

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

TALES RAIAN RIBEIRO MALTEZ

**Interações do tipo parasitismo/predação entre
ácaros da água e mosquitos: uma análise
matemática.**

Campinas

2018

Tales Raian Ribeiro Maltez

Interações do tipo parasitismo/predação entre ácaros da água e mosquitos: uma análise matemática.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Tales Raian Ribeiro Maltez e orientada pelo Prof. Dr. Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.

Campinas

2018

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 155048/2016-3; CAPES

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M298i Maltez, Tales Raian Ribeiro, 1994-
 Interações do tipo parasitismo/predação entre ácaros da água e mosquitos
 : uma análise matemática / Tales Raian Ribeiro Maltez. – Campinas, SP : [s.n.],
 2018.

 Orientador: Bianca Morelli Rodolfo Calsavara.
 Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
 Matemática, Estatística e Computação Científica.

 1. Equações diferenciais parabólicas. 2. Dinâmica populacional. 3. Teoria
 de ponto fixo. 4. Existência de solução. 5. Unicidade de solução. I. Calsavara,
 Bianca Morelli Rodolfo, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto
 de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Interaction of the type parasitism/predation between water mites
and mosquitoes : a mathematical analysis

Palavras-chave em inglês:

Parabolic differential equations

Population dynamics

Fixed point theory

Existence of solution

Uniqueness of solution

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Bianca Morelli Rodolfo Calsavara [Orientador]

Gabriela Del Valle Planas

Ma To Fu

Data de defesa: 26-10-2018

Programa de Pós-Graduação: Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 26 de outubro de 2018 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). MA TO FU

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico este trabalho aos meus pais Josias e Rita pelo apoio e amor incondicional e aos meus fieis companheiros Ghost e Potter.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a meus pais, Josias e Rita, irmãos e irmã que mesmo muito longe estão me apoiando, acreditando e torcendo pelo meu sucesso nesta batalha. À minha linda sobrinha, Isabela, que é meu anjinho.

À minha querida esposa, Mabel, por ter me acompanhado e batalhado comigo nesta jornada. Aos meus cachorros, Ghost e Potter, que são de fato os melhores amigos, por me darem um amor tão sincero e bonito.

À minha orientadora, Bianca, por toda a paciência e toda a assistência na realização deste trabalho, por toda ajuda e ensinamentos que foram essenciais para meu desenvolvimento. Aos professores da banca pela contribuição valiosa e pelo tempo cedido na leitura deste trabalho. Aos professores do Imecc que me qualificaram para novos desafios. Ao ex-coordenador da pós-graduação do Imecc, Lucas, por toda orientação e ajuda ao longo do curso.

À todos os meus amigos de infância e aos novos que encontrei no Imecc lutando pelo mesmo objetivo.

À meus tios, tias, primos e primas por toda a confiança depositada.

À Capes e CNPq (processo número 155048/2016-3) pelo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica de Campinas pela incrível estrutura disponibilizada.

Muito obrigado a todos.

Resumo

Diversos tipos de interações ecológicas ocorrem na natureza de forma simultânea entre duas espécies. Em particular, temos as interações do tipo parasita/hospedeiro e presa/predador. Aqui é estudada uma modificação do modelo introduzido em (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006). No modelo citado é analisada a dinâmica populacional entre ácaros da água (*water mites*) e mosquitos. Os *water mites*, Hydrachnidia, Hydracarina ou Hydrachnellae formam um grupo de ácaros aquáticos contendo mais de 40 famílias e 5.000 espécies. Eles podem ser encontrados em uma grande variedade de ambientes aquáticos, desde lagos, águas profundas, cachoeiras, águas termais e até em águas salgadas.

O ciclo de vida básico dos ácaros da água consiste em ovo, pré-larva, larva, três estágios de ninfa e o estágio adulto. Enquanto que o ciclo de vida dos mosquitos consiste em três fases aquáticas (ovo, larva e pupa) e fase alada. As larvas dos ácaros da água parasitam as fases aquáticas dos mosquitos para se tornarem ninfas. Além disso, as ninfas e os ácaros da água adultos alimentam-se dos ovos e das larvas dos mosquitos. Assim, temos dois principais tipos de interação na dinâmica populacional entre os ácaros da água e os mosquitos: parasitismo e predação.

Em relação ao modelo estudado em (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006), no nosso caso são introduzidos novos termos para permitir movimentação das populações de ácaros da água e de mosquitos, exceto ovos e pupas, obtendo um sistema com 5 equações diferenciais parciais parabólicas e 2 equações diferenciais ordinárias acopladas, sendo todas não lineares.

Para este sistema é aplicado o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder para garantir a existência e unicidade de solução. Em seguida é analisada a regularidade da solução utilizando argumento do tipo bootstrapping.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais parabólicas, Dinâmica populacional, Teorema de ponto fixo, Existência e unicidade de solução, Regularidade de solução.

Abstract

Some kinds of ecological interactions between two species occur simultaneously in nature. In particular, we have the interactions of type parasite/host and prey/predator. Here it is studied a modification of model introduced in (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006). In the mentioned model it is analyzed the population dynamics between water mites and mosquitoes. Water mites, Hydrachnidia, Hydracarina or Hydrachnellae, are a group of mites covering more than 40 families and 5.000 species. They exist in a variety of freshwater bodies, such as deep lakes, waterfalls, hot spring and in marine environments.

The basic life cycle of water mites consists of eggs, pre-larval, larval, three nymphal stages, and adult stage. And the basic life cycle of mosquitoes consists in three aquatic phases (egg, larvae and pupae) and a winged phase. The larvae of the water mites needs to parasiteze aquatic phases of the mosquitoes in order to become nymphs. On the order hand, nymphs and adult mites feeds the eggs and the larvae of the mosquitoes. Thus, there are two major types of interaction in the population dynamics of the water mites and mosquitoes: parasitism and predation.

Concerning to the model studied in (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006), in our case are introduced new terms to allow population movement of the water mites and mosquitoes, except eggs and pupae. Thus we get a system with 5 parabolic partial differential equations and 2 ordinary differential equations. Moreover, all mentioned equations are non-linear.

For this system it is applied Leray-Schauder fixed point theorem to ensure the existence and uniqueness of the solution. And then, it is analyzed the regularity of solution by using bootstrapping arguments.

Keywords: Parabolic partial differential equations , Population dynamics, Fixed point theorem, Existence and uniqueness of solution, Regularity of solution.

Sumário

	Introdução	10
1	RESULTADOS PRINCIPAIS E PRELIMINARES	14
1.1	Resultados principais e hipóteses técnicas	14
1.1.1	Hipóteses técnicas	15
1.1.2	Resultados principais	15
1.2	Preliminares	16
1.2.1	Espaços L^p	16
1.2.2	Espaços de Sobolev	19
1.2.3	Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder	21
1.2.4	Regularidade parabólica	22
2	PROVA DOS RESULTADOS PRINCIPAIS	24
2.1	Sistema modificado	24
2.2	Solução do sistema modificado	30
2.3	Demonstração do teorema de existência e unicidade	47
2.4	Demonstração do teorema de regularidade	49
3	CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
	REFERÊNCIAS	55

Introdução

O modelo analisado em (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006) é descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias, que representa interações ecológicas entre os ácaros da água e os mosquitos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P' = \varphi_M \left(1 - \frac{P}{C_M}\right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P}{C_M}\right) W - (\alpha + \mu_P) P - k_2 PA & \text{em } \Omega, \\ M' = \alpha P - k_1 M L_1 - \mu_M M & \text{em } \Omega, \\ W' = k_1 M L_1 - \mu_W W & \text{em } \Omega, \\ L_1' = \left(\varphi_A + \frac{q k_2 P}{C_M}\right) \left(1 - \frac{L_1}{C_A}\right) A - \mu_{L_1} L_1 - k_1 M L_1 & \text{em } \Omega, \\ L_2' = k_1 M L_1 - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2 & \text{em } \Omega, \\ A' = \sigma L_2 - \mu_A A & \text{em } \Omega, \end{array} \right.$$

sendo que todos os parâmetros do sistema acima são não-negativas. A solução pode ser encontrada na região

$$\Omega = \{(P, M, W, L_1, L_2, A) \in \mathbb{R}_+^6 : 0 \leq P \leq C_M, 0 \leq L_1 \leq C_A\}.$$

No artigo (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006) foi considerado que a população aquática dos mosquitos é composto por larvas e pupas e é denotada por P , os mosquitos adultos são divididos em subpopulações de mosquitos saudáveis, denotada por M , e os parasitados, denotada por W . No mesmo trabalho, para os ácaros da água foram consideradas as populações de pré-larvas, denotada por L_1 , de larvas, denotada por L_2 , e de ácaros adultos, denotada por A .

Assim, de acordo com o modelo proposto por (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006), temos um sistema de equações composto de seis equações diferenciais ordinárias acopladas, no qual não foi considerada a movimentação das populações. Dito isto, adaptamos o modelo apresentado acima separando, primeiramente, as populações de larvas (P_1) e de pupas (P_2) na população aquática (P) dos mosquitos. Além disso, foram consideradas as movimentações para populações de larvas e fase adulta (saudáveis e parasitados) dos mosquitos e para as populações de larvas e adultos dos ácaros da água. Desta forma, foi obtido um modelo mais realista, contendo cinco equações diferenciais parciais parabólicas e duas equações diferenciais ordinárias.

Agora, apresentamos o modelo aqui tratado, que representa interações ecológicas entre os ácaros da água e os mosquitos. Consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto e limitado associado a uma certa região geográfica onde ocorrem as interações entre as espécies. Sejam $0 < T < +\infty$, o tempo final de interesse, $Q = \Omega \times (0, T)$ o cilindro

parabólico e $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$. Denotaremos a derivada temporal $' = \frac{\partial}{\partial t}$ para simplificar a notação. Tal modelo é representado pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1' - k_P \Delta P_1 = \varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) W - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 - k_2 A P_1 & \text{em } Q, \\ P_2' = \alpha_1 P_1 - (\alpha_2 + \mu_{P_2}) P_2 & \text{em } Q, \\ M' - k_M \Delta M = \alpha_2 P_2 - k_1 M L_1 - \mu_M M & \text{em } Q, \\ W' - k_M \Delta W = k_1 M L_1 - \mu_W W & \text{em } Q, \\ L_1' = \left(\varphi_A + \frac{q k_2 P_1}{C_M}\right) \left(1 - \frac{L_1}{C_A}\right) A - \mu_{L_1} L_1 - k_1 M L_1 & \text{em } Q, \\ L_2' - k_L \Delta L_2 = k_1 M L_1 - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2 & \text{em } Q, \\ A' - k_A \Delta A = \sigma L_2 - \mu_A A & \text{em } Q, \end{array} \right. \quad (1)$$

com as condições iniciais e de fronteira:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial P_1}{\partial \eta} = \frac{\partial M}{\partial \eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{\partial L_2}{\partial \eta} = \frac{\partial A}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \Gamma, \\ P_1(\cdot, 0) = P_{10}(\cdot) & \text{em } \Omega, \\ P_2(\cdot, 0) = P_{20}(\cdot) & \text{em } \Omega, \\ M(\cdot, 0) = M_0(\cdot) & \text{em } \Omega, \\ W(\cdot, 0) = W_0(\cdot) & \text{em } \Omega, \\ L_1(\cdot, 0) = L_{10}(\cdot) & \text{em } \Omega, \\ L_2(\cdot, 0) = L_{20}(\cdot) & \text{em } \Omega, \\ A(\cdot, 0) = A_0(\cdot) & \text{em } \Omega, \end{array} \right. \quad (2)$$

onde η é o vetor unitário normal exterior a fronteira de Ω .

Como descrito em (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006), nas comunidades aquáticas existem grupos dos antrópodes que possuem diversas interações com mosquitos. No caso dos ácaros da água (*water mites*) cujo ciclo de vida consiste de ovo, pré-larva, larva, estágio de ninfa e estágio adulto, tem-se que as larvas precisam parasitar a fase alada dos mosquitos para tornar-se ninfas, e assim, completar o seu ciclo de vida. Por outro lado, as ninfas e os adultos dos ácaros da água alimentam-se dos ovos e das larvas da fase alada dos mosquitos. Desta forma, temos as duas principais dinâmicas populacionais: parasitismo e predadorismo.

Diversos estudos experimentais e de campo a respeito da influência dos ácaros da água nos seus hospedeiros tem sido realizada devido ao crescente interesse em utilizá-los como um controle natural biológico de espécies dos mosquitos transmissores de doenças.

Adaptamos o modelo matemático proposto em (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006) para interações entre mosquitos e ácaros da água para podermos considerar a movimentação das espécies, tornando assim um modelo mais realista. A população dos mosquitos é dividida em dois grupos: o estágio aquático (larvas e pupas, denotados por P_1 e P_2 , respectivamente) e o estágio adulto. Na presença dos ácaros da água, a população

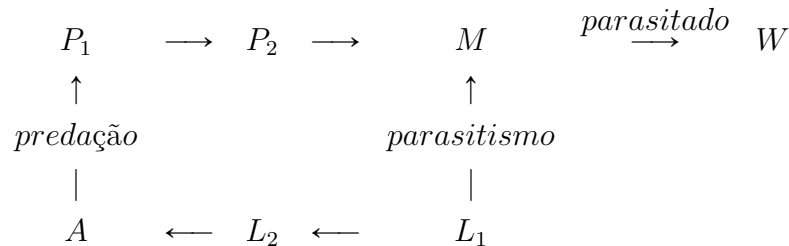
de mosquitos adultos é dividida em saudáveis (M) e parasitados (W). Para os ácaros da água consideramos os estágios de pré-larva (L_1), larva (L_2) e a população de deutoninfas e adultos (A). As pré-larvas dos ácaros da água procuram e se fixam aos mosquitos adultos, as larvas os parasitam, e as deutoninfas e os adultos dos ácaros da água se alimentam das larvas dos mosquitos.

Os parâmetros nas equações são funções no espaço-tempo e seus significados são: a taxa mortalidade per capita das populações $P_1, P_2, M, W, L_1, L_2, A$ são denotadas, respectivamente, por $\mu_{P_1}, \mu_{P_2}, \mu_M, \mu_W, \mu_{L_1}, \mu_{L_2}, \mu_A$. Como esperamos que o parasitismo aumente a mortalidade dos mosquitos, então temos que $\mu_M \leq \mu_W$. A taxa de ovoposição dos mosquitos é proporcional a sua densidade populacional, mas é regulada pela capacidade ambiente (C_M), a qual depende da ocupação dos criadouros. Assim, assumimos que a taxa de ovoposição dos mosquitos saudáveis e parasitados são dadas por $\varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right)$ e $\varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right)$, respectivamente, onde φ_M, φ_W são as taxas intrínsecas de ovoposição destas populações. Mais ainda, esperamos que os parasitas reduzam o nascimento dos mosquitos, então $\varphi_W \leq \varphi_M$.

O consumo das larvas de mosquito pelos ácaros da água adultos está diretamente relacionado com sua fecundidade, então a taxa de ovoposição dos ácaros da água é incrementada por $\frac{qk_2P_1}{C_M} \left(1 - \frac{L_1}{C_A}\right)$, onde q denota o aumento da carga dos ovos dos ácaros da água com o consumo de larvas dos mosquitos, C_A a capacidade ambiente dos ácaros da água adultos.

Os ácaros da água necessitam parasitar os mosquitos para completar seu ciclo de vida. Supondo que caçam de forma aleatória e independente, então a taxa de mosquitos parasitados pelos ácaros da água é dada por $M(1 - e^{-aL_1})$, sendo a eficiência da procura. Para simplificar o modelo, usamos a aproximação k_1ML_1 para o termo acima, onde $k_1 = ab$ e $\frac{1}{b}$ representa o tempo médio de procura. Assim, temos que o fluxo do estágio pré-larva (L_1) para o estágio larva (L_2) é dada pelo termo k_1ML_1 . As larvas tornam-se adultos a uma taxa $\sigma(\cdot) \geq 0$.

O seguinte diagrama ilustra as interações entre os ácaros da água e os mosquitos:



Consideramos neste trabalho que os parâmetros não são necessariamente constantes, assim podemos evitar possíveis efeitos abióticos como, por exemplo, a variação na temperatura e humidade. Desta forma, o resultado é mais realista se comparado com um modelo de

parâmetros constantes. Além disso, temos que as constantes k_p, k_M, k_L, k_A representam o coeficiente de difusão de cada população.

O objetivo principal deste trabalho é garantir a existência e unicidade da solução do sistema (1)-(2), utilizando o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, e analisar a regularidade da solução por meio de argumentos do tipo bootstrapping.

O trabalho está organizado como descrito a seguir. No capítulo 1, são enunciados as hipóteses técnicas e os resultados principais. São apresentados também alguns resultados preliminares para uma melhor compreensão do trabalho. No capítulo 2, é aplicado o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder para garantir a existência e unicidade da solução do sistema (1)-(2). Em seguida, é utilizado argumentos do tipo bootstrapping para analisar a regularidade de tal solução. Por fim, no capítulo 3, são feitas as considerações finais a respeito do tema estudado.

1 Resultados Principais e Preliminares

1.1 Resultados principais e hipóteses técnicas

Aqui vamos denotar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto e limitado, com fronteira suave $\partial\Omega$, $0 \leq T < +\infty$ e $Q = \Omega \times (0, T)$, com $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$. Usaremos a seguinte notação para os espaços de Sobolev, dados $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, denotamos

$$W_p^k(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

onde a derivada $D^\alpha f$ denota a derivada fraca (ver Definição (1.1)). Em particular, se $p = 2$, denotamos

$$W_2^k(\Omega) = H^k(\Omega).$$

Propriedades deste espaço podem ser encontradas, por exemplo, em (ADAMS, 1975).

O problema (1)-(2) será estudado no espaço funcional

$$W_q^{2,1}(Q) = \{f \in L^q(Q); D^\alpha f \in L^q(Q), \forall 1 \leq \alpha \leq 2, f_t \in L^q(Q)\},$$

onde $D^\alpha f$ denota a derivada em relação à variável espacial como em (LADYZHENSKAIA; SOLONNIKOV; URAL'CEVA, 1968). Também serão utilizados os seguintes espaços:

$$L^p(0, T; B) = \{f : (0, T) \rightarrow B; \|f(t)\|_{L^p(0,T;B)} < +\infty\},$$

e B é um espaço de Banach como em (EVANS, 1998) e sua norma é dada por

$$\|f(t)\|_{L^p(0,T;B)} = \|\|f(t)\|_B\|_{L^p(0,T)},$$

se $1 \leq p < +\infty$ e

$$\|f(t)\|_{L^\infty(0,T;B)} = \sup_{t \in [0,T]} \text{ess} \|f(t)\|_B,$$

se $p = +\infty$.

Tem-se ainda que, $L^p(Q) = L^p((0, T); L^p(\Omega))$. Além disso, denotaremos por

$$C([0, T]; B) = \{f : [0, T] \rightarrow B : \|f\|_{C([0,T];B)} < +\infty\},$$

onde B é um espaço de Banach e

$$\|f\|_{C([0,T];B)} = \sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_B.$$

A seguir, enunciamos as hipóteses que serão utilizadas ao longo do trabalho e serão chamadas de hipóteses técnicas.

1.1.1 Hipóteses técnicas

- (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um C^2 -domínio aberto e limitado.
- (ii) $0 \leq T < +\infty$ e $Q = \Omega \times (0, T)$.
- (iii) As funções $\varphi_M, \varphi_W, \varphi_A, \mu_{P_1}, \mu_{P_2}, \mu_M, \mu_W, \mu_{L_1}, \mu_{L_2}, \mu_A, \sigma, \alpha_1, \alpha_2, k_1$ e k_2 são não negativas de classe $L^\infty(Q)$.
- (iv) Os coeficientes $k_P, k_M, k_L, k_A, C_M, C_A$ e q são constantes positivas.
- (v) $P_{10}, M_0, W_0, L_{20}, A_0 \in H^2(\Omega)$ e $P_{20}, L_{10} \in L^\infty(Q)$ são funções não negativas e $P_{10} \leq C_M$.

Observação 1.1. A imposição do sinal das funções no item (v) se deve a interpretação biológica do sistema (1)-(2).

1.1.2 Resultados principais

Teorema 1.1. Suponha que as hipóteses técnicas 1.1.1 sejam satisfeitas, então existe uma única solução $(P_1, P_2, M, W, L_1, L_2, A) \in W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ do problema (1)-(2). Além disso,

$$\|P_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|P_2\|_{L^4(Q)} + \|M\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|L_1\|_{L^4(Q)} + \|L_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C,$$

onde C é uma constante positiva.

Teorema 1.2. Suponha que as hipóteses técnicas 1.1.1 sejam satisfeitas. Se $(P_1, P_2, M, W, L_1, L_2, A) \in W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é solução do problema (1)-(2), então $P_1, M, W, L_2, A \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)$, $P_2 \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ e $L_1 \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|P_2\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} + \|M\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|L_1\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} \\ + \|L_2\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

Além disso, se $P_{10}, M_0, W_0, L_{20}, A_0 \in W_p^2(\Omega)$, para algum $p \geq 2$, então $P_1, M, W, L_2, A \in W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|P_2\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} + \|M\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|L_1\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} \\ + \|L_2\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

Em particular, para $p = +\infty$, temos que $P_1, M, W, L_2, A \in W_q^{2,1}(Q)$ para todo $2 \leq q < +\infty$.

1.2 Preliminares

Nesta seção apresentaremos os conceitos e resultados necessários para melhor compreensão do texto.

1.2.1 Espaços L^p

Aqui serão utilizados os espaços $L^p(\Omega)$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, munido da norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)|, \quad \text{para } p = +\infty$$

É importante lembrar que $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Agora, demonstraremos alguns resultados que foram importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Tais resultados encontram-se, por exemplo, em (EVANS, 1998) e (ADAMS, 1975).

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young). *Sejam $1 < p, q < +\infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração.

Observe que no caso $a^p = b^q$ é obtida a igualdade. De fato, note que

$$ab = a(b^q)^{\frac{1}{q}} = a(a^p)^{\frac{1}{q}} = a^{\frac{p}{q}} a^{\frac{p}{q}} = a^{p(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})} = a^p = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

pois $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Caso $a^p \neq b^q$, como a função exponencial é estritamente convexa, isto é,

$$\exp(tx + (1-t)y) < t\exp(x) + (1-t)\exp(y), \quad \forall t \in (0, 1).$$

Assim, tomando $t = \frac{1}{p}$, $1-t = \frac{1}{q}$, $x = \ln(a^p)$ e $y = \ln(b^q)$ segue que

$$ab = \exp(\ln(ab)) = \exp\left(\frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q}\right) < \frac{\exp(\ln(a^p))}{p} + \frac{\exp(\ln(b^q))}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

□

Proposição 1.2 (Desigualdade de Cauchy). *Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, para todo $\varepsilon \geq 0$ temos que*

$$a \cdot b \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$$

Demonstração.

Basta notar que,

$$0 \leq \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}} \right)^2 = \frac{\varepsilon a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2\varepsilon} \Rightarrow ab \leq \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}.$$

□

Proposição 1.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração.

Para $p = 1$ segue-se da desigualdade triangular. De fato, note que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} |f + g| \leq \int_{\Omega} (|f| + |g|) \\ &= \int_{\Omega} |f| + \int_{\Omega} |g| = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \|g\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Agora considere $p > 1$ e tome q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por definição,

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |f + g|^p = \int_{\Omega} |f + g| |f + g|^{p-1}.$$

Daí, usando a desigualdade triangular, temos que

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} + \int_{\Omega} |g| |f + g|^{p-1}.$$

E, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|(f + g)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega} |g| |f + g|^{p-1} \leq \|g\|_{L^p(\Omega)} \|(f + g)^{p-1}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Logo, temos que

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)}^p \leq (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}) \|f + g\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}.$$

De onde

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

O caso $L^\infty(\Omega)$ segue da definição e das propriedades de supremo essencial. □

Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \leq 1$. Então, $fg \in L^r(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração.

Consideremos inicialmente o caso $r = 1$. Se $f \equiv 0$ ou $g \equiv 0$ q.t.p em Ω , então a desigualdade é trivial. Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ tais que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \neq 0$ e $\|g\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$. Pela desigualdade de Young (Proposição 1.1), temos que

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Assim, tomando $a = \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p$ e $b = \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\right)^q$ temos que

$$\left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right) \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\right) \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\right)^q.$$

Logo, integrando a desigualdade acima e observando que

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p = \frac{1}{p}, \quad \int_{\Omega} \frac{1}{q} \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\right)^q = \frac{1}{q},$$

então

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |fg| \leq 1.$$

De onde,

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Portanto, segue o resultado para $r = 1$.

Agora, consideremos o caso $r > 1$. Para $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $f^r \in L^{\frac{p}{r}}(\Omega)$ e $g^r \in L^{\frac{q}{r}}(\Omega)$. Além disso,

$$\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{r}{r} = 1.$$

Então, aplicando o caso anterior ($r = 1$) em f^r e g^r temos que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^r(\Omega)}^r &= \|(fg)^r\|_{L^1(\Omega)} = \|f^r g^r\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|f^r\|_{L^{\frac{p}{r}}(\Omega)} \|g^r\|_{L^{\frac{q}{r}}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)}^r \|g\|_{L^q(\Omega)}^r. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

□

Lema 1.1 (Lema de Gronwall). *Seja $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ função não negativa e diferenciável tal que*

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

sendo φ, ψ funções não negativas e integráveis em $[0, T]$. Então,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right].$$

En particular, se

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) \quad e \quad \eta(0) = 0,$$

então $\eta(t) \equiv 0$ em $[0, T]$.

Demonstração. Suponhamos que

$$\eta'(t) \leq \varphi(t)\eta(t) + \psi(t).$$

Multiplicando por $e^{-\int_0^t \varphi(s)ds}$ ambos os lados da desigualdade e reorganizando os termos, segue que

$$\left(\eta(t) e^{-\int_0^t \varphi(s)ds} \right)' \leq \psi(t) e^{-\int_0^t \varphi(s)ds}.$$

Integrando de 0 a t , temos

$$\eta(t) e^{-\int_0^t \varphi(s)ds} - \eta(0) \leq \int_0^t \psi(s) e^{-\int_0^s \varphi(r)dr} ds.$$

Logo,

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds} \eta(0) + \int_0^t \psi(s) e^{\int_s^t \varphi(r)dr} ds.$$

Mas como $\varphi(t), \psi(t)$ são não negativas, então

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \varphi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right].$$

□

Proposição 1.5. *Seja $u \in L^p(0, T; B)$ tal que $u_t \in L^p(0, T; B)$, para algum $1 \leq p \leq +\infty$. Então, $u \in C([0, T]; B)$ e*

$$\|u\|_{C([0, T]; B)} \leq C \left[\|u\|_{L^p(0, T; B)} + \|u_t\|_{L^p(0, T; B)} \right].$$

1.2.2 Espaços de Sobolev

Espaços de Sobolev são uma ferramenta importante no estudo de equações diferenciais parciais.

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Sejam $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C^\infty(\Omega)$, sendo ϕ de suporte compacto. Sendo assim, segue da integração por partes que:

$$\int_{\Omega} f(x) \phi_{x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} f_{x_i}(x) \phi(x) dx.$$

Em geral, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ é um multi-índice, temos:

$$\int_{\Omega} f(x) (\partial^\alpha \phi)(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} (\partial^\alpha f)(x) \phi(x) dx,$$

onde $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} f$.

A última igualdade motiva a seguinte definição:

Definição 1.1. Dadas $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, dizemos que g é a α -ésima derivada fraca de f se:

$$\int_{\Omega} f(x)(\partial^\alpha \phi)(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(x)\phi(x) dx,$$

para todo $\phi \in C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto.

Observação 1.2.

(i) Se a derivada fraca existir, esta é única.

(ii) Se $f \in C^k(\Omega)$, então sua derivada fraca $g = \partial^\alpha f$ ($|\alpha| \leq k$) coincide com a derivada no sentido clássico.

Proposição 1.6 (Propriedades da derivada fraca). Sejam $f, g \in W_p^k(\Omega)$, então:

1. $\partial^\alpha f \in W_p^{k-|\alpha|}(\Omega)$;
2. $\partial^\beta(\partial^\alpha f) = \partial^\alpha(\partial^\beta f)$, $\forall \alpha, \beta$ tal que $|\alpha| + |\beta| \leq k$;
3. Se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tem suporte compacto, então $\varphi f \in W_p^k(\Omega)$, e

$$\partial^\alpha(\varphi f) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta \varphi \partial^{\alpha-\beta} f,$$

onde $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!$ e $\alpha \geq \beta$ se $\alpha_i \geq \beta_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.2. Ω satisfaz a propriedade do cone se para cada ponto $x \in \partial\Omega$, existe um cone K com vértice em x e uma vizinhança V de x tais que $K \cap V \subset \Omega$.

Observação 1.3. Se $\partial\Omega$ for Lipschitz ou classe C^k , com $k \geq 1$, então $\partial\Omega$ satisfaz a propriedade do cone.

Lema 1.2. Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio aberto e limitado satisfazendo a propriedade do cone e $1 \leq p < +\infty$. Então,

- i) se $n \leq 3$, então $W_p^2(\Omega) \hookrightarrow W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$, para todo $p \leq q \leq \frac{5p}{3}$;
- ii) se $kp \leq n$, então $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $p \leq q \leq \frac{np}{(n-kp)}$;
- iii) se $kp = n$, então $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $p \leq q < \infty$;
- iv) se $kp > n$, então $W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Observação 1.4. Este resultado é consequência do Teorema 5.4, p. 97, de (ADAMS, 1975).

Lema 1.3. Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e limitado tal que $\partial\Omega$ satisfaz a propriedade do cone. Então, o espaço $W_p^{2,1}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^q(\Omega)$ para q satisfazendo:

- i) $1 \leq q \leq \frac{p(n+2)}{n+2-2p}$, se $p < \frac{n+2}{2}$;
- ii) $1 \leq q < \infty$, se $p = \frac{n+2}{2}$;
- iii) $q = \infty$, se $p > \frac{n+2}{2}$.

Além disso, se $u \in W_p^{2,1}(\Omega)$, tem-se que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^{2,1}(\Omega)},$$

onde C é uma constante dependendo apenas de Ω, T, p, q, n .

Observação 1.5. Este resultado é chamado de Teorema de imersão de Lions-Peetre (LIONS, 1983). É também um caso particular do Lema 3.3, p. 80, em (LADYZHENSKAIA; SOLONNIKOV; URAL'CEVA, 1968), com $l = 1$ e $r = s = 0$.

1.2.3 Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder

Para demonstrações sobre existência e unicidade de solução de sistemas de equações diferenciais parciais com condição inicial e de fronteira utilizamos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder como enunciado abaixo (ver (FRIEDMAN, 1964)).

Teorema 1.3. Seja B um espaço de Banach e $T : B \times [0, 1] \rightarrow B$ uma transformação tal que $y = T_\lambda x$, com $x, y \in B$ e $\lambda \in [0, 1]$. Suponha que:

- i) $T_\lambda x$ está bem definido $\forall x \in B$ e $\forall \lambda \in [0, 1]$.
- ii) $\forall \lambda \in [0, 1]$ fixo, $T_\lambda : B \rightarrow B$ é uma transformação contínua e compacta.
- iii) $\forall x \in A$, $A \subset B$ limitado, $T_\lambda x$ é uma transformação uniformemente contínua em λ .
- iv) T_0 possui um único ponto fixo em B .
- v) Existe uma constante $\rho > 0$ tal que qualquer possível solução de $x = T_\lambda x$, para algum $\lambda \in [0, 1]$, satisfaz

$$\|x\|_B \leq \rho.$$

Então existe um único $x \in B$ solução da equação $x = T_1 x$.

1.2.4 Regularidade parabólica

Consideremos o seguinte problema de equações diferenciais parciais parabólico de valor inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n a_j(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a(x,t)u = f, & \text{em } Q \\ \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x,t)u = 0, & \text{em } \Gamma \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot), & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Utilizando o Teorema 9.1, p. 341, e uma observação do final do Capítulo IV, seção 9, p. 351 de (LADYZHENSKAIA; SOLONNIKOV; URAL'CEVA, 1968), obtemos a existência, unicidade e regularidade de solução para o problema acima.

Apresentamos assim um resultado importante para este trabalho.

Proposição 1.7. *Seja Ω um domínio aberto e limitado em $\mathbb{R}^n$, com $\partial\Omega$ de classe C^2 e $p > 1$. Suponha que,*

(i) $a_{ij} \in C(\overline{Q})$, $i, j = 1, \dots, n$; $[a_{ij}]_{n \times n}$ é uma matriz real positiva tal que, para alguma constante positiva β , tem-se que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geq \beta |\xi|^2,$$

para todo $(x,t) \in Q$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $f \in L^p(Q)$;

(iii) $a_i \in L^r(Q)$, onde $r = \max(p, n+2)$, se $p \neq n+2$, ou $r = n+2 + \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, se $p = n+2$.

(iv) $a \in L^s(Q)$, onde $s = \max\left(p, \frac{n+2}{2}\right)$, se $p \neq \frac{n+2}{2}$, ou $s = \frac{n+2}{2} + \varepsilon$, para algum $\varepsilon \geq 0$, se $p = \frac{n+2}{2}$;

(v) $b_i, b \in C^2(\overline{\Gamma})$, com $i = 1, \dots, n$, e os coeficientes $b_i(x,t)$ satisfazendo a condição $\left\| \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \eta_i(x) \right\| \geq \delta > 0$ para quase todo ponto em $\partial\Omega \times (0, T)$, onde $\eta_i(x)$ representa a i -ésima componente do vetor normal unitário exterior de $\partial\Omega$ em $x \in \partial\Omega$;

(vi) $u_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, com $p \neq 3$, e satisfazendo a condição de compatibilidade $\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u_0}{\partial x_i} + bu_0 = 0$ em $\partial\Omega$, quando $p > 3$.

Então, existe uma única solução $u \in W_p^{2,1}(Q)$ do problema (1.1). Além disso, existe uma constante positiva C tal que

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|f\|_{L^p(Q)} + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} \right).$$

2 Prova dos Resultados Principais

Neste capítulo, inicialmente iremos utilizar o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder para garantir a existência e unicidade da solução para o sistema (1)-(2) de equações diferenciais parciais parabólicas, representando o ciclo de vida do parasita e dos mosquitos já mencionado. Posteriormente, serão utilizados argumentos do tipo bootstrapping para analisar a regularidade da solução.

2.1 Sistema modificado

Para aplicar o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, consideremos o seguinte sistema modificado;

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{P}_1' - k_P \Delta \widehat{P}_1 = \varphi_M \left(1 - \frac{\widehat{P}_1}{C_M} \right) \widehat{M} + \varphi_W \left(1 - \frac{\widehat{P}_1}{C_M} \right) \widehat{W} - (\alpha_1 + \mu_{\widehat{P}_1}) \widehat{P}_1 - k_2 \widehat{A} \widehat{P}_1 & \text{em } Q, \\ \widehat{P}_2' = \alpha_1 \left| \widehat{P}_1 \right| - (\alpha_2 + \mu_{P_2}) \widehat{P}_2 & \text{em } Q, \\ \widehat{M}' - k_M \Delta \widehat{M} = \alpha_2 \widehat{P}_2 - k_1 \widehat{M} \widehat{L}_1 - \mu_M \widehat{M} & \text{em } Q, \\ \widehat{W}' - k_M \Delta \widehat{W} = k_1 \widehat{M} \widehat{L}_1 - \mu_W \widehat{W} & \text{em } Q, \\ \widehat{L}_1' = \left(\varphi_A + \frac{q k_2 \left| \widehat{P}_1 \right|}{C_M} \right) \left(1 - \frac{\widehat{L}_1}{C_A} \right) \left| \widehat{A} \right| - \mu_{L_1} \widehat{L}_1 - k_1 \left| \widehat{M} \right| \widehat{L}_1 & \text{em } Q, \\ \widehat{L}_2' - k_L \Delta \widehat{L}_2 = k_1 \widehat{M} \widehat{L}_1 - (\sigma + \mu_{L_2}) \widehat{L}_2 & \text{em } Q, \\ \widehat{A}' - k_A \Delta \widehat{A} = \sigma \widehat{L}_2 - \mu_A \widehat{A} & \text{em } Q. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

com as condições iniciais e de fronteira (2).

Observe que a segunda e quinta equações em (2.1) é, para cada $x \in \Omega$, uma equação diferencial ordinária linear em $\widehat{P}_2, \widehat{L}_1$, respectivamente. Podemos então encontrar uma solução explícita para estas equações. Usaremos o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução explícita para as equações. Sabemos que, dado o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = AX + F \\ X(t_0) = X_0 \end{array} \right.$$

utilizando o método de variação dos parâmetros, obtemos que a solução do problema acima é dada por

$$X(t) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t_0) X_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s) F(s) ds,$$

onde $\Phi(t)$ é uma solução fundamental do problema homogêneo associado.

Consideremos a segunda equação de (2.1):

$$\hat{P}'_2 = \alpha_1 \left| \hat{P}_1 \right| - (\alpha_2 + \mu_{P_2}) \hat{P}_2.$$

Assim, analisemos primeiramente o problema homogêneo dada por:

$$\hat{P}'_2 + (\alpha_2 + \mu_{P_2}) \hat{P}_2 = 0.$$

Um fator integrante para esta equação é da forma $I = e^{\int_0^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds}$. Logo,

$$\begin{aligned} \hat{P}'_2 e^{\int_0^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds} + (\alpha_2 + \mu_{P_2}) e^{\int_0^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds} \hat{P}_2 &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\hat{P}_2 e^{\int_0^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds} \right) &= 0 \\ \hat{P}_2 e^{\int_0^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds} &= C \\ \hat{P}_2 &= C e^{-\int_0^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante.

Então, a solução da equação homogênea associada é dada por $\Phi(t) = C e^{-\int_0^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds}$. Logo, utilizando a fórmula da variação dos parâmetros, e sendo $t_0 = 0$ e $X_0 = P_{20}$, temos que a solução da segunda equação do sistema (1)-(2) é

$$\hat{P}_2 = P_{20} \mathcal{B}(t, x; 0) + \int_0^t \mathcal{B}(t, x; s) \alpha_1 \left| \hat{P}_1 \right| ds,$$

onde $\mathcal{B}(t, x; s) = e^{-\int_s^t (\alpha_2 + \mu_{P_2}) ds}$, com $0 \leq s \leq t$. Definimos então,

$$\mathcal{P}_2(\varphi) = P_{20} \mathcal{B}(t, x; 0) + \int_0^t \mathcal{B}(t, x; s) \alpha_1 |\varphi| ds. \quad (2.2)$$

Observação 2.1. Como $\alpha_2 + \mu_{P_2}$ e $t - s$ são positivos, segue que $0 \leq \mathcal{B}(t, x; s) \leq 1$, e assim, $\mathcal{P}_2(\varphi) \geq 0$.

Analogamente, podemos encontrar a solução explícita da quinta equação do sistema (1)-(2) que é dada por:

$$\widehat{L}_1 = L_{10} \overline{\mathcal{B}}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})(t, x; 0) + \int_0^t \overline{\mathcal{B}}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})(t, x; s) \left(\varphi_A + \frac{qk_1 |\widehat{P}_1|}{C_M} \right) |\widehat{A}| ds,$$

onde $\overline{\mathcal{B}}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})(t, x; s) = e^{-\int_s^t \left(\frac{\varphi_A |\widehat{A}|}{C_A} + \frac{qk_1 |\widehat{P}_1| |\widehat{A}|}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 |\widehat{M}| \right) ds}$, com $0 \leq s \leq t$. Definimos assim,

$$\mathcal{L}_1(\varphi, \psi, \xi) = L_{10} \overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)(t, x; 0) + \int_0^t \overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)(t, x; s) \left(\varphi_A + \frac{qk_1 |\varphi|}{C_M} \right) |\xi| ds. \quad (2.3)$$

Observação 2.2. De modo análogo ao raciocínio da Observação 2.1, tem-se que $\mathcal{L}_1(\varphi, \psi, \xi) \geq 0$.

Então, obtemos que $(\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \widehat{A})$ é solução do problema modificado (2.1) se, e somente se, $\widehat{P}_2 = \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1)$ e $\widehat{L}_1 = \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})$, com $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})$ satisfazendo o seguinte sistema integro diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widehat{P}_1' - k_P \Delta \widehat{P}_1 = \varphi_M \left(1 - \frac{\widehat{P}_1}{C_M} \right) \widehat{M} + \varphi_W \left(1 - \frac{\widehat{P}_1}{C_M} \right) \widehat{W} - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) & \text{em } Q, \\ - k_2 \widehat{A} \widehat{P}_1 & \\ \widehat{M}' - k_M \Delta \widehat{M} = \alpha_2 \widehat{P}_2 - k_1 \widehat{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - \mu_M \widehat{M} & \text{em } Q, \\ \widehat{W}' - k_M \Delta \widehat{W} = k_1 \widehat{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - \mu_W \widehat{W} & \text{em } Q, \\ \widehat{L}_2' - k_L \Delta \widehat{L}_2 = k_1 \widehat{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - (\sigma + \mu_{L_2}) \widehat{L}_2 & \text{em } Q, \\ \widehat{A}' - k_A \Delta \widehat{A} = \sigma \widehat{L}_2 - \mu_A \widehat{A} & \text{em } Q. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Além disso, note que é suficiente provar que a solução do problema acima $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})$ é não negativa para garantir que $(P_1, P_2, M, W, L_1, L_2, A)$, com $(P_1, M, W, L_2, A) = (\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})$, $P_2 = \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1)$ e $L_1 = \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})$ é também uma solução do sistema parabólico (1)-(2).

Proposição 2.1. *Assuma que valem as hipóteses técnicas (1.1.1), então existe uma solução $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})$ do problema (2.4)-(2).*

Para provar a existência da solução do sistema (2.4), as soluções das EDO's tem um importante papel, e assim, temos algumas de suas propriedades. Já observamos que, as soluções das EDO's são da forma:

$$\mathcal{P}_2(P_1) = P_{20} \mathcal{B}(t, x; 0) + \int_0^t \mathcal{B}(t, x; s) \alpha_1 P_1 ds$$

e

$$\mathcal{L}_1(P_1, M, A) = L_{10} \overline{\mathcal{B}}(P_1, M, A)(t, x; 0) + \int_0^t \overline{\mathcal{B}}(P_1, M, A)(t, x; s) A \left(\varphi_A + \frac{q k_1 P_1}{C_M} \right) ds,$$

onde $\mathcal{B}(t, x; s) = e^{-\int_s^t (\alpha_2 + \mu_{P_2})} \mathcal{B}(P_1, M, A)(t, x; s) = e^{-\int_s^t \left(\frac{\varphi_A A}{C_A} + \frac{q k_1 P_1 A}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 M \right)}.$

Então, podemos enunciar o seguinte lema que irá nos auxiliar ao longo do trabalho.

Lema 2.1. *Dados $\varphi, \psi, \xi \in L^8(Q)$ e $s \in [0, T]$, temos que $\mathcal{P}_2(\varphi) \in L^4(Q)$, $\mathcal{L}_1(\varphi, \psi, \xi) \in L^4(Q)$ e*

$$i. \quad \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)(t, x; s)\|_{L^\infty(Q)} \leq 1 \text{ e } \|\mathcal{B}(t, x; s)\|_{L^\infty(Q)} \leq 1,$$

$$ii. \quad \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} \leq C(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)} \|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^8(Q)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)}),$$

$$iii. \quad \|\mathcal{P}_2(\varphi)\|_{L^4(Q)} \leq C(1 + \|\varphi\|_{L^8(Q)}),$$

$$iv. \quad \|\mathcal{L}_1(\varphi, \psi, \xi)\|_{L^4(Q)} \leq C(1 + \|\xi\|_{L^4(Q)} + \|\varphi\|_{L^8(Q)}\|\xi\|_{L^8(Q)}),$$

$$v. \quad \|\mathcal{P}_2(\varphi_1) - \mathcal{P}_2(\varphi_2)\|_{L^4(Q)} \leq C\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)},$$

vi.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \mathcal{L}_1(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} &\leq C\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} \left(\|\xi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)}^2 \right) + C\|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} \left(\|\varphi_1\|_{L^8(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)}\|\varphi_2\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)}. \end{aligned}$$

Demonstração.

i. Basta observar que, $t - s \geq 0$ e $\frac{\varphi_A \xi}{C_A} + \frac{qk_1 \varphi \xi}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 \psi \geq 0$. Logo, temos que,

$$\|\bar{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)(t, x; s)\| = \left\| e^{\left(-\int_s^t \frac{\varphi_A \xi}{C_A} + \frac{qk_1 \varphi \xi}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 \psi\right)} \right\| \leq 1$$

Mais ainda, $\bar{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)(t, x; s) \geq 0$.

Analogamente, temos o resultado para $\mathcal{B}(\varphi)(t, x; s)$.

ii. Note que,

$$\begin{aligned} &\|\bar{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \bar{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} \\ &= \left\| \exp\left(-\int_s^t \frac{\varphi_A \xi_1}{C_A} + \frac{qk_1 \varphi_1 \xi_1}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 \psi_1\right) - \exp\left(-\int_s^t \frac{\varphi_A \xi_2}{C_A} + \frac{qk_1 \varphi_2 \xi_2}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 \psi_2\right) \right\|_{L^4(Q)}. \end{aligned}$$

Mas, sabemos pelo Teorema do Valor Médio que, dados $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, existe $\theta = \theta(z_1, z_2)$ tal que

$$\exp(z_1) - \exp(z_2) = (z_2 - z_1)\exp((1 - \theta)z_1 + \theta z_2),$$

onde $\exp$ denota a função exponencial. Assim, se tomarmos $z_1, z_2 \leq 0$ arbitrários, temos que $(1 - \theta)z_1 + \theta z_2 \leq 0$. Desta forma,

$$|\exp(z_1) - \exp(z_2)| \leq |z_2 - z_1|.$$

Logo, tomando

$$z_1 = -\int_s^t \frac{\varphi_A \xi_1}{C_A} + \frac{qk_1 \varphi_1 \xi_1}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 \psi_1, \quad z_2 = -\int_s^t \frac{\varphi_A \xi_2}{C_A} + \frac{qk_1 \varphi_2 \xi_2}{C_M} + \mu_{L_1} + k_1 \psi_2,$$

segue que

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \bar{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} &\leq \|z_2 - z_1\|_{L^4(Q)} \\ &\leq \left\| \int_s^t \frac{\varphi_A (\xi_1 - \xi_2)}{C_A} + \frac{qk_1 (\varphi_1 \xi_1 - \varphi_2 \xi_2)}{C_M} + k_1 (\psi_1 - \psi_2) \right\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \left(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1 \xi_1 - \varphi_2 \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} |\varphi_1 \xi_1 - \varphi_2 \xi_2| &= |\varphi_1 \xi_1 - \varphi_1 \xi_2 + \varphi_1 \xi_2 - \varphi_2 \xi_2| \\ &\leq |\varphi_1| |\xi_1 - \xi_2| + |\xi_2| |\varphi_1 - \varphi_2|. \end{aligned}$$

Daí, substituindo na equação anterior, temos que

$$\begin{aligned} \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} &\leq C \left(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)} \|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \|\xi_2\|_{L^8(Q)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)} \right), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva.

iii. Note que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_2(\varphi)\|_{L^4(Q)} &= \|P_{20}\mathcal{B}(t, x; 0) + \int_s^t \mathcal{B}(t, x; s) \alpha_1 \varphi\|_{L^4(Q)} \\ &\leq \|P_{20}\|_{L^\infty(Q)} \|\mathcal{B}(t, x; 0)\|_{L^\infty(Q)} + \int_s^t \|\mathcal{B}(t, x; s)\|_{L^\infty(Q)} \|\alpha_1\|_{L^\infty(Q)} \|\varphi\|_{L^4(Q)}. \end{aligned}$$

Usando o item (i), temos que

$$\|\mathcal{P}_2(\varphi)\|_{L^4(Q)} \leq C (1 + \|\varphi\|_{L^4(Q)}).$$

iv. Observe que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\varphi, \psi, \xi)\|_{L^4(Q)} &\leq \left\| L_{10} \overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi) + \int_s^t \overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi) \xi \left(\varphi_A + \frac{qk_1 \varphi}{C_M} \right) \right\|_{L^4(Q)} \\ &\leq \|L_{10}\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)\|_{L^4(Q)} + \int_s^t \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)\|_{L^4(Q)} \|\varphi_A\|_{L^\infty(Q)} \|\xi\|_{L^4} \\ &\quad + \left\| \frac{qk_1}{C_M} \right\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi, \psi, \xi)\|_{L^4(Q)} \|\xi \varphi\|_{L^4(Q)}. \end{aligned}$$

Pelo item (i), segue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\varphi, \psi, \xi)\|_{L^4(Q)} &\leq \|L_{10}\|_{L^\infty(Q)} + \int_0^T \|\varphi_A\|_{L^\infty(Q)} \|\xi\|_{L^4(Q)} + \left\| \frac{qk_1}{C_M} \right\|_{L^\infty(Q)} \|\xi \varphi\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C (1 + \|\xi\|_{L^4(Q)} + \|\xi\|_{L^8(Q)} \|\varphi\|_{L^8(Q)}), \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva.

v. Note que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_2(\varphi_1) - \mathcal{P}_2(\varphi_2)\|_{L^4(Q)} &\leq \int_s^t \|\mathcal{B}(t, x; s) \alpha_1 (\varphi_1 - \varphi_2)\|_{L^4(Q)} \\ &\leq \int_0^T \|\mathcal{B}(t, x; s)\|_{L^\infty(Q)} \|\alpha_1\|_{L^\infty(Q)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante positiva.

vi. Note que,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \mathcal{L}_1(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} &\leq \|L_{10}\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)(t, x; 0) - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)(t, x; 0)\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + \int_s^t (\|\varphi_A\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)(t, x; s) \xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)(t, x; s) \xi_2\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + \left\| \frac{qk_1}{C_M} \right\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)(t, x; s) \varphi_1 \xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)(t, x; s) \varphi_2 \xi_2\|_{L^4(Q)}). \end{aligned}$$

Assim, vejamos separadamente as estimativas necessárias, observe que pelo item (ii) conseguimos estimar os termos de fora da integral. Daí, resta os termos de dentro da integral. Note que,

$$\begin{aligned}
& \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&= \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_2 + \overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_2 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\leq \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_2 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\leq \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\|_{L^\infty(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)}.
\end{aligned}$$

Logo, usando o item (ii), temos a estimativa

$$\begin{aligned}
& \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\leq C(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\varphi_1\|_{L^8(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} \\
&\quad + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)}).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
& \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_1\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&= \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_1\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_2\xi_2 + \overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_2\xi_2 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\leq \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_1\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\quad + \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_2\xi_2 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)}.
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos e usando as estimativas já encontradas, temos que

$$\begin{aligned}
& \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_1\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\leq \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\|_{L^\infty(Q)}\|\varphi_1\xi_1 - \varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq \|\varphi_1\xi_1 - \varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)}\|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)}
\end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga para o último termo acima e como

$$\begin{aligned}
\|\varphi_1\xi_1 - \varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} &= \|\varphi_1\xi_1 - \varphi_1\xi_2 + \varphi_1\xi_2 - \varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\leq \|\varphi_1\|_{L^4(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)},
\end{aligned}$$

tem-se que

$$\begin{aligned}
& \|\overline{\mathcal{B}}(\varphi_1, \psi_1, \xi_1)\varphi_1\xi_1 - \overline{\mathcal{B}}(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\varphi_2\xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\leq \|\varphi_1\|_{L^4(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)}(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\quad + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^8(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)}).
\end{aligned}$$

Portanto, utilizando as informações acima, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{L}_1(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \mathcal{L}_1(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} \\
&\leq C(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^8(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)}) \\
&\quad + C(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\varphi_1\|_{L^8(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} \\
&\quad + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)}) + C(\|\varphi_1\|_{L^4(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\quad + \|\xi_2\|_{L^4(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)}\|\xi_2\|_{L^8(Q)}(\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} \\
&\quad + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)}\|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^8(Q)}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)})).
\end{aligned}$$

De onde, rearranjando os termos obtemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_1(\varphi_1, \psi_1, \xi_1) - \mathcal{L}_1(\varphi_2, \psi_2, \xi_2)\|_{L^4(Q)} &\leq C \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^8(Q)} \left(\|\xi_2\|_{L^8(Q)} + \|\xi_2\|_{L^4(Q)} \|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)} \|\xi_2\|_{L^8(Q)}^2 \right) + C \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)} \|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\xi_1 - \xi_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_2\|_{L^8(Q)} \|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\xi_1 - \xi_2\|_{L^8(Q)} \left(\|\varphi_1\|_{L^8(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)} \|\xi_2\|_{L^4(Q)} + \|\varphi_1\|_{L^8(Q)} \|\varphi_2\|_{L^8(Q)} \|\xi_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + \|\xi_2\|_{L^4(Q)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(Q)}. \end{aligned}$$

□

2.2 Solução do sistema modificado

Nesta seção, será demonstrada a Proposição 2.1.

Para obter uma solução para o problema proposto (2.4), iremos aplicar o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder em uma família de funções. Definamos

$$S_\lambda : (L^8(Q))^5 \rightarrow (L^8(Q))^5,$$

com $\lambda \in [0, 1]$, dada por

$$S_\lambda(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) = (P_1, M, W, L_2, A),$$

onde (P_1, M, W, L_2, A) é solução do problema

$$\begin{cases} P_1' - k_P \Delta P_1 = \lambda \left[\varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) W - k_2 A P_1 \right] & \text{em } Q, \\ \quad - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 & \\ M' - k_M \Delta M = \lambda \left[\alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) - k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \right] - \mu_M M & \text{em } Q, \\ W' - k_W \Delta W = \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - \mu_W W & \text{em } Q, \\ L_2' - k_L \Delta L_2 = \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2 & \text{em } Q, \\ A' - k_A \Delta A = \lambda \left[\sigma \widehat{L}_2 \right] - \mu_A A & \text{em } Q. \end{cases} \quad (2.5)$$

com as condições iniciais e de fronteira (2), onde $\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1)$, $\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})$ são dadas por (2.2) e (2.3), respetivamente.

A fim de aplicarmos o Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, apresentamos uma sequência de lemas.

Lema 2.2. *Se (P_1, M, W, L_2, A) é uma solução do sistema (2.5)-(2) e $P_{10}, M_0, W_0, L_{20}, A_0$ são não negativos, então as funções (P_1, M, W, L_2, A) são não negativas.*

Demonstração.

Vamos provar obedecendo a seguinte ordem:

$$M \geq 0 \rightarrow W \geq 0 \rightarrow L_2 \geq 0 \rightarrow A \geq 0 \rightarrow P_1 \geq 0.$$

Considere a segunda equação de (2.5), isto é,

$$M' - k_M \Delta M = \lambda \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) - \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - \mu_M M$$

e seja $-(M_-) = \begin{cases} M, & \text{se } M < 0, \\ 0, & \text{se } M > 0 \end{cases}$.

Multiplicando a equação por $-(M_-)$ e integrando em Ω , obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (M_-)^2 + k_M \int_{\Omega} |\nabla M_-|^2 \\ = -\lambda \alpha_2 \int_{\Omega} \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) M_- - \lambda k_1 \int_{\Omega} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) (M_-)^2 - \mu_M \int_{\Omega} (M_-)^2. \end{aligned}$$

Mas, como

$$-\lambda \alpha_2 \int_{\Omega} \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) M_- \leq 0, -\lambda k_1 \int_{\Omega} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) (M_-)^2 \leq 0, k_M \int_{\Omega} |\nabla M_-|^2 \geq 0,$$

pois $\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1), \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \geq 0$ pelas observações (2.1) e (2.2). Então,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (M_-)^2 \leq -2\mu_M \int_{\Omega} (M_-)^2.$$

Assim, pelo Lema de Gronwall (Lema 1.1), com

$$\eta(t) = \int_{\Omega} (M_-)^2, \quad \varphi(t) = -2\mu_M, \quad \psi(t) = 0,$$

segue que

$$0 \leq \int_{\Omega} (M_-)^2 \leq e^{-2\int_0^t \mu_M} \int_{\Omega} (M_{0-})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} (M_-)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_- = 0,$$

pois $M_{0-} = 0$. Logo, $M_- = 0$ q.t.p em Ω , então $M \geq 0$ q.t.p em Ω .

De modo análogo, provemos as demais positivities.

Considere a terceira equação de (2.5), ou seja,

$$W' - k_M \Delta W = \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - \mu_W W.$$

Seja $-(W_-) = \begin{cases} W, & \text{se } W < 0, \\ 0, & \text{se } W > 0 \end{cases}$. Multiplicando a equação acima por $-(W_-)$

e integrando em Ω , obtemos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (W_-)^2 + k_M \int_{\Omega} |\nabla W_-|^2 = -\lambda k_1 \int_{\Omega} M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) (W_-) - \mu_W \int_{\Omega} (W_-)^2.$$

Mas, como $-\lambda k_1 \int_{\Omega} M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) (W_-) \leq 0$, pois $M, \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \geq 0$, e ainda $k_M \int_{\Omega} |\nabla W_-|^2 \geq 0$, temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (W_-)^2 \leq -2\mu_W \int_{\Omega} (W_-)^2.$$

Logo, pelo Lema de Gronwall (Lema 1.1), com

$$\eta(t) = \int_{\Omega} (W_-)^2, \quad \varphi(t) = -2\mu_W, \quad \psi(t) = 0,$$

segue que

$$\int_{\Omega} (W_-)^2 \leq e^{-2\int_{\Omega} \mu_W} \int_{\Omega} (W_{0-})^2.$$

Como $\int_{\Omega} (W_{0-})^2 = 0$ e $(W_-)^2 \geq 0$, então,

$$0 \leq \int_{\Omega} (W_-)^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} (W_-)^2 = 0.$$

Portanto, $W_- = 0$ q.t.p em Ω , então $W \geq 0$ q.t.p em Ω .

A seguir, considere a quarta equação de (2.5).

$$L_2' - k_L \Delta L_2 = \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2.$$

Seja $-(L_{2-}) = \begin{cases} L_2, & \text{se } L_2 < 0 \\ 0, & \text{se } L_2 > 0 \end{cases}$, multiplicando a equação por $-(L_{2-})$ e integrando em Ω , obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (L_{2-})^2 + k_L \int_{\Omega} |\nabla L_{2-}|^2 = -\lambda k_1 \int_{\Omega} M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})(L_{2-}) - (\sigma + \mu_{L_2}) \int_{\Omega} (L_{2-})^2.$$

Como

$$k_L \int_{\Omega} |\nabla L_{2-}|^2 \geq 0, \quad -\lambda k_1 \int_{\Omega} M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})(L_{2-}) \leq 0,$$

temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (L_{2-})^2 \leq -2(\sigma + \mu_{L_2}) \int_{\Omega} (L_{2-})^2.$$

Assim, utilizando o Lema de Gronwall (Lema 1.1), com

$$\eta(t) = \int_{\Omega} (L_{2-})^2, \quad \varphi(t) = -2(\sigma + \mu_{L_2}), \quad \psi(t) = 0,$$

tem-se que

$$0 \leq \int_{\Omega} (L_{2-})^2 \leq e^{-2\int_{\Omega} (\sigma + \mu_{L_2})} \int_{\Omega} (L_{20-})^2 = 0,$$

pois $L_{20-} = 0$. Então,

$$\int_{\Omega} (L_{2-})^2 = 0.$$

Portanto, $L_{2-} = 0$ q.t.p em Ω , então $L_2 \geq 0$ q.t.p em Ω .

Agora, considere a quinta equação de (2.5), isto é,

$$A' - k_A \Delta A = \lambda \sigma \widehat{L}_2 - \mu_A A.$$

Seja $-(A_-) = \begin{cases} A, & \text{se } A < 0 \\ 0, & \text{se } A > 0 \end{cases}$. Multiplicando a equação acima por $-(A_-)$ e integrando em Ω , obtemos que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A_-)^2 + k_A \int_{\Omega} |\nabla A_-|^2 = -\lambda \sigma \int_{\Omega} \widehat{L}_2(A_-) - \mu_A \int_{\Omega} (A_-)^2.$$

Como

$$k_A \int_{\Omega} |\nabla A_-|^2 \geq 0, \quad -\lambda \sigma \int_{\Omega} \widehat{L}_2(A_-) \leq 0,$$

segue que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A_-)^2 \leq -2\mu_A \int_{\Omega} (A_-)^2.$$

Logo, pelo Lema de Gronwall (Lema 1.1), com

$$\eta(t) = \int_{\Omega} (A_-)^2, \quad \varphi(t) = -2\mu_A, \quad \psi(t) = 0,$$

tem-se

$$\int_{\Omega} (A_-)^2 \leq e^{-\int_{\Omega} \mu_A} \int_{\Omega} (A_{0-})^2.$$

Daí, como $A_{0-} = 0$, então

$$0 \leq \int_{\Omega} (A_-)^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} (A_-)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A_- = 0.$$

Portanto, $A \geq 0$ q.t.p em Ω .

Por fim, vejamos a primeira equação de (2.5), ou seja,

$$P_1' - k_P \Delta P_1 = \lambda \varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) M + \lambda \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) W - \lambda k_2 A P_1 - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1$$

$$\text{Seja } -(P_{1-}) = \begin{cases} P_1, & \text{se } P_1 < 0 \\ 0, & \text{se } P_1 > 0 \end{cases}. \text{ Assim, multiplicando a equação por } -(P_{1-})$$

e integrando em Ω , obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (P_{1-})^2 + k_P \int_{\Omega} |\nabla P_{1-}|^2 &= -\lambda \int_{\Omega} \varphi_M M (P_{1-}) - \lambda \int_{\Omega} \varphi_W W (P_{1-}) - \lambda \int_{\Omega} \frac{\varphi M (P_{1-})^2}{C_M} \\ &\quad - \lambda \int_{\Omega} \frac{\varphi_W W (P_{1-})^2}{C_M} - \lambda k_2 \int_{\Omega} A (P_{1-})^2 - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} (P_{1-})^2. \end{aligned}$$

Observando que os primeiros 5 termos do lado esquerdo da igualdade são negativos, pois vimos anteriormente que $M, W, A \geq 0$ e que $k_P \int_{\Omega} |\nabla P_{1-}|^2 \geq 0$. Então, temos que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (P_{1-})^2 \leq -2(\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} (P_{1-})^2.$$

Logo, usando o Lema de Gronwall (Lema 1.1), com

$$\eta(t) = \int_{\Omega} (P_{1-})^2, \quad \varphi(t) = -2(\alpha_1 + \mu_{P_1}), \quad \psi(t) = 0,$$

segue-se

$$\int_{\Omega} (P_{1-})^2 \leq e^{-2\int_{\Omega}(\alpha_1 + \mu_{P_1})} \int_{\Omega} (P_{10-})^2.$$

Como $P_{10-} = 0$, então

$$0 \leq \int_{\Omega} (P_{1-})^2 \leq C \int_{\Omega} (P_{10-})^2 = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} (P_{1-})^2 = 0.$$

Logo, $P_{1-} = 0$ q.t.p em Ω , e portanto, $P_1 \geq 0$ q.t.p em Ω .

Então, concluímos que

$$M \geq 0, W \geq 0, L_2 \geq 0, A \geq 0, P_1 \geq 0.$$

□

Lema 2.3. *A família de funções $S_{\lambda} : (L^8(Q))^5 \rightarrow (L^8(Q))^5$, com $\lambda \in [0, 1]$, está bem definida.*

Demonstração.

Note que na quinta equação do sistema (2.5), temos que $\lambda \sigma \widehat{L}_2 \in L^8(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ e $\mu_A \in L^\infty(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$. Como $A_0 \in H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^1(\Omega) = W_2^{2-\frac{2}{2}}(\Omega)$. Daí, segue pela Proposição 1.7 que existe uma única solução $A \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que

$$\|A\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|\lambda \sigma \widehat{L}_2\|_{L^2(Q)} + \|A_0\|_{H^1(\Omega)} \right) \leq C \left(\|\widehat{L}_2\|_{L^2(Q)} + \|A_0\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Além disso, pelo Lema 1.3, $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$, então $A \in L^8(Q)$ e

$$\|A\|_{L^8(Q)} \leq C \|A\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|\widehat{L}_2\|_{L^2(Q)} + \|A_0\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Em seguida, considere a segunda equação de (2.5). Como $\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1), \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \in L^4(Q)$ e $L^4(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$, temos que $\lambda \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) \in L^2(Q)$ e $\lambda k_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) + \mu_M \in L^4(Q) \hookrightarrow L^{\frac{5}{2}}(Q)$. Como $M_0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{2-\frac{2}{2}}(\Omega)$, então segue da Proposição 1.7 que, existe uma única solução $M \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que

$$\begin{aligned} \|M\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\lambda \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1)\|_{L^2(Q)} + \|M_0\|_{H^1(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1)\|_{L^2(Q)} + \|M_0\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Como $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$ pelo Lema 1.3(i) e pelo Lema 2.1, temos que $M \in L^8(Q)$ e satisfaz

$$\|M\|_{L^8(Q)} \leq C \|M\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left[\left(1 + \|\widehat{P}_1\|_{L^8(Q)} \right) + \|M_0\|_{H^2(\Omega)} \right].$$

Agora, considere a terceira equação de (2.5). Note que $\lambda k_1 M \mathcal{L}_1 \left(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A} \right) \in L^2(Q)$ e $\mu_W \in L^{\frac{5}{2}}(Q)$. Como $W_0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow W_2^{2-\frac{2}{2}}(\Omega)$, então pela Proposição 1.7 existe uma única solução $W \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que

$$\|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\left\| \lambda k_1 M \mathcal{L}_1 \left(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A} \right) \right\|_{L^2(Q)} + \|W_0\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Como $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$ pelo Lema 1.3(i) e pelo Lema 2.1, temos que $W \in L^8(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \|W\|_{L^8(Q)} &\leq C \|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq C \left[\left(1 + \|\widehat{P}_1\|_{L^8(Q)} + \|M_0\|_{H^2(\Omega)} \right) \left(1 + \|\widehat{A}\|_{L^4(Q)} + C \|\widehat{P}_1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}\|_{L^8(Q)} \right) + \|W_0\|_{H^2(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Analogamente, observe que para a quarta equação de (2.5), temos que $(\sigma + \mu_{L_2}) \in L^{\frac{5}{2}}(Q)$ e como $L_{20} \in H^2(\Omega)$, então pela Proposição 1.7 existe uma única solução $L_2 \in W_2^{2,1}(Q)$, e como $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$ pelo Lema 1.3(i) e pelo Lema 2.1, temos que $L_2 \in L^8(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \|L_2\|_{L^8(Q)} &\leq C \|L_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq C \left[\left(1 + \|\widehat{P}_1\|_{L^8(Q)} + \|M_0\|_{H^2(\Omega)} \right) \left(1 + \|\widehat{A}\|_{L^4(Q)} + C \|\widehat{P}_1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}\|_{L^8(Q)} \right) + \|W_0\|_{H^2(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Por último, considere a primeira equação de (2.5). Note que,

$$\begin{aligned} P'_1 - k_P \Delta P_1 &= \lambda \varphi_M M \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) + \lambda \varphi_W W \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) - \lambda k_2 A P_1 - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 \\ &= - \left(\frac{\lambda \varphi_M M}{C_M} + \frac{\lambda \varphi_W W}{C_M} \right) + \lambda k_2 A + (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 + \lambda \varphi_M M + \lambda \varphi_W W. \end{aligned}$$

Daí, temos que $\frac{\lambda \varphi_M M}{C_M} + \frac{\lambda \varphi_W W}{C_M} + \lambda k_2 A + (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \in L^8(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$ e $\lambda \varphi_M M + \lambda \varphi_W W \in L^8(Q) \hookrightarrow L^{\frac{5}{2}}(Q)$. Como $P_{10} \in H^2(\Omega)$, então segue da Proposição 1.7 que existe uma única solução $P_1 \in W_2^{2,1}(Q)$ tal que

$$\|P_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|\lambda \varphi_M M + \lambda \varphi_W W\|_{L^2(Q)} + \|P_{10}\|_{H^2(\Omega)} \right).$$

Usando o Lema 1.3, tem-se que $P_1 \in L^8(Q)$ e

$$\|P_1\|_{L^8(Q)} \leq C \|P_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|M\|_{L^2(Q)} + \|W\|_{L^2(Q)} + \|P_{10}\|_{H^2(\Omega)} \right),$$

onde C é uma constante positiva.

Portanto, podemos concluir que S_λ está bem definida, como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 2.4. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, a função $S_\lambda(\cdot) : (L^8(Q))^5 \rightarrow (L^8(Q))^5$ é compacta, ou seja, é contínua e leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos.

Demonstração.

Primeiramente, vejamos que a função leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos. Seja $B \subset (L^8(Q))^5$ um conjunto limitado. Daí, existe $r_B > 0$ tal que

$$\|(P_1, M, W, L_2, A)\|_{L^8(Q)} \leq r_B, \quad \forall (P_1, M, W, L_2, A) \in B.$$

Dado $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) \in B$, tem-se que

$$\begin{aligned} \|S_\lambda(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})\|_{W_2^{2,1}(Q)} &= \|(P_1, M, W, L_2, A)\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq \|P_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|M\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|L_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_2^{2,1}(Q)}. \end{aligned}$$

Precisamos estimar os termos do lado direito da desigualdade.

Note que, na quinta equação de (2.5), temos pela Proposição 1.7 que

$$\|A\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|\lambda \sigma \widehat{L}_2\|_{L^2(Q)} + \|A_0\|_{H^2(\Omega)} \right) \leq C(1 + r_B)$$

De maneira análoga, vamos estimar os demais termos usando o Lema 2.1. Note que, na segunda equação de (2.5), tem-se

$$\begin{aligned} \|M\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\lambda \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) - \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})\|_{L^2(Q)} + \|M_0\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1)\|_{L^2(Q)} + \|M\|_{L^4(Q)} \|\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})\|_{L^4(Q)} + \|M_0\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(1 + \|\widehat{P}_1\|_{L^8(Q)} \right) + r_B C \left(1 + \|\widehat{A}\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + \|M_0\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C(1 + r_B^3). \end{aligned}$$

Em seguida, para a terceira equação de (2.5), tem-se que

$$\begin{aligned} \|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})\|_{L^2(Q)} + \|W_0\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \left(\|\lambda k_1\|_{L^\infty(Q)} \|M\|_{L^4(Q)} \|\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})\|_{L^4(Q)} + \|W_0\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C(1 + r_B^5). \end{aligned}$$

Analogamente para a quarta equação em (2.5), tem-se que

$$\begin{aligned} \|L_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|\lambda k_1 M \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})\|_{L^2(Q)} + \|L_{20}\|_{H^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C(1 + r_B^5). \end{aligned}$$

Finalmente, para a primeira equação em (2.5), tem-se que

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \left\| \lambda \varphi_M M - \frac{\lambda \varphi_M M P_1}{C_M} + \lambda \varphi_W W - \frac{\lambda \varphi_W W P_1}{C_M} - \lambda k_2 A P_1 \right\|_{L^2(Q)} + \|P_{10}\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|M\|_{L^2(Q)} + \|M\|_{L^4(Q)} \|P_1\|_{L^4(Q)} + \|W\|_{L^2(Q)} + \|W\|_{L^4(Q)} \|P_1\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + \|A\|_{L^4(Q)} \|P_1\|_{L^4(Q)} + \|P_{10}\|_{H^2(\Omega)} \leq C(1 + r_B^6). \end{aligned}$$

Assim, usando as estimaivas obtidas, temos que

$$\begin{aligned} \|(P_1, M, W, L_2, A)\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ \leq C(1 + r_B^6) + C(1 + r_B^3) + C(1 + r_B^5) + C(1 + r_B^5) + C(1 + r_B) \\ \leq C(1 + r_B^6). \end{aligned}$$

Logo, a imagem de B por $S_\lambda(\cdot)$ está contida em algum conjunto limitado de $W_2^{2,1}(Q)$. E como $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$ com imersão compacta, tem-se que tal imagem é relativamente compacta em $L^8(Q)$.

Agora, vejamos que a função é contínua. Fixemos $\lambda \in [0, 1]$ e denotemos por $R_1 = S_\lambda(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}^1, \widehat{W}^1, \widehat{L}_2^1, \widehat{A}^1)$, $R_2 = S_\lambda(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}^2, \widehat{W}^2, \widehat{L}_2^2, \widehat{A}^2)$.

Utilizando a quinta equação de (2.5), temos que $\overline{A} = A_1 - A_2$ satisfaz

$$\overline{A} - k_A \Delta \overline{A} + \mu_A \overline{A} = \lambda \sigma \left[\widehat{L}_2^1 - \widehat{L}_2^2 \right].$$

Assim, aplicando a Proposição 1.7, temos que

$$\|\overline{A}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\left\| \lambda \sigma \left(\widehat{L}_2^1 - \widehat{L}_2^2 \right) \right\|_{L^2(Q)} \right).$$

Mas como $\lambda \leq 1$ e $\sigma \in L^\infty(Q)$, então

$$\|\overline{A}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \|\sigma\|_{L^\infty(Q)} \left\| \widehat{L}_2^1 - \widehat{L}_2^2 \right\|_{L^2(Q)} \leq C \left\| \widehat{L}_2^1 - \widehat{L}_2^2 \right\|_{L^2(Q)}. \quad (2.6)$$

Agora, utilizando a segunda equação de (2.5), temos que $\overline{M} = M_1 - M_2$ satisfaz

$$\begin{aligned} \overline{M}' - k_M \Delta \overline{M} + \mu_M \overline{M} &= \lambda \alpha_2 \left(\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^1) - \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^2) \right) \\ &\quad - \lambda k_1 \left[M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - M_2 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right]. \end{aligned}$$

Mas observe que

$$\begin{aligned} M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - M_2 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \\ = M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) + M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) - M_2 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \\ = M_1 \left(\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right) + \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2). \end{aligned}$$

Logo, substituindo na equação anterior, tem-se que

$$\begin{aligned} \overline{M}' - k_M \Delta \overline{M} + \mu_M \overline{M} - \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \\ = \lambda \alpha_2 \left(\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^1) - \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^2) \right) + \lambda k_1 M_1 \left(\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right). \end{aligned}$$

Daí, pela Proposição 1.7,

$$\|\overline{M}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \left\| \lambda \alpha_2 \left(\mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^1) - \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^2) \right) + \lambda k_1 M_1 \left(\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right) \right\|_{L^2(Q)}.$$

Como $\lambda \leq 1$ e $\alpha_2, k_1 \in L^\infty(Q)$, então

$$\begin{aligned} \|\overline{M}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \|\alpha_2\|_{L^\infty(Q)} \left\| \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^1 - \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1^2)) \right\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + \|M_1\|_{L^4(Q)} \left\| \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Lema 2.1(v), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\overline{M}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \|\widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2\|_{L^4(Q)} + \|M_1\|_{L^4(Q)} \left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^8(Q)} \left(\left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)} + \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^8(Q)} \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)}^2 \right) + C \|\widehat{M}_1 - \widehat{M}_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \left(\|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} \|\widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \left(\left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{M}_1 - \widehat{M}_2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Agora, procedendo de modo análogo, considerando a terceira equação, temos que $\overline{W} = W_1 - W_2$ satisfaz

$$\begin{aligned} \overline{W}_1' - k_M \Delta \overline{W}_1 + \mu_W \overline{W}_1 \\ = \lambda k_1 \left[M_1 \left(\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right) + \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right]. \end{aligned}$$

Assim, segue da Proposição 1.7 que

$$\begin{aligned} \|\overline{W}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \left\| \lambda k_1 M_1 \left(\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right) + \lambda k_1 \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \|k_1\|_{L^\infty(Q)} \|M_1\|_{L^4(Q)} \left\| \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + \|k_1\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{M}\|_{L^4(Q)} \left\| \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right\|_{L^4(Q)}. \end{aligned}$$

Logo, usando o Lema 2.1, conseguimos majorar os termos restantes, e portanto, temos que

$$\begin{aligned} \|\overline{W}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \|M_1\|_{L^4(Q)} \left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^8(Q)} \left(\left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)} + \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^8(Q)} \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)}^2 \right) + C \|\widehat{M}_1 - \widehat{M}_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \left(\|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} \|\widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \left(\left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{M}_1 - \widehat{M}_2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Em seguida, considerando a quarta equação, temos que $\overline{L}_2 = L_2^1 - L_2^2$ satisfaz

$$\begin{aligned} \overline{L}_2' - k_L \Delta \overline{L}_2 + (\sigma + \mu_{L_2}) \overline{L}_2 \\ = \lambda k_1 \left[M_1 \left(\mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1, \widehat{A}_1) - \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right) + \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2, \widehat{A}_2) \right]. \end{aligned}$$

E portanto, pela Proposição 1.7, temos que

$$\begin{aligned} \|\overline{L}_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \|M_1\|_{L^4(Q)} \left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^8(Q)} \left(\left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)} + \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^8(Q)} \left\| \widehat{A}_2 \right\|_{L^8(Q)}^2 \right) + C \|\widehat{M}_1 - \widehat{M}_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + C \|\widehat{A}_1 - \widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \left(\|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} + \|\widehat{P}_1^1\|_{L^8(Q)} \|\widehat{P}_1^2\|_{L^8(Q)} \|\widehat{A}_2\|_{L^8(Q)} \right) \\ &\quad + \|\widehat{A}_2\|_{L^4(Q)} \|\widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \left(\left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{M}_1 - \widehat{M}_2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Finalmente, utilizando a primeira equação, temos que $\overline{P}_1 = P_1^1 - P_1^2$ satisfaz

$$\begin{aligned} \overline{P}_1' - k_P \Delta \overline{P}_1 + (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \overline{P}_1 + \frac{\varphi_M}{C_M} M_1 \overline{P}_1 + \frac{\varphi_W}{C_M} + k_2 A_1 \overline{P}_1 \\ = \lambda \left[\varphi_M \overline{M} + \varphi_W \overline{W} - \frac{\varphi_M}{C_M} P_1^2 \overline{M} - \frac{\varphi_W}{C_M} P_1^2 \overline{W} - k_2 P_1^2 \overline{A} \right]. \end{aligned}$$

Como $\lambda \in [0, 1]$ e pela Proposição 1.7, então temos que

$$\begin{aligned} \|\overline{P}_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \|\lambda\|_{L^\infty(Q)} \left\| \varphi_M \overline{M} + \varphi_W \overline{W} - \frac{\varphi_M}{C_M} P_1^2 \overline{M} - \frac{\varphi_W}{C_M} P_1^2 \overline{W} - k_2 P_1^2 \overline{A} \right\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \|\varphi_M\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{M}\|_{L^2(Q)} + \|\varphi_W\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{W}\|_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\varphi_M}{C_M} \right\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{M}\|_{L^4(Q)} \|P_1^2\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + \left\| \frac{\varphi_W}{C_M} \right\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{W}\|_{L^4(Q)} \|P_1^2\|_{L^4(Q)} + \|k_2\|_{L^\infty(Q)} \|\overline{A}\|_{L^4(Q)} \|P_1^2\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \left(\left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{M}_1 - \widehat{M}_2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Logo, pelas desigualdade (2.6)-(2.10), temos que

$$\begin{aligned} \|R_1 - R_2\|_{(W_2^{2,1}(Q))^5} &= \left\| S_\lambda(\widehat{P}_1^1, \widehat{M}_1^1, \widehat{W}_1^1, \widehat{L}_2^1, \widehat{A}_1^1) - S_\lambda(\widehat{P}_1^2, \widehat{M}_2^2, \widehat{W}_2^2, \widehat{L}_2^2, \widehat{A}_2^2) \right\|_{(W_2^{2,1}(Q))^5} \\ &\leq \|\overline{P}_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{M}\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{W}\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{L}_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{A}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq C \left(\left\| \widehat{P}_1^1 - \widehat{P}_1^2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{M}_1 - \widehat{M}_2 \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{A}_1 - \widehat{A}_2 \right\|_{L^4(Q)} \right), \end{aligned}$$

sendo C uma constante positiva.

Portanto, pelo Lema 1.3, $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$, logo podemos afirmar que $S_\lambda(\cdot)$ é contínua em $L^8(Q)$, como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 2.5. Dado $B \subset (L^8(Q))^5$ um subconjunto limitado, então para cada $(P_1, M, W, L_2, A) \in B$, a função $S_{(\cdot)}(P_1, M, W, L_2, A)$ é contínua, uniformemente com relação a B .

Demonstração.

Dado $B \subset (L^8(Q))^5$ um subconjunto limitado, existe $r_B \geq 0$ tal que

$$\left\| (\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) \right\|_{(L^8(Q))^5} \leq r_B, \quad \forall (\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) \in B.$$

Considere $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ e fixemos $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) \in B$. Assim, denotemos por $Z_1 = S_{\lambda_1}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})$, $Z_2 = S_{\lambda_2}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})$.

Primeiramente, utilizando a quinta equação de (2.5), temos que $\overline{A} = A_1 - A_2$ satisfaz

$$\overline{A}' - k_A \Delta \overline{A} + \mu_A \overline{A} = (\lambda_1 - \lambda_2) \sigma \widehat{L}_2.$$

Assim, pela Proposição 1.7, segue

$$\begin{aligned} \|\overline{A}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \|(\lambda_1 - \lambda_2) \sigma \widehat{L}_2\|_{L^2(Q)} \leq |\lambda_1 - \lambda_2| \|\sigma\|_{L^\infty(Q)} \|\widehat{L}_2\|_{L^2(Q)} \\ &\leq C |\lambda_1 - \lambda_2| r_B. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Agora, considerando a segunda equação de (2.5), temos que $\overline{M} = M_1 - M_2$ satisfaz

$$\begin{aligned} \overline{M}' - k_M \Delta \overline{M} + \mu_M \overline{M} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) - \lambda_1 k_1 M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) + \lambda_2 k_1 M_2 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) - k_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) [\lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2]. \end{aligned}$$

Mas, observe que

$$\begin{aligned} \lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2 &= \lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_1 + \lambda_2 M_1 - \lambda_2 M_2 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) M_1 + \lambda_2 (M_1 - M_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) M_1 + \lambda_2 \overline{M}. \end{aligned}$$

Assim, substituindo na equação anterior e colocando a parte linear no lado esquerdo da igualdade, temos que $\overline{M}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \overline{M}' - k_M \Delta \overline{M} + \mu_M \overline{M} + k_1 \lambda_2 \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \\ = (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) - k_1 (\lambda_1 - \lambda_2) M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}). \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.7 e utilizando o Lema 2.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\overline{M}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \left\| (\lambda_1 - \lambda_2) \alpha_2 \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) - k_1(\lambda_1 - \lambda_2) M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \right\|_{L^2(Q)} \\
&\leq |\lambda_1 - \lambda_2| \|\alpha_2\|_{L^\infty(Q)} \left\| \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1) \right\|_{L^2(Q)} \\
&\quad + |\lambda_1 - \lambda_2| \|k_1\|_{L^\infty(Q)} \|M_1\|_{L^4(Q)} \left\| \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \right\|_{L^4(Q)} \\
&\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \left(C + C \left\| \widehat{P}_1 \right\|_{L^8(Q)} \right) \\
&\quad + C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B \left(C + C \left(\|A\|_{L^4(Q)} + \|P_1\|_{L^4(Q)} \|A\|_{L^4(Q)} \right) \right) \\
&\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B + C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B (C + C(r_B + r_B^2)) \\
&\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B + C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B^2 + C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B^3 \\
&\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| (r_B + r_B^2 + r_B^3).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

A seguir, utilizando a terceira equação de (2.5), temos que $\overline{W} = W_1 - W_2$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\overline{W}' - k_M \Delta \overline{W} + \mu_W \overline{W} &= k_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) [\lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2] \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) k_1 M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) + \lambda_2 k_1 \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})
\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição 1.7, tem-se que

$$\begin{aligned}
\|\overline{W}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \left\| (\lambda_1 - \lambda_2) k_1 M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) + \lambda_2 k_1 \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \right\|_{L^2(Q)} \\
&\leq |\lambda_1 - \lambda_2| \|k_1\|_{L^\infty(Q)} \|M_1\|_{L^4} \left\| \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \right\|_{L^4} \\
&\quad + \|k_1\|_{L^\infty(Q)} \left\| \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) \right\|_{L^4} \|\overline{M}\|_{L^4}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a estimativa encontrada para $\overline{M}$ e o Lema 2.1, temos que

$$\begin{aligned}
\|\overline{W}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B \left(1 + \left\| \widehat{A} \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{P}_1 \right\|_{L^8(Q)} \left\| \widehat{A} \right\|_{L^8(Q)} \right) \\
&\quad + C \left(1 + \left\| \widehat{A} \right\|_{L^4(Q)} + \left\| \widehat{P}_1 \right\|_{L^8(Q)} \left\| \widehat{A} \right\|_{L^8(Q)} \right) |\lambda_1 - \lambda_2| (r_B + r_B^2 + r_B^3) \\
&\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| (r_B + r_B^2 + r_B^3) [1 + (r_B + r_B^2)].
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Agora, considerando a quarta equação de (2.5), temos que $\overline{L}_2 = L_2^1 - L_2^2$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\overline{L}_2' - k_L \Delta \overline{L}_2 + (\sigma + \mu_{L_2}) \overline{L}_2 &= k_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) (\lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2) \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) k_1 M_1 \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A}) + \lambda_2 k_1 \overline{M} \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})
\end{aligned}$$

Assim, procedendo de maneira análoga ao realizado na equação para $\overline{W}$, segue que

$$\|\overline{L}_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2| (r_B + r_B^2 + r_B^3) [1 + (r_B + r_B^2)]. \tag{2.14}$$

Finalmente, utilizando a primeira equação de (2.5), obtemos que $\overline{P}_1 = P_1^1 - P_1^2$ satisfaz

$$\begin{aligned}
\overline{P}_1' - k_P \Delta \overline{P}_1 + (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \overline{P}_1 &= \lambda_1 \left[\varphi_M M_1 \left(1 - \frac{P_1^1}{C_M} \right) + \varphi_W W_1 \left(1 - \frac{P_1^1}{C_M} \right) - k_2 A_1 P_1^1 \right] \\
&\quad - \lambda_2 \left[\varphi_M M_2 \left(1 - \frac{P_1^2}{C_M} \right) + \varphi_W W_2 \left(1 - \frac{P_1^2}{C_M} \right) - k_2 A_2 P_1^2 \right].
\end{aligned}$$

Fazendo a diferença termo a termo observe que,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_M M_1 - \lambda_1 \frac{\varphi_M}{C_M} M_1 P_1^1 - \lambda_2 \varphi_M M_2 + \lambda_2 \frac{\varphi_M}{C_M} M_2 P_1^2 \\ = \varphi_M (\lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2) - \frac{\varphi_M}{C_M} (\lambda_1 M_1 P_1^1 - \lambda_2 M_2 P_1^2) \\ = \varphi_M ((\lambda_1 - \lambda_2) M_1 + \lambda_2 \overline{M}) - \frac{\varphi_M}{C_M} (\lambda_1 M_1 P_1^1 - \lambda_2 M_2 P_1^2), \end{aligned}$$

mas como

$$\begin{aligned} \lambda_1 M_1 P_1^1 - \lambda_2 M_2 P_1^2 &= \lambda_1 M_1 P_1^1 - \lambda_2 M_2 P_1^1 + \lambda_2 M_2 P_1^1 - \lambda_2 M_2 P_1^2 \\ &= (\lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2) P_1^1 + \lambda_2 M_2 \overline{P_1} \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) M_1 P_1^1 + \lambda_2 M_2 P_1^2 + \lambda_2 M_2 \overline{P_1}, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_M M_1 - \lambda_1 \frac{\varphi_M}{C_M} M_1 P_1^1 - \lambda_2 \varphi_M M_2 + \lambda_2 \frac{\varphi_M}{C_M} M_2 P_1^2 \\ = \varphi_M ((\lambda_1 - \lambda_2) M_1 + \lambda_2 \overline{M}) - \frac{\varphi_M}{C_M} ((\lambda_1 - \lambda_2) M_1 P_1^1 + \lambda_2 M_2 P_1^2 + \lambda_2 M_2 \overline{P_1}). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_1 \varphi_W W_1 \left(1 - \frac{P_1^1}{C_M}\right) - \lambda_2 \varphi_W W_2 \left(1 - \frac{P_1^2}{C_M}\right) &= \varphi_W ((\lambda_1 - \lambda_2) W_1 + \lambda_2 \overline{W}) \\ &\quad - \frac{\varphi_W}{C_M} ((\lambda_1 - \lambda_2) W_1 P_1^1 + \lambda_2 M_2 P_1^2 + \lambda_2 W_2 \overline{P_1}), \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} \lambda_1 k_2 A_1 P_1^1 - \lambda_2 k_2 A_2 P_1^2 &= k_2 (\lambda_1 A_1 P_1^1 - \lambda_2 A_2 P_1^1 + \lambda_2 A_2 P_1^1 - \lambda_2 A_2 P_1^2) \\ &= k_2 ((\lambda_1 - \lambda_2) A_1 P_1^1 + \lambda_2 \overline{A} P_1^1 + \lambda_2 A_2 P_1^1). \end{aligned}$$

Logo, obtemos que $\overline{P_1}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \overline{P_1}' - k_P \Delta \overline{P_1} + (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \overline{P_1} &= \varphi_M ((\lambda_1 - \lambda_2) M_1 + \lambda_2 \overline{M}) - \frac{\varphi_M}{C_M} ((\lambda_1 - \lambda_2) \overline{M} P_1^1 \\ &\quad + \lambda_2 M_2 \overline{P_1}) + \varphi_W ((\lambda_1 - \lambda_2) W_1 + \lambda_2 \overline{W}) - \frac{\varphi_W}{C_M} ((\lambda_1 - \lambda_2) \overline{W} P_1^1 + \lambda_2 W_2 \overline{P_1}) \\ &\quad + k_2 ((\lambda_1 - \lambda_2) A_1 P_1^1 + \lambda_2 \overline{A} P_1^1 + \lambda_2 A_2 \overline{P_1}). \end{aligned}$$

Passando a parte linear para lado esquerdo da igualdade, temos que,

$$\begin{aligned} \overline{P_1}' - k_P \Delta \overline{P_1} + (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \overline{P_1} + \frac{\varphi_M}{C_M} \lambda_2 M_2 \overline{P_1} + \frac{\varphi_W}{C_M} \lambda_2 W_2 \overline{P_1} - k_2 \lambda_2 A_2 \overline{P_1} \\ = \varphi_M ((\lambda_1 - \lambda_2) M_1 + \lambda_2 \overline{M}) - \frac{\varphi_M}{C_M} ((\lambda_1 - \lambda_2) \overline{M} P_1^1) + \varphi_W ((\lambda_1 - \lambda_2) W_1 + \lambda_2 \overline{W}) \\ - \frac{\varphi_W}{C_M} ((\lambda_1 - \lambda_2) \overline{W} P_1^1) + k_2 ((\lambda_1 - \lambda_2) A_1 P_1^1) + k_2 \lambda_2 \overline{A} P_1^1. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 1.7, segue que

$$\begin{aligned} \|\overline{P_1}\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq \|\varphi_M (\lambda_1 - \lambda_2) M_1\|_{L^2(Q)} + \|\varphi_M \lambda_2 \overline{M}\|_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\varphi_M}{C_M} (\lambda_1 - \lambda_2) \overline{M} P_1^1 \right\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + \|\varphi_W (\lambda_1 - \lambda_2) W_1\|_{L^2(Q)} + \|\varphi_W \lambda_2 \overline{W}\|_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\varphi_W}{C_M} (\lambda_1 - \lambda_2) \overline{W} P_1^1 \right\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + \|k_2 (\lambda_1 - \lambda_2) A_1 P_1^1\|_{L^2(Q)} + \|k_2 \lambda_2 \overline{A} P_1^1\|_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \|\overline{P}_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \|M_1\|_{L^2(Q)} + C \|\overline{M}\|_{L^2(Q)} + C|\lambda_1 - \lambda_2| \|\overline{M}\|_{L^4(Q)} \|P_1^1\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + C|\lambda_1 - \lambda_2| \|W_1\|_{L^2(Q)} + C \|\overline{W}\|_{L^2(Q)} + C|\lambda_1 - \lambda_2| \|\overline{W}\|_{L^4(Q)} \|P_1^1\|_{L^4(Q)} \\ &\quad + C|\lambda_1 - \lambda_2| \|A_1\|_{L^4(Q)} \|P_1^1\|_{L^4(Q)} + C \|\overline{A}\|_{L^4(Q)} \|P_1^1\|_{L^4(Q)}, \end{aligned}$$

usando a estimativa (2.11) e após algumas simplificações, pode-se verificar que

$$\begin{aligned} \|\overline{P}_1\|_{W_2^{2,1}} &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2 r_B (r_B + r_B^2 + r_B^3) (1 + (r_B + r_B^2)) + C|\lambda_1 - \lambda_2| r_B (1 + r_B) \\ &\quad + C|\lambda_1 - \lambda_2| (r_B + r_B^2 + r_B^3) (1 + (r_B + r_B^2)) \\ &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| [(r_B + r_B^2 + r_B^3)(1 + r_B + r_B^2)(|\lambda_1 - \lambda_2| r_B + 1) + r_B(1 + r_B)] \\ &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2|. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Portanto, pelas desigualdades (2.11)-(2.15), tem-se que

$$\begin{aligned} \|Z_1 - Z_2\|_{(W_2^{2,1}(Q))^5} &= \|S_{\lambda_1}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) - S_{\lambda_2}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})\|_{(W_2^{2,1}(Q))^5} \\ &\leq \|\overline{P}_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{M}\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{W}\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{L}_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\overline{A}\|_{W_2^{2,1}(Q)} \\ &\leq C|\lambda_1 - \lambda_2|, \end{aligned}$$

com C independente de $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) \in B$. Pelo Lema 1.3, $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$, e portanto, $S_{(\cdot)}(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) : [0, 1] \rightarrow L^8(Q)$ é contínua, uniformemente em relação a B , como queríamos. $\square$

Lema 2.6. Para $\lambda = 0$, a função $S_0(\cdot)$ tem um único ponto fixo.

Demonstração.

Para $\lambda = 0$, temos que $(P_1, M, W, L_2, A) \in (L^8(Q))^5$ é um ponto fixo de $S_0(\cdot)$ se, e somente se, satisfaz

$$\begin{cases} P_1' - k_P \Delta P_1 + (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 = 0 \\ M' - k_M \Delta M + \mu_M M = 0 \\ W' - k_W \Delta W + \mu_W W = 0 \\ L_2' - k_L \Delta L_2 + (\sigma + \mu_{L_2}) L_2 = 0 \\ A' - K_A \Delta A + \mu_A A = 0 \end{cases}$$

com as condições (2). Aplicando a Proposição 1.7 em cada equação do sistema acima, garantimos que existe uma única solução $(P_1, M, W, L_2, A) \in (W_2^{2,1}(Q))^5 \hookrightarrow (L^8(Q))^5$ deste.

Portanto, $S_0(\cdot)$ tem um único ponto fixo em $(L^8(Q))^5$. $\square$

Lema 2.7. Existe um número $\rho > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in [0, 1]$ e qualquer possível ponto fixo $(P_1, M, W, L_2, A) \in (L^8(Q))^5$ de $S_\lambda(\cdot)$, tem-se que

$$\|P_1, M, W, L_2, A\|_{(L^8(Q))^5} \leq \rho.$$

Demonstração.

Seja $(P_1, M, W, L_2, A) \in (L^8(Q))^5$ um ponto fixo de $S_\lambda(\cdot)$, para algum $\lambda \in [0, 1]$. Logo satisfaz ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1' - k_P \Delta P_1 = \lambda \left[\varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) W - k_2 A P_1 \right] & \text{em } Q, \\ \quad \quad \quad - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 & \\ M' - k_M \Delta M = \lambda [\alpha_2 \mathcal{P}_2(P_1) - k_1 M \mathcal{L}_1(P_1, M, A)] - \mu_M M & \text{em } Q, \\ W' - k_W \Delta W = \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(P_1, M, A) - \mu_W W & \text{em } Q, \\ L_2' - k_L \Delta L_2 = \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(P_1, M, A) - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2 & \text{em } Q, \\ A' - k_A \Delta A = \lambda [\sigma L_2] - \mu_A A & \text{em } Q. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

com condições iniciais e de fronteiras (2).

Afirmamos que $P_1 \leq C_M$; Primeiramente, note que $P_1' = (P_1 - C_M)'$ e $\Delta P_1 = \Delta(P_1 - C_M)$. Assim, podemos reescrever a primeira equação do sistema acima da forma;

$$\begin{aligned} (P_1 - C_M)' - k_P \Delta(P_1 - C_M) &= -\lambda \frac{\varphi_M}{C_M} (P_1 - C_M) M - \lambda \frac{\varphi_W}{C_M} (P_1 - C_M) W - \lambda k_2 A P_1 \\ &\quad - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \mathcal{P}_2(P_1) \end{aligned}$$

Considerando a parte positiva do termo $(P_1 - C_M)$, ou seja,

$$(P_1 - C_M)_+ = \begin{cases} P_1 - C_M, & \text{se } P_1 > C_M \\ 0, & \text{se } P_1 \leq C_M \end{cases}$$

Multiplicando a equação acima por $(P_1 - C_M)_+$ e integrando em Ω , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (P_1 - C_M)_+^2 + k_P \int_{\Omega} |\nabla(P_1 - C_M)_+|^2 &= -\frac{\lambda}{C_M} \int_{\Omega} \varphi_M M (P_1 - C_M)_+^2 \\ &\quad - \frac{\lambda}{C_M} \int_{\Omega} \varphi_W W (P_1 - C_M)_+^2 - \lambda k_2 \int_{\Omega} A P_1 (P_1 - C_M)_+ \\ &\quad - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} P_1 (P_1 - C_M)_+. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} -(\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} P_1 (P_1 - C_M)_+ &= -(\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} (P_1 - C_M) (P_1 - C_M)_+ \\ &\quad - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} C_M (P_1 - C_M)_+ \\ &= -(\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} (P_1 - C_M)_+^2 \\ &\quad - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} C_M (P_1 - C_M)_+. \end{aligned}$$

Temos que $k_P \int_{\Omega} |\nabla(P_1 - C_M)_+|^2 \geq 0$ e o primeiro, segundo e terceiro termos do lado direito da igualdade são negativos, pois $P_1, M, W, A > 0$ pelo Lema 2.2. Além disso, $-(\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} C_M (P_1 - C_M)_+$ é negativo, então podemos reescrever da forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (P_1 - C_M)_+^2 \leq -(\alpha_1 + \mu_{P_1}) \int_{\Omega} (P_1 - C_M)_+^2;$$

Pelo Lema de Gronwall (Lema 1.1), tomando $\eta(t) = \int_{\Omega} (P_1 - C_M)_+^2$, $\varphi(t) = -(\alpha_1 + \mu_{P_1})$ e $\psi(t) = 0$, temos que

$$\int_{\Omega} (P_1(t) - C_M)_+^2 \leq e^{-\int_0^t (\alpha_1 + \mu_{P_1})} \int_{\Omega} (P_{10} - C_M)_+^2 \leq C \int_{\Omega} (P_{10} - C_M)_+^2,$$

sendo C uma constante positiva. Mas, como $(P_{10} - C_M)_+ \equiv 0$, então tem-se que

$$\int_{\Omega} (P_1 - C_M)_+^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (P_1 - C_M)_+^2 = 0.$$

Logo, sendo $(P_1 - C_M) = (P_1 - C_M)_+ - (P_1 - C_M)_-$ então $(P_1 - C_M) \leq 0$. De onde, $P_1 \leq C_M$, como queríamos.

Agora, considere a segunda equação do sistema (2.16). Daí, multiplicando por M^7 e integrando em Ω , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} M^8 + k_M \int_{\Omega} 7M^6 |\nabla M|^2 + \mu_M \int_{\Omega} M^8 &= \lambda \alpha_2 \int_{\Omega} \mathcal{P}_2(P_1) M^7 - \lambda k_1 \int_{\Omega} M^8 \mathcal{L}_1(P_1, M, A) \\ &\leq \lambda \alpha_2 \int_{\Omega} \mathcal{P}_2(P_1) M^7, \end{aligned} \quad (2.17)$$

pois $-\lambda k_1 \int_{\Omega} M^8 \mathcal{L}_1(P_1, M, A) \leq 0$. Usando a desigualdade de Hölder (Proposição 1.4), com $p = 8$ e $q = \frac{8}{7}$, tem-se que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} M^8 + k_M \int_{\Omega} 7M^6 |\nabla M|^2 + \mu_M \int_{\Omega} M^8 \leq \|\lambda \alpha_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathcal{P}_2(P_1)\|_{L^8(\Omega)} \|M^7\|_{L^{8/7}(\Omega)},$$

E, como sabemos que $\|f^p\|_{L^q} = \|f\|_{L^{pq}}^p$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} M^8 + k_M \int_{\Omega} 7M^6 |\nabla M|^2 + \mu_M \int_{\Omega} M^8 &\leq \|\lambda \alpha_2\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathcal{P}_2(P_1)\|_{L^8(\Omega)} \|M\|_{L^8(\Omega)}^7 \\ &\leq C \left(\|\mathcal{P}_2(P_1)\|_{L^8(\Omega)}^8 + \left(\|M\|_{L^8(\Omega)}^7 \right)^{8/7} \right) \\ &\leq C \|\mathcal{P}_2(P_1)\|_{L^8(\Omega)}^8 + C \|M\|_{L^8(\Omega)}^8. \end{aligned}$$

Como $P_1 \leq C_M$, então $\|\mathcal{P}_2(P_1)\|_{L^8(Q)} \leq C$, e ainda, como o segundo e terceiro termo do lado esquerdo da equação (2.17) são positivos, podemos assim escrever que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} M^8 \leq C + C \|M\|_{L^8(\Omega)}^8 = C + C \int_{\Omega} M^8.$$

Daí, pelo Lema de Gronwall (Lema 1.1), com $\eta(t) = \int_{\Omega} M(t)^8$, $\varphi(t) = C$ e $\psi(t) = C$, temos que

$$\int_{\Omega} M^8 \leq C \int_{\Omega} M_0^8 + C \quad \Rightarrow \quad \|M\|_{L^8(\Omega)} \leq C.$$

Agora, consideremos a quarta e a quinta equação do sistema (2.16). Daí, multiplicando a quinta equação por A e integrando em Ω , obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} A^2 + k_A \int_{\Omega} |\nabla A|^2 &= \lambda \int_{\Omega} \sigma L_2 A - \int_{\Omega} \mu_A A^2 \\ &\leq C \int_{\Omega} L_2^2 + C \int_{\Omega} A^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Multiplicando a quarta equação por L_2 e integrando em Ω , tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} L_2^2 + k_L \int_{\Omega} |\nabla L_2|^2 &= \lambda \int_{\Omega} k_1 M \mathcal{L}_1(P_1, M, A) L_2 - \int_{\Omega} (\sigma + \mu_{L_2}) L_2^2 \\ &\leq C \|M\|_{L^4(Q)} \|\mathcal{L}_1(P_1, M, A)\|_{L^4(Q)} \|L_2\|_{L^2(Q)} + C \int_{\Omega} L_2^2 \\ &\leq C \|\mathcal{L}_1(P_1, M, A)\|_{L^4(Q)}^2 + C \|L_2\|_{L^2(Q)}^2 + C \|L_2\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq C \left(1 + \|A\|_{L^2(Q)}^2 + \|L_2\|_{L^2(Q)}^2\right) \\ &\leq C \left(1 + \int_{\Omega} A^2 + \int_{\Omega} L_2^2\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Logo, somando as equações (2.18)-(2.19), obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A^2 + L_2^2) + k_A \int_{\Omega} |\nabla A|^2 + k_L \int_{\Omega} |\nabla L_2|^2 \leq C + C \int_{\Omega} (A^2 + L_2^2),$$

como o segundo e o terceiro termos do lado esquerdo da desigualdade acima são positivos, temos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (A^2 + L_2^2) \leq C + C \int_{\Omega} (A^2 + L_2^2).$$

Assim, utilizando o Lema de Gronwall (Lema 1.1), com $\eta(t) = \int_{\Omega} (A^2 + L_2^2)$, $\varphi(t) = C$ e $\psi(t) = C$, então

$$\int_{\Omega} (A^2 + L_2^2) \leq e^C \left(\int_{\Omega} (A_0^2 + L_{20}^2) + \int_{\Omega} C \right) \leq C.$$

Portanto, $\|A\|_{L^2(Q)} \leq C$ e $\|L_2\|_{L^2(Q)} \leq C$.

Agora, considere a quinta equação do sistema (2.16):

$$A' - k_A \Delta A + \mu_A A = \lambda \sigma L_2.$$

Como $\sigma L_2 \in L^2(Q)$, então $A \in W_2^{2,1}(Q)$. Pelas imersões $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^{10}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$ em $\mathbb{R}^3$, tem-se que $A \in L^8(Q)$. Além disso,

$$\|A\|_{L^8(Q)} \leq C \|A\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \|\lambda \sigma L_2\|_{L^2(Q)} \leq \|\lambda \sigma\|_{L^\infty(Q)} \|L_2\|_{L^2(Q)} \leq C.$$

Da mesma forma, considere a terceira equação de (2.16):

$$W' - k_M \Delta W + \mu_W W = \lambda k_1 M \mathcal{L}_1(P_1, M, A).$$

Como $M\mathcal{L}_1(P_1, M, A) \in L^4(Q)$ e $W \in L^2(Q)$, então temos que $\lambda k_1 M\mathcal{L}_1(P_1, M, A) \in L^2(Q)$. Assim, $W \in W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^8(Q)$, pela imersão de Sobolev em $\mathbb{R}^3$ (Lema 1.3). Logo,

$$\begin{aligned} \|W\|_{L^8(Q)} &\leq C \|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \|\lambda k_1 M\mathcal{L}_1(P_1, M, A)\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \|\lambda k_1\|_{L^\infty(Q)} \|M\|_{L^4(Q)} \|\mathcal{L}_1(P_1, M, A)\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \|M\|_{L^4(Q)} \left(1 + \|A\|_{L^4(Q)} + \|P_1\|_{L^4(Q)} \|A\|_{L^4(Q)}\right) \leq C \left(1 + \|A\|_{L^4(Q)}\right) \leq C. \end{aligned}$$

Por fim, observe na equação em L_2 que podemos proceder de forma análoga ao realizado acima para obtermos que $L_2 \in W_2^{2,1}(Q)$ e pela imersão de Sobolev, em $\mathbb{R}^3$, segue que $L_2 \in L^8(Q)$, então

$$\begin{aligned} \|L_2\|_{L^8(Q)} &\leq \|L_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \|\lambda k_1 M\mathcal{L}_1(P_1, M, A)\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \|\lambda k_1\|_{L^\infty(Q)} \|M\|_{L^4(Q)} \|\mathcal{L}_1(P_1, M, A)\|_{L^4(Q)} \\ &\leq C \left(1 + \|A\|_{L^4(Q)}\right) \leq C. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\|P_1\|_{L^8(Q)} + \|M\|_{L^8(Q)} + \|W\|_{L^8(Q)} + \|L_2\|_{L^8(Q)} + \|A\|_{L^8(Q)} \leq \rho,$$

sendo ρ uma constante positiva. □

Logo, verificamos as hipóteses do Teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, e então podemos provar a Proposição 2.1:

Demonstração.

Pelos Lemas 2.3 - 2.7, concluímos que a função $S_\lambda : (L^8(Q))^5 \rightarrow (L^8(Q))^5$, com $\lambda \in [0, 1]$ satisfaz as hipóteses do Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder. Então, existe um único $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) \in (L^8(Q))^5$ tal que

$$S_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}) = (\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}),$$

satisfazendo o sistema (2.4). □

2.3 Demonstração do teorema de existência e unicidade

Para completar a demonstração do Teorema 1.1 consideremos $(\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \widehat{A})$, onde $(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A})$ é a única solução do sistema (2.4)-(2) dada pela Proposição 2.1, com $\widehat{P}_2 = \mathcal{P}_2(\widehat{P}_1)$ e $\widehat{L}_1 = \mathcal{L}_1(\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{A})$, com $\mathcal{P}_2(\cdot)$, $\mathcal{L}_1(\cdot)$ dadas por (2.2) e (2.3), respectivamente. Então, $(\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \widehat{A}) \in W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é a única solução do problema (2.4)-(2).

Pelo Lema 2.2, temos que $\widehat{P}_1, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_2, \widehat{A}$ são funções não negativas. E pelas observações 2.1 e 2.2, temos que $\widehat{P}_2, \widehat{L}_1$ são funções não negativas. Logo, $(P_1, P_2, M, W, L_1, L_2, A) = (\widehat{P}_1, \widehat{P}_2, \widehat{M}, \widehat{W}, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2, \widehat{A})$ é a única solução do problema (1)-(2). Além disso, pelo Lema 2.7, temos que

$$\|P_1\|_{L^8(Q)} + \|M\|_{L^8(Q)} + \|W\|_{L^8(Q)} + \|L_2\|_{L^8(Q)} + \|A\|_{L^8(Q)} \leq C.$$

Agora, pelo Lema 2.1(iii)-(iv) e pela desigualdade acima, tem-se

$$\|P_2\|_{L^4(Q)} = \|\mathcal{P}_2(P_1)\|_{L^4(Q)} \leq C \left(1 + \|P_1\|_{L^8(Q)}\right) \leq C$$

e

$$\|L_1\|_{L^4(Q)} = \|\mathcal{L}_1(P_1, M, A)\|_{L^4(Q)} \leq C \left(1 + \|A\|_{L^4(Q)} + \|P_1\|_{L^8(Q)} \|A\|_{L^8(Q)}\right) \leq C.$$

Aplicando a Proposição 1.7 na primeira equação do sistema (1)-(2), como $\varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) W - (\alpha_1 + \mu_{P_1})P_1 - k_2 A P_1 \in L^4(Q)$ e $P_{10} \in H^2(\Omega)$, então $P_1 \in W_2^{2,1}(Q)$ e

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|P_{10}\|_{H^2(\Omega)} + \|M\|_{L^2(Q)} + \|P_1\|_{L^4(Q)} \|M\|_{L^4(Q)} + \|W\|_{L^2(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \|P_1\|_{L^4(Q)} \|M\|_{L^4(Q)} + \|P_1\|_{L^2(Q)} + \|A\|_{L^4(Q)} \|P_1\|_{L^4(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Em seguida, procedendo de forma análoga, observe que o lado direito da terceira equação do sistema (1)-(2) pertence a $L^4(Q)$ e $M_0 \in H^2(\Omega)$, então $M \in W_2^{2,1}(Q)$ e

$$\begin{aligned} \|M\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|M_0\|_{H^2(\Omega)} + \|\alpha_2 P_2 - k_1 M L_1 - \mu_M M\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|M_0\|_{H^2(\Omega)} + \|P_2\|_{L^2(Q)} + \|M\|_{L^4(Q)} \|L_1\|_{L^4(Q)} + \|M\|_{L^2(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Na quarta equação do sistema (1)-(2), temos que $k_1 M L_1 - \mu_W W \in L^4(Q)$ e $W_0 \in H^2(\Omega)$, então $W \in W_2^{2,1}(Q)$ e

$$\begin{aligned} \|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|W_0\|_{H^2(\Omega)} + \|k_1 M L_1 - \mu_W W\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|W_0\|_{H^2(\Omega)} + \|M\|_{L^4(Q)} \|L_1\|_{L^4(Q)} + \|W\|_{L^2(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Procedendo de forma análoga para as equações correspondente a sexta e sétima do sistema (1)-(2), temos respectivamente que $L_2, A \in W_2^{2,1}(Q)$ e

$$\begin{aligned} \|L_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|L_{20}\|_{H^2(\Omega)} + \|k_1 M L_1 - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|L_{20}\|_{H^2(\Omega)} + \|M\|_{L^4(Q)} \|L_1\|_{L^4(Q)} + \|L_2\|_{L^2(Q)} \right) \leq C, \\ \|A\|_{W_2^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|A_0\|_{H^2(\Omega)} + \|\sigma L_2 - \mu_A A\|_{L^2(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|A_0\|_{H^2(\Omega)} + \|L_2\|_{L^2(Q)} + \|A\|_{L^2(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|P_2\|_{L^4(Q)} + \|M\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|L_1\|_{L^4(Q)} \\ + \|L_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

2.4 Demonstração do teorema de regularidade

Agora, vamos demonstrar o Teorema 1.2 utilizando argumentos do tipo bootstrapping.

Consideremos $(P_1, P_2, M, W, L_1, L_2, A) \in W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times L^4(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ solução do sistema (1)-(2). Observemos que

$$P_2 = \mathcal{P}_2(P_1) = P_{20}B(x, t; 0) + \int_0^t B(x, t; s)\alpha_1 P_1 ds,$$

onde $B(x, t; s) = \exp\left(-\int_s^t \alpha_2 + \mu_{P_2}\right)$, por (2.2).

Pelo Lema 1.3, temos que $P_1 \in W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^{10}(Q)$, e pelo Lema 1.2, $P_{20} \in H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, pois $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Como $B(x, t; s) \in L^\infty(Q)$, então $P_2 \in L^{10}(Q)$ e

$$\begin{aligned} \|P_2\|_{L^{10}(Q)} &= \left\| P_{20}B(x, t; s) + \int_0^t B(x, t; s)\alpha_1 P_1 \right\|_{L^{10}(Q)} \\ &\leq \|P_{20}\|_{L^\infty(Q)} \|B(x, t; s)\|_{L^{10}(Q)} + \int_0^T \|B(x, t; s)\|_{L^\infty(Q)} \|\alpha_1\|_{L^\infty(Q)} \|P_1\|_{L^{10}(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$P_2' = \alpha_1 P_1 - (\alpha_2 + \mu_{P_2})P_2 \Rightarrow P_2' \in L^{10}(Q).$$

Então, $P_2 \in C([0, T]; L^{10}(\Omega))$, pela Proposição 1.5 e

$$\|P_2\|_{C([0, T]; L^{10}(\Omega))} \leq C \|P_2\|_{L^{10}(Q)} \leq C.$$

Agora, observemos que

$$L_1 = \mathcal{L}_1(P_1, M, A) = L_{10}\bar{B}(x, t; 0) + \int_0^t \bar{B}(x, t; s)A \left(\varphi_A + \frac{qk_1}{C_M} P_1 \right)$$

com $\bar{B}(x, t; s) = \exp\left(-\int_s^t \frac{\varphi_A}{C_A} A + \frac{qk_1}{C_M} P_1 A + \mu_{L_1} + k_1 M\right)$, por (2.3).

Pelo Lema 1.3, temos que $P_1, M, A \in W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^{10}(Q)$ e pelo Lema 1.2, $L_{10} \in H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$. Como $\bar{B}(x, t; s) \in L^\infty(Q)$, então $L_1 \in L^5(Q)$ e

$$\begin{aligned} \|L_1\|_{L^5(Q)} &\leq \left\| L_{10}\bar{B}(x, t; 0) + \int_0^t \bar{B}(x, t; s)A \left(\varphi_A + \frac{qk_1}{C_M} P_1 \right) \right\|_{L^5(Q)} \\ &\leq \|L_{10}\|_{L^\infty(Q)} \|\bar{B}(x, t; 0)\|_{L^5(Q)} + \int_0^T \|\bar{B}(x, t; s)\|_{L^\infty(Q)} \|A\|_{L^5(Q)} \\ &\quad + \|\bar{B}(x, t; s)\|_{L^\infty(Q)} \|A\|_{L^{10}(Q)} \|P_1\|_{L^{10}(Q)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Mais ainda,

$$L_1' = \left(\varphi_A + \frac{qk_2 P_1}{C_M} \right) \left(1 - \frac{L_1}{C_A} \right) A - \mu_{L_1} L_1 - k_1 M L_1 \in L^{\frac{5}{2}}(Q),$$

pois usando a desigualdade de Hölder (Proposição 1.4), temos que

$$\begin{aligned} \int (P_1 L_1 A)^{\frac{5}{2}} &\leq \|P_1^{\frac{5}{2}}\|_{L^4(Q)} \|L_1^{\frac{5}{2}}\|_{L^2(Q)} \|A^{\frac{5}{2}}\|_{L^4(Q)} \\ &= \|P_1\|_{L^{10}(Q)}^{\frac{5}{2}} \|L_1\|_{L^5(Q)}^{\frac{5}{2}} \|A\|_{L^{10}(Q)}^{\frac{5}{2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $L_1 \in L^5(Q)$ e $L_1' \in L^{\frac{5}{2}}(Q)$.

Consideremos agora a primeira equação do sistema (1)-(2):

$$P_1' - k_P \Delta P_1 = \varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) W - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 - k_2 A P_1.$$

Note que o lado direito da igualdade está contido em $L^5(Q) \hookrightarrow L^{\frac{10}{3}}(Q)$. Como $P_{10} \in H^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$, pelo Lema 1.2(i), para $2 \leq q \leq \frac{10}{3}$. Ou seja, $P_{10} \in W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{3}}(\Omega)$.

Logo, pela Proposição 1.7, temos que $P_1 \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|P_{10}\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10/3}}(\Omega)} + \left\| \varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M}\right) W \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\alpha_1 + \mu_{P_1}) P_1 - k_2 A P_1 \right\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|P_{10}\|_{H^2(\Omega)} + \|P_1\|_{L^{10}(Q)} \|M\|_{L^5(Q)} + \|P_1\|_{L^{10}(Q)} \|W\|_{L^5(Q)} + \|P_1\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right. \\ &\quad \left. + \|P_1\|_{L^{10}(Q)} \|A\|_{L^5(Q)} \right) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Analogamente, considere a terceira equação do sistema (1)-(2):

$$M' - k_M \Delta M = \alpha_2 P_2 - k_1 M L_1 - \mu_M M.$$

Como $M \in L^{10}(Q)$ e $L_1 \in L^5(Q)$, então obtemos que $M L_1 \in L^{\frac{10}{3}}(Q)$. Assim, o lado direito da equação acima pertence a $L^{\frac{10}{3}}(Q)$. Mas, como $M_0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{3}}(\Omega)$, assim pela Proposição 1.7, segue que $M \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|M\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|M_0\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10/3}}(\Omega)} + \|\alpha_2 P_2 - k_1 M L_1 - \mu_M M\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|M_0\|_{H^2(\Omega)} + \|P_2\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} + \|M\|_{L^{10}(Q)} \|L_1\|_{L^5(Q)} + \|M\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Agora, consideremos a quarta equação do sistema (1)-(2):

$$W' - k_W \Delta W = k_1 M L_1 - \mu_W W.$$

Note que o lado direito da igualdade pertence a $L^5(Q) \hookrightarrow L^{\frac{10}{3}}(Q)$. Como $W_0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10}}(\Omega)$, e portanto, pela Proposição 1.7, temos que $W \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|W\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|W_0\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10}}(\Omega)} + \|k_1 M L_1 - \mu_W W\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|W_0\|_{H^2(\Omega)} + \|M\|_{L^{10}(Q)} \|L_1\|_{L^5(Q)} + \|W\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Consideremos agora a sexta equação do sistema (1)-(2):

$$L_2' - k_L \Delta L_2 = k_1 M L_1 - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2.$$

Observe que o lado direito da igualdade pertence a $L^5(Q) \hookrightarrow L^{\frac{10}{3}}(Q)$. Mas, como $L_{20} \in H^2(\Omega) \hookrightarrow W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10}}(\Omega)$, então pela Proposição 1.7, temos que $L_2 \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|L_2\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|L_{20}\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10}}(\Omega)} + \|k_1 M L_1 - (\sigma + \mu_{L_2}) L_2\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|L_{20}\|_{H^2(\Omega)} + \|M\|_{L^{10}(Q)} \|L_1\|_{L^5(Q)} + \|L_2\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Por último, considere a sétima equação do sistema (1)-(2):

$$A' - k_A \Delta A = \sigma L_2 - \mu_A A.$$

Como o lado direito da igualdade pertence a $L^{10}(Q) \hookrightarrow L^{\frac{10}{3}}(Q)$ e $A_0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10}}(\Omega)$, então pela Proposição 1.7, tem-se que $A \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|A\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|A_0\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2-\frac{2}{10}}(\Omega)} + \|\sigma L_2 - \mu_A A\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \\ &\leq C \left(\|A_0\|_{H^2(\Omega)} + \|L_2\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} + \|A\|_{L^{\frac{10}{3}}(Q)} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Portanto, obtivemos até aqui que $P_1, M, W, L_2, A \in W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)$, $P_2 \in C([0, T]; L^{10}(\Omega))$ e $L_1 \in L^5(Q)$ com $L_1' \in L^{\frac{5}{2}}(Q)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|P_2\|_{C([0, T]; L^{10}(\Omega))} + \|M\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|L_1\|_{L^5(Q)} \\ + \|L_2\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

Mas pelo Lema 1.3(iii), $W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q) \hookrightarrow L^\infty(Q)$, logo $(P_1, M, W, L_2, A) \in L^\infty(Q)$. Com isto, conseguiremos obter uma melhor regularidade para as solução das equações diferenciais ordinárias.

Considerando a equação em P_2 ,

$$P_2 = \mathcal{P}_2(P_1) = P_{20}B(x, t; 0) + \int_0^t B(xt; s)\alpha_1 P_1 ds,$$

onde $B(x, t; s) = \exp\left(-\int_s^t \alpha_2 + \mu_{P_2}\right)$, por (2.2), temos que o lado direito da igualdade pertence a $L^\infty(Q)$, pois agora $P_1 \in L^\infty(Q)$. Além disso,

$$P_2' = \alpha_1 P_1 - (\alpha_2 + \mu_{P_2})P_2 \in L^\infty(Q),$$

pois $L_2 \in L^\infty(Q)$. Assim, obtemos que $P_2 \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$, pela Proposição 1.5 e

$$\|P_2\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} \leq C \|P_2\|_{L^\infty(Q)} \leq C.$$

Analogamente, considerando a equação em L_1 ,

$$L_1 = \mathcal{L}_1(P_1, M, A) = L_{10}\bar{B}(x, t; 0) + \int_0^t \bar{B}(x, t; s)A\left(\varphi_A + \frac{qk_1}{C_M}P_1\right)$$

com $\bar{B}(x, t; s) = \exp\left(-\int_s^t \frac{\varphi_A}{C_A}A + \frac{qk_1}{C_M}P_1A + \mu_{L_1} + k_1M\right)$, por (2.3), temos que o lado direito da igualdade pertence a $L^\infty(Q)$, pois $AP_1 \in L^\infty(Q)$. Mais ainda,

$$L_1' = \left(\varphi_A + \frac{qk_2P_1}{C_M}\right)\left(1 - \frac{L_1}{C_A}\right)A - \mu_{L_1}L_1 - k_1ML_1 \in L^\infty(Q),$$

pois $P_1, A, M, L_1 \in L^\infty(Q)$ e pela Proposição 1.5, segue que $L_1 \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ e

$$\|L_1\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} \leq C \|L_1\|_{L^\infty(Q)} \leq C.$$

Logo, tem-se que

$$\begin{aligned} \|P_1\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|P_2\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} + \|M\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|L_1\|_{C([0, T]; L^\infty(\Omega))} \\ + \|L_2\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_{\frac{10}{3}}^{2,1}(Q)} \leq C. \end{aligned}$$

Agora, observemos que a regularidade das condições iniciais estão impedindo uma melhor regularidade para nossa solução, então suponhamos que $P_{10}, M_0, W_0, L_{20}, A_0 \in W_p^2(\Omega)$ para algum $p \geq 2$.

O lado direito da primeira equação de (1)-(2) pertence a $L^\infty(Q)$. Como $P_{10} \in W_p^2(\Omega) \hookrightarrow W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$, com $p \leq q \leq \frac{5p}{3}$, então temos $P_{10} \in W_{\frac{5p}{3}}^{2-\frac{2}{5p}}(\Omega)$. Logo da

Proposição 1.7, segue que $P_1 \in W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\|P_1\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} &\leq C \left(\|P_{10}\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2-\frac{2}{5p/3}}(\Omega)} + \left\| \varphi_M \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) M + \varphi_W \left(1 - \frac{P_1}{C_M} \right) W \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (\alpha_1 + \mu_{P_1})P_1 - k_2 A P_1 \right\|_{L^{\frac{5p}{3}}(Q)} \right) \\
&\leq C \left(\|P_{10}\|_{W_p^2(\Omega)} + \|M\|_{L^{\frac{5p}{3}}(Q)} + \|P_1 M\|_{L^{\frac{5p}{3}}(Q)} + \|W\|_{L^{\frac{5p}{3}}(Q)} + \|P_1 W\|_{L^{\frac{5p}{3}}(Q)} \right. \\
&\quad \left. + \|P_1\|_{L^{\frac{5p}{3}}(Q)} + \|A P_1\|_{L^{\frac{5p}{3}}(Q)} \right) \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Em particular, se $P_{10} \in W_{\infty}^2(\Omega)$, então $P_1 \in W_q^{2,1}(Q)$ para todo $2 \leq q < +\infty$.

Procedendo de forma análoga para as equações correspondente a terceira, quarta, sexta e sétima no sistema (1)-(2), se $M_0, W_0, L_{20}, A_0 \in W_p^2(\Omega)$, então obtem-se que $M, W, L_2, A \in W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\|P_1\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|M\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|W\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|L_2\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} + \|A\|_{W_{\frac{5p}{3}}^{2,1}(Q)} \leq C.$$

Mais ainda, em particular, se $M_0, W_0, L_{20}, A_0 \in W_{\infty}^2(\Omega)$, então $M, W, L_2, A \in W_q^{2,1}(Q)$ para todo $2 \leq q < \infty$.

3 Considerações Finais

Neste trabalho foi proposto o estudo de um modelo matemático adaptado do artigo (ESTEVA; RIVAS; YANG, 2006) que representa a dinâmica populacional entre os ácaros da água e os mosquitos em uma determinada região limitada.

Para este modelo foram obtidas existência e unicidade de solução. Também foi obtido um resultado sobre a regularidade de solução para o mesmo.

Foi utilizado o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder para garantir a existência e unicidade da solução do sistema que descreve o modelo analisado. Além disso, conseguimos analisar a regularidade da solução encontrada utilizando argumentos do tipo bootstrapping.

Mais ainda, vimos que utilizando argumentos do tipo bootstrapping é possível obter a solução do sistema em espaços mais regulares, desde que consideremos as condições iniciais em um espaço de funções adequado.

Referências

- ADAMS, R. A. *Sobolev spaces*. 1975. [S.l.]: Academic Press, New York, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 14, 16 e 21.
- ARAÚJO, A. L. de; BOLDRINI, J. L.; CALSAVARA, B. M. An analysis of a mathematical model describing the geographic spread of dengue disease. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 444, n. 1, p. 298–325, 2016. Nenhuma citação no texto.
- ESTEVA, L.; RIVAS, G.; YANG, H. M. Modelling parasitism and predation of mosquitoes by water mites. *Journal of mathematical biology*, Springer, v. 53, n. 4, p. 540–555, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 10, 11 e 54.
- EVANS, L. C. *Partial differential equations (providence, RI: American mathematical society)*. [S.l.: s.n.], 1998. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 16.
- FRIEDMAN, A. *Partial differential equations of parabolic type*. [S.l.]: Prentice Hall, 1964. Citado na página 21.
- LADYZHENSKAIA, O. A.; SOLONNIKOV, V. A.; URAL'CEVA, N. N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1968. v. 23. Citado 3 vezes nas páginas 14, 21 e 22.
- LIONS, J.-L. *Contrôle des systemes distribués singuliers*. Gauthier-Villars, 1983. Citado na página 21.
- ROYDEN, H. L.; FITZPATRICK, P. *Real analysis*. [S.l.]: Pearson Education Asia Limited and China Machine Press., 2010. Nenhuma citação no texto.