teste acelerado hipotético de dispositivos testados sob altas temperaturas de 190, 220, 240 e 260 graus Celsius. Duas causas distintas de falha são consideradas com tempos de vida estatisticamente dependentes e são referidas simplesmente por causa 1 e causa 2. Os dados de 200 itens em teste, com 50 em cada nível do stress, foram gerados pelo programa ACBVE1.SAS (Apêndice E) e encontram-se sumarizados na tabela D.5 (Apêndice D). A primeira coluna da tabela, indicada por "t", contém os tempos de sobrevivência observados. Para a obtenção desses tempos, primeiramente foram gerados 200 pares de tempos (t_{1l}, t_{2l}) , $l=1, 2, \dots, 200$, da distribuição bivariada de Sarkar. O algoritmo apresentado no capítulo 4 utiliza os parâmetros $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$ da distribuição original, não os parâmetros θ_u , $u=1, 2, 3$, da distribuição reparametrizada, para a geração desses pares de tempos. Desse modo, para gerar tempos provenientes da distribuição reparametrizada no caso particular onde θ_i , $i=1, 2$, independe do stress e θ_3 segue uma relação de stress-vida Arrhenius para o j-ésimo nível do stress, $j=1, 2, 3, 4$, foram utilizadas as seguintes relações de stress-vida Arrhenius para os parâmetros da distribuição original:

$$\lambda_{ij} = \exp(\beta_{i0} + \beta_1 g_1(V_j)), \quad i=1, 2, 12 \quad j=1, 2, 3, 4,$$

onde $g_1(V_j) = -\frac{1000}{V_j}$ e V é a temperatura em graus absolutos, uma vez que assim:

$$\theta_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{1j} + \lambda_{2j}} = \frac{\exp(\beta_{i0})}{\exp(\beta_{10} + \beta_{20})} = \theta_i,$$

para $i=1, 2$, e portanto não depende de V e

$$\begin{aligned} \theta_{3j} &= \lambda_{1j} + \lambda_{2j} + \lambda_{12j} = (\exp(\beta_{10}) + \exp(\beta_{20}) + \exp(\beta_{120})) \exp(\beta_1 g_1(V_j)) = \\ &= \beta_{30} \exp(\beta_1 g_1(V_j)) = \exp(\ln \beta_{30} + \beta_1 g_1(V_j)) = \exp(\beta_0 + \beta_1 g_1(V_j)), \end{aligned}$$

possui a forma desejada Arrhenius. Os valores considerados para β_{i0} , $i=1, 2, 12$, e β_1 foram 6, 5, 2, 4 e 7, respectivamente. Implicando nos seguintes valores verdadeiros para

θ_i , $i=1, 2$, e $\beta=(\beta_0, \beta_1)$:

Tabela 5.16: Verdadeiros Valores de θ_i e (β_0, β_1)

parâmetro	valor
θ_1	0.6899745
θ_2	0.3100255
β_0	6.4603726
β_1	7

Assim, para a obtenção do l -ésimo par (t_{1l}, t_{2l}) , $l=1, 2, \dots, 200$, da distribuição bivariada foram gerados os vetores Z_1, Z_2 e Z_3 de dimensão 200 (50 observações em cada um dos quatro níveis de temperatura), de observações independentes exponencialmente distribuídas com parâmetros $\lambda_{1j}, \lambda_{2j}$ e λ_{12j} , $j=1, 2, 3, 4$, respectivamente, além de um vetor U (também de dimensão 200) de observações uniformes em $(0, 1)$. Tais vetores foram obtidos através do método da transformação inversa com as respectivas sementes: 145237, 473389, 547321 e 857689. Utilizando-se esses vetores, os pares (t_{1l}, t_{2l}) , $l=1, 2, \dots, 200$, foram obtidos por:

$$t_{1l} = x_{1l} + \{1 - I(z_{1l} > z_{2l})\} \{(\lambda_1(V_l))^{-1} A^{-1}(u_l^{1/(1+\gamma_l)} A(\lambda_1(V_l) y_{1l})) - x_{1l}\}.$$

e

$$t_{2l} = y_{1l} + \{1 - I(z_{1l} > z_{2l})\} \{(\lambda_2(V_l))^{-1} A^{-1}(u_l^{1/(1+\gamma_l)} A(\lambda_2(V_l) x_{1l})) - y_{1l}\}.$$

onde $x_{1l} = \min(z_{1l}, z_{3l})$, $y_{1l} = \min(z_{2l}, z_{3l})$, $A^{-1}(x) = -\ln(1-x)$ e $I(z_{1l} > z_{2l}) = \begin{cases} 1 & \text{se } z_{1l} > z_{2l} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$, e a seguir tomou-se o mínimo de cada par de tempos, ou seja,

$$t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}), \quad l=1, 2, \dots, 200.$$

O tempo para o término do teste foi fixado em 15000 horas e assim t_l foi classificado como tempo de falha ou de censura por:

- Se $t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}) \leq 15000$ então $t_l = t_l$;
- Se $t_l = \min(t_{1l}, t_{2l}) > 15000$ então $t_l = 15000$.

A segunda coluna da tabela, denotada por "stress", contém os níveis de temperatura aplicados. A terceira coluna da tabela denotada por "causa", contém as causas de falha com valor "0" indicando que o valor do tempo observado corresponde a uma censura.

Como resultado dessa geração obtiveram-se 195 falhas e 5 censuras. A tabela 5.17 abaixo apresenta um sumário com o número de observações censuradas e não censuradas para cada causa de falha em cada um dos níveis do stress.

Tabela 5.17: Sumário do Número de Observações Censuradas e Não Censuradas

nível	causa	falhas	censuras	%censuras
190	1	33	5	13.16
	2	12	5	29.41
220	1	35	0	0
	2	15	0	0
240	1	37	0	0
	2	13	0	0
260	1	35	0	0
	2	15	0	0

OBS: Resultados obtidos pela PROC LIFETEST do SAS programa ACBVE2.SAS (Apêndice E)

Resultando em um número total de falhas e de censuras para cada causa dado por:

Tabela 5.18: Número de Falhas de Cada Causa

causa	falhas	censuras	%censuras
1	140	5	3.45
2	055	5	8.33

O baixo percentual de censuras em cada causa se deve ao fato de que tempos de falha por uma determinada causa não são considerados tempos de censura para as demais causas, uma vez que tal procedimento resultaria num mecanismo de censura dependente. Tal dependência é indesejada para a estimação de parâmetros por máxima

verossimilhança, já que este pressupõe um mecanismo de censura independente.

Wada e Sen (1993) derivaram um estimador para θ_i , $i= 1, 2$, que pode ser interpretado como a proporção de falhas da causa i com relação ao total de falhas. Utilizando essa interpretação, pode-se verificar a validade da suposição de independência de θ_i , $i= 1, 2$, do stress V , observando se a proporção estimada de falhas da causa i em cada nível do stress é aproximadamente constante. Assim para essa aplicação obtiveram-se os seguintes resultados para cada causa:

Tabela 5.19: Proporção de Falhas da Causa i , $i= 1, 2$, em Stress V_j , $j= 1, 2, 3, 4$

stress	% causa 1	% causa 2
190	73	27
220	70	30
240	74	26
260	70	30

Pode-se observar que as proporções estimadas de falha são aproximadamente constantes nos diferentes níveis de temperatura, logo existem indicativas favoráveis à adequação da suposição de independência de θ_i , $i= 1, 2$ com relação ao stress.

5.4.2 - Procedimentos Gráficos

Um conjunto de procedimentos gráficos que auxilia na escolha da família de modelos exponencial bivariada de Sarkar, dentre as diversas famílias de modelos dependentes existente, utiliza o fato que no nível j do stress tanto $T= \min(T_1, T_2)$ quanto $(T| I)$, possuem distribuição $\exp(\theta_{3j})$ (propriedade P2 e resultado (4.3.5) do capítulo 4, respectivamente). Então para cada nível j do stress, $j= 1, 2, 3, 4$, os gráficos $-\ln(\hat{S}_T(t| V_j)) \times t$ e $-\ln(\hat{S}_{T|I}(t| i, V_j)) \times t| i$, devem ser grosseiramente lineares passando pela origem e similares entre si. Deve-se enfatizar no entanto, que esses procedimentos gráficos não são suficientes para concluir que os tempos observados sejam provenientes do modelo exponencial bivariado de Sarkar, mas somente que existem indicativas de que

tal modelo tenha originado os dados, uma vez que outras famílias de modelos dependentes podem também possuir as propriedades acima citadas. Assim, para essa aplicação os gráficos obtidos encontram-se na figura 5.14a, 5.14b e 5.14c abaixo:

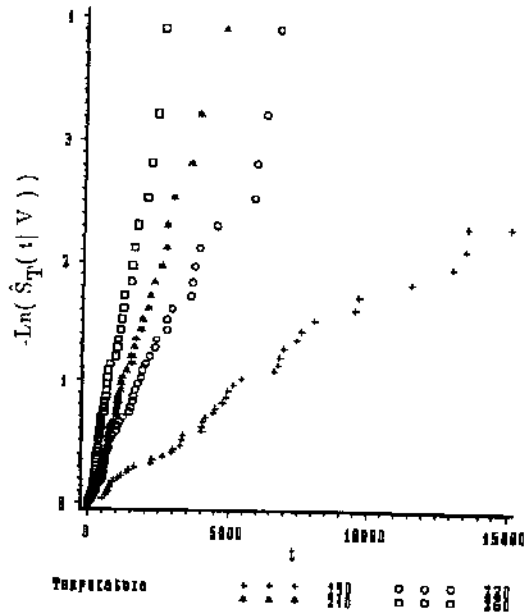


FIGURA 5.14a: Gráfico do $-\text{Ln}(\hat{S}_T(t|V)) \times t$

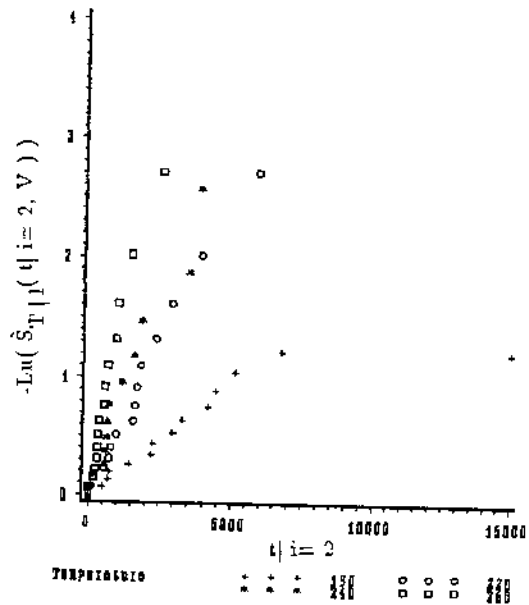
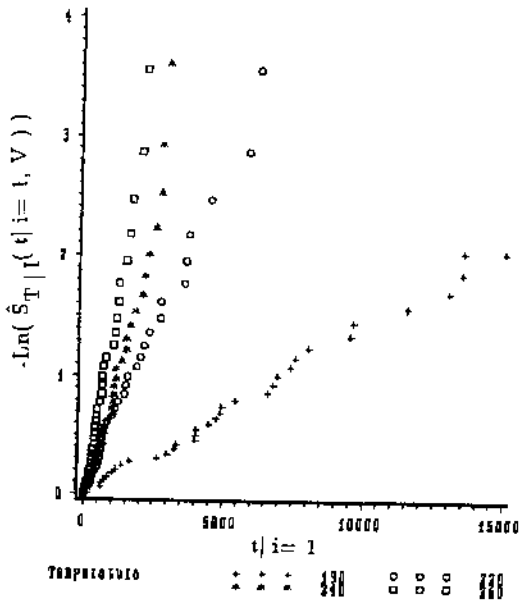


FIGURA 5.14b: Gráfico do $-\text{Ln}(\hat{S}_{T|I}(t|i=1, V)) \times t|i=1$

FIGURA 5.14c: Gráfico do $-\text{Ln}(\hat{S}_{T|J}(t|i=2, V)) \times t|i=2$

Através da análise visual dos gráficos em cada nível do stress verifica-se que, os pontos situam-se aproximadamente em torno de retas passando pela origem e ainda que as diferentes figuras comparativamente são muito similares entre si. Assim, pode-se dizer que existem indicativas do possível ajuste do modelo exponencial bivariado de Sarkar.

Pode-se ainda, avaliar a relação stress-vida Arrhenius para o parâmetro θ_3 através do gráfico $\text{Ln}(\hat{t}_{P_j}) \times g_1(V_j) = -1000/V_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, o qual deve ser aproximadamente linear se a relação for adequada. A estimativa de t_{P_j} é obtida a partir da estimativa P.L. de Kaplan-Meier da sobrevivência, calculada para cada um dos níveis do stress. Para essa aplicação foram estimados os 50-ésimos percentis em cada nível da temperatura. Estes encontram-se sumarizados na tabela D.6 (apêndice D). Na figura 5.15 abaixo encontra-se o gráfico resultante dessa aplicação:

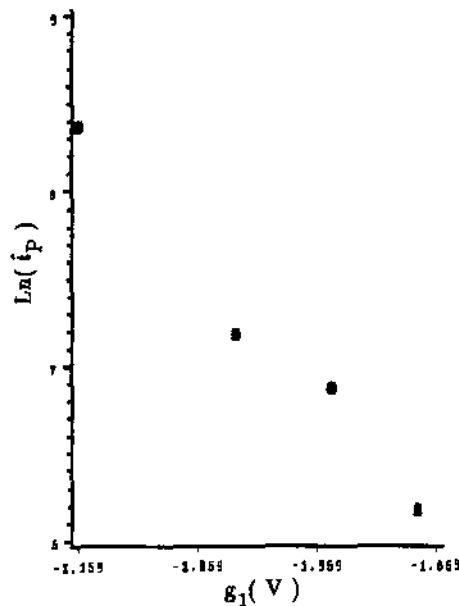


FIGURA 5.15: Gráfico do $\text{Ln}(\hat{t}_P) \times g_1(V) = -1000/V$

A figura 5.15 sugere que a relação Arrhenius para o parâmetro θ_3 é adequada. As estimativas não-paramétricas utilizadas nessa seção foram obtidas pela PROC LIFETEST do SAS no programa ACBVE2.SAS listado no apêndice E.

5.4.3 - Estimação de Parâmetros

As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo reparametrizado e seus desvios padrão, obtidos pelos procedimentos de máxima verossimilhança descritos no capítulo 4, encontram-se na tabela 5.20 a seguir:

Tabela 5.20: Estimativas dos Parâmetros e D.P.

parâmetro	estimativa	D.P.
θ_1	0.7179487	0.032225
θ_2	0.2820513	0.032225
β_0	7.1149777	1.353596
β_1	7.3104827	0.676264

Com a seguinte matriz de variância-covariância estimada:

$$\hat{\Sigma}_{(\theta_i, \beta)} = \begin{bmatrix} 0.001039 & 0 & 0 \\ 0 & 1.832223 & 0.914106 \\ 0 & 0.914106 & 0.457333 \end{bmatrix}, i = 1, 2.$$

Esses resultados foram obtidos pelo programa ACBVE3.SAS (Apêndice E).

5.4.4 - Teste de Hipóteses para Comparação das Sobrevivências Marginais

O teste da hipótese de igualdade das distribuições de sobrevivência marginais da distribuição reparametrizada,

$$H_0: G_1(t|V) = G_2(t|V) \times H_a: G_1(t|V) \neq G_2(t|V),$$

equivale ao teste das hipóteses:

$$H_0: \theta_1 = \frac{1}{2} \times H_a: \theta_1 \neq \frac{1}{2}.$$

Os resultados obtidos através das estatísticas de Rao (Q_R), de Wald (W) e de Wilks (Q_W) são apresentados na tabela 5.21.

Tabela 5.21: Resultados do Teste de Hipóteses

estatística	valor	g.l.	p-valor
Q_R	37.05	1	0.0000
W	37.05	1	0.0000
Q_W	38.32	1	0.0000

Pode-se observar que esses resultados são bastante próximos entre si e são concordantes uma vez que todos rejeitam fortemente a hipótese de igualdade entre as distribuições de sobrevivência para as duas causas com $p\text{-valor} < 0.0001$.

5.4.5 - Estimação de Funções no Stress Usual

a) Estimação do Risco, da Sobrevivência Marginal e de Percentis para Cada Causa

Através dos procedimentos descritos no capítulo 4, foram estimadas as funções risco em (4.5.11) e as sobrevivências marginais G_i em (4.5.17), para cada uma das causas de falha em uma temperatura de uso normal de 180 graus Celsius. As figuras 5.16a e 5.16b demonstram os comportamentos dessas curvas paramétricas estimadas:

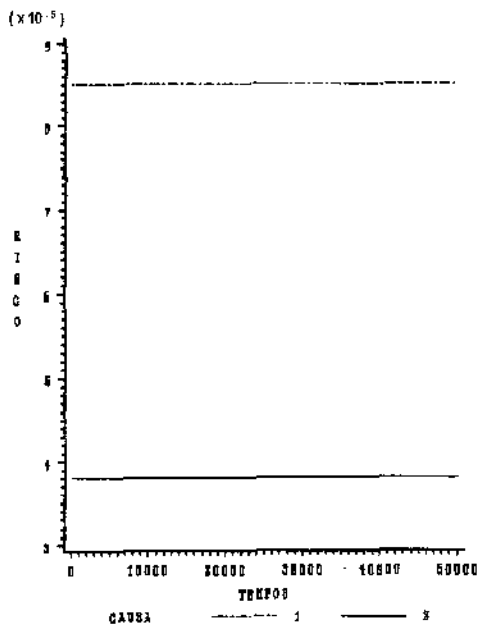


FIGURA 5.16a: Riscos Estimados no Stress de 180 graus Celsius.

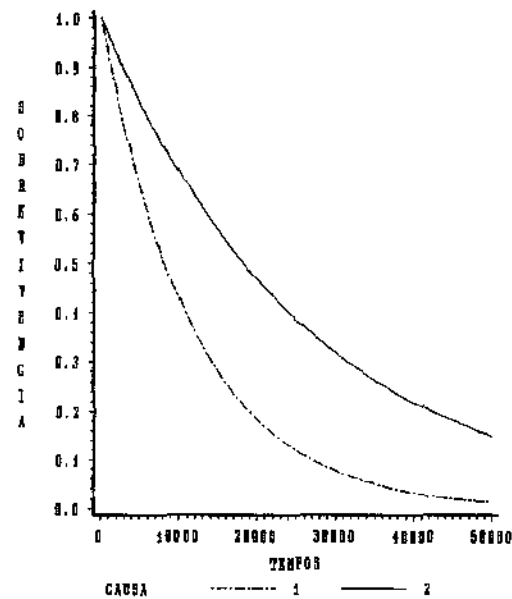


FIGURA 5.16b: Sobrevivências Marginais Estimadas no Stress de 180 graus Celsius.

Verifica-se que a curva de sobrevivência marginal estimada para a causa 1 é inferior á curva de sobrevivência para a causa 2. De acordo com o resultado do teste de hipótese realizado na seção anterior estas são estatisticamente diferentes.

Além das estimativas pontuais do risco e da sobrevivência pode-se calcular seus respectivos intervalos de confiança assintóticos definidos, respectivamente, em (4.5.12) e (4.5.18). Assim, para ilustração as estimativas obtidas para o tempo $t = 7000$ horas e temperatura de 180 graus Celsius foram:

Tabela 5.22: Estimativas e I.C. de 95% dos Riscos e Sobrevivências em 7000 horas e temperatura de 180 graus Celsius

causa	$\tilde{\lambda}_i$	I.C.	\tilde{G}_i	I.C.
1	0.0000859	(0.0000664, 0.0001142)	0.5480147	(0.4497197, 0.6281192)
2	0.0000336	(0.0000248, 0.0000472)	0.7905830	(0.7187165, 0.8405925)

Percentis de interesse para cada causa podem ser estimados através dos gráficos das sobrevivências na figura 5.16b acima, ou ainda pela relação (4.5.25) com intervalo de confiança definido em (4.5.26). Supondo que se tenha interesse no tempo mediano para cada causa no stress de 180 graus Celsius, obtiveram-se graficamente estimativas aproximadas de 8000 e 18500 horas para as causas 1 e 2, respectivamente, e pela relação:

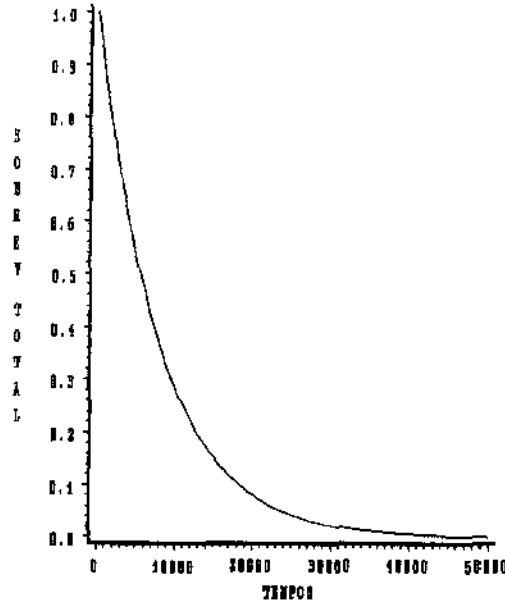
Tabela 5.23: Estimativas e I.C. de 95% para as Medianas sob a temperatura normal de 180 graus Celsius

causa	\hat{t}_{iP}	I.C.
1	7852.915	(06071.64, 10433.91)
2	19879.211	(14690.29, 27941.70)

b) Estimação da Sobrevivência Total

Pode também ser de interesse estimar a sobrevivência total de um sistema bem como algum percentil dessa distribuição em um stress de uso normal. Sendo assim,

a sobrevivência total estimada através de (4.5.19) para o dispositivo em estudo na temperatura de 180 graus Celsius, representada na figura 5.17 a seguir, foi:



**FIGURA 5.17: Sobrevivência Total Estimada
no Stress de 180 graus Celsius.**

Da figura acima observa-se que o tempo correspondente a uma sobrevivência total de 0.5 é de aproximadamente 5500 horas, resultando em uma estimativa aproximada do tempo mediano de vida de tal dispositivo sob a temperatura de 180 graus Celsius. Este percentil, calculado através de (4.5.21), resultou em 5643.67 horas com um intervalo de aproximadamente 95% de confiança, definido em (4.5.23), de (4404.37, 7414.05).

Analogamente à seção anterior, pode-se associar a cada estimativa pontual da sobrevivência seu respectivo intervalo de confiança aproximado (4.5.20). No tempo $t=7000$ horas, por exemplo, a sobrevivência total na temperatura de 180 graus Celsius foi estimada em 0.427804, com um intervalo de aproximadamente 95% de confiança de (0.332326, 0.5197343).

Todas as estimativas e intervalos de confiança foram obtidos pelo programa $ACBVE3.SAS$.

5.4.6 - Estimação do Risco e Sobrevivência Marginais Supondo Independência das Causas de Falha

Ainda, para o conjunto de dados dessa aplicação foi ajustado um modelo exponencial-Arrhenius independente para cada causa de falha com o objetivo de comparar as curvas de risco e de sobrevivência estimadas sob a suposição de independência e as estimadas utilizando o modelo reparametrizado, com relação à curva de sobrevivência marginal S_i do modelo original.

As estimativas dos coeficientes da regressão obtidas sob a suposição de independência são tabeladas abaixo:

Tabela 5.24: Estimativas de (β_{i0}, β_{i1}) , $i= 1, 2$ e D.P. sob a Suposição Independência das Causas de Falha

causa	$\hat{\beta}_{i0}$	D.P.	$\hat{\beta}_{i1}$	D.P.
1	6.6052647	1.595204	7.2212726	0.796570
2	6.3061448	2.558908	7.5391849	1.280092

OBS: Resultados obtidos pela PROC LIFEREG do SAS.

com as seguintes matrizes de variância-covariância estimadas:

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} 2.544677 & 1.268907 \\ 1.268907 & 0.634523 \end{bmatrix} \text{ e } \hat{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} 6.548009 & 3.271086 \\ 3.271086 & 1.638635 \end{bmatrix}$$

Assim, em um stress usual $V_u = 180$ graus Celsius, as curvas de risco e de sobrevivência foram calculadas através das seguinte relações, para $i= 1, 2$:

$$\hat{S}'_i(t | V_u) = \exp\left(-\hat{\lambda}'_i(t | V_u) t \exp(-\sigma_{iu}^2 / 2)\right),$$

e

$$\tilde{\lambda}_i(t | V_u) = \hat{\lambda}'_i(t | V_u) \exp\left[-\frac{\sigma_{iu}^2 t}{2}\right],$$

onde $\hat{\lambda}'_i(t | V_u) = \exp(\hat{\beta}_{i0} + \hat{\beta}_{i1} g_1(V_u))$, $g_1(V_u) = -1000/V_u$ e $\sigma_{iu}^2 = (1, g_1(V_u)) \hat{\Sigma}_i (1, g_1(V_u))'$. Estas podem ser graficamente visualizadas pelas figuras 5.18a e 5.18b a seguir:

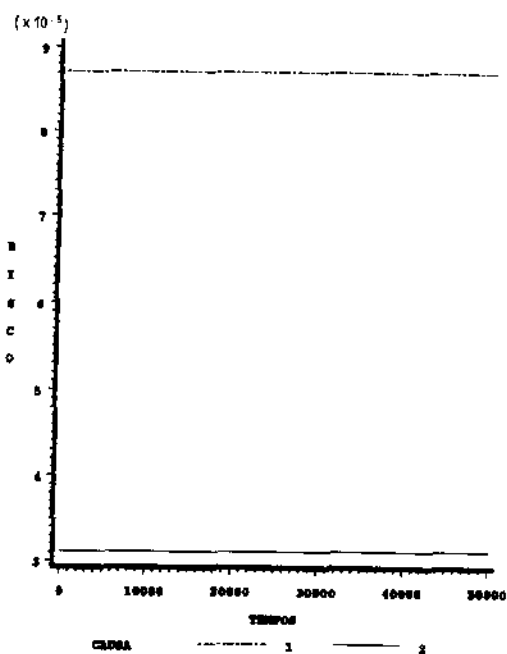


FIGURA 5.18a: Riscos Estimados no Stress de 180 graus Celsius.

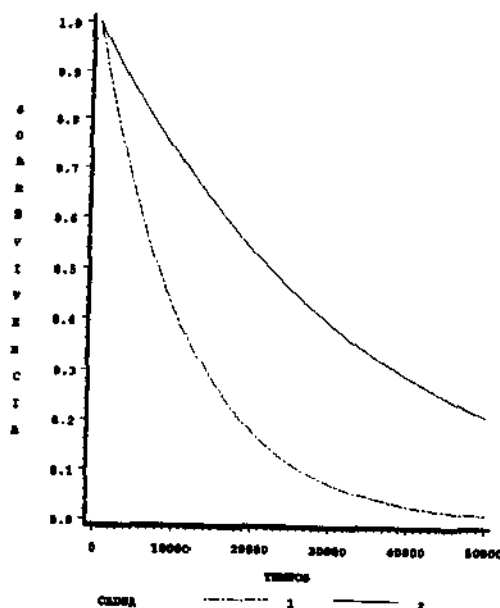


FIGURA 5.18b: Sobrevivências Marginais Estimadas no Stress de 180 graus Celsius.

Os respectivos intervalos de aproximadamente 95% de confiança para $\hat{\lambda}'_i(t | V_u)$ e $\hat{S}'_i(t | V_u)$, $i=1, 2$, obtidos de:

$$\left[\hat{\lambda}'_i(t | V_u) \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^2 / 2); \hat{\lambda}'_i(t | V_u) \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^2 / 2) \right],$$

e

$$\left[\exp(-\hat{\lambda}'_i(t | V_u) t) \exp(-z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^2 / 2); \exp(-\hat{\lambda}'_i(t | V_u) t) \exp(z_{1-\alpha/2} \sigma_{iu}^2 / 2) \right],$$

para o tempo $t=7000$ horas, foram:

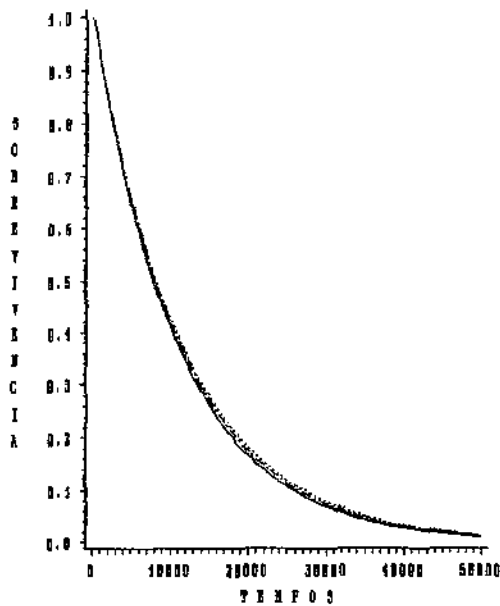
Tabela 5.25: Estimativas e I.C. de 95% dos Riscos e Sobrevivências em 7000 horas e temperatura de 180 graus Celsius

causa	$\hat{\lambda}'_i$	I.C.	\hat{S}'_i	I.C.
1	0.0000872	(0.0000858, 0.0000917)	0.5431195	(0.5261188, 0.548563)
2	0.0000312	(0.0000298, 0.0000356)	0.8039923	(0.7791583, 0.811507)

5.4.7 - Comparação entre \tilde{G}_i e \tilde{S}'_i

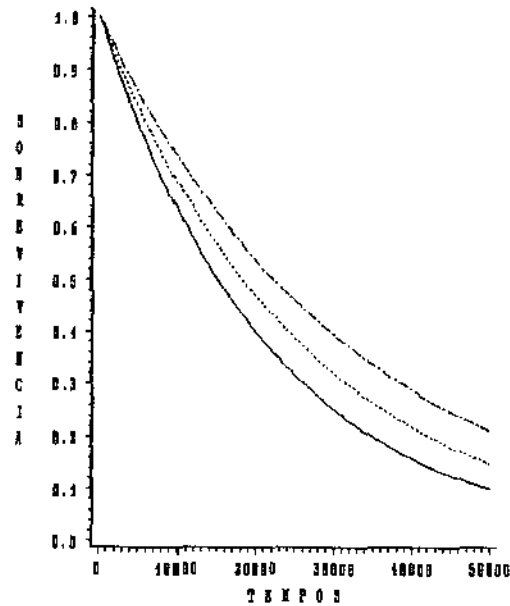
A comparação entre os modelos dependente e independente, será restrita somente à comparação das estimativas das funções de risco e de sobrevivência associada à causa i obtida usando Sarkar ($\hat{\lambda}_i$ e \tilde{G}_i) e à marginal estimada usando independência (\tilde{S}'_i), devido à impossibilidade de estimação da sobrevivência marginal do modelo original de Sarkar.

As figuras 5.19a e 5.19b abaixo apresentam, respectivamente, as curvas de sobrevivência estimadas para cada uma das causas no stress usual de 180 graus Celsius:



Sobrevivência — S_1 \tilde{G}_1 - - - \tilde{S}'_1

FIGURA 5.19a: Sobrevivências Marginais no Stress de 180 graus Celsius, causa 1.



Sobrevivência — S_2 \tilde{G}_2 - - - \tilde{S}'_2

FIGURA 5.19b: Sobrevivências Marginais no Stress de 180 graus Celsius, causa 2.

Observa-se da figura 5.19a (causa 1), que tanto \tilde{G}_1 quanto \tilde{S}'_1 encontram-se muito próximas à sobrevivência marginal verdadeira do modelo original, ou seja, estimam bem S_1 . Da figura 5.19b (causa 2), no entanto, é possível observar que embora a sobrevivência marginal estimada por \tilde{G}_2 seja ligeiramente superior a S_2 , esta ainda encontra-se mais próxima a S_2 do que \tilde{S}'_2 . Note-se que a proximidade da curva estimada sob independência à verdadeira decorre do fato de que o valor verdadeiro do parâmetro

de dependência λ_{12} , nesse stress de 180 graus Celsius, é relativamente pequeno dado por 0.0000107.

Ainda, para a comparação dos intervalos de confiança obtidos num tempo $t=7000$ horas e stress 180 graus Celsius, foram calculados os verdadeiros valores das funções risco e de sobrevivência que encontram-se a seguir:

Tabela 5.26: Verdadeiros Riscos e Sobrevivências Marginais em 7000 horas e temperatura de 180 graus Celsius

causa	λ_i	S_i
1	0.0000896	0.534085
2	0.0000461	0.723981

Das tabelas 5.22 e 5.25 pode-se verificar que apesar dos intervalos calculados usando Sarkar serem mais amplos do que os calculados sob independência, verifica-se da tabela acima que os intervalos obtidos para a causa 2 usando independência não contêm os verdadeiros valores das funções de risco e de sobrevivência.

Pode-se concluir então, para essa aplicação, que o uso de \hat{G}_i como estimador da sobrevivência marginal S_i resulta em uma estimativa mais razoável de S_i do que \hat{S}'_i , $i=1, 2$.

CONCLUSÕES

Nesta dissertação foi considerada a análise de experimentos de testes acelerados em problemas de riscos competitivos. Tais testes são realizados submetendo as unidades experimentais a condições mais severas do que as de uso normal para a redução do tempo de teste e custos. Nestes experimentos, além do tempo até a falha, tem-se como resposta de interesse a causa de falha.

Uma variedade de modelos para experimentos envolvendo riscos competitivos independentes foram investigados na literatura. No entanto, pouco se encontra a respeito de modelos para testes acelerados envolvendo riscos competitivos dependentes. Assim, um dos propósitos desta dissertação foi fazer uma revisão do artigo de Klein e Basu (1981) que, assumindo independência das causas de falha, considerou um modelo paramétrico Weibull independente para cada causa.

Outros propósitos foram investigar os modelos, Weibull bivariado estudado por Moeschberger (1974) e exponencial bivariado de Sarkar, em testes acelerados quando se considera a existência de duas causas de falha dependentes. Estes modelos foram escolhidos por serem, respectivamente, úteis em situações onde falhas por causas simultâneas podem ocorrer e onde a ocorrência de tal evento é rara. O modelo Weibull bivariado é útil também para situações onde os riscos marginais não são conjuntamente crescentes, decrescentes ou constantes. Ainda, o desenvolvimento de procedimentos

para a estimação dos parâmetros de tais modelos, possibilitando a estimação de funções no stress de uso normal e a realização de aplicações numéricas ilustrativas dos mesmos, foram propósitos desta dissertação.

Através da primeira aplicação numérica, onde a independência das causas foi suposta, pôde-se verificar que o modelo Weibull-Arrhenius ajustou-se satisfatoriamente ao conjunto de dados analisado. Isto evidencia que tal modelo pode ser útil na análise de dados com características similares aos desta aplicação.

Observou-se das duas últimas aplicações que, se existe alguma razão para acreditar que duas causas de falha são dependentes e se os dados satisfazem determinadas propriedades, verificadas através de procedimentos gráficos, fornecendo indicativas de que as distribuições de vida pertencem a uma particular família paramétrica, Weibull bivariada ou exponencial bivariada de Sarkar, então os procedimentos de estimação desenvolvidos nesta dissertação tornam-se aplicáveis.

Finalmente, deve-se enfatizar que apesar dos procedimentos gráficos auxiliarem na escolha de uma particular família paramétrica de modelos, tal escolha depende, em grande parte, do conhecimento do pesquisador acerca do mecanismo de falha. Assim, quando se acredita que as causas são dependentes e observam-se falhas por causas simultâneas ou ainda que as taxas de falha marginais não são ambas crescentes, constantes ou decrescentes, então algum modelo complexo tal como o Weibull bivariado pode ser empregado. Por outro lado, se existirem fortes convicções de que um modelo mais simples descreveria o mecanismo de falha razoavelmente bem, tal como o exponencial bivariado de Sarkar ou mesmo o Weibull independente, então não há motivos para utilizar os mais complexos.

APÊNDICES

APÊNDICE A

MÉTODO DELTA

Seja o vetor $\mathbf{T}_n' = (T_{n1}, T_{n2}, \dots, T_{nk})$ com distribuição assintótica normal multivariada com média $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ e matriz de covariância Σ_n . Suponha que a função $g(t_1, t_2, \dots, t_k)$ tenha diferencial não nulo em θ . Então, a distribuição assintótica de $g(\mathbf{T}_n)$ é obtida pela seguinte expansão em série de Taylor:

$$g(\mathbf{T}_n) = g(\theta) + (\mathbf{T}_n - \theta)' \mathbf{d} + \epsilon_n \|\mathbf{T}_n - \theta\|, \quad (\text{a.1})$$

onde $\mathbf{d}' = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ com $d_i = \frac{\partial g}{\partial t_i} |_{\mathbf{t} = \theta}$, $i = 1, 2, \dots, k$, e $\epsilon_n \xrightarrow{P} 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Esta expansão indica que $g(\mathbf{T}_n) - g(\theta)$ comporta-se como uma função linear da variada aproximadamente normal $(\mathbf{T}_n - \theta)$ para n grande. Assim, para n suficientemente grande tem-se:

$$g(\mathbf{T}_n) - g(\theta) \cong (\mathbf{T}_n - \theta)' \mathbf{d} \quad (\text{a.2})$$

e

$$\text{Var}[g(\mathbf{T}_n) - g(\theta)] = \mathbf{d}' \Sigma_n \mathbf{d}. \quad (\text{a.3})$$

Dessa forma, $g(\mathbf{T}_n)$ é assintoticamente normal com média $g(\theta)$ e variância $\mathbf{d}' \sum_n \mathbf{d}$. Esse método de usar diferenciais para obter a variância assintótica de $g(\mathbf{T}_n)$ é chamado **Método Delta**.

OBS.: Um caso especial importante do resultado acima é obtido para $k=1$: Se T_n tem distribuição assintótica normal com média θ e variância σ_n^2 , então se $g(t)$ possui primeira derivada não-nula em θ , $g'(t)$, para um n suficientemente grande tem-se que:

$$g(T_n) \underset{a}{\sim} N(g(\theta), (g'(\theta))^2 \sigma_n^2). \quad (\text{a.4})$$

APÊNDICE B

PROCEDIMENTO PARA ESTIMAÇÃO NÃO-PARAMÉTRICA DE P_i^* e π_i^*

Suponha que as observações são tomadas de uma amostra aleatória de n unidades. Quando não existem censuras, estimativas de P_i^* e π_i^* , $i= 1, 2, \dots, k$, são respectivamente obtidas por:

$$\hat{P}_i^*(t) = \frac{\text{número de observações com } T \geq t \text{ e } I=i}{n} \quad (\text{b.1})$$

e

$$\hat{\pi}_i^* = \hat{P}_i^*(0). \quad (\text{b.2})$$

Quando existem censuras, são desenvolvidas as estimativas P. L. de $G_i(t)$ e destas as estimativas de $P_i^*(t)$ e π_i^* , $i= 1, 2, \dots, k$. Assim, as estimativas P. L. de $G_i(t)$ são expressas por:

$$\hat{G}_i(t) = \prod_{\substack{j: t_j < t \\ I_j = i}} \frac{n_j - d_{ij}}{n_j}, \quad i= 1, 2, \dots, k, \quad (\text{b.3})$$

onde n_j é o número de unidades em risco imediatamente antes de t_j ,
 d_{ij} é o número de falhas da causa i em t_j .

Desde que $G_i(t) = \exp(-H_i(t))$, uma estimativa alternativa de $G_i(t)$ pode ser obtida por:

$$\tilde{G}_i(t) = \exp[-\tilde{H}_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{b.4}$$

onde

$$\tilde{H}_i(t) = \sum_{\substack{j: t_j < t \\ I_j = i}} \frac{d_{ij}}{n_j}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{b.5}$$

é a função risco acumulada empírica. Uma vez que, $P_i^*(t) = \int_t^\infty \lambda_i(u) S_T(u) du$, uma estimativa razoável de $P_i^*(t)$ é dada por:

$$\hat{P}_i^*(t) = \sum_{\substack{j: t_j \geq t \\ I_j = i}} \frac{d_{ij}}{n_j} \hat{S}_T(t_j), \quad i = 1, 2, \dots, k, \tag{b.6}$$

onde $\hat{S}_T(t_j)$ é a estimativa da função de sobrevivência de T em t_j , obtida por:

$$\hat{S}_T(t_j) = \hat{G}_1(t_j) \dots \hat{G}_k(t_j), \tag{b.7}$$

ou alternativamente, pela estimativa P. L. ignorando causa de falha. Ainda, como $S(t) = \exp[-H(t)]$, a estimativa pode ser obtida pela função risco empírica.

As quantidades π_i^* , $i = 1, 2, \dots, k$, podem ser estimadas como em (b.2). Pode-se observar que quando não existem censuras: $\sum_{i=1}^k \hat{\pi}_i^* = 1$. Como em geral elas existem, para a obtenção de estimativas que somam um é usual estimar π_i^* utilizando:

$$\tilde{\pi}_i^* = \frac{\hat{\pi}_i^*}{\sum_{l=1}^k \hat{\pi}_l^*}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{b.8}$$

APÊNDICE C

CÁLCULO DA MATRIZ DE INFORMAÇÃO DE FISHER PARA O MODELO WEIBULL INDEPENDENTE

a) Censura Tipo I:

Denotando:

- n_j : # de ítems testados sob o nível V_j do stress, $j=1, 2, \dots, s$;
- o l -ésimo item em teste no nível V_j é testado até falhar ou até um tempo fixo τ_{jl} , que pode variar de item para item, permitindo entradas múltiplas;
- R_j : # de falhas no nível V_j ;
- R_{ij} : # de ítems que falharam devido a causa i no nível V_j ;
- X_{ijl} : tempo de falha dos R_{ij} ítems cujas falhas ocorreram devido a causa i no nível V_j , $l=1, 2, \dots, R_{ij}$;
- $Y_{jl} = \min(T_{1jl}, \dots, T_{kjl})$: tempo de falha dos R_j ítems no nível V_j , sem levar em conta a causa de falha, $l=1, 2, \dots, R_j$;
- τ'_{jl} : tempo de censura do item removido do teste, $l=1, 2, \dots, n_j - R_j$.

tem-se que a verossimilhança total pode ser escrita como em (3.2.2), com:

$$T_j(\delta_i) = \sum_{r=1}^{n_j} t_{jr} \delta_i = \sum_{l=1}^{R_j} Y_{jl} \delta_i + \sum_{l=1}^{n_j-R_j} \tau_{jl} \delta_i, \quad i=1, 2, \dots, k \quad j=1, 2, \dots, s. \quad (c.1)$$

Quando os n_j ítems em V_j entram ao mesmo tempo no estudo, ou seja, têm tempo de censura comum τ_j , então

$$T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{R_j} Y_{jl} \delta_i + (n_j - R_j) \tau_j \delta_i,$$

para $j=1, 2, \dots, s$. A matriz de informação é obtida calculando-se:

$$\begin{aligned} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} \ln L_i\right) &= E\left(\sum_{j=1}^s \left[\frac{R_{ij}}{\delta_i^2} + \alpha_{ij} \frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i) \right]\right) \\ &= \sum_{j=1}^s \left[\frac{E(R_{ij})}{\delta_i^2} + \alpha_{ij} E\left(\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i)\right) \right], \end{aligned} \quad (c.2)$$

$$\begin{aligned} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \beta_{iu} \partial \beta_{iw}} \ln L_i\right) &= E\left(\sum_{j=1}^s g_{iu}(V_j) g_{iw}(V_j) \alpha_{ij} T_j(\delta_i)\right) = \\ &= \sum_{j=1}^s g_{iu}(V_j) g_{iw}(V_j) \alpha_{ij} E(T_j(\delta_i)), \end{aligned} \quad (c.3)$$

e

$$\begin{aligned} E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \delta_i \partial \beta_{iu}} \ln L_i\right) &= E\left(\sum_{j=1}^s \frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) g_{iu}(V_j) \alpha_{ij}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^s E\left(\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i)\right) g_{iu}(V_j) \alpha_{ij}. \end{aligned} \quad (c.4)$$

Para tanto é conveniente definir:

$$C_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_{jl} \leq \tau_{jl} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}, \quad j=1, 2, \dots, s \quad l=1, 2, \dots, n_j, \quad (c.5)$$

e $T_j(\delta_i)$ dada em (c.1), é reescrita como:

$$T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{n_j} C_{jl} Y_{jl} \delta_i + \sum_{l=1}^{n_j} (1 - C_{jl}) \tau_{jl} \delta_i.$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{n_j} C_{jl} Y_{jl}^{\delta_i} \ln Y_{jl} + \sum_{l=1}^{n_j} (1-C_{jl}) \tau_{jl}^{\delta_i} \ln \tau_{jl} \quad (c.6)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{n_j} C_{jl} Y_{jl}^{\delta_i} (\ln Y_{jl})^2 + \sum_{l=1}^{n_j} (1-C_{jl}) \tau_{jl}^{\delta_i} (\ln \tau_{jl})^2. \quad (c.7)$$

Pode ser demonstrado que a função de densidade de Y_{jl} é escrita por:

$$f_{Y_{jl}}(y) = \delta_i \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y^{\delta_i-1} \right) \exp\left(-\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y^{\delta_i}\right), \quad y \geq 0.$$

Demonstração:

De fato pois a função de distribuição de Y_{jl} é expressa por:

$$\begin{aligned} F_{Y_{jl}}(y) &= P(Y_{jl} \leq y) = P(\min(T_{1jl}, \dots, T_{kjl}) \leq y) = \langle (T_{1jl}, \dots, T_{kjl}) \text{ são independentes} \rangle = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^k P(T_{ijl} > y) = 1 - \prod_{i=1}^k \exp\left[-\alpha_{ij} y^{\delta_i}\right] = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y^{\delta_i}\right), \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

e portanto a função de densidade é escrita por:

$$f_{Y_{jl}}(y) = \delta_i \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y^{\delta_i-1} \right) \exp\left(-\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y^{\delta_i}\right), \quad y \geq 0. \quad \square$$

Além disso, é conveniente definir:

$$\begin{aligned} \eta_{jl} &= P(C_{jl} = 1) = P(Y_{jl} \leq \tau_{jl}) = P(\min(T_{1jl}, \dots, T_{kjl}) \leq \tau_{jl}) = \\ &= 1 - P(\min(T_{1jl}, \dots, T_{kjl}) > \tau_{jl}) = \langle (T_{1jl}, \dots, T_{kjl}) \text{ são independentes} \rangle = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^k S_i(\tau_{jl} | V_j) = 1 - \prod_{i=1}^k \exp\left[-\alpha_{ij} \tau_{jl}^{\delta_i}\right] = \\ &= 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \tau_{jl}^{\delta_i}\right]. \end{aligned} \quad (c.8)$$

A função de densidade conjunta de Y_{jl} e C_{jl} é dada por:

$$f(y_{jl}, C_{jl}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k \delta_i \alpha_{ij} y_{jl}^{\delta_i-1} \exp\left[-\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{jl}^{\delta_i}\right], & \text{para } y_{jl} \leq \tau_{jl} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (c.9)$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 E(T_j(\delta_i)) &= E\left(\sum_{l=1}^{n_j} C_{jl} Y_{jl}^{\delta_i} + \sum_{l=1}^{n_j} (1-C_{jl})\tau_{jl}^{\delta_i}\right) = \\
 &= \sum_{l=1}^{n_j} E(C_{jl} Y_{jl}^{\delta_i}) + \sum_{l=1}^{n_j} \tau_{jl}^{\delta_i} - \sum_{l=1}^{n_j} E(C_{jl})\tau_{jl}^{\delta_i} = \\
 &= \sum_{l=1}^{n_j} \int_0^{\tau_{jl}} y_{jl}^{\delta_i} \left(\sum_{m=1}^k \delta_m \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m-1}\right) \exp\left[-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m}\right] dy_{jl} + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{n_j} \tau_{jl}^{\delta_i} - \sum_{l=1}^{n_j} \tau_{jl}^{\delta_i} \left[1 - \exp\left(-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} \tau_{jl}^{\delta_m}\right)\right] = \\
 &= \sum_{l=1}^{n_j} \int_0^{\tau_{jl}} y_{jl}^{\delta_i} \left(\sum_{m=1}^k \delta_m \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m-1}\right) \exp\left[-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m}\right] dy_{jl} + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{n_j} \tau_{jl}^{\delta_i} \exp\left(-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} \tau_{jl}^{\delta_m}\right). \tag{c.10}
 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i)\right) &= E\left(\sum_{l=1}^{n_j} C_{jl} Y_{jl}^{\delta_i} \ln Y_{jl} + \sum_{l=1}^{n_j} (1-C_{jl})\tau_{jl}^{\delta_i} \ln \tau_{jl}\right) = \\
 &= \sum_{l=1}^{n_j} \int_0^{\tau_{jl}} y_{jl}^{\delta_i} \ln y_{jl} \left(\sum_{m=1}^k \delta_m \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m-1}\right) \exp\left[-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m}\right] dy_{jl} + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{n_j} \tau_{jl}^{\delta_i} \ln \tau_{jl} \exp\left(-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} \tau_{jl}^{\delta_m}\right). \tag{c.11}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i)\right) &= E\left(\sum_{l=1}^{n_j} C_{jl} Y_{jl}^{\delta_i} (\ln Y_{jl})^2 + \sum_{l=1}^{n_j} (1-C_{jl})\tau_{jl}^{\delta_i} (\ln \tau_{jl})^2\right) = \\
 &= \sum_{l=1}^{n_j} \int_0^{\tau_{jl}} y_{jl}^{\delta_i} (\ln y_{jl})^2 \left(\sum_{m=1}^k \delta_m \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m-1}\right) \exp\left[-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} y_{jl}^{\delta_m}\right] dy_{jl} + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{n_j} \tau_{jl}^{\delta_i} (\ln \tau_{jl})^2 \exp\left(-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} \tau_{jl}^{\delta_m}\right). \tag{c.12}
 \end{aligned}$$

Para o cálculo de $E(R_{ij})$ é necessário definir:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o } i\text{-ésimo item em } V_j \text{ falha da causa } i \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $P(\delta_{ij} = 1)$ é equivalente a Q_i^* em (2.2.17) e é obtida por:

$$\begin{aligned} P(\delta_{ij} = 1) &= P(C_{jl} = 1, I = i | V_j) = P(Y_{jl} \leq \tau_{jl}, I = i | V_j) = \\ &= P(X_{ijl} \leq \tau_{jl}, X_{ijl} \leq X_{u_{jl}} \text{ p/ } i \neq u | V_j) = \\ &= \int_0^{\tau_{jl}} \left[\int_{x_{ijl}}^{\infty} \dots \int_{x_{ijl}}^{\infty} f(t_{1jl}, \dots, t_{kjl} | V_j) \prod_{r \neq i} dt_{rjl} \right] dt_{ijl} = \\ &= \int_0^{\tau_{jl}} \lambda_i(t_{ijl} | V_j) S_T(t_{ijl} | V_j) dt_{ijl} = \\ &= \int_0^{\tau_{jl}} \delta_i t_{ijl}^{\delta_i - 1} \alpha_{ij} \exp\left(-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} t_{ijl}^{\delta_m}\right) dt_{ijl}. \end{aligned}$$

Como $R_{ij} = \sum_{l=1}^{n_j} \delta_{ijl}$, segue que:

$$E(R_{ij}) = E\left(\sum_{l=1}^{n_j} \delta_{ijl}\right) = \sum_{l=1}^{n_j} E(\delta_{ijl}) = \sum_{l=1}^{n_j} \int_0^{\tau_{jl}} \delta_i t^{\delta_i - 1} \alpha_{ij} \exp\left(-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} t^{\delta_m}\right) dt. \quad (c.13)$$

Todas as integrais das expressões acima devem ser avaliadas numericamente. A matriz de informação de Fisher pode agora ser obtida usando (c.10) a (c.13) para calcular as esperanças em (c.2) a (c.4).

b)Censura Tipo II:

Denotando:

- n_j :# de ítems testados no nível V_j , $j= 1, 2, \dots, s$;
- O teste pára quando um número pré-determinado r_j de sistemas tenham falhado;
- R_{ij} e X_{ijl} : definidos como em a), $l= 1, 2, \dots, R_{ij}$, $i= 1, 2, \dots, k$;
- $Y_{j(l)}$, $l= 1, 2, \dots, r_j$:tempos de falha definidos em a) ordenados.

A verossimilhança total é dada por (3.2.2), com

$$T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{r_j} Y_{j(l)}^{\delta_i} + (n_j - r_j) Y_{j(r_j)}^{\delta_i}, \quad i= 1, 2, \dots, k \quad j= 1, 2, \dots, s. \quad (c.14)$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{r_j} Y_{j(l)}^{\delta_i} \ln Y_{j(l)} + (n_j - r_j) Y_{j(r_j)}^{\delta_i} \ln Y_{j(r_j)}, \quad (c.15)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{r_j} Y_{j(l)}^{\delta_i} (\ln Y_{j(l)})^2 + (n_j - r_j) Y_{j(r_j)}^{\delta_i} (\ln Y_{j(r_j)})^2. \quad (c.16)$$

Pode ser demonstrado que a densidade de $Y_{j(l)}$ é dada por:

$$f_{Y_{j(l)}}(y_{j(l)}) = \frac{n_j!}{(l-1)!(n_j-l)!} \left(\sum_{i=1}^k \delta_i \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i-1} \right) \left[1 - \exp\left(- \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i}\right) \right]^{l-1} * \\ * \exp\left(- (n_j - l + 1) \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i}\right), \quad 0 \leq y_{j(l)} < \infty, \quad l= 1, 2, \dots, n_j.$$

Demonstração:

De fato, pois por definição:

$$f_{Y_{j(l)}}(y_{j(l)}) = l \binom{n_j}{l} \left[F_{Y_{jl}}(y_{j(l)}) \right]^{l-1} \left[1 - F_{Y_{jl}}(y_{j(l)}) \right]^{n_j-l} f_{Y_{jl}}(y_{j(l)}).$$

Então,

$$f_{Y_{j(l)}}(y_{j(l)}) = \frac{n_j!}{(l-1)!(n_j-l)!} \left[1 - \exp\left(- \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i}\right) \right]^{l-1} \left[\exp\left(- \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i}\right) \right]^{n_j-l} * \\ * \left\{ \exp\left(- \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i}\right) \left(\sum_{i=1}^k \delta_i \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i-1} \right) \right\} = \\ = \frac{n_j!}{(l-1)!(n_j-l)!} \left(\sum_{i=1}^k \delta_i \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i-1} \right) \left[1 - \exp\left(- \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i}\right) \right]^{l-1} * \\ * \exp\left(- (n_j - l + 1) \sum_{i=1}^k \alpha_{ij} y_{j(l)}^{\delta_i}\right), \quad 0 \leq y_{j(l)} < \infty. \quad \square$$

Assim, as esperanças de (c.14) a (c.16) são, respectivamente, calculadas por:

$$\begin{aligned} E(T_j(\delta_i)) &= E\left(\sum_{l=1}^{r_j} Y_{j(l)}^{\delta_i} + (n_j - r_j) Y_{j(r_j)}^{\delta_i}\right) = \sum_{l=1}^{r_j} E(Y_{j(l)}^{\delta_i}) + (n_j - r_j) E(Y_{j(r_j)}^{\delta_i}) = \\ &= \sum_{l=1}^{r_j} \int_0^{\infty} y_{j(l)}^{\delta_i} f(y_{j(l)}) dy_{j(l)} + (n_j - r_j) \int_0^{\infty} y_{j(r_j)}^{\delta_i} f(y_{j(r_j)}) dy_{j(r_j)}, \end{aligned} \quad (c.17)$$

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i)\right) &= E\left(\sum_{l=1}^{r_j} Y_{j(l)}^{\delta_i} \ln Y_{j(l)} + (n_j - r_j) Y_{j(r_j)}^{\delta_i} \ln Y_{j(r_j)}\right) = \\ &= \sum_{l=1}^{r_j} \int_0^{\infty} y_{j(l)}^{\delta_i} \ln y_{j(l)} f(y_{j(l)}) dy_{j(l)} + \\ &+ (n_j - r_j) \int_0^{\infty} y_{j(r_j)}^{\delta_i} \ln y_{j(r_j)} f(y_{j(r_j)}) dy_{j(r_j)} \end{aligned} \quad (c.18)$$

e

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i)\right) &= E\left(\sum_{l=1}^{r_j} Y_{j(l)}^{\delta_i} (\ln Y_{j(l)})^2 + (n_j - r_j) Y_{j(r_j)}^{\delta_i} (\ln Y_{j(r_j)})^2\right) = \\ &= \sum_{l=1}^{r_j} \int_0^{\infty} y_{j(l)}^{\delta_i} (\ln y_{j(l)})^2 f(y_{j(l)}) dy_{j(l)} + \\ &+ (n_j - r_j) \int_0^{\infty} y_{j(r_j)}^{\delta_i} (\ln y_{j(r_j)})^2 f(y_{j(r_j)}) dy_{j(r_j)}. \end{aligned} \quad (c.19)$$

Estas integrais devem ser avaliadas numericamente.

Agora com r_j fixo, (R_{1j}, \dots, R_{kj}) tem uma distribuição Multinomial com parâmetros π_{ij} , cujas expressões são equivalentes a (2.2.18) e são dadas por:

$$\pi_{ij} = \int_0^{\infty} \delta_i t^{\delta_i - 1} \alpha_{ij} \exp\left(-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} t^{\delta_m}\right) dt, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

que é interpretado como a proporção de falhas da causa i sob o nível de stress V_j . Então,

$$E(R_{ij}) = r_j \pi_{ij}. \quad (c.20)$$

Assim, a matriz de informação pode ser obtida usando (c.17) a (c.20) para calcular as esperanças de (3.2.5) a (3.2.7).

c) Censura Progressiva:

Denotando:

- n_j : # de itens colocados em teste no nível V_j , $j = 1, 2, \dots, s$;
- τ_{jr} : tempo de censura fixo no nível V_j , $r = 1, 2, \dots, m_j$;
- c_{jr} : # fixo de itens retirados do teste no tempo τ_{jr} ;
- $R_j = n_j - \sum_{r=1}^{m_j} c_{jr}$: # de falhas no nível V_j ;
- No tempo τ_{jm_j} ou um número fixo c_{jm_j} itens são removidos do teste ou o teste termina com um número aleatório C_{jm_j} ;
- Y_{jl} : tempo de falha sem levar em conta a causa de falha, $l = 1, 2, \dots, R_j$;
- R_{ij} , X_{ijl} : são definidos como em a).

A função de verossimilhança é dada por (3.2.2), com

$$T_j(\delta_i) = \sum_{i=1}^{R_j} Y_{jl} \delta_i + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl} \delta_i c_{jl}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (c.21)$$

Por conveniência define-se:

- F_{jl} : # de falhas no intervalo $[\tau_{jl-1}, \tau_{jl})$, $l = 1, 2, \dots, m_j+1$, onde $\tau_{jm_j+1} = \infty$;
- U_{jlp} : tempos de falha dos F_{jl} itens que falharam no intervalo l ,
 $p = 1, 2, \dots, F_{jl}$.

Logo, (c.21) pode ser reescrita como:

$$T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{m_j+1} \sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp} \delta_i + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl} \delta_i c_{jl}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (c.22)$$

Então,

$$\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{m_j+1} \sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp} \delta_i \ln U_{jlp} + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl} \delta_i c_{jl} \ln \tau_{jl} \quad (c.23)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i) = \sum_{l=1}^{m_j+1} \sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp} \delta_i (\ln U_{jlp})^2 + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl} \delta_i c_{jl} (\ln \tau_{jl})^2. \quad (c.24)$$

Para o cálculo das esperanças de (c.22) a (c.24) é necessário utilizar o resultado devido a Cohen (1963) que mostrou que:

$$E(F_{jl}) = \begin{cases} n_j \bar{S}_{jl}, & \text{para } l = 1 \\ \left(n_j - \sum_{p=1}^{l-1} c_{jp} \right) (\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{j,l-1}), & \text{para } l = 2, \dots, m_j+1, \text{ se } c_{jm_j} \text{ é fixo e} \\ & \text{para } l = 2, \dots, m_j: \text{ se } c_{jm_j} \text{ é aleatório.} \end{cases}$$

onde $S_{jl} = S_j(\tau_{jl}) = P(Y_{jl} \geq \tau_{jl}) = \exp\left(-\sum_{i=1}^k \alpha_{ij} \tau_{jl}^{\delta_i}\right)$, $\bar{S}_{jl} = 1 - S_{jl}$ e $\bar{S}_{j0} = 0$. Além disso, define-se:

$$\gamma_{jlp} = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau_{jl-1} \leq U_{jlp} < \tau_{jl} \\ 0, & \text{c. c.,} \end{cases}$$

com $P(\gamma_{jlp} = 1) = P(\tau_{jl-1} \leq U_{jlp} < \tau_{jl}) = P(Y_{jl} < \tau_{jl}) - P(Y_{jl} < \tau_{jl-1}) = \bar{S}_{jl} - \bar{S}_{jl-1}$. A função de densidade de U_{jlp} dado γ_{jlp} é expressa por:

$$f_{U_{jlp} | \gamma_{jlp} = 1}(u | \gamma_{jlp} = 1) = \begin{cases} \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{P(\gamma_{jlp} = 1)}, & \tau_{jl-1} \leq u < \tau_{jl} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{\left(\sum_{m=1}^k \delta_m \alpha_{mj} u^{\delta_m-1}\right) \exp\left[-\sum_{m=1}^k \alpha_{mj} u^{\delta_m}\right]}{\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{jl-1}}, & \tau_{jl-1} \leq u < \tau_{jl} \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i}\right) &= E\left[E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} \mid F_{jl}\right)\right] = E(F_{jl}) E(U_{jlp}^{\delta_i} | \tau_{jl-1} \leq U_{jlp} < \tau_{jl}) = \\ &= E(F_{jl}) \int_{\tau_{jl-1}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} f(u | \gamma_{jlp} = 1) du = \\ &= E(F_{jl}) \int_{\tau_{jl-1}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{jl-1}} du, \quad 1 = 1, 2, \dots, m_j. \end{aligned} \tag{c.25}$$

A integral deve ser avaliada numericamente, com expressões similares para:

$$E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} \ln U_{jlp}\right)$$

e

$$E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} (\ln U_{jlp})^2\right).$$

Usando essas expressões pode-se calcular as esperanças de (c.22) a (c.24) para o caso em que c_{jm_j} é fixo ou aleatório.

Caso 1: c_{jm_j} fixo

$$\begin{aligned}
 E(T_j(\delta_i)) &= \sum_{l=1}^{m_j+1} E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i}\right) + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} = \\
 &= n_j \bar{S}_{j1} \int_0^{\tau_{j1}} u^{\delta_i} \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{\bar{S}_{j1} - \bar{S}_{j0}} du + \\
 &\quad + \sum_{l=2}^{m_j+1} \left\{ \left(n_j - \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{\bar{S}_{jp}} \right) (\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{j{l-1}}) \int_{\tau_{j{l-1}}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{j{l-1}}} du \right\} + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} = \\
 &= n_j \sum_{l=1}^{m_j+1} \int_{\tau_{j{l-1}}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \sum_{l=2}^{m_j+1} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{\bar{S}_{jp}} \int_{\tau_{j{l-1}}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} = \\
 &= n_j \int_0^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \left(\frac{c_{j1}}{\bar{S}_{j1}} \right) \int_{\tau_{j1}}^{\tau_{j2}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \\
 &\quad - \left(\frac{c_{j1}}{\bar{S}_{j1}} + \frac{c_{j2}}{\bar{S}_{j2}} \right) \int_{\tau_{j2}}^{\tau_{j3}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \dots - \\
 &\quad - \left(\frac{c_{j1}}{\bar{S}_{j1}} + \frac{c_{j2}}{\bar{S}_{j2}} + \dots + \frac{c_{jm_j}}{\bar{S}_{jm_j}} \right) \int_{\tau_{jm_j}}^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} = \\
 &= n_j \int_0^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \left(\frac{c_{j1}}{\bar{S}_{j1}} \right) \int_{\tau_{j1}}^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \\
 &\quad - \left(\frac{c_{j2}}{\bar{S}_{j2}} \right) \int_{\tau_{j2}}^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \dots - \left(\frac{c_{jm_j}}{\bar{S}_{jm_j}} \right) \int_{\tau_{jm_j}}^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} = \\
 &= n_j \int_0^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \sum_{l=1}^{m_j} \left(\frac{c_{jl}}{\bar{S}_{jl}} \right) \int_{\tau_{jl}}^{\infty} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl}. \quad (c.26)
 \end{aligned}$$

De forma análoga, pode-se obter as esperanças abaixo:

$$E\left(\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i)\right) = \sum_{l=1}^{m_j+1} E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} \ln U_{jlp}\right) + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} \ln \tau_{jl} =$$

$$\begin{aligned}
 &= n_j \bar{S}_{j1} \int_0^{\tau_{j1}} u^{\delta_i} \ln u \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{\bar{S}_{j1} - \bar{S}_{j0}} du + \\
 &\quad + \sum_{l=2}^{m_j+1} \left\{ \left(n_j - \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{\bar{S}_{jp}} \right) (\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{j{l-1}}) \int_{\tau_{j{l-1}}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} \ln u \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{j{l-1}}} du \right\} + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} \ln \tau_{jl} = \\
 &= n_j \int_0^{\infty} u^{\delta_i} \ln u f_{Y_{jl}}(u) du - \sum_{l=2}^{m_j+1} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{\bar{S}_{jp}} \int_{\tau_{j{l-1}}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} \ln u f_{Y_{jl}}(u) du + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} \ln \tau_{jl} = \\
 &= n_j \int_0^{\infty} u^{\delta_i} \ln u f_{Y_{jl}}(u) du - \sum_{l=1}^{m_j} \left(\frac{c_{jl}}{\bar{S}_{jl}} \right) \int_{\tau_{jl}}^{\infty} u^{\delta_i} \ln u f_{Y_{jl}}(u) du + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} \ln \tau_{jl}
 \end{aligned} \tag{c.27}$$

e

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i) \right) &= \sum_{l=1}^{m_j+1} \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} (\ln U_{jlp})^2 \right) + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} (\ln \tau_{jl})^2 = \\
 &= n_j \int_0^{\infty} u^{\delta_i} (\ln u)^2 f_{Y_{jl}}(u) du - \sum_{l=1}^{m_j} \frac{c_{jl}}{\bar{S}_{jl}} \int_{\tau_{jl}}^{\infty} u^{\delta_i} (\ln u)^2 f_{Y_{jl}}(u) du + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{m_j} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} (\ln \tau_{jl})^2.
 \end{aligned} \tag{c.28}$$

Como c_{jm_j} é fixo, então r_j também é fixo. Logo, (R_{i1}, \dots, R_{ik}) tem novamente uma distribuição Multinomial cuja esperança é dada em (c.20).

Caso 2: c_{jm_j} aleatório

Desde que,

$$C_{jm_j} = n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - \sum_{l=1}^{m_j} F_{jl}.$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} E(C_{jm_j}) &= E\left(n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - \sum_{l=1}^{m_j} F_{jl}\right) = n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - \sum_{l=1}^{m_j} E(F_{jl}) = \\ &= n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - n_j \bar{S}_{j1} - \sum_{l=2}^{m_j} \left(n_j - \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}}\right) (\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{j,l-1}) = \\ &= n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - n_j \bar{S}_{j1} - \sum_{l=2}^{m_j} n_j (S_{j,l-1} - S_{jl}) + \sum_{l=2}^{m_j} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}} (S_{j,l-1} - S_{jl}). \end{aligned}$$

Fazendo,

$$\odot = \sum_{l=2}^{m_j} n_j (S_{j,l-1} - S_{jl}) \quad \text{e} \quad \odot \odot = \sum_{l=2}^{m_j} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}} (S_{j,l-1} - S_{jl}),$$

e desenvolvendo essas expressões, segue que:

$$\odot = n_j [(S_{j1} - S_{j2}) + (S_{j2} - S_{j3}) + \dots + (S_{jm_j-1} - S_{jm_j})] = n_j (S_{j1} - S_{jm_j}),$$

e

$$\begin{aligned} \odot \odot &= \sum_{l=2}^{m_j} S_{j,l-1} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}} - \sum_{l=2}^{m_j} S_{jl} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}} = \\ &= S_{j1} \frac{c_{j1}}{S_{j1}} + S_{j2} \left(\frac{c_{j1}}{S_{j1}} + \frac{c_{j2}}{S_{j2}}\right) + \dots + S_{jm_j-1} \left(\frac{c_{j1}}{S_{j1}} + \frac{c_{j2}}{S_{j2}} + \dots + \frac{c_{jm_j-1}}{S_{jm_j-1}}\right) - \\ &\quad - S_{j2} \frac{c_{j1}}{S_{j1}} - S_{j3} \left(\frac{c_{j1}}{S_{j1}} + \frac{c_{j2}}{S_{j2}}\right) - \dots - S_{jm_j} \left(\frac{c_{j1}}{S_{j1}} + \frac{c_{j2}}{S_{j2}} + \dots + \frac{c_{jm_j-1}}{S_{jm_j-1}}\right) = \\ &= c_{j1} + c_{j2} + \dots + c_{jm_j-1} - S_{jm_j} \sum_{p=1}^{m_j-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}} = \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - S_{jm_j} \sum_{p=1}^{m_j-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$E(C_{jm_j}) = S_{jm_j} \left(n_j - \sum_{p=1}^{m_j-1} \frac{c_{jp}}{S_{jp}}\right).$$

Portanto,

$$E(T_j(\delta_i)) = \sum_{l=1}^{m_j+1} E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp} \delta_i\right) + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl} \delta_i c_{jl} + \tau_{jm_j} \delta_i E(C_{jm_j}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=1}^{m_j} \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} \right) + \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^{F_{jm_j+1}} U_{jm_j+1p}^{\delta_i} \right) + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} + \\
 &\quad + \tau_{jm_j}^{\delta_i} \mathbb{E}(C_{jm_j}) = \\
 &= n_j \bar{S}_{j1} \int_0^{\tau_{j1}} u^{\delta_i} \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{\bar{S}_{j1} - \bar{S}_{j0}} du + \\
 &\quad + \sum_{l=2}^{m_j} \left\{ \left(n_j - \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{\bar{S}_{jp}} \right) (\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{jl-1}) \int_{\tau_{jl-1}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} \frac{f_{Y_{jl}}(u)}{\bar{S}_{jl} - \bar{S}_{jl-1}} du \right\} + \\
 &\quad + \sum_{l=2}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \left(n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{\bar{S}_{jl}} \right) = \\
 &= n_j \sum_{l=1}^{m_j} \int_{\tau_{jl-1}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \sum_{l=2}^{m_j} \sum_{p=1}^{l-1} \frac{c_{jp}}{\bar{S}_{jp}} \int_{\tau_{jl-1}}^{\tau_{jl}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} n_j - \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{\bar{S}_{jl}} = \\
 &= n_j \left[\int_0^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \right] - \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{\bar{S}_{jl}} - \\
 &\quad - \left(\frac{c_{j1}}{\bar{S}_{j1}} \right) \int_{\tau_{j1}}^{\tau_{j2}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \left(\frac{c_{j1}}{\bar{S}_{j1}} + \frac{c_{j2}}{\bar{S}_{j2}} \right) \int_{\tau_{j2}}^{\tau_{j3}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du - \\
 &\quad - \dots - \left(\frac{c_{j1}}{\bar{S}_{j1}} + \frac{c_{j2}}{\bar{S}_{j2}} + \dots + \frac{c_{jm_{j-1}}}{\bar{S}_{jm_{j-1}}} \right) \int_{\tau_{jm_{j-1}}}^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} = \\
 &= n_j \left[\int_0^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \right] - \\
 &\quad - \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{\bar{S}_{jl}} \left[\int_{\tau_{jl}}^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} f_{Y_{jl}}(u) du + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \right] + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl}. \tag{c.29}
 \end{aligned}$$

De forma análoga:

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial}{\partial \delta_i} T_j(\delta_i) \right) = \sum_{l=1}^{m_j+1} \mathbb{E} \left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} \ln U_{jlp} \right) + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} \ln \tau_{jl} + \tau_{jm_j}^{\delta_i} \ln \tau_{jm_j} \mathbb{E}(C_{jm_j}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= n_j \left\{ \int_0^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} \ln u f_{Y_{jl}}(u) du + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \ln \tau_{jm_j} \right\} - \\
 &\quad - \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{S_{jl}} \left\{ \int_{\tau_{jl}}^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} \ln u f_{Y_{jl}}(u) du + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} \ln \tau_{jm_j} \right\} + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} \ln \tau_{jl}
 \end{aligned} \tag{c.30}$$

e

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{\partial^2}{\partial \delta_i^2} T_j(\delta_i)\right) &= \sum_{l=1}^{m_j+1} E\left(\sum_{p=1}^{F_{jl}} U_{jlp}^{\delta_i} (\ln U_{jlp})^2\right) + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} (\ln \tau_{jl})^2 + \tau_{jm_j}^{\delta_i} E(C_{jm_j}) (\ln \tau_{jm_j})^2 = \\
 &= n_j \left\{ \int_0^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} (\ln u)^2 f_{Y_{jl}}(u) du + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} (\ln \tau_{jm_j})^2 \right\} - \\
 &\quad - \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{S_{jl}} \left\{ \int_{\tau_{jl}}^{\tau_{jm_j}} u^{\delta_i} (\ln u)^2 f_{Y_{jl}}(u) du + \tau_{jm_j}^{\delta_i} S_{jm_j} (\ln \tau_{jm_j})^2 \right\} + \\
 &\quad + \sum_{l=1}^{m_j-1} \tau_{jl}^{\delta_i} c_{jl} (\ln \tau_{jl})^2.
 \end{aligned} \tag{c.31}$$

Ainda, para o cálculo da matriz de informação é necessário obter o valor esperado de R_j , uma vez que C_{jm_j} aleatório implica em R_j aleatório.

$$\begin{aligned}
 E(R_j) &= E\left(n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - C_{jm_j}\right) = n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - E(C_{jm_j}) = \\
 &= n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - S_{jm_j} \left(n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{S_{jl}}\right) = n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} c_{jl} - S_{jm_j} n_j + S_{jm_j} \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{S_{jl}} = \\
 &= n_j (1 - S_{jm_j}) - (1 - S_{jm_j}) \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{S_{jl}} = \bar{S}_{jm_j} \left(n_j - \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{c_{jl}}{S_{jl}}\right).
 \end{aligned} \tag{c.32}$$

Substituindo essas esperanças nas equações (3.2.5), (3.2.6) e (3.2.7) obtém-se a matriz de variância-covariância assintótica de $(\hat{\beta}_i, \hat{\delta}_i)$ para este esquema de censura.

APÊNDICE D

TABELAS

Tabela D.1: Dados gerados pelo programa PRG1.SAS

obs	t	stress	causa	C1	C2	C3	obs	t	stress	causa	C1	C2	C3
1	4053.83	190	1	1	0	0	14	4604.27	190	1	1	0	0
2	3527.81	190	3	0	0	1	15	5059.58	190	2	0	1	0
3	11000.00	190	0	0	0	0	16	8330.90	190	1	1	0	0
4	4293.99	190	1	1	0	0	17	6756.61	190	1	1	0	0
5	2516.92	190	3	0	0	1	18	5425.92	190	1	1	0	0
6	8024.08	190	2	0	1	0	19	2540.12	190	2	0	1	0
7	4678.35	190	1	1	0	0	20	9079.83	190	3	0	0	1
8	6085.58	190	1	1	0	0	21	11000.00	190	0	0	0	0
9	10478.05	190	1	1	0	0	22	8707.67	190	1	1	0	0
10	10853.25	190	2	0	1	0	23	5837.30	190	1	1	0	0
11	11000.00	190	0	0	0	0	24	5523.02	190	1	1	0	0
12	2320.75	190	3	0	0	1	25	10196.32	190	1	1	0	0
13	5005.83	190	1	1	0	0	26	3977.41	190	2	0	1	0

continuação da tabela D.1:

obs	t	stress	causa	C1	C2	C3	obs	t	stress	causa	C1	C2	C3
27	1982.82	190	1	1	0	0	58	522.92	220	3	0	0	1
28	10103.61	190	2	0	1	0	59	811.84	220	1	1	0	0
29	3250.60	190	1	1	0	0	60	1218.35	220	3	0	0	1
30	4449.13	190	1	1	0	0	61	2119.10	220	3	0	0	1
31	7806.43	190	2	0	1	0	62	2163.54	220	1	1	0	0
32	8398.76	190	1	1	0	0	63	1024.17	220	1	1	0	0
33	3731.39	190	2	0	1	0	64	3392.47	220	2	0	1	0
34	6041.41	190	2	0	1	0	65	2709.86	220	3	0	0	1
35	8583.92	190	3	0	0	1	66	3041.26	220	2	0	1	0
36	1379.43	190	2	0	1	0	67	1972.84	220	3	0	0	1
37	6536.21	190	2	0	1	0	68	2546.77	220	3	0	0	1
38	6903.29	190	2	0	1	0	69	1953.51	220	3	0	0	1
39	2949.91	190	2	0	1	0	70	3210.31	220	2	0	1	0
40	11000.00	190	0	0	0	0	71	2051.74	220	1	1	0	0
41	2538.40	190	2	0	1	0	72	3818.56	220	2	0	1	0
42	10094.39	190	3	0	0	1	73	3005.92	220	3	0	0	1
43	4892.39	190	3	0	0	1	74	1879.98	220	2	0	1	0
44	5081.25	190	2	0	1	0	75	3473.18	220	2	0	1	0
45	9100.36	190	3	0	0	1	76	3432.63	220	1	1	0	0
46	6007.85	190	2	0	1	0	77	4292.15	220	1	1	0	0
47	1587.82	190	1	1	0	0	78	1758.37	220	3	0	0	1
48	4041.62	190	1	1	0	0	79	3912.69	220	1	1	0	0
49	4462.10	190	2	0	1	0	80	1036.40	220	3	0	0	1
50	4243.29	190	2	0	1	0	81	972.00	220	1	1	0	0
51	1688.04	220	1	1	0	0	82	3267.48	220	1	1	0	0
52	333.48	220	3	0	0	1	83	515.88	220	1	1	0	0
53	2479.84	220	1	1	0	0	84	5685.97	220	3	0	0	1
54	2326.71	220	1	1	0	0	85	1409.10	220	3	0	0	1
55	4758.74	220	2	0	1	0	86	3545.74	220	3	0	0	1
56	1148.89	220	3	0	0	1	87	3859.72	220	2	0	1	0
57	1046.77	220	1	1	0	0	88	930.18	220	3	0	0	1

continuação da tabela D.1:

obs	t	stress	causa	C1	C2	C3	obs	t	stress	causa	C1	C2	C3
89	3478.84	220	1	1	0	0	120	2263.04	240	3	0	0	1
90	3986.35	220	3	0	0	1	121	1104.44	240	3	0	0	1
91	2052.61	220	3	0	0	1	122	1926.77	240	1	1	0	0
92	298.48	220	2	0	1	0	123	3145.89	240	3	0	0	1
93	3213.97	220	1	1	0	0	124	2071.13	240	1	1	0	0
94	2886.73	220	3	0	0	1	125	2477.84	240	2	0	1	0
95	3415.89	220	3	0	0	1	126	2749.56	240	2	0	1	0
96	576.14	220	3	0	0	1	127	1362.21	240	3	0	0	1
97	2003.25	220	3	0	0	1	128	1606.78	240	3	0	0	1
98	1942.50	220	1	1	0	0	129	1220.57	240	1	1	0	0
99	2013.11	220	2	0	1	0	130	1038.73	240	3	0	0	1
100	3275.47	220	1	1	0	0	131	2061.60	240	1	1	0	0
101	2149.58	240	1	1	0	0	132	1287.22	240	1	1	0	0
102	1144.67	240	2	0	1	0	133	471.22	240	1	1	0	0
103	176.87	240	1	1	0	0	134	2386.38	240	2	0	1	0
104	832.22	240	3	0	0	1	135	941.93	240	3	0	0	1
105	919.49	240	3	0	0	1	136	1094.20	240	3	0	0	1
106	847.03	240	1	1	0	0	137	964.77	240	1	1	0	0
107	2221.65	240	3	0	0	1	138	899.88	240	2	0	1	0
108	2059.34	240	2	0	1	0	139	488.70	240	3	0	0	1
109	1265.93	240	3	0	0	1	140	2395.82	240	1	1	0	0
110	2027.91	240	3	0	0	1	141	1866.03	240	3	0	0	1
111	1823.21	240	2	0	1	0	142	1933.19	240	3	0	0	1
112	1052.20	240	2	0	1	0	143	422.63	240	3	0	0	1
113	1161.39	240	1	1	0	0	144	2506.57	240	1	1	0	0
114	1953.26	240	2	0	1	0	145	1641.21	240	3	0	0	1
115	1174.59	240	1	1	0	0	146	1634.67	240	1	1	0	0
116	560.00	240	3	0	0	1	147	2035.35	240	3	0	0	1
117	2211.09	240	1	1	0	0	148	2845.33	240	3	0	0	1
118	256.05	240	2	0	1	0	149	1329.64	240	1	1	0	0
119	721.44	240	3	0	0	1	150	2975.87	240	1	1	0	0

continuação da tabela D.1:

obs	t	stress	causa	C1	C2	C3	obs	t	stress	causa	C1	C2	C3
151	764.21	260	3	0	0	1	176	874.04	260	1	1	0	0
152	1237.72	260	1	1	0	0	177	628.71	260	2	0	1	0
153	228.12	260	2	0	1	0	178	1034.28	260	2	0	1	0
154	264.66	260	1	1	0	0	179	397.35	260	3	0	0	1
155	636.72	260	3	0	0	1	180	1509.16	260	3	0	0	1
156	196.39	260	1	1	0	0	181	437.13	260	1	1	0	0
157	385.33	260	3	0	0	1	182	1295.67	260	1	1	0	0
158	581.11	260	1	1	0	0	183	1990.57	260	3	0	0	1
159	1073.17	260	1	1	0	0	184	817.76	260	1	1	0	0
160	321.03	260	1	1	0	0	185	264.90	260	1	1	0	0
161	984.86	260	3	0	0	1	186	1215.81	260	3	0	0	1
162	609.38	260	3	0	0	1	187	266.56	260	1	1	0	0
163	1141.31	260	3	0	0	1	188	969.72	260	1	1	0	0
164	1690.05	260	3	0	0	1	189	601.62	260	1	1	0	0
165	1329.00	260	3	0	0	1	190	1002.59	260	3	0	0	1
166	239.03	260	2	0	1	0	191	1288.79	260	3	0	0	1
167	1222.93	260	1	1	0	0	192	478.95	260	3	0	0	1
168	1066.42	260	1	1	0	0	193	1563.26	260	1	1	0	0
169	628.23	260	2	0	1	0	194	1552.04	260	3	0	0	1
170	1372.06	260	2	0	1	0	195	374.44	260	1	1	0	0
171	1586.68	260	2	0	1	0	196	2105.00	260	3	0	0	1
172	1010.34	260	3	0	0	1	197	1051.90	260	3	0	0	1
173	103.31	260	3	0	0	1	198	378.14	260	3	0	0	1
174	773.92	260	2	0	1	0	199	1329.50	260	3	0	0	1
175	1720.14	260	1	1	0	0	200	1796.95	260	2	0	1	0

Tabela D.2: Estimativas não-paramétricas dos 25-ésimos percentis em cada um dos níveis do stress para cada uma das causas de falha.

stress	causa	$\hat{t}_{i,25}$	stress	causa	$\hat{t}_{i,25}$
190	1	5425.9	240	1	1634.7
	2	6007.9		2	2386.4
	3	9100.4		3	1362.2
220	1	2326.7	260	1	874.0
	2	3473.2		2	1372.1
	3	2003.3		3	1002.6

Tabela D.3: Dados gerados pelo programa BVW1. SAS

obs	t	stress	causa	C1	C2	C12	obs	t	stress	causa	C1	C2	C12
1	4793.45	190	12	0	0	1	20	4816.23	190	12	0	0	1
2	7640.16	190	1	1	0	0	21	2970.71	190	1	1	0	0
3	4422.58	190	1	1	0	0	22	10000.00	190	0	0	0	0
4	3445.74	190	12	0	0	1	23	8497.47	190	12	0	0	1
5	10000.00	190	0	0	0	0	24	1808.67	190	1	1	0	0
6	2166.81	190	1	1	0	0	25	5972.68	190	1	1	0	0
7	7147.28	190	1	1	0	0	26	1639.45	190	1	1	0	0
8	10000.00	190	0	0	0	0	27	5206.22	190	2	0	1	0
9	1133.98	190	12	0	0	1	28	1933.92	190	1	1	0	0
10	8812.33	190	12	0	0	1	29	3935.83	190	2	0	1	0
11	8117.14	190	1	1	0	0	30	8053.16	190	1	1	0	0
12	10000.00	190	0	0	0	0	31	5802.12	190	1	1	0	0
13	4150.39	190	12	0	0	1	32	8982.98	190	2	0	1	0
14	8513.36	190	12	0	0	1	33	5340.78	190	2	0	1	0
15	5520.29	190	2	0	1	0	34	5678.41	190	1	1	0	0
16	6232.49	190	1	1	0	0	35	10000.00	190	0	0	0	0
17	3378.54	190	2	0	1	0	36	10000.00	190	0	0	0	0
18	1795.22	190	12	0	0	1	37	7977.16	190	2	0	1	0
19	5575.17	190	2	0	1	0	38	2836.67	190	1	1	0	0

continuação da tabela D.3:

obs	t	stress	causa	C1	C2	C12	obs	t	stress	causa	C1	C2	C12
39	7938.59	190	2	0	1	0	70	1390.91	220	1	1	0	0
40	1511.76	190	12	0	0	1	71	3481.21	220	12	0	0	1
41	5754.10	190	2	0	1	0	72	2949.91	220	2	0	1	0
42	2518.91	190	1	1	0	0	73	2343.78	220	12	0	0	1
43	6910.75	190	1	1	0	0	74	4033.96	220	2	0	1	0
44	4562.42	190	2	0	1	0	75	1380.80	220	2	0	1	0
45	6867.75	190	1	1	0	0	76	1756.04	220	1	1	0	0
46	8440.43	190	12	0	0	1	77	588.29	220	2	0	1	0
47	6650.78	190	1	1	0	0	78	1350.69	220	2	0	1	0
48	5503.31	190	2	0	1	0	79	2002.62	220	1	1	0	0
49	6385.12	190	1	1	0	0	80	495.84	220	2	0	1	0
50	1610.28	190	2	0	1	0	81	1868.55	220	2	0	1	0
51	1243.15	220	1	1	0	0	82	2572.70	220	12	0	0	1
52	6851.56	220	1	1	0	0	83	5062.99	220	1	1	0	0
53	4223.51	220	1	1	0	0	84	3978.94	220	1	1	0	0
54	4776.33	220	2	0	1	0	85	1826.59	220	2	0	1	0
55	6037.26	220	1	1	0	0	86	2088.28	220	1	1	0	0
56	3312.51	220	12	0	0	1	87	1810.62	220	1	1	0	0
57	3108.28	220	2	0	1	0	88	2114.46	220	1	1	0	0
58	1563.34	220	12	0	0	1	89	1440.73	220	12	0	0	1
59	4718.14	220	2	0	1	0	90	2778.78	220	1	1	0	0
60	3354.10	220	12	0	0	1	91	5453.06	220	1	1	0	0
61	1172.89	220	12	0	0	1	92	3287.92	220	2	0	1	0
62	2448.33	220	2	0	1	0	93	2772.98	220	1	1	0	0
63	3431.23	220	2	0	1	0	94	3161.65	220	12	0	0	1
64	2691.37	220	2	0	1	0	95	588.81	220	2	0	1	0
65	3383.27	220	2	0	1	0	96	2653.35	220	12	0	0	1
66	3367.39	220	12	0	0	1	97	1752.46	220	2	0	1	0
67	945.47	220	2	0	1	0	98	3653.35	220	12	0	0	1
68	606.25	220	2	0	1	0	99	2351.00	220	2	0	1	0
69	2528.60	220	1	1	0	0	100	814.28	220	1	1	0	0

continuação da tabela D.3:

obs	t	stress	causa	C1	C2	C12	obs	t	stress	causa	C1	C2	C12
101	1303.15	240	2	0	1	0	132	1099.40	240	1	1	0	0
102	1119.47	240	1	1	0	0	133	1429.73	240	1	1	0	0
103	1551.33	240	2	0	1	0	134	1408.63	240	12	0	0	1
104	1465.71	240	1	1	0	0	135	1725.85	240	2	0	1	0
105	1195.62	240	1	1	0	0	136	1092.55	240	1	1	0	0
106	1237.30	240	2	0	1	0	137	2314.53	240	1	1	0	0
107	2108.74	240	2	0	1	0	138	2644.38	240	12	0	0	1
108	459.41	240	1	1	0	0	139	383.61	240	1	1	0	0
109	2037.19	240	1	1	0	0	140	1432.05	240	2	0	1	0
110	2121.42	240	12	0	0	1	141	1354.95	240	1	1	0	0
111	831.95	240	2	0	1	0	142	2797.24	240	2	0	1	0
112	378.01	240	2	0	1	0	143	1476.58	240	2	0	1	0
113	1967.22	240	1	1	0	0	144	1926.10	240	2	0	1	0
114	2276.91	240	2	0	1	0	145	641.19	240	1	1	0	0
115	1547.16	240	1	1	0	0	146	1256.65	240	2	0	1	0
116	705.99	240	1	1	0	0	147	588.46	240	2	0	1	0
117	2219.98	240	12	0	0	1	148	640.65	240	12	0	0	1
118	634.46	240	12	0	0	1	149	1383.36	240	1	1	0	0
119	1022.40	240	2	0	1	0	150	1138.62	240	12	0	0	1
120	1861.92	240	12	0	0	1	151	450.08	260	1	1	0	0
121	1261.12	240	2	0	1	0	152	1241.36	260	2	0	1	0
122	967.20	240	1	1	0	0	153	855.38	260	2	0	1	0
123	1400.09	240	12	0	0	1	154	1275.56	260	1	1	0	0
124	1991.09	240	1	1	0	0	155	2011.94	260	2	0	1	0
125	417.98	240	2	0	1	0	156	1167.29	260	2	0	1	0
126	1319.83	240	2	0	1	0	157	1094.30	260	1	1	0	0
127	250.62	240	2	0	1	0	158	1227.80	260	1	1	0	0
128	1774.02	240	1	1	0	0	159	646.25	260	2	0	1	0
129	1222.17	240	2	0	1	0	160	889.37	260	2	0	1	0
130	1901.17	240	2	0	1	0	161	1844.17	260	12	0	0	1
131	1253.04	240	2	0	1	0	162	494.07	260	1	1	0	0

continuação da tabela D.3:

obs	t	stress	causa	C1	C2	C12	obs	t	stress	causa	C1	C2	C12
163	1318.59	260	12	0	0	1	182	131.31	260	2	0	1	0
164	495.57	260	12	0	0	1	183	471.39	260	1	1	0	0
165	1647.34	260	2	0	1	0	184	1513.50	260	1	1	0	0
166	900.83	260	2	0	1	0	185	1733.45	260	1	1	0	0
167	311.57	260	2	0	1	0	186	575.78	260	12	0	0	1
168	416.36	260	2	0	1	0	187	743.32	260	12	0	0	1
169	340.46	260	1	1	0	0	188	136.97	260	2	0	1	0
170	1575.46	260	2	0	1	0	189	571.23	260	2	0	1	0
171	284.80	260	1	1	0	0	190	1078.23	260	1	1	0	0
172	426.10	260	1	1	0	0	191	1359.57	260	1	1	0	0
173	641.05	260	1	1	0	0	192	654.28	260	2	0	1	0
174	606.72	260	1	1	0	0	193	606.34	260	2	0	1	0
175	1419.11	260	1	1	0	0	194	1025.34	260	1	1	0	0
176	782.17	260	2	0	1	0	195	924.04	260	12	0	0	1
177	1898.40	260	1	1	0	0	196	169.77	260	12	0	0	1
178	255.73	260	1	1	0	0	197	120.96	260	1	1	0	0
179	780.43	260	2	0	1	0	198	1068.04	260	2	0	1	0
180	742.15	260	2	0	1	0	199	679.85	260	2	0	1	0
181	1329.42	260	1	1	0	0	200	815.69	260	12	0	0	1

Tabela D.4: Estimativas não-paramétricas dos 25-ésimos percentis em cada nível de stress para cada uma das causas de falha.

stress	causa	$\hat{t}_{i,25}$	stress	causa	$\hat{t}_{i,25}$
190	1	5972.7	240	1	1383.4
	2	5754.1		2	1261.1
	12	8497.5		12	2121.4
220	1	2773.0	260	1	1025.3
	2	2448.3		2	780.4
	12	3312.5		12	1318.6

Tabela D.5: Dados gerados pelo programa ACBVE1. SAS

obs	t	stress	causa	obs	t	stress	causa	obs	t	stress	causa
1	2211.44	190	2	32	1350.12	190	1	63	100.12	220	2
2	696.26	190	2	33	8055.77	190	1	64	726.35	220	1
3	611.56	190	1	34	4014.84	190	1	65	1425.73	220	1
4	4153.66	190	2	35	2644.43	190	1	66	1832.72	220	2
5	3007.73	190	1	36	4494.85	190	1	67	163.11	220	1
6	7420.36	190	1	37	1422.76	190	2	68	2313.52	220	1
7	11518.26	190	1	38	13017.84	190	1	69	390.55	220	1
8	7574.99	190	1	39	743.47	190	2	70	3692.54	220	1
9	6604.10	190	1	40	488.61	190	2	71	632.77	220	1
10	9644.27	190	1	41	746.22	190	1	72	1621.60	220	2
11	4023.83	190	1	42	5112.97	190	2	73	1703.48	220	2
12	3348.11	190	1	43	31.16	190	1	74	2724.61	220	1
13	13466.17	190	1	44	15000.00	190	0	75	1574.22	220	2
14	6807.35	190	1	45	600.69	190	1	76	186.36	220	2
15	5420.87	190	1	46	15000.00	190	0	77	2899.54	220	2
16	9528.08	190	1	47	15000.00	190	0	78	2354.42	220	2
17	1638.42	190	1	48	4945.92	190	1	79	6651.40	220	2
18	15000.00	190	0	49	1030.49	190	1	80	1555.39	220	1
19	6751.66	190	2	50	15000.00	190	0	81	1480.19	220	1
20	13512.93	190	1	51	2722.48	220	1	82	5873.97	220	2
21	3252.02	190	1	52	531.53	220	2	83	832.02	220	1
22	6956.97	190	1	53	553.22	220	1	84	3578.56	220	1
23	4424.90	190	2	54	4458.47	220	1	85	779.05	220	2
24	4761.32	190	1	55	6192.07	220	1	86	716.02	220	2
25	4039.04	190	1	56	554.58	220	1	87	1092.97	220	1
26	2270.10	190	2	57	484.28	220	1	88	500.03	220	1
27	858.30	190	1	58	654.24	220	1	89	304.15	220	1
28	1172.71	190	1	59	627.58	220	1	90	5807.92	220	1
29	3307.87	190	2	60	2130.64	220	1	91	606.24	220	1
30	4897.05	190	1	61	3863.26	220	2	92	1023.27	220	1
31	2964.26	190	2	62	3614.11	220	1	93	1993.79	220	1

continuação da tabela D.5:

obs	t	stress	causa	obs	t	stress	causa	obs	t	stress	causa
94	6998.20	220	1	125	1118.28	240	1	156	297.01	260	2
95	262.50	220	1	126	413.54	240	1	157	107.54	260	1
96	274.37	220	1	127	1135.33	240	1	158	1211.17	260	1
97	176.27	220	1	128	1025.19	240	1	159	207.74	260	1
98	1869.56	220	1	129	1322.53	240	1	160	1548.50	260	1
99	974.45	220	2	130	1004.92	240	1	161	191.80	260	1
100	1204.07	220	1	131	645.10	240	2	162	2096.40	260	1
101	553.06	240	2	132	684.03	240	1	163	1454.35	260	1
102	1807.65	240	1	133	335.36	240	1	164	936.85	260	2
103	2666.62	240	1	134	961.96	240	1	165	397.86	260	1
104	1871.62	240	2	135	125.68	240	2	166	1621.60	260	1
105	707.71	240	2	136	227.31	240	1	167	356.43	260	1
106	147.75	240	2	137	647.18	240	2	168	633.04	260	1
107	4707.49	240	2	138	727.31	240	1	169	643.28	260	2
108	963.69	240	1	139	2509.45	240	1	170	552.43	260	1
109	2051.59	240	1	140	578.65	240	2	171	997.49	260	1
110	2136.00	240	1	141	1158.30	240	2	172	596.83	260	1
111	3803.41	240	2	142	1636.42	240	1	173	3144.04	260	2
112	270.86	240	1	143	3517.27	240	2	174	544.76	260	2
113	336.01	240	1	144	505.21	240	1	175	87.73	260	1
114	6377.58	240	1	145	410.97	240	1	176	646.16	260	1
115	748.56	240	1	146	87.88	240	1	177	241.45	260	1
116	1580.76	240	2	147	1488.05	240	1	178	278.68	260	2
117	1491.64	240	1	148	575.94	240	1	179	2294.19	260	1
118	169.13	240	1	149	16.16	240	1	180	423.90	260	1
119	65.47	240	1	150	2241.78	240	1	181	294.78	260	2
120	684.51	240	1	151	433.13	260	1	182	1445.79	260	2
121	2684.53	240	1	152	353.41	260	2	183	38.31	260	1
122	2921.59	240	1	153	275.12	260	1	184	354.13	260	1
123	1054.88	240	1	154	1181.90	260	1	185	609.85	260	1
124	862.40	240	1	155	1134.82	260	1	186	1090.05	260	1

continuação da tabela D.5:

obs	t	stress	causa	obs	t	stress	causa	obs	t	stress	causa
187	738.51	260	1	192	1952.30	260	1	197	218.64	260	2
188	232.08	260	1	193	199.26	260	1	198	991.45	260	2
189	396.82	260	1	194	2508.13	260	2	199	8.36	260	2
190	279.88	260	1	195	178.14	260	2	200	290.04	260	1
191	426.53	260	1	196	526.98	260	2				

Tabela D.6: Estimativas não-paramétricas dos 50-ésimos percentis em cada nível de stress.

stress	$\hat{t}_{.50}$
190	4289.3
220	1314.9
240	962.8
260	480.1

APÊNDICE E

Programa PRG1.SAS

```
libname novo 'c:';
data novo.simvep;
n=200;
do j=1 to n ;
    u1=ranuni(378746);
    u2=ranuni(267323);
    u3=ranuni(789651);
    w1=log(-log(u1));
    w2=log(-log(u2));
    w3=log(-log(u3));
output ; keep w1 w2 w3;
end;

proc iml wrksize=150;
use novo.simvep;
read all var{w1 w2 w3};
n1=50; n2=50; n3=50; n4=50;
n= n1+n2+n3+n4;
```

continuação do programa PRG1.SAS:

```
um=j(n,1);
stress=j(n1,1,190)//j(n2,1,220)//j(n3,1,240)//j(n4,1,260);
aux=(-1000)*(um/(stress+273.16));
x=um||aux;
b1={ 8.2607, 12.31006};
b2={ 3.7748, 10.4253};
b3={ 13.0340, 14.7487};
d=2; s=1/d;
lntemp1= s*(-(x*b1)+w1);
lntemp2= s*(-(x*b2)+w2);
lntemp3= s*(-(x*b3)+w3);
t1=exp(lntemp1); t2=exp(lntemp2); t3=exp(lntemp3);
t=11000;
C1=j(n,1,0); C2=j(n,1,0); C3=j(n,1,0);
temp=t1; causa=j(n,1);
do i=1 to n;
  if t1[i,]>t2[i,] & t2[i,]>t3[i,] then do;
    temp[i,]=t3[i,];
    causa[i,]=3;
  end;
  if t1[i,]>t3[i,] & t3[i,]>t2[i,] then do;
    temp[i,]=t2[i,];
    causa[i,]=2;
  end;
  if t2[i,]>t1[i,] & t1[i,]>t3[i,] then do;
    temp[i,]=t3[i,];
    causa[i,]=3;
  end;
  if t3[i,]>t1[i,] & t1[i,]>t2[i,] then do;
    temp[i,]=t2[i,];
    causa[i,]=2;
  end;
end;
```

continuação do programa PRG1.SAS:

```
    if temp[i,] > t then do;
        temp[i,]=t;
        causa[i,]=0;
    end;
    if causa[i,]=1 then C1[i,]=1;
    if causa[i,]=2 then C2[i,]=1;
    if causa[i,]=3 then C3[i,]=1;
end;

arq=temp||aux||stress||causa||C1||C2||C3;
r={tempo temperat stress causa C1 C2 C3};
create novo.arq from arq[colname=r];
append from arq;

arq1=tcmp||stress||C1;
r={tempo stress C1};
create novo.arq1 from arq1[colname=r];
append from arq1;

arq2=temp||stress||C2;
r={tempo stress C2};
create novo.arq2 from arq2[colname=r];
append from arq2;

arq3=temp||stress||C3;
r={tempo stress C3};
create novo.arq3 from arq3[colname=r];
append from arq3;
proc print data=novo.arq;
quit;
```

Programa PRG2.SAS

```

proc lifetest data= novo.arq1 method=pl outs=novo.teste1 plots=(lls);
time tempo*c1(0);
strata stress;
run;

proc lifetest data= novo.arq2 method=pl outs=novo.teste2 plots=(lls);
time tempo*c2(0);
strata stress;
run;

proc lifetest data= novo.arq3 method=pl outs=novo.teste3 plots=(lls);
time tempo*c3(0);
strata stress;
run;

```

Programa PRG3.SAS

```

proc iml wrksize=200;
/* Este módulo calcula os valores iniciais dos parâmetros da regressão */
start reg;
xpxi=ginv(X*X);
beta=xpxi*(X'*lnt);
lnthat=X*beta; /* valores preditos */
resid=lnt-lnthat; /* resíduos */
SQE=ssq(resid); /* soma de quadrados dos erros */
gle=n-ncol(X); /* graus de liberdade do erro */
EQM=SQE/gle; /* erro quadrático médio */
d=1/sqrt(EQM); /* estimativas iniciais dos parâmetros */
beta=(-beta)*d;
param=beta//d;
print ,"Estimativas Iniciais dos Parâmetros",param;
finish;

```

continuação do programa PRG3.SAS:

```

/* Cálculo do risco */
t0=20000; lnt0=log(t0);
lb0=1; lb1=zu[,2]; ld=(1/d)+lnt0;
z=lb0||lb1||ld;
run desvio;
lambch=d*(t0##(d-1))*ach;
lambtiu=lambch*exp(-s/2);
lilamb=lambch/ed; lslamb=lambch*ed;
print,"Estimativa pontual e intervalar do risco",
      "no tempo t=20000 sob a temperatura usual de 180 graus C",
      lambch lambtiu lilamb lslamb,
"OBS: O intervalo de confiança tem aproximadamente 90% de confiança";

/* Cálculo da sobrevivência */
zu=zu||lnt0;
run desvio;
Hch=(t0##d)*ach;
Sch=exp(-Hch);
htiu=hch*exp(-s/2);
Stiu=exp(-htiu);
li=Sch##ed; ls=Sch##(1/ed);
print,"Estimativa pontual e intervalar da Sobrevivencia",
      "no tempo t=20000 e sob a temperatura de 180 graus C", Sch stiu li ls,
"OBS: O intervalo tem aproximadamente 90% de confiança";
/* Cálculo da sobrevivência total com todas as causas atuando */
zn=2.12;
run desvio;
li=Sch##ed;
ls=Sch##(1/ed);
ST=ST*Stiu;
liS=liS*li; lsS=lsS*ls;

```

continuação do programa PRG3.SAS:

```

/* Este módulo estima os desvios para o cálculo de I.C. */
start desvio;
s=z*(inviobs*z');
ed=exp(zn*sqrt(s));
finish;

                /* INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL */

use novo.arq;
setin novo.arq;
read all into w;
censura= w[ ,5:7];
n=nrow(w); um=j(n,1);
t=w[ ,1]; lnt=log(t); lnt2=lnt#lnt;
X=w[ ,2]; X=um||X;
free um w;
nr=50; ns=j(4,1,0);
aux1=0; NX=j(4,2,0);
do s=1 to 4;
    aux1=aux1+nr;
    ns[s,]=aux1;
    NX[s,]=X[ns[s,],];
end;
aux=j(3,1,1)+ns[1:3,];
aux={1}//aux;
f=J(4,1,0);
ST=1; liS=1; lsS=1;
e=j(n,3,0);
Saux=j(1,3,1); lisaux=j(1,3,1); lssaux=j(1,3,1);
paramet=j(3,3,0); cov=j(9,3,0);
do j=1 to 3;
    print,"CAUSA"j;
    run reg;
    cens=censura[ ,j];

```


continuação do programa PRG3.SAS:

```

r=sum(cens);
do s=1 to 4;
  f[s,]=cens[aux[s,]:ns[s,], ][+,];
end;
print,,"Numeros de Falhas em Cada Nivel do Stress",f;
nxf=nx*f;
eg=exp(X*beta);
td=t##d;
tdlnt=td#lnt;
egtd=eg#td;
dscore=(r/d)+(cens*lnt)-(eg*(tdlnt));
bscore=(NXf)-(X*(egtd));
ddparc=-(r/d**2)-(eg*(td#lnt2));
bbparc=-(X*(X#(egtd)));
bdparc=-(X*(eg#tdlnt));
score=bscore//dscore;
Iobs=-((bbparc//bdparc')|| (bdparc//ddparc));
inviobs=ginv(Iobs);
iter=0;
do while ((max(abs(score))>1e-5) & (iter<50));
  param= param + (inviobs*score);
  beta=param[1:2,1];
  d=param[3,1];
  eg=exp(X*beta);
  td=t##d;
  tdlnt=td#lnt;
  egtd=eg#td;
  dscore=(r/d)+(cens*lnt)-(eg*(tdlnt));
  bscore=(NXf)-(X*(egtd));
  ddparc=-(r/d**2)-(eg*(td#lnt2));
  bbparc=-(X*(X#(egtd)));
  bdparc=-(X*(eg#tdlnt));

```

continuação do programa PRG3.SAS:

```

        score=bscore//dscore;
        Iobs=-((bbparc//bdparc')||((bdparc//ddparc)));
        inviobs=ginv(Iobs);
        iter=iter+1;

    end;
paramet[,j]=param;
cov[,j]=inviobs[1:3,1]//inviobs[1:3,2]//inviobs[1:3,3];
DP=sqrt(vecdiag(inviobs));
print, "Numero de Iteracoes=" iter;
print, "Estimativas dos Parametros",param DP;
print, "Matriz de Var-Cov de (b0,b1 e delta) ",inviobs;

/* Cálculo de resíduos */
e[,j]=td#eg;

/* Cálculo do percentil 50% */
v=180;
zu=-1000/(v+273.16); zu={1}||zu;
zb=zu*beta;
ach=exp(zb);
la=-log(0.5)/ach;
tpb0=-1/d;
tpb1=tpb0*zu[,2];
tpd=(-1/(d##2))*(log(-log(0.5))-zb);
z=tpb0||tpb1||tpd;
zu=1.65; run desvio;
tpch=la##(1/d);
tptiu=tpch*exp(-s/2);
litp=tpch/ed; lstp=tpch*ed;
print, "Estimativa pontual e intervalar do percentil de 50%",
        "sob a temperatura usual de 180 graus C", tpch tptiu litp lstp,
"OBS: O intervalo de confianca tem aproximadamente 90% de confianca";

```

Programa BVW1.SAS

```

libname novo 'c:';
data novo.bvw1;
n=200;
do j=1 to n;
  u1=ranuni(813657);
  u2=ranuni(697953);
  u12=ranuni(574629);
  w1=log(-log(u1));
  w2=log(-log(u2));
  w12=log(-log(u12));
  output; keep w1 w2 w12;
end;

proc iml wrksize=150;
use novo.bvw1;
read all var{w1 w2 w12};
n1=50; n2=50; n3=50; n4=50; n=n1+n2+n3+n4;
v=j(n1,1,190)//j(n2,1,220)//j(n3,1,240)//j(n4,1,260);
um=j(n,1); aux1=(-1000)*(um/(v+273.16));
x=um||aux1;
beta1={8.2607, 12.31006};
beta2={13.0340, 14.7487};
beta12={3.7748, 10.4253};
d=2; s=1/d;
y1=s*(-(x*beta1)+w1);
y2=s*(-(x*beta2)+w2);
y12=s*(-(x*beta12)+w12);
x1=exp(y1); x2=exp(y2); x12=exp(y12);
t1=x1<>x12; t2=x2<>x12;
t=10000;
c1=j(n,1,0); c2=j(n,1,0); c12=j(n,1,0); causa=c1;
temp=j(n,1); censura=temp;

```

continuação do programa PRG3.SAS:

```

/* Cálculo da sobrevivência total eliminada a causa 1 */
zn=1.88; run desvio;
Saux[,j]=Stiu;
lisaux[,j]=Sch##ed; lssaux[,j]=Sch##(1/ed);
end;
print,"Estimacao pontual e intervalar da Sobrevivencia",
      "no tempo t=20000 e temperatura de 180 graus C", ST li ls;
ST=saux[,2]*saux[,3];
li=lisaux[,2]*lisaux[,3]; ls=lssaux[,2]*lssaux[,3];
print,"Estimacao pontual e intervalar da Sobrevivencia",
      "no tempo t=20000 e temperatura de 180 graus C",
      "eliminada a causa 1", ST li ls;

res=e||censura;
r={e1 e2 e3 c1 c2 c3};
create novo.res from res[colname=r];
append from res;
quit;

```

Programa SOBRES.SAS

```

proc lifetest data=novo.res method=pl outs=novo.sobres1 plots=(ls);
time e1*c1(0);
run;

proc lifetest data=novo.res method=pl outs=novo.sobres2 plots=(ls);
time e2*c2(0);
run;

proc lifetest data=novo.res method=pl outs=novo.sobres3 plots=(ls);
time e3*c3(0);
run;

```

Programa BVW2.SAS

```

proc sort data=novo.arq1;
by causa;
proc lifetest data=novo.arq1 method=pl outs=novo.arq3 plots=(lls);
time tempo*censura(0);
strata stress;
by causa;
run;
proc lifetest data=novo.arq2 method=pl outs=novo.arq4 plots=(lls);
time tempo*censura(0);
strata stress;
run;

```

Programa BVW3.SAS

```

proc iml wrksize=150;

/* Este módulo calcula os valores iniciais dos parâmetros*/
start reg;
x1=x[loc(causa=1),]/x[loc(causa=0),];
x2=x[loc(causa=2),]/x[loc(causa=0),];
x12=x[loc(causa=12),]/x[loc(causa=0),];
lnt1=lnt1//lnt[loc(causa=0),];
lnt2=lnt2//lnt[loc(causa=0),];
lnt12=lnt12//lnt[loc(causa=0),];
xpxi=ginv(x'*x);
xpxi1=ginv(x1'*x1); xpxi2=ginv(x2'*x2); xpxi12=ginv(x12'*x12);
beta=xpxi*(x'*lnt);
beta1=xpxi1*(x1'*lnt1); beta2=xpxi2*(x2'*lnt2); beta12=xpxi12*(x12'*lnt12);
lnthat=x*beta;
lnthat1=x1*beta1; lnthat2=x2*beta2; lnthat12=x12*beta12;
e=lnt-lnthat;
sqe=ssq(e);

```

continuação do programa BVW1.SAS:

```

do i=1 to n;
  if t1[i,]>t2[i,] then do;
    temp[i,]=t2[i,];
    causa[i,]=2;
  end;
  else do;
    temp[i,]=t1[i,];
    causa[i,]=1;
  end;
  if t1[i,]=t2[i,] then do;
    temp[i,]=t1[i,];
    causa[i,]=12;
  end;
  if temp[i,]>t then do;
    temp[i,]=t;
    causa[i,]=0;
    censura[i,]=0;
  end;
  if causa[i,]=1 then c1[i,]=1;
  if causa[i,]=2 then c2[i,]=1;
  if causa[i,]=12 then c12[i,]=1;
end;
arq1=(temp//temp//temp)||c1//c2//c12)||j(n,1,1)//j(n,1,2)//j(n,1,3)||
(v//v//v);
r={tempo censura causa stress};
create novo.arq1 from arq1[colname=r];
append from arq1;
arq2=temp||v||aux1||causa||censura||c1||c2||c12;
r={tempo stress x causa censura c1 c2 c12};
create novo.arq2 from arq2[colname=r];
append from arq2;
proc print data= novo.arq2; quit;

```

continuação do programa BVW3.SAS:

```

nr={50,50,50,50};
nx=j(4,2,0); ns=j(4,1,0);
aux1=0;
aux={1};//ns;
  do s=1 to 4;
    aux1=aux1+nr[s,];
    ns[s,]=aux1;
    nx[s,]=x[ns[s,],];
    aux[s+1,]=ns[s,]+1;
  end;
lnt1=lnt[loc(causa=1),];
lnt2=lnt[loc(causa=2),];
lnt12=lnt[loc(causa=12),];
stf=sum(lnt1)+sum(lnt2)+sum(lnt12);
run reg;
td=t##d;
tdlnt=td#lnt;
exb1=exp(x*beta1);
exb2=exp(x*beta2);
exb12=exp(x*beta12);
exb=exb1||exb2||exb12;
exbt=exb1+exb2+exb12;
dscore=(r/d)+stf-(exbt*tdlnt);
bscore=nx*rij-(x#td)*exb;
dparc=(r/d##2)+exbt*(tdlnt#lnt);
b1parc=(exb1#x)*(x#td);
b2parc=(exb2#x)*(x#td);
b12parc=(exb12#x)*(x#td);
b1dparc=(exb1#x)*tdlnt;
b2dparc=(exb2#x)*tdlnt;
b12dparc=(exb12#x)*tdlnt;
score=bscore[,1]//bscore[,2]//bscore[,3]//dscore;

```

continuação do programa BVW3.SAS:

```

gle=n-ncol(x);
eqm=sqe/gle;
d=1/sqrt(eqm);
beta1=(-beta1)*d;
beta2=(-beta2)*d;
beta12=(-beta12)*d;
param=beta1//beta2//beta12//d;
print, "estimativas iniciais dos parametros",param;
finish;

                /* INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL */

use novo.arq2;
setin novo.arq2;
read all var{tempo stress x causa censura c1 c2 c12};
aux=stress||censura;
aux1=aux[loc(causa=1),];
aux2=aux[loc(causa=2),];
aux12=aux[loc(causa=12),];
rij=(aux1[loc(aux1[,1]=190),2][+,]||aux2[loc(aux2[,1]=190),2][+,]||
      aux12[loc(aux12[,1]=190),2][+,])//
      (aux1[loc(aux1[,1]=220),2][+,]||aux2[loc(aux2[,1]=220),2][+,]||
      aux12[loc(aux12[,1]=220),2][+,])//
      (aux1[loc(aux1[,1]=240),2][+,]||aux2[loc(aux2[,1]=240),2][+,]||
      aux12[loc(aux12[,1]=240),2][+,])//
      (aux1[loc(aux1[,1]=260),2][+,]||aux2[loc(aux2[,1]=260),2][+,]||
      aux12[loc(aux12[,1]=260),2][+,]);
free aux aux1 aux2 aux12;
ri=rij[+,]; rj=rij[,+];
print rij ri rj;
r=sum(censura);
t=tempo; lnt=log(t);
n=nrow(t);
x=j(n,1)||x;

```


continuação do programa BVW3.SAS:

```

iobs=(b1parc||j(2,4,0)||b1dparc)//(j(2,2,0)||b2parc||j(2,2,0)||b2dparc)//
      (j(2,2,0)||j(2,2,0)||b12parc||b12dparc)//(b1dparc' ||b2dparc' ||b12dparc' ||dparc);
inviobs=ginv(iobs);
iter=0;
do while ((max(abs(score))>1e-5) & (iter<50));
  param=param+(inviobs*score);
  beta1=param[1:2,];
  beta2=param[3:4,];
  beta12=param[5:6,];
  d=param[7,];
  td=t##d;
  tdlnt=td#lnt;
  exb1=exp(x*beta1);
  exb2=exp(x*beta2);
  exb12=exp(x*beta12);
  exb=exb1||exb2||exb12;
  exbt=exb1+exb2+exb12;
  dscore=(r/d)+stf-(exbt'*tdlnt);
  bscore=nx'*rij-(x#td)*exb;
  dparc=(r/d##2)+exbt*(tdlnt#lnt);
  b1parc=(exb1#x)*(x#td);
  b2parc=(exb2#x)*(x#td);
  b12parc=(exb12#x)*(x#td);
  b1dparc=(exb1#x)*tdlnt;
  b2dparc=(exb2#x)*tdlnt;
  b12dparc=(exb12#x)*tdlnt;
  score=bscore[,1]//bscore[,2]//bscore[,3]//dscore;
iobs=(b1parc||j(2,4,0)||b1dparc)//(j(2,2,0)||b2parc||j(2,2,0)||b2dparc)//
      (j(2,2,0)||j(2,2,0)||b12parc||b12dparc)//(b1dparc' ||b2dparc' ||b12dparc' ||dparc);
inviobs=ginv(iobs);
iter=iter+1;
end;

```

continuação do programa BVW3.SAS:

```

dp=sqrt(vecdiag(inviobs));
print,iter param dp;
print, inviobs;
e1=(td#exb1); e2=(td#exb2); e12=(td#exb12);
e=e1//e2//e12;
causa=j(n,1,1)//j(n,1,2)//J(n,1,12);
c=c1//c2//c12;
ec=e||c||causa;
r={e censura causa};
create novo.bvwres from ec[colname=r];
append from ec;

parcov=param||inviobs;
r={param cov};
create novo.parcov from parcov[colname=r];
append from parcov;
quit;

```

Programa BVW4.SAS

```

data novo.tempos;
do i=0 to 40000 by 400;
t=i;
output; keep t;
end;
run;
proc iml wrksize=150;
/* Este módulo auxilia o calculo dos I.C. */
start desvio;
var= G*(inviobs*G');
des= exp(z*sqrt(var));
finish;

```

continuação do programa BVW4.SAS:

```

/* INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL */

use novo.tempos;
read all into t;
n=nrow(t);
use novo.parcov;
read all into w;
beta=w[1:2,1]||w[3:4,1]||w[5:6,1]; d=w[7,1];
cov=(w[1:2,2]//w[1:2,3])|(w[3:4,4]//w[3:4,5])|(w[5:6,6]//w[5:6,7]);
covbd=w[1:2,8]||w[3:4,8]||w[5:6,8];
vard=w[7,8];
v=180; g1=-1000/(v+273.16);
risco=j(n,3,0); sobrev=risco;
P=0.5; alfa=j(1,3,0); ST=1; liS=1; lsS=1;
Saux=j(1,3,1); ltiiaux=j(1,3,0); lchaux=j(1,3,0);
lisaux=j(1,3,1); lssaux=j(1,3,1);
  do j=1 to 3;
    do i=1 to n;
      if t[i,]=0 then do;
        risco[i,j]=0;
        sobrev[i,j]=1;
      end;
    else do;
      der={1}||g1||((d+log(t[i,])); ders={1}||g1||log(t[i,]);
      inviobs=(cov[1:2,j]||cov[3:4,j]||covbd[1:2,j])//
        (covbd[1:2,j]'||vard);
      sigr=der*inviobs*der'; sigs=ders*inviobs*ders';
      risco[i,j]= d*(t[i,]##(d-1))*exp(beta[1,j]+beta[2,j]*g1)*
        exp(-sigr/2);
      sobrev[i,j]= exp(-(t[i,]##d)*exp(beta[1,j]+(beta[2,j]*g1))*
        exp(-sigs/2));
    end;
  end;
end;

```

continuação do programa BVW4.SAS:

```

/* Cálculo do percentil 50% */
v=180; vu={1}||(-1000/(v+273.16));
vub=vu*beta[j];
ach=exp(vub);
alfa[j]=ach;
tpb0=-1/d;
tpb1=tpb0*vu[,2];
tpd=(-1/(d##2))*(log(-log(1-P))-vub);
G=tpb0||tpb1||tpd;
z=1.65; run desvio;
la=-log(1-P)/ach;
tpch=la##(1/d); tptiu=tpch*exp(-var/2);
litp= tpch/des; lstp= tpch*des;
print, "-----";
print,"CAUSA" j;
print,,"Estimativa pontual e I.C. de 90% para o percentil",
      "de 50% sob a temperatura usual de 180 graus C", tptiu litp lstp;

/* Cálculo do risco */
t0=20000; lnt0=log(t0);
lb0=1; lb1=vu[,2]; ld=(1/d)+lnt0;
G=lb0||lb1||ld;
run desvio;
lambch=d*(t0##(d-1))*ach; lambtiu=lambch*exp(-var/2);
lilamb=lambch/des; lslamb=lambch*des;
print,,"Estimativa pontual e I.C. de 90% do risco",
      "no tempo t=20000 sob a temperatura de 180 graus C",
      lambtiu lilamb lslamb;
/* Cálculo da sobrevivência */
G=vu||lnt0;
run desvio;
Hch=(t0##d)*ach; Sch=exp(-Hch);

```

continuação do programa BVW4.SAS:

```

Htiu=Hch*exp(-var/2); Stiu=exp(-Htiu);
li=Sch##des; ls=Sch##(1/des);
print,,"Estimativa pontual e I.C. de 90% para a sobrevivencia",
      "no tempo t=20000 e temperatura de 180 graus C", Stiu li ls;

/* Cálculo da sobrevivência total com todas as causas atuando */
z=2.12; run desvio;
li=Sch##des; ls=Sch##(1/des);
ST=ST*Stiu;
liS=liS*li; lsS=lsS*ls;
z=1.88; run desvio;
Saux[,j]=Stiu;
Itiuaux[,j]=lambtiu; lchaux[,j]=lambch;
lisaux[,j]=Sch##des; lssaux[,j]=Sch##(1/des);
end;
print,,"Estimativa pontual e I.C. de 90% da Sobrev Total",
      "no tempo t=20000 e temperatura de 180 graus C", ST liS lsS;
covv=(w[1:2,6]//w[1:2,7])|(w[3:4,6]//w[3:4,7]);

/* Cálculo da sobrevivência, percentil e do risco marginal do modelo bivariado */
do i=1 to 2;
  SM=saux[,i]*saux[,3];
  lism=lisaux[,i]*lisaux[,3]; lssm=lssaux[,i]*lssaux[,3];
  print, "-----";
  print,,"Estimativa pontual e I.C. de 90% da Sobrev Marginal",
        "do Modelo Bivariado no tempo t=20000 e temperatura ",
        "de 180 graus C", "Causa" i, SM lism lssm;

/* Cálculo do percentil de 50% do modelo bivariado */
inviobs=((cov[1:2,i]|cov[3:4,i])|(cov[1:2,i]|cov[3:4,i])|covbd[1:2,i])//
        ((covv[1:2,i]|covv[3:4,i])|(cov[1:2,3]|cov[3:4,3])|covbd[1:2,3])//
        ((covbd[1:2,i])|(covbd[1:2,3])|vard);

```

continuação do programa BVW4.SAS:

```

tipch=(-log(1-P)/(alfa[,i]+alfa[,3]))##(1/d);
tpb=(-1/d)*(alfa[,i]/(alfa[,i]+alfa[,3]))*vu;
tpb12=(-1/d)*(alfa[,3]/(alfa[,i]+alfa[,3]))*vu;
tpd=(-1/(d**2))*log(-log(1-p)/(alfa[,i]+alfa[,3]));
G=tpb||tpb12||tpd;
z=1.65; run desvio;
tiptiu=tipch*exp(-var/2);
litip=tipch/des; lstip=tipch*des;
print,,"Estimativa pontual e I.C. de 90% para o percentil",
      "de 50% sob a temperatura usual de 180 graus C",
      "Causa" i, tiptiu litip lstip;

lm=ltiuaux[,i]+ltiuaux[,3];
imb= (alfa[,i]/(alfa[,i]+alfa[,3]))*vu;
imb12= (alfa[,3]/(alfa[,i]+alfa[,3]))*vu;
lmd= (1/d)+log(t0);
G=imb||imb12||lmd;
run desvio;
lilm=(lchaux[,i]+lchaux[,3])/des; lsim=(lchaux[,i]+lchaux[,3])*des;
print,,"Estimativa pontual e I.C. de 90% do Risco Marginal",
      "do Modelo Bivariado no tempo t=20000 e temperatura ",
      "de 180 graus C", "Causa" i, lm lilm lsim;
end;

/* Cálculo do percentil total de 50% */
tptch=(-log(1-P)/alfa[,+])##(1/d);
tptb1=(-1/d)*(alfa[,1]/alfa[,+])*vu;
tptb2=(-1/d)*(alfa[,2]/alfa[,+])*vu;
tptb12=(-1/d)*(alfa[,3]/alfa[,+])*vu;
tptd=(-1/(d**2))*log(-log(1-P)/alfa[,+]);
G=tptb1||tptb2||tptb12||tptd;
inviobs=w[1:7,2:8];

```

continuação do programa BVW4.SAS:

```
run desvio;
tpttiu=tptch*exp(-var/2);
litpt=tptch/des; lstpt=tptch*des;
print, "Estimativa pontual e I.C. de 90% para o percentil",
      "total de 50% sob a temperatura usual de 180 graus C", tpttiu litpt lstpt;
rt=risco[,+];
st=sobrev[,1]#sobrev[,2]#sobrev[,3];
rst=t||rt||st;
r={tempo rt st};
create novo.rst from rst[colname=r];
append from rst;
quit;
```

Programa ACBVE1.SAS

```
libname novo 'c:.';
data novo.uniforme;
nr=50; n=4*nr;
do i=1 to n;
  u1=ranuni(145237);
  u2=ranuni(473389);
  u3=ranuni(547321);
  u=ranuni(857689);
  output; keep u1 u2 u3 u;
end;
proc iml wrksize=100;
use novo.uniforme;
read all into w;
v1={1}||(-1000/(190+273.16));
v2={1}||(-1000/(220+273.16));
v3={1}||(-1000/(240+273.16));
v4={1}||(-1000/(260+273.16));
```

continuação do programa ACBVE1.SAS:

```

b1={6,7}; b2={5.2,7}; b12={4,7};
l11=exp(v1*b1); l21=exp(v1*b2); l121=exp(v1*b12);
l12=exp(v2*b1); l22=exp(v2*b2); l122=exp(v2*b12);
l13=exp(v3*b1); l23=exp(v3*b2); l123=exp(v3*b12);
l14=exp(v4*b1); l24=exp(v4*b2); l124=exp(v4*b12);
nr=50;
l1=repeat(l11,nr,1)//repeat(l12,nr,1)//repeat(l13,nr,1)//repeat(l14,nr,1);
l2=repeat(l21,nr,1)//repeat(l22,nr,1)//repeat(l23,nr,1)//repeat(l24,nr,1);
l12=repeat(l121,nr,1)//repeat(l122,nr,1)//repeat(l123,nr,1)//repeat(l124,nr,1);
l=l1||l2||l12;
free l1 l2 l12;
n=4*nr;
um=j(n,1);
v=j(nr,1,190)//j(nr,1,220)//j(nr,1,240)//j(nr,1,260);
stress=repeat(v1,nr,1)//repeat(v2,nr,1)//repeat(v3,nr,1)//repeat(v4,nr,1);
stress=stress[,2];
z=j(n,3,0);
do i=1 to 3;
    z[,i]=(-um/l[,i])#(log(w[,i]));
end;
free um;
x1=z[,1]><z[,3]; y1=z[,2]><z[,3];
x=j(n,1,0); y=x; u=w[,4];
free w;
gama=l[,3]/l[,1:2][,+];
do i=1 to n;
    if z[i,1]>z[i,2] then do;
        x[i,]=x1[i,];
        a=1-exp(-l[i,2]*x1[i,]);
        inva=-log(1-((u[i,]##(1/(1+gama[i,])))*)a));
        y[i,]=(1/l[i,2])*inva;
    end;

```


continuação do programa ACBVE1.SAS:

```

                else do;
                    a=1-exp(-l[i,1]*y1[i,]);
                    inva=-log(1-((u[i,]##(1/(1+gama[i,])))**a));
                    x[i,]=(1/l[i,1])*inva;
                    y[i,]= y1[i,];
                end;

end;
free x1 y1 u gama;
t0=15000; t=x;
causa=j(n,1); c=causa; c1=j(n,1,0); c2=c1;
do i=1 to n;
    if x[i,]>y[i,] then do;
        t[i,]=y[i,];
        causa[i,]=2;
    end;

    if t[i,]>t0 then do;
        t[i,]=t0;
        causa[i,]=0;
    end;

    if causa[i,]=1 then c1[i,]=1;
    if causa[i,]=2 then c2[i,]=1;
    if c1[i,]=c2[i,] then c[i,]=0;
end;
free x y;
eb=t||stress||v||c1||c2||c||causa;
r={tempo stress nivel c1 c2 censura causa};
create novo.eb from eb[colname=r];
append from eb;
aux=t||stress||v||causa;
aux11=aux[loc(causa=1),];
aux12=aux[loc(causa=0),];
aux13=aux[loc(causa=2),];

```

continuação do programa ACBVE1.SAS:

```

aux1=aux11//aux12; aux2=aux13//aux12;
nfc2=nrow(aux2);
do i=1 to nfc2;
  if aux2[i,2]=2 then aux2[i,2]=1;
end;
r={tempo stress nivel cens1};
create novo.ebc1 from aux1[colname=r];
append from aux1;

m={tempo stress nivel cens2};
create novo.ebc2 from aux2[colname=m];
append from aux2;
quit;

```

Programa ACBVE2.SAS

```

proc lifetest data=novo.ebC1 outs=NOVO.LIFETC1 method=pl plots=(ls);
time tempo*CENS1(0);
strata nivel;
proc lifetest data=novo.ebC2 outs=NOVO.LIFETC2 method=pl plots=(ls);
time tempo*CENS2(0);
strata nivel;
proc lifetest data=novo.eb outs=NOVO.LIFETT method=pl plots=(ls);
time tempo*censura(0);
strata nivel;
run;

```

Programa ACBVE3.SAS

```

proc iml wrksize=100;
/* Este módulo calcula os valores iniciais dos parametros da regressão */
start reg;

```

continuação do programa ACBVE3.SAS:

```

Int=log(t);
xpxi=ginv(X'*X);
beta3=xpxi*(X'*Int);
beta3=(-beta3);
param=beta3;
print ,"Estimativas Iniciais dos Parametros",param;
finish;

                /*INICO DO PROGRAMA PRINCIPAL*/

use novo.eb;
setin novo.eb;
read all into w;
t=w[,1];
cens=w[,4:5];
v=w[,3]; free w;
n=nrow(t); um=j(n,1);
x=(-1000)/(v+273.16); x=um||x;
free um;
run reg;
exb3=exp(x*beta3);
nr=50; nn=4; ns=repeat(0,nn,1);
rij=j(4,2,0); nx=j(4,2,0); aux1=0;
aux={1}//ns;
do s=1 to 4;
    aux1=aux1+nr;
    ns[s,]=aux1; nx[s,]=x[ns[s,]];
    aux[s+1,]=ns[s,]+1;
    rij[s,]=cens[aux[s,]:ns[s,]][+,];
end;
free ns aux ;
ri=rij[+,]; rj=rij[,+];
b3score=nx'*rj-(x#exb3)'*t;
b3parc=(x#exb3)'*(x#t);

```

continuação do programa ACBVE3.SAS:

```

score=b3score;
iobs=b3parc;
inviobs=ginv(iobs);
iter=0;
  do while ((max(abs(score))>1e-5) & (iter<50));
    param=param+(inviobs*score);
    beta3=param;
    exb3=exp(x*beta3);
    b3score=nx'*rj-(x#exb3)*t;
    b3parc=(x#exb3)*(x#t);
    score=b3score;
    iobs=b3parc;
    inviobs=ginv(iobs);
    iter=iter+1;
  end;
dpb3=sqrt(vecdiag(inviobs));
theta1=ri[,1]/(ri[,1]+ri[,2]);
theta2=ri[,2]/(ri[,1]+ri[,2]);
iobtheta1=ri[,1]/(theta1##2)+ri[,2]/(theta2##2);
iobtheta2=iobtheta1;
vtheta1=1/iobtheta1; vtheta2=1/iobtheta2;
param=theta1//theta2//beta3;
dp=sqrt(vtheta1)//sqrt(vtheta2)//dpb3;
print rij ri rj;
print, "Estimativas dos Parametros",iter param dp;
print inviobs;
t0=7000;
v=180; vu={1}||(-1000/(v+273.16));
cov13=(vtheta1||J(1,2,0))//(J(2,1,0)||inviobs);
cov23=(vtheta2||J(1,2,0))//(J(2,1,0)||inviobs);
theta3=exp(vu*beta3);
print theta1 theta2 theta3;

```

continuação do programa ACBVE3.SAS:

```

s1u=((1/theta1)||vu)*cov13*((1/theta1)||vu)';
s2u=((1/theta2)||vu)*cov23*((1/theta2)||vu)';
thetai=theta1//theta2;
siu=s1u//s2u;
p=0.5; zn=1.65;
do i=1 to 2;
/* Cálculo do risco */
lich=thetai[i]*theta3; litiu=lich*exp(-siu[i,]/2);
desvioi=exp(zn*sqrt(siu[i,]));
lili=lich/desvioi; lsli=lich*desvioi;
print, "Estimativa pontual e intervalar do risco",
      "sob a temperatura usual de 180 graus C", litiu lili lsli,
"OBS: O intervalo de confiança tem aproximadamente 95% de confiança";
raich=thetai[i]*theta3*t0;
raitiu=raich*exp(-siu[i,]/2);

/* Cálculo da sobrevivencia */
gich=exp(-raich);
gitiu=exp(-raitiu);
ligi=gich##desvioi; lsgl=gich##(1/desvioi);
print, "Estimativa pontual e intervalar da Sobrevivencia",
      "no tempo t=7000 e sob a temperatura de 180 graus C", gitiu ligi lsgl,
"OBS: O intervalo tem aproximadamente 95% de confiança";

/* Cálculo do percentil 50% */
tipch=-log(1-p)/(thetai[i]*theta3);
tiptiu=tipch*exp(-siu[i,]/2);
litip=tipch/desvioi; lstip=tipch*desvioi;
print, "Estimativa pontual e intervalar do percentil de 50%",
      "sob a temperatura usual de 180 graus C", tiptiu litip lstip,
"OBS: O intervalo de confiança tem aproximadamente 95% de confiança";
end;

```

continuação do programa ACBVE3.SAS:

```
/* Cálculo da sobrevivência total com todas as causas */
stch=exp(-exp(vu*beta3)*t0);
s=vu*inviobs*vu';
desvio=exp(zn*sqrt(s));
list=stch##desvio; lsst=stch##(1/desvio);
print,,"Estimacao pontual e intervalar da Sobrevivencia",
      "no tempo t=7000 e temperatura de 180 graus C", stch list lsst;

/* Cálculo do percentil total*/
tpch=-log(1-p)/thcta3;
tptiu=tpch*exp(-s/2);
litp=tpch/desvio; lstp=tpch*desvio;
print,,"Estimacao pontual e intervalar do Percentil Total",
      "sob a temperatura de 180 graus C", tptiu litp lstp;
quit;
```

BIBLIOGRAFIA

- Allen, W. R. (1959). Inference from tests with continuously increasing stress. *Operations Research*, 7, 303-312.
- Basu, A. P., e J. K. Ghosh (1978). Identifiability of the multinormal and other distributions under competing risks model. *J. Multivar. Anal.*, 8, 413-429.
- Basu, A. P., e J. K. Ghosh (1980). Identifiability of distributions under competing risks and complementary risks model. *Commun. Stat.*, A9, 1515-1525.
- Basu, A. P., e N. Ebrahimi (1987). On a bivariate accelerated life test. *J. Stat. Plan. Infer.*, 16, 297-304.
- Berman, S. M. (1963). Notes on extreme values, competing risks and semi-Markov processes. *Ann. Math. Stat.*, 34, 1104-1106.
- Berrettoni, J. N. (1964). Practical applications of the Weibull distribution. *Ind. Qual. Control*, 21, 71-79.

- Block, H. W., e A. P. Basu (1974). A continuous bivariate exponential extension. *J. Am. Stat. Assoc.*, **69**, 1031-1036.
- Birnbaum, Z. W. (1979). *On the Mathematics of Competing Risks*. Washington, D.C.: U.S. Government Printing Office.
- Cornfield, J. (1957). The estimation of the probability of developing a disease in the presence of competing risks. *Am. J. Public Health*, **47**, 601-607.
- Cox, D. R. (1959). The analysis of exponentially distributed lifetimes with two type of failure. *J. R. Stat. Soc. B*, **21**, 411-421.
- Elandt-Johnson, R. C., e N. L. Johnson (1980). *Survival Models and Data Analysis*. New York: Wiley.
- Farewell, V. T., e R. L. Prentice (1977). A study of distributional shape in life testing. *Technometrics*, **19**, 69-75.
- Gail, M. H. (1975). A review and critique of some models used in competing risk analysis. *Biometrics*, **31**, 209-222.
- Gumbel, E. J. (1958). *Statistics of Extremes*. New York: Columbia University Press.
- Gumbell, E. J. (1960). Bivariate exponential distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, **55**, 698-707.
- Holt, J. D. (1978). Competing risk analyses with special reference to matched pair experiments. *Biometrika*, **60**, 267-278.
- Johnson, N. L., e S. Kotz (1986). *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 2, New York: Wiley.

- Kalbfleisch, J. D., e R. L. Prentice (1980). *The Statistical Analysis of Failure Time Data*. New York: Wiley.
- Kao, J. H. K. (1959). A graphical estimation of mixed Weibull parameters in life testing of electron tubes. *Technometrics*, **1**, 389-407.
- Kaplan, E. L., e P. Meier (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Am. Stat. Assoc.*, **53**, 457-481.
- Kennedy, Jr., W. J., e J. E. Gentle (1980). *Statistical Computing*. New York: Marcel Dekker.
- Klein, J. P., e A. P. Basu (1981). Weibull accelerated life tests when there are competing causes of failure. *Commun. Stat.*, **A10**, 2073-2100.
- Klein, J. P., e A. P. Basu (1982). Accelerated life tests under competing exponential failure distributions. *IAPQR Trans.*, **7**, 1-20.
- Lagakos, S. W. (1978). A covariate model for partially censored data subject to competing causes of failure. *Appl. Stat.*, **27**, 235-241.
- Langberg, N., F. Proschan, e A. J. Quinzi (1978). Converting dependent models into independent ones, preserving natural features. *Ann. Probab.*, **6**, 200-210.
- Langberg, N. F., F. Proschan, e A. J. Quinzi (1981). Transformations yielding reliability models based on independent random variables: a survey. Em *Applications in Statistics*. P. R. Krishnaiah, Ed. North Holland, Amsterdam.
- Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: Wiley.
- Lee, L. (1979). Multivariate distributions having Weibull properties. *J. Multivar. Anal.*, **9**, 267-277.

- Lieblien, J., e M. Zelen (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep groove ball bearings. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **57**, 273-316.
- Makehan, W. M. (1874). On an application of the theory of the composition of decremental forces. *J. Inst. Actuaries*, **18**, 317-322.
- Mann, N. R. (1972). Design of over-stress life-test experiments when failure times have the two-parameter Weibull distribution. *Technometrics*, **14**, 437-451.
- Mann, N. R., R. E. Schafer, e N. D. Singpurwalla (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. New York: Wiley.
- Marshall, A. W., e I. Olkin (1967). A multivariate exponential distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, **62**, 30-44.
- Miller, R. G. (1981). *Survival Analysis*. New York: Wiley.
- Moechberger, M. L. (1974). Life tests under dependent competing causes of failure. *Technometrics*, **16**, 39-47.
- Moechberger, M. L., e H. A. David (1971). Life tests under competing causes of failure and the theory of competing risks. *Biometrics*, **27**, 909-923.
- Nádas, A. (1971). The distribution of the identified minimum of a normal pair determines the distribution of the pair. *Technometrics*, **13**, 201-202.
- * Nelson, W. B. (1972). Graphical analysis of accelerated life test data with the inverse power law model. *IEEE Trans. Reliab.*, **R21**, 2-11.
- Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing- Statistical Models, Test Plans and Data Analyses*. New York: Wiley.

- Peterson, A. V. (1976). Bounds for a joint distribution function with fixed sub-distribution functions: application to competing risks. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **73**, 11-13.
- Peto, R., P. N. Lee, e W. S. Paige (1972). Statistical analysis of the bioassay of continuous carcinogens. *Br. J. Cancer*, **26**, 258-261.
- Pershing, A. V., e G. E. Hollingsworth (1964). Derivation of Delbruck's model for random failure of semiconductor material. Em *Physics of Failure in Electronics*, Vol. 2, M. F. Goldberg e J. Vaccaro, Eds.
- N Pieruschka, E. (1961). *Relation Between Lifetime Distributions and the Stress Level Causing Failures*. LMSD-800440. Lockheed Missiles and Space Division, Sunnyvale, California.
- Pike, M. C. (1966). A method of analysis of a certain class of experiments in carcinogenesis. *Biometrics*, **22**, 142-161.
- Prentice, R. L., J. D. Kalbfleisch, A. V. Peterson, N. Flournoy, V. T. Farewell, e N. E. Breslow (1978). The analysis of failure times in the presence of competing risks. *Biometrics*, **34**, 541-554.
- Sarkar, S. K. (1987). A continuous bivariate exponential distribution. *J. Am. Stat. Assoc.*, **82**, 667-675.
- SAS Institute Inc. SAS User's Guide : *Statistics, Version 5 edition*. Cary, N.C.: SAS Institute Inc., 1985, 956 pp.
- Thomas, R. E. (1964). When is a life test truly accelerated ?. *Electronic design*, 64-70.
- Thomas, D. R., L. J. Bain, e C. E. Antle (1969). Inferences on the parameters of the Weibull distribution. *Technometrics*, **11**, 445-460.

- Tsiatis, A. (1975). A nonidentifiability aspect of the problem of competing risks. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**, 20-22.
- Tobias, P. A., e D. Trindade (1986). *Applied Reliability*. New York: Van Nostrand Reinhold Company.
- Wada, C., e P. K. Sen (1993). Restricted alternatives test in a parametric model with competing risk data. *J. Stat. Plan. Infer.* Submetido para publicação.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *J. Appl. Mech.*, **18**, 293-297.
- Whittemore, A., e B. Altschuller (1976). Lung cancer incidence in cigarette smokers: further analysis of Doll and Hill's data for British physicians. *Biometrics*, **32**, 805-816.