UNICAMP

Alberto Faustino Dias

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO: MODELOS VARIACIONAIS

CAMPINAS
2015

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

ALBERTO FAUSTINO DIAS

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO: MODELOS VARIACIONAIS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional

Orientador: Rodney Carlos Bassanezi

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO ALBERTO FAUSTINO DIAS, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RODNEY CARLOS BASSANEZI.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

	Dias, Alberto Faustino, 1972-
D543s	A sequência de Fibonacci e o número de ouro : modelos variacionais / Alberto Faustino Dias. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.
	Orientador: Rodney Carlos Bassanezi.
	Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Fibonacci, Números de. 2. Segmento áureo. 3. Cálculo das variações. I. Bassanezi, Rodney Carlos,1943-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: The Fibonacci sequence and the number of gold : variational models
Palavras-chave em inglês:
Fibonacci numbers
Golden section
Calculus of variations
Área de concentração: Matemática Aplicada e Computacional
Titulação: Mestre em Matemática Aplicada e Computacional
Banca examinadora:
Rodney Carlos Bassanezi [Orientador]
Geraldo Pompeu Junior
Jefferson Cruz dos Santos Leite
Data de defesa: 08-05-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada e Computacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 08 de maio de 2015 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

Prof. (a). Dr (a). JEFFERSON CRUZ DOS SANTOS LEITE

Prof. (a). Dr (a). GERALDO POMPEU JUNIOR

Abstract

In this paper, an existing relationship between the unpretentious Fibonacci sequence and the Golden Mean, also known as the Golden Ratio or Golden Number. In this same context, we deal with a discrete variational model through the difference equations and continuous through Linear Differential Equations, questioned by population growth escargots, whose solution appears the Golden Mean. For the foundation of this paper we have used a bibliographic reserch that consists of books and publications, whose foundation is based on in the following authors: Rodney C. Bassanezzi, Maurício Zahn, William E. Boyce and Richard C. DiPrima. The princial objective was to give a continuous approach to the discrete variational model generated by population growth of snails.

Keywords: Golden Mean, Fibonacci Sequence, Snail.

Resumo

Apresentamos neste trabalho, uma relação existente entre a despretensiosa Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro, conhecido também como Razão Áurea ou Número Áureo. Neste mesmo contexto, tratamos de um modelo variacional discreto através das Equações de Diferenças e contínuo através das Equações Diferenciais Lineares, problematizado pelo crescimento populacional de escargots, em cuja solução aparece o Número de Ouro. Para fundamentação deste trabalho utilizamos pesquisa bibliográfica constituída de livros e publicações diversas, cujo embasamento reside principalmente nos autores, Rodney C. Bassanezzi, Maurício Zahn, William E. Boyce e Richard C. Diprima. O princial objetivo deste trabalho foi dar uma abordagem contínua ao modelo variacional discreto gerado pelo crescimento populacional dos escargots.

Palavras-chave: Número de Ouro, Sequência de Fibonacci, Escargot.

Sumário

Aos meus filhos: Joao Mateus, Alberto Filho e Maria Antônia e à minha esposa Erika Dias.

Agradecimentos

Meus agradecimentos, em primeiro lugar, ao Pai criador, pois sem ele, nada posso e nada sou. À minha família que é meu porto seguro, em nome de minha irmã Maria Aldecir Faustino Dias *(In Memoriam)* que no último ano me deu exemplos de superação, amor pela vida e pela família. Não poderia deixar de agradecer ao prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite, que proporcionou minha ida á essa valoroza instiuição. Agradeço também aos meus professores do programa: Bianca Morelli R. Calsavara, Carla Taviane L. S. Ghidini, João Eloir Strapasson, Celso Cavellucci e em especial ao prof. Dr. Cistiano Torezzan que sempre me motivou e me atendeu gentilmente. E o meu maior agradecimento vai ao Prof. Dr. Rodney Carlos C. Bassanezzi, figura fantástica que tive o prazer de conhecer, que com sua humildade e paciência me orientou e guiou na construção dessa dissertação.

Introdução

Preliminares

Abordamos neste trabalho, a misteriosa relação entre a despretensiosa Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro ou Razão Áurea ou ainda Número Áureo, bem como suas principais propriedades. Neste mesmo contexto, trabalhamos o problema do crescimento populacional de scargots na forma discreta, através das equações de diferenças lineares e sob a forma contínua, através das equações diferenciais lineares de segunda ordem e dos sistemas de equações diferencias lineares, constatando também uma relação com o número de ouro.

Para fundamentar esta dissertação, vamos inicialmente no Capítulo I, dissertar sobre sequência de números reais, com exemplos, propriedades e principais resultados.

A seguir no capítulo 2, vamos definir a Sequencia de Fibonacci, mostrando sua relação que o misterioso e intrigante número de ouro. Neste mesmo capítulo, vamos expor também algumas de suas principais propriedades e resultados.

No Capítulo 3, introduziremos o problema do crescimento populacional dos escargots, sob a forma discreta através das equações e dos sistemas de equações de diferenças lineares.

Para darmos um enfoque contínuo, ao problema do crescimento populacional dos escargots, visto sobre a forma discreta no Capítulo 3, introduziremos nos capítulos 4 e 5 respectivamente, os principais conceitos, propriedades e resultados das equações diferenciais lineares de segunda ordem e dos sistemas de equações diferenciais lineares.

Leonardo de Fibonacci

Leonardo Fibonacci[1], também conhecido como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano ou ainda Leonardo Bigollo, mas, na maioria das vezes, simplesmente como Fibonacci foi um matemático italiano, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. É considerado por alguns como o mais talentoso matemático ocidental da Idade Média. Ficou conhecido pela descoberta da sequência de Fibonacci e pelo seu papel na introdução dos algarismos arábicos na Europa.

[1] Wikipédia, a enciclopédia livre:http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Figura 1: Leonardo de Fibonacci

Com outros matemáticos do seu tempo, contribuiu para o renascimento das ciências exatas, após a decadência do último período da antiguidade clássica e do início da Idade Média, mas Fibonacci destacou-se ao escrever o Liber Abaci, em 1202 (atualizado em 1254), a primeira obra importante sobre matemática desde Eratóstenes, isto é, mais de mil anos antes. O Liber Abaci introduziu os numerais hindu-arábicos na Europa, além de discutir muitos problemas matemáticos. Fibonacci é também conhecido pela sequência numérica nomeada após sua morte como sequência de Fibonacci. Ele não descobriu, mas usou-a como exemplo no Liber Abaci.

Com seu pai, Guglielmo dei Bonacci (Fibonacci seria a forma reduzida de filius Bonacci, "filho de Bonacci"), abastado mercador pisano e representante dos comerciantes da República de Pisa (publicus scriba pro pisanis mercatoribus) em Bugia, na região de Cabília, Argélia, Leonardo passou alguns anos naquela cidade. Na época, Pisa mantinha uma importante atividade comercial nos portos doMediterrâneo, e Guglielmo atuava como uma espécie de fiscal alfandegário em Bugia, importante porto exportador de velas de cera, situado a leste de Argel, no Califado Almóada. Ali, ainda muito jovem, Fibonacci teve contato com o mundo do comércio e aprendeu técnicas matemáticas desconhecidas no Ocidente, difundidas pelos estudiosos muçulmanos nas várias regiões do mundo islâmico. Alguns desses procedimentos haviam sido criados por matemáticos da Índia, uma cultura muito distante da mediterrânea. Ao reconhecer que a aritmética, com algarismos arábicos, era mais simples e eficiente do que com os algarismos romanos, Fibonacci viajou por todo o mundo mediterrâneo, chegando até Constantinopla, para estudar com os matemáticos árabes mais importantes de então, alternando os estudos com a atividade comercial. Muito do seu aprendizado deve ser creditado às obras de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, de Abu Kamil e de outros mestres árabes. Mas Fibonacci não foi um mero difusor dessas obras. De volta à Itália, em torno de 1200, sua fama chega à corte do imperador Frederico II, sobretudo depois de ter resolvido alguns problemas do matemático da corte. Por essa razão, foi-lhe atribuído um rendimento vitalício, o que lhe permitiu dedicar-se completamente aos estudos. Em 1202, aos 32 anos, publicou o Liber Abaci (Livro do Ábaco ou Livro de Cálculo), introduzindo os numerais hindu-arábicos na Europa.

Depois de 1228, não se tem mais notícias do matemático, exceto por um decreto de 1240 da República de Pisa, que atribuía um estipêndio ao"Discretus et sapiens magister Leonardo Bigollo"("sério e sábio mestre Leonardo Bigollo"), em reconhecimento dos serviços prestados à cidade, particularmente em matéria contábil e na instrução dos cidadãos . Fibonacci morreu alguns anos mais tarde, provavelmente em Pisa. No século XIX, uma estátua foi erguida em Pisa, em sua homenagem. Hoje está localizada na galeria ocidental do Camposanto, cemitério histórico da Piazza dei Miracoli. Seus estudos foram tão importantes que até hoje existe uma publicação periódica, Fibonacci Quarterly, inteiramente dedicada à sequência aritmética elaborada por ele. Há também um asteróide que também tem o seu nome, o 6765 Fibonacci.

Capítulo 1

Sequência de Números Reais

1.1 Introdução

Como motivação para o estudo da sequência de Fibonacci, vamos apresentar neste capítulo as propriedades principais das sequências numéricas e seus limites. O texto aqui apresentado, se baseia no livro de Análise Real Volume 1, do Prof. Elon Lages Lima

1.2 Sequência

Definição 1.2.1. *Uma sequência de números reais e uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que associa a cada numero natural* n *um numero real* x_n *chamado n-ésimo termo da sequência. Escreve-se* $(x_1, x_2, x_3, ...,$ $x_n, ...)$ *ou* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou simplismente* (x_n) *para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é* x_n

Definição 1.2.2. *Uma Sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *será dita limitada superiormente quando existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $x_n \leq c$ *para todo* n *natural. Será dita limitada inferiormente quando* $x_n \geq c$ *para todo natural* n. *Uma sequência será limitada quando for limitada inferior e superiormente. Isto equivale a dizer que existe* $k \in \mathbb{R}$ *talque* $|x_n| \leq k$ *para todo natural* n

Definição 1.2.3. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *chama-se monótona não-decrescente quando se tem* $x_n \leqslant x_{n+1}$ *e monótona não-crescente quando se tem* $x_n \geqslant x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.*Se mais precisamente tivermos* $x_n < x_{n+1}$ *a sequência sera chamada de monótona crescente e se* $x_n > x_{n+1}$ *de monótona decrescente*

Exemplo 1.2.4. *Se* $a > 1$ *A sequência* $(a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$ *é limitada inferiormente mas não é limitada superiormente.*

De fato, pois multiplicando ambos os membros da desigualdade $1 < a$ por a^n obtemos $a^n < a^{n+1}$. Segue-se que $a < a^n$ para todo n natural, logo (a^n) é limitada inferiormente por a. Por outro lado, temos $a = 1+d$, com $d > 0$. Pela desigualdade de bernoulli, vale $a^n > 1+nd$. Logo, dado qualquer $c \in \mathbb{R}$, podemos obter $a^n > c$, desde que se tome $1 + nd > c$, ou seja $n > (c-1)/d$

Exemplo 1.2.5. $(x_n) = 1$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *isto define a sequência constante* $(1, 1, 1, ..., 1, ...)$*; ela e evidentemente limitada, pois* $x(\mathbb{N}) = \{1\}$, *não decrescrente e tambem não crescente.*

1.3 Subsequência

Definição 1.3.1. *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma subsequência é uma restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots < n_k < \ldots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$, ou $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ para indicar a subsequência $x' = x|\mathbb{N}'$.*

Exemplo 1.3.2. *Seja a sequência $a_n = (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Podemos obter as subseqências:*

1. $a_{2n} = (1/2n)$
2. $a_{n^2} = (1/n^2)$

1.4 Limite de Sequência

Definição 1.4.1 (Limite de Sequência)**.** *Diz-se que um número real a é limite de uma sequência (x_n), quando para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter n_0 natural talque todos os termos (x_n) com índice $n > n_0$ satisfazem $|x_n - a| < \varepsilon$*

Simbolicamente escreve-se:

$$a = \lim x_n \quad .\equiv. \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}; \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

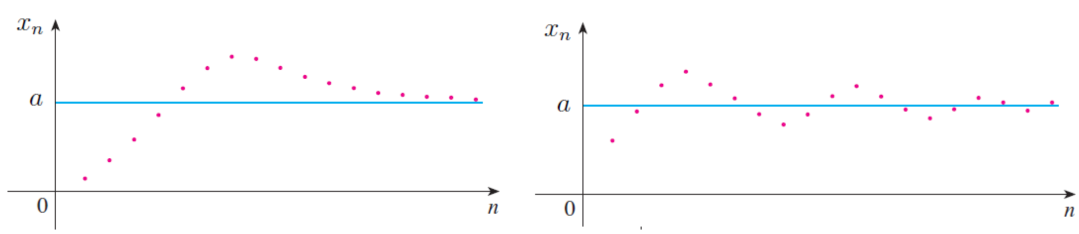

Figura 1.1:

Assim, dizer que $a = \lim x_n$ significa afirmar que qualquer intervalo de centro a contém todos os termos x_n da sequência, salvo para um número finito de índices n.

Escreve-se também $a = \lim_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $a = \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n$ ou $x_n \longrightarrow a$. Esta última expressão lê-se "x_n tende para a"ou "x_n converge para a". Quando uma sequência possui limite, dizemos que essa sequência é *convergente*, outro sim, dizemos que ela é *divergente*.

Teorema 1.4.2 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois limites diferentes*

Demonstração: Seja $\lim x_n = a$. Dado $b \neq a$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ talque os intervalos abertos $I = (a + \varepsilon, a - \varepsilon)$ e $J = (b + \varepsilon, b - \varepsilon)$ sejam disjuntos. Dai existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica em $x_n \in (a + \varepsilon, a - \varepsilon)$ e x_n nao pertence a J. Logo $\lim x_n \neq b$ ∎

Teorema 1.4.3. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para o limite* a

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_i}, ...)$ uma subsequência de (x_n). Dados $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Como os índices da subsequência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Entao $n_i > n_{i_0} \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow x_{n_i} \in (a+\varepsilon, a-\varepsilon)$. Logo o $\lim x_{n_i} = a$ ∎

Teorema 1.4.4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja $a = \lim x_n$. Tomando $\varepsilon = 1$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n > n_o \Rightarrow x_n \in (a-1, a+1)$. Dai podemos formar o conjunto finito $F = \{x_1, ..., x_{n_o}, a-1, a+1\}$. Tome b o menor e c o maior elemento de F. Temos então que todos os termos da sequência (x_n) estao em F. Logo ela é limitada. ∎

Observação:A reciproca desse resultado não e verdadeiro, pois podemos obter uma sequência limitada e não ser convergente, como é o caso do exemplo seguinte.

Exemplo 1.4.5. *A sequência cujo termo geral é dada por* $x_n = 1 + (-1)^{n+1}$ *possui os seguintes elementos* $(2, 0, 2, 0, ..., 2, 0, ...)$. *Podemos observar que esta sequência é limitada, pois possue os elementos* $\{1, 2\}$. *Porém não é convergente pois podemos obter a subsequência* x_{2n-1} *convergindo para* 0 *e a subsequência* x_{2n} *convergindo para* 1.

Teorema 1.4.6. *Toda sequência monótona limitada é convergente*

Demonstração: Vamos supor sem perda de generalidade que (x_n) é uma sequência não decrescente limitada. Podemos escrever $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$ e $a = \sup X$. Podemos afirmar que $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ o número $a-\varepsilon$ não é conta superior de X. Logo existe um n_0 natural tal que $a-\varepsilon < x_{n_0} \leqslant a$. Dessa forma, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n > n_0 \Rightarrow a-\varepsilon < x_{n_0} \leqslant x_n < a+\varepsilon$. Logo podemos concluir que $\lim x_n = a$ ∎

1.5 Propriedades aritméticas dos limites

Veremos o comportamento dos limites de sequência relativamente as operações (soma, subtração, multiplicação e divisão) e as desigualdades

Teorema 1.5.1. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma é uma sequência limitada, então* $\lim(x_n) \cdot (y_n) = 0$ *(mesmo que não exista* $\lim y_n$*)*

Demonstração: Dado que (y_n) é limitada, existe $c > 0$ talque $|y_n|< c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, como $\lim x_n = 0$, podemos encontrar um n_0 natural talque $n > n_0 \Rightarrow |x_n|< \varepsilon/c$.Logo para $n > n_0 \Rightarrow |x_n \cdot y_n|= |x_n|\cdot|y_n|< (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon$ ∎

Exemplo 1.5.2. *Qualquer que seja* $x \in \mathbb{R}$, *mostremos que* $\lim_{n\to\infty} \sin(nx)/n = 0$. *Com efeito.* $\sin(nx)/n = \sin(nx)\cdot(1/n)$. *Como* $|\sin(nx)|\leqslant 1$ *e* $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 0, *temos que* $\lim_{n\to\infty} \sin(nx)/n = 0$

Teorema 1.5.3. *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$*;*

2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$*;*

3. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$*;*

4. $\lim \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ *se* $b \neq 0$

Demonstração:

1. Dados $\varepsilon > 0$ existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon/2$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo $n > n_0$ implicam:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Isto prova que $\lim(x_n + y_n) = a + b$. O caso da diferença sa faz de modo análogo.

2. Temos que $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Pelo Fato do $\lim x_n = a$, temos que (x_n) é limitada e $\lim(y_n - b) = 0$, segue que $\lim(y_n - b)] = 0$ e também $\lim[(x_n - a)b] = 0$. Dessa forma, pela parte 1 já demonstrada, temos que $\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b) + (x_n - a)b] = \lim x_n(y_n - b) + \lim(x_n - a)b = 0$, donde $\lim x_n y_n = ab$.

3. Antes, observemos que, como $y_n b \longrightarrow b^2$, dai, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n > n_0 \Rightarrow y_n b > b^2/2$ (basta tomar $\varepsilon = b^2/2$ e achar o n_0 correspondente). Segue-se que para todo $n > n_0, 1/(y_n b)$ é um número positivo inferior a $2/b^2$. Logo a sequência $(1/(y_n b)$ é limitada. Por outro lado temos:
$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n)\frac{1}{y_n b}$$
Como
$$\lim_{n \longrightarrow \infty}(bx_n - ay_n) = (ab - ab) = 0$$
temos que
$$\lim_{n \longrightarrow \infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$$
e portanto
$$\lim_{n \longrightarrow \infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$$

■

Teorema 1.5.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada de números reais posui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Basta mostrar que toda sequência (x_n) admite subsequência monótona. Diremos que x_n é um termo destacado de (x_n) quando $x_n \geqslant x_m$ para $m > n$. Por exemplo, uma sequência monótona não decrescente, não possui termos destacados, enquanto que para uma sequência monótona não crescente, todos os seus termos são destacados. Chamemos de D o conjunto de todos os índices n tais que x_n é um termo destacado de (x_n). As possibilidades para D são:

- D **é infinito**. Isto é: $D = \{n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...\}$. Neste caso, sendo a_{n_1} destacado, $a_m \leqslant a_{n_1}$ para $m > n_1$. Em particular $a_{n_2} \leqslant a_{n_1}$. Do mesmo modo $a_m \leqslant a_{n_2}$ para $m > n_2$, em particular $a_{n_3} \leqslant a_{n_2}$. Assim obteremos a subsequência $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ..., a_{n_k}, ...)$ monótona não crescente.

- **D é Finito**: Seja n_1 maior que todos os elementeos de D, Então a_{n_1} não é destacado, logo existe $a_{n_2} > a_{n_1}$ para $n_2 > n_1$. Do mesmo modo, a_{n_2} não é destacado, daí existe $a_{n_3} > a_{n_2}$, com $n_3 > n_2$. Dessa forma podemos construir uma subsequência monótona crescente.

- **D é Vazio**: A sequência é monótona não decrescente.

  Como podemos observar, sempre é possível obtermos uma subsequência monótona, e como por hipótese a sequência é limitada, temos então que essa subsequência é convergente.

$\blacksquare$

1.6 Limites Infinitos

Dentre as sequências divergentes, mencionaremos um tipo que se caracteriza por apresentar uma certa regularidade, aquelas cujos valores se tornam e se mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

Definição 1.6.1. *Sendo (x_n) uma sequência de números reais, dizemos que "x_n tende para mais infinito", e escrevemos $\lim x_n = +\infty$ quando para todo número real $A > 0$, dado arbitrariamente, pudemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$. (Ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $x_n \leqslant A$.) De modo análogo diz-se que $\lim x_n = -\infty$ se $A > 0$ dado arbitrariamente, pode se achar $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$.*

Exemplo 1.6.2. *Seja (x_n) uma sequência cujo termo geral é $x_n = n$, vemos claramente que $\lim x_n = +\infty$, pois para todo $A > 0$, pelo fato de $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ser ilimitado superiormente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n_0 > A$. Daí $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$.*

Exemplo 1.6.3. *Seja $x_n = a^n$, com $a > 1$. Então $a = 1 + h$, $h > 0$. Dado $A > 0$, vemos que $a^n = (1+h)^n > 1 + nh > A$ desde que se tome $n > (\frac{A-1}{h})$. Dessa forma, escolhendo $n_0 > \frac{A-1}{h}$, teremos $n > n_0 \Rightarrow a_n > A$. Logo $\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty$.*

Teorema 1.6.4 (Operações aritméticas com limites infinitos)**.**

1. *Se* $\lim x_n = +\infty$ *e* (y_n) *é limitada inferiormente, então* $\lim(x_n + y_n) = \infty$*;*
2. $\lim x_n = +\infty$ *existe* $c > 0$ *talque* $y_n > c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então,* $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$*;*
3. *Seja* $x_n > 0$ *para todo* n $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \frac{1}{x_n} = +\infty$*;*
4. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *sequências de números positivos. então*
   (a) *Se existe* $c > 0$ *tal que* $x_n > c$ *para todo* n *e se* $\lim y_n = 0$ *tem-se* $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$
   (b) *se* (x_n) *é limitada e* $\lim y_n = +\infty$*, então* $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

Faremos aqui as demonstrações dos itens (1.) e (2.)
Demonstração:

1. Seja dado $A > 0$, existe $c \in \mathbb{R}$ talque $c < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe tambem $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n > n_0 \Rightarrow x_n > A - c$. Segue-se que $n > n_0 \Rightarrow (x_n + y_n) > A - c + c = A$. Logo $\lim(x_n + y_n) = +\infty$
2. Dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ talque $n > n_o \Rightarrow x_n > A/c$. Daí $n > n_0 \Rightarrow x_n \cdot y_n > (A/c) \cdot c = A$ e portanto, $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$

■

As outras demonstrações são feitas de forma similar e podem ser vistas na bilbiografia mencionada.

Capítulo 2

Sequência de Fibonacci e o número de Ouro

2.1 A sequência de Fibonacci

Nesta secção iremoss definir recursivamente a sequência de Fibonacci e apresentar suas principais propriedades. Mstraremos também a despretenciosa relação entre a Sequencia de Fibonacci e o Número de Ouro.
O texto que aqui apresentaremos, se baseia no livro do Prof. Maurício Zanh, A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

2.2 Origem

O problema muito provavelmente originou-se do papiro de Rhind, e consta no livro Liber Abacci de Leonardo, no capítulo 12 *(De solutionibus multarum positariumquestionum quas erraticas appellamus)*, o seguinte problema, que motivou a criação da sequência de Fibonacci:

O problema da reprodução dos coelhos. *"Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro de todos os lados. Quantos pares de coelho podem ser gerados a partir desse par em 12 periodos se, em todo período cada par gera um novo par de filhotes que se tornam adultos e férteis a partir do segundo período de vida?"*[1]

Solução. Considerando as condições do problema, observemos o processo de reprodução de cada período:

- No primeiro período, o casal inicial é filhote, tendo dessa forma, um casal de filhotes.
- No segundo período, temos ainda o mesmo casal de coelhos, mais já adulto e portanto fértil.

[1] Uma fêmea, em fase reprodutiva, pode dar de 3 a 6 ninhadas por ano. Em cada ninhada podem nascer de 3 a 12 filhotes. Consideraremos como período reprodutivo 6 mêses e cada filhote se torna fértil com um ano.

- No terceiro período, temos o primeiro casal e mais um casal de filhotes, totalizando 2 casais.

- No quarto período, temos o casal adulto inicial, o casal de filhotes que se tornou fértil e mais de um casal de filhotes do primeiro casal, totalizando 3 casais.

- No quinto período, os dois casais adultos geraram dois outros casais de filhotes, e o casal de filhote se tornou fértil, totalizando 5 casais.(Dois casais de adultos, dois de filhotes e um fértil).

- No sexto período, os dois casais adultos geram mais dois outros casais de filhotes, e o casal fértil gera mais um casal de filhotes, e os dois casais filhotes, agora também se tornaram fértil, totalizando 8 casais. (3 adultos, 3 casais de filhotes e 2 casais férteis).

- No sétimo período, são gerados 5 casais de filhotes, 3 gerados dos adultos e os outros 2 gerados pelos casais férteis, totalizando agora 13 casais.

- etc...

Observando esta solução, podemos concluir que a partir do terceiro período, a quantidade de casais é dada pela soma das quantidades de casais dos dois períodos anteriores. Dessa forma, obtemos uma sequencia, onde os dois primeiros termos valem 1, os demais termos são gerados pela soma dos dois termos anteriores, formando a sequência onde a posição dos termos representa os períodos e os termos representam a quantidade de casais de coelhos:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144)$$

Este problema motivou Fibonacci a definir a seguinte sequência que tornou-se conhecida como sequência de Fibonacci.

Definição 2.2.1. *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida por*

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...)$$

onde os dois primeiros termos são iguais a 1 *e a partir do terceiro, cada termo é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Os termos da sequência são chamados de números de Fibonacci.*

Definição 2.2.2 (Recursiva)**.** *Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida recursivamente por*

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

2.3 Propriedades

Proposição 2.3.1. *Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

Demonstração: Vamos supor f_n e f_{n+1} dois números de Fibonacci consecutivos, vamos mostrar que o $mdc(f_n, f_{n+1}) = 1$ para todo natural n. Vamos supor por absurdo que para um certo n_0 se tenha $m.d.c(f_{n_0}, f_{n_0+1}) = d \neq 1$, daí temos que $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0+1}$. Mas $f_{n_0+1} = f_{n_0} + f_{n_0-1}$ e $d|f_{n_0+1}$ e $d|f_{n_0}$, então $d|f_{n_0-1}$. Daí $d|f_{n_0}$e $d|f_{n_0-1}$.Mas $f_{n_0} = f_{n_0-1} + f_{n_0-2}$ e pelos mesmos argumentos, chegamos a conclusão que $d|f_{n_0-2}$. Dessa forma, seguindo o mesmo raciocínio, charemos a conclusão que $d|f_2$ e $d|f_1$, com $f_1 = f_2 = 1$, logo $d|1$ e $d = 1$, contrariandoo a hipótese de $d \neq 1$ ■

Proposição 2.3.2. *Seja (f_n) uma sequência de Fibonacci. Então, $\forall n > 0$, valem as seguintes propriedades:*

1. $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$

2. $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$

3. $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n-1} - 1$

4. $\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

5. $f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{m+1}, \forall m, n, m > 1$

Demonstração:

1. Vamos mostrar que: $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$
   (i) Para $n = 1$, temos: $f_1 = f_{1+2} - 1 = 2 - 1 = 1$. A igualdade é portanto verdadeira.
   (ii)(Hipótese de indução) Supondo a validade para $n = k$, verifiquemos a validade para $n = k + 1$:

   $$f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_k + f_{k+1} = (f_{k+2} - 1) + f_{k+1} = (f_{k+1} + f_{k+2}) - 1 = f_{k+3} - 1$$

   Logo é valido para todo $n \in \mathbb{N}$

2. Devemos mostrar que: $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$ (i) Para $n = 1$ temos:$f_1 = f_2$, sendo portanto verdadeira. (ii) Supondo valido para $n = k$, devemos verificar a validade para $n = k + 1$

   $$f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k+1} = f_{2k+2} = f_{2(k+1)}$$

   Daí, é valido para todo $n \in \mathbb{N}$

3. Mostremos que: $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$ (i) Para $n = 1$, temos: $f_2 = f_{4-1} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$, sendo portanto verdadeira. (ii) Vejamos agora para $n = k$ e veriquemos a validade para $n = k + 1$
   $f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2k} + f_{2k+2} = (f_{2k-1} - 1) + f_{2k+2} = (f_{2k-1} + f_{2k}) + f_{2k+1} - 1$

■ As demonstrações seguintes também são facilmente verificadas, podendo ser verificadas nas bibliografia informada.

2.4 Outras sequências de Fibonacci

São também tidas com sequências de Fibonacci, as sequencias que atendem a lei recursiva $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, havendo portanto outras sequências de Fibonacci diferentes da orirginal, as quais podemos citar:

Exemplo 2.4.1. *A sequencia dada por:* $(4, 4, 8, 12, 20, 32, 52, ...)$. *Neste caso, o que difere da original, é o fato de* $f_1 = f_2 = 4$*, e os demais termos gerados a parti da soma deles.*

Exemplo 2.4.2. ***[Sequência de Lucas]*** *A sequência definida recursivamente por:*

$$\begin{cases} f_1 = 2, f_2 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Os termos da sequencia são: (2,1,3,4,7,11,18,29,47,...,)

Exemplo 2.4.3. *Seja uma progressão geométrica de razão q:* $(q, q^2, q^3, ..., q^n, ...)$. *Veremos a condição para que esta sequência seja de Fibonacci.Vamos considerar* $f_n = q^n$ *e a condição abaixo deve ser satisfeita:*

$$q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$$

Dividindo a igualdade por $q^{n-1} \neq 0$*, obteremos a equação:*

$$q^2 = q + 1$$

que possui as raízes:

$$r_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Veremos a diante, que estas reízes estão relacionadas com o conceito de razão áurea. Veremos também a seguir, uma proposição que relaciona as raízes r_1 e r_2, aqui obtidas.

Proposição 2.4.4. *Seja* $(f_1, f_2, f_3, ..., f_n, ...)$ *uma sequência de Fibonacci qualquer.Então existem* α*,* $\beta \in \mathbb{R}$ *tais que:*

$$f_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$$

Demonstração: Faremos essa demonstração, usando o segundo princípio de indução matemática.

(i) Note que para $n = 1$ e $n = 2$ temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 = f_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = f_2 \end{cases}$$

nas variáveis α e β que como veremos tem única solução. De fato, analizando o determinante, vemos que:

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix} = r_1 r_2^2 - r_2 r_1^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5} \neq 0$$

Podemos concluir que α e β são unicamente deteterminados para $n = 1$ e $n = 2$, sendo portanto válida a base de indução.

(ii) Supondo a validade para todo $m \leq n$, verifiquemos também a validade para $n + 1$

De fato, basta oservar que:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &= \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \alpha r_1^{n-1} + \beta r_2^{n-1} \\ &= \alpha r_1^{n-1}(r_1 + 1) + \beta r_2^{n-1}(r_2 + 1) \\ &= \alpha r_1^{n-1} r_1^2 + \beta r_2^{n-1} r_2^2 \\ &= \alpha r_1^{n+1} + \beta r_2^{n+1} \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

■

Considerando a sequência de Fibonacci padrão, a proposição seguinte conhecida como *fórmula de Binet* nos fornece uma forma de determinarmos qualquer termo da sequência f_n

Proposição 2.4.5 (Fórmula de Binet)**.** *Quealquer termo f_n da sequência de Fibonacci, pode ser obtido pela fórmula:*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n$$

Demonstração: Aplicando a proposição anterior para:

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...)$$

Temos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 = 1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = 1 \end{cases}$$

nas variáveis α e β. Dessa forma resolvendo o sistema, encontraremos:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_2 \\ 1 & r_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{-\sqrt{5}} = \frac{1}{-\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & 1 \\ r_1^2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^2 & r_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})}{-\sqrt{5}} = \frac{-1}{-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

■

2.5 Número de Ouro

Nesta secção, definiremos uma razão entre dois segmentos muito importante na antiguidade e nos dias atuais, chamada de *razão áurea*. Dessa razão obteremos um número irracional chamada *número de ouro*, que como veremos, tem forte relação com a sequência de Fibonacci.

2.6 Razão áurea e o número de ouro

Definição 2.6.1. *Dizemos que um ponto C divide um segmento $\overline{AB}$ na razão áurea(isto é, em medida de extrema razão) se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Chamando $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = x$ temos que $\overline{AC} = a-x$ e queremos obter o número correspondente á proporção

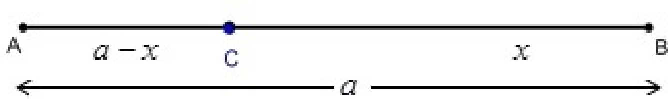

Figura 2.1: Razão Aurea

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{a}{a-x}$$

Conforme definição, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

Resolvendoa equação em x encontraremos

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

$x = -a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ ou $x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Como esta última razão é positiva, seja $x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Vejamos o número que produz a *razão áurea*

$$\frac{a}{x} = \left(\frac{a}{a(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})}\right) = \frac{1}{(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656...$$

Ao número φ, obtido através da razão áurea, chamamos **número de ouro**.

Observação: Note que usando a notação $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, podemos reescrever a formula de Binet vista anteriormente:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \frac{1}{\varphi^n}\right)$$

Proposição 2.6.2. *Sendo f_n um número de Fibonacci, vale a desigualdade*

$$f_n \geq \varphi^{n-2}$$

Demonstração: Usando a segunda forma do princípio da indução matemática temos:
(i) Para n=1, temos:

$$\varphi^{1-2} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} < \frac{2}{1+1} = 1 = f_1$$

Temos, então que $f_1 > \varphi^{-1}$
Para $n = 2$, temos

$$f_2 = 1 = \varphi^{2-2}$$

Logo, vale a base de indução
(ii) Assuma que $f_m \geq \varphi^{m-2}$, $\forall m \leq n$. Dai, recorrendo a a fórmula recurssiva da sequência de Fibonacci, temos

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} = \varphi^{n-3}(\varphi + 1)$$

Por outro lado temos que

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$$

Então

$$f_{n+1} \geq \varphi^{n-3}\varphi^2 = \varphi^{n-1}$$

Logo pelo segundo princípio de indução matemática, concluimos que a proposição é verdadeira. ∎

Corolário 2.6.3. *Seja f_n um número de Fibonacci qualquer. Então vale a seguinte estimativa:*

$$\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstração: De fato, basta observar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \frac{1}{\varphi^n}\right) \leq \varphi^n - \frac{1}{\varphi^n} \leq \varphi^n$$

Usando a proposição anterior, temos então que

$$\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^n$$

∎

2.7 Potências do número de ouro

Analisemos agora a relação que existe entre as potencias de φ a sequencia de Fibonacci

- $\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \varphi + 1$
- $\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (1+\varphi)\cdot\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$
- $\varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi = (1+2\varphi)\cdot\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1+\varphi) = \varphi + 2 + 2\varphi = 2 + 3\varphi$
- $\varphi^5 = \varphi^4 \cdot \varphi = (2+3\varphi)\cdot\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1+\varphi) = 3 + 5\varphi$
- $\varphi^6 = \varphi^5 \cdot \varphi = (3+5\varphi)\cdot\varphi = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5(1+\varphi) = 5 + 8\varphi$
- $\varphi^7 = \varphi^6 \cdot \varphi = (5+8\varphi)\cdot\varphi = 5\varphi + 8\varphi^2 = 5\varphi + 8(1+\varphi) = 8 + 13\varphi$
- $\varphi^8 = \varphi^7 \cdot \varphi = (8+13\varphi)\cdot\varphi = 8\varphi + 13\varphi^2 = 8\varphi + 13(1+\varphi) = 13 + 21\varphi$
  ....
- $\varphi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \varphi, \forall n \geq 1$

Isso nos remete ao seguinte resultado

Proposição 2.7.1. *Para qualquer natural* $n \geq 1$*, vale a igualdade*

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n \cdot \varphi,$$

onde f_j*,* $j = 1, 2, 3, ...$ *são os números de Fibonacci e* $f_0 = 0$

Demonstração: Usando a indução matemática sobre n temos:

(i) Para n=1, observamos que $\varphi^1 = f_0 + f1 = 0 + 1 = 1$ sendo portanto verdadeira a igualdade

(ii) Supondo válido para $n = k$, devemos verificar também a validade para $n = k + 1$
Usando a hipótese de indução, temos que

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1} &= \varphi^k \varphi = (f_{k-1} + f_k \varphi)\varphi = f_{k-1} \cdot \varphi + +f_k \cdot \varphi^2 = f_{k-1} \cdot \varphi + f_k(1 + \varphi) \\ &= f_{k-1} \cdot \varphi + f_k + f_k \cdot \varphi = (fk - 1 + f_k)\varphi + f_k = f_k + f_{k+1} \cdot \varphi \end{aligned}$$

■

2.8 Sequência de Fibonacci e o número de Ouro

Mostraremos nessa sessão que existe uma relação entre a razão f_{n+1}/f_n e o número de ouro, onde

$$f_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$$

Comecemos lembrando que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ e que para n grande podemos escrever

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}} =$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-2} + f_{n-3}}{f_{n-2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}$$

Temos então que o quociente f_{n+1}/f_n produz uma fração contínua, que converge para o número de ouro, como mostraremos a seguir.

Proposição 2.8.1. *A sequência*

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}$$

converge para o número de ouro quando n *vai para infinito.*

Seja (x_n) uma sequêncua definida recursivamente por

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad \forall n \geq 1 \tag{2.8.1}$$

Vamos definir uma função $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \tag{2.8.2}$$

Calculando

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1+1}{1} = 2 = x_2 \\ f(x_2) = \frac{2+1}{2} &= \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = x_3 \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}} &= 1 + \frac{1}{x_{n-1}} = x_n \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos perceber que para qualquer termo da sequencia temos

$$f(x_{n-1}) = x_n \tag{2.8.3}$$

Afirmamos que f é crescente. De fato, basta observar que dado $a, \qquad b > 0$ e $a > b$ temos

$$a > b \Leftrightarrow ab + a > ab + b \Leftrightarrow a(b+1) > (a+1)b \Leftrightarrow \frac{b+1}{b} > \frac{a+1}{a} \Leftrightarrow f(b) > f(a)$$

Proposição 2.8.2. *A sequencia definida pela equação* (2.8.1) *produz uma subsequência de ordem impar crescente e uma outra de ordem par decrescente. Ou seja*

$$x_1 < x_3 < x_5 < \ldots < x_6 < x_4 < x_2$$

Para "mapear"apenas os termos pares e apenas os termos ímpares da sequência (x_n), precisamos a partir de um termo inicial (x_1 ou x_2), obter uma regra que permita "pular"os termos de modo a gerar duas subsequências x_{2n} dos termos pares e (x_{2n-1}) dos termos ímpares.

Dessa forma, vamos definir $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = (f \circ f)(x)$$

ou seja,

$$g(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\frac{x+1}{x} + 1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1} \tag{2.8.4}$$

Assim, usando a equação (2.8.3), temos apartir de x_1

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(f(x_1)) = f(x_2) = x_3 \\ g(x_3) &= f(f(x_3)) = f(x_4) = x_5 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(x_{2n-1}) &= f(f(x_{2n-1})) = f(x_{2n}) = x_{2n+1} \end{aligned}$$

Dessa forma

$$g(x_{2n-1}) = x_{2n+1} \tag{2.8.5}$$

Da mesma forma

$$g(x_2) = x_4, \quad g(x_4) = x_6, \ldots,$$

Donde

$$g(x_{2n}) = x_{2n+2} \tag{2.8.6}$$

Além disso, afirmamos que g é crecente, pois supondo $g(a) < b(b)$ teremos

$$g(a) < g(b) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{a+1} < \frac{2b+1}{b+1} \Leftrightarrow 2ab + 2a + b + 1 < 2ab + 2b + a + 1 \Leftrightarrow a < b$$

Com estes fatos provaremos a **Proposição** (2.8.2). Mas provaremos antes as seguintes afirmações:

Afirmação1.A subsequência dos termos ímpares é crescente, ou seja $x_{2n-1} < x_{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação2.A subsequência dos termos pares é decrescente, ou seja $x_{2n} > x_{2n+2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Afirmação3. Qualquer termo ímpar da sequência (x_n) é menor que o termo par subsequente, ou seja $x_{2n-1} < x_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provaremos a **Afirmação1.**, as demais afirmações são provadas de forma análoga. Faremos essa prova por indução:

1. Temos que $x_2 = 1 + 1/1 = 2$, daí,$x_3 = 1 + 1/2 = 3/2 > 1 = x_1$. Logo vale para $n = 1$
2. Supondo a validade desta afirmação para n, ou seja, $x_{2n_1} < x_{2n+1}$. Devemos mostrar agora que vale para $n + 1$.

Como g é crescente e esta função "mapeia"só o termos ímpares ou só os termos pares, temos então da hipótese de indução que $x_{2n-1} < x_{2n+1}$, daí

$$x_{2n-1} < x_{2n+1} \Rightarrow g(x_{2n-1}) < g(x_{2n+1}) \Rightarrow x_{2n+1} < x_{2n+3}$$

Sendo portanto válida a **Afirmação1.** Logo com estras três informações, fica provado a **Proposição** (2.8.2), ou seja,

$$x_1 < x_3 < x_5 < \ldots < x_6 < x_4 < x_2$$

Com isso, tiramos que a subsequencia (x_{2n-1}) é crescente e limitada superiormente por $x_2 = 2$, existindo portanto
$$L_1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{2n-1}$$
De forma análoga, x_{2n} é decrescente e limitada infeiormente por $x_1 = 1$, existindo também
$$L_2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{2n}$$
Como
$$x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) = \frac{2x_{2n-1} + 1}{x_{2n-1} + 1}$$
Passando o limite, iremos obter
$$L_1 = \frac{2L_1 + 1}{L_1 + 1} \Rightarrow L_1^2 + L_1 = 2L_1 + 1 \Rightarrow L_1^2 - L_1 - 1 = 0$$
Resolvendo esta equação e descartando a raiz negativa pois os termos da sequência são positivos, obtemos
$$L_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$
Da mesma forma
$$x_{2n+2} = g(x_{2n}) = \frac{2x_{2n} + 1}{x_{2n} + 1}$$
Passando o limite, iremos obter
$$L_2 = \frac{2L_2 + 1}{L_2 + 1} \Rightarrow L_2^2 + L_2 = 2L_1 + 1 \Rightarrow L_2^2 - L_2 - 1 = 0$$
donde segue que
$$L_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$
Logo,
$$L_1 = L_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$
E por fim, podemos concluir que a sequencia definida por
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n} \end{cases} \longrightarrow \varphi$$
Isto é,
$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} \longrightarrow \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$
Com isto, mostramos também a validade da **Conjectura** (2.8), finalizando portanto este resultado.

2.8.1 O Número de Ouro nas construções gregas

O Partenon Grego, construído por volta de 447 e 433 a.C, templo representativo de Péricles contém a razão de Ouro no retângulo que contém a fachada. Fídias foi o escultor e o arquiteto encarregado da construção deste templo.[2]

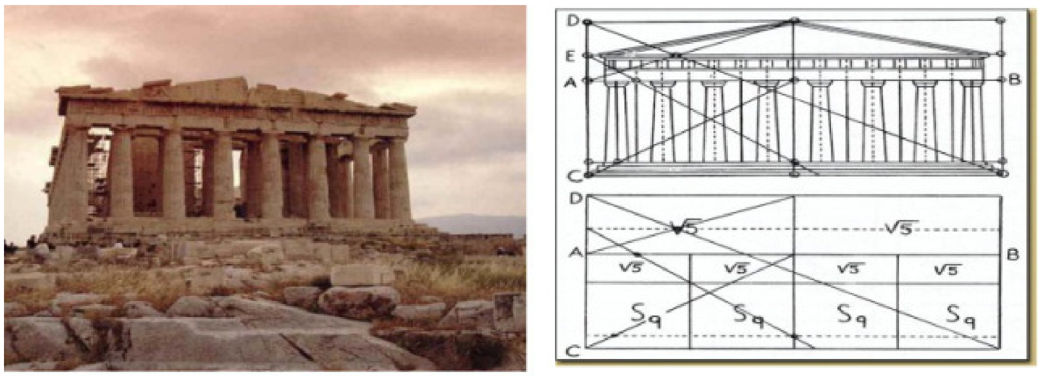

Figura 2.2: O Partenon Grego, construído por volta de 447 e 433 a.C

[2]https://checkmath.wordpress.com/2011/08/07/numero-de-ouro

Capítulo 3

Equações de Diferenças

3.1 Introdução

Trataremos aqui, dois problemas tirados do livro do **"Temas e Modelos"** do Prof. Rodney C. Bassanezzi.[**3**]

Uma equação de diferenças estabelece uma relação envolvendo os valores de uma variável dependente para um conjunto discreto de valores (com retardamento) da variável independente. Por conveniência vamos supor sempre que a variável independente é o tempo, que seus valores sejam tomados igualmente espaçados, isto é, consideramos $t_2 - t_1 = k$. Para simplicar tomamos tais espaços de tempo valendo uma unidade $k = 1$. A solução de uma equação de diferenças é uma relação funcional que não envolve diferenças, definida para todos os números naturais $n \in \mathbb{N}$, e satisfazendo á equação de diferenças, isto é, transformando-a numa identidade. A solução de uma equação de diferenças é obtida por um processo recursivo, mas nem sempre podemos explicitar a solução geral de uma equacão de diferenças quando a equação for não linear.

O Texto aqui apresentado se baseia no livro **"Temas e Modelos"** do Prof. Rodney C. Bassanezzi.[**3**].

A forma geral de uma equação de diferenças linear de ordem $n - m$ é dada por

$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_m y_{n-m} \tag{3.1.1}$$

ou

$$y_n = \sum_{k=1}^{m} a_k y_{n-k} \tag{3.1.2}$$

com a_k constantes; $m < n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e $(n - m)$ são suas condições iniciais.

3.2 Equações de diferenças lineares de primeira ordem

Definição 3.2.1. *Uma equação de diferença é dita de primeira ordem quando* $(n-m)=1$*. Sua expressão geral é dada pela fórmula*

$$\begin{cases} y_n = \alpha y_{n-1} \\ y_0 \quad dado \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Desta forma, podemos dizer que, uma equação de diferenças de primeira ordem é uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por uma fórmula de recorrência, onde cada termo* y_{n+1} *depende do anterior* y_n

O processo recurssivo fornece :

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha y_0 \\ y_2 &= \alpha y_1 = \alpha^2 y_0 \\ y_3 &= \alpha y_2 = \alpha^3 y_0 \\ \vdots &= \vdots \\ y_n &= \alpha y_{n-1} = \alpha^n y_0 \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação (3.2.1) é dada por

$$y_n = y_0 \alpha^n$$

Uma maneira alternativa de resolver a Eq.(3.2.1), é supor que a solução geral seja da forma

$$y_n = k\lambda^n$$

Substituindo na Eq.(3.2.1), temos

$$k\lambda^n = \alpha k\lambda^{n-1} \Leftrightarrow k\lambda^{n-1}[\lambda - \alpha] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda = \alpha \end{cases}$$

Desde que para $n=0$ devemos ter $y_0 = k\lambda^0$, então $k = y_0$. Logo

$$y_n = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad y_0 = 0 \\ y_0\alpha^n \quad \text{se} \quad y_0 \neq 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Observações:

- Se $|\lambda| < 1$, então y_n é convergente, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que $n > n_0$ temos $|y_n - y^*| < \varepsilon$;
- Se $|\lambda| = 1$, então y_n é constante se $\lambda = 1$ e é oscilante se $\lambda = -1$;

- Se $|\lambda|] > 1$, então y_n é divergente, ou seja, $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = \pm\infty$

Uma equação linear não autônoma da forma

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + b \\ y_o \quad \text{dado} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

pode ser resolvida também pelo método recurssivo:

$$\begin{aligned} y_1 &= ay_0 + b \\ y_2 &= ay_1 + b = a^2 y_0 + (a+1)b \\ y_3 &= ay_2 + b = a^3 y_0 + (a^2 + a + 1)b \\ \vdots &= \vdots \\ y_n &= ay_{n-1} + b = a^n y_0 + (a^{n-1} + \ldots + a + 1)b \end{aligned}$$

Portanto, a solução pode ser escrita como

$$\begin{cases} y_n = ay_0 + nb \quad \text{se} \quad a = 1 \\ y_n = a^n y_0 + \frac{a^n - 1}{a - 1}\, b \quad \text{se} \quad a \neq 1 \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Observações

- Se $a \geq 1$ então y_n é divergente, isto é, $y_n \longrightarrow +\infty$ se $b > 0$ e $y_n \longrightarrow -\infty$ se $b < 0$ ou $|b|> y_0$.
- Se $0 < a < 1$ então $y_n \longrightarrow b/(1-a)$

3.3 Modelos matemáticos com equações de diferenças de primeira ordem

Exemplo 3.3.1 (Orçamento Familiar)**.** *[***3** *]*

Vamos consideral uma familia, com o seguinte orçamento familiar:

- *A renda mensal R_n é proveniente de um salário fixo R_0 mais rendimento da poupança P_n do mês anterior;*
- *O consumo mensal C_n desta família é proporcional a renda mensal.*

Solução: Vamos procurar uma fórmula geral que forneça os valores da renda, poupança e consumo da família em cada mês relativamente a um mês inicial onde se conheça os valores de C_0 e de P_0. Neste caso, a variável independente é o tempo, dado em meses. Devemos buscar uma relação entre as variáveis independentes renda, poupança e consumo em função do tempo n.
Temos que:

- "A poupança do mês n dada pela poupança do mês anterior $(n-1)$ mais a sobra do mês n"ou seja,
$$P_n = P_{n-1} + (R_n - C_n) \tag{3.3.1}$$
- "A renda do mês n é igual ao salário mais o rendimento da poupança do mês anterior", ou seja,
$$R_n = R_0 + rP_{n-1} \tag{3.3.2}$$
onde r é o juro da poupança
- "O consumo do mês é proporcional a renda", isto é,
$$C_n = \alpha R_n \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{3.3.3}$$

Agrupando as três equações teremos:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + R_0 + rP_{n-1} - \alpha R_n \\ &= P_{n-1} + R_0 + rP_{n-1} - \alpha R_0 - \alpha r P_{n-1} \\ &= (1-\alpha)R_0 + (1 + r - \alpha r)P_{n-1} \\ &= (1-\alpha)R_0 + [(1-\alpha)r + 1]P_{n-1} \end{aligned}$$

Logo
$$P_n = (1-\alpha)R_0 + [(1-\alpha)r + 1]P_{n-1} \tag{3.3.4}$$
Simplificando as constantes, isto é, tomando $b = (1-\alpha)R_0$ e $a = [(1-\alpha)r + 1]$ na Eq.(3.3.4), obtemos uma equação de diferenças linear de ordem 1:

$$P_n = aP_{n-1} + b \tag{3.3.5}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{cases} P_0 \qquad \text{se} \quad \alpha = 1 \\ a^n P_0 + \dfrac{a^n - 1}{a-1} b = \\ [(1-\alpha)r + 1]^n P_0 + (1-\alpha)R_0 \dfrac{1 - [(1-\alpha)r+1]^n}{1 - [(1-\alpha)r + 1]} \quad \text{se} \quad \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{3.3.6}$$

■

Observamos que se $\alpha = 1$ significa que o consumo mensal é igual a renda e portanto, neste caso, não varia. Substituindo a Eq.(3.3.6) nas equações (3.3.2) e (3.3.3) temos

$$R_n = \begin{cases} R_0 + rP_0 \qquad \text{se} \quad \alpha = 1 \\ R_0 + rP_0 a^n + rb\dfrac{a^n - 1}{a-1} \quad \text{se} \quad \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{3.3.7}$$

$$C_n = \begin{cases} \alpha[R_0 + rP_0] \qquad \text{se} \quad \alpha = 1 \\ \alpha\left[R_0 + rP_0 a^n + rb\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right] \quad \text{se} \quad \alpha \neq 1 \end{cases} \tag{3.3.8}$$

3.4 Equações de diferenças lineares de segunda ordem

Definição 3.4.1. *Uma equação de geral de diferenças é dita de segunda ordem se é da forma*

$$\begin{cases} y_n = ay_{n-1} + by_{n-2} \\ y_0 \quad dado, \quad y_1 \quad dado \end{cases} \tag{3.4.1}$$

a e b são constantes.

Solução: Considerando que $y_n = k\lambda^n$ (como no caso de primeira ordem) seja uma solução da Eq.(3.4.1). Daí temos

$$\begin{aligned} k\lambda^n - ak\lambda^{n-1} - bk\lambda^{n-2} &= 0 \\ k\lambda^{n-2}[\lambda^2 - a\lambda - b] &= 0 \end{aligned}$$

Logo, teremos

$$k\lambda^{n-2}[\lambda^2 - a\lambda - b] = 0 \tag{3.4.2}$$

cuja solução é: $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$

- Para $\lambda = 0$ temos que $y_n = 0$ para todo n (solução trivial), que só faz sentido se $y_0 = y_1 = 0$.
- Se $\lambda \neq 0$, $p(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda - b$ é o *polinômio característico* da Eq.(3.4.1) e suas ráizes $\lambda_{1,2}$ são chamados *auto-valores*.
- De

  $$\lambda^2 - a\lambda - b = 0$$

  Temos

  $$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

  onde $\lambda_{1,2}$ são univocamente determinados pelos valores dos coeficientes a e b.

Para as equações lineares vale o princípio da superposição, ou seja, se temos várias soluções então a combinação linear entre elas também é uma solução. Note que no caso da equação (3.4.1), como λ_1 e λ_2 foram determinados com a imposição de que $k\lambda_1$ e $k\lambda_2$ fossem soluções temos que

$$y_n = A_1\lambda_1^n + A_2\lambda_2^n \tag{3.4.3}$$

também é uma solução de (3.4.1). A expressão (3.4.3) é a **solução geral** da equação (3.4.1) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, que ocorrerar quando $a^2 + 4b > 0$. Neste caso as constantes A_1 e A_2 são determinadas univocamente através das condições iniciais y_0 e y_1:
Para $n = 0$ temos que $y_0 = A_1 + A_2$
Para $n = 1$ temos que $y_1 = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2$ Daí, resulta o sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = y_0 \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = y_1 \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Que tem como soluções:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_0\lambda_2 - y_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ \lambda_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_1 - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{3.4.5}$$

Quando $a^2 + 4b = 0$ os autovalores são iguais, isto é $\lambda_1 = \lambda_2 = a/2$ e a solução geral da equação (3.4.1) será dada por

$$y_n = A_1\lambda_1^n + A_2 n\lambda_2^n = (A_1 + nA_2)\left(\frac{a}{2}\right)^n \tag{3.4.6}$$

Devemos mostrar que se $y_n = \lambda^n$ é uma solução, $n\lambda^n$ também será uma solução, e portanto a combinação como acima será a solução geral. Para as constantes A_1 e A_2. Temos:

- Substituindo na Eq.(3.4.6) $n = 0$ e $n = 1$ vemos que

$$\begin{cases} y_0 = A_1 \\ y_1 = (A_1 + A_2)\left(\dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

Daí; podemos encontrar

$$A_1 = y_0 \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{2y_0}{a} - y_0 \tag{3.4.7}$$

3.5 Sistemas de Equações de diferenças lineares

Considerando uma uma equação linear de segunda ordem da forma

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0 \tag{3.5.1}$$

temos que esta equação poderá ser transformada em um sistema de equação lineares lineares de segunda ordem, bastando para isso, fazer uma mudança de varávei, $z_n = z_{n+1}$:

$$\begin{cases} y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = -az_n - by_n \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Reciprocamente, dado um sistema linear de ordem 2

$$\begin{cases} y_{n+1} = a_{11}y_n + a_{12}z_n \\ z_{n+1} = a_{21}y_n + a_{22}z_n \end{cases} \tag{3.5.3}$$

que pode ser convertida em um sistema linear de segunda ordem

$$y_{n+2} - (a_{11} + a_{22})y_{n+1} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y_n = 0 \tag{3.5.4}$$

A matriz

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é denominada **matriz jacobiana** do sistema (3.5.3). Os autovalores dessa matriz são os valores de λ tais que $det(J - \lambda I) = 0$ onde I é a matriz identidade de ordem 2. ou seja,

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

0 que resultará na equação

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \tag{3.5.5}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \tag{3.5.6}$$

é denominado **polinômio característico** da equação (3.5.5)

3.6 Número de Ouro: Um modelo Discreto (Crescimento populacional de escargots)

Usaremos na dinâmica do crescimento populacional de escargots, em três estágios distintos: óvos (C), jóvens (B) e adultos (A), considerando que não há mortalidade em nenhumn estágio.[**3**]

1. Todo escargot adulto desolva e o faz a cada 4 meses;
   Sendo c a quantidade de óvos viáveis em cada desova, então

   $$C_n = cA_n \tag{3.6.1}$$

   é a quantidade de ovos viáveis em um estágio n, em que A_n é a quantidade de escargots adutos na fase n.

2. Um escargot começa a reproduzir depois de 8 meses;
   Sendo B_n a quantidade de jóvens em cada estágio n; cada estágio n corresponde a 4 meses.

Então:
C_n = (Ovos da desolva dos adultos) + (Ovos da desova dos jóveis que chegaram a faze adulta)

$$C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} \tag{3.6.2}$$

A_n = (adultos no estágio $(n-1)$)+ (jóveis que chegaram a fase adulta)
Das equações (3.6.1) e (3.6.2) temos

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \tag{3.6.3}$$

$B_n =$ (Ovos no estágio $(n-1)$)

$$B_n = C_{n-1} \tag{3.6.4}$$

Dessa forma chegamos ao sistema

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \\ B_n = C_{n-1} \\ C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} \end{cases} \tag{3.6.5}$$

que com as condições iniciai $A_0 = a$, $B_0 = C_0 = 0$, pode ser transformada numa equação linear de segunda ordem.
De fato, da segunda equação do sistema (3.6.5) vem que $B_{n-1} = C_{n-2}$ e da primeira e terceira equação temos também

$$C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} = cA_{n-1} + c(A_n - A_{n-1}) = cA_n$$

Logo

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} = A_{n-1} + C_{n-2} = A_{n-1} + cA_{n-2}$$

Podemos concluir então que o sistema acima pode se resumir a uma unica equação de diferença de segunda ordem da forma

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + cA_{n-1} \\ A_0 = A_1 = a \end{cases} \tag{3.6.6}$$

Note:

- Se $c = 0$, podemos concluir que não haverá ovos no sistema pois teríamos $A_{n+1} - A_n = 0$, implicando em $A_n = A_0$ (constante) para todo $n \geq 1$;

- Se $c \neq 0$ temos que o polinômio característico da Eq.(3.6.6) e dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - c$$

  cujos autovalores são dados por

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2} \Rightarrow |\lambda_1| > 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1+4c}}{2} \Rightarrow |\lambda_2| = \frac{\sqrt{1+4c} - 1}{2}$$

  cujo módulo será menor que 1 se $0 < c < 3/4$. Logo a solução geral da sequência $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dada por

$$A_n = K_1 \lambda_1^n + K_2 \lambda_2^n \tag{3.6.7}$$

A solução particular é obtida através do sistema

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = a \\ K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2 = a \end{cases} \tag{3.6.8}$$

Como $K_1 > 0$ e $\lambda_1 > 1$, podemos concluir que a sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e ilimitada superiormente, ou seja

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} A_n = +\infty$$

Note:
Se atribuirmos $c = 1$ e as condições iniciais $A_0 = A_1 = 1$ na equação (3.6.6), teremos a **equação de Fibonacci**

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + A_{n-1} \\ A_1 = A_0 = 1 \end{cases} \tag{3.6.9}$$

onde cada termo da sequência $n \geq 2$, é igual a soma dos dois termos anteriores. Vimos pela equação (3.6.6) que uma das soluções é dada por

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{3.6.10}$$

denominado **número de ouro** da geometria clásica

Figura 3.1: Escargot

Capítulo 4

Equações Lineares de Segunda Ordem

4.1 Introdução

O texto deste capítulo foi baseado na livro de **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno** dos autores BOYCE, W.E e DIPRIMA, R,C.

As equações lineares de $2^{\underline{a}}$ ordem têm grande importância no estudo das equações diferenciais. Tem uma estrutura teórica rica subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução. Grande parte dessa estrutura e desses métodos são compreensíveis e apresentam nível matemático relativamente elementar. São também essenciais na investigação de fenômenos clássicos da fisica e da matemática.

Além disso, serve para o embasamento no estudo dos sistemas de equações lineares de primeira ordem que veremos no capítulo seguinte.

4.2 Equações Homogêneas com coficiente constantes

Definição 4.2.1. *Uma equação diferencia de $2^{\underline{a}}$ ordem tem a forma*

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \tag{4.2.1}$$

onde f é uma função dada e t a variável independente, que as vezes poderá ser representada por x.

Definição 4.2.2. *A Eq.(4.2.1) e dita **linear** quando assume a seguinte forma*

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y, \tag{4.2.2}$$

com p e q lineares em y e $\dfrac{dy}{dt}$.

Na Eq.((4.2.2)) g, p e q são funções específicas da variável independente t e não dependem de y.
Podemos rescrever a Eq.(4.2.1)

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{4.2.3}$$

onde a linha denota a diferenciação em relação a t. Ainda podemos encontrar equações do tipo:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t) \tag{4.2.4}$$

Sendo $P(t) \neq 0$, podemos dividir a Eq.(4.2.4) por $P(t)$, obtendo dessa forma a Eq.(4.2.3) com

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \quad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}, \tag{4.2.5}$$

Definição 4.2.3 (Problema de Valor Inicial)**.** *Um problema de valor inicial, consiste em uma das equações* (4.2.1)*,* (4.2.2) *ou* (4.2.3) *juntamente com um par de condições iniciais*

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \tag{4.2.6}$$

onde y_0 *e* $y'(t_0)$*, são números reais dados.*

Definição 4.2.4. *Chamamos uma equação linear de 2ª ordem* ***homogênea****, se a função* $g(t)$ *em* (4.2.3) *e* $G(t)$ *em* (4.2.4) *forem iguais a zero para todo* t*. Caso contrário a equação e dita* ***não homogênea****.*

Discutiremos primeiramente as equaçõe homogêneas cuja equação escreveremos por:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0 \tag{4.2.7}$$

com P, Q e R constantes. Ou seja,

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.2.8}$$

onde a, b e c são constantes dadas.

Antes de discurtirmos a $Eq.(8)$, analisemos a função cuja derivada segunda é ela própria. Podemos escrever esswa equação na forma:

$$y'' - y = 0 \tag{4.2.9}$$

Nos reportando ao cálculo, constatamos que as funções $y = e^t$ e $y = e^{-t}$ atendem à essa condição. Se fizermos as contas, observaremos que qualquer função $y_1(t) = c_1e^t$, $y_2(t) = c_2e^{-t}$ e a combinação linear delas $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$ atendem a mesma condição

$$y'(t) = c_1e^t - c_2e^{-t}, \quad y''(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

Logo, podemos concluir que a equação

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \tag{4.2.10}$$

é solução, ou seja, toda combinação linear das funções e^t e e^{-t} é solução da equação (4.2.9). Como os coeficientes c_1 e c_2 em (4.2.10) são arbitrários, podemos dizer qua há uma infinidade de familias desta equação que são soluções de (4.2.9).

Exemplo 4.2.5. *Atribuindo os valores iniciais a* (4.2.9) *teremos:*

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Substiuindo os valores iniciais na solução (4.2.10) *iremos encontrar o sistema*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 = -1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontraremos $c_1 = \dfrac{1}{2}$ *e* $c_2 = \dfrac{3}{2}$ *e que substituindo na solução* (4.2.10) *encontraremos*

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}$$

Voltemos agora a equação geral (4.2.8) dada por:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

com coeficientes (reais) constantes arbitrarios. Baseado no exemplo anterior, vamos também procurar soluções exponenciais para a equação (4.2.8).

Vamos supor que $y = e^{rt}$ onde r é um parâmetro a ser determinado, segue que

$$y' = re^{rt}, \quad y'' = r^2e^{rt}$$

substituindo y'', y' e y na equação (4.2.8) temos

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

Como $e^{rt} \neq 0$ temos que

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{4.2.11}$$

A equação (4.2.11) é chamada de **equação característica** da equação (4.2.8). Isto significa que se r é uma raiz da equação polinomial (4.2.11) então $y = e^{rt}$ é solução da equação diferencial (4.2.8). Como a equação (4.2.11) é uma equação do 2º grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que poderão ser:

- reais e disntintas, se $\Delta > 0$;
- reais e iguais, se $\Delta = 0$;
- complexas conjugadas, se $\Delta < 0$.

Mencionaremos aqui, o caso em que as raízes são reais disntintas ($\Delta > 0$)

Denotando por r_1 e r_2 as raízes distintas da equação característic (4.2.11), temos que $y_1(t) = c_1e^{r_1t}$ e $y_2(t) = c_2e^{r_2t}$ são duas soluções da (4.2.8). Como vimos, segue que

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{4.2.12}$$

é também solução da equação (4.2.8). De fato, diferenciando esta expressão eoncontramos

$$y' = c_1r_1e^{r_1t} + c_2r_2e^{r_2t} \tag{4.2.13}$$

e

$$y'' = c_1r_1^2e^{r_1t} + c_2r_2^2e^{r_2t} \tag{4.2.14}$$

que, substituindo y'', y' e y na (4.2.8) obteremos

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(c_1r_1^2e^{r_1t} + c_2r_2^2e^{r_2t}) + b(c_1r_1e^{r_1t} + c_2r_2e^{r_2t}) + c(c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}) \\ &= (ac_1r_1^2e^{r_1t} + bc_1r_1e^{r_1t} + cc_1e^{r_1t}) + (ac_2r_2^2e^{r_2t} + bc_2e^{r_2t} + cc_2e^{r_2t}) \\ &= c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2t} \end{aligned}$$

Como r_1 e r_2 são raízes de (4.2.11) temos que $ar_1^2 + br_1 + c = 0$ e $ar_2^2 + br_2 + c = 0$, pois $ay'' + by' + cy = 0$. Portanto a expressão $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$ é solução da equação diferencial (4.2.8);

Supondo que queremos achar uma solução particular para uma familia de soluções de (4.2.12) satisfazendo as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'$$

Substituindo $t = t_0$ e $y = y_0$ na em (4.2.12), vamos obter

$$c_1e^{r_1t_0} + c_2e^{r_2t_0} = y_0 \tag{4.2.15}$$

Fazendo as mesmas substituições em (4.2.13) temos:

$$c_1r_1e^{r_1t_0} + c_2r_2e^{r_2t_0} = y_0' \tag{4.2.16}$$

Formando o sistema

$$\begin{cases} c_1e^{r_1t_0} + c_2e^{r_2t_0} = y_0 \\ c_1r_1e^{r_1t_0} + c_2r_2e^{r_2t_0} = y_0' \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema em c_1 e c_2 encontraremos:

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0r_2}{r_1 - r_2}\, e^{-r_1t_0}, \quad c_2 = \frac{y_0r_1 - y_0'}{r_1 - r_2}\, e^{-r_2t_0} \tag{4.2.17}$$

Como $r_1 - r_2 \neq 0$, segue que sempre é possível encontrarmos c_1 e c_2 com as condições iniciais dadas.

Exemplo 4.2.6. *Encontre a solução geral da equação*

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \tag{4.2.18}$$

Solução: *Supondo que* $y = e^{rt}$*, então* r *será solução da equação característica*

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

que tem como solução $r = -2$ *e* $r = -3$*. Dessa forma a solução geral da* (4.2.18) *é:*

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \tag{4.2.19}$$

■

Exemplo 4.2.7. *Encontre a solução do problema de valor inicial*

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3 \tag{4.2.20}$$

Solução: *Substituindo* $y(0)$ *em* (4.2.19)*, teremos*

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 2$$

e substituindo $y'(0)$ *em* $y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$*, temos*

$$y'(0) = -2c_1 e^0 - 3c_2 e^0 = -2c_1 - 3c_2 = 3$$

Encontramos o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_1 - 3c_2 = 3 \end{cases}$$

cuja solução é $c_1 = 9$ *e* $c_2 = -7$*, que substituindo em* (4.2.19) *encontraremos a solução particular de* (4.2.20) *como sendo:*

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \tag{4.2.21}$$

■

4.3 Soluções Fundamentais de Equações Lineares Homogêneas

Na secção anterior vimos como resolver algumas equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ond a, b, e c são constantes. A parti desses resultados, obteremos uma visão mais clara de todas as soluções das equações lineares homogêneas de segunda ordem.

Ao desenvolver o estudo das equação difereciais lineares, se faz necessário usar a notação de operador diferencial. Sejam p e q funções contínuas em t, em um intervalo aberto I, isto é, para $\alpha < t < \beta$, esxcluindo os casos em que $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$.

Definição 4.3.1 (Operador Diferencial)**.** *Chamamos* ***operador diferencial*** L*, qualquer função* ϕ *duas vezes difrenciável em* I*, dado pela fórmula*

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi \tag{4.3.1}$$

Observe que $L[\phi]$ é uma função em I. O valor $L[\phi]$ em um ponto t é dado por

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p\phi'(t) + q\phi(t)$$

Exemplo 4.3.2. *Sendo* $p(t) = t^2$*,* $q(t) = 1 + t$*, e* $\phi(t) = sen(3t)$*, teremos*

$$\begin{aligned} [L[\phi](t) &= (sen3t)'' + t^2(sen3t)' + (1+t)sen3t \\ &= -9sen3t + 3t^2cos3t + (1+t)sen3t \end{aligned}$$

O operador L pode ser representado por $L = D^2 + pD + q$, onde D é o operador derivada. Costumeiramente usamos o simbolo y para denotar $[\phi](t)$. Logo escreveremos essa equação como sendo:

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{4.3.2}$$

Associamos a equação 4.3.2 á um conjunto de condições iniciais, dado por:

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \tag{4.3.3}$$

onde t_0 é qualquer ponto no intervalo I e y_0 e y_0' são números reais dados.

Teorema 4.3.3 (Existencia e unicidade)**.** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{gathered} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{gathered} \tag{4.3.4}$$

onde p*,* q *e* g *são contínuas em um intervalo* I*. Então existe exatamente uma solução* $y = \phi(t)$ *desse problema e a solução existe em todo o intervalo* I

Não faremos aqui a demonstração desse resultado.

Exemplo 4.3.4. *Encontre o maior intervalo para o qual o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} (t^2 - 3t)y'' + ty' - (3+t)y = 0 \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 1 \end{cases}$$

certamente existe.

Solução: Dividindo a equação acima por $t(t-3)$, temos

$$y'' + \frac{1}{(t-3)}y' - \frac{(3+t)}{t(t-3)}y = 0$$

Os únicos pontos de descontinuidade dos coeficientes são $t = 0$ e $t = 3$. Logo o maior intervalo contendo o ponto inicial $t = 1$ no qual todos os coeficientes são continuos é $0 < t < 3$. O Teorema (4.3.3) garante que a solução existe e é unica nesse intervalo. ■

Teorema 4.3.5 (Princípio da Superposição)**.** *Se* y_1 *e* y_2 *são soluções da equação diferencial* (4.3.2)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ *também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes* c_1 *e* c_2*.*

Demonstração: Quando c_1 ou c_2 é igual a zero, temos um caso particular do Teorema (4.3.5). Podemos concluir então que qualquer multiplo de (4.3.1) também é solução. Substituindo y em (4.3.1) pela expressão

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{4.3.5}$$

resulta em:

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + pc_1y_1' + pc_2y_2' + qc_1y_1 + qc_2y_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + pc_2' + qy_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Considere agora o problema de valor incial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

em que y_0' e y_0 são as condicões iniciais dadas no problema. Vamos determinar condicões sobre duas solucões $y_1(t)$ e $y_2(t)$ para que existam constantes c_1 e c_2 tais que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ seja também solução do problema de valor inicial.

Substituindo-se $t = t_0$ na solucão $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ e na derivada de $y(t)$, $y'(t) = c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t)$ obtemos o sistema de equacões lineares

$$\begin{cases} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) = y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

que pode ser escrito na forma matricial

$$AX = B$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \end{bmatrix}$$

Se a matriz A do sistema é invertível, então para todo par de condições iniciais(y_0, y_0') o sistema tem uma única solucão (c_1, c_2). Porém, uma matriz quadrada é invertível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Ou seja, se

$$W = det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix} \neq 0,$$

então para todo par de condicões iniciais (y_0, y_0') existe um único par de constantes (c_1, c_2) tal que $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ é solucão do problema de valor inicial.

Definição 4.3.6. *O determinante*

$$W(y_1, y_2)(t_0) = det \begin{bmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{bmatrix}, \tag{4.3.6}$$

é chamado de ***wronskiano*** *das funcções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ em t_0.*

Teorema 4.3.7. *Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções de* (4.3.2)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e que o ***wronskiano***

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2$$

não se anule no ponto t_0 onde são dadas as condições iniciais (4.3.3)*. Ou seja,*

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'.$$

Então existe uma escolha das contantes c_1 e c_2 para os quais $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ satisfaça (4.3.2) *e as condições iniciais* (4.3.3)*.*

Exemplo 4.3.8. *Seja a equação diferencial*

$$y'' + 5y' + 6 = 0$$

Como vimos anteriormente, a solução desta equação são as funções $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t}$. O wronskiano duas funções y_1 e y_2 é

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -3e^{-5t} + 2e^{-5t} = -e^{-5t}$$

Como W é diferente de zero para todos os valores de t as funções y_1 e y_2 podem ser usadas para se construir soluções da equação diferencial dada juntamente com quaisquer condições iniciais prévias de qualquer que seja t

Teorema 4.3.9. *Se y_1 e y_2 são duas soluções de* (4.3.2)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e se existe um ponto t_0 onde o wronskiano não se anule, então a família de soluções de

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções de (4.3.2)*.*

Demonstração: Seja ϕ uma solução qualquer de (4.3.2), precisamos mostrar que ϕ está inclusa no conjunto de soluções da combinação linear $y = c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$. Isto é, para alguma escolha das constantes c_1 e c_2, a combinação linear e igual a ϕ. Seja então t_0 um ponto onde onde $W(y_1, y_2) \neq 0$. Calculando ϕ e ϕ' nesse ponto e chamando esses pontos de y_0 e y'_0 respectivamente, temos:

$$y_0 = \phi(t_0), \quad y'(t_0) = \phi'(t_0)$$

Considere, a seguir o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

É fácil ver que a função ϕ é solução desse problema de valor inicial. Por outro lado como $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ vimos pelo teorema (4.3.9) que é possível escolher c_1 e c_2 tais que $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ tambem seja solução do problema de valor inicial. O teorema da existencia e unicidade garante que essas duas soluções do problema de valor inicial são iguais, dessa forma, para uma escolha apropriada de c_1 e c_2,

$$\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

onde ϕ está inclusa na família de soluções de $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$.
Finalmente como ϕ é uma solução arbitrária da equação (4.3.2), segue que toda solução dessa equação está incluída nessa famila.
■ **Nota:**

- É portanto natural chamar a expresão $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ com coeficientes arbitrários de **solução geral** da equação diferencial (4.3.2).
- As soluções y_1 e y_2 com $W(y_1, y_2) \neq 0$ formam o **o conjunto fundamental de soluções** da equação diferencial (4.3.2).

Exemplo 4.3.10. *Suponha que* $y_1(t) = e^{r_1t}$ *e* $y_2 = e^{r_2t}$ *são duas soluções da equação* (4.3.2). *Mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções se* $r_1 \neq r_2$

Solução: Calculando o wronsquiano de y_1 e y_2 temos:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = r_2e^{(r_1+r_2)t} - r_1e^{(r_1+r_2)t} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t}$$

Logo y_1 e y_2 só formarão um conjunto fundamental de soluções, se $r_1 \neq r_2$, tendo em vista que a função exponencial nunca se anula, ficando portanto o $W(y_1, y_2) \neq 0$ ■

4.4 Independência Linear e wronskiano

Nesta secção iremos relacionar as ideias de solução geral e um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial linear ao conceito de *independencia linear* que é central no estudo da algebra linear. Essas relações entre as equações diferenciais e à álgebra linear e mais forte para equações de maior ordem e para os sistemas de equações lineares, Tomaremos, portanto, um conceito mais simples.

Definição 4.4.1. *Duas funções f e g são ditas* ***linearmente independentes*** *em um intervalo I se existe duas constantes k_1 e k_2 como uma delas diferente de zero tais que*

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0 \tag{4.4.1}$$

para todo t em I. Podemos dizer também que as funções f e g são ***linearmente independentes*** *em um intervavlo I se não forem* ***linearmente dependentes nesse intrevalo****, isto é a equação (4.4.1) só e valida para todo t em I se $k_1 = k_2 = 0$*

Exemplo 4.4.2. *Determine se as funções $\sin(t)$ e $\cos(t - \frac{\pi}{2})$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes para um intervalo qualquer I.*

Solução: Vejamos a solução da equação

$$\begin{aligned}
k_1 \sin t + k_2 \cos(t - \frac{\pi}{2}) &= 0 \\
k_1 \sin t + k_2(\cos t \cos\frac{\pi}{2} + \sin t \sin\frac{\pi}{2}) &= 0 \\
k_1 \sin t + k_2 \sin t &= 0
\end{aligned}$$

Dai para $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$ a equação acima tem solução. Portanto as funções são linearmente dependentes ■

Teorema 4.4.3. *Se f e g são funções diferenciáveis em intervalo aberto I e se $W(f,g)(t_0) \neq 0$ em algum ponto t_0 em I, então f e g são linearmente independentes em I. Alem disso se f e g são linearmente dependentes em I então $W(f,g)(t) = 0$ para todo t em I*

Demonstração: Para provar a primeira parte deste teorema, considere uma combinação linear $k_1 f(t) + k_2 g(t)$ e suponha que ela seja igual a zero em todo o intervalo I. Calculando a expresão e sua derivada em t_0, temos

$$\begin{cases} k_1 f(t_0) + k_2 g(t_0) = 0 \\ k_1 f'(t_0) + k_2 g'(t_0) = 0 \end{cases} \tag{4.4.2}$$

Observando a matriz dos coeficientes, verificamos que ele é o $W(f,g)(t_0)$ e, por hipótese, é diferente de zero. Logo, a única solução dos sistem (4.4.2) é $k_1 = k_2 \neq 0$, de modo que f e g são linearmente independentes. A segunda parte deste teorema segue imediantamente da primeira.De fato, suponha que f e g são linearmente dependentes e que $W(f,g)(t) \neq 0$. Então existe um ponto t_0 em I tal que $W(f,g)(t_0) \neq 0$; pela primeira parte do teorema isso implica que as funções f e g são linearmente independentes, contrariando a hipótese, completando assim a demonstração. ■

Exemplo 4.4.4. *Vamos considerar as funções $f(t) = e^t$ e $g(t) = e^{2t}$. Analizando $W(f,g)(t_0)$, temos*

$$\begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{2t_0} \\ e^{t_0} & 2e^{2t_0} \end{vmatrix} = (e^{t_0})(2e^{2t_0}) - e^{2t_0}e^{t_0} = 2e^{3t_0} - e^{3t_0} = e^{3t_0} \neq 0 \tag{4.4.3}$$

Logo as funções $f(t) = e^t$ e $g(t) = e^{2t}$ são lineamente independentes em qualquer intervalo I

Teorema 4.4.5 (Teorema de Abel). *Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial*

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{4.4.4}$$

onde p e q são funções contínuas em um intervalo aberto I, então o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = c\exp\left[-\int p(t)dt\right] \tag{4.4.5}$$

onde c é uma constante determinada que depende de y_1 e y_2, mas não de t. Além disso, $W(y_1, y_2)(t)$ ou é zero para todo t em I (se $c = 0$) ou nunca se anula em I se ($c \neq 0$).

Demonstração: Como y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial, temos

$$\begin{cases} y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 = 0 \end{cases} \tag{4.4.6}$$

Multiplicando a primeira equação por $-y_2$ e a segundo por y_1 vamos ter

$$\begin{cases} -y_1''y_2 - p(t)y_1'y_2 - q(t)y_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + p(t)y_2'y_1 + q(t)y_2y_1 = 0 \end{cases} \tag{4.4.7}$$

somando agora essas duas equações obtemos

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(t)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0 \tag{4.4.8}$$

Seja gora $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$, observe que

$$W'(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}, = y_1y_2'' - y_1''y_2 \tag{4.4.9}$$

Dessa forma podemos escrever a equação (4.4.8) da seguinte forma

$$W' + p(t)W = 0 \tag{4.4.10}$$

Ou seja, podemos escrever a equação (4.4.10) da seguinte forma:

$$\frac{dW}{dt} + p(t)W = 0$$

Observando que trata-se tanto de uma equação linear de 1ª ordem como uma equação separável.

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= -p(t)W \\
\frac{dW}{W} &= -p(t)dt \\
\int \frac{dW}{W} &= -\int p(t)dt + c_1 \\
\ln W &= -\int p(t)dt + c_1 \\
\exp(\ln W) &= \exp\left(-\int p(t)dt + c_1\right) \\
W &= \exp\left(-\int p(t)dt\right)\exp(c_1) \\
W &= c\exp\left(-\int p(t)dt\right)
\end{aligned}$$

Por conseguinte

$$W(t) = c\exp\left[-\int p(t)dt\right]$$

■

Exemplo 4.4.6. *Vamos considerar* $y_1(t) = t^{\frac{1}{2}}$ *e* $y_2(t) = t^{-1}$. *Verica-se facilmente que essas funções são soluções da equação*

$$2t^2y'' + 3ty' - ty = 0, \quad para \quad t > 0 \tag{4.4.11}$$

Vamos calcular agora

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} t^{\frac{1}{2}} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{\frac{-3}{2}} - \frac{1}{2}t^{\frac{-3}{2}} = -\frac{3}{2}t^{-\frac{3}{2}}$$

Antes, vamos escrever a equação (4.4.11) na forma padrão

$$y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{y}{2t} = 0$$

Calculando agora pela fórmula da equação (4.4.10) temos

$$\begin{aligned}
W(t) &= c\exp\left[-\frac{3}{2}\int p(t)dt\right] \\
&= c\exp\left[-\frac{3}{2}\int \frac{1}{t}dt\right] \\
&= c\exp\left[-\frac{3}{2}\ln t\right] \\
&= ct^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Que nos dar o wronsquiano de qualquer par de soluções de (4.4.11). Para uma solução particular dada nesse exemplo, precisamos escolher $c = -\frac{3}{2}$

Teorema 4.4.7. *Seja y_1 e y_2 soluções de* (4.4.8)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

onde p e q são contínuas num intervalo aberto I. Então y_1 e y_2 são linearmente dependentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t)$ é zero para todo t em I. De um outro modo,y_1 e y_2 são linearmente independentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula simultaneamente em I

Agora, podemos resumir os fatos sobre conjunto fundamental de soluções, wronskiano e independência linear. Sejam y_1 e y_2 soluções de (4.4.8),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

onde p e q são continuas num intervalo aberto I. Então as quatro informações a seguir são equivalentes:

1. As funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em I;
2. As funções y_1 e y_2 são linearmente independentes;
3. $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ para algum t_0 em I;
4. $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para todo t em I.

Capítulo 5

Sistema de Equações Diferenciais Lineares

5.1 Introdução

Assim como no capítulo anterior, este texto se baseiou no livro de **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno** dos autores BOYCE, W.E e DIPRIMA, R,C.

Sistemas de equações diferenciais ordinárias simutâneas aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas varáveis dependentes, cada uma das quais sendo uma função da mesma única varável independente.

Trataremos ao fim deste capítulo, do Modelo de Discreto (Crescimento populacional de escargots) abordado no capítulo 3 visto agora sobre a forma contínua, através dos sistemas de equações diferenciais de primeira ordem e também na forma de equações diferenciais lineares de segunda ordem.

Vamos denotar a varável independente por t e as variáveis dependentes que são funções de t por $x_1, x_2, x_3, ...$ A diferenciação em relação a t será denotado por um apóstrofo.

Exemplo 5.1.1. *O moveimento de um determinado sistema massa-mola é descrito pela equação diferencial de segunda ordem*

$$u'' + 0125u' + u = 0 \tag{5.1.1}$$

Veremos como transformar essa equação num sistema de equações lineares de primeira ondem. Chame $x_1 = u$ e $x_2 = u'$. Dai $x_1' = x_2$. Como $u'' = x_2'$, substituindo u, u' e u'' em (5.1.1) *obteremos*

$$x_2' + 0,125x_1' + x_1 = 0$$

Dessa forma, x_1 e x_2 satisfazem o seguinte sistema de equaçãoes diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -0,125x_1' - x_1 \end{cases}$$

Para transformar uma equação arbitraria de ordem n

$$y^n = F(t, y, y', y'', \dots, y^{n-1}) \tag{5.1.2}$$

em um sistema de equações lineares de primeira ordem, estendemos o método do **Exemplo**(5.1.1) definindo as variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ por

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \dots \quad , x_n = y^{n-1} \tag{5.1.3}$$

Dai segue que

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Portanto (5.1.2), será escrita como:

$$x_{n-1}' = F(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \tag{5.1.5}$$

As equações (5.1.4) e (5.1.5) são casos especiais do sistema geral

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Dizemos que o sistema (5.1.6) tem solução no intervalo I: $\alpha < t < \beta$, se existe um conjunto de n funções

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \phi_n(t), \tag{5.1.7}$$

difenciaveis em todos os pontos do intervalo I que satisfazem o sistema de equações (5.1.6) em todos os pontos desse intervalo. Podem também ser dadas condições iniciais das forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0 \tag{5.1.8}$$

onde t é um valor especificado de t em I e $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ são numeros dados.

As equações diferenciais (5.1.6) e as condicições iniciais (5.1.8) juntas formam um problema de valor inicial. Uma solução (5.1.7) pode ser vista como um conjunto de equações paramétricas em um espaço de dimenção n.Para um valor de t dado, as equações (5.1.7) fornecem valores para as coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ de um ponto no espaço. A medida que t muda, em geral, as coordenadas também mudam. A coleção de pontos correspondentes para $\alpha < t < \beta$ formam uma curva no espaço.

As condições a seguir sobre $F_1, F_2, \dots, F_n$ facilmente identificadas em problemas específicos, são suficientes para garantir que o problema de valor inicial (5.1.6), (5.1.8) tenham uma unica solução.

Teorema 5.1.2 (Existencia e unicidade). *Suponha que cada uma das funções $F_1, F_2, \ldots, F_n$ e suas derivadas parciais $\partial F_1/x_1$,...,$\partial F_1/x_n$,...,$\partial F_n/x_1$,..., $\partial F_n/x_n$, são continuas em uma região R do espaço $tx_1, \ldots, x_n$ definido por $\alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n$, e suponha que o ponto $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ está em R. Então existe um intervalo $|t-t_0|< h$ no qual há uma unica solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_= \phi_n(t)$ do sistema de equações diferenciais (5.1.6) que também satisfaz as condições iniciais (5.1.8).*

Se cada uma das funções $F_1, F_2, ..., F_n$ nas equações (5.1.6) é uma função linear nas variáveis dependentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, então o sistema de equações é dito **linear**; caso contrário é dito **não linear**. Dessa forma, um sistema mais geral de n equações lineares tem a forma

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}(t)x_1 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' = p_{21}(t)x_1 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \tag{5.1.9}$$

Se todas as funções $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$, forem nulas, o sistema é dito **homogêneo**, caso contrário é dito **não-homogêneo**.

Teorema 5.1.3. *Se as funções $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}, g_1, g_2, \ldots, g_n$ são contínuas em um intervalo aberto I:$\alpha < t < \beta$, então existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema (5.1.9) que também satisfaz as condições iniciais (5.1.8), onde t_0 é qualquer ponto em I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números arbitrários. Além disso a solução existe em todo intervalo I.*

5.2 Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

A teoria geral para para sistemas de n equações lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} x_1' = p_{11}(t)x_1 + \ldots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' = p_{21}(t)x_1 + \ldots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ \vdots \\ x_n' = p_{n1}(t)x_1 + \ldots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{cases} \tag{5.2.1}$$

é bastante similar a teoria para ínica equação de ordem n. Usaremos a notação matricial para discutir o sistema (5.2.1) de uma forma mais eficiente e prática. Ou seja, vamos considerar $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ as componentes de um vetor $x = \phi(t)$. Da mesma maneira, $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ as componentes de um vetor $g(t)$ e $p_{11}, \ldots, p_{nn}$ as compnentes de uma matriz quadrada $P(t)$ de ordem n. Dessa forma o sistema (5.2.1) será escrito na forma:

$$x' = P(t)x + g(t) \tag{5.2.2}$$

Dizemos que um vetor $x = \phi(t)$, satisfaz a equaçãp a equação (5.2.2) se suas componentes satisfazem o sistema (5.2.1). Vamos supor que P e g são continuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$. O Teorema(5.1.3), garante a existencia de soluções para a equaçao (5.2.2).

Vamos considerar primeiro a equação homogenea

$$x' = P(t)x \tag{5.2.3}$$

Usaremos a notação

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, x^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t), \end{pmatrix} \ldots \tag{5.2.4}$$

para indicar soluções específicas de (5.2.3). Observe que $x_{ij}(t) = x_j^{(i)}(t)$ denota a i-esima componente da j-esima solução $x^{(j)}(t)$.

Teorema 5.2.1 (Princípio da Superposição)**.** *Se as funções vetoriais $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são soluções do sistema* (5.2.3)*, então as combinações lineares $c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}$ também é solução quaisquer que sejam as as constantes c_1 e c_2*

Demonstração: A demonstração é simples. Basta derivar $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ e usar o fato que $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ satisfazem a equação (5.2.3) ■

Aplicando repetidamente o Teorema(5.2.1), podemos concluir que, se $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ $\ldots x^k$ são soluções da (5.2.3) então

$$x = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) + \ldots + c_kx^{(k)}(t) \tag{5.2.5}$$

também é solução, quaiquer que sejam as constantes c_1,c_2,$\ldots$,c_k.

Exemplo 5.2.2. *Seja*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} x \tag{5.2.6}$$

com

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Verifique que $x^{(1)}(t)$ e $x^{(2)}(t)$ são soluções da equação(5.2.6)*, e a combinação linearn $c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t)$ tambem é solução para quaisquer que sejam c_1 e c_2.*

Solução: para

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{3t} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} = x'^{(1)}(t)$$

e

$$x^2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Temos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = x^{'2}(t$$

Como $x^{(1)}(t)$ e $x^{(2)}(t)$ satisfazer a equação (5.1.2), então pelo Teorema (5.2.1)

$$\begin{aligned} x &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

■

Por analogia, com casos anteriores, é natural esperar que para um sistema n equações da forma (5.2.3), seja suficiente formar combinações lineares de n equações escolhidas apropriadamente. Seja então $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, n soluções do sistmea (5.2.3) de ordem n e considere a matriz $X(t)$ cujas colunas são os vetores $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \ldots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{5.2.8}$$

Temos conforme Apêndice, que as colunas de$X(t)$ são linearmente independentes para um valor de t se, e somente se, $detX \neq 0$ para esse valor de t. Esse determinante é chamado de **wronskiano** das n soluções $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ e denotado por $W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}]$, isto é,

$$W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}](t) = detX(t) \tag{5.2.9}$$

Teorema 5.2.3. *Se as funções vetoriais $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ são soluções linearmente independentes do sistema* (5.2.3) *em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $x = \phi(t)$ pode ser expressa como combinação linear de $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$,*

$$\phi(t) = c_1 x^{(1}(t) + \ldots + c_n x^{(n}(t) \tag{5.2.10}$$

Note antes que conforme Teorema(5.2.1), todas as expressões da forma (5.2.10), são soluções do sistema (5.2.3), enquanto por por este Teorema, todas as soluções podem ser escritas da forma (5.2.10). Pensando nas constantes $c_1, \ldots, c_n$, como arbitrarias, então a equação (5.2.10) inclui todas as soluções do sistema (5.2.3) e a chamamos **solução geral**. Qualquer conjunto de soluções $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ da equação(5.2.3) que seja linearmente independente em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, é um conjunto fundamental para esse sistema.

Demonstração: Vamos mostrar que dada qualquer solução ϕ da Eq.(5.2.3), $\phi(t) = c_1x^{(1)} + \ldots + c_nx^{(n)}$ para valores apropriados $c_1, \ldots, c_n$. Seja $t = t_0$ algum ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$. E seja $\xi = \phi(t_0)$. Queremos determinar se existe alguma solução da forma $c_1x^{(1)} + \ldots + c_nx^{(n)}$ que também satisfaça a condição inicial $x(t_0) = \xi$. Em outras palavras queremos saber se existe valor $c_1, \ldots, c_n$ para os quais

$$c_1x^{(1)}(t_0) + \ldots + c_nx^{(n)}(t_0) = \xi \tag{5.2.11}$$

ou em forma escalar,

$$\begin{cases} c_1x_{11}(t_0) + \ldots + c_nx_{1n}(t_0) = \xi_1 \\ \vdots \\ c_1x_{n1}(t_0) + \ldots + c_nx_{nn}(t_0) = \xi_n \end{cases} \tag{5.2.12}$$

A condição necessária e suficiente para que as equações do sistema (5.2.12) possua única solução $c_1, \ldots, c_n$ é exatamente que o determinante da matriz dos coeficientes, que é o wronskiano $W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}](t_0) \neq 0$. Por hipótese $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ são linearmente independentes em todo o intervalo $\alpha < t < \beta$, o que garante que $W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}](t_0) \neq 0$ e, portanto existe uma unica solução da Eq.(5.2.3) da forma a $x = c_1x^{(1)} + \ldots + c_nx^{(n)}$ que também satisfaz a condição inicial (5.2.11). Pelo Teorema da unicidade, essa solução é identica a $\phi(t)$, logo$\phi(t) = c_1x^{(1)} + \ldots + c_nx^{(n)}$ ■

Teorema 5.2.4. *Se $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ são soluções de (5.2.3) no intervalor $\alpha < t < \beta$, então $W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

A importância deste Teorema, deve-se ao fato dele nos livrar de examinar o $W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}]$ em todos os pontos do intervalo de interesse e nos permite determinar se $W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}]$ forma um conjunto fundamental de soluções simplesmente calculando-o em qualquer ponto conveniente desse intervalo.

O próximo teorema garante que o sistema (5.2.3) tem pelo menos um conjunto fudamental de soluções.

Teorema 5.2.5. *Sejam*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

além disso,suponha que $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ são soluções do sistema (5.2.3) que satisfaz as condições iniciais

$$x^{(1)}(t_0) = e^1, \ldots, x^{(n)}(t_0) = e^n \tag{5.2.13}$$

respectivamente, onde t_0 é um ponto qualquer do interevalo $\alpha < t < \beta$. Então $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ formam um conjjunto fundamental para o sistema (5.2.3).

Demonstração: O Teorema da existência e unicidade garantem as soluções $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$. É fácil ver que o wronskiano dessas soluções é igual a 1 quando $t = t_0$; portanto é um conjunto fundamental de soluções.

Uma vez encontrado o conjunto fundamental de soluções, pode-se gerar outros conjuntos, formando-se outros conjuntos linearmente (independentes) do primeiro conjunto. Para fins teóricos, o conjunto dado por este teorema é em geral, o mais simples possível. ■

5.3 Sjstema de Equações Homogêneos com coeficientes Constantes

Vamos trabalhar nesta secção sistemas lineares homogêneo com coeficientes constantes, ou seja, sistemas da forma

$$x' = Ax \tag{5.3.1}$$

onde A é uma matriz $n \times n$. A menos que se diga o contrário, todos os elementos de A são números reais (e não complexos).

Se $n = 1$, o sistema se reduz á uma unica equação de primeira ondem

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{5.3.2}$$

cuja solução é $x = ce^{at}$

O caso $n = 2$ tem uma importãncia particular e permite uma visualização no plano x_1x_2, chamado **plano de fase**. Se fizermos Ax em um grande números de pontos e traçarmos o gráfico dos vetores resultantes, obteresmo um campo de vetores tangentes á solução do sistema de equações diferenciais. Um gráfico que ilustra uma amostra representativa de trajetórias para um sistema dado é chamado **retrato de fase**.

Para construirmos a solução geral do sistema (5.3.1) procederemos de forma análoga ao tratamento dado as equações lineares de segunda ordem.

As soluções procuradas para (5.3.1), são soluções do tipo

$$x = \xi e^{rt} \tag{5.3.3}$$

onde o expoente r e o vetor constante ξ devem ser determinados. Substituindo o x em (5.3.3), do sistema (5.3.1), obtemos:

$$r\xi e^{rt} = A\xi e^{rt}$$

Cancelando o fator não nulo e^{rt}, obtemos $A\xi = r\xi$, ou

$$(A - rI)\xi = 0 \tag{5.3.4}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $n \times n$. Dessa forma, para resolver o sistema de equações diferenciais (5.3.1), se faz necessário resolver o sistema de equações algébricas (5.3.4). Esta uma equação é a que determina os **autovetores** e os **autovalores** da matriz dos coeficientes A

Exemplo 5.3.1. *Vamos considerar o sistema*

$$\begin{cases} x'^{(1)}(t) = x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t) \\ x'^{(2)}(t) = -4x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t) \end{cases} \tag{5.3.5}$$

Na forma matricil, temos

$$x' = Ax$$

onde,

$$x' = \begin{pmatrix} x'^{(1)}(t) \\ x'^{(2)}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{pmatrix}$$

Para que as soluções sejam mostradas explicitamente, supomos que $x = \xi e^{rt}$ e o substituimos em (5.3.5). Daí teremos o sistema de equações algebricas

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ -4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.6}$$

A equação (5.3.6) só terá solução diferente da trivial se, e somente se, a matriz dos coeficientes for igual a zero. Isso nos remete a encontrar os valores de r na equação

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ -4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4 = 0 \tag{5.3.7}$$

Resolvendo (5.3.7) encontramos os autovalores $r = 3$ e $r = -1$, Substituindo em (5.3.5)temos, para $r = 3$ o sistema:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que escalonado ficará

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$2\xi_1 + \xi_2 = 0 \tag{5.3.8}$$

e o autovetor correspondente é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{5.3.9}$$

De maneira análoga, pra $r = -1$, encontraremos o autovetor

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5.3.10}$$

Segue, que as soluções correspondentes da equação diferencial são

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{5.3.11}$$

O wronskiano dessas soluções é

$$W[x^{(1)}], x^{(2)}(t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -2e^{3t} & 2e^{-t} \end{vmatrix} = 2e^{2t} + 2e^{2t} = 4e^{2t} \tag{5.3.12}$$

que nunca se anulará. Logo , as soluções x^1 e x^2 formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral do sistema (5.3.5) será dada por:

$$x = c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{5.3.13}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Vamos proceder como nesse exemplo, para encontrarmos a solução para o sistema geral (5.3.1). Precisamos encontrar os autovalores e os autovetores de A a partir de um sistema algébrico (5.3.4). Os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ que não precisam ser distintos são as raizes da equação polinomial n

$$det(A - rI) = 0 \tag{5.3.14}$$

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados determinam a natureza da solução geral do sistema (5.3.1). Supondo que A é uma matriz real, exixtem três possibilidades para os autovalores de A:

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre se;

2. Alguns autovalores ocorrem em pares conjugados;

3. Alguns autovalores são repetidos.

Se os autovalores forem reais e distintos, então existe um autovetor real $\xi^{(1)}$ associado a cada autovalor r_i e os n autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ são linearmente independentes. As soluções correspondente do sistema diferencial (5.3.1) são

$$x^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{r_1t}, \ldots, \xi^{(n)}e^{r_nt} \tag{5.3.15}$$

Para mostrar que essas soluções formam um conjunto fundamental, basta calcular seu wroskiano:

$$W[x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}](t) = \begin{vmatrix} \xi^{(1)}e_1^{r_1t} & \ldots & \xi^{(n)}e_1^{r_nt}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^{(1)}e_1^{r_1t}) & \ldots & \xi^{(n)}e_1^{r_nt} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(r_1+\ldots+r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \ldots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \ldots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{5.3.16}$$

Note:

- A função exponencial nunca se anula;

- Como os autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ são linearmente independentes, o determinante no ultimo termo da equação (5.3.16) é diferente de zero. O que implica que o wronsquiano $W = [x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}](t)$ será sempre diferente de zero. Portanto, $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções. Logo a solução geral da equação (5.3.1) será

$$x = c_1\xi^{(1)}e^{r_1 t} + \ldots + c_n\xi^{(n)}e^{r_n t} \tag{5.3.17}$$

Exemplo 5.3.2. *Encontre a solução geral do sistema*

$$\begin{cases} x'^{(1)}(t) = -3x^{(1)}(t) + 2x^{(3)}(t) \\ x'^{(2)}(t) = -2x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t) + 2x^{(3)}(t) \\ x'^{(3)}(t) = -4x^{(1)}(t) + 3x^{(3)}(t) \end{cases} \tag{5.3.18}$$

que na forma matricial é dada por

$$x' = Ax$$

onde

$$x' = \begin{pmatrix} x'^{(1)}(t) \\ x'^{(2)}(t) \\ x'^{(3)}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \\ x^{(3)}(t) \end{pmatrix}$$

Solução: Supondo que $x = \xi e^{rt}$ e substituindo na equação (5.3.18), teremos o sistema de equações algebricas

$$\begin{pmatrix} -3-r & 0 & 2 \\ -2 & -1-r & 2 \\ -4 & 0 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.19}$$

que só terá solução diferente da trivial se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, ou seja

$$\begin{vmatrix} -3-r & 0 & 2 \\ -2 & -1-r & 2 \\ -4 & 0 & 3-r \end{vmatrix} = -(1+r)(r^2-1) = 0 \tag{5.3.20}$$

Resolvendo a equação vamos encontramos $r = \pm 1$, que são os autovalores de A.
Para encontrarmos os autovetores associaidos aos autovalores, devemos substituir na equação (5.3.19) os valores de r.
Para $r = 1$, vamos obter o sistema

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que forma escalonada ficará

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{cases}2\xi^1-\xi_3=0\\ -2\xi_2+\xi_3=0\end{cases}\tag{5.3.21}$$

cujo autovetor correspondente é

$$\xi^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\tag{5.3.22}$$

Para $r=-1$, temos

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

escalonando, se tornará

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

com autovetores corrersponde ntes

$$\xi^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\tag{5.3.23}$$

e

$$\xi^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\tag{5.3.24}$$

As soluções da equação diferencial são respectivamente,

$$x^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}e^{t},\quad \xi^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t},\quad \xi^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t}\tag{5.3.25}$$

A solução geral desse sistema é dado pela expressão

$$x=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{-t}+c_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}e^{-t}\tag{5.3.26}$$

■

5.4 Número de Ouro: Um modelo contínuo de reprodução animal (Crescimento populacional de escargots)

Vamos tratar nessa sessão, do modelo discreto abordado no capítulo 3, sobre a forma contínua, usando para isto, os sistemas de equações diferenciais de primeira ordem.

Vamos retormar ao problema do crescimento populacional dos escargots visto na forma discreta, dando a ele uma abordagem contínua.

Usaremos na dinâmica do crescimento populacional de escargots, em três estágios distintos: óvos (C), jóvens (B) e adultos (A), considerando que não há mortalidade em nenhumn estágio.

1. Todo escargot adulto desolva e o faz a cada 4 meses;
   Sendo c a quantidade de óvos viáveis em cada desova, então

   $$C_n = cA_n \tag{5.4.1}$$

   é a quantidade de ovos viáveis em um estágio n, em que A_n é a quantidade de escargots adultos na fase n.

2. Um escargot começa a reproduzir depois de 8 meses;
   Sendo B_n a quantidade de jóvens em cada estágio n; cada estágio n corresponde a 4 meses.

Então:
C_n = (Ovos da desolva dos adultos) + (Ovos da desova dos jóveis que chegaram a faze adulta)

$$C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} \tag{5.4.2}$$

A_n = (adultos no estágio $(n-1)$)+ (jóveis que chegaram a fase adulta)
Das equações (**??**) e (5.4.2) temos

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \tag{5.4.3}$$

B_n = (Jóvens no estágio $(n-1)$)

$$B_n = C_{n-1} \tag{5.4.4}$$

Dessa forma chegamos ao sistema

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \\ B_n = C_{n-1} \\ C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} \end{cases} \tag{5.4.5}$$

Vamos agora transformar esse sistema de equações de diferenças, em um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Faremos aqui também uma mudança de variável: A_{n-1}: Adultos na fase $(n-1)$ por (A), B_{n-1}: Jóvens na fase $(n-1)$ por J e C_{n-1}: Óvos na fase $(n-1)$ por θ.

Temos da definição de derivada

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{(x(t) + \Delta x) - x(t)}{\Delta t} \tag{5.4.6}$$

Então uma aproximação entre variações contínuas e discretas é dada por

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{5.4.7}$$

No caso específico em que $\Delta t = 1$, temos

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cong x_{n+1} - x_n \tag{5.4.8}$$

Daí, podemos associar

$$\frac{dx}{dt} \cong x_{n+1} - x_n \tag{5.4.9}$$

Da primeira equação do sistema (5.4.5), tiramos que

$$A_n - A_{n-1} = (A_{n-1} + B_{n-1}) - A_{n-1} = B_{n-1}$$

Daí, a diferença

$$A_n - A_{n-1} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = J \tag{5.4.10}$$

Da segunda equação do sistema (5.4.5), tiramos

$$B_n - B_{n-1} = C_{n-1} - C_{n-2} = C_{n-1} - B_{n-1}$$

Logo, a diferença

$$Bn - B_{n-1} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \theta - J \tag{5.4.11}$$

E por fim, da terceira equação do mesmo sistema (5.4.5), tiramos

$$C_n - C_{n-1} = c(A_{n-1} + B_{n-1}) - C_{n-1} = c(A + J) - \theta$$

E a equação diferença

$$C_n - C_{n-1} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = c(A + j) - \theta \tag{5.4.12}$$

Das equações (5.4.10), (5.4.11) e (5.4.12) encontramos o sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem que representa o modelo contínuo para o crescimento populacional de escargot, que como veremos a seguir, também terá como um dos autovalores, o número de ouro.

$$\begin{cases} d\theta/dt = -\theta + cJ + cA \\ dJ/dt = \theta - J \\ dA/dt = J \end{cases} \tag{5.4.13}$$

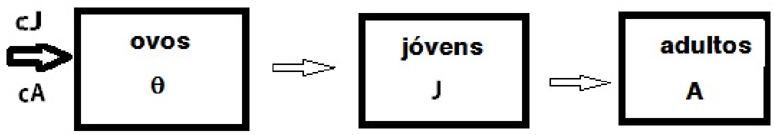

Figura 5.1: Desenho compartimental

que na forma matricial é dada por

$$x' = Ax$$

onde

$$x' = \begin{pmatrix} d\theta/dt \\ dJ/dt \\ dA/dt \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & c & c \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \theta \\ J \\ A \end{pmatrix}$$

Solução: Supondo que $x = \xi e^{rt}$ e substituindo na equação (5.4.13), teremos o sistema de equações algebricas

$$\begin{pmatrix} -1-r & c & c \\ 1 & -1-r & 0 \\ 0 & 1 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4.14}$$

que só terá solução diferente da trivial se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, ou seja

$$\begin{vmatrix} -1-r & c & c \\ 1 & -1-r & 0 \\ 0 & 1 & -r \end{vmatrix} = -r^3 - 2r^2 - (1-c)r + c = 0 \tag{5.4.15}$$

Resolvendo a equação vamos encontrar

$$r = -1$$
$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$

que são os autovalores de A.
Para encontrarmos os autovetores associados aos autovalores, devemos substituir na equação (5.4.14) os valores de r.
Para $r = -1$, vamos obter o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & c & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que forma escalonada ficará

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daí,

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 + \xi_3 = 0 \end{cases} \tag{5.4.16}$$

cujo autovetor correspondente é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.17}$$

Para $r = \dfrac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}$, temos

$$\begin{pmatrix} \dfrac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} & c & c \\ 1 & \dfrac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1-\sqrt{1+4c}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomando a matriz do sistema e escalonando

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & c & c \\ 1 & -\dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} \end{pmatrix}$$

- Troque a linha dois com a linha um

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & c & c \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} \end{pmatrix}$$

- Multiplique a linha um por $(1+\sqrt{4c+1})/2$ e adicione à linha dois

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} \end{pmatrix}$$

- Troque a linha três com a linha dois

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{4c+1}}{2}-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4c+1}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{4c+1}}{2}-\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- Multiplique a linha dois por $(1+\sqrt{4c+1})/2$ e adicione ás linhas um e três

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{4c+1}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma o sistema escalonado se tornará

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & \frac{1-\sqrt{1+4c}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com autovetor correrspondente

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.18}$$

Para $r = \dfrac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}$, temos

$$\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} & c & c \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tomando a matriz do sistema e escalonando

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4c+1}}{2}-\frac{1}{2} & c & c \\ 1 & \frac{\sqrt{4c+1}}{2}-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{4c+1}}{2} \end{pmatrix}$$

- Troque a linha dois com a linha um

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & c & c \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} \end{pmatrix}$$

- Multiplique a linha um por $(1-\sqrt{4c+1})/2$ e adicione à linha dois

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & c \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} \end{pmatrix}$$

- Troque a linha três com a linha dois

$$\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} - \dfrac{1}{2} & c \end{pmatrix}$$

- Multiplique a linha dois por $(1-\sqrt{4c+1})/2$ e adicione ás linhas um e três

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{4c+1}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dessa forma o sistema escalonado se tornará

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -c \\ 0 & 1 & \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

com autovetor correrspondente

$$\xi^{(3)} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.4.19}$$

As soluções da equação diferencial são respectivamente,

$$\xi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t) \tag{5.4.20}$$

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}t) \tag{5.4.21}$$

$$\xi^{(3)} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}t) \tag{5.4.22}$$

A solução geral desse sistema é dado pela expressão

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t) + c_2 \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}t)+$$
$$+ c_3 \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}t) \tag{5.4.23}$$

■

Esta é a solução geral da equação do crescimento populacional do escargot. Para a solução particular devemos usar as condições iniciais;

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ J(0) = 0 \\ A(0) = A_0 \end{cases}$$

ou seja,

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_0 \end{pmatrix} \tag{5.4.24}$$

Aplicando, na solução geral $t = 0$, teremos

$$x_0 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(0) + c_2 \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}0)+$$
$$+ c_3 \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_0 \end{pmatrix} \tag{5.4.25}$$

que resultará no sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \dfrac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} & \dfrac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} \\ 0 & c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.4.26}$$

Escalonando a matriz aumentada,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & A_0 \\ -1 & \dfrac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} & \dfrac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} & | & 0 \\ 0 & c & c & | & 0 \end{pmatrix}$$

vamos ter

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & A_0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \dfrac{A_0}{\sqrt{1+4c}} \\ 0 & 0 & 0 & | & -\dfrac{A_0}{\sqrt{1+4c}} \end{pmatrix}$$

Donde podemos tirar que $c_1 = A_0$, $c_2 = \frac{A_0}{\sqrt{1+4c}}$ e $c_3 = -\frac{A_0}{\sqrt{1+4c}}$.

Dessa forma a solução particular desse sistema e dada por

$$x_0 = A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t) + \frac{A_0}{\sqrt{1+4c}} \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1+\sqrt{1+4c}}{2}t) -$$

$$- \frac{A_0}{\sqrt{1+4c}} \begin{pmatrix} c \\ \frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(\frac{-1-\sqrt{1+4c}}{2}t) \tag{5.4.27}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} \theta(t) \\ J(t) \\ A(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_0\, c\, \mathrm{e}^{t\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{4\,c+1}} - \dfrac{A_0\, c\, \mathrm{e}^{-t\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{4\,c+1}} \\ \dfrac{A_0\, \mathrm{e}^{t\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\,c+1}} - A_0\, \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{A_0\, \mathrm{e}^{-t\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\,c+1}} \\ A_0\, \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{A_0\, \mathrm{e}^{t\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}-\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{4\,c+1}} - \dfrac{A_0\, \mathrm{e}^{-t\left(\frac{\sqrt{4\,c+1}}{2}+\frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{4\,c+1}} \end{pmatrix}$$

Observação:

Podemos obter também a solução do sistema de uma forma mais simples. Neste caso específico podemos reduzí-lo a um sistema de segunda ordem:

Voltemos ao sistema (5.4.13)

$$\begin{cases} d\theta/dt = -\theta + cJ + cA \\ dJ/dt = \theta - J \\ dA/dt = J \end{cases} \tag{5.4.28}$$

Da soma das duas últimas equações, temos

$$\frac{dA}{dt} + \frac{dJ}{dt} = \theta \tag{5.4.29}$$

Derivando ambos os lados da igualdade em relação a t temos

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{d^2J}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} = c(A + J) - \theta$$

Temos ainda que:

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{d^2J}{dt^2} = cA + cJ - \frac{dA}{dt} - \frac{dJ}{dt}$$

Ou seja,

$$\frac{d^2A}{dt^2} + \frac{d^2J}{dt^2} - cA - cJ + \frac{dA}{dt} + \frac{dJ}{dt} = 0$$

Considerando $Y = A + J$, obtemos a equação

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{dY}{dt} - cY = 0 \tag{5.4.30}$$

cujos autovalores são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - c \tag{5.4.31}$$

ou, seja,

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2} \tag{5.4.32}$$

Ou seja,

$$Y = K_1 \exp(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}t) + K_2 \exp(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4c}}{2}t) \tag{5.4.33}$$

Observação:

Quando resolvemos o sistema tridimensional do escargot encontramos 3 autovalores distintos e quando reduzimos a um sistema bidimensional encontramos apenas 2. Acontece que um deles, no caso $\lambda = -1$ é a soma dos outros dois, ou seja, o auto vetor proveniente de -1 é o produto dos autovetores provenientes dos outros autovalores. Isto significa que os autovalores são dependentes mas não linearmente.

Outra forma de se obter o sistema contínuo

Considerando ainda o sistema discreto

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \\ B_n = C_{n-1} \\ C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} \end{cases} \tag{5.4.34}$$

podemos tirar

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + J_n \\ J_n = \theta_{n-1} \\ \theta_n = c(A_{n-1} + CJ_{n-1}) \end{cases} \tag{5.4.35}$$

Daí

$$A_{n+1} - A_{n-1} - (A_n - A_{n-1}) = Jn = \theta_{n-1} = cA_{n-1} \tag{5.4.36}$$

Agora, fazendo as aproximações para variações contínuas, isto é

$$A_{n+1} - A_{n-1} \approx \frac{d^2A}{dt^2} \tag{5.4.37}$$

$$A_n - A_{n-1} \approx \frac{dA}{dt} \tag{5.4.38}$$

Donde podemos tirar

$$\frac{d^2A}{dt^2} - \frac{dA}{dt} - cA = 0 \tag{5.4.39}$$

que tem como autovalor o número áureo quando fazemos $c = 1$

Conclusão

O presente trabalho mostrou a despretensiosa relação entre a Sequencia de Fibonacci e o Número de Ouro, bem como suas principais propriedades.

Vimos também, o problema do crescimento populacional dos escargots, modelado na forma discreta através das equações de diferenças lineares de segunda ordem, sendo uma das soluções da equação característica, o Número de Ouro

O principal objetivo deste trabalho foi dar uma abordagem contínua, ao problema do crescimento populacional dos escargots, através das equações diferenciais lineares de segunda ordem e dos sistemas de equações diferenciais lineares, aparecendo também em sua solução, o famoso Número de Ouro.

Bibliografia

[1] BASSANEZI, R. C.; **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** 3. ed. São Paulo: Contexto, 2013.

[2] BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias - Um curso introdutório**, São Paulo: Universidade Federal do ABC, 2012.

[3] BASSANEZI, R. C. **Temas e Modelos**, Santo André: Universidade Federal do ABC, 2012.

[4] ZANH, Maurício.; **Sequência de Fibonacci e o número de Ouro**, Rio de Janeiro: Editora Ciênciacia Moderna Ltda., 2011.

[5] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 2003.

[6] LIVIO, Mario. **Razão áurea: a história do phi**. São Paulo: Record, 2006.

[7] LIMA, Elon Lages. **Análise Real, vol**. IMPA. Rio de Janeiro, 1990.

Apêndice A

Matrizes

A.1 Definições e primeiros exemplos

Definição A.1.1. *Uma matriz A consiste em um arranjo retangular de números (reais e complexos) ou elementos, arrumados em m linhas e n colunas. Isto é*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{A.1.1}$$

Dizemos que A é uma matriz $m \times n$. O elemento que está na i-ésima linha e j-ésima coluna será denotado por a_{ij}, onde o primeiro índice identifica a linha e o segundo, a coluna.

Definição A.1.2. *Chamamos a* ***transposta*** *da matriz A, a matriz A^T, obtida de A, permutando-se as linhas e colunas. Dessa forma se $A = (a_{ij})$, então $A^T = (a_{ji})$. Além disso, denotaremos também o complexo conjugado de a_{ij} por $\overline{a_{ij}}$ e a matriz obtida de A trocando-se todos os elementios pelos seus respectivos conjugados por $\overline{A}$. A matriz $\overline{A}$ é a* ***conjugada*** *de A. Consideraremos também a transposta da conjugada, a matriz $\overline{A^T}$. Chamaremos essa essa matriz de* ***Adjunta*** *de A e será denotada por A^*.*

Exemplo A.1.3. *Vamos considerar como exemplo a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1-i \\ 2+5i & -2+i \end{pmatrix}$$

Temos estão que:

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2+5i \\ 1-i & -2+i \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1+i \\ 2-5i & -2-i \end{pmatrix}, \quad A^* \begin{pmatrix} 5 & 2-5i \\ 1+i & -2-i \end{pmatrix},$$

Trataremos dois tipos especiais de matrizes:

- As matrizes **quadradas**, que são as matrizes onde o número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). Diremos simplismente matrizes quadradas de ordem n;
- As **matrizes colunas**, que são as matrizes do tipo $n \times 1$, ou seja, matrizes que possuem somente uma coluna. Chamaremos essas matrizes de **vetores (ou vetores colunas)** e as denotaremos por letras minúsculas em negrito, **x**, **y**,....

A.2 Propriedades das matrizes

1. **Igualdade.** Duas matrizes **A** e **B** $m \times n$ são ditas iguais se todos os elementos correspondentes são iguais, isto é

$$a_{ij} = b_{ij}$$

   quaisquer que sejam i e j.

2. **Matriz Nula.** O símbolo **0** será usado para denotar as matrizes ou vetores em que todos os seus elementos são nulos.

3. **Soma.** A soma de duas matrizes $m \times n$ A e B, faz-se somando elementos correspondentes:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{A.2.1}$$

   Segue da definição que a soma de matrizes é comutatita e associativa, de modo que

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C \tag{A.2.2}$$

4. **Multiplicação por um Número.** O produto de um número complexo α por uma matriz A é obtido pela multiplicação de cada elemento de A por α:

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = \alpha a_{ij} \tag{A.2.3}$$

   As propriedades distibutivas

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \tag{A.2.4}$$

   são satisfeitas por esse tipo de multiplicação.
   A matriz **negativa** de **A**, denotada por **-A**, é difinida por

$$-A = (-1)A \tag{A.2.5}$$

5. **Subtração.** Definimos a diferença **A-B** de duas matrizes $m \times n$ da forma:

$$A - B = A + (-B) \tag{A.2.6}$$

   Daí,

$$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = a_{ij} - b_{ij} \tag{A.2.7}$$

6. **Produto de Matrizes.** O produto **AB** de duas matrizes A e B só será possível se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linas da segunda matriz. Sendo $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (_{jk})_{n\times r}$. O elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna de $C = AB$ é obtido pelo somatório do produto de elementos da i-ésima lina de A pelos elementos da j-esima coluna de B Simbolicamente, temos:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \tag{A.2.8}$$

Pode-se mostrar, através de um cálculo direto, que a multiplição de matrizes é associativa e distributiva

$$(AB)C = A(BC), \qquad A(B+C) = AB + BC \tag{A.2.9}$$

Em geral o produto de matrizes não é comutativo. Para que os produtos **AB** e **BA** existam e sejam do mesmo tamanho, se faz necessário que **A** e **B** sejam quadradas e de mesma ordem. Ainda assim, os produtos são em geral diferentes

$$AB \neq BA \tag{A.2.10}$$

Exemplo A.2.1. *Para ilustrar o fato de que o produto de matrizes não é comutativo, vamos considerar as matrizes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da definição do produto de matrizes temos

$$AB = \begin{pmatrix} 2-2+4 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De forma análoga, temos que

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Como queríamos verificar, $AB \neq BA$.

7. **Multiplicação de vetores.** Sejam dois vetores **x** e **y** com n coordenadas. O produto de **xy** e dado por

$$\mathbf{xy} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} = x_i y_i \tag{A.2.11}$$

O resultado da equação (A.2.11) é um número (real ou complexo) e segue diretamente desta equação os seguintes resultados:

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}, \qquad (\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}) \tag{A.2.12}$$

8. **Matriz Identidade.** A identidade multiplicativa ou, simplimente a matriz identidade **I**, é uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são todos nulos. Dessa forma temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{A.2.13}$$

Decorre da definição de multiplicação de matrizes, o seguinte resultado

$$AI = IA = A \tag{A.2.14}$$

para qualquer matriz quadrada A. Logo, a comutatividade de matrizes é valida, quando uma delas é a matriz identidade.

9. **Matriz Inversa.** Uma matriz quadra **A** é dita **invertível** ou **não singular** se existe uma uma matriz também quadrada de mesma ordem **B** talque $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, onde **I** é a matriz identidade. Se existe tal matriz **B**, podemos mostrar que ela é unica. Ela é chamada inversa multiplicativa de **A**, ou simplismente inversa e escreve-se $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Então

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{A.2.15}$$

Matrizes que não possuem inversa, são ditas **não invertíveis** ou **singulares**.

Existem várias maneiras de se determinar a inversa $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de **A**, supondo sua existência. Uma delas envolve o uso de determinantes. A cada elemento a_{ij} de uma matriz dada, associa-se o menor complementar M_{ij}, que é o determinante da matriz obtida da matriz original, eliminando-se a lina i e a coluna j, isto é, exclui-se a linha e a coluna que contém o elemento a_{ij}. Além disso, associa-se a cada elemento a_{ij} o co-fator C_{ij} definido pela equação

$$C_{ji} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{A.2.16}$$

Se $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$,pode-se verificar que

$$b_{ij} = \frac{C_{ij}}{detA} \tag{A.2.17}$$

A desvantagem desse método da equação (A.2.17), se resume ao fato de ser ineficiênte, porém torna-se importante por determinar uma condição necessária e suficiente para a inversibilidade de A. **A** é inversível se, e somente se, $detA \neq 0$ Uma maneira mais prática de se determinar a inversa de uma matriz **A**, é através das operações elementares sobre as linhas. Existem três dessas operações:

(a) Permutar duas linhas quaisquer;

(b) Multiplicar uma linha qualquer, por um escalar diferente de zero;

(c) Substituir uma linha qualquer, pela soma desta com outra, previamente multiplicada por um escalar qualquer diferente de zero.

A transformação de uma matriz por uma sequência de operações elementares, é chamado de **redução por linhas** ou **método da eliminação de Gauss**. Qualquer matriz não singular $\mathbf{A}$, pode ser transformada numa matriz identidade $\mathbf{I}$. Podemos mostrar que se a mesma sequência de opçerações for simultaneamente também aplicada em $\mathbf{I}$, a matriz identidade $\mathbf{I}$ será transformada na matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Esse método se mostra mais vantajoso do que o método do determinante visto anteriormente, pela sua pratificidade e eficiência, bastando para tanto, aplicar a sequência de operações em ambas as matrizes ao mesmo tempo, formando a matriz almentada $\mathbf{A}|\mathbf{I}$.

Exemplo A.2.2. *Vamos encontrar a inversa da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pelo método da redução por linnhas

Solução:

(a) Primeiramente montamos a matriz almentada $\mathbf{A}|\mathbf{I}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(b) Multipliquemos a 1ª linha por -2 e 1 e somemos respectivamente às linhas dois e três, anulando dessa forma os primeiros elementos da 2ª e 3ª linha;

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(c) Multipliquemos a 2ª e 3ª linhas por $1/3$ e $1/2$ respecitivamente por tornar iaguais a 1 os elementos da diagonal principal;

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

(d) Multipliquemos a 3ª linha por -1 e somemos a 2ª linha;

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

(e) Adicionemos a 2ª linha à 1ª linha, para finalmente encontrarmos

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -7/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Temos então que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ -7/6 & 1/3 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

∎

10. **Matrizes de Funções.** Vamos algumas vezes, considerar vetores ou matrizes cujos elementos são funções de uma variável real t. Denotamos

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{A.2.18}$$

respectivamente. A matriz $A(t)$ é dita contínua em $t = t_0$ ou em um intervalo $\alpha < t < \beta$ se todos os elementos de $\mathbf{A}$ são funções contínuas de t no ponto dado ou no intervalo dado. Analogamente, $\mathbf{A(t)}$ é dita diferenciável se todos os seus elementos são siferenciáveis e sua derivada dA/dt é definida por

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right) \tag{A.2.19}$$

De forma análoga, definimos a integral de uma matriz de funções por

$$\int_a^b A(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}dt\right) \tag{A.2.20}$$

Muitas propriedades do cálculo podem ser estendidas para matrizes de funções, em particular,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}(\frac{d\mathbf{A}}{dt}) \tag{A.2.21}$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz constante

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{A.2.22}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{dA}{dt}\mathbf{B} \tag{A.2.23}$$

Apêndice B

Sistemas de Equações Lineares Algébricas; independência Linear, Autovalores e Autovetores

Reveremos nesse Apêndice alguns resultados de Álgebra Linear que são importantes na solução de sistemas de equações diferenciais lineares. Todos os resultados aque apresentados dependem de alguns fatos básicos sobre sistemas lineares de equações algébricas. Alguns são facilmente demonstráveis, outros não, como nosso objetivo é sustentar os resultados abordados no capítilo 5 sobre Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem, não daremos indicação de demonstrações em nenhum dos casos.

B.1 Sitemas Lineares de Equações Algébricas

Definição B.1.1. *Um sistema linear de equações algébricas, é um conjunto de n equações algébricas lineares simultâneas em n variáveis*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_3 \end{cases} \tag{B.1.1}$$

Podemos ainda escrever o sistema na forma matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{B.1.2}$$

onde a matriz A é uma matriz quadrada de ordem n e o vetor b são dados e as componentes de x tem que ser determinado. Quando $b = 0$ o sistema é dito homegêneo; de outro modo, é dito não-homogêneo. Quando a matriz A dos coeficientes é invertível, ou seja, quando $detA \neq 0$, então o sistema admitirar uma única solução, que poderar ser obtida, multiplican-se a equerda ambos os lados da equação

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

obetendo dessa forma

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{I}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\end{aligned}$$

Daí

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{B.1.3}$$

O sistema homogêneo $Ax = 0$ quando $b = 0$ na Equação (B.1.2), tem apenas a soluçãotrivial $x = 0$. Por outro lado, se A for não-invertível (singular), ou seja, se $detA = 0$, então a solução da equação (B.1.2) não existe ou existe, porém não é ínica. Tendo en vista que A é singular, a inversa A^{-1} não existe, de modo que a equação (B.1.3) não é mais válida.
O sistema homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{B.1.4}$$

além da solução trivial, tem uma infinidade de soluções não-nulas. Já para o sistema não homogêneo da Eq.(B.1.2), a situação é mais complicada. Esse sistema não tem solução, a menos que o vetor $\mathbf{b}$ satisfaça uma determinada condição

$$(\mathbf{b}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{B.1.5}$$

para todos os vetores $\mathbf{y}$ taisque $\mathbf{A}^{*}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{A}^{*}$ é a adjunta de $\mathbf{A}$. Se a condição (B.1.5) for stisfeita então o sistema (B.1.2) tem uma infinidade de soluções da forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \xi \tag{B.1.6}$$

onde $\mathbf{x}^{(0)}$ é qualquer solução da equação (B.1.2) ξ é qualquer solução do sistema homogêneo (B.1.4). Estes resultados são importantes para classificar as soluções dos sistemas lineares. Ja para para a resolução de um sistema em particular, é melhor em geral, utilizar o método da redução por linhas para transformar o sistema em um muito mais simples, do qual a solução (ou soluções) se existir(rem) pode(m) ser detreminadas facilmente.

Para fazermos isso de modo prático e eficiente, adicionamos o vetor $\mathbf{b}$ á matriz $\mathbf{A}$ como uma coluna adiconal, formando dessa forma, uma nova matriz, denominada **matriz aumentada**

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix} \tag{B.1.7}$$

A seguir efetuaresmos as operações elementares na matriz aumentada, de modo a transformar $\mathbf{A}$ em uma matriz triangular superior, isto é, uma matriz cujos elementos situados abaixo da diagonal principal são todos nulos. Uma vez realizado esse procedimento, fica fácil verificar se o sistema tem ou não solução, e se tiver, encontrar a solução.

Exemplo B.1.2. *Vamos resolver o sistema*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \tag{B.1.8}$$

A matriz aumentada do sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \tag{B.1.9}$$

Vamos agora realizar as operações elementares sobre essa matriz, de forma a anular os elementos abaixo da diagonal principal. Para isso, vamos realizar os seguintes passos:

1. Adicione à linha dois, (-2) vezes a linha um e à linha três (-1) vezes a linha um, obtendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 3 & | & -3 \\ 0 & 1 & 3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

2. Troque a linha dois com a linha três

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & -3 \\ 0 & 5 & 3 & | & -3 \end{pmatrix}$$

3. Adicione à linha três, a linha dois multiplicada por (-5)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & -12 & | & 12 \end{pmatrix}$$

4. Multiplique a linha três por $(-1/12)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

A matriz assim obtida, corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = -3 \\ \qquad\qquad x_3 = -1 \end{cases} \tag{B.1.10}$$

Donde tiramos que $x_3 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 1$, otendo assim

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

que a solução do sistema (B.1.8). Pudemos observar, que a solução é unica, sendo portanto a matriz $\mathbf{A}$ invertível.

B.2 Independência Linear

Definição B.2.1. *Um conjunto de k vetores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ é dito **linearmente independes** se existe um conjunto de números (complexos) $c_1, c_2 \ldots, c_k$, tais que a equação*

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_k x^{(k)} = 0 \tag{B.2.1}$$

tem solução, se $c_1 = c_2 = \ldots, = c_k = 0$. Quando a equação (B.2.1) *tem solução para $c_1, c_2, \ldots, c_k$ nem todos nulos, estão o conjunto de k vetores será chamado **linearmente dependentes**.*

Vamos considerar um conjunto com n vetores, cada um deles com n componentes. Seja $x_{ij} = x_i^{(j)}$ a i-ésima componente do vetor $\mathbf{x}^j$ e seja $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Então, a equação (B.2.1) pode ser reescrita sob a forma

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} c_1 + x_1^{(2)} c_2 + \ldots + x_1^{(n)} c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)} c_1 + x_n^{(2)} c_2 + \ldots + x_n^{(n)} c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} c_1 + x_{12} c_2 + \ldots + x_{1n} c_n \\ \vdots \\ x_{n1} c_1 + x_{n2} c_2 + \ldots + x_{nn} c_n \end{pmatrix} = \mathbf{Xc} = \mathbf{0} \tag{B.2.2}$$

Caso $\mathbf{detX} \neq \mathbf{0}$, a equação (B.2.2) terá núnica solução se $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, mas, se $\mathbf{detX} = \mathbf{0}$, existem soluções não nulas. Daí podemos concluir que o conjunto de votores $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ é **linearmente independente** se, e somente se, $\mathbf{detX} \neq \mathbf{0}$

Exemplo B.2.2. *Determine se os vetores*

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad x^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \tag{B.2.3}$$

são linearmente independentes ou linearmente dependentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles.

Para determinarmos se $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes, procuramos as constantes c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} = 0 \tag{B.2.4}$$

A equação (B.2.4) também pode ser escrita

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.2.5}$$

que será resolvida através de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 0 \\ -1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 2 & -3 & 13 & | & 0 \end{pmatrix} \tag{B.2.6}$$

1. Adicione a primeira linha á segunda linha e (-2) vezes a primeira linha à segunda linha para obter
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & 2 & -6 & | & 0 \\ 0 & -7 & 21 & | & 0 \end{pmatrix}$$

2. multiplique e segunda linha por $1/2$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & -7 & 21 & | & 0 \end{pmatrix}$$

3. Multiplique a segunda linha por 7 e adicione a linha 3
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Obtendo dessa forma o sistema equivalente

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - 4c_3 = 0 \\ \qquad\quad c_2 - 3c_3 = 0 \end{cases} \tag{B.2.7}$$

Da segunda equação do sistema (B.2.7), tiramos que $c_2 = 3c_3$ e substituindo o valor de c_2 na primeira equação do mesmo sistema, encontramos $c_1 = -2c_3$. Logo, podemos resolver o sistema em c_1, c_2 e c_3, sendo c_3 arbitrário. Escolhendo por conveniência, $c_3 = 1$, temos que $c_2 = 3$ e $c_1 = -2$ e a equação (B.2.4) se tornará

$$x^{(1)} + 3x^{(2)} - 2x^{(3)} = 0 \tag{B.2.8}$$

e os vetores dados são, portanto linearmente dependerntes.

De um modo alternativo, podemos calcular o $det(x_{ij})$, cujas colunas são as componentes de x^1, x^2 e x^3, respectivamente. Daí calculando

$$det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 13 \end{vmatrix} = 0 - 8 - 12 - 6 + 26 = 0$$

Logo, podemos concluir que $x^{(1)}, x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ são linearmente dependentes. No entanto, se ainda necessitarmos encontrar os valores de c_1, c_2 e c_3, teremos que precisar resolver a equação (B.2.7) para encontrá-los.

O conceito de dependência e independência linear visto pra vetores, pode ser estendido para um conjunto de vetores de funções $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(k)}(t)$ definidas em um intervalo $\alpha < t < \beta$.

B.3 Autovalores e Autovetores

A equação

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \tag{B.3.1}$$

pode ser vista como uma transformação linear que leva (ou transforma) um vetor dado $\mathbf{x}$ em um novo vetor $\mathbf{y}$. Vetores que levados em multiplios de si mesmo, são importantes em várias aplicações. Fazendo $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, onde λ é um fator escalar de proporcionalidade, encontraremos tais vetores através das equações

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{B.3.2}$$

ou

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{B.3.3}$$

Desta última equação, podemos depreender que ela terá solução não nula se, e somente se, λ for escolohido de modo que

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \tag{B.3.4}$$

Os valores de λ que satisfazem a Eq.(B.3.2) são chamados de **autovalores** da matriz $\mathbf{A}$ e as soluções não nulas correspondentes das Eqs. (B.3.2) e (B.3.3) obtidas atraves dos valores de λ, são chamados de **autovetores** correrspondentes associados a um determinado valor de λ.

Exemplo B.3.1. *Seja A uma matriz 2×2, vejamos como fica as equações* (B.3.3) *e* (B.3.4)

A equação (B.3.3) se tornará

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.3.5}$$

e a (B.3.4)

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = 0 \tag{B.3.6}$$

Veremos agora um exemplo ilustrado, de como encontrar os autovalores e os autovetores.

Exemplo B.3.2. *Encontre os autovalores e ou autovetores da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{B.3.7}$$

Os autovalores λ e os autovetores $\mathbf{x}$ satisfazez a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, ou seja

$$\begin{pmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.3.8}$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = 0 \tag{B.3.9}$$

Resolvendo a equação, encontraremos os valores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$
Para encontrarmos os autovetores $\mathbf{x}$, substituimos os valores de λ na equação (B.3.8) para cada valor encontrado.
Para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.3.10}$$

Escalonando a matriz, encontraremos $x_1 + x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = -x_2$. Se $x_2 = c$, então $x_1 = -c$ e o autovetor associado a $\lambda = 1$ será

$$\begin{pmatrix} -c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \neq 0 \tag{B.3.11}$$

Em geral não usaremos a constantes arbitrária c, ao encontrar os autovetores. Dessa forma escreveremos

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{B.3.12}$$

Já para $\lambda = 3$, temos

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.3.13}$$

Escalonando a matriz, encontraremos $x_1 - x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$. Se $x_2 = c$, então $x_1 = c$ e o autovetor associado a $\lambda = 3$ será

$$\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c \neq 0 \tag{B.3.14}$$

Desprezando a constante c, teremos

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{B.3.15}$$