



LUZ MARINA RAMOS QUISPE

UMA EXTENSÃO DA DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS
BASEADA NA DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA INVERSA

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

LUZ MARINA RAMOS QUISPE

UMA EXTENSÃO DA DISTRIBUIÇÃO BIRNBAUM-SAUNDERS BASEADA NA DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA INVERSA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em estatística.

Orientador: Filidor Edilson Vilca Labra

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA LUZ MARINA RAMOS QUISPE, E ORIENTADA PELO PROF. DR. FILIDOR EDILFONSO VILCA LABRA.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R147e Ramos Quispe, Luz Marina, 1985-
Uma extensão da distribuição Birnbaum-Saunders baseada na distribuição gaussiana inversa / Luz Marina Ramos Quispe. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Filidor Edilfonso Vilca Labra.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Birnbaum-Saunders, Distribuição de. 2. Distribuição gaussiana inversa. 3. Verossimilhança (Estatística). 4. Distribuições bivariadas (Estatística). I. Vilca Labra, Filidor Edilfonso, 1964-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: An extension of the Birnbaum-Saunders distribution based on the inverse gaussian distribution

Palavras-chave em inglês:

Birnbaum-Saunders distribution

Inverse gaussian distribution

Likelihood (Statistics)

Bivariate distributions (Statistics)

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestra em Estatística

Banca examinadora:

Filidor Edilfonso Vilca Labra [Orientador]

Caio Lucidius Naberezny Azevedo

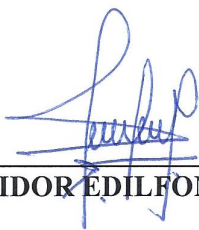
Camila Borelli Zeller

Data de defesa: 17-04-2015

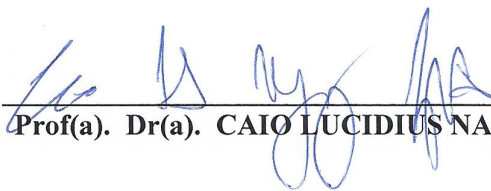
Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de abril de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). FILIDOR EDILFONSO VILCA LABRA



Prof(a). Dr(a). CAIO LUCIDIUS NABEREZNY AZEVEDO



Prof(a). Dr(a). CAMILA BORELLI ZELLER

Abstract

Several works have been done on the univariate Birnbaum-Saunders (BS) distribution and its extensions. The bivariate Birnbaum-Saunders (BS) distribution was presented only recently by Kundu et al. (2010) and some extensions have already been discussed by Vilca et al. (2014) and Kundu et al. (2013). They proposed a bivariate BS distribution with dependence structure and established several attractive properties.

This work provides extensions, univariate and bivariate, of the BS distribution. These extensions are based on the Inverse Gaussian (IG) distribution that is used as a mixing distribution in the context of scale mixtures of normal. The resulting distributions are absolutely continuous distributions and many properties of the BS distribution are preserved. Under bivariate case, the marginals and conditionals are of type univariate Birnbaum-Saunders.

For obtaining the maximum likelihood estimates (MLE) of the model parameters is developed an algorithm EM. We illustrate the obtained results with real and simulated dataset.

Keywords: Birnbaum-Saunders Distribution; Inverse Gaussian Distribution; Normal Inverse Gaussian Distribution; Bivariate Distributions; Maximum Likelihood Estimation.

Resumo

Vários trabalhos têm sido feitos sobre a distribuição Birnbaum-Saunders (BS) univariada e suas extensões. A distribuição bivariada Birnbaum-Saunders (BS) foi apresentada apenas recentemente por Kundu et al. (2010) e algumas extensões já foram discutidas por Vilca et al. (2014) e Kundu et al. (2013). Eles propuseram uma distribuição BS bivariada com estrutura de dependência e estabeleceram várias propriedades atraentes.

Este trabalho fornece extensões, univariada e bivariada, da distribuição BS. Estas extensões são baseadas na distribuição Gaussiana Inversa (IG) que é usada como uma distribuição de mistura no contexto de misturas de escala normal. As distribuições resultantes são distribuições absolutamente contínuas e muitas propriedades da distribuição BS são preservadas. Sob caso bivariado, as marginais e condicionais são do tipo Birnbaum-Saunders univariada.

Para a obtenção da estimativa de máxima verossimilhança (EMV) é desenvolvido um algoritmo EM. Ilustramos os resultados obtidos com dados reais e simulados.

Palavras-chave: Distribuição Birnbaum-Saunders; Distribuição Gaussiana Inversa; Distribuição Normal Inversa Gaussiana; Distribuições Bivariadas; Estimação de Máxima Verossimilhança.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
1 Introdução	1
1.1 A distribuição Birnbaum-Saunders	2
1.2 Trabalhos relacionados	6
1.3 Objetivos do trabalho	7
1.4 Organização do trabalho	8
2 Distribuição Birnbaum-Saunders baseada na Gaussiana Inversa	11
2.1 Família de Distribuições Misturas de Escala Normal	11
2.2 Distribuição Gaussiana Inversa	12
2.2.1 Funções de densidade	13
2.2.2 Propriedades	15
2.3 A distribuição BS baseada na distribuição IG	16
2.3.1 A distribuição Normal Inversa Gaussiana	16
2.3.2 A distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa	20
2.3.3 Propriedades	24
2.4 Método dos Momentos Modificado	26
2.5 Estimação de máxima verossimilhança: Algoritmo EM	28
2.6 Matriz de Informação Observada	30
2.7 Estudo de simulação	31
2.8 Aplicações a dados reais	34
2.8.1 Aplicação 1	35
2.8.2 Aplicação 2	36
3 Uma generalização da distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa	39
3.1 Introdução	39
3.2 A distribuição proposta	40
3.3 Gráficos da densidade	42
3.4 Propriedades	45
3.5 Distribuição de vida associada com o modelo BSIG	47

4	Distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa Bivariada	51
4.1	Distribuição Birnbaum-Saunders Bivariada	52
4.2	Distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa Bivariada	60
4.3	Propriedades da Distribuição BSIG Bivariada	75
4.4	Estimação de parâmetros	78
4.4.1	Método de momentos	78
4.4.2	Estimativa de máxima verossimilhança via algoritmo EM	78
4.5	Estudo de simulação	80
4.6	Matriz de informação observada	83
4.7	Aplicações	85
4.7.1	Aplicação 1	85
4.7.2	Aplicação 2	88
5	Considerações Finais	91
6	Anexo I	99

A meus pais: Pedro e Teresa.
A meu esposo: Enrique.
A minha filha: Camila.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pois sem ele nada teria acontecido.

Aos meus pais, Pedro e Teresa, que sempre lutaram para me-dar uma boa educação.

A meu esposo Enrique, pela ajuda, compreensão, companheirismo, carinho e total apoio que me fez alcançar este objetivo.

A minha filha Camila, que é minha motivação na minha vida.

Aos meus amigos Claudia, David, Julio, Milton, Lorena, Miguel, Mario, Dannyra, e Jaime, pela convivência e companheirismo.

Ao professor Filidor pela oportunidade de ser sua orientanda. Agradeço a confiança, a paciência, o apoio e sua amizade.

Ao professor Victor Hugo, pela confiança e pelas sugestões. Também agradeço pelo computador que me emprestou, o qual foi muito útil para escrever e desenvolver este trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Lista de Figuras

1.1	Função densidade de probabilidade da distribuição BS para diferentes valores de α e $\beta = 1$	4
1.2	Função densidade de probabilidade da distribuição BS para diferentes valores de β e $\alpha = 0.5$	4
2.1	Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de γ e $\delta = 1$	18
2.2	Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de δ e $\gamma = 0.1$	18
2.3	Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de $\eta \geq 1$	19
2.4	Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de $\eta < 1$	19
2.5	Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de α e com β , δ e γ fixos e iguais a 1.	21
2.6	Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de β e com α , δ e γ fixos e iguais a 1.	21
2.7	Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de δ e com α , β e γ fixos e iguais a 1.	22
2.8	Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de γ e com α , β e δ fixos e iguais a 1.	22
2.9	Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de η , com $\alpha = 0.2$ e $\beta = 1$	23
2.10	Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de η , com $\alpha = 1$ e $\beta = 1$	23
2.11	Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de η , com $\alpha = 1.5$ e $\beta = 1$	24
2.12	Histograma da variável densidade de mineral no osso Rádio	36
2.13	Histograma da variável densidade de mineral no osso Dominant humerus	38
3.1	Logaritmo da função densidade de probabilidade da NIG para diferentes valores de τ e com $\omega = 0$	43
3.2	Logaritmo da função densidade de probabilidade da NIG para diferentes valores de $\omega \geq 0$ e com $\tau = 5$	43

3.3	Logaritmo da função densidade de probabilidade da NIG para diferentes valores de $\omega \leq 0$ e com $\tau = 5$	44
3.4	Função densidade de probabilidade das distribuições BS e BSIG	45
4.1	Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.5$ em (a),(b) e $\rho = -0.5$ em (c),(d) considerando $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$. . .	53
4.2	Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.9$ em (a),(b) e $\rho = -0.9$ em (c),(d) considerando $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$. . .	54
4.3	Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.5$ em (a),(b) e $\rho = -0.5$ em (c),(d) considerando $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$. . .	55
4.4	Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.9$ em (a),(b) e $\rho = -0.9$ em (c),(d) considerando $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$. . .	56
4.5	Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.5$ em (a),(b) e $\rho = -0.5$ em (c),(d) considerando $\alpha = (1.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$. . .	57
4.6	Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.9$ em (a),(b) e $\rho = -0.9$ em (c),(d) considerando $\alpha = (1.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$. . .	58
4.7	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b), $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.5$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$	63
4.8	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.5$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$	64
4.9	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.9$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$	65
4.10	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.9$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$	66
4.11	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.5$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$	67
4.12	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.5$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$	68
4.13	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.9$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$	69
4.14	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.9$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$	70
4.15	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição BSIG bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.5$, $\alpha = (1.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$	71

4.16	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição <i>BSIG</i> bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.5$, $\boldsymbol{\alpha} = (1.5, 1.5)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)$	72
4.17	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição <i>BSIG</i> bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.9$, $\boldsymbol{\alpha} = (1.5, 1.5)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)$	73
4.18	Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição <i>BSIG</i> bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.9$, $\boldsymbol{\alpha} = (1.5, 1.5)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)$	74
4.19	Contorno das funções densidades estimadas para t_1 e t_2	87
4.20	Contorno das funções densidades estimadas para t_1 e t_3	89

Lista de Tabelas

2.1	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$, considerando diferentes valores de η .	28
2.2	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, considerando diferentes valores de η .	28
2.3	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta < 1$.	32
2.4	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta \geq 1$.	32
2.5	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, considerando $\eta < 1$.	33
2.6	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, considerando $\eta \geq 1$.	33
2.7	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta < 1$.	34
2.8	Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta \geq 1$.	34
2.9	Estatísticas descritivas	35
2.10	EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG	35
2.11	Intervalo de Confiança de 95% dos EMV	36
2.12	Alguns critérios de informação	36
2.13	Estatísticas descritivas	37
2.14	EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG	37
2.15	Intervalo de Confiança de 95% dos EMV	38
2.16	Alguns critérios de informação	38
4.1	Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.9$, considerando diferentes valores de η .	80
4.2	Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.9$, considerando diferentes valores de η .	81
4.3	Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.5$, considerando diferentes valores de η .	82
4.4	Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.5$, considerando diferentes valores de η .	83
4.5	EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG	86
4.6	Intervalo de Confiança de 95% dos EMV	86
4.7	Alguns critérios de informação	86
4.8	EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG	88
4.9	Intervalo de Confiança de 95% dos EMV	88

4.10	Alguns critérios de informação	88
6.1	Mineral contido no osso	99

Capítulo 1

Introdução

Um dos grandes problemas na área industrial é a ruptura ou falha de materiais. Tais falhas são ocasionadas por diversas causas e uma delas é a fadiga do material. A fadiga é uma falha estrutural que resulta quando o material é submetido a diferentes esforços dinâmicos repetidos de estresse. Entre as distribuições que são bastante usadas para descrever o tempo de vida por fadiga, encontram-se as distribuições Gamma, Gaussiana Inversa, Log-normal e Weibull, que se ajustam com grande precisão na região central da distribuição de vida. No entanto, essas distribuições não apresentam bom desempenho quando o interesse está nos percentis extremos. Motivados por estes problemas de falha de materiais, Birnbaum e Saunders (1969a) derivaram uma nova família de distribuições de vida que modela o tempo de vida de materiais e equipamentos submetidos a cargas dinâmicas. A seguir apresentamos brevemente como a distribuição Birnbaum-Saunders (BS) foi derivada.

Considere um material que é sujeito a um padrão cíclico de tensão e força. A falha do material ocorre devido ao desenvolvimento e ao crescimento de uma rachadura dominante dentro do material. Um ciclo é definido como m oscilações e cada aplicação da i -ésima oscilação em um ciclo resulta em uma extensão aleatória da rachadura X_i . A distribuição desta variável aleatória depende somente da rachadura atual causada pela oscilação de carga neste ciclo. A extensão da rachadura devido ao j -ésimo ciclo é dada por

$$Y_j = \sum_{i=1}^m X_i$$

onde Y_j é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída com média μ e variância σ^2 , para todo $j = 1, 2, \dots$. Assim, a extensão total da rachadura após z ciclos é dada pela variável aleatória

$$W_z = \sum_{j=1}^z Y_j$$

com função de distribuição acumulada (fda) dada por

$$H_z(w) = P(W_z \leq w), \quad z = 1, 2, \dots$$

Seja N o número de ciclos requeridos até que seja observada a falha, onde tal falha ocorre quando

o comprimento da rachadura dominante excede o comprimento crítico w , assim a função de distribuição da variável aleatória N é dada por

$$P(N \leq z) = P\left(\sum_{j=1}^z Y_j > w\right) = 1 - H_z(w).$$

Supondo que os Y_j 's são independentes e identicamente distribuídas, a função de distribuição de N pode ser expressa aproximadamente usando o Teorema Central do Limite, isto é,

$$\begin{aligned} P(N \leq z) &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^z \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{z}} \leq \frac{w - z\mu}{\sigma\sqrt{z}}\right) \\ &= 1 - P\left(\sum_{j=1}^z \frac{Y_j - \mu}{\sigma\sqrt{z}} \leq \frac{w}{\sigma\sqrt{z}} - \frac{\mu\sqrt{z}}{\sigma}\right) \\ &\cong 1 - \Phi\left(\frac{w}{\sigma\sqrt{z}} - \frac{\mu\sqrt{z}}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\mu\sqrt{z}}{\sigma} - \frac{w}{\sigma\sqrt{z}}\right), \end{aligned}$$

onde $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição acumulada da normal padrão.

Segundo Birnbaum e Saunders (1969a), se z é substituído por uma variável real não negativa t , a variável T é a extensão continua da variável aleatória discreta N . Assim, T é o tempo total até a ocorrência da falha. Se definirmos $\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{\mu w}}$ e $\beta = \frac{w}{\mu}$, temos que a fda de T é dada por

$$F_T(t) = P(T \leq t) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right), \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (1.0.1)$$

1.1 A distribuição Birnbaum-Saunders

De acordo com Birnbaum e Saunders (1969a), o tempo total T até que ocorra uma falha tem função de distribuição acumulada (fda) dada por (1.0.1). Dizemos que T segue uma distribuição Birnbaum-Saunders (BS) com parâmetros α e β e é usualmente denotada por $T \sim BS(\alpha, \beta)$, onde α e β são; respectivamente, os parâmetros de forma e escala. De (1.0.1), podemos obter facilmente a função densidade de probabilidade (fdp) de T dada por

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right]\right) \frac{t^{-3/2}(t + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad t > 0, \\ &= \phi(a_t(\alpha, \beta))A_t(\alpha, \beta), \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

onde $\phi(\cdot)$ é a fdp da distribuição $N(0, 1)$,

$$a_t(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right) \quad \text{e} \quad A_t(\alpha, \beta) = \frac{d}{dt}a_t(\alpha, \beta). \quad (1.1.2)$$

Além disso, de (1.0.1) vamos ter que a função de distribuição acumulada (fda) $F_T(t)$ pode ser escrita como

$$F_T(t) = \Phi(a_t(\alpha, \beta)), \quad t > 0. \quad (1.1.3)$$

Devido à estreita relação que T tem com a distribuição normal, uma propriedade importante na construção dessa distribuição é representada pela relação

$$Z = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right) \sim N(0, 1). \quad (1.1.4)$$

Muitas das propriedades da distribuição BS são derivadas baseando-se na relação em (1.1.4), como por exemplo, os momentos da distribuição BS, e conseqüentemente a estimação via métodos dos momentos. Além disso, a variável aleatória T , que segue uma distribuição BS, pode ser representada em termos da distribuição normal através da relação

$$T = \frac{\beta}{4} \left(\alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4} \right)^2, \quad (1.1.5)$$

onde $Z \sim N(0, 1)$.

O parâmetro α é um parâmetro de forma, à medida que α tende a zero, a distribuição BS tende para a distribuição normal. O parâmetro β é um parâmetro de escala, ou seja, $T/\beta \sim BS(\alpha, 1)$. Este parâmetro β corresponde à mediana da distribuição, pois $F_T(\beta) = \Phi(0) = 1/2$.

A média e a variância de T são, respectivamente,

$$\mathbb{E}[T] = \beta \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} \right] \quad \text{e} \quad \text{Var}[T] = \beta^2 \alpha^2 \left[\frac{5}{4} \alpha^2 + 1 \right].$$

Pode-se mostrar que se $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então:

i) $aT \sim BS(\alpha, a\beta)$, para toda constante positiva a , isto é, a distribuição BS possui a propriedade de ser fechada sob escala;

ii) $T^{-1} \sim BS(\alpha, \beta^{-1})$, isto é, a distribuição BS possui a propriedade de ser fechada sob reciprocidade.

Para mais detalhes, veja Saunders(1974). Da propriedade ii), segue

$$\mathbb{E}[T^{-1}] = \beta^{-1} \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} \right] \quad \text{e} \quad \text{Var}[T^{-1}] = \alpha^2 \beta^{-2} \left[1 + \frac{5}{4} \alpha^2 \right].$$

Na Figura 1.1, apresentamos a fdp da distribuição BS, para alguns valores de α e considerando $\beta = 1$. Note que para valores de α grande, a distribuição BS torna-se assimétrica; e para valores de α menores que um, a distribuição BS se torna mais simétrica em torno de $\beta = 1$. Já na Figura 1.2, temos a fdp da distribuição BS, para alguns valores de β e considerando $\alpha = 0.5$.

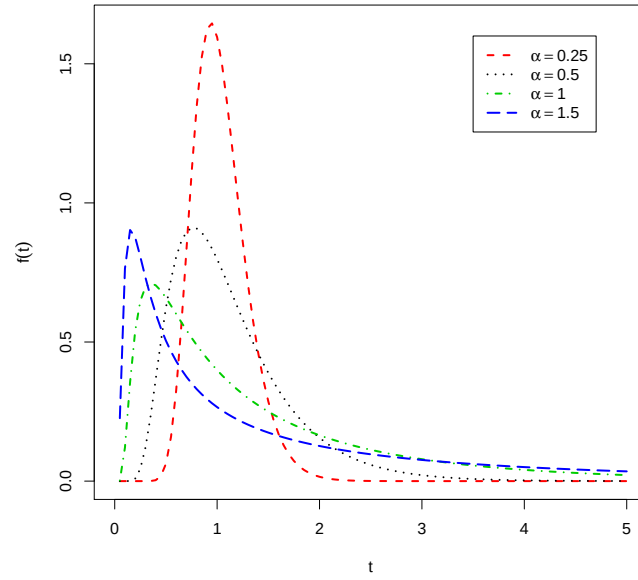


Figura 1.1: Função densidade de probabilidade da distribuição BS para diferentes valores de α e $\beta = 1$.

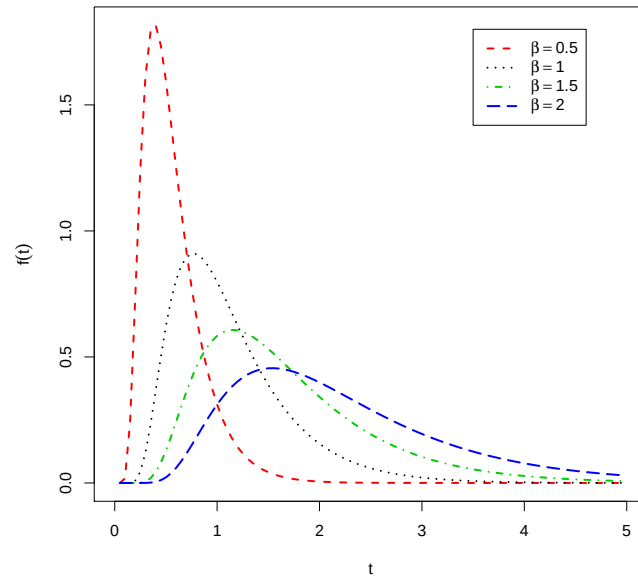


Figura 1.2: Função densidade de probabilidade da distribuição BS para diferentes valores de β e $\alpha = 0.5$.

Seja $T_1, \dots, T_n$ uma amostra aleatória de n observações independentes proveniente da distribuição $T \sim BS(\alpha, \beta)$, com fdp dada em (1.1.1). O logaritmo da função de verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$, a menos de uma constante, pode ser escrito como

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -n \log(\alpha\beta) + \sum_{i=1}^n \log \left[\left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t_i} \right)^{\frac{3}{2}} \right] - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right).$$

A matriz de informação observada é dada por

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) \\ J_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) & J_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix},$$

em que

$$J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} + \frac{3n}{\alpha^4} \left(\frac{r}{\beta} + \frac{\beta}{s} - 2 \right),$$

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\theta}) = J_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{n}{\alpha^3} \left(-\frac{r}{\beta^2} + \frac{1}{s} \right)$$

e

$$J_{\beta\beta}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\beta^2} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{2K'(\beta)}{K^2(\beta)} \right) + \frac{n}{\alpha^2} \frac{r}{\beta^3},$$

onde r, s e $K(\beta)$ são dados abaixo

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad s = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^{-1} \right]^{-1}, \quad K(\beta) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1} \right]^{-1} \quad \text{e} \quad K'(\beta) = \partial K(\beta) / \partial \beta.$$

Calculando a esperança da matriz $J(\boldsymbol{\theta})$, obtemos a matriz de informação de Fisher $I_F(\boldsymbol{\theta})$ dada por

$$I_F(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{0,25 + \alpha^{-2} + I(\alpha)}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

onde

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \left\{ [1 + g(\alpha x)]^{-1} - 0,5 \right\}^2 d\Phi(x), \quad \text{com} \quad g(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + y \left(1 + \frac{y^2}{4} \right)^{1/2}.$$

Observemos que os parâmetros α e β são ortogonais.

As estimativas de máxima verossimilhança são obtidas a partir da solução das equações $\partial l(\boldsymbol{\theta}) / \partial \alpha = 0$ e $\partial l(\boldsymbol{\theta}) / \partial \beta = 0$. A estimativa de máxima verossimilhança para β é a raiz positiva da equação não-linear

$$\beta^2 - \beta[2r + K(\beta)] + r[s + K(\beta)] = 0. \quad (1.1.6)$$

Uma vez obtida a estimativa de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ para β , podemos obter a estimativa de máxima verossimilhança para α , dada por

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{r}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{s} - 2 \right]^{1/2}.$$

Os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ têm distribuição assintótica normal bivariada, como foi mostrado por Engelhardt et. al. (1981):

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} - \alpha \\ \hat{\beta} - \beta \end{pmatrix} \rightarrow^D N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{0,25 + \alpha^{-2} + I(\alpha)} \end{pmatrix} \right]. \quad (1.1.7)$$

1.2 Trabalhos relacionados

A distribuição BS surgiu no contexto de engenharia de materiais, mas a sua aplicabilidade tem sido estendida para outros campos da engenharia. Além disso, os argumentos teóricos no processo de construção da distribuição BS, que permite descrever processos de degradação acumulativa, tem transformado a distribuição BS num modelo que pode ser aplicado em outras áreas, como por exemplo, em ciências da saúde, na área ambiental, florestal, em demográficas, na área atuarial e financeira, entre outras. Todos estes aspectos mencionados têm permitido considerar a distribuição BS como um modelo de probabilidade, em vez de um modelo considerado apenas para descrever tempos de vida.

Há vários estudos referentes a distribuição BS. Por exemplo, Birnbaum e Saunders (1969b) obtiveram os estimadores de máxima verossimilhança para α e β . Mann et al. (1974) mostraram que a distribuição BS é unimodal. Engelhardt et al. (1981) propuseram intervalos de confiança e testes de hipóteses para os parâmetros da distribuição BS considerando um deles como parâmetro de perturbação desconhecido. Desmond (1985) derivou (1.0.1) tendo por base um modelo biológico. Rieck e Nedelman (1991) propuseram um modelo log-linear para a distribuição BS e desenvolveram métodos de estimação. Achcar (1993) desenvolveu procedimentos de estimação bayesiana para os parâmetros de (1.0.1) usando aproximações para as distribuições posteriores marginais de α e β . Lu e Chang (1997) utilizaram métodos bootstrap para construir intervalos de predição para a distribuição BS. Dupuis e Mills (1998) propuseram métodos robustos de estimação dos parâmetros da distribuição BS. Rieck (1999) derivou a função geradora de momentos para a distribuição Senh-normal que pode ser usada para obter momentos de ordem inteira ou fracionária da distribuição BS. Galea et al. (2004) fizeram uma análise de diagnostico no modelo log-Birnbaum-Saunders.

Algumas generalizações e aplicações da distribuição BS têm sido propostas em diversas direções. Os estudos foram considerados introduzindo novos parâmetros com o intuito de obter modelos mais robustos e mais flexíveis para serem utilizados em problemas reais. Por exemplo, Owen e Padgett (1999) desenvolveram a distribuição BS de três parâmetros. Diaz e Leiva (2005) generalizam a distribuição BS baseada numa classe de distribuições de contornos elípticos que inclui as distribuições Cauchy, Laplace, Logística, Normal e t-Student com v graus de liberdade. Vilca e Leiva (2006) baseados em argumentos semelhantes aos empregados por Diaz e Leiva (2005)

obtiveram uma maior generalização ao desenvolver a distribuição BS sob a classe das distribuições Skew-elíptica que tem a propriedade de serem mais flexíveis na curtose e assimetria. Xie e Wei (2007) apresentaram várias medidas de diagnósticos para o modelo de regressão Log-BS. Ahmed et al. (2008) apresentaram uma reparametrização para a distribuição BS. Leiva et al. (2008b) apresentaram uma análise baseada na função risco da distribuição BS generalizada. Sanhueza et al. (2008) realizaram um desenvolvimento teórico, incluindo distribuições relacionadas, análise de vida e análise de forma para a BS generalizada. Leiva et al. (2008a) demonstraram que a distribuição BS generalizada é um modelo útil para descrever dados de ciências ambientais. Leiva et al. (2008c) desenvolveram geradores de números aleatórios para a distribuição BS generalizada. Barros et al. (2009) desenvolveram o pacote gbs para o software R, útil para analisar dados a partir de modelos baseados na distribuição BS generalizada. Vários trabalhos tem sido feitos sobre a distribuição BS e suas extensões. Estas extensões exploram a relação das distribuições BS e normal. Ou seja, com a finalidade de obter distribuições mais flexíveis a dados com caudas pesadas, ao invés de considerar a distribuição normal podemos considerar extensões simétricas e assimétricas da distribuição normal. Uma família importante de distribuições deste tipo foi proposta por Balakrishnan et al. (2009). Eles consideram a distribuição simétrica mistura de escala normal (SMN) ao invés da distribuição normal, obtendo assim uma família de distribuições simétricas tipo Birnbaum-Saunders. Casos particulares destas são estudadas neste trabalho.

Outra natural extensão, a versão bivariada da distribuição Birnbaum-Saunders foi introduzida por Kundu et al. (2010). Nesse artigo, podemos encontrar algumas propriedades da distribuição BS bivariada, tais como a função densidade conjunta, as densidades marginais e condicionais, densidade de transformações, e algoritmo para gerar variáveis aleatórias bivariadas. Além disso um estudo de inferência é feito, e discutido estimadores de máxima verossimilhança e estimadores de momentos dos parâmetros. Uma versão multivariada da distribuição Birnbaum-Saunders, baseada na família de distribuições elípticas foi apresentada por Kundu et al. (2013). Como um complemento a Kundu et al. (2013), recentemente, Vilca et al. (2014b) apresentaram uma extensão da distribuição BS bivariada baseada sob a classe de distribuições misturas de escala normal, propriedades e inferência relacionada tem sido estudado. Uma outra distribuição, relacionada com a distribuição BS bivariada, foi considerada por Vilca et al. (2014a). Os autores consideraram a distribuição Birnbaum-Saunders baseada sobre distribuições Senh-elípticas, que são uma generalização da conhecida distribuição Senh-normal. Propriedades, inferência e regressão foram estudadas.

1.3 Objetivos do trabalho

Os principais objetivos deste trabalho são apresentar extensões univariada e bivariada da distribuição Birnbaum-Saunders (BS). Estudamos algumas propriedades das distribuições propostas. Além disso, estudamos alguns aspectos de estimação, baseado no método dos momentos e de máxima verossimilhança. Os objetivos específicos podem ser resumidos como segue:

- 1 Descrever a extensão univariada da distribuição Birnbaum-Saunders (BS) baseada na distribuição Gaussiana Inversa, que é usada como distribuição de mistura no contexto das distribuições misturas de escala normal. A estimação de máxima verossimilhança é baseada no

algoritmo EM. Exemplos numéricos, baseados em dados reais e simulados, são apresentados para ilustrar a metodologia.

- 2 Descrever a extensão bivariada da distribuição Birnbaum Saunders (BS) baseada na distribuição Gaussiana Inversa. Esta extensão representa uma extensão dos resultados descritos no Objetivo 1. A estimação de máxima verossimilhança é baseada no algoritmo EM. Exemplos numéricos, baseados em dados reais e simulados, são apresentados para ilustrar a metodologia.

1.4 Organização do trabalho

O resto deste trabalho é organizado como segue

No Capítulo 2, estudamos a distribuição Birnbaum-Saunders Gaussiana Inversa (BSIG). Inicialmente introduzimos a família de distribuições misturas de escala normal, na Seção 2.1. Na próxima seção, apresentamos a distribuição Gaussiana Inversa (IG) juntamente com algumas de suas propriedades. Um caso particular da família de misturas de escala normal, de especial interesse neste trabalho, é a distribuição Normal Inversa Gaussiana (NIG), a qual é apresentada na Seção 2.3. Também nesta seção é definida a distribuição principal que pretendemos estudar, que é a distribuição Birnbaum-Saunders Gaussiana Inversa (BSIG). A função densidade desta distribuição, gráficos desta, e algumas de suas propriedades são apresentadas, em particular aquelas que são comuns a esta distribuição e a distribuição BS clássica. Métodos de estimação para o modelo BSIG são discutidos, na Seção 2.4, os estimadores de momentos modificado (MM) e na Seção 2.5 estimadores de máxima verossimilhança (EMV). Além disso, a matriz de informação observada é apresentada na Seção 2.6. Um estudo de simulação é feito para ilustrar os métodos de estimação estudados para o modelo BSIG, os resultados são analisados na Seção 2.7. Finalmente, na Seção 2.8, analisamos um conjunto de dados reais previamente estudado na literatura. Ajustamos a este conjunto de dados os modelos BS e BSIG, e comparamos os resultados obtidos.

No Capítulo 3, apresentamos uma versão assimétrica da distribuição BSIG estudada no Capítulo 2. Esta distribuição pode ser considerada uma extensão da distribuição BSIG estudada no Capítulo 2. A função densidade desta distribuição é apresentada na Seção 3.2. Os gráficos da densidade para distintos valores dos parâmetros são apresentados na Seção 3.3. Algumas propriedades, tais como propriedades de reciprocidade, distribuições limite, cálculo dos percentis e cálculo dos momentos, são estudados na Seção 3.4. Adicionais propriedades sobre confiabilidade são apresentadas na Seção 3.5.

No Capítulo 4, estudamos as versões bivariadas das distribuições BS e BSIG. Na Seção 4.1 é apresentada a distribuição BS bivariada juntamente com função densidade, gráficos, contornos, e algumas de suas propriedades. A versão bivariada da distribuição Normal Inversa Gaussiana é apresentada na Seção 4.2. Logo, na Seção 4.3 é apresentada a distribuição de interesse, a distribuição BSIG bivariada. Propriedades dessa distribuição são análogas as propriedades da distribuição BS bivariada, e são apresentadas e provadas na Seção 4.4. Também estudamos estimação de parâmetros, pelos métodos de momentos modificado (MM) e máxima verossimilhança (EMV), na Seção 4.5. A matriz de informação observada é calculada na Seção 4.6. Estudos de simulação são feitos na Seção 4.7 para avaliar a performance dos métodos de estimação estudados. Finalmente,

na Seção 4.8, fornecemos um exemplo ilustrativo que mostra a utilidade do modelo BSIG bivariado para analisar um conjunto de dados reais previamente analisado na literatura. Os modelos bivariados BS e BSIG são ajustados aos dados e os resultados obtidos são comparados.

Capítulo 2

Distribuição Birnbaum-Saunders baseada na Gaussiana Inversa

Neste capítulo apresentamos um estudo da distribuição de tempos de vida Birnbaum-Saunders (Birnbaum e Saunders, 1969a,b) baseada na família de distribuições misturas de escala normal, onde a distribuição de mistura é a distribuição Gaussiana Inversa (IG). O modelo resultante é um tipo de distribuição de tempos de vida Birnbaum-Saunders (BS), que representa uma extensão robusta da distribuição BS clássica. Baseado nesta proposta de distribuição, vamos reproduzir as propriedades da distribuição BS clássica e apresentar um estudo de estimação dos parâmetros baseado no método dos momentos e de máxima verossimilhança.

2.1 Família de Distribuições Misturas de Escala Normal

Começamos definindo a classe simétrica de distribuições misturas de escala normal (MSN). A classe de distribuições MSN é atrativa devido ao fato que inclui as distribuições normal, t-Student, slash, normal contaminada, entre outras. Todas elas com caudas mais ou menos pesadas que a distribuição normal.

Dizemos que uma variável aleatória Z segue uma distribuição MSN com parâmetros de localização $\mu \in \mathbb{R}$, parâmetro de dispersão $\sigma > 0$ e parâmetro adicional $\boldsymbol{\nu}$, se sua função densidade de probabilidade (fdp) é dada por

$$\phi_{\text{MSN}}(z) = \int_0^\infty \phi(z; \mu, \kappa(u) \sigma^2) dH(u, \boldsymbol{\nu}), \quad (2.1.1)$$

onde $H(\cdot, \boldsymbol{\nu})$ é a fda da v.a. positiva U e $\kappa(\cdot)$ é uma função positiva de U . A distribuição acima será denotada por $Z \sim \text{MSN}(\mu, \sigma^2; H)$. Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, obtemos a distribuição MSN padrão, e neste caso, usamos a notação $Z \sim \text{MSN}(0, 1; H)$. Quando $\kappa(U) = 1$ com probabilidade 1, obtemos a distribuição normal. Mais informações sobre esta distribuição, podem ser encontradas em Andrews e Mallows (1974), Dempster et al. (1980) e Lange e Sinsheimer (1993).

A representação estocástica de $Z \sim \text{MSN}(\mu, \sigma^2; H)$ é dada por

$$Z = \mu + [\kappa(U)]^{\frac{1}{2}} Z_0, \quad (2.1.2)$$

onde $Z_0 \sim N(0, \sigma^2)$ e U é uma variável aleatória positiva independente de Z_0 . A representação estocástica pode ser usada para obter a estimativa de máxima verossimilhança (EMV) via o algoritmo EM. Alguns exemplos de distribuições mistura de escala normal são descritos a seguir (Lange e Sinsheimer, 1993):

- *Distribuição t-Student com $\nu > 0$ graus de liberdade, $t(\mu, \sigma^2; \nu)$.*

Neste caso, $U \sim \text{Gamma}(\nu/2, \nu/2)$; isto é, $h(u; \nu) = (\frac{\nu}{2})^{\frac{\nu}{2}} \frac{u^{\frac{\nu}{2}-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \exp(-\frac{\nu}{2}u) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(u)$ (veja Lange et. al., 1989). Poderíamos escrever

$$f(z) = t_1(z; \mu, \sigma, \nu), \quad z \in \mathbb{R}, \quad (2.1.3)$$

onde $t_1(\cdot; \cdot)$ é a fdp da distribuição t-student.

- *Distribuição Slash, $SL(\mu, \sigma^2; \nu)$, com parâmetro de forma $\nu > 0$.*

Neste caso, $U \sim \text{Beta}(\nu, 1)$; isto é, a fdp é dada por $h(u; \nu) = \nu u^{\nu-1} \mathbb{I}_{(0,1)}(u)$. Assim, temos que

$$f(z) = \nu \int_0^1 u^{\nu-1} \phi(z; \mu, \frac{\sigma^2}{u}), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.1.4)$$

- *Distribuição Normal contaminada, $CN(\mu, \sigma^2; \nu, \gamma)$, $0 \leq \nu \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$, (Little, 1988; Yamaguchi, 1990).* A função de probabilidade de U é dada por $h(u; \boldsymbol{\nu}) = \nu \mathbb{I}_{\{\gamma\}}(u) + (1 - \nu) \mathbb{I}_{\{1\}}(u)$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu, \gamma)^\top$, onde a notação $\mathbb{I}_A$ é a função indicadora do conjunto A. Assim, a fdp de Z é dada por

$$f(z) = \nu \phi\left(z; \mu, \frac{\sigma^2}{\gamma}\right) + (1 - \nu) \phi\left(z; \mu, \sigma^2\right). \quad (2.1.5)$$

2.2 Distribuição Gaussiana Inversa

A distribuição Gaussiana Inversa foi apresentada pela primeira vez por Schrodinger (1915), quando este obteve a função de densidade do tempo da primeira passagem em Movimento Browniano (“Brownian Motion”) com tendência positiva. Chhikara e Folks (1977) foram os pioneiros no uso do modelo Gaussiano Inverso como uma distribuição de tempo de vida. Bhattacharyya e Fries (1982) propuseram que a distribuição Gaussiana Inversa podia ser usada para modelar tempos de falha por fadiga.

Esta distribuição foi estudada posteriormente por Tweedie(1956) que propôs o nome de Gaussiana Inversa pela relação que existe entre as funções geratrizes de cumulantes do tempo para percorrer uma unidade de distância e da distância percorrida por uma unidade num Movimento Browniano com tendência positiva.

Na literatura russa, esta distribuição também é conhecida como distribuição de Wald, pois Wald (1947) obteve a mesma densidade como limite da distribuição do tamanho da amostra no teste da razão de verossimilhança sequencial.

O primeiro estudo detalhado da distribuição Gaussiana Inversa foi apresentado por Tweedie (1957) Tweedie et al. (1957), onde se estabelece muitas propriedades estatísticas importantes.

Chhikara e Folks (1977) realizam uma revisão sobre essa distribuição ao apresentar suas principais propriedades e aplicações. Um estudo mais completo pode ser encontrado em Chhikara e Folks (1989).

A família paramétrica de distribuições Gaussiana Inversa é uma alternativa para modelar tempos de falha, assim como Weibull, Lognormal, Gama, etc., que são distribuições utilizadas comumente em Medicina e Engenharia.

2.2.1 Funções de densidade

De acordo com Tweedie (1957), uma variável aleatória contínua U tem uma distribuição Gaussiana Inversa com dois parâmetros reais positivos, se tem função de densidade escrita em qualquer uma das seguintes formas:

$$f_1(u; \gamma, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi u^3} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\gamma \lambda u + \lambda(2\gamma)^{1/2} - \frac{\lambda}{2u} \right\}, \quad (2.2.1)$$

$$f_2(u; \mu, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi u^3} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\lambda(u - \mu)^2}{2\mu^2 u} \right\}, \quad (2.2.2)$$

$$f_3(u; \mu, \psi) = \left(\frac{\mu\psi}{2\pi u^3} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\psi u}{2\mu} + \psi - \frac{\mu\psi}{2u} \right\}, \quad (2.2.3)$$

$$f_4(u; \psi, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi u^3} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\psi^2 u}{2\lambda} + \psi - \frac{\lambda}{2u} \right\}, \quad (2.2.4)$$

$$f_5(u; \mu, \nu) = (2\pi u^3 \nu)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(u - \mu)^2}{2\nu \mu^2 u} \right\}, \quad (2.2.5)$$

em que $u > 0$, e os valores $\gamma, \lambda, \mu, \psi$ satisfazem as relações

$$(2\gamma)^{-1/2} = \mu = \frac{\lambda}{\psi}.$$

As funções de densidades dadas em (2.2.2)-(2.2.5) satisfazem as seguintes relações

$$f_2(u; \mu, \lambda) = \mu^{-1} f_3\left(\frac{u}{\mu}; 1, \psi\right) = \lambda^{-1} f_4\left(\frac{u}{\lambda}; \psi, 1\right) \text{ e } f_5(u; \mu, \nu) = f_2(u; \mu, \nu^{-1}).$$

Cada função é utilizada para propósitos específicos na teoria de movimento browniano. Nota-se na função f_4 , que a forma da distribuição depende de ψ e λ . Temos que ψ e λ são os parâmetros de forma e escala, respectivamente.

Para o desenvolvimento deste trabalho, será considerada a seguinte densidade

$$h(u; \delta, \gamma) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \exp(\delta\gamma) u^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{u} + \gamma^2 u \right) \right\}, \quad u > 0. \quad (2.2.6)$$

Assim, dizemos que U segue uma distribuição Gaussiana Inversa com parâmetros δ e γ positivos, com densidade dada por (2.2.6). Usaremos a seguinte notação $U \sim IG(\delta, \gamma)$.

A expressão em (2.2.6) é obtida de uma classe mais geral de distribuições de variáveis aleatórias positivas conhecida na literatura como distribuição Gaussiana Inversa Generalizada (GIG), detalhes dessa distribuição podem ser encontrados em Jorgensen (1982). Dizemos que uma variável aleatória positiva U tem uma distribuição GIG com parâmetros λ , δ e γ , se sua densidade é dada por

$$h_{gig}(u; \lambda, \delta, \gamma) = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^\lambda \frac{1}{2K_\lambda(\gamma\delta)} u^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\delta^2 u^{-1} + \gamma^2 u)\right\}, \quad u > 0, \quad (2.2.7)$$

onde $-\infty < \lambda < \infty$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ e $K_\lambda(\cdot)$ é a função de Bessel modificada do terceiro tipo com índice λ . Para esta distribuição usamos a notação $U \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$ e a dependência dos parâmetros é a seguinte:

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0, \gamma > 0, \text{ se } \lambda > 0; \\ \delta &> 0, \gamma > 0, \text{ se } \lambda = 0; \\ \delta &> 0, \gamma \geq 0, \text{ se } \lambda < 0. \end{aligned}$$

Quando $\delta = 0$, $\gamma > 0$ e $\lambda > 0$, a fdp em (2.2.7) se reduz a fdp de uma distribuição Gama.

Quando $\delta > 0$, $\gamma = 0$ e $\lambda < 0$, a fdp em (2.2.7) se reduz a fdp de uma distribuição Gama Inversa.

Quando $\delta > 0$, $\gamma > 0$ e $\lambda = -1/2$, a fdp em (2.2.7) se reduz a fdp de uma distribuição Gaussiana Inversa.

Teorema 2.2.1. *Se $U \sim GIG(\lambda, \delta, \gamma)$, então os momentos de ordem r tem a seguinte expressão*

$$v_r = \mathbb{E}[U^r] = \frac{K_{r+\lambda}(\gamma\delta)}{K_\lambda(\gamma\delta)} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^r, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (2.2.8)$$

Em particular, os momentos de ordem r para $U \sim IG(\delta, \gamma)$ podem ser obtidos do Teorema anterior substituindo $\lambda = -1/2$.

$$v_r = \mathbb{E}[U^r] = \frac{K_{r-1/2}(\gamma\delta)}{K_{-1/2}(\gamma\delta)} \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^r, \quad r \in \mathbb{R}. \quad (2.2.9)$$

A seguir, apresentamos a função de Bessel modificada do terceiro tipo e algumas de suas propriedades que serão úteis no decorrer do trabalho. A função Bessel $K_\lambda(\cdot)$ é dada por

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\lambda-1} \exp\left\{-\frac{x}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right)\right\} dy, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2.10)$$

- $K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x)$;
- $K_{\lambda+1}(x) = \frac{2}{x} K_\lambda(x) + K_{\lambda-1}(x)$;
- $K'_{\lambda-1}(x) = -\frac{1}{2}(K_{\lambda-1}(x) + K_{\lambda+1}(x))$;

- $K_{r+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \sum_{i=1}^r \frac{(r+1)!}{(r-i)!i!} (2x)^{-i} \right]$, se $\lambda = r + 1/2$ e $r = 0, 1, 2, \dots$

Em casos limites quando $x \rightarrow 0$, tem-se

- $K_\lambda(x) \simeq \frac{1}{2}\Gamma(\lambda) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}$, se $\lambda \geq 0$;
- $K_\lambda(x) \simeq \frac{1}{2}\Gamma(-\lambda) \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$, se $\lambda < 0$;
- $K_0(x) \simeq -\ln(x)$.

No caso em que $x \rightarrow \infty$, tem-se

- $K_\lambda(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$.

2.2.2 Propriedades

A seguir, vamos apresentar algumas propriedades da distribuição Gaussiana Inversa, que serão úteis no decorrer do trabalho. A prova desses resultados podem ser encontradas nos livros de Johnson e Kotz (1970) e também em Chhikara e Folks (1989).

Teorema 2.2.2. *Seja $U \sim IG(\delta, \gamma)$. Então,*

(i) *A média é*

$$\mathbb{E}(U) = \frac{\delta}{\gamma}; \quad (2.2.11)$$

(ii) *A variância é*

$$Var(U) = \frac{\delta}{\gamma^3}; \quad (2.2.12)$$

(iii) *A moda é*

$$Mo(U) = -\frac{3}{2\gamma^2} + \frac{\delta}{\gamma} \left(1 + \frac{9}{4} \frac{1}{(\gamma\delta)^2} \right)^{1/2}. \quad (2.2.13)$$

A função de distribuição acumulada de U pode ser representada em termos da distribuição acumulada da normal padrão. Especificamente, se $U \sim IG(\delta, \gamma)$, então a fda de U pode ser escrita como

$$F(u; \gamma, \delta) = \Phi \left\{ \left(\frac{u}{\delta^2} \right)^{-1/2} \left(\frac{u\gamma - \delta}{\delta} \right) \right\} + \exp \{2\gamma\delta\} \Phi \left\{ - \left(\frac{1}{\gamma\delta} \right)^{-1/2} \left(\frac{u\gamma + \delta}{\delta} \right) \right\}, \quad (2.2.14)$$

em que $u > 0$ e $\Phi(\cdot)$ é a fda da distribuição normal padrão.

A expressão da fda $F(\cdot)$ em função da distribuição acumulada da normal padrão, dada em (2.2.14), foi deduzida por Shuster (1968) e Chhikara e Folks (1974). A seguir, apresentamos outras propriedades da distribuição Gaussiana Inversa

Teorema 2.2.3. (i) Seja $U \sim IG(\delta, \gamma)$. Dessa forma

$$\frac{\gamma^2(U - \frac{\delta}{\gamma})^2}{U} \sim \chi^2_{(1)}; \quad (2.2.15)$$

(ii) Sejam $U \sim IG(\delta, \gamma)$ e c uma constante real positiva. Então

$$cU \sim IG\left(\delta\sqrt{c}, \frac{\gamma}{\sqrt{c}}\right); \quad (2.2.16)$$

(iii) Sejam $U \sim IG(\delta, \gamma)$ e $V = \left(\frac{\gamma}{\delta^2}\right)^{2/3} U$. Então $V \sim IG(\eta, \eta^2)$, com $\eta = (\gamma\delta)^{1/3}$.

Note que o Teorema 2.2.3 parte (iii), permite reduzir o número de parâmetros na distribuição Gaussiana Inversa, que, neste caso, vai depender apenas do parâmetro η . Esta reparametrização será útil para simplificar a obtenção da estimativa de máxima verossimilhança, que será obtida via algoritmo EM.

2.3 A distribuição BS baseada na distribuição IG

2.3.1 A distribuição Normal Inversa Gaussiana

Neste trabalho, vamos considerar a Gaussiana Inversa como a distribuição de mistura para construir a distribuição simétrica Normal Inversa Gaussiana (NIGS). Esta distribuição resultante será usada para obter uma generalização da distribuição BS usual. Isto é, vamos estudar a distribuição BS baseada na distribuição NIGS ao invés da distribuição normal. Especificamente, vamos assumir que Z em (1.1.4) é representada por

$$Z = \sqrt{U} Z_0,$$

onde $Z_0 \sim N(0, 1)$ e U são independentes, tal que U segue uma distribuição Gaussiana Inversa e que tem densidade dada por (2.2.6), i.e.,

$$h(u; \delta, \gamma) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \exp(\delta\gamma) u^{-3/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{u} + \gamma^2 u\right)\right\}, \quad u > 0.$$

Assim, a distribuição NIGS surge como a distribuição marginal de Z na representação hierárquica representada por

$$Z|U = u \sim N(0, u) \text{ e } U \sim IG(\delta, \gamma), \quad (2.3.1)$$

onde $N(0, u)$ representa a distribuição normal com média 0 e variância u , e $IG(\delta, \gamma)$ é a distribuição Gaussiana Inversa. Assim, a função de densidade de probabilidade condicional de Z , dado $U = u$, pode express como

$$f(z|u) = \frac{1}{(2\pi u)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2u} z^2\right\}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente, a densidade marginal de Z , pode ser obtida através de

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty f(z|u)h(u)du \\ &= \left(\frac{\gamma}{\pi}\right) \left(1 + \frac{z^2}{\delta^2}\right)^{-1/2} K_1 \left(\gamma\delta\sqrt{1 + \frac{z^2}{\delta^2}}\right) \exp(\delta\gamma) \\ &= \left(\frac{\gamma\delta}{\pi}\right) (\delta^2 + z^2)^{-1/2} K_1 \left(\gamma\sqrt{\delta^2 + z^2}\right) \exp(\delta\gamma), \end{aligned}$$

onde $K_1(\cdot)$ é a função de Bessel modificada definida em (2.2.7), com $\lambda = 1$. Ou seja, a fdp de Z é dada por:

$$f_Z(z) = \left(\frac{\gamma\delta}{\pi}\right) (\delta^2 + z^2)^{-1/2} K_1 \left(\gamma\sqrt{\delta^2 + z^2}\right) \exp(\delta\gamma), z \in \mathbb{R}. \quad (2.3.2)$$

Assim a distribuição resultante é a distribuição simétrica Normal Inversa Gaussiana padrão, que nesta parte do texto será denotada por $Z \sim NIGS(0, 1; \delta, \gamma)$, onde δ é um parâmetro de escala, enquanto que γ determina a forma da densidade (ver Chang et al., 2005 e Hanssen e Oigard, 2001).

A distribuição locação-escala (simétrica) pode ser definida facilmente pela relação

$$W = \mu + \sigma Z.$$

Neste caso, usamos a notação $W \sim NIGS(\mu, \sigma^2; \delta, \gamma)$.

Se $Z \sim NIGS(0, 1; \delta, \gamma)$, então usando a função geradora de momentos de Z (veja Hanssen e Oigard, 2001), pode ser demonstrado que

$$\mathbb{E}(Z) = 0; \quad \delta, \gamma > 0, \quad \text{e} \quad Var(Z) = \frac{\delta}{\gamma}; \quad \delta, \gamma > 0.$$

Quando $\gamma \rightarrow 0$, obtemos a distribuição Cauchy como um caso especial da distribuição NIGS (Liljestol, 2000). A distribuição normal também pode ser obtida como um caso limite da distribuição NIGS quando $\gamma \rightarrow \infty$.

Na Figura 2.1, apresentamos a função densidade de probabilidade de $Z \sim NIGS(0, 1; \delta, \gamma)$, para alguns valores de γ , considerando $\delta = 1$. Além disso, na Figura 2.2, podemos ver a fdp de Z para alguns valores de δ , considerando $\gamma = 0.1$ fixo.

Considerando a parametrização da distribuição Gaussiana Inversa dada no Teorema 2.2.3 parte (iii), vamos obter a distribuição $NIGS(0, 1; \eta, \eta^2)$. Esta parametrização permite obter um modelo Normal Inversa Gaussiana simétrico uniparamétrico.

Alguns gráficos são apresentados para avaliar o comportamento da fdp, para diferentes valores de η . Na Figura 2.3 apresentamos o gráfico da fdp de $NIGS(0, 1; \eta, \eta^2)$ e o gráfico do logaritmo da fdp da NIGS para alguns valores de $\eta \geq 1$. Na Figura 2.3 apresentamos o gráfico da fdp de $NIGS(0, 1; \eta, \eta^2)$ e o gráfico do logaritmo da fdp da NIGS para alguns valores de $\eta < 1$.

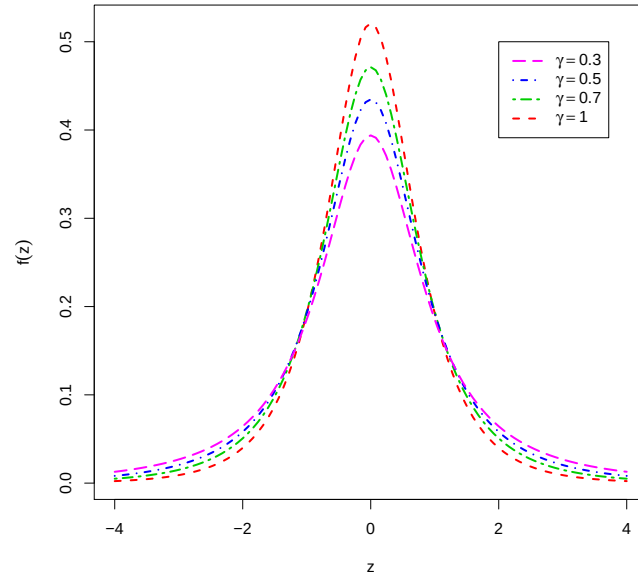


Figura 2.1: Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de γ e $\delta = 1$.

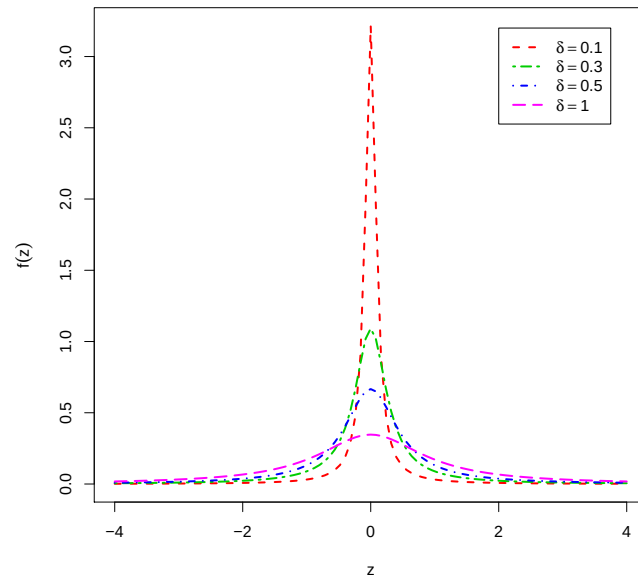
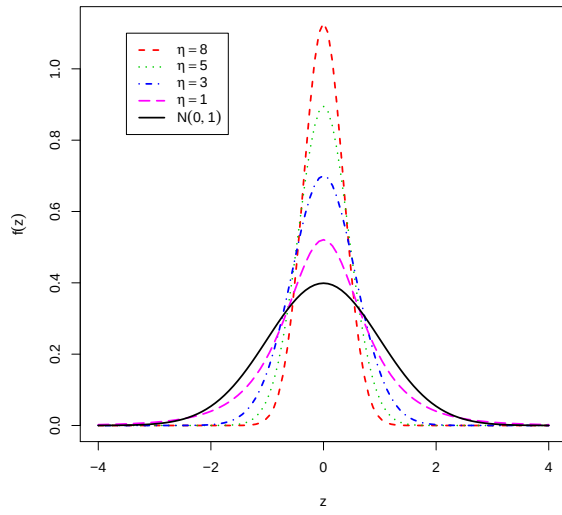
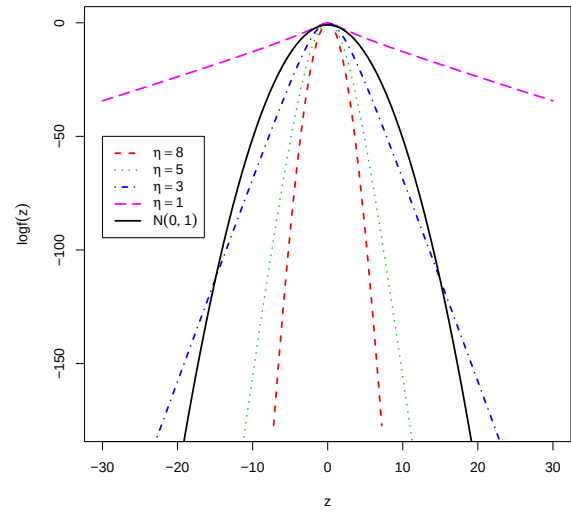


Figura 2.2: Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de δ e $\gamma = 0.1$.

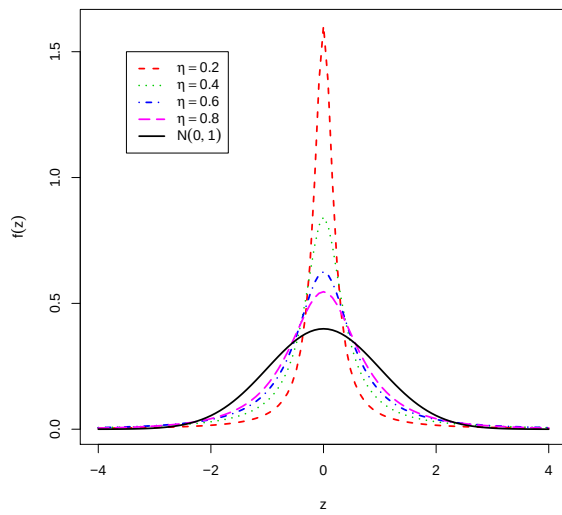


(a)

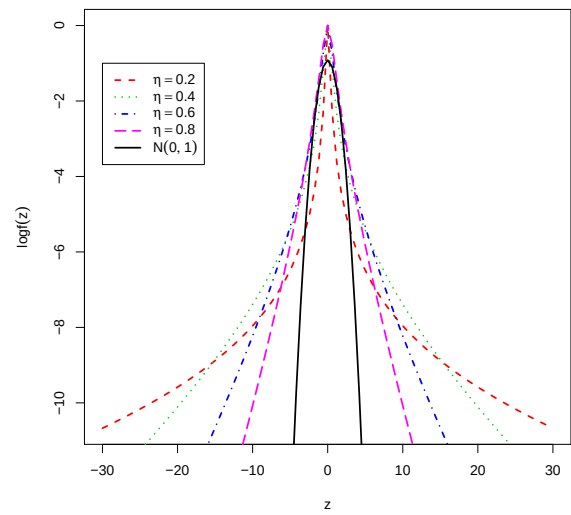


(b)

Figura 2.3: Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de $\eta \geq 1$.



(a)



(b)

Figura 2.4: Função densidade de probabilidade da distribuição NIGS para diferentes valores de $\eta < 1$.

2.3.2 A distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa

Seguindo a idéia de Balakrishnan et al. (2009), considere a variável aleatória T com representação estocástica dada por

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha \sqrt{U} Z_0 + \sqrt{[\alpha \sqrt{U} Z_0]^2 + 4} \right]^2, \quad (2.3.3)$$

onde $Z_0 \sim N(0, 1)$ e $U \sim IG(\delta, \gamma)$ independentes. Conseqüentemente, utilizando (2.3.2) e (2.3.3), obtemos a fdp de T , dada por

$$f_T(t) = \phi_{\text{NIGS}}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta); \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (2.3.4)$$

$$= \left(\frac{\gamma \delta}{\pi} \right) (\delta^2 + a_t^2)^{-1/2} K_1 \left(\gamma \sqrt{\delta^2 + a_t^2} \right) \exp(\delta \gamma) A_t(\alpha, \beta), \quad (2.3.5)$$

onde $\phi_{\text{NIGS}}(\cdot)$ é a fdp de $Z \sim \text{NIGS}(0, 1; \delta, \gamma)$ e, $a_t(\alpha, \beta)$ e $A_t(\alpha, \beta)$ são como em (1.1.2). Esta nova distribuição para T será denotada por $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. A distribuição de T que resulta neste enfoque corresponde a um tipo de distribuição BS baseada na distribuição Normal Inversa Gaussiana simétrica $\text{NIGS}(0, 1; \delta, \gamma)$. Esta distribuição permite flexibilizar a aplicação em modelos de tempos de vida do tipo BS. Esta distribuição de tipo BS é uma generalização que não tem sido discutida na literatura da distribuição BS e suas generalizações.

Na Figura 2.5, apresentamos gráficos da fdp de $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$, para alguns valores de α e considerando $\beta = 1$, $\delta = 1$ e $\gamma = 1$; observamos que quando α é pequeno, a curva densidade tende a ser simétrica. Já na Figura 2.6, temos a fdp de T para alguns valores de β e considerando $\alpha = 1$, $\delta = 1$ e $\gamma = 1$. Também apresentamos na Figura 2.7, a fdp de T para alguns valores de δ e considerando $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\gamma = 1$. E na Figura 2.8, temos a fdp de T para alguns valores de γ e considerando $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e $\delta = 1$.

Considerando a parametrização da IG a um parâmetro vamos obter uma distribuição BSIG com três parâmetros. Isto é $\text{BSIG}(\alpha, \beta; \eta, \eta^2)$ que depende de η como parâmetro adicional a α e β .

Alguns gráficos da fdp são apresentadas para avaliar o comportamento para diferentes valores de η . Na Figura 2.9 apresentamos a fdp da BSIG para alguns valores de η e considerando $\alpha = 0.2$ e $\beta = 1$ junto com fdp da BS; observamos que como α é pequeno as curvas densidade parecem simétricas. Na Figura 2.10 apresentamos a fdp da BSIG para alguns valores de η e considerando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$. Na Figura 2.11 apresentamos a fdp da BSIG para alguns valores de η e considerando $\alpha = 1.5$ e $\beta = 1$. Em todas estas figuras observamos que a distribuição BSIG tem caudas mais pesadas do que a distribuição BS.

Seguindo a mesma linha de estudo das distribuições SMN e do trabalho de Balakrishnan et al. (2009), as estimativas de máxima verossimilhança podem ser obtidas via algoritmo EM. Além disso, sua representação estocástica facilita a aplicações de métodos de influência e diagnóstico e estimação bayesiana.

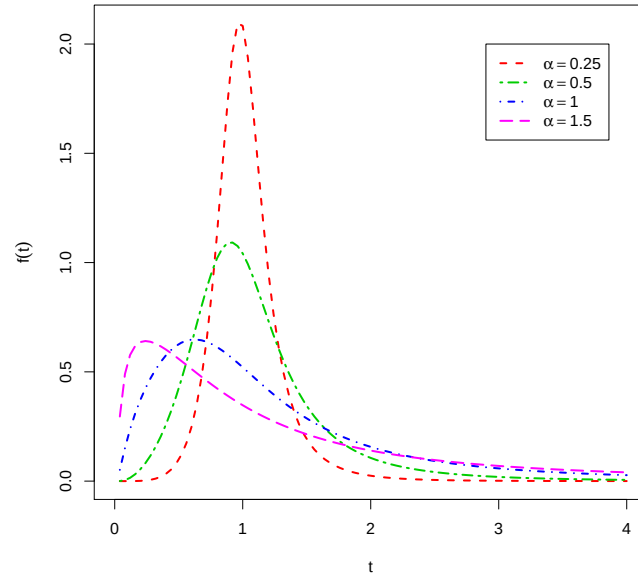


Figura 2.5: Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de α e com β , δ e γ fixos e iguais a 1.

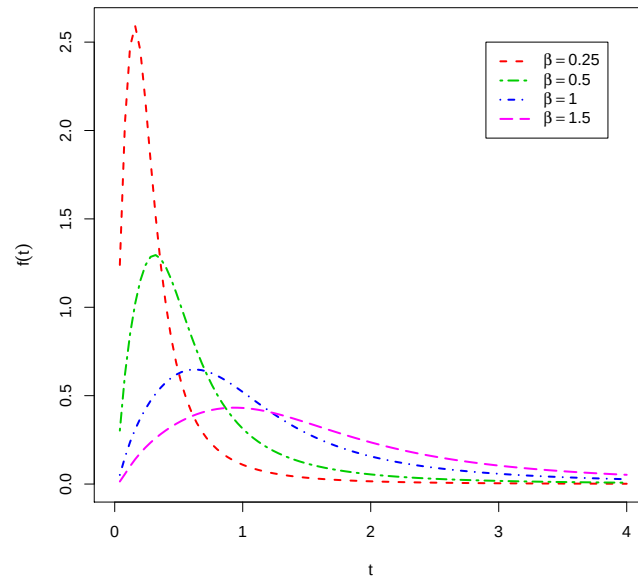


Figura 2.6: Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de β e com α , δ e γ fixos e iguais a 1.

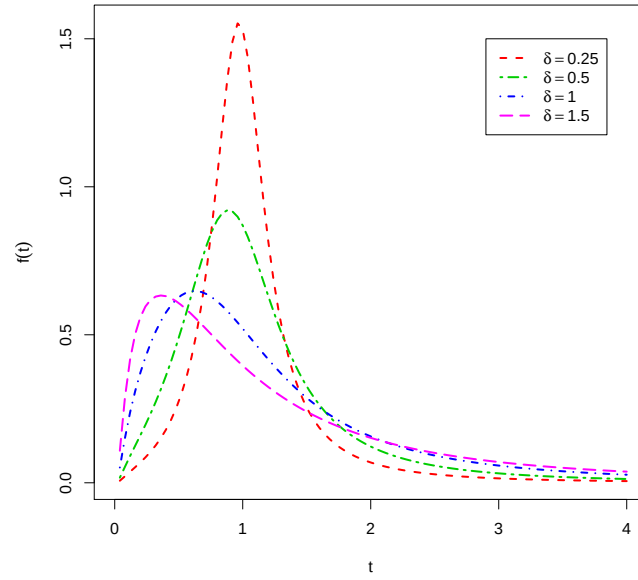


Figura 2.7: Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de δ e com α , β e γ fixos e iguais a 1.

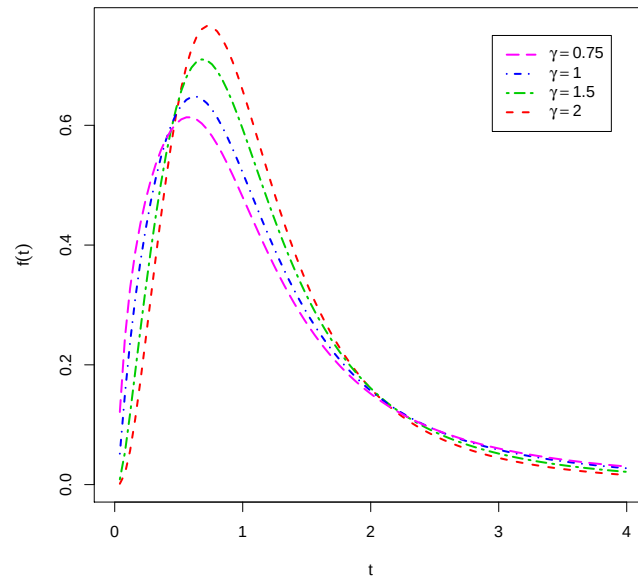
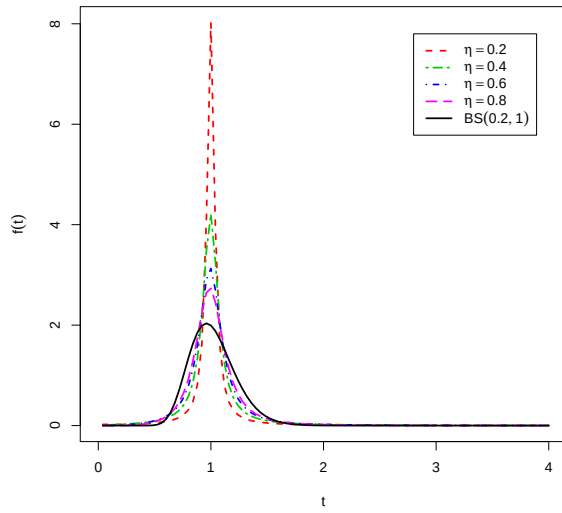
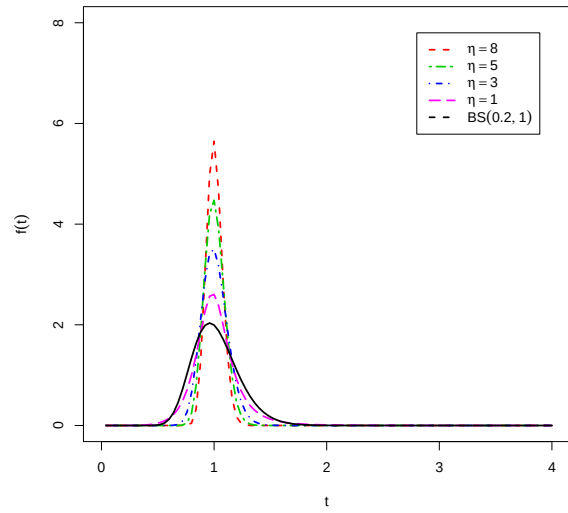


Figura 2.8: Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de γ e com α , β e δ fixos e iguais à 1.

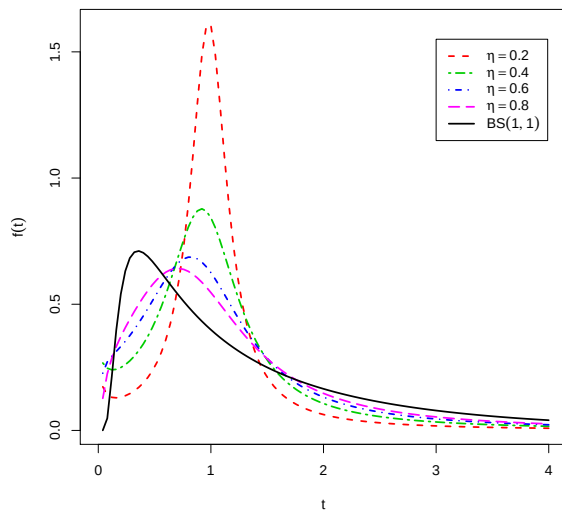


(a)

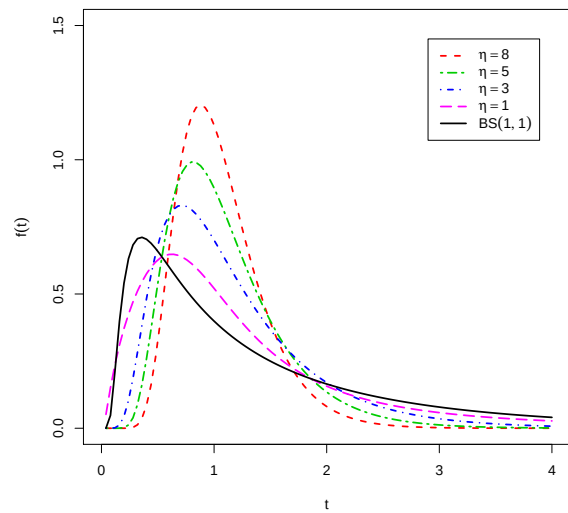


(b)

Figura 2.9: Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de η , com $\alpha = 0.2$ e $\beta = 1$.



(a)



(b)

Figura 2.10: Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de η , com $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

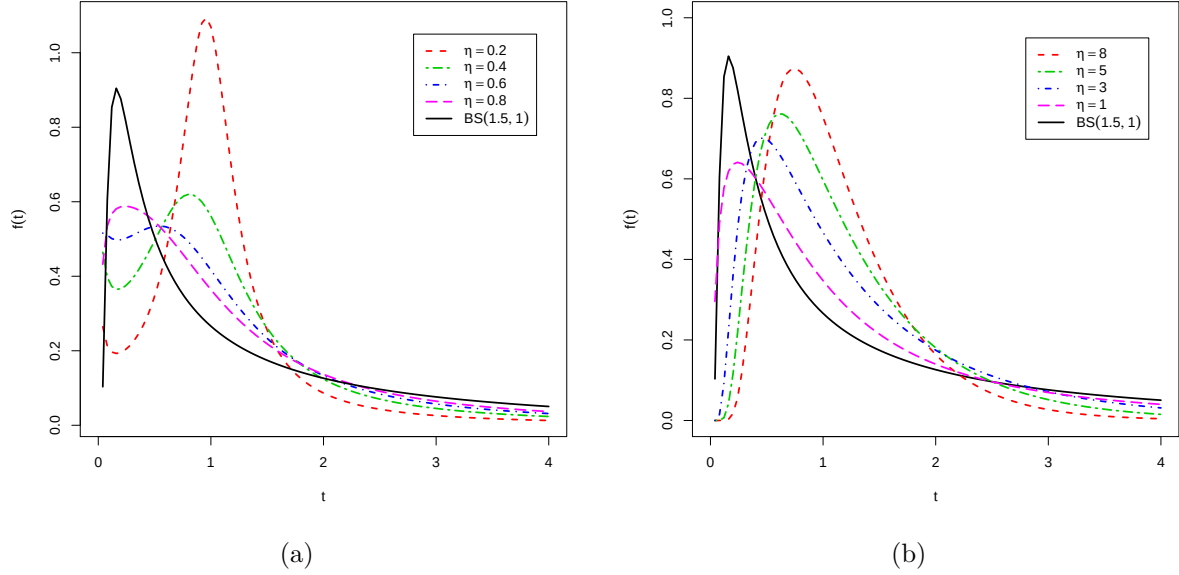


Figura 2.11: Função densidade de probabilidade da BSIG para diferentes valores de η , com $\alpha = 1.5$ e $\beta = 1$.

2.3.3 Propriedades

A seguir apresentamos algumas propriedades da distribuição BSIG.

Teorema 2.3.1. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então,*

(i) $cT \sim BSIG(\alpha, c\beta; \delta, \gamma)$, com $c > 0$;

(ii) $1/T \sim BSIG(\alpha, 1/\beta; \delta, \gamma)$.

Demonstração. Partes (i) and (ii) são obtidos diretamente a partir do método de mudança de variável. $\square$

Os seguintes resultados fornecem distribuições condicionais que serão usadas em seções posteriores para implementar o algoritmo EM, usado para obter as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo BSIG.

Teorema 2.3.2. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então, a v.a T , dado $U = u$, que é denotada por $T|(U = u)$, segue a distribuição BS clássica com parâmetros $\sqrt{u}\alpha$ e β , i.e., $T|(U = u) \sim BS(\sqrt{u}\alpha, \beta)$.*

Demonstração. Por meio da equação (2.3.3) e dado $U = u$, nós temos $T = \beta[\alpha_u Z + \sqrt{\{\alpha_u Z\}^2 + 4}]^2/4$, onde $\alpha_u = \alpha \sqrt{u}$, que estabelece o resultado necessário. $\square$

Corolário 2.3.3. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então,*

(i) $U|(T = t) \sim GIG(-1, \sqrt{a_t^2 + \delta^2}, \gamma)$;

(ii) Os momentos da variável aleatória $U^r|(T = t)$ são dados por

$$\mathbb{E}(U^r|T = t) = \frac{K_{r-1}(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})}{K_{-1}(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \left(\frac{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}{\gamma} \right)^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $r = -1$ temos

$$\mathbb{E}(1/U|T = t) = \frac{K_2(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})}{K_1(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \frac{\gamma}{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}.$$

Demonstração. Para mostrar a Parte (i), note que

$$\begin{aligned} h_{U|T}(u|t) &= \frac{\phi(a_t(\sqrt{u}\alpha, \beta))A_t(\sqrt{u}\alpha, \beta)h_U(u)}{\phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))A_t(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{\phi\left(\frac{1}{\sqrt{u}}a_t(\alpha, \beta)\right)h_U(u)}{\sqrt{u}\phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))} \\ &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}\right)^{-1} \frac{u^{-2}}{2K_{-1}(\gamma\sqrt{a_t^2 + \delta^2})} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_t^2 + \delta^2}{u} + \gamma^2 u\right)\right\}. \end{aligned}$$

Assim, temos que $U|(T = t) \sim GIG(-1, \sqrt{a_t^2 + \delta^2}, \gamma)$. Parte (ii) é obtida diretamente pelo Teorema 2.2.1. $\square$

O seguinte teorema apresenta os momentos da distribuição BSIG.

Teorema 2.3.4. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$ com representação dada por (2.3.3). Então o k -ésimo momento de T é dado por*

$$\mathbb{E}[T^k] = \beta^k \sum_{j=0}^k \binom{2k}{2j} \sum_{i=j}^k \binom{k-j}{i-j} \left[\frac{\alpha}{2}\right]^{2i} v_i \mathbb{E}(Z_0^{2i}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

onde $v_i = \mathbb{E}[U^i]$ é dado em (2.2.9).

Demonstração. O resultado desejado é obtido a partir da representação estocástica dada na equação (2.3.3) e por aplicação repetida do teorema binomial. $\square$

Corolário 2.3.5. *Seja $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então a média, variância, e os coeficientes de variação, assimetria e curtose de T são, respectivamente, dados por*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \frac{\beta}{2}[2 + v_1\alpha^2], \\ \text{Var}[T] &= \frac{\beta^2\alpha^2}{4} [4v_1 + \{6v_2 - v_1^2\}\alpha^2], \\ \gamma[T] &= \frac{\alpha [4v_1 + \{6v_2 - v_1^2\}\alpha^2]^{1/2}}{2 + v_1\alpha^2}, \\ \alpha_3[T] &= \frac{4\alpha [\{9v_2 - 3v_1^2\} + \frac{1}{2}\{30v_3 - 9v_1v_2 + v_1^3\}\alpha^2]}{[4v_1 + \{6v_2 - v_1^2\}\alpha^2]^{3/2}}, \quad e \\ \alpha_4[T] &= \frac{3 [16v_2 + \{160v_3 - 48v_1v_2 + 8v_1^3\}\alpha^2 + \{280v_4 - 80v_1v_3 + 9v_1^2v_2 - v_1^4\}\alpha^4]}{[4v_1 + \{6v_2 - v_1^2\}\alpha^2]^2},\end{aligned}$$

respectivamente, onde os v_r são dados em (2.2.9).

2.4 Método dos Momentos Modificado

Uma alternativa para estimar os parâmetros da distribuição BSIG é o método de estimativa do momento modificado (MM), no qual as estimativas sempre existem; veja Ng et. al. (2003) para mais detalhes. A seguir apresentamos dois teoremas. Em ambos, os parâmetros δ e γ são considerados fixos.

O primeiro teorema apresenta o estimador dos MM para os parâmetros α e β da distribuição BSIG; e o segundo teorema mostra a suas distribuições assintóticas. Estes resultados podem ser utilizados para a construção de intervalos de confiança e testar algumas hipóteses de interesse para alguns parâmetros do modelo.

Teorema 2.4.1. *Seja $T_1, \dots, T_n$ uma amostra aleatória de $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$ e considere as estatísticas*

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i \quad e \quad R = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{-1} \right]^{-1}.$$

Então, os estimadores de MM para α e β , denotado por $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são dados por

$$\tilde{\alpha} = \left\{ \frac{2}{v_1} \left[\left(\frac{S}{R} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \tilde{\beta} = (SR)^{\frac{1}{2}},$$

em que $v_1 = \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\delta}{\gamma}$, com $Z \sim \text{NIGS}(0, 1; \delta, \gamma)$.

Demonstração. As estimativas MM são encontrados resolvendo as seguintes equações

$$S = \mathbb{E}(T) \quad e \quad R^{-1} = \mathbb{E}(T^{-1}),$$

em que $\mathbb{E}(T) = \beta(1 + \frac{v_1}{2}\alpha^2)$ e $\mathbb{E}(T^{-1}) = \beta^{-1}(1 + \frac{v_1}{2}\alpha^2)$. □

Notamos que a distribuição de Z , afeta apenas a estimativa do parâmetro de forma α através de v_1 . Além disso, a estimativa do parâmetro de escala β é independente da distribuição de Z , como pode ser visto no Teorema 2.4.1.

Teorema 2.4.2. *Seja $T_1, \dots, T_n$ uma amostra aleatória de $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então, a distribuição conjunta assintótica dos estimadores MM $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ é normal bivariada dada por*

$$\sqrt{n} \left[\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right] \rightarrow^D N_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega}), \text{ com } n \rightarrow \infty,$$

em que

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{3v_2}{v_1^2} - 1 \right) & 0 \\ 0 & \frac{(\alpha\beta)^2(4v_1 + 3\alpha^2v_2)}{(2 + \alpha^2v_1)^2} \end{pmatrix},$$

com $v_r = \mathbb{E}(U^r)$, para $r = 1, 2$. Especificamente, $v_1 = \frac{\delta}{\gamma}$ e $v_2 = \frac{K_{\frac{3}{2}}(\gamma\delta)}{K_{-\frac{1}{2}}(\gamma\delta)} \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^2$.

Demonstração. Usando teorema central do limite, temos $\sqrt{n} \left([S, \frac{1}{R}]^T - [\mathbb{E}(T), \mathbb{E}(\frac{1}{T})]^T \right) \sim N_2(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, onde $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})$ com $\sigma_{11} = \text{Var}(T) = (\alpha\beta)^2(v_1 + \frac{(6v_2 - v_1^2)}{4}\alpha^2)$, $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \text{Cov}(T, \frac{1}{T}) = 1 - (1 + \frac{v_1}{2}\alpha^2)^2$, e $\sigma_{22} = \text{Var}(\frac{1}{T}) = (\frac{\alpha}{\beta})^2(v_1 + \frac{(6v_2 - v_1^2)}{4}\alpha^2)$. Considerando as funções $g_1 = g_1(S, \frac{1}{R}) = (\frac{2}{v_1}[(S\frac{1}{R})^{\frac{1}{2}} - 1])^{\frac{1}{2}}$ e $g_2 = g_2(S, \frac{1}{R}) = (SR)^{\frac{1}{2}}$ e usando o método delta, o teorema é provado. $\square$

Corolário 2.4.3. *Seja $T_1, \dots, T_n$ uma amostra de $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Então, a distribuição assintótica de $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são dadas, respectivamente, por*

$$\sqrt{n}(\tilde{\alpha} - \alpha) \rightarrow^D N(0, \sigma_{\alpha\alpha}^2) \quad \text{e} \quad \sqrt{n}(\tilde{\beta} - \beta) \rightarrow^D N(0, \sigma_{\beta\beta}^2), \text{ com } n \rightarrow \infty,$$

em que

$$\sigma_{\alpha\alpha}^2 = \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{3v_2}{v_1^2} - 1 \right) \quad \text{e} \quad \sigma_{\beta\beta}^2 = (\alpha\beta)^2 \left(\frac{4v_1 + 3\alpha^2v_2}{(2 + \alpha^2v_1)^2} \right).$$

O Corolário 2.4.3 pode ser usado para construir intervalos de confiança para os parâmetros α e β . Note que aqui a variância assintótica dos estimadores MM de α e β dependem dos momentos de Z .

A seguir apresentamos um estudo de simulação para analisar o desempenho dos estimadores do método de momentos modificado dos parâmetros da distribuição BSIG. Tal estudo foi feito usando o software R em sua versão 3.0.0. Em tal análise foi considerado diferentes tamanhos amostrais os quais foram $n = 30$, $n = 50$ e $n = 100$, e o número de replicações de Monte Carlo considerado foi $M = 1000$. Nas seguintes Tabelas apresentamos a média das M estimativas nas M replicações, juntamente com os erros esperado e empírico dos estimadores.

A Tabela 2.1, referem-se aos resultados considerando-se $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$ e diferentes valores de η . A tabela 2.2, referem-se aos resultados considerando-se $\alpha = 1$, $\beta = 1$ e diferentes valores de η .

Tabela 2.1: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$, considerando diferentes valores de η .

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	EP_{esp}	EP_{emp}	media	EP_{esp}	EP_{emp}
0.6	30	0.4542	0.0991	0.1447	1.0146	0.1164	0.1530
	50	0.4714	0.0796	0.1191	1.0069	0.0931	0.1111
	100	0.4825	0.0577	0.0944	1.0024	0.0672	0.0849
0.8	30	0.4767	0.0856	0.1195	1.0071	0.0996	0.1109
	50	0.4834	0.0673	0.0914	1.0035	0.0779	0.0830
	100	0.4900	0.0482	0.0666	1.0011	0.0557	0.0616
1	30	0.4785	0.0874	0.0988	1.0059	0.0894	0.0921
	50	0.4890	0.0692	0.0783	0.9996	0.0704	0.0711
	100	0.4926	0.0493	0.0541	1.0016	0.0502	0.0510

Tabela 2.2: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, considerando diferentes valores de η .

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	EP_{esp}	EP_{emp}	media	EP_{esp}	EP_{emp}
0.6	30	0.8979	0.1959	0.2771	1.0411	0.2377	0.3064
	50	0.9290	0.1570	0.2419	1.0270	0.1872	0.2520
	100	0.9600	0.1147	0.1784	1.0161	0.1347	0.1804
0.8	30	0.9459	0.1699	0.2204	1.0221	0.1945	0.2367
	50	0.9587	0.1334	0.1724	1.0202	0.1522	0.1815
	100	0.9796	0.0964	0.1365	1.0035	0.1078	0.1259
1	30	0.9582	0.1749	0.1897	1.0143	0.1782	0.1956
	50	0.9744	0.1380	0.1588	1.0132	0.1400	0.1523
	100	0.9830	0.09830	0.1073	1.0102	0.0995	0.1034

2.5 Estimação de máxima verossimilhança: Algoritmo EM

O algoritmo EM é uma ferramenta bem conhecida para a estimativa de máxima verossimilhança quando temos dados não observados (ou ausentes) ou quando variáveis latentes estão presentes durante a modelagem. Esse algoritmo permite uma determinação computacionalmente eficiente das estimativas de máxima verossimilhança quando procedimentos iterativos são necessários. Especificamente, seja $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_n]^\top$ e $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_n]^\top$ dados observados e não observados, respectivamente. Os dados completos $\mathbf{t}_c = [\mathbf{t}^\top, \mathbf{u}^\top]^\top$ correspondem aos dados originais $\mathbf{t}$ aumentados de $\mathbf{u}$. A seguir detalharemos a implementação da estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição BSIG usando algoritmo EM.

Seja $T_1, \dots, T_n$ uma amostra aleatória de tamanho n de $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$, onde o vetor de parâmetros é $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^\top$, com $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \equiv \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Seja $\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}_c)$ e $Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbb{E}[\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}_c)|\mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ a função de log-verossimilhança dos dados completos e seu valor esperado condicionado nos dados

observados, respectivamente. Cada iteração do algoritmo EM envolve duas etapas, i.e., a etapa de expectativa (Etapa E) e a etapa de maximização (Etapa M), as quais são definidas por:

Etapa E. Calcule $Q\left(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$, para $r = 1, 2, \dots$;

Etapa M. Encontre $\boldsymbol{\theta}^{(r+1)}$ tal que $Q\left(\boldsymbol{\theta}^{(r+1)}|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}} Q\left(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\right)$, para $r = 1, 2, \dots$

Note que, usando o Teorema 2.3.2, a configuração acima pode ser escrita como

$$T_i|(U_i = u_i) \stackrel{ind}{\sim} \text{BS}(\sqrt{u_i}\alpha, \beta), \quad (2.5.1)$$

$$U_i \stackrel{ind}{\sim} \text{IG}(\delta, \gamma), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.5.2)$$

Assumimos que o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\nu} = (\delta, \gamma)^\top$ que indexa a fdp $h_U(\cdot)$ é conhecido. Um valor ideal de $\boldsymbol{\nu}$ pode, então, ser escolhido, usando o critério de informação de Schwarz; ver Spiegelhalter et al. (2002). Assim, sob a representação hierárquica dada nas equações (2.5.1) e (2.5.2), segue-se que a função de log-verossimilhança completa associada com $\mathbf{t}_c = [\mathbf{t}^\top, \mathbf{u}^\top]^\top$ é dada por

$$\ell_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}_c) = -n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) + C, \quad (2.5.3)$$

onde C é uma constante. Assumindo que $\hat{u}_i = \mathbb{E}[1/U_i|t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}]$, para $i = 1, \dots, n$, segue-se que a esperança condicional da função de log-verossimilhança completa tem a forma

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) = -n \log(\alpha) - \frac{n}{2} \log(\beta) - \frac{1}{2\alpha^2} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left[\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2 \right] + \sum_{i=1}^n \log(t_i + \beta) + C. \quad (2.5.4)$$

Assim, em seguida, temos o algoritmo EM para a estimativa de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição BSIG como se segue:

Etapa E. Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, calcule $\hat{u}_i$, para $i = 1, \dots, n$;

Etapa M. Atualize $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ por maximização de $Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}})$ em (2.5.4) através de $\boldsymbol{\theta}$, o que conduz às seguintes expressões:

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{S_u}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{R_u} - 2\bar{u} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}^2 - \hat{\beta} \left[k(\hat{\beta}) + 2\bar{u} R_u \right] + R_u \left[\bar{u} k(\hat{\beta}) + S_u \right] = 0, \quad (2.5.5)$$

em que

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i, \quad S_u = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i t_i, \quad R_u = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{u}_i}{t_i}}, \quad \text{e} \quad k(x) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x+t_i}}. \quad (2.5.6)$$

Este processo é iterado até convergência.

2.6 Matriz de Informação Observada

Seja $T_1, \dots, T_n$ uma amostra aleatória de tamanho n proveniente da distribuição $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$, onde os parâmetros δ, γ são considerados conhecidos, com fdp

$$f_T(t_i) = \frac{\gamma^2 \delta}{\pi w_i} K_1(w_i) \exp(\delta \gamma) A_{t_i}(\alpha, \beta), \quad i = 1, \dots, n,$$

onde

$$w_i = \gamma \sqrt{a_{t_i}^2 + \delta^2}, \quad a_{t_i} = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{t_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t_i}} \right] \quad \text{e} \quad A_{t_i} = \frac{t_i^{-3/2}(t_i + \beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}}.$$

Então, a função log-verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)$ é dada por $l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n \log l_i(\boldsymbol{\theta})$, onde

$$l_i(\boldsymbol{\theta}) = \log \left(\frac{\gamma^2 \delta}{\pi} \right) - \log(w_i) + \log(K_1(w_i)) + \gamma \delta + \log(A_{t_i}).$$

A função escore é dada por

$$U_\varphi = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{w_i} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} + \frac{K'_1(w_i)}{K_1(w_i)} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \varphi} \right), \quad \varphi = \alpha, \beta.$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial \alpha} &= -\frac{\gamma^2 a_{t_i}^2}{\alpha w_i}, \\ \frac{\partial w_i}{\partial \beta} &= -\frac{\gamma^2 a_{t_i}(t_i + \beta)}{2\alpha \beta^{3/2} t_i^{1/2} w_i}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} A_{t_i}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial \beta} &= -\frac{(t_i - \beta)}{4\alpha \beta^{3/2} t_i^{3/2}}, \\ K'_1(w_i) &= -\frac{K_0(w_i) + K_2(w_i)}{2}. \end{aligned}$$

A matriz de informação observada para $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} I_{\alpha\alpha} & I_{\alpha\beta} \\ I_{\beta\alpha} & I_{\beta\beta} \end{pmatrix}$$

onde

$$I_{\varphi\psi} = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 l_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \varphi \partial \psi} \right), \quad \varphi, \psi = \alpha, \beta,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \varphi \partial \psi} &= \frac{1}{w_i^2} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} - \frac{1}{w_i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \varphi \partial \psi} - \left(\frac{K'_1(w_i)}{K_1(w_i)} \right)^2 \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} \\ &+ \frac{K''_1(w_i)}{K_1(w_i)} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi} \frac{\partial w_i}{\partial \psi} + \frac{K'_1(w_i)}{K_1(w_i)} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \eta \partial \psi} - \frac{1}{A_{t_i}^2} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \varphi} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \psi} + \frac{1}{A_{t_i}} \frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \varphi \partial \psi}, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w_i}{\partial \alpha \partial \alpha} &= \frac{\gamma^2 a_{t_i}^2 (3w_i^2 - \gamma a_{t_i}^2)}{\alpha^2 w_i^3}, \\
\frac{\partial^2 w_i}{\partial \beta \partial \beta} &= \frac{\gamma^2 ((t_i + \beta)^2 (w_i^2 - \gamma^2 a_{t_i}^2) + a_{t_i} \alpha t_i^{1/2} \beta^{1/2} (3t_i + \beta))}{4\alpha^2 \beta^3 t_i w_i^3}, \\
\frac{\partial^2 w_i}{\partial \beta \partial \alpha} &= \frac{\gamma^2 a_{t_i} (t_i + \beta) (2w_i^2 - \gamma^2 a_{t_i}^2)}{2\alpha^2 \beta^{3/2} t_i^{1/2} w_i^3}, \\
\frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \alpha \partial \alpha} &= \frac{2}{\alpha^2} A_{t_i}, \\
\frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \beta \partial \beta} &= \frac{3t_i - \beta}{8\alpha t_i^{3/2} \beta^{5/2}}, \\
\frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \beta \partial \alpha} &= \frac{t_i - \beta}{4\alpha^2 t_i^{3/2} \beta^{3/2}}, \\
K_1''(w_i) &= \frac{3K_1(w_i) + K_3(w_i)}{4}.
\end{aligned}$$

2.7 Estudo de simulação

Para verificar a performance do algoritmo EM descrito na Seção 2.5, apresentamos um estudo de simulação sobre obtenção dos EMV dos parâmetros, para diferentes tamanhos de amostra $n = 30, 50, 100$. Os valores escolhidos dos parâmetros foram $\alpha = 0.5, 1.0, 1.5$ e $\beta = 1$. Para η , consideramos dois casos: i) $\eta < 1$ e ii) $\eta \geq 1$. Para cada η e para cada tamanho de amostra, fizemos $M = 1000$ réplicas. A média destas estimativas $\bar{\hat{\theta}} = \sum_{k=1}^M \hat{\theta}_k / M$, junto com o vício $RB = \theta - \bar{\hat{\theta}}$ e o erro quadrático médio $MSE = \sum_{k=1}^M (\hat{\theta}_k - \bar{\hat{\theta}})^2 / M$, são reportados nas Tabelas 2.3-2.8. Tal análise foi realizado utilizando o pacote estatístico **R** em sua versão 3.0. Especificamente, consideramos os seguintes cenários:

Cenário 1: $\alpha = 0.5, \beta = 1$, reportados nas Tabelas 2.3 e 2.4;

Cenário 2: $\alpha = 1, \beta = 1$, reportados nas Tabelas 2.5 e 2.6;

Cenário 3: $\alpha = 1.5, \beta = 1$, reportados nas Tabelas 2.7 e 2.8.

Pode-se observar que as estimativas de máxima verossimilhança são mais próximas aos valores teóricos considerados, quando o tamanho da amostra é maior. Como também o vícios e o erro quadrático médio é menor quanto o tamanho de amostra é maior.

Tabela 2.3: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta < 1$.

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
0.2	30	0.4983	0.0034	0.1366	0.9985	0.0015	0.0271
	50	0.4960	0.0081	0.0984	0.9990	0.0010	0.0204
	100	0.4992	0.0016	0.0691	1.0004	0.0004	0.0141
0.4	30	0.5007	0.0014	0.1209	1.0019	0.0019	0.0525
	50	0.4994	0.0011	0.0968	0.9997	0.0003	0.0389
	100	0.4998	0.0004	0.0646	1.0002	0.0002	0.0278
0.6	30	0.4947	0.0105	0.1091	1.0039	0.0039	0.0697
	50	0.4971	0.0059	0.0831	1.0036	0.0036	0.0539
	100	0.4977	0.0045	0.0587	1.0033	0.0033	0.0370
0.8	30	0.4936	0.0128	0.0946	0.9973	0.0027	0.0768
	50	0.4957	0.0086	0.0694	0.9980	0.0020	0.0591
	100	0.4973	0.0054	0.0518	1.0005	0.0005	0.0418

Tabela 2.4: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 0.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta \geq 1$.

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
1	30	0.4959	0.0082	0.0850	1.0074	0.0074	0.0797
	50	0.4953	0.0095	0.0654	1.0012	0.0012	0.0625
	100	0.4973	0.0053	0.0477	1.0009	0.0009	0.0443
3	30	0.4908	0.0184	0.0672	1.0007	0.0007	0.0523
	50	0.4928	0.0143	0.0523	0.9996	0.0004	0.0403
	100	0.4984	0.0032	0.0353	0.9996	0.0004	0.0289
5	30	0.4939	0.0123	0.0658	1.0022	0.0022	0.0388
	50	0.4933	0.0135	0.0525	1.0009	0.0009	0.0319
	100	0.4968	0.0063	0.0365	1.0003	0.0003	0.0220
8	30	0.4876	0.0248	0.0671	0.9983	0.0017	0.0313
	50	0.4919	0.0162	0.0501	0.9988	0.0012	0.0248
	100	0.4969	0.0062	0.0352	0.9999	0.0000	0.0175

Tabela 2.5: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, considerando $\eta < 1$

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
0.2	30	0.9830	0.0170	0.2380	1.0086	0.0086	0.10894
	50	0.9923	0.0077	0.1822	1.0017	0.0017	0.07740
	100	0.9951	0.0049	0.1317	0.9999	0.0000	0.05757
0.4	30	0.9882	0.0118	0.2414	1.0017	0.0017	0.1034
	50	1.0084	0.0084	0.2000	1.0048	0.0048	0.0818
	100	0.9928	0.0072	0.1259	1.0010	0.0010	0.0569
0.6	30	0.9941	0.0059	0.2179	1.0116	0.0116	0.1418
	50	0.9868	0.0132	0.1618	1.0097	0.0097	0.1135
	100	0.9931	0.0069	0.1121	1.0049	0.0049	0.0744
0.8	30	0.9908	0.0092	0.1886	1.0109	0.0109	0.1586
	50	0.9885	0.0115	0.1471	1.0078	0.0078	0.1168
	100	0.9936	0.0064	0.1018	1.0010	0.0010	0.0797

Tabela 2.6: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, considerando $\eta \geq 1$

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
1	30	0.9815	0.0185	0.1726	1.0126	0.0126	0.1563
	50	0.9862	0.0138	0.1313	1.0098	0.0098	0.1229
	100	0.9934	0.0066	0.0944	0.9997	0.0003	0.0824
3	30	0.9762	0.0238	0.1336	1.0079	0.0079	0.1031
	50	0.9779	0.0221	0.1094	1.0049	0.0049	0.0820
	100	0.9925	0.0075	0.0736	1.0028	0.0028	0.0561
5	30	0.9679	0.0321	0.1324	1.0040	0.0040	0.0812
	50	0.9835	0.0165	0.1018	1.0023	0.0023	0.0599
	100	0.9915	0.0085	0.0716	0.9993	0.0007	0.0423
8	30	0.9706	0.0294	0.1274	1.0032	0.0032	0.0638
	50	0.9893	0.0107	0.1025	1.0025	0.0025	0.0503
	100	0.9942	0.0058	0.0728	0.9999	0.0000	0.0337

Tabela 2.7: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta < 1$

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
0.2	30	1.5159	0.0106	0.4152	1.0043	0.0043	0.0823
	50	1.4956	0.0029	0.3091	1.0008	0.0008	0.0620
	100	1.5018	0.0012	0.2062	1.0006	0.0006	0.0438
0.4	30	1.4736	0.0176	0.3574	1.0181	0.0181	0.1681
	50	1.4879	0.0080	0.2732	1.0052	0.0052	0.1180
	100	1.4923	0.0051	0.1976	1.0011	0.0011	0.0874
0.6	30	1.4791	0.0140	0.3242	1.0235	0.0235	0.2118
	50	1.4766	0.0156	0.2461	1.0197	0.0197	0.1599
	100	1.4947	0.0036	0.1740	1.0062	0.0062	0.1202
0.8	30	1.4824	0.0118	0.2799	1.0198	0.0198	0.2433
	50	1.4895	0.0070	0.2215	1.0102	0.0101	0.1762
	100	1.4940	0.0040	0.1518	1.0088	0.0088	0.1233

Tabela 2.8: Estimativas dos parâmetros $\alpha = 1.5$ e $\beta = 1$, considerando $\eta \geq 1$

η	n	estimativas de α			estimativas de β		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
1	30	1.4502	0.0332	0.2525	1.0245	0.0245	0.2257
	50	1.4777	0.0149	0.1983	1.0182	0.0182	0.1741
	100	1.4865	0.0090	0.1393	1.0115	0.0115	0.1248
3	30	1.4731	0.0179	0.2050	1.0127	0.0127	0.1520
	50	1.4752	0.0165	0.1546	1.0118	0.0118	0.1126
	100	1.4834	0.0111	0.1094	0.9989	0.0011	0.0808
5	30	1.4720	0.0187	0.1930	1.0048	0.0048	0.1186
	50	1.4746	0.0169	0.1511	1.0045	0.0045	0.0894
	100	1.4869	0.0088	0.1065	1.0013	0.0013	0.0648
8	30	1.4629	0.0247	0.1990	1.0115	0.0115	0.0954
	50	1.4718	0.0188	0.1549	1.0009	0.0009	0.0716
	100	1.4878	0.0081	0.1115	0.9999	0.0000	0.0488

2.8 Aplicações a dados reais

No início de um estudo para determinar se exercício ou suplementos dietéticos retardam a perda óssea em mulheres idosas, um investigador mediu o conteúdo mineral nos ossos por "foton-absorptiometria". As medidas foram registradas para três ossos para ambos lados, dominante e não dominante. Estes dados são apresentados na Tabela 6.1 no Anexo I (extraído de Richard e Dean, 2002).

Nesta seção, apresentamos a análise desses dados para ilustrar as metodológicas apresentadas. Estes dados foram analisados anteriormente por Kundu et al. (2010 e 2013) e Vilca et al. (2014b).

2.8.1 Aplicação 1

Nesta aplicação, consideramos o conjunto de dados correspondente a densidade mineral do osso Radius (T_1) dado na Tabela 6.1. Começamos fazendo uma análise descritiva desses dados. As estatísticas descritivas são apresentadas na Tabela 2.9.

A seguir ajustamos os modelos BSIG e BS para T_1 . Usamos o método máxima verossimilhança para estimação de parâmetros via algoritmo EM, onde os estimadores de momentos modificados foram usados como valores iniciais. Considerando, o modelo BSIG de três parâmetros α , β e η , estimamos os parâmetros e escolhemos o η que da maior valor log-verossimilhança. Este foi $\eta = 0.9$.

Na Tabela 2.10, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo BSIG (para $\eta = 0.9$) e do modelo BS clássico, junto com seus erros padrões assintóticos (EP) correspondentes, que são calculados a partir da matriz da informação observada. Observamos que as estimativas e erros-padrões para os dois modelos apresentam pouca diferença.

Na Tabela 2.11, apresentamos Intervalos de Confiança (IC) de 95% baseada na aproximação normal dos EMV dos modelos BS e BSIG. Na Figura 2.12, é apresentado o histograma da variável T_1 e curvas das funções de densidade estimadas das distribuições BS e BSIG. Observamos que a curva do modelo BSIG ajusta-se melhor ao histograma dos dados. Na Tabela 2.12, são apresentados os valores das funções de log-verossimilhança e os critérios de seleção de Akaike (AIC) e Schwartz (SIC) das distribuições BS e BSIG. De acordo com os critérios AIC e SIC, a distribuição BSIG apresenta um melhor ajuste em relação à distribuição BS.

Tabela 2.9: Estatísticas descritivas

Mínimo	Percentil 25	Mediana	Média	Percentil 75	Máximo
0.5320	0.7520	0.8380	0.8183	0.8760	1.0520

Tabela 2.10: EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG

Modelos	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
BS	0.1372	0.8107
EP	(0.0039)	(0.0044)
BSIG	0.1316	0.8264
EP	(0.0050)	(0.0038)

Tabela 2.11: Intervalo de Confiança de 95% dos EMV

Modelos	α	β
BS	(0.1296; 0.1449)	(0.8021; 0.8193)
BSIG	(0.1218; 0.1414)	(0.8190; 0.8338)

Figura 2.12: Histograma da variável densidade de mineral no osso Rádio

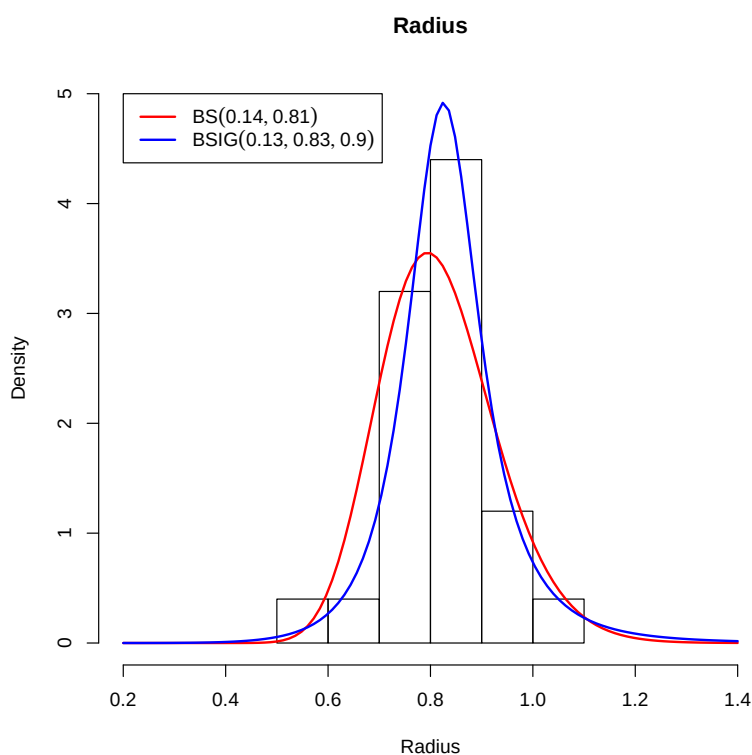


Tabela 2.12: Alguns critérios de informação

Modelos	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
BS	19.4841	-0.6994	-0.6506
BSIG	21.1889	-0.7676	-0.7188

2.8.2 Aplicação 2

Aqui consideramos o conjunto de dados correspondentes a densidade mineral do osso Dominant humerus (T_2), dado na Tabela 6.1. As estatísticas descritivas são apresentadas na Tabela 2.13.

A fim de ajustar os modelos BSIG e BS para T_2 , usamos o método de máxima verossimilhança para estimação de parâmetros via algoritmo EM, onde os estimadores de momentos modificado foram usados como valores iniciais. Considerando o modelo BSIG de três parâmetros α , β e η , estimamos os parâmetros e escolhemos o η que da maior valor log-verossimilhança que foi $\eta = 1$.

Na Tabela 2.14, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo BSIG (para $\eta = 1$) e do modelo BS clássico, junto com seus erros padrões assintóticos (EP) correspondentes, que são calculados a partir da matriz da informação observada. Observemos que não há muita diferença nas estimativas e erros padrões para os dois modelos. Na Tabela 2.15, apresentamos Intervalos de Confiança (IC) de 95% baseada na aproximação normal dos EMV dos modelos BS e BSIG. Na Figura 2.13, é apresentado o histograma da variável de interesse e curvas das funções de densidade estimadas das distribuições BS e BSIG. Observamos que a curva do modelo BSIG ajusta-se melhor ao histograma dos dados. Na Tabela 2.16, são apresentados os valores das funções de log-verossimilhança e os critérios de seleção de Akaike (AIC) e Schwartz (SIC) das distribuições BS e BSIG. De acordo com os critérios AIC e SIC, a distribuição BSIG apresenta um melhor ajuste em relação à distribuição BS.

Tabela 2.13: Estatísticas descritivas

Mínimo	Percentil 25	Mediana	Média	Percentil 75	Máximo
1.037	1.650	1.786	1.793	1.954	2.334

Tabela 2.14: EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG

Modelos	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
BS	0.1680	1.7677
EP	(0.0048)	(0.0118)
BSIG	0.1668	1.7954
EP	(0.0062)	(0.0103)

Figura 2.13: Histograma da variável densidade de mineral no osso Dominant humerus

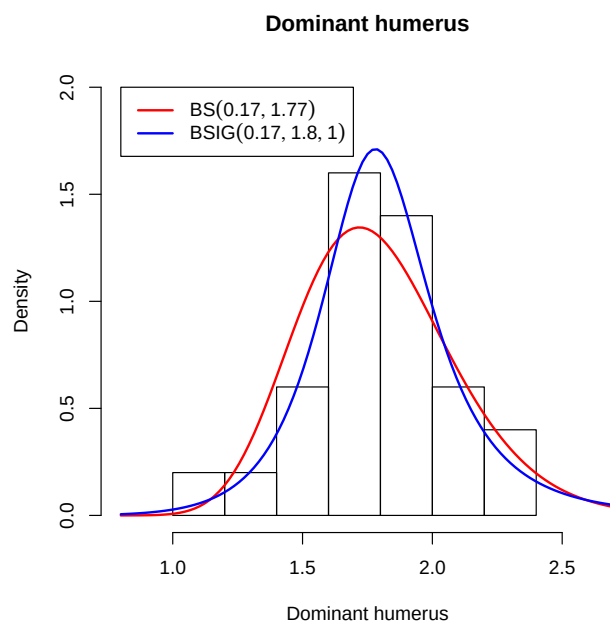


Tabela 2.15: Intervalo de Confiança de 95% dos EMV

Modelos	α	β
BS	(0.1586; 0.1774)	(1.7446; 1.7908)
BSIG	(0.1546; 0.1790)	(1.7752; 1.8156)

Tabela 2.16: Alguns critérios de informação

Modelos	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
BS	-5.0515	0.2821	0.3308
BSIG	-3.7114	0.2285	0.2772

Capítulo 3

Uma generalização da distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa

3.1 Introdução

A distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa (BSIG) é um tipo de distribuição Birnbaum Saunders baseada em uma distribuição mistura de escala normal, que é usada para modelar dados simétricos, em que a distribuição Gaussiana Inversa é usada como distribuição de mistura. A distribuição BSIG estudada no Capítulo 2 pode ser visto como um membro da classe das distribuições BS discutida por Balakrishnan et al. (2009), que é baseada em uma distribuição simétrica ao invés da distribuição normal. Neste capítulo, vamos desenvolver um tipo de distribuição BS baseada na distribuição Normal Inversa Gaussiana (NIG), que é uma distribuição assimétrica e é um membro importante dentro da classe das distribuições Hiperbólicas. Esta distribuição tem sido usada na área de finanças, como pode ser visto nos trabalhos de Barndorff-Nielsen (1978), Eberlein e Keller (1995), Barndorff-Nielsen e Blaesild (1981), etc.

A distribuição Birnbaum-Saunders (BS) (Birnbaum e Saunders, 1969a) é estreitamente relacionada à distribuição normal. Esta relação tem permitido discutir algumas generalizações, por exemplo, ao invés da distribuição normal podemos considerar outras distribuições tanto simétricas como assimétricas. Vilca e Leiva (2006) considerou a skew-normal ao invés da distribuição normal. Aqui, vamos considerar a distribuição assimétrica NIG.

Considere uma variável aleatória $T \sim BS(\alpha, \beta)$, então T tem a seguinte relação com a distribuição normal através da representação estocástica

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha Z + \sqrt{(\alpha Z)^2 + 4} \right]^2, \quad (3.1.1)$$

onde $Z \sim N(0, 1)$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. De acordo com Rieck e Nedelman (1991), a seguinte distribuição limite é válida

$$\frac{1}{\alpha} (\log T - \log \beta) \rightarrow Z \sim N(0, 1)$$

quando $\alpha \rightarrow 0$. Para considerar métodos de estimação robusta dos parâmetros do modelo, vários trabalhos têm sido feitos nessa direção. Mas, ainda há espaço para algumas extensões, que podem

ser suplemento das extensões já desenvolvidas. Em lugar da distribuição $N(0, 1)$ em (1.1.4), vamos considerar a família de distribuições Normal Gaussiana Inversa (NIG), proposta por Barndorff-Nielsen (1997). Esta distribuição é definida como uma mistura variância-média de uma distribuição normal, com a Gaussiana Inversa (IG), sendo a distribuição de mistura. Especificamente, em lugar da distribuição normal padrão, vamos considerar uma variável aleatória Z que admite uma representação estocástica dada por

$$Z = \mu + \omega U + \sqrt{U} Z_0, \quad (3.1.2)$$

onde $Z_0 \sim N(0, 1)$, e U é uma variável aleatória positiva independentemente distribuída de Z_0 . Note que para $\omega = 0$, implica que a distribuição é simétrica, que corresponde à distribuição Normal/Independente (NI) simétrica, discutida, por exemplo, por Lange e Sinsheimer (1993), que obtiveram distribuições de caudas mais pesadas que a distribuição normal. Agora, se U segue uma distribuição Gaussiana Inversa (IG), que usualmente é denotado por $U \sim IG(\delta, \gamma)$, com fdp dada por

$$h(u; \delta, \gamma) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} \exp(\delta\gamma) u^{-3/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta^2}{u} + \gamma^2 u \right) \right\}, \quad u > 0. \quad (3.1.3)$$

Então, a distribuição resultante em (3.1.2) é conhecida como distribuição normal inversa gaussiana (NIG), e é denotada por $Z \sim NIG(\mu, \omega, \delta, \tau)$, onde $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$.

Muitos autores em finanças teóricas e aplicada têm encontrado aplicações para distribuições NIG, ver por exemplo Barndorff-Nielsen (1997), Lillestol (2000), Venter e Jongh (2002) e Kalemanova et al. (2007). Esta família de distribuições ajustam dados de cauda pesada e assimétricos muito bem.

É fácil ver que a distribuição condicional de $Z|U = u$, é normal $N(\mu + \omega u, u)$. Para a distribuição de Z em (3.1.2), a média e a variância de Z são, respectivamente,

$$E(Z) = \mu + \delta\omega/\gamma \quad \text{e} \quad Var(Z) = \delta\tau^2/\gamma^3.$$

Alguns casos especiais da distribuição NIG podem ser obtidos como segue: quando $\tau \rightarrow 0$ a distribuição tende a distribuição Cauchy discutido em Lillestol (2000). A distribuição normal pode também ser obtida como um caso limite da distribuição NIG fazendo $\tau \rightarrow \infty$, como apontado por Chang et al. (2005).

O objetivo deste capítulo é considerar um tipo de distribuição BS baseada na distribuição Inversa Gaussiana (IG), que é usado como uma distribuição de mistura na ideia de Balakrishnan et al. (2009).

3.2 A distribuição proposta

Análogo à distribuição BS de Balakrishnan et al. (2009) e Vilca et al. (2014b), definimos uma extensão da distribuição BS usando a distribuição IG como uma distribuição de mistura, inspirado na construção da distribuição NIG. Para isto, consideramos a seguinte representação estocástica para T dada por:

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha(\omega U + \sqrt{U} Z_0) + \sqrt{\{\omega U + \sqrt{U} Z_0\}^2 + 4} \right]^2, \quad (3.2.1)$$

onde $Z_0 \sim N(0, 1)$ é independente de U , com $U \sim IG(\delta, \gamma)$ ou simplesmente que

$$Z = \omega U + \sqrt{U} Z_0 \sim NIG(0, \omega, \delta, \tau).$$

A fdp Z pode ser expressada como

$$\phi_{NIG}(z) = \left(\frac{\tau \delta}{\pi} \right) (\delta^2 + z^2)^{-1/2} K_1(\tau \sqrt{\delta^2 + z^2}) \exp(\delta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega z),$$

onde $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$ e $K_\lambda(\cdot)$ é a função Bessel modificada de terceiro tipo de ordem λ . A variável aleatória T em (3.2.1) é dita ter uma distribuição Birnbaum-Saunders Gaussiana Inversa (BSIG), e é denotada por $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$.

Note que se $\omega = 0$, a distribuição em (3.2.1) reduz-se à distribuição BS baseada na distribuição NIG simétrica discutida no Capítulo 2. Ou seja

$$T = \frac{\beta}{4} \left[\alpha(\sqrt{U} Z_0) + \sqrt{\{\sqrt{U} Z_0\}^2 + 4} \right]^2,$$

que neste caso é denotada por $T \sim BSIGS(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$. Isto é, $BSIG(\alpha, \beta; 0, \delta, \tau) = BSIGS(\alpha, \beta; \delta, \gamma)$, em vista que $\tau = \sqrt{\gamma^2 + \omega^2}$.

Agora, para $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ e considerando as ideias de Rieck e Nedelman (1991), Balakrishnan et al. (2009) e Santana (2009), a distribuição de $Y = \log(T)$ segue uma distribuição do tipo Senh-Normal. Isto é, obtemos uma generalização da distribuição Sinh-Normal, discutido em Rieck e Nedelman (1991) para introduzir covariáveis no parâmetro de localização. Seguindo os mesmos passos como em Vilca et al. (2014b), pode-se demonstrar, para a distribuição em (3.2.1) que

$$\frac{1}{\alpha} \left(\log(T) - \log(\beta) \right) \xrightarrow{d} Z \sim NIG(0, \omega, \delta, \tau)$$

quando $\alpha \rightarrow 0$. Assim, para α próximo de zero, $\log(T)$ segue uma distribuição aproximadamente NIG. Devido a este fato, chamamos esta distribuição tipo BS definida em (3.2.1) de distribuição Birnbaum-Saunders Gaussiana Inversa, similarmente ao que ocorre com a construção da distribuição NIG.

A representação estocástica em (3.2.1) pode ser útil para simulação de dados e também para a implementação do algoritmo EM, para estimação máxima verossimilhança dos parâmetros nos modelos BSIG.

Teorema 3.2.1. *Seja $T \sim BSIG(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então, a fdp de T é*

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta); \quad t > 0, \alpha > 0, \beta > 0, \\ &= \left(\frac{\tau \delta}{\pi} \right) (\delta^2 + a_t^2)^{-1/2} K_1 \left(\tau \sqrt{\delta^2 + a_t^2} \right) \exp(\delta \sqrt{\tau^2 - \omega^2} + \omega a_t) A_t(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

onde $\phi_{NIG}(\cdot)$ é a fdp da distribuição $NIG(0, \omega, \delta, \tau)$, $a_t(\alpha, \beta) = (\sqrt{t/\beta} - \sqrt{\beta/t})/\alpha$, e $A_t(\alpha, \beta) = t^{-3/2}(t + \beta)/(2\alpha\beta^{1/2})$ é a derivada de $a_t(\alpha, \beta)$ com relação de t .

Demonstração. Da representação estocástica em (3.2.1) e seguindo as mesmas idéias de Balakrishnan et al. (2009) e Vilca et al. (2014b), temos que a distribuição de T , dado $U = u$, é a distribuição Birnbaum-Saunders não-central. Especificamente, $T|(U = u) \sim BS(\alpha_u, \beta, \omega\sqrt{u})$, onde $\alpha_u = \sqrt{u}\alpha$, e sua fdp é dada por

$$f_T(t|u) = \phi(a_t(\alpha_u, \beta) - \eta\sqrt{u})A_t(\alpha_u, \beta).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty f_T(t|u)h_U(u)du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} \phi(a_t(\alpha_u, \beta) - \eta\sqrt{u})h_U(u)du A_t(\alpha, \beta) \\ &= \phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

onde $\phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta))$ é a fdp da distribuição NIG avaliada em $z = a_t(\alpha, \beta)$. Assim, obtemos o resultado desejado. $\square$

3.3 Gráficos da densidade

A seguir vamos apresentar gráficos da fdp da distribuição BSIG para diferentes valores dos parâmetros, para observar o comportamento da distribuição BSIG sob a presença da distribuição NIG. Vamos observar o impacto da presença do parâmetro ω na distribuição BSIG. Nestes gráficos vamos apreciar a diferença com a distribuição BS usual, quando consideramos diferentes valores para $\omega = 0$.

Na Figura 3.1, apresentamos o gráfico do logaritmo da função densidade da distribuição NIG. Observamos que a função densidade NIG tem caudas mais pesadas quando o valor de τ decresce. Nas Figuras 3.2 e 3.3, notamos que o parâmetro ω é um parâmetro de assimetria. Isto é, quando $\omega > 0$ a densidade é assimétrica para a direita e quando $\omega < 0$ a densidade é assimétrica para a esquerda. Para o caso especial $\omega = 0$, estudado na Seção 2.4.1, a densidade NIG é simétrica. Na figura 3.4, apresentamos o gráfico da função densidade da distribuição BSIG para diferentes valores de α , considerando $\omega = -2, 0, 2$ e $\beta = 1$ fixo e também apresentamos o gráfico da função densidade da distribuição BS.

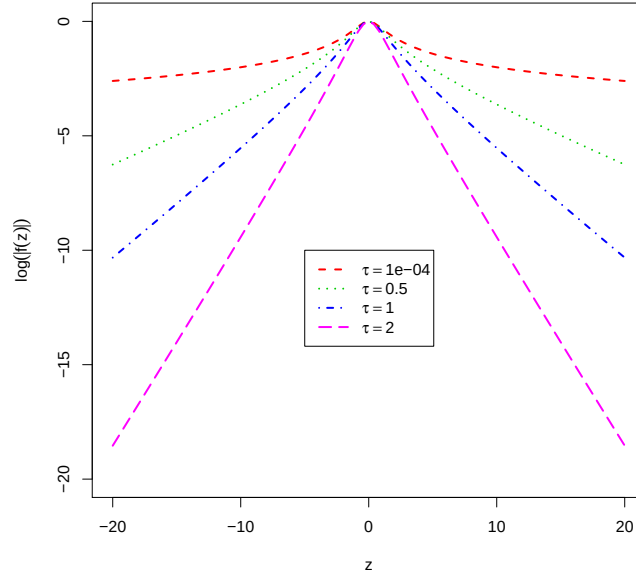


Figura 3.1: Logaritmo da função densidade de probabilidade da NIG para diferentes valores de τ e com $\omega = 0$.

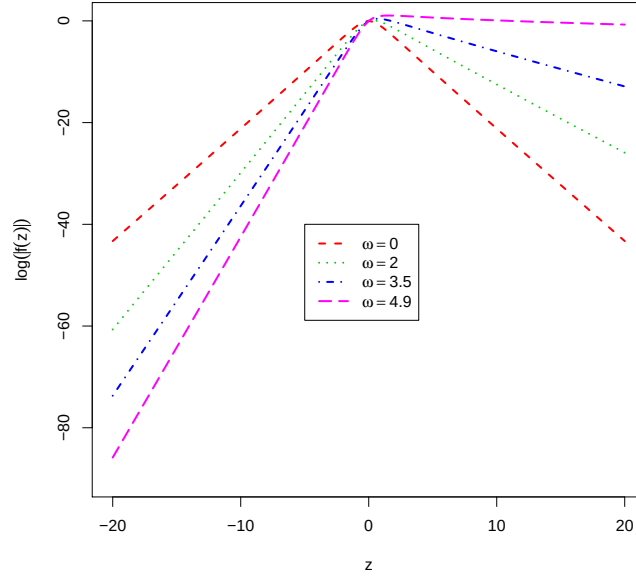


Figura 3.2: Logaritmo da função densidade de probabilidade da NIG para diferentes valores de $\omega \geq 0$ e com $\tau = 5$.

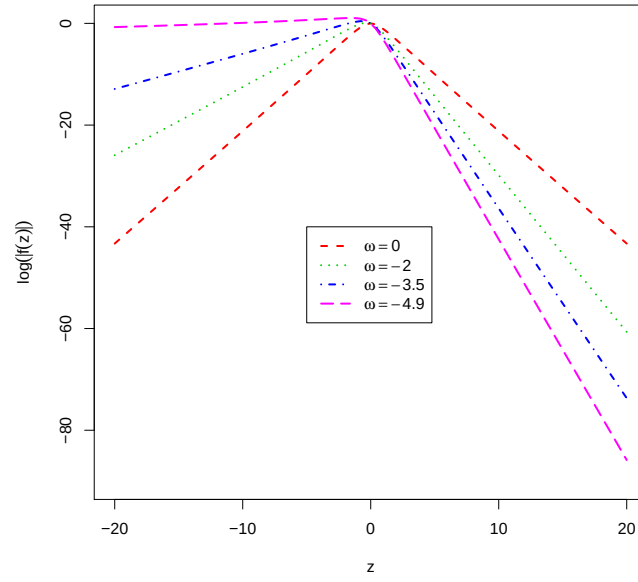
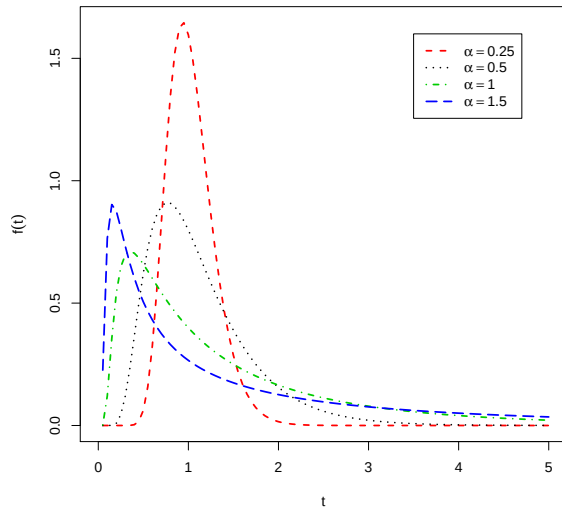
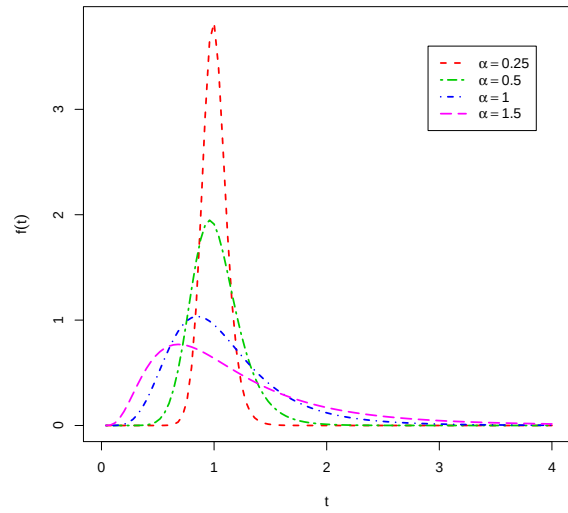


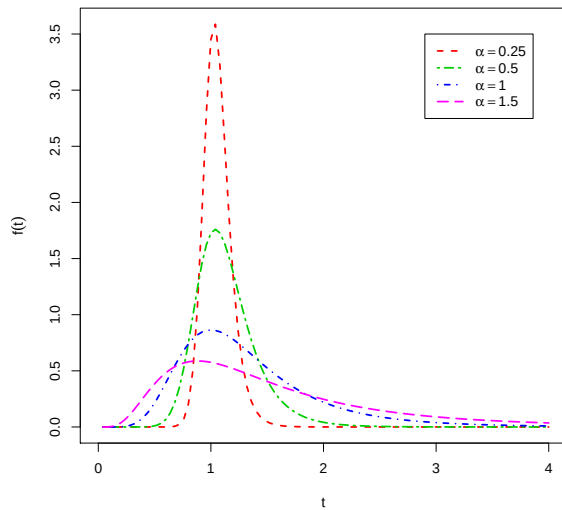
Figura 3.3: Logaritmo da função densidade de probabilidade da NIG para diferentes valores de $\omega \leq 0$ e com $\tau = 5$.



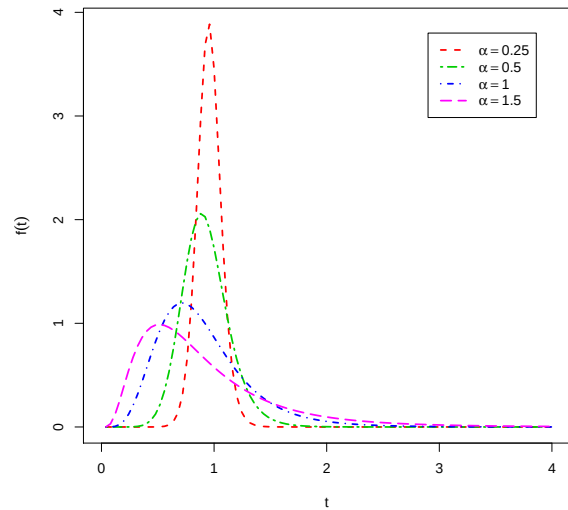
(a) $BS(\alpha, 1)$



(b) $BSIG(\alpha, 1; 0, 5, 1)$



(c) $BSIG(\alpha, 1; 2, 5, 1)$



(d) $BSIG(\alpha, 1; -2, 5, 1)$

Figura 3.4: Função densidade de probabilidade das distribuições BS e BSIG

3.4 Propriedades

Nesta parte, vamos derivar algumas propriedades da distribuição BSIG. De acordo com Birnbaum e Saunders (1969a), temos que a distribuição de T está diretamente relacionada com a distribuição de Z . Essa relação é útil para estabelecer propriedades da distribuição BSIG como será apresentado no seguinte teorema.

Teorema 3.4.1. *Seja $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então:*

(i) $cT \sim \text{BSIG}(\alpha, c\beta; \omega, \delta, \tau);$

(ii) $T^{-1} \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta^{-1}; -\omega, \delta, \tau);$

(iii) $\lim_{\tau \rightarrow 0} f_T(t) = f_c(t)$, onde $f_c(t)$ denota a distribuição BS baseada na distribuição Cauchy;

(iv) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} f_T(t) = f_{BS}(t)$, onde $f_{BS}(t)$ denota a pdf de distribuição BS usual.

Demonstração. As Partes (i) e (ii) são diretamente obtidas da aplicação do método de mudança de variável. A Parte (iii) segue imediatamente das propriedades da densidade da distribuição NIG quando $\tau \rightarrow 0$ e $\tau \rightarrow \infty$. $\square$

Observação 3.4.2. *A Parte (i) do Teorema 3.4.1 diz que a distribuição BSIG pertence à família tipo escala, em quanto a Parte (ii) diz que o recíproco da distribuição BSIG esta na mesma classe.*

Teorema 3.4.3. *Seja $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ e $\Phi_{\text{NIG}}(\cdot; \omega, \delta, \tau)$ a função de distribuição acumulada da distribuição NIG. Então,*

i) $F_T(t; \omega, \delta, \tau) = \Phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta); \omega, \delta, \tau);$

ii) $F_T(t; -\omega, \delta, \tau) = 1 - F_W(1/t; \omega, \delta, \tau)$, onde $W \sim \text{BSIG}(\alpha, 1/\beta; \omega, \delta, \tau)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} \text{i) } F_T(t; \omega, \delta, \tau) &= \int_0^t \phi_{\text{NIG}}(a_x(\alpha, \beta)) \frac{d}{dx} a_x(\alpha, \beta) dx = \int_{-\infty}^{a_t(\alpha, \beta)} \phi_{\text{NIG}}(x) dx \\ &= \Phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta); \eta, \delta, \tau); \\ \text{ii) } F_T(t; -\omega, \delta, \tau) &= P(T \leq t) = P(1/T \geq 1/t) \\ &= 1 - P(W < 1/t) \\ &= 1 - F_W(1/t; \omega, \delta, \tau). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

$\square$

Observação 3.4.4. *Seguindo o Teorema 3.4.3 i) e as idéias de Shang Chang e Ching Tang (1994) e Vilca e Leiva (2006), o p-ésimo percentil da distribuição, $t_p = F_T^{-1}(p; \omega, \delta, \tau)$, é dado por*

$$t_p = \frac{\beta}{4} \left(\alpha z_p + \sqrt{\alpha^2 z_p^2 + 4} \right)^2,$$

onde z_p é o p-ésimo percentil da distribuição NIG. Para $\omega = 0$ segue a distribuição simétrica, assim $t_{0.5} = \beta$.

No que segue, discutiremos os momentos da distribuição $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$, que dependem dos momentos da distribuição $Z \sim \text{NIG}(\mu, \omega, \delta, \tau)$ e os momentos de transformações de Z . Seguindo a idéia de Vilca e Leiva (2006), consideraremos a representação binomial $(a + b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$ e as propriedades da distribuição de Z (distribuição NIG) e T (Teorema 3.4.1), como veremos.

Teorema 3.4.5. *Seja $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então,*

$$\mathbb{E}(T^n) = \beta^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{l=0}^k 2^k \binom{k}{l} \mathbb{E} \left[\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^{k+l} \left(\left(\frac{\alpha Z}{2} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{k-l}{2}} \right].$$

Alguns casos especiais são:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \frac{\beta}{2} \left(2 + \mathbb{E}(Z^2) \alpha^2 + \alpha \mathbb{E} \left[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] \right); \\ \mathbb{E}(T^2) &= \frac{\beta^2}{2} \left(2 + 4\alpha^2 \mathbb{E}(Z^2) + \alpha^4 \mathbb{E}(Z^4) + 2\alpha \mathbb{E} \left[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] + \alpha^3 \mathbb{E} \left[Z^3(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] \right); \\ \mathbb{E}(T^3) &= \frac{\beta^3}{2} (2 + 9\mathbb{E}(Z^2) \alpha^2 + 6\mathbb{E}(Z^4) \alpha^4 + \mathbb{E}(Z^6) \alpha^6 + 3\alpha \mathbb{E} \left[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] \\ &\quad + 4\alpha^3 \mathbb{E} \left[Z^3(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] + \alpha^5 \mathbb{E} \left[Z^5(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right]) \\ \mathbb{E}(T^4) &= \frac{\beta^4}{2} \left(2 + 16\mathbb{E}(Z^2) \alpha^2 + 20\mathbb{E}(Z^4) \alpha^4 + 8\mathbb{E}(Z^6) \alpha^6 + \mathbb{E}(Z^8) \alpha^8 + 4\alpha \mathbb{E} \left[Z(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] \right. \\ &\quad \left. + 10\alpha^3 \mathbb{E} \left[Z^3(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] + 6\alpha^5 \mathbb{E} \left[Z^5(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] + \alpha^7 \mathbb{E} \left[Z^7(\alpha^2 Z^2 + 4)^{1/2} \right] \right). \end{aligned}$$

onde

$$\mathbb{E} \left[Z^{2k} \right] = \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \omega^j v_{k+0.5j} \mathbb{E} \left[Z_0^{2k-j} \right],$$

com $v_r = \frac{K_{-1/2+r}(\gamma\delta)}{K_{-1/2}(\gamma\delta)} \left(\frac{\delta}{\gamma} \right)^r$ e $\mathbb{E} \left[Z_0^{2k-j} \right]$ é $(2k-j)$ -ésimo momento da distribuição normal padrão.

3.5 Distribuição de vida associada com o modelo BSIG

Aqui, estudaremos a taxa de falha da distribuição BSIG e algumas de suas propriedades, seguindo as idéias de Vilca e Leiva (2006). Também discutimos as distribuições do máximo e mínimo de T_1 e T_2 quando eles são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de uma distribuição BSIG. Especificamente, consideramos a distribuição de $W_1 = \min\{T_1, T_2\}$ e $W_2 = \max\{T_1, T_2\}$. Além disso, obtemos uma expressão pra confiabilidade da força de estresse $R = P(T_1 < T_2)$, quando T_1 e T_2 são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de uma distribuição BSIG. O calculo de R tem sido extensamente discutido na literatura quando as variáveis aleatórias são independentes, tais como as distribuições normal, uniforme, exponencial, gama e beta.

Teorema 3.5.1. *Seja $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$ e F_T sua fda. Então, a confiabilidade e a função de risco de T são, respectivamente,*

$$R_T(t; \omega, \delta, \tau) = 1 - \Phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta); \omega, \delta, \tau)$$

e

$$h_T(t; \alpha, \beta) = \frac{\phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta))}{1 - \Phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta); \omega, \delta, \tau)} A_t(\alpha, \beta).$$

Demonstração. Segue imediatamente das definições da confiabilidade e função de risco (Meeker e Escobar, 2014) dadas por $R_T(t; \omega, \delta, \tau) = 1 - F_T(t; \omega, \delta, \tau)$ e $h_T(t; \omega, \delta, \tau) = f_T(t)/R_T(t; \omega, \delta, \tau)$. $\square$

Teorema 3.5.2. *Sejam T_1 e T_2 duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas de $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então;*

(i) *A fdp de W_1 e W_2 são respectivamente*

$$f_{W_1}(t) = 2\phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta))\Phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta)$$

e

$$f_{W_2}(t) = 2\phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta))\Phi_{\text{NIG}}(-a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta).$$

(ii) $R = 1/2$

Demonstração. Na parte (i), as distribuições de W_1 e W_2 seguem diretamente das distribuições do máximo e do mínimo de duas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Por outro lado, a parte (ii) é obtido como segue

$$\begin{aligned} R &= \int_0^\infty \int_{t_1}^\infty f_{T_1}(t_1) f_{T_2}(t_2) dt_2 dt_1 \\ &= \int_0^\infty f_{T_1}(t_1) (1 - F_{T_2}(t_1)) dt_1 \\ &= 1 - \int_0^\infty f_T(t) F_T(t) dt \\ &= 1 - \int_0^\infty \phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta)) \Phi_{\text{NIG}}(a_t(\alpha, \beta)) A_t(\alpha, \beta) dt \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.5.3. *Seja $T \sim \text{BSIG}(\alpha, \beta; \omega, \delta, \tau)$. Então:*

(i) $U|(T=t) \sim \text{GIG}(-1, \sqrt{a_t^2 + \delta^2}, \tau);$

(ii) *O r -ésimo momento de $U|(T=t)$ é dado por*

$$E(U^r|T=t) = \frac{K_{r-1}\left(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2}\right)}{K_{-1}\left(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2}\right)} \left(\frac{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}{\tau}\right)^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Para o caso especial $r = -1$,

$$E(U^{-1}|T=t) = \frac{K_2\left(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2}\right)}{K_1\left(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2}\right)} \frac{\tau}{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}.$$

Demonstração. Ambos resultados são provados simplesmente usando propriedades da distribuição IG. Primeiramente, a fdp condicional de U , dado $T = t$, é

$$\begin{aligned} h_{U|T}(u|t) &= \frac{\phi(a_t(\sqrt{u}\alpha, \beta))A_t(\sqrt{u}\alpha, \beta)h_U(u)}{\phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))A_t(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{\phi\left(\frac{1}{\sqrt{u}}a_t(\alpha, \beta)\right)h_U(u)}{\sqrt{u}\phi_{NIG}(a_t(\alpha, \beta))} \\ &= \left(\frac{\tau}{\sqrt{a_t^2 + \delta^2}}\right)^{-1} \frac{u^{-2}}{2K_{-1}\left(\tau\sqrt{a_t^2 + \delta^2}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_t^2 + \delta^2}{u} + \tau^2 u\right)\right\}. \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa Bivariada

Muitas distribuições univariadas têm sido generalizadas para distribuições bivariadas. Em particular, recentemente, Kundu et al. (2010) apresentaram uma extensão bivariada da distribuição Birnbaum-Saunders univariada. Os autores estudaram algumas propriedades da distribuição Birnbaum-Saunders bivariada, também mostraram como obter estimadores de máxima verossimilhança e estimadores obtidos através do método dos momentos modificado. Análogo ao caso univariado, a distribuição BS bivariada está estreitamente relacionada com a distribuição normal bivariada. Esta relação será útil para derivar propriedades da distribuição BS bivariada.

Apesar de que em muitas situações a suposição de normalidade na construção da BS bivariada é considerada com sucesso, tal suposição pode levar a perda de robustez na estimação de parâmetros. Especialmente, para dados com forte assimetria, caudas pesadas e/ou observações aberrantes (outliers). Por esta razão, algumas extensões da distribuição BS bivariada foram propostas para facilitar a estimação robusta dos parâmetros Vilca et al., 2014a; Kundu et al., 2013). Em Vilca et al. (2014b), os autores consideram a família de distribuições misturas de escala normal (SMN) em lugar da distribuição normal bivariada, obtendo assim a distribuição Birnbaum-Saunders mistura de escala normal bivariada. Um estudo de inferência sobre esta distribuição é feito em Vilca et al. (2014b).

Inspirados no trabalho de Kundu et al. (2010) e Vilca et al. (2014b), vamos considerar um tipo de distribuição BS bivariada, que denominamos de Birnbaum-Saunders Gaussiana Inversa bivariada, que é uma extensão da distribuição BSIG univariada discutida no Capítulo 2. Estudamos suas características e propriedades, tais como a função de distribuição conjunta, as distribuições marginais e condicionais, etc. Também desenvolvemos o algoritmo EM para estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo. Ilustramos os resultados obtidos com um estudo de simulação e uma aplicação a um conjunto de dados reais.

4.1 Distribuição Birnbaum-Saunders Bivariada

Nesta seção, apresentaremos a distribuição BS bivariada proposta por Kundu et al. (2010) como uma extensão da distribuição BS univariada. Esta distribuição BS bivariada é uma distribuição absolutamente contínua, com cinco parâmetros e com distribuições marginais BS univariadas.

Segundo Kundu et al. (2010), um vetor aleatório bivariado $\mathbf{T} = (T_1, T_2)^\top$ é dito ter uma distribuição Birnbaum-Saunders bivariada, com parâmetros $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ e $-1 < \rho < 1$, se a fda conjunta de T_1 e T_2 pode ser expressada como

$$F_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \Phi_2 \left(\frac{1}{\alpha_1} \left(\sqrt{\frac{t_1}{\beta_1}} - \sqrt{\frac{\beta_1}{t_1}} \right), \frac{1}{\alpha_2} \left(\sqrt{\frac{t_2}{\beta_2}} - \sqrt{\frac{\beta_2}{t_2}} \right); \rho \right), \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}_+^2, \quad (4.1.1)$$

onde $\Phi_2(\cdot; \rho)$ é a fda da distribuição normal bivariada de $N_2(0, \Sigma)$, com $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$ e $\sigma_{12} = \rho$. Denotaremos esta distribuição por $\mathbf{T} \sim BS_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho)$, onde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}_+^2$ e $\rho \in (-1, 1)$.

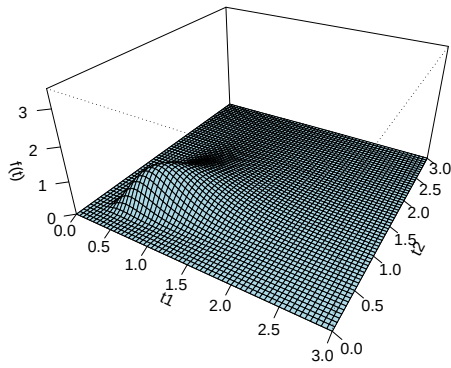
Derivando $F_{\mathbf{T}}(\mathbf{t})$ com respeito a $\mathbf{t}$, obtemos a fdp de $\mathbf{T}$ dada por

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}d(\mathbf{t}) \right\} A_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \\ &= \phi_2(a_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}); \rho) A_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^2, \end{aligned}$$

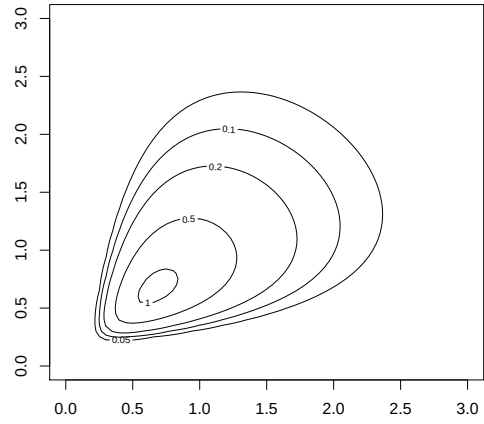
onde

$$\begin{aligned} \phi_2(\mathbf{z}; \rho) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(z_1^2 + 2\rho z_1 z_2 + z_2^2) \right\}, \\ a_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= (a_{t_1}(\alpha_1, \beta_1), a_{t_2}(\alpha_2, \beta_2))^\top, \\ A_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) &= A_{t_1}(\alpha_1, \beta_1) A_{t_2}(\alpha_2, \beta_2), \\ d(\mathbf{t}) &= a_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^\top \Sigma^{-1} a_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \\ a_{t_j}(\alpha_j, \beta_j) &= \frac{1}{\alpha_j} \left[\sqrt{\frac{T_j}{\beta_j}} - \sqrt{\frac{\beta_j}{T_j}} \right] e \\ A_{t_j}(\alpha_j, \beta_j) &= \frac{t_j + \beta_j}{2\alpha_j \sqrt{\beta_j} \sqrt{t_j^3}}. \end{aligned}$$

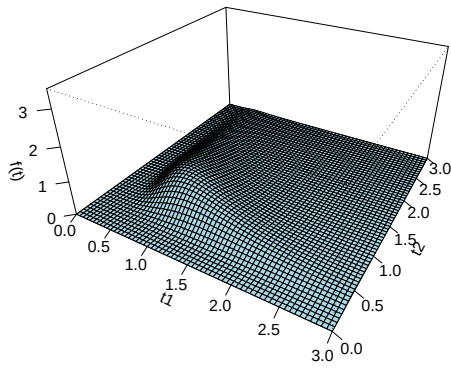
Nas Figuras 4.1-4.6, apresentamos o gráfico da fdp da distribuição $BS_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho)$ para distintos valores dos parâmetros. Notemos que a distribuição BS bivariada é unimodal. Para $0 < \rho < 1$, a distribuição tende a distribuir-se em torno de uma certa reta com inclinação positiva. Para $-1 < \rho < 0$, a distribuição tende a concentrar-se em direção dos eixos t_1 e t_2 .



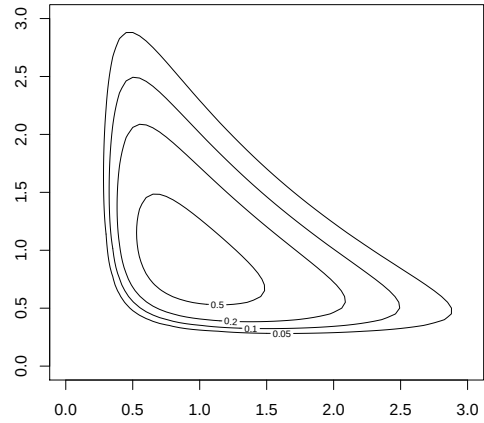
(a)



(b)

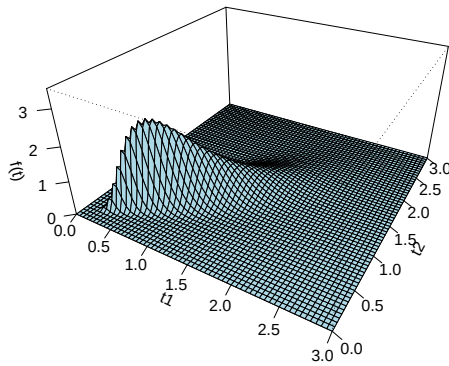


(c)

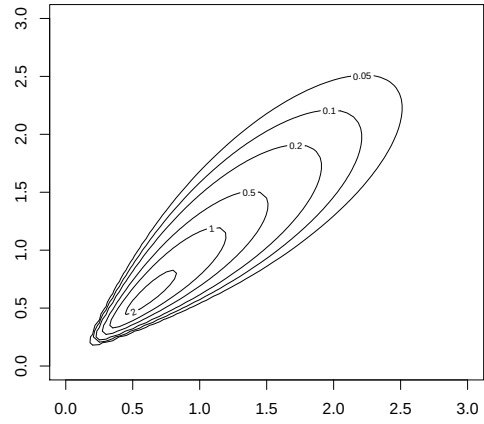


(d)

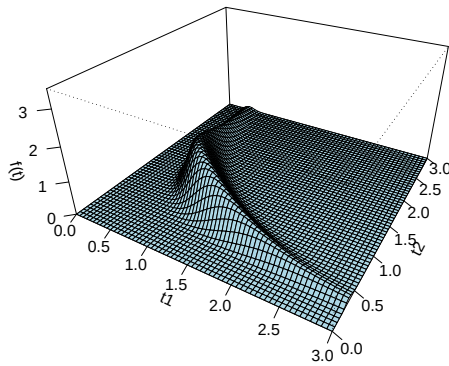
Figura 4.1: Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.5$ em (a),(b) e $\rho = -0.5$ em (c),(d) considerando $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$.



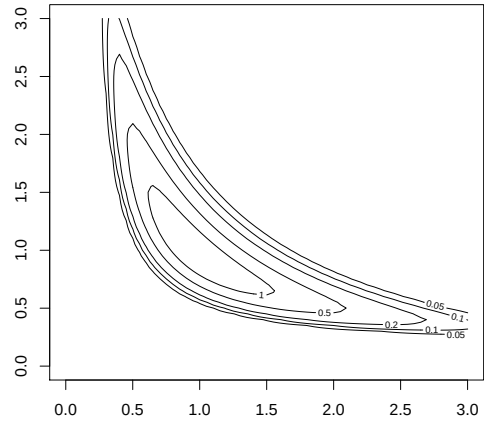
(a)



(b)

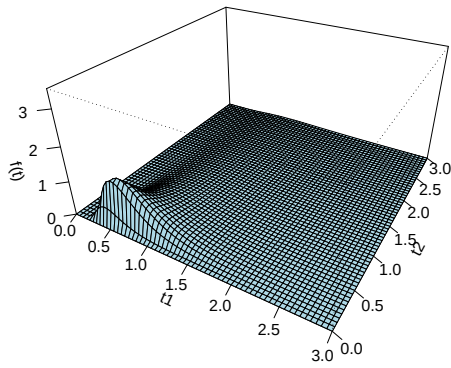


(c)

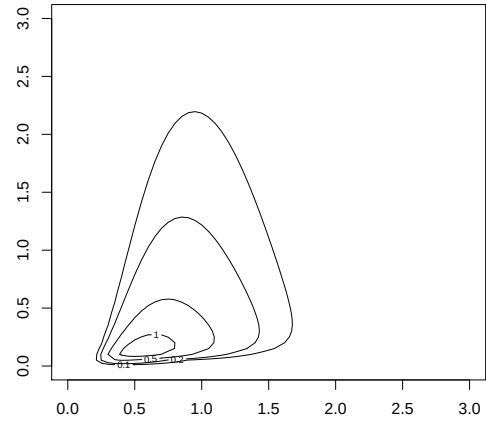


(d)

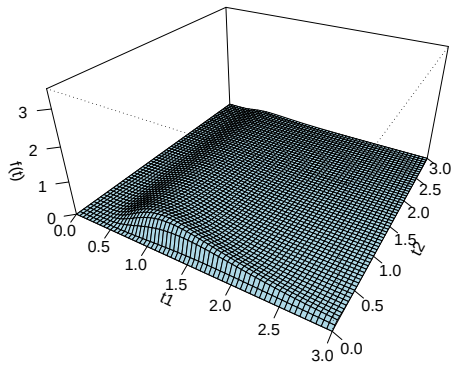
Figura 4.2: Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.9$ em (a),(b) e $\rho = -0.9$ em (c),(d) considerando $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$.



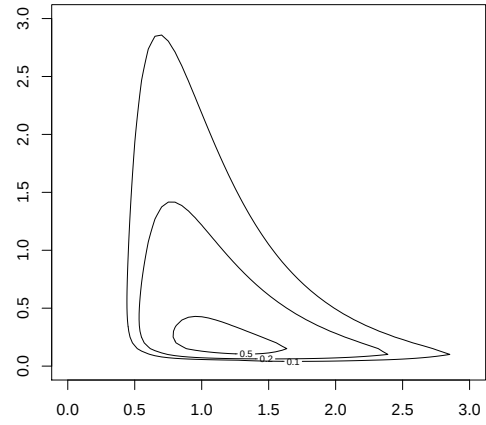
(a)



(b)

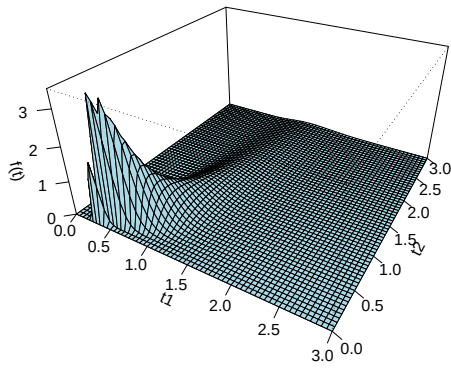


(c)

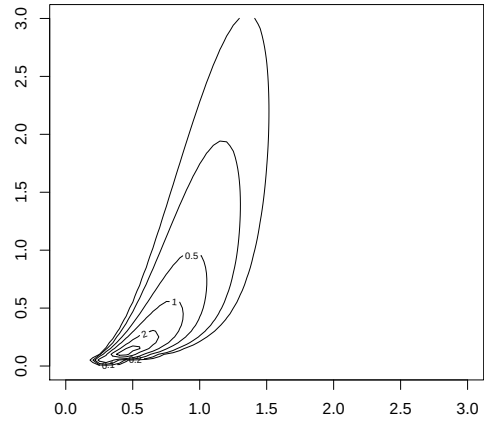


(d)

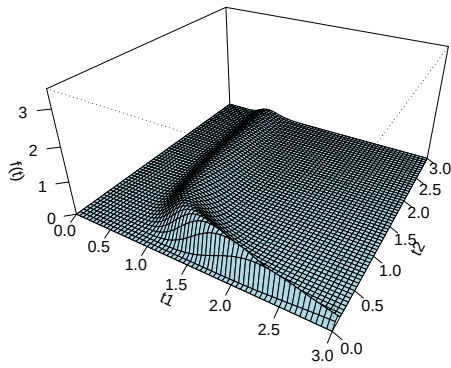
Figura 4.3: Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.5$ em (a),(b) e $\rho = -0.5$ em (c),(d) considerando $\boldsymbol{\alpha} = (0.5, 1.5)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)$.



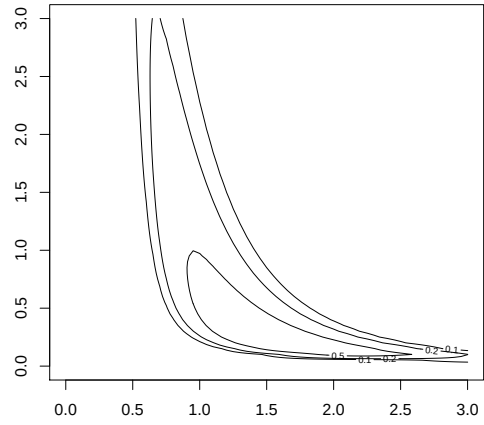
(a)



(b)

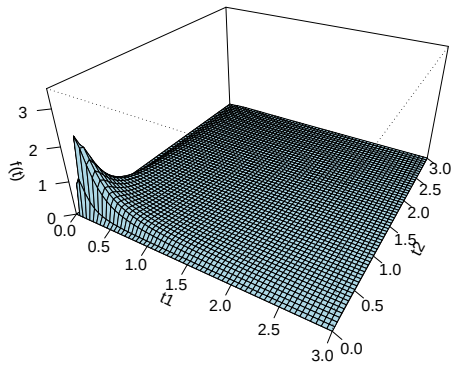


(c)

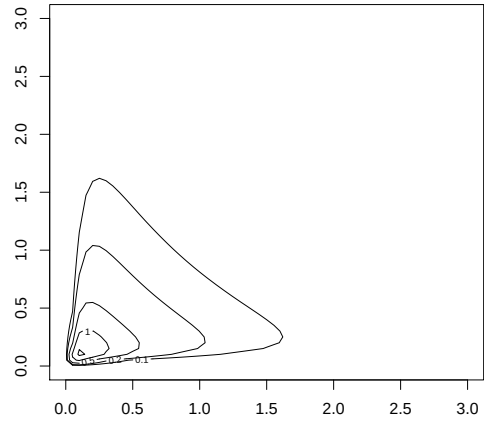


(d)

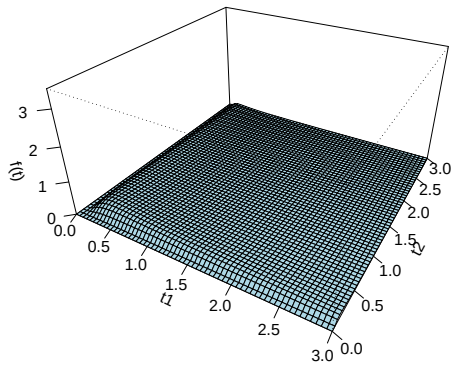
Figura 4.4: Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.9$ em (a),(b) e $\rho = -0.9$ em (c),(d) considerando $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$.



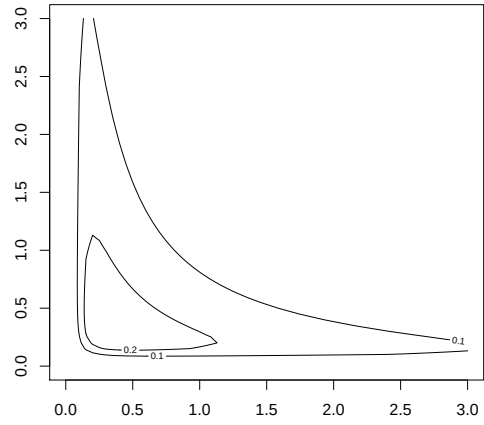
(a)



(b)

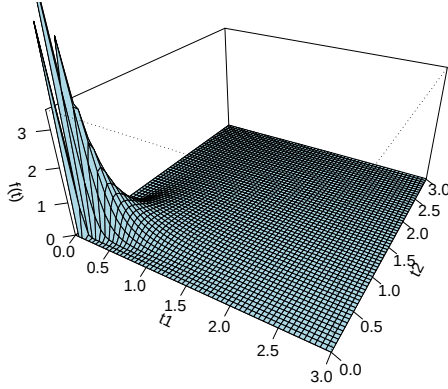


(c)

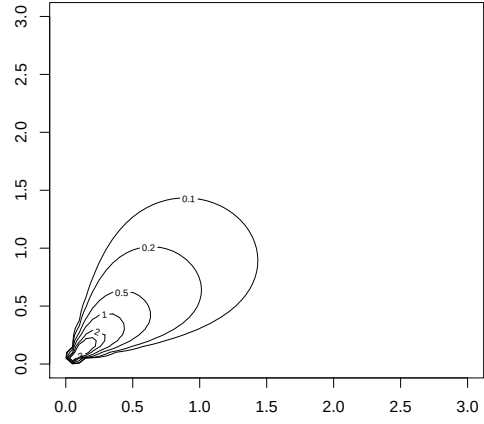


(d)

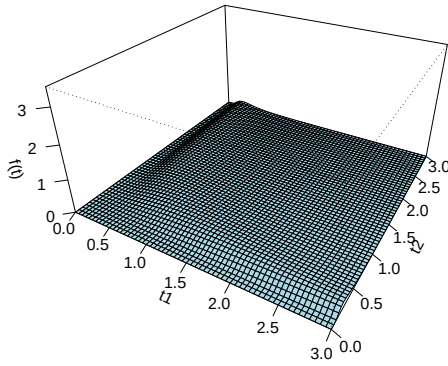
Figura 4.5: Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição BS bivariada para $\rho = 0.5$ em (a),(b) e $\rho = -0.5$ em (c),(d) considerando $\alpha = (1.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$.



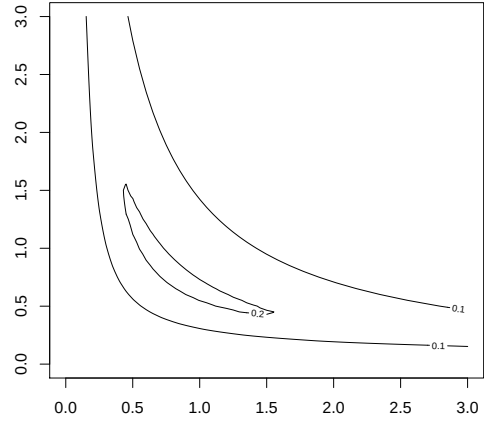
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.6: Função densidade de probabilidade e de contorno da distribuição *BS* bivariada para $\rho = 0.9$ em (a),(b) e $\rho = -0.9$ em (c),(d) considerando $\boldsymbol{\alpha} = (1.5, 1.5)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)$.

Uma propriedade importante desta distribuição é que o vetor aleatório $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^\top$, em que

$$Z_j = \frac{1}{\alpha_j} \left[\sqrt{\frac{T_j}{\beta_j}} - \sqrt{\frac{\beta_j}{T_j}} \right], \quad j = 1, 2, \quad (4.1.2)$$

tem uma distribuição conjunta normal bivariada, isto é, $\mathbf{Z} \sim N_2(0, \boldsymbol{\Sigma})$. Assim, a distribuição Birnbaum-Saunders bivariada está relacionada com a distribuição normal bivariada através da relação

$$T_j = \frac{\beta_j}{4} \left[\alpha_j Z_j + \sqrt{(\alpha_j Z_j)^2 + 4} \right]^2, \quad j = 1, 2, \quad (4.1.3)$$

onde $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^\top \sim N_2(0, \Sigma)$.

A seguir descrevemos outras propriedades da distribuição BS bivariada, que são derivadas usando a relação anterior. Se $\mathbf{T} = (T_1, T_2) \sim BS_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho)$, então

- $T_j \sim BS(\alpha_j, \beta_j)$, cada componente tem distribuição BS univariada;
- $\mathbf{c} \odot \mathbf{T} \sim BS_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{c} \odot \boldsymbol{\beta}, \rho)$ em que $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}_+^2$ e $\odot$ denota o produto Hadamard, é fechada sob escala;
- $\mathbf{T}^{-1} = (T_1^{-1}, T_2^{-1})^\top \sim BS_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{-1}, \rho)$, em que $\boldsymbol{\beta}^{-1} = (1/\beta_1, 1/\beta_2)^\top$, é fechada sob reciprocidade;
- $\mathbf{T}_1^{-1} = (T_1^{-1}, T_2)^\top \sim BS_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1^{-1}, \rho)$, em que $\boldsymbol{\beta}_1^{-1} = (1/\beta_1, \beta_2)^\top$, é fechada sob reciprocidade na primeira componente;
- $\mathbf{T}_2^{-1} = (T_1, T_2^{-1})^\top \sim BS_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2^{-1}, \rho)$, em que $\boldsymbol{\beta}_2^{-1} = (\beta_1, 1/\beta_2)^\top$, é fechada sob reciprocidade na segunda componente;
- T_1 e T_2 são independentes se, e somente se, $\rho = 0$;
- a fdp condicional de T_1 , dado $T_2 = t_2$, é

$$f_{T_1|T_2}(t_1|t_2) = \phi(a_{t_1}(\alpha_{1\rho}, \beta_1) - \mu(t_2))A_{t_1}(\alpha_{1\rho}, \beta_1),$$

onde $\phi(\cdot)$ é a fdp da distribuição $N(0, 1)$, $\alpha_{1\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}\alpha_1$ e $\mu_1(t_2) = \rho a_{t_2}(\alpha_{2\rho}, \beta_2)$, com $\alpha_{2\rho} = \sqrt{1 - \rho^2}\alpha_2$. A distribuição condicional é uma distribuição Birnbaum-Saunders não-central univariada $NBS(\alpha_{1\rho}, \beta_1, \mu_1(t_2))$; veja Guiraud et al. (2009) .

Estas propriedades são provadas em Kundu et al. (2010). Além disso, nesse artigo é discutido os estimadores de máxima verossimilhança (EMV), que é obtido como solução numérica de um processo de otimização. A distribuição assintótica dos EMV também é discutida, e usada para construir intervalos de confiança para os parâmetros do modelo. A generalização multivariada da BS é desenvolvida seguindo as mesmas idéias do artigo Kundu et al. (2010) e é discutida no artigo Kundu et al. (2013).

A distribuição BS bivariada proposta por Kundu et al. (2010) pode não ser conveniente para modelar dados contendo observações extremas, ou observações aberrantes, devido a sua estreita relação com a distribuição normal bivariada, que em muitas situações não é conveniente, pois os EMV são sensíveis às observações atípicas. Para resolver este problema, em Vilca et al. (2014b), os autores exploram a relação entre a BS bivariada e a normal bivariada para obter-se uma classe geral de distribuições BS bivariadas baseadas sobre a família de distribuições mistura de escala normal (SMN). Esta nova classe de distribuições de tipo BS bivariada é chamada de distribuições Birnbaum Saunders mistura de escala normal bivariada (SBS).

A família de distribuições SMN fornece distribuições de caudas mas ou menos pesadas, em relação da distribuição normal, que são freqüentemente usadas para estimação robusta de parâmetros ; veja por exemplo, Andrews e Mallows (1974), Lange e Sinsheimer (1993) e Lucas (1997).

Dizemos que um vetor aleatório p -variada $\mathbf{Z}$ tem uma distribuição SMN (Lange e Sinsheimer, 1993) se ele admite a seguinte representação estocástica dada por

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + \sqrt{k(U)}\mathbf{Z}_0, \quad (4.1.4)$$

onde $\mathbf{Z}_0 \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ e $k(U)$ é uma função positiva de uma variável aleatória positiva U independentemente distribuída de $\mathbf{Z}_0$. Note que, dado $U = u$, $\mathbf{Z}$ segue uma distribuição normal p -variada com vetor de média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $k(u)\boldsymbol{\Sigma}$. Portanto, a fdp de $\mathbf{Z}$ pode ser expressada como

$$\phi_{SMN}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \int_0^\infty \phi_p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\mu}, k(u)\boldsymbol{\Sigma})dH(u; \boldsymbol{\nu}),$$

onde $\phi_p(\cdot; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ denota a fdp da distribuição normal p -variada com vetor de média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$, e $H(u; \boldsymbol{\nu})$ é a fda de U com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\nu}$.

Um caso especial dessa distribuição é a distribuição normal, obtida para $k(U) = 1$. Quando $k(U) = 1/U$, a distribuição de $\mathbf{Z}$ reduz-se a distribuição normal independente (NI) discutida por Lange e Sinsheimer (1993) e Fernandez e Steel (2000). Para $k(U) = U$, a distribuição de $\mathbf{Z}$ é a distribuição SMN estudada por Cambanis et al. (2000).

4.2 Distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa Bivariada

Antes de discutir a versão bivariada da distribuição BSIG vamos apresentar a distribuição Normal Inversa Gaussiana bivariada simétrica.

Nesta seção, apresentamos um caso especial de uma distribuição bivariada SMN. Na equação (4.1.4), vamos considerar $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e $k(U) = U$, onde U segue uma distribuição Gaussiana Inversa. Dessa maneira, definimos a distribuição Normal Inversa Gaussiana bivariada simétrica.

Dizemos que $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2)^\top$ tem uma distribuição Normal Inversa Gaussiana bivariada se $\mathbf{Z} = \sqrt{U}\mathbf{Z}_0$, onde $\mathbf{Z}_0 \sim N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ e $U \sim IG(\delta, \gamma)$, com $\mathbf{Z}_0$ e U variáveis aleatórias independentes. Esta distribuição será denotada por $\mathbf{Z} \sim NIGS_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}, \delta, \gamma)$.

Seja $h(u) = h(u; \delta, \gamma)$ a função densidade da distribuição Gaussiana Inversa definida em (2.2.6). Observamos que $\mathbf{Z}$, dado $U = u$, tem uma distribuição normal bivariada, isto é $\mathbf{Z}|U = u \sim$

$N_2(0, u\mathbf{\Sigma})$. Portanto, a fdp de $\mathbf{Z}$ é obtida como segue

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \int_0^\infty f(\mathbf{z}|u)h(u)du \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi u\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2u}\mathbf{z}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}\right\} \frac{\delta u^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\delta\gamma\} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2}{u} + \gamma^2 u\right)\right\} du \\
&= \frac{\delta}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{\delta\gamma\} \int_0^\infty u^{-5/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{z}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{z} + \delta^2}{u} + \gamma^2 u\right)\right\} du \\
&= \frac{\delta}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{\delta\gamma\} \int_0^\infty u^{-5/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d(\mathbf{z}) + \delta^2}{u} + \gamma^2 u\right)\right\} du,
\end{aligned}$$

onde $d(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}$. Logo, fazendo a mudança de variável $u = \frac{\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}{\gamma}y$, temos

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) &= \frac{\delta}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{\delta\gamma\} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}{\gamma}y\right)^{-5/2} \times \\
&\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d(\mathbf{z}) + \delta^2}{\left(\frac{\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}{\gamma}y\right)} + \gamma^2 \left(\frac{\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}{\gamma}y\right)\right)\right\} \left(\frac{\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}{\gamma}\right) dy \\
&= \frac{\delta}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{\delta\gamma\} \left(\frac{\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}{\gamma}\right)^{-3/2} \int_0^\infty y^{-5/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}\left(\frac{1}{y} + y\right)\right\} dy \\
&= \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \left(\frac{\gamma}{\pi\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}\right)^{3/2} \exp(\delta\gamma) K_{3/2}\left(\gamma\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}\right).
\end{aligned}$$

Proposição 4.2.1. A fdp de $\mathbf{Z} \sim NIGS_2(0, \mathbf{\Sigma}; \delta, \gamma)$ é dada por

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \frac{\delta}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \left(\frac{\gamma}{\pi\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}}\right)^{3/2} \exp(\delta\gamma) K_{3/2}\left(\gamma\sqrt{d(\mathbf{z})+\delta^2}\right), \quad (4.2.1)$$

onde $d(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^\top \mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{z}$.

Agora definimos a distribuição principal que desejamos estudar. Análogo à distribuição BS bivariada de Kundu et al. (2010), vamos definir a distribuição Birnbaum-Saunders baseado na distribuição NIG, considerando a seguinte representação estocástica para T_1 e T_2 :

$$T_j = \frac{\beta_j}{4} \left[\alpha_j \sqrt{U} Z_{0j} + \sqrt{(\alpha_j \sqrt{U} Z_{0j})^2 + 4} \right]^2, \quad j = 1, 2, \quad (4.2.2)$$

onde $\mathbf{Z}_0 = (Z_{01}, Z_{02}) \sim N_2(0, \mathbf{\Sigma})$ e $U \sim IG(\delta, \gamma)$, isto é, $\mathbf{Z} = \sqrt{U}\mathbf{Z}_0 \sim NIG_2(0, \mathbf{\Sigma}; \gamma, \delta)$. Assim, o vetor $\mathbf{T} = (T_1, T_2)^\top$ diz-se ter uma distribuição Birnbaum Saunders Gaussiana Inversa bivariada com parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e ρ , a qual denotamos por $\mathbf{T} \sim BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$.

Observemos que a representação individual de T_j em (4.2.2) corresponde a representação em (2.3.3) para o caso univariado. Assim, a representação conjunta em (4.2.2) é uma extensão natural desse modelo ao caso bivariado. Por outro lado, a distribuição BSIG bivariada é um caso especial da classe mais geral de distribuições Birnbaum-Saunders escala mistura normal bivariada (SBS) estudada em Vilca et al. (2014b).

A representação estocástica em (4.2.2) é útil para simulação de dados e também para implementar o algoritmo EM para estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros no modelo BSIG bivariado, como será discutido mais à frente.

Teorema 4.2.2. *Seja $\mathbf{T} \sim BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$. Então, a fdp de $\mathbf{T}$ é*

$$f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = \frac{\delta \exp(\delta\gamma)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} \left(\frac{\gamma}{\pi\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2}} \right)^{3/2} K_{3/2} \left(\gamma\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2} \right) A_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_2^+, \quad (4.2.3)$$

onde $d(\mathbf{t}) = \mathbf{a}_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{a}_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{a}_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (a_{t_1}(\alpha_1, \beta_1), a_{t_2}(\alpha_2, \beta_2))$ e $A_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = A_{t_1}(\alpha_1, \beta_1)A_{t_2}(\alpha_2, \beta_2)$ com

$$a_{t_j}(\alpha_j, \beta_j) = \frac{1}{\alpha_j} \left[\sqrt{\frac{T_j}{\beta_j}} - \sqrt{\frac{\beta_j}{T_j}} \right] \quad e \quad A_{t_j}(\alpha_j, \beta_j) = \frac{t_j + \beta_j}{2\alpha_j\sqrt{\beta_j}\sqrt{t_j^3}}.$$

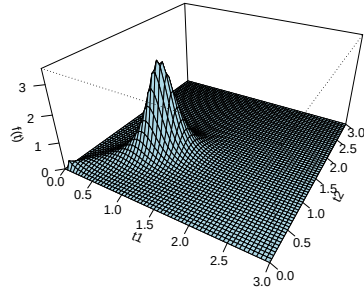
Demonstração. Segue do método Jacobiano que

$$f_{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) = f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{a}_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))A_{\mathbf{t}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}),$$

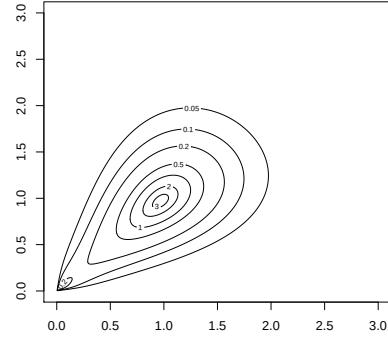
onde $f_{\mathbf{Z}}$ é a fdp da distribuição Normal Inversa Gaussiana definida em (4.2.1). □

Análogo ao caso univariado, podemos considerar a reparametrização da Gaussiana Inversa de um só parâmetro. Assim, vamos a ter uma distribuição $BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \eta, \eta^2)$, que depende de η como parâmetro adicional a $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e ρ .

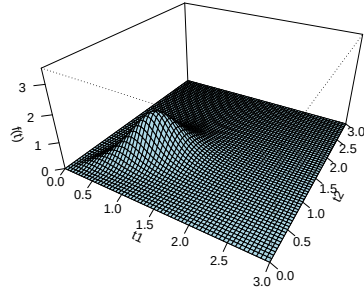
Nas Figuras 4.7-4.18 são apresentadas alguns gráficos da fdp da distribuição $BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \eta, \eta^2)$ para diferentes valores dos parâmetros. Notemos que para $\eta = 1$ a fdp da distribuição BSIG bivariada tem caudas mais pesadas.



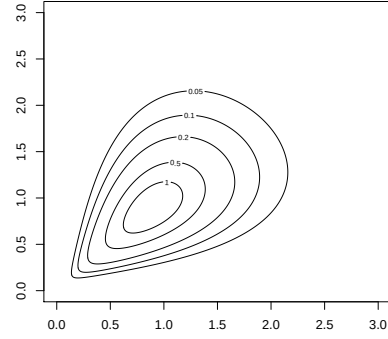
(a)



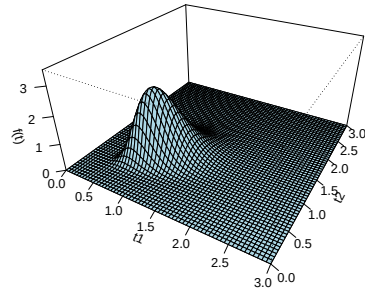
(b)



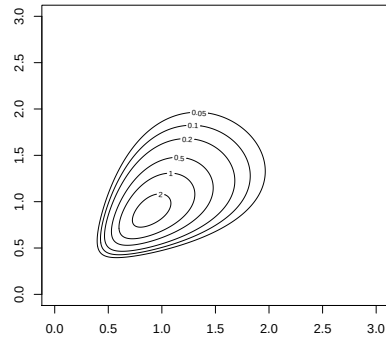
(c)



(d)

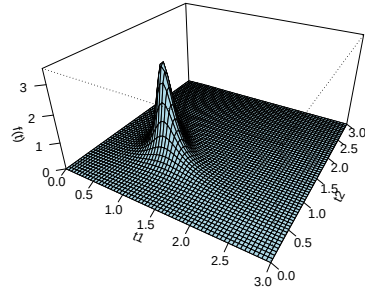


(e)

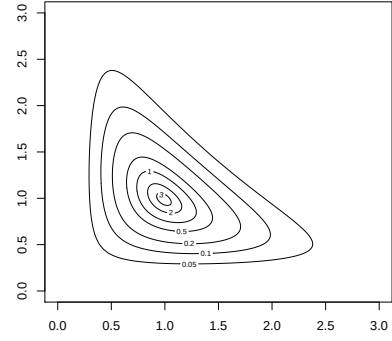


(f)

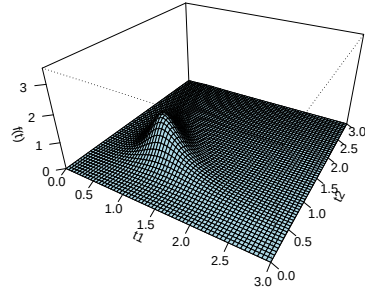
Figura 4.7: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b), $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.5$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$.



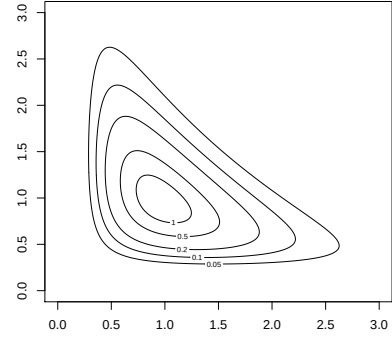
(a)



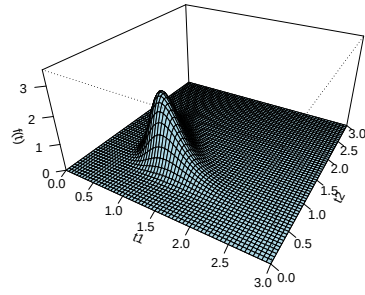
(b)



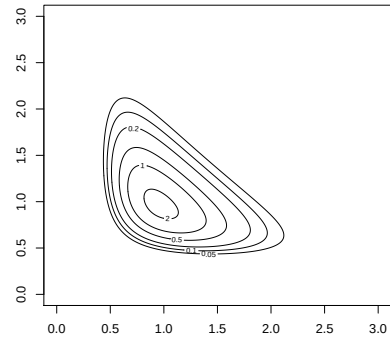
(c)



(d)

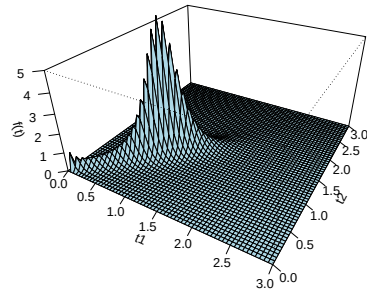


(e)

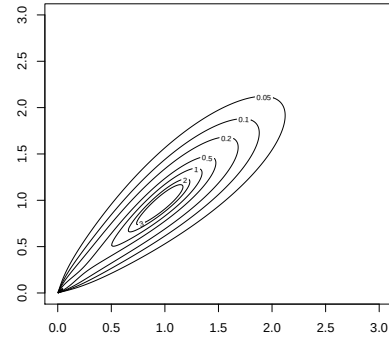


(f)

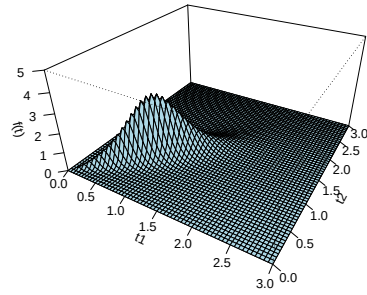
Figura 4.8: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.5$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$.



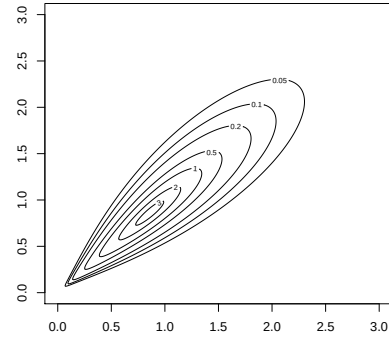
(a)



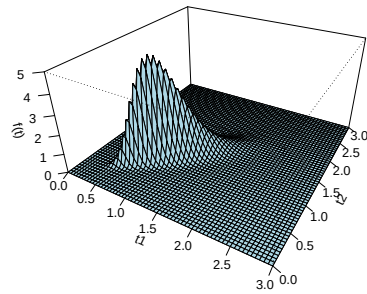
(b)



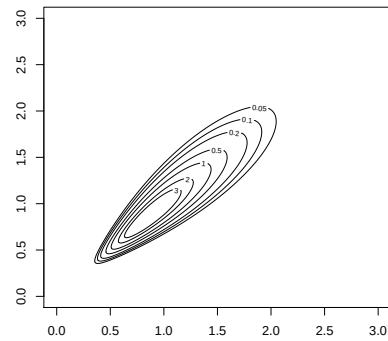
(c)



(d)

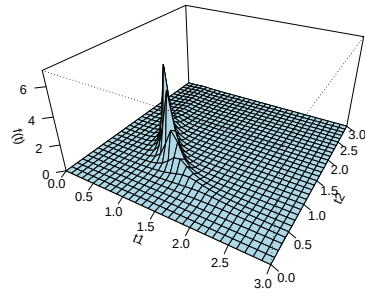


(e)

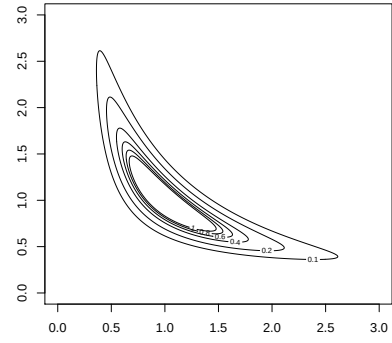


(f)

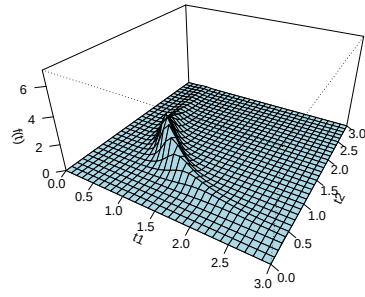
Figura 4.9: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.9$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$.



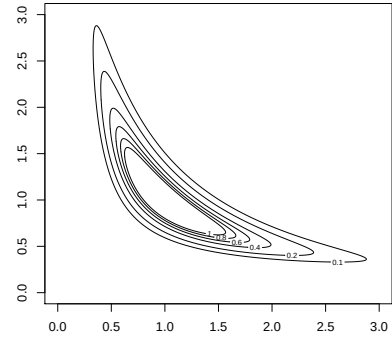
(a)



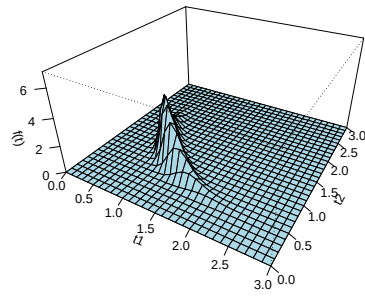
(b)



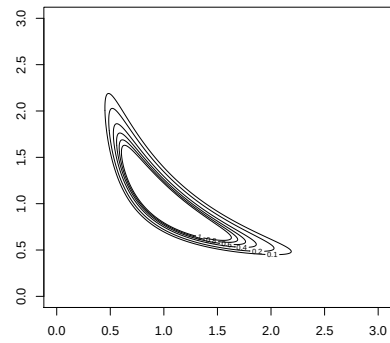
(c)



(d)

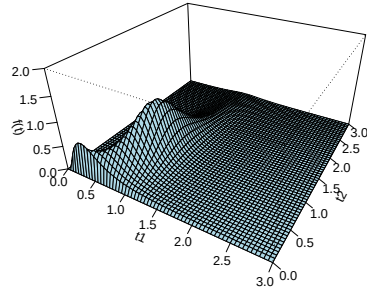


(e)

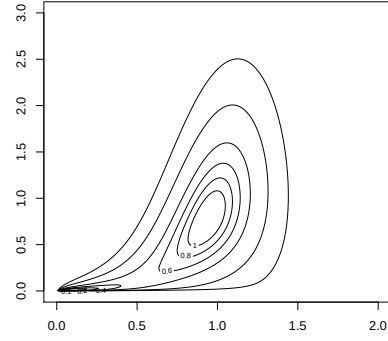


(f)

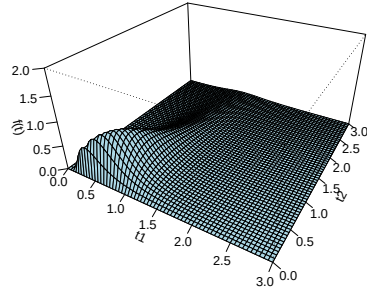
Figura 4.10: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.9$, $\alpha = (0.5, 0.5)$, $\beta = (1, 1)$.



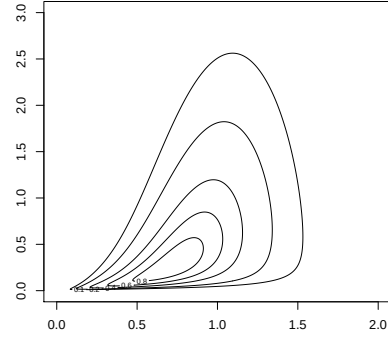
(a)



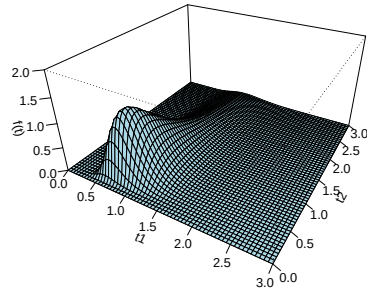
(b)



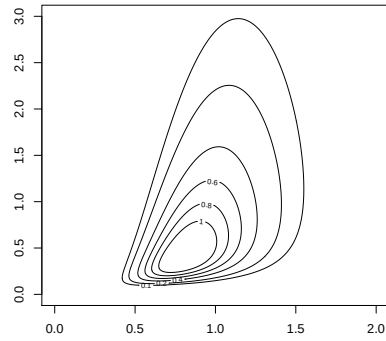
(c)



(d)

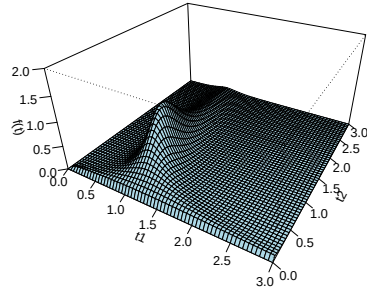


(e)

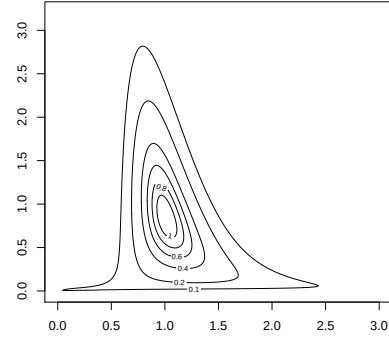


(f)

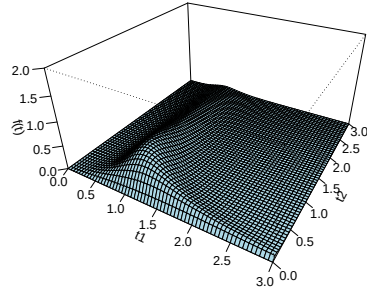
Figura 4.11: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.5$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$.



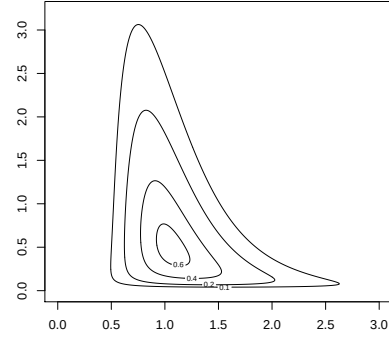
(a)



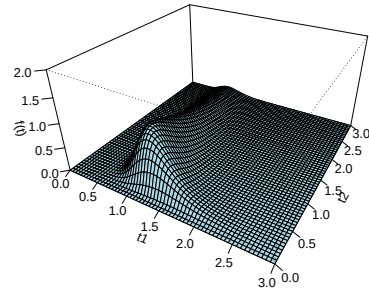
(b)



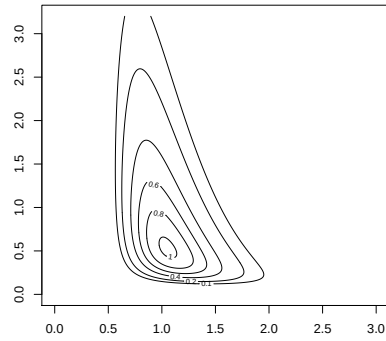
(c)



(d)

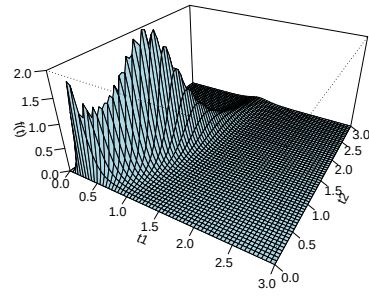


(e)

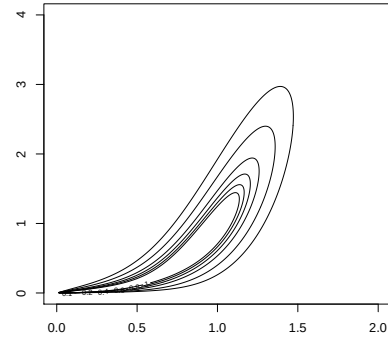


(f)

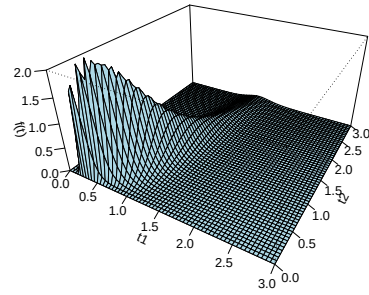
Figura 4.12: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.5$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$.



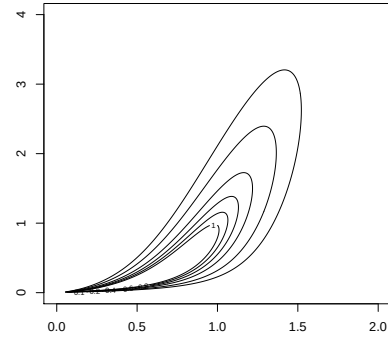
(a)



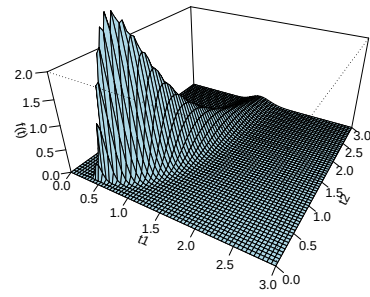
(b)



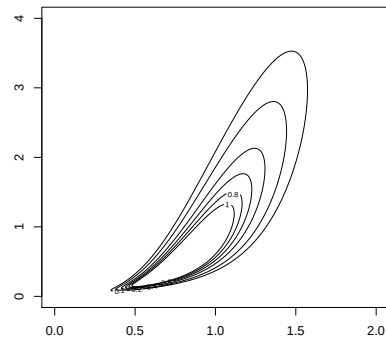
(c)



(d)

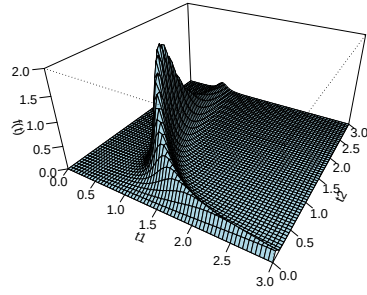


(e)

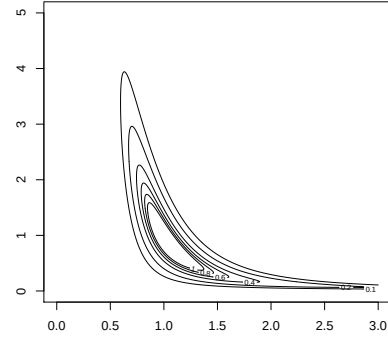


(f)

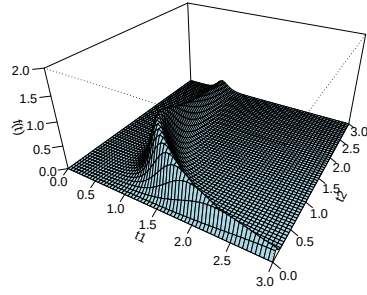
Figura 4.13: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.9$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$.



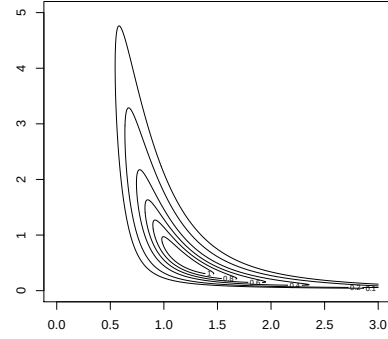
(a)



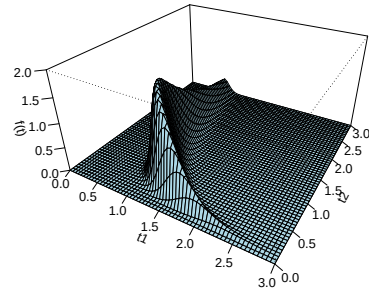
(b)



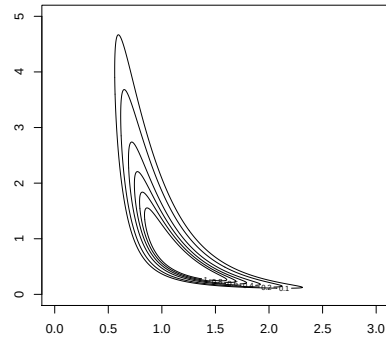
(c)



(d)

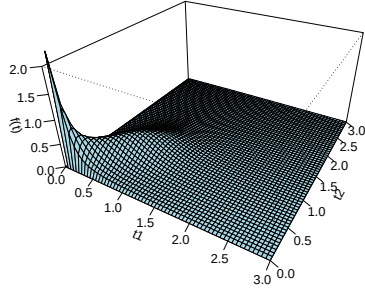


(e)

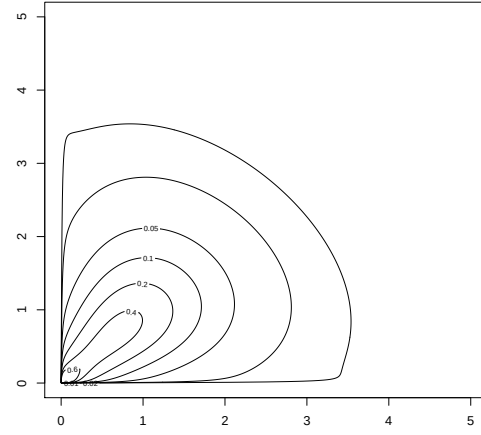


(f)

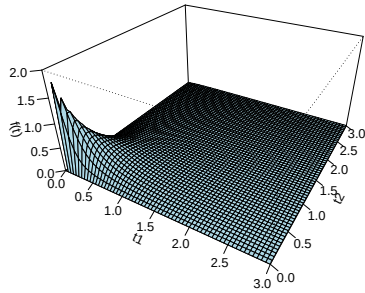
Figura 4.14: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.9$, $\alpha = (0.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$.



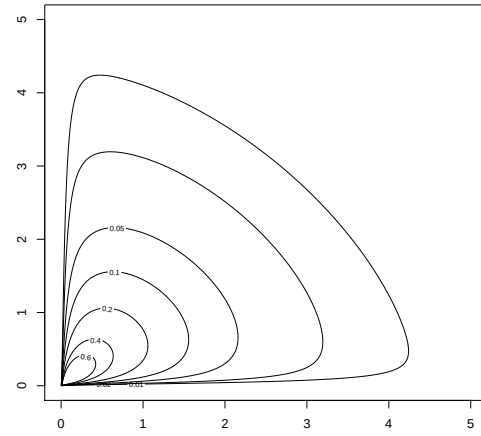
(a)



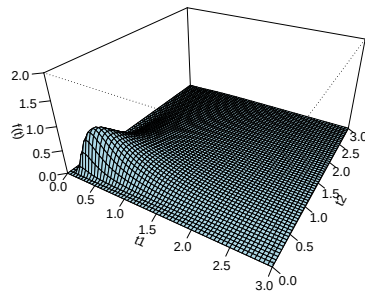
(b)



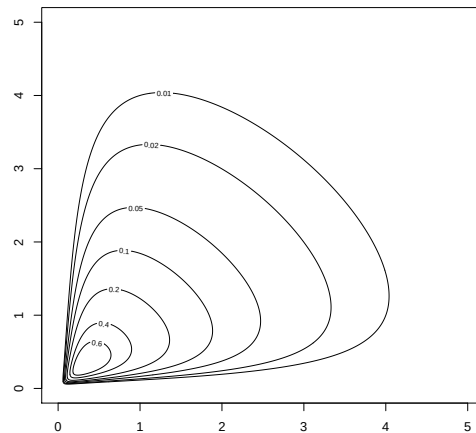
(c)



(d)

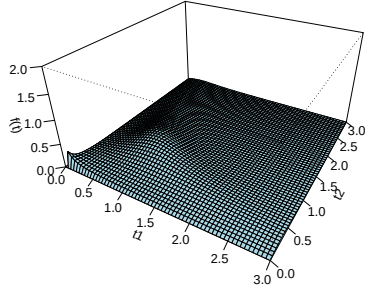


(e)

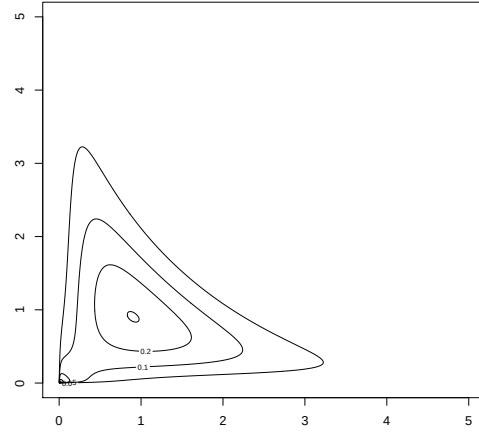


(f)

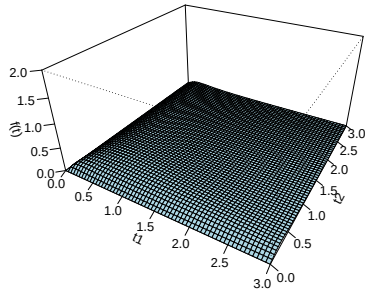
Figura 4.15: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.5$, $\alpha = (1.5, 1.5)$,



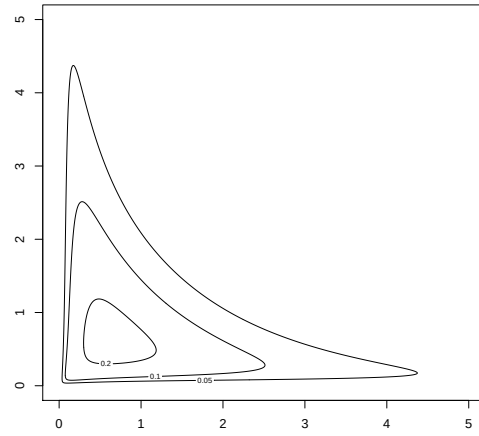
(a)



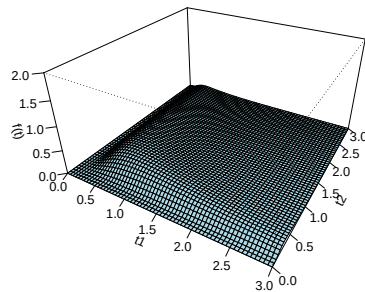
(b)



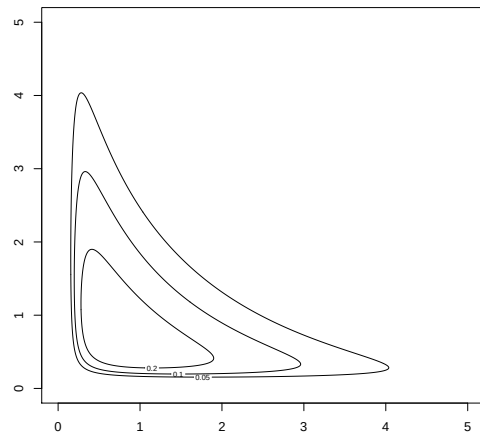
(c)



(d)

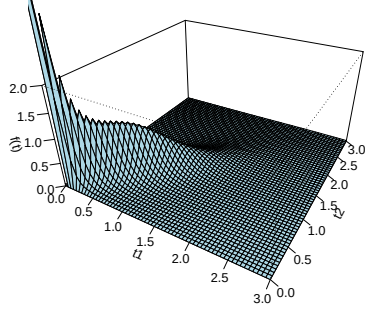


(e)

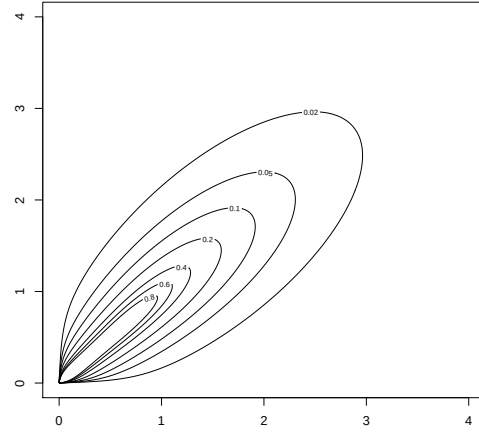


(f)

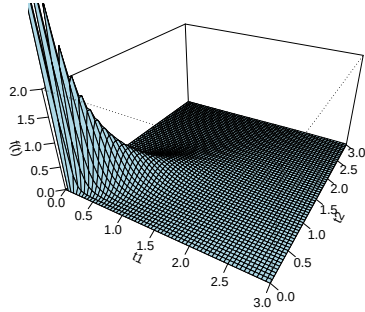
Figura 4.16: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.5$, $\alpha = (1.5, 1.5)$,



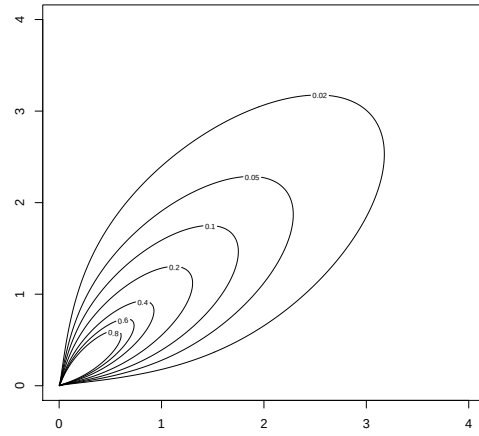
(a)



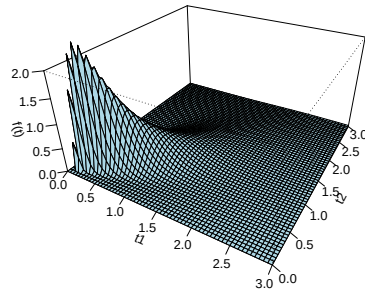
(b)



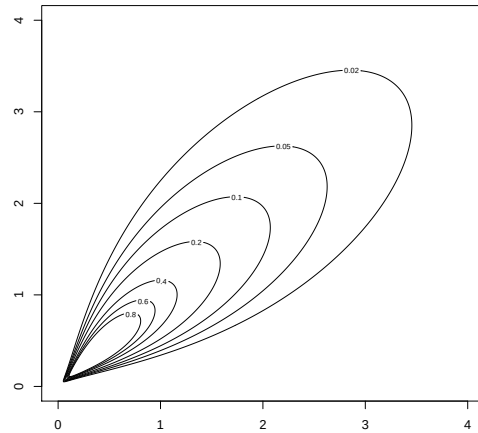
(c)



(d)

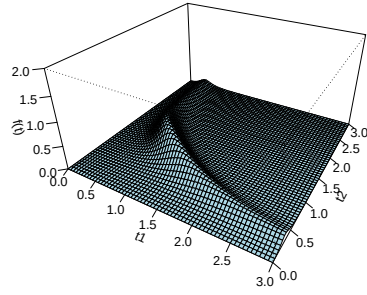


(e)

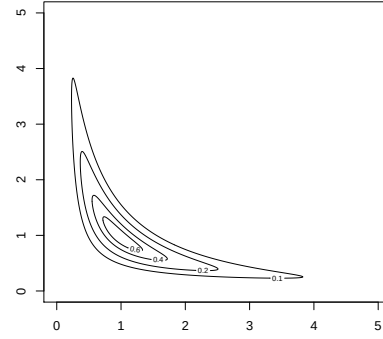


(f)

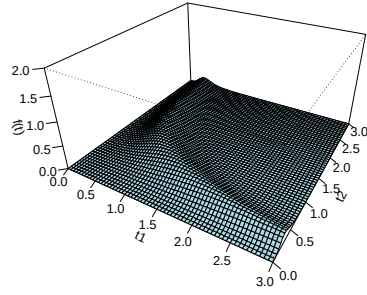
Figura 4.17: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = 0.9$, $\alpha = (1.5, 1.5)$,



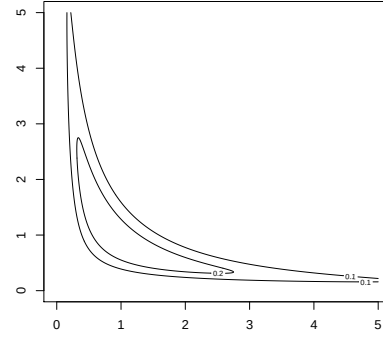
(a)



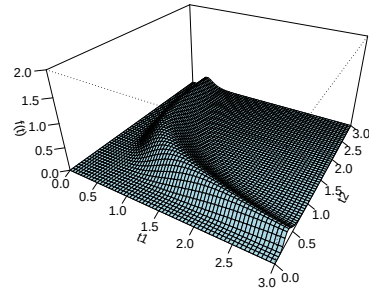
(b)



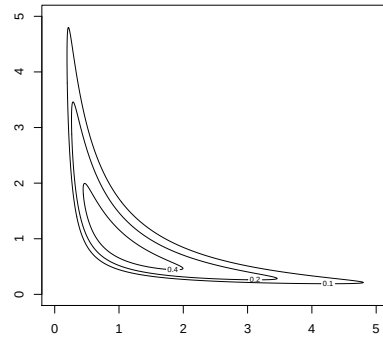
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 4.18: Função densidade de probabilidade e contorno da distribuição *BSIG* bivariada para $\eta = 0.5$ em (a) e (b) e $\eta = 1$ em (c) e (d), $\eta = 3$ em (e) e (f), considerando $\rho = -0.9$, $\alpha = (1.5, 1.5)$, $\beta = (1, 1)$.

4.3 Propriedades da Distribuição BSIG Bivariada

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades da distribuição BSIG bivariada que usaremos mais à frente. Estas podem ser mostradas usando a representação estocástica dada em (4.2.2) e as propriedades das distribuições IG e normal bivariada.

Teorema 4.3.1. *Seja $\mathbf{T} \sim \text{BSNIG}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$. Então*

- (i) $\mathbf{c} \odot \mathbf{T} \sim \text{BSIG}_2(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{c} \odot \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$ onde $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}_+^2$ e $\odot$ denota o produto Hadamard;
- (ii) $\mathbf{T}^{-1} = (T_1^{-1}, T_2^{-1}) \sim \text{BSIG}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}^{-1}, \rho; \delta, \gamma)$, onde $\boldsymbol{\beta}^{-1} = (\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1})^\top$;
- (iii) $\mathbf{T}_1^{-1} = (T_1^{-1}, T_2)^\top \sim \text{BSIG}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1^{-1}, -\rho; \delta, \gamma)$, onde $\boldsymbol{\beta}_1^{-1} = (\frac{1}{\beta_1}, \beta_2)^\top$;
- (iv) $\mathbf{T}_2^{-1} = (T_1, T_2^{-1})^\top \sim \text{BSIG}_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_2^{-1}, -\rho; \delta, \gamma)$, onde $\boldsymbol{\beta}_2^{-1} = (\beta_1, \frac{1}{\beta_2})^\top$.

Observação 4.3.2. *A parte (i) do Teorema 4.3.1 diz que a distribuição BSIG bivariada pertence a família de tipo escala, enquanto que as partes (ii)-(iv) dizem que essas distribuições são fechadas sob reciprocidade, para ambos deles ou para um deles.*

Do Teorema 4.3.1, em que $(\alpha_1 T_1 / \beta_1, \alpha_2 T_2 / \beta_2)^\top \sim \text{BSIG}_2(\alpha, \alpha, \rho; \delta, \gamma)$ e $(T_1 / \beta_1, T_2 / \beta_2)^\top \sim \text{BSIG}_2(\alpha, 1_2, \rho; \delta, \gamma)$, $1_2 = (1, 1)^\top$. Vemos que a distribuição de T_1 / β_1 e T_2 / β_2 não depende de β_1 e β_2 . Em particular, as distribuições de $T_1 T_2 / (\beta_1 \beta_2)$ e $\sqrt{T_1 T_2} / \sqrt{\beta_1 \beta_2}$ não dependem de β_1 e β_2 . A seguir vamos a calcular $E[T_1 T_2 / (\beta_1 \beta_2)]$ e $E[\sqrt{T_1 T_2} / \sqrt{\beta_1 \beta_2}]$.

Usando os resultados de Kundu et al. (2010) e Vilca et al. (2014b), temos que

$$\begin{aligned} E \left[\frac{T_1 T_2}{\beta_1 \beta_2} \right] &= E_U \left\{ E \left[\frac{T_1 T_2}{\beta_1 \beta_2} | U = u \right] \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)E[U] + \frac{1}{4}\alpha_1^2\alpha_2^2(1 + \rho^2)E[U^2] + \alpha_1\alpha_2 I_1 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\frac{\delta}{\gamma} + \frac{1}{4}\alpha_1^2\alpha_2^2(1 + \rho^2)\frac{\delta}{\gamma^3}(\gamma\delta + 1) + \alpha_1\alpha_2 I_1. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos a outra esperança

$$\begin{aligned} E \left[\sqrt{\frac{T_1 T_2}{\beta_1 \beta_2}} \right] &= \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2 E[U] + I_2 \\ &= \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2 \frac{\delta}{\gamma} + I_2, \end{aligned}$$

onde

$$I_1 = E \left[Z_1 Z_2 \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{2} Z_1 \right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{2} Z_2 \right)^2 + 1} \right] \quad (4.3.1)$$

e

$$I_2 = E \left[\sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{2} Z_1 \right)^2 + 1} \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{2} Z_2 \right)^2 + 1} \right] \quad (4.3.2)$$

Podemos usar séries de Taylor para calcular tais integrais, dessa maneira obteremos:

$$\begin{aligned}
I_1 &= a_{0,0} + \frac{1}{2^3} a_{0,1} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \frac{1}{2^6} \alpha_1^2 \alpha_2^2 a_{1,1} \\
&+ \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(2i-3)!!}{2^{3i} i!} a_{0,i} (\alpha_1^{2i} + \alpha_2^{2i}) \\
&+ \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(2i-3)!!}{2^{3i+3} i!} a_{1,i} (\alpha_1^2 \alpha_2^{2i} + \alpha_2^2 \alpha_1^{2i}) \\
&+ \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} (-1)^{j-1} (2i-3)!! (2j-3)!!}{2^{3i} 2^{3j} i! j!} \alpha_1^{2i} \alpha_2^{2j} a_{i,j},
\end{aligned}$$

onde

$$a_{m,n} = E \left[Z_1^{2m+1} Z_2^{2n+1} \right] = \frac{(2m+1)!(2n+1)!}{2^{m+n}} \sum_{i=0}^{\min\{m,n\}} \frac{(2\rho)^{2i+1}}{(m-i)!(n-i)!(2i+1)!},$$

e analogamente

$$\begin{aligned}
I_2 &= 1 + \frac{1}{2^3} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} (2i-3)!!}{2^{3i} i!} b_{0,i} (\alpha_1^{2i} + \alpha_2^{2i}) \\
&+ \frac{1}{2^6} \alpha_1^2 \alpha_2^2 (1 + 2\rho^2) + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i-1} \frac{(2i-3)!!}{2^{3i+3} i!} b_{1,i} (\alpha_1 \alpha_2^{2i} + \alpha_2 \alpha_1^{2i}) \\
&+ \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} (-1)^{j-1} (2i-3)!! (2j-3)!!}{2^{3i} 2^{3j} i! j!} \alpha_1^{2i} \alpha_2^{2j} b_{i,j},
\end{aligned}$$

onde

$$b_{m,n} = E \left[Z_1^{2m} Z_2^{2n} \right] = \frac{(2m)!(2n)!}{2^{m+n}} \sum_{i=0}^{\min\{n,m\}} \frac{(2\rho)^{2i}}{(m-i)!(n-i)!(2i)!},$$

e $(2i-1)!! = (2i-1)(2i-3)\dots(3)(1)$.

Teorema 4.3.3. *Seja $\mathbf{T} = (T_1, T_2)^\top \sim BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$. Então, os elementos do vetor de médias e a matriz de covariâncias são*

$$E[T_i] = \frac{\beta_i}{2} \left(2 + \frac{\delta}{\gamma} \alpha_i^2 \right),$$

$$Var[T_i] = \frac{\beta_i^2 \alpha_i^2 \delta}{4\gamma} \left[4 + \left(\frac{5\delta}{\gamma} + \frac{6}{\gamma^2} \right) \alpha_i^2 \right],$$

$$Cov(T_1, T_2) = \beta_1 \beta_2 \left[\frac{1}{4} \alpha_1^2 \alpha_2^2 \left((1 + \rho^2) \frac{\delta}{\gamma^3} (\delta\gamma + 1) - \frac{\delta^2}{\gamma^2} + \alpha_1 \alpha_2 I_1 \right) \right],$$

onde I_1 é dado em (4.3.1).

No seguinte Teorema, apresentamos as distribuições marginais e condicionais da distribuição BSIG bivariada.

Teorema 4.3.4. *Seja $\mathbf{T} = (T_1, T_2)^\top \sim BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$ com $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^\top$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$. Então*

(i) $T_i \sim BSIG(\alpha_i, \beta_i, \delta, \gamma)$, $i = 1, 2$;

(ii) *A densidade da condicional $T_1|(T_2 = t_2)$ é dada por*

$$f_{T_1|T_2}(t_1|t_2) = \left(\frac{\gamma}{2\pi(1-\rho^2)} \right)^{1/2} \frac{(a_{t_2}^2 + \delta^2)^{1/2}}{(d(\mathbf{t}) + \delta^2)^{3/4}} \frac{K_{3/2}(\gamma\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2})}{K_1(\gamma\sqrt{a_{t_2}^2 + \delta^2})} A_{t_1}(\alpha_1, \beta_1).$$

Teorema 4.3.5. *Seja $\mathbf{T} \sim BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$. Então:*

(i) $U|(\mathbf{T} = \mathbf{t}) \sim GIG(-3/2, \sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2}, \gamma)$;

(ii) *Os r -ésimos momentos condicionais de $U^r|(\mathbf{T} = \mathbf{t})$ são dados por*

$$E(U^r|\mathbf{T} = \mathbf{t}) = \frac{K_{r-3/2}(\gamma\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2})}{K_{-3/2}(\gamma\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2})} \left(\frac{\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2}}{\gamma} \right)^r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $r = -1$ temos

$$E(1/U|\mathbf{T} = \mathbf{t}) = \frac{K_{5/2}(\gamma\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2})}{K_{3/2}(\gamma\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2})} \frac{\gamma}{\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2}}.$$

Demonstração. i) Note que

$$\begin{aligned} h_{U|\mathbf{T}}(u|\mathbf{t}) &= \frac{\phi_2(a_t(\sqrt{u}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))A_t(\sqrt{u}\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})h_U(u)}{\phi_{NIG_2}(a_t(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))A_t(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})} \\ &= \frac{\phi_2\left(\frac{1}{\sqrt{u}}a_t(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})\right)h_U(u)}{u\phi_{NIG_2}(a_t(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}))} \\ &= \left(\frac{\gamma}{\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2}} \right)^{-3/2} \frac{u^{-5/2}}{2K_{-3/2}(\gamma\sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2})} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{d(\mathbf{t}) + \delta^2}{u} + \gamma^2 u \right) \right\}. \end{aligned}$$

Assim, temos que $U|\mathbf{T} \sim GIG(-3/2, \sqrt{d(\mathbf{t}) + \delta^2}, \gamma)$. ii) É obtida diretamente pelo Teorema 2.3.1. $\square$

4.4 Estimação de parâmetros

Nesta seção, discutimos métodos de estimação baseados nos estimadores de momentos modificados (EMM) e estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para os parâmetros desconhecidos do modelo baseada com base em uma amostra aleatória $\mathbf{T}_1 = (T_{11}, T_{21})^\top, \dots, \mathbf{T}_n = (T_{1n}, T_{2n})^\top$ de $\mathbf{T} = (T_1, T_2) \sim BSIG_2(\alpha, \beta, \rho; \delta, \gamma)$. Seguindo os mesmos argumentos de Lange et al. (1989) e Lucas (1997), assumiremos que os parâmetros δ e γ , que indexam a distribuição IG, são fixos, mais ainda, dada a reparametrização da IG na Seção 2.2.2, vamos considerar $\delta = \eta$ e $\gamma = \eta^2$. Assim o vetor de parâmetros a ser estimado é $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}^\top, \boldsymbol{\beta}^\top, \rho)^\top$.

4.4.1 Método de momentos

Seguindo as idéias de Ng et al. (2003), Leiva et al. (2008) e Kundu et al. (2010), obtemos os EMM de $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^\top$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)^\top$ que tem seus elementos como

$$\hat{\alpha}_{Mj} = \sqrt{\frac{2}{c}} \left\{ \left(\frac{S_j}{R_j} \right)^{1/2} - 1 \right\}^{1/2} \quad \text{e} \quad \hat{\beta}_{Mj} = (S_j R_j)^{1/2}, \quad (4.4.1)$$

onde $c = E[U] = \frac{\delta}{\gamma}$, $S_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{ji}$ e $R_j = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{ji}^{-1} \right]^{-1}$, para $j = 1, 2$. Também, o EMM de ρ é

$$\hat{\rho}_M = \frac{\sum_{i=1}^n a_{T_{1i}}(1, \hat{\beta}_{M1}) a_{T_{2i}}(1, \hat{\beta}_{M2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \{a_{T_{1i}}(1, \hat{\beta}_{M1})\}^2 \sum_{i=1}^n \{a_{T_{2i}}(1, \hat{\beta}_{M2})\}^2}} \quad (4.4.2)$$

Como os estimadores EMM são explícitos, eles podem facilmente ser calculados, e podem ser usados efetivamente como valores iniciais no procedimento iterativo para calcular os EMV. Na próxima seção, descrevemos o algoritmo EM para achar os EMV.

4.4.2 Estimativa de máxima verossimilhança via algoritmo EM

A obtenção do EMV do vetor de parâmetros será baseada no algoritmo EM. O algoritmo EM (Dempster et al., 1977) é amplamente aplicável para o cálculo iterativo de estimativas de máxima verossimilhança, sendo bastante útil para problemas com dados incompletos.

Seja $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n$ uma amostra aleatória de tamanho n , onde $\mathbf{T}_i \sim BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$ para $i = 1, \dots, n$, com $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}_+^2$ e $-1 < \rho < 1$. A seguir, descrevemos a implementação do algoritmo ECM para estimação EMV dos parâmetros da distribuição BSIG.

Denotemos por $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}^\top, \boldsymbol{\beta}^\top, \rho)^\top$ o vetor de parâmetros, $l_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}_c)$ a log-verossimilhança dos dados completos, e $Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) = E[l_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}_c)|\mathbf{t}, \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ o seu valor esperado condicionado nos dados observados.

O modelo em (4.2.2) pode-se escrever hierarquicamente como

$$\mathbf{T}_i | (U_i = u_i) \sim BS_2(\sqrt{u_i} \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad (4.4.3)$$

$$U_i \sim IG(\delta, \gamma) \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4.4)$$

Da representação hierárquica dada na equação (4.4.3), segue-se que a log-verossimilhança completa associada com $\mathbf{t}_c = [\mathbf{t}^\top, u^\top]^\top$ é dada por

$$l_c(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{t}_c) \propto -n \log(\alpha_1 \alpha_2) - \frac{n}{2} \log(\beta_1 \beta_2) - \frac{n}{2} \log(1 - \rho^2) + \sum_{i=1}^n \{ \varrho(t_{1i}, \beta_1) + \varrho(t_{2i}, \beta_2) \} \\ - \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i} \left\{ \frac{\xi^2(t_{1i}, \beta_1)}{\alpha_1^2} - \frac{2\rho \xi(t_{1i}, \beta_1) \xi(t_{2i}, \beta_2)}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{\xi^2(t_{2i}, \beta_2)}{\alpha_2^2} \right\},$$

onde $\xi(t, a) = \sqrt{t/a} - \sqrt{a/t}$ e $\varrho(t, a) = \log(t + a)$, com $t, a > 0$.

Assumindo que $\hat{u}_i = E \left[\frac{1}{\bar{U}_i} | t_i, \boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]$, para $i = 1, \dots, n$, segue-se que a esperança condicional da log-verossimilhança completa tem a forma

$$Q(\boldsymbol{\theta}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) \propto -n \log(\alpha_1 \alpha_2) - \frac{n}{2} \log(\beta_1 \beta_2) - \frac{n}{2} \log(1 - \rho^2) + \sum_{i=1}^n \{ \varrho(t_{1i}, \beta_1) + \varrho(t_{2i}, \beta_2) \} - \\ - \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i \left\{ \frac{\xi^2(t_{1i}, \beta_1)}{\alpha_1^2} - \frac{2\rho \xi(t_{1i}, \beta_1) \xi(t_{2i}, \beta_2)}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{\xi^2(t_{2i}, \beta_2)}{\alpha_2^2} \right\}.$$

Assim, propomos o seguinte algoritmo EM.

Etapla E: Dado $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$ calcule $\hat{u}_i$, para $i = 1, \dots, n$;

Etapla CM-1: Fixe $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^\top$ e atualize $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2)^\top$ e $\hat{\rho}^{(k)}$ como

$$(\hat{\alpha}^{(k+1)})^2 = \frac{S_{ju}}{\hat{\beta}_j^{(k)}} + \frac{\hat{\beta}_j^{(k)}}{R_{ju}} - 2\bar{u}, \\ \hat{\rho}^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \xi(t_{1i}, \hat{\beta}_1^{(k)}) \xi(t_{2i}, \hat{\beta}_2^{(k)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \xi^2(t_{1i}, \hat{\beta}_1^{(k)})} \sqrt{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i \xi^2(t_{2i}, \hat{\beta}_2^{(k)})}},$$

onde

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i, \quad S_{ju} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{u}_i t_{ji}, \quad e \quad R_{ju} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i / t_{ji})}, \quad j = 1, 2;$$

Etapla CM-2: Fixe $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(k+1)}$ e $\hat{\rho}^{(k+1)}$, e atualize $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}$ como

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(k+1)} = \underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmax}} Q(\hat{\boldsymbol{\alpha}}^{(k+1)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(k)}, \hat{\rho}^{(k+1)} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}).$$

Este processo é iterado até convergência, isto é, até que a distancia entre sucessivos valores da atual log-verossimilhança $l(\boldsymbol{\theta})$, tais como $|l(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)}) - l(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)})|$ ou $|l(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k+1)})/l(\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}) - 1|$ seja suficientemente pequena.

4.5 Estudo de simulação

Para verificar a performance do algoritmo EM descrito na Seção 4.5, nesta seção apresentamos um estudo de simulação na obtenção do EMV dos parâmetros do modelo BSIG bivariado. Análogo ao caso univariado, a fim de simplificar a implementação do algoritmo EM, consideramos o modelo BSIG bivariado de 6 parâmetros, isto é, o modelo $BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \eta, \eta^2)$. Os valores escolhidos dos parâmetros foram $\boldsymbol{\alpha} = (0.5, 0.5)$ e $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)$ e $\rho = 0.5, 0.9$ e distintos valores para η foram considerados. Para cada valor de η e para diferentes tamanhos de amostra, $n = 30, 50, 100$, fizemos $M = 1000$ repetições e as médias $\hat{\theta} = \sum_{k=1}^M \hat{\theta}_k / M$ são apresentadas nas Tabelas 4.1-4.2, para $\rho = 0.9$, e nas Tabelas 4.3-4.4, para $\rho = 0.5$. Além disso, os vícios relativos $RB(\theta) = \theta - \hat{\theta}$ e erro quadrático médio $MSE(\theta) = \sum_{k=1}^M (\hat{\theta}_k - \hat{\theta})^2$ foram calculados, para $\theta = \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \rho$.

Pode-se observar que as estimativas de máxima verossimilhança são mais próximas aos valores teóricos considerados, quando o tamanho de amostra é maior. Também podemos observar que os vícios e os erros quadráticos médios são menores para mostras maiores.

Tabela 4.1: Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.9$, considerando diferentes valores de η .

η	n	estimativas de α_1			estimativas de α_2			estimativas de ρ		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
0.4	30	0.4773	0.0453	0.1133	0.4773	0.0455	0.1133	0.8887	0.0126	0.0562
	50	0.4910	0.0179	0.0865	0.4917	0.0166	0.0863	0.8971	0.0032	0.0378
	100	0.4949	0.0101	0.0607	0.4945	0.0111	0.0605	0.8991	0.0010	0.0256
0.6	30	0.4830	0.0340	0.0984	0.4832	0.0336	0.0965	0.8932	0.0076	0.0476
	50	0.4898	0.0204	0.0770	0.4903	0.0195	0.0768	0.8959	0.0046	0.0351
	100	0.4947	0.0106	0.0551	0.4953	0.0095	0.0554	0.8968	0.0035	0.0248
0.8	30	0.4826	0.0347	0.0898	0.4839	0.0322	0.0902	0.8915	0.0095	0.0471
	50	0.4882	0.0236	0.0691	0.4891	0.0218	0.0675	0.8967	0.0036	0.0336
	100	0.4967	0.0066	0.0490	0.4970	0.0059	0.0491	0.8987	0.0014	0.0232
1	30	0.4881	0.0238	0.0791	0.4888	0.0224	0.0792	0.8953	0.0052	0.0432
	50	0.4934	0.0132	0.0628	0.4927	0.0147	0.0641	0.8981	0.0021	0.0325
	100	0.4968	0.0064	0.0446	0.4972	0.0057	0.0446	0.8990	0.0011	0.0220
3	30	0.4904	0.0192	0.0673	0.4916	0.0169	0.0660	0.8985	0.0017	0.0384
	50	0.4933	0.0134	0.0495	0.4929	0.0142	0.0511	0.8989	0.0013	0.0280
	100	0.4963	0.0074	0.0344	0.4969	0.0063	0.0351	0.8999	0.0012	0.0195
5	30	0.4877	0.0246	0.0641	0.4888	0.0224	0.0645	0.8977	0.0026	0.0383
	50	0.4914	0.0172	0.0507	0.4891	0.0218	0.0523	0.8966	0.0038	0.0292
	100	0.4947	0.0106	0.0343	0.4949	0.0102	0.0349	0.8986	0.0015	0.0192

Tabela 4.2: Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.9$, considerando diferentes valores de η .

η	n	estimativas de β_1			estimativas de β_2		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
0.4	30	1.0029	0.0029	0.0484	1.0029	0.0029	0.0483
	50	1.0008	0.0008	0.0349	1.0005	0.0005	0.0352
	100	0.9996	0.0004	0.0250	0.9996	0.0004	0.0250
0.6	30	1.0045	0.0045	0.0648	1.0042	0.0042	0.0654
	50	1.0026	0.0026	0.0504	1.0028	0.0028	0.0501
	100	1.0022	0.0022	0.0345	1.0027	0.0027	0.0349
0.8	30	1.0054	0.0054	0.0722	1.0059	0.0059	0.0727
	50	1.0011	0.0011	0.0557	1.0013	0.0013	0.0559
	100	1.0004	0.0004	0.0400	1.0010	0.0010	0.0402
1	30	1.0034	0.0038	0.0794	1.0023	0.0023	0.0788
	50	1.0027	0.0027	0.0607	1.0024	0.0024	0.0606
	100	1.0016	0.0016	0.0415	1.0013	0.0013	0.0418
3	30	1.0024	0.0024	0.0521	1.0030	0.0030	0.0517
	50	1.0021	0.0021	0.0417	1.0027	0.0027	0.0422
	100	1.0013	0.0013	0.0293	1.0014	0.0014	0.0291
5	30	1.0015	0.0015	0.0410	1.0018	0.0018	0.0412
	50	0.9991	0.0009	0.0315	0.9994	0.0006	0.0309
	100	0.9998	0.0002	0.0226	0.9999	0.0001	0.0225

Tabela 4.3: Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.5$, considerando diferentes valores de η .

η	n	estimativas de α_1			estimativas de α_2			estimativas de ρ		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
0.4	30	0.4884	0.0233	0.1119	0.4872	0.0257	0.1097	0.4840	0.0319	0.1793
	50	0.4961	0.0078	0.0830	0.4971	0.0059	0.0809	0.4885	0.0230	0.1324
	100	0.4978	0.0043	0.0587	0.4975	0.0050	0.0578	0.4985	0.0030	0.0942
0.6	30	0.4852	0.0296	0.0973	0.4893	0.0215	0.0973	0.4797	0.0407	0.1754
	50	0.4962	0.0077	0.0751	0.4959	0.0083	0.0742	0.4883	0.0235	0.1351
	100	0.4966	0.0069	0.0503	0.4981	0.0039	0.0509	0.4961	0.0079	0.0891
0.8	30	0.4882	0.0236	0.0840	0.4870	0.0259	0.0869	0.4816	0.0367	0.1663
	50	0.4930	0.0140	0.0633	0.4933	0.0134	0.0638	0.4942	0.0117	0.1281
	100	0.4959	0.0082	0.0475	0.4967	0.0066	0.0475	0.5012	0.0025	0.0878
1	30	0.4873	0.0254	0.0752	0.4870	0.0260	0.0795	0.4871	0.0258	0.1594
	50	0.4925	0.0151	0.0587	0.4946	0.0108	0.0608	0.4926	0.0148	0.1296
	100	0.4970	0.0060	0.0439	0.4983	0.0033	0.0438	0.4994	0.0012	0.0871
3	30	0.4871	0.0258	0.0664	0.4829	0.0343	0.0699	0.4837	0.0325	0.1497
	50	0.4900	0.0200	0.0504	0.4939	0.0122	0.0512	0.4879	0.0243	0.1121
	100	0.4951	0.0098	0.0367	0.4947	0.0107	0.0353	0.4914	0.0117	0.0790
5	30	0.4852	0.0296	0.0678	0.4858	0.0284	0.0678	0.4887	0.0225	0.1412
	50	0.4927	0.0146	0.0508	0.4911	0.0179	0.0489	0.4941	0.0119	0.1093
	100	0.4966	0.0068	0.0361	0.4944	0.0113	0.0363	0.4941	0.0117	0.0761

Tabela 4.4: Estimativas dos parâmetros $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ e $\rho = 0.5$, considerando diferentes valores de η .

η	n	estimativas de β_1			estimativas de β_2		
		media	RB	$\sqrt{MSE}$	media	RB	$\sqrt{MSE}$
0.4	30	1.0007	0.0007	0.0434	1.0009	0.0009	0.0429
	50	0.9995	0.0005	0.0322	0.9992	0.0008	0.0326
	100	1.0004	0.0004	0.0230	1.0007	0.0007	0.0232
0.6	30	1.0015	0.0015	0.0583	1.0042	0.0042	0.0590
	50	1.0023	0.0023	0.0471	1.0019	0.0019	0.0468
	100	0.9990	0.0010	0.0319	0.9987	0.0013	0.0316
0.8	30	1.0022	0.0022	0.0691	1.0031	0.0031	0.0674
	50	0.9993	0.0007	0.0534	1.0012	0.0012	0.0524
	100	1.0003	0.0003	0.0382	1.0000	0.0000	0.0377
1	30	1.0071	0.0071	0.0764	1.0074	0.0074	0.0762
	50	1.0035	0.0035	0.0579	1.0027	0.0027	0.0558
	100	1.0011	0.0011	0.0392	1.0010	0.0010	0.0392
3	30	1.0039	0.0039	0.0524	1.0033	0.0033	0.0509
	50	1.0022	0.0022	0.0396	1.0014	0.0014	0.0411
	100	1.0000	0.0000	0.0279	0.9997	0.0003	0.0280
5	30	1.0030	0.0030	0.0397	1.0012	0.0012	0.0398
	50	0.9998	0.0002	0.0301	0.9992	0.0008	0.0305
	100	1.0000	0.0000	0.0218	1.0004	0.0004	0.0222

4.6 Matriz de informação observada

Seja $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n$ uma amostra aleatória, onde $\mathbf{T}_i \sim BSIG_2(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho; \delta, \gamma)$ para $i = 1, \dots, n$. Então a função log-verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}^\top, \boldsymbol{\beta}^\top, \rho)^\top$ é $l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n l_i(\boldsymbol{\theta})$, onde

$$l_i(\boldsymbol{\theta}) = \log \left(\frac{\delta \gamma^3}{\sqrt{2} \pi^{3/2}} \right) - \frac{1}{2} \log(1 - \rho^2) - \frac{3}{2} \log m_i + \gamma \delta + \log(K_{3/2}(m_i)) + \log A_i,$$

com $m_i = \gamma \sqrt{d(t_i) + \delta^2}$ e $A_i = A_{t_i}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$.

As funções de escore para $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e ρ são dadas por

$$U_{\boldsymbol{\phi}} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{3}{2m_i} \frac{\partial m_i}{\partial \boldsymbol{\phi}} + \frac{K'_{3/2}(m_i)}{K_{3/2}(m_i)} \frac{\partial m_i}{\partial \boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \boldsymbol{\phi}} \right), \quad \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta},$$

$$U_{\rho} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\rho}{1 - \rho^2} + \frac{K'_{3/2}(m_i)}{K_{3/2}(m_i)} \frac{\partial m_i}{\partial \rho} \right),$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{\partial m_i}{\partial \phi} &= \frac{\gamma^2}{m_i} \frac{\partial a_{\mathbf{t}_i}^\top}{\partial \phi}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \Sigma^{-1} a_{\mathbf{t}_i}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad \phi = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \\ \frac{\partial m_i}{\partial \rho} &= \frac{\gamma^2}{2m_i(1-\rho^2)} \left[a_{\mathbf{t}_i}^\top(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \Psi_\rho a_{\mathbf{t}_i}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \rho d(\mathbf{t}_i) \right], \\ \Psi_\rho &= \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ -1 & \rho \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

A matriz de informação para $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}} & I_{\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}} & I_{\boldsymbol{\alpha}\rho} \\ I_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}} & I_{\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}} & I_{\boldsymbol{\beta}\rho} \\ I_{\rho\boldsymbol{\alpha}} & I_{\rho\boldsymbol{\beta}} & I_{\rho\rho} \end{pmatrix}$$

onde

$$\mathbf{I}_{\phi\psi} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 l_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi \partial \psi^\top} \right), \quad \phi, \psi = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho,$$

com

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l_i(\boldsymbol{\theta})}{\partial \phi \partial \psi^\top} &= \frac{1+\rho^2}{(1-\rho^2)^2} \mathbb{I}_{\{\phi=\psi\}}(\rho) + \frac{3}{2m_i^2} \frac{\partial m_i}{\partial \phi} \frac{\partial m_i}{\partial \psi^\top} - \frac{3}{2m_i} \frac{\partial^2 m_i}{\partial \phi \partial \psi^\top} \\ &+ \frac{K_{3/2}''(m_i) K_{3/2}(m_i) - (K_{3/2}'(m_i))^2}{(K_{3/2}(m_i))^2} \frac{\partial m_i}{\partial \phi} \frac{\partial m_i}{\partial \psi^\top} + \frac{K_{3/2}'(m_i)}{K_{3/2}(m_i)} \frac{\partial^2 m_i}{\partial \phi \partial \psi^\top} \\ &- \frac{1}{A_i^2} \frac{\partial A_i}{\partial \phi} \frac{\partial A_i}{\partial \psi^\top} + \frac{1}{A_i} \frac{\partial^2 A_i}{\partial \phi \partial \psi^\top}, \quad \phi, \psi = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho.\end{aligned}$$

As derivadas das funções de Bessel do terceiro tipo $K_{3/2}$ são dadas abaixo:

$$\begin{aligned}K_{3/2}'(m_i) &= -\frac{1}{2} \left(K_{1/2}(m_i) + K_{5/2}(m_i) \right), \\ K_{3/2}''(m_i) &= \frac{1}{4} \left[K_{1/2}(m_i) + 2K_{3/2}(m_i) + K_{7/2}(m_i) \right].\end{aligned}$$

As segundas derivadas $\frac{\partial^2 m_i}{\partial \phi \partial \psi^\top}$ e $\frac{\partial^2 A_i}{\partial \phi \partial \psi^\top}$ são calculadas abaixo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 m_i}{\partial \phi \partial \psi^\top} &= -\frac{\gamma}{2m_i^2} \frac{\partial m_i}{\partial \phi} \frac{\partial d(t_i)}{\partial \psi^\top} + \frac{\gamma}{2m_i} \frac{\partial^2 d(t_i)}{\partial \phi \partial \psi^\top}, \quad \phi, \psi = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \rho, \\ \frac{\partial^2 d(t_i)}{\partial \phi \partial \psi^\top} &= 2 \left[a_{\mathbf{t}_i}^\top(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \Sigma^{-1} \frac{\partial^2 a_{\mathbf{t}_i}}{\partial \phi \partial \psi^\top}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{\partial a_{\mathbf{t}_i}^\top}{\partial \phi}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \Sigma^{-1} \frac{\partial a_{\mathbf{t}_i}}{\partial \psi}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \right], \\ \frac{\partial^2 d(t_i)}{\partial \rho \partial \phi^\top} &= \frac{2}{1-\rho^2} a_{\mathbf{t}_i}^\top(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \Psi_\rho \frac{\partial a_{\mathbf{t}_i}}{\partial \phi}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{\rho}{1-\rho^2} \frac{\partial d(t_i)}{\partial \phi}, \quad \phi = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \\ \frac{\partial^2 d(t_i)}{\partial \rho^2} &= \frac{4\rho}{(1-\rho^2)^2} a_{\mathbf{t}_i}^\top(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \Psi_\rho a_{\mathbf{t}_i}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{2(1+\rho^2)}{(1-\rho^2)^2} d(t_i).\end{aligned}$$

Adicionalmente as derivadas de a_{t_i} e A_{t_i} são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_{t_i}}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} a_{t_i}, \\
\frac{\partial A_{t_i}}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} A_{t_i}, \\
\frac{\partial a_{t_i}}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\alpha t_i^{1/2} \beta^{3/2}} (t + \beta), \\
\frac{\partial A_{t_i}}{\partial \beta} &= \frac{1}{4\alpha t_i^{3/2} \beta^{3/2}} (\beta - t), \\
\\
\frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \alpha \partial \alpha} &= \frac{2}{\alpha^2} a_{t_i}, \\
\frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \alpha \partial \alpha} &= \frac{2}{\alpha^2} A_{t_i}, \\
\frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \beta \partial \beta} &= \frac{1}{4\alpha t_i^{1/2} \beta^{5/2}} (3t_i + \beta), \\
\frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \beta \partial \beta} &= \frac{1}{8\alpha t_i^{3/2} \beta^{5/2}} (3t_i - \beta), \\
\frac{\partial^2 a_{t_i}}{\partial \beta \partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial a_{t_i}}{\partial \beta}, \\
\frac{\partial^2 A_{t_i}}{\partial \beta \partial \alpha} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial A_{t_i}}{\partial \beta}.
\end{aligned}$$

Intervalos de confiança assintóticos e teste de hipótese para os estimadores de máxima verossimilhança podem ser obtidos usando a matriz $\mathbf{I}$, que é a matriz de informação observada. Assim, inferência pode ser desenvolvida usando a propriedade que o estimador EMV $\hat{\theta}$ tem aproximadamente distribuição $N_5(\theta, K_{\theta}^{-1})$, onde K_{θ} é a informação de Fisher esperada.

4.7 Aplicações

Nesta seção, apresentamos a análise a dados reais para ilustrar as metodologias apresentadas neste capítulo. Estes dados foram analisados anteriormente por Kundu et al. (2010 e 2013) e Vilca et al. (2014b). Consideraremos os dados apresentados na Tabela 6.1 no Anexo I (extraído de Richard e Dean, 2002) sobre conteúdo mineral no osso.

4.7.1 Aplicação 1

Consideramos da Tabela 6.1 a densidade mineral do osso Dominant Radius (t_1) e do osso Radius (t_2), como componentes do vetor aleatório $\mathbf{t} = (t_1, t_2)$. Ajustamos os modelos bivariados BS e BSIG a $\mathbf{t}$, estimando os parâmetros pelo método de máxima verossimilhança via algoritmo EM, onde os

estimadores de momentos modificados foram usados como valores iniciais. Considerando o modelo BSIG de seis parâmetros α , β e η , estimamos os parâmetros e escolhemos o η que da maior valor log-verossimilhança, que foi $\eta = 0.9$.

Na Tabela 4.5, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo BSIG bivariado (para $\eta = 0.9$) e do modelo BS bivariado, junto com seus erros padrões assintóticos (EP) correspondentes, que são calculados a partir da matriz da informação observada. Notemos que as estimativas e erros padrões são próximos para os dois modelos. Na Tabela 4.6, apresentamos Intervalos de Confiança (IC) de 95% baseado na aproximação normal dos EMV dos modelos BS e BSIG bivariados. Na Figura 4.19, contornos das funções densidades estimadas para ambos modelos são apresentados, mostrando que o modelo BSIG bivariado ajusta-se melhor aos dados. Na Tabela 4.7 são apresentados os valores das funções de log-verossimilhança e os critérios de seleção de Akaike (AIC) e Schwartz (SIC) das distribuições bivariadas BS e BSIG para **t**. De acordo como os critérios AIC e SIC, a distribuição BSIG bivariada apresenta um melhor ajuste em relação à distribuição BS bivariada.

Tabela 4.5: EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG

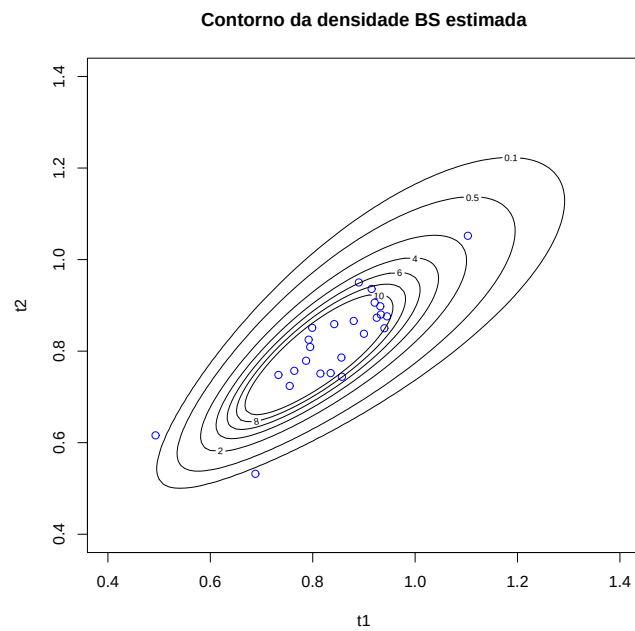
Modelos	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\rho}$
BS	0.1473	0.1372	0.8341	0.8099	0.8163
EP	(0.0042)	(0.0039)	(0.0049)	(0.0044)	(0.0134)
BSIG	0.1355	0.1289	0.8583	0.8317	0.8120
EP	(0.0050)	(0.0047)	(0.0041)	(0.0037)	(0.0152)

Tabela 4.6: Intervalo de Confiança de 95% dos EMV

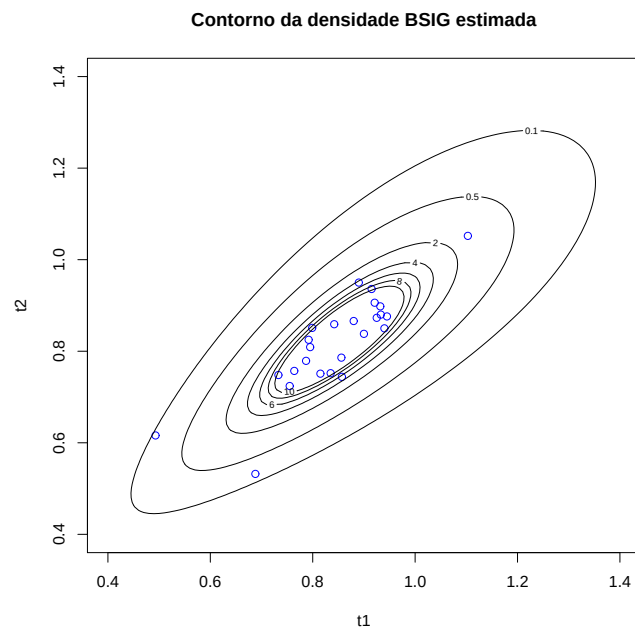
Modelos	α_1	α_2	β_1	β_2	ρ
BS	(0.1391; 0.1555)	(0.1296; 0.1448)	(0.8245; 0.8437)	(0.8013; 0.8185)	(0.7900; 0.8426)
BSIG	(0.1257; 0.1453)	(0.1197; 0.1381)	(0.8503; 0.8663)	(0.8244; 0.8390)	(0.7822; 0.8418)

Tabela 4.7: Alguns critérios de informação

Modelos	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
BS	50.1777	-90.3554	-84.2610
BSIG	56.6957	-103.3914	-97.2970



(a)



(b)

Figura 4.19: Contorno das funções densidades estimadas para t_1 e t_2

4.7.2 Aplicação 2

Consideramos da Tabela 6.1 a densidade mineral do osso Radius (t_2) e do osso Dominant humerus (t_3), como componentes do vetor aleatório $\mathbf{t} = (t_2, t_3)$. Ajustamos os modelos bivariados BS e BSIG a $\mathbf{t}$, estimando os parâmetros pelo método de máxima verossimilhança via algoritmo EM, onde os estimadores de momentos modificados foram usados como valores iniciais. Considerando o modelo BSIG de seis parâmetros α , β e η , estimamos os parâmetros e escolhemos o η que da maior valor log-verossimilhança, que foi $\eta = 0.8$.

Na Tabela 4.8, apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo BSIG bivariado(para $\eta = 0.8$) e do modelo BS bivariado, junto com seus erros padrões assintóticos (EP) correspondentes, que são calculados a partir da matriz da informação observada. Notemos que as estimativas e erros padrões são próximos para os dois modelos. Na Tabela 4.9, apresentamos Intervalos de Confiança (IC) de 95% baseada na aproximação normal dos EMV dos modelos BS e BSIG bivariados. Na Figura 4.20, contornos das funções densidades estimadas para ambos modelos são apresentadas, mostrando que o modelo BSIG bivariado ajusta-se melhor aos dados. Na Tabela 4.10, são apresentados os valores das funções de log-verossimilhança e os critérios de seleção de Akaike (AIC) e Schwartz (SIC) das distribuições bivariadas BS e BSIG para $\mathbf{t}$. De acordo como os critérios AIC e SIC, a distribuição BSIG bivariada apresenta um melhor ajuste em relação à distribuição BS bivariada.

Tabela 4.8: EMV dos parâmetros com seus erros padrões correspondentes dos modelos BS e BSIG

Modelos	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\rho}$
BS	0.1372	0.1680	0.8104	1.7678	0.6045
EP	(0.0039)	(0.0048)	(0.0044)	(0.0118)	(0.0254)
BSIG	0.1270	0.1664	0.8415	1.7975	0.6755
EP	(0.0050)	(0.0067)	(0.0035)	(0.0098)	(0.0264)

Tabela 4.9: Intervalo de Confiança de 95% dos EMV

Modelos	α_1	α_2	β_1	β_2	ρ
BS	(0.1296; 0.1448)	(0.1586; 0.1774)	(0.8018; 0.8190)	(1.7441; 1.7903)	(0.5547; 0.6543)
BSIG	(0.1172; 0.1368)	(0.1533; 0.1795)	(0.8346; 0.8484)	(1.7783; 1.8167)	(0.6234; 0.7272)

Tabela 4.10: Alguns critérios de informação

Modelos	$\ell(\hat{\theta})$	AIC	SIC
BS	20.1777	-30.2354	-24.1410
BSIG	24.7722	-39.5444	-33.4500

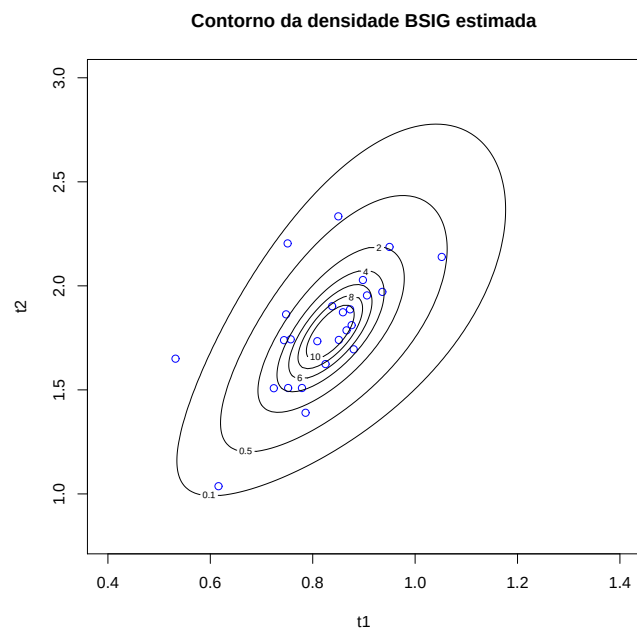
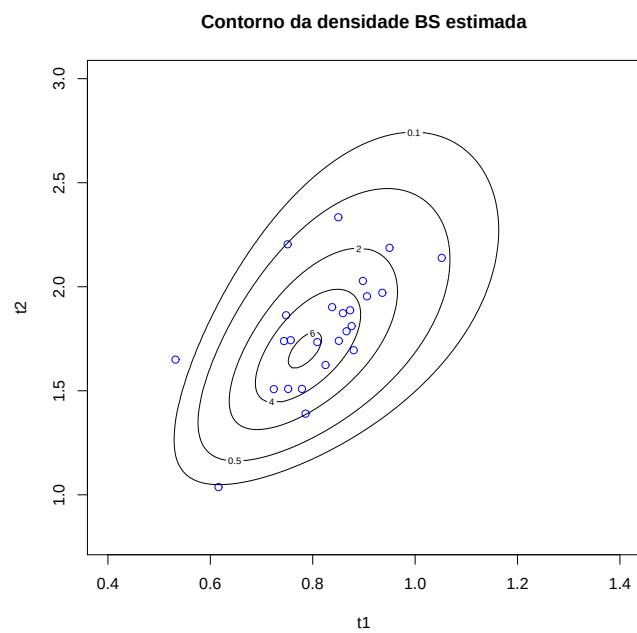


Figura 4.20: Contorno das funções densidades estimadas para t_1 e t_3

Capítulo 5

Considerações Finais

O objetivo desta dissertação foi considerar uma extensão da distribuição BS, no contexto univariado e no contexto bivariado (Kundu et al., 2010).

A extensão univariada da distribuição BS foi baseada na distribuição Gaussiana Inversa. Especificamente, em lugar da distribuição Normal consideramos a distribuição Normal Inversa Gaussiana, com ênfase na sua versão simétrica. Mostramos através de simulação a performance do algoritmo EM proposto para a obtenção das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo.

Para o caso univariado, foi estudado o comportamento assintótico dos estimadores de momentos modificados. Além disso, para a metodologia proposta foi apresentado dois exemplos baseados em dados reais. O conjunto de dados trata sobre a densidade dos ossos que foi considerado por Kundu et al. (2010). Um estudo similar foi desenvolvido para o caso da distribuição bivariada BSIG.

Considerando os resultados obtidos, há alguns problemas para serem discutidos em futuros trabalhos:

1. Propor um algoritmo EM para estimar os parâmetros da distribuição proposta no Capítulo 3;
2. No Capítulo 4, consideramos uma extensão da distribuição BS bivariada baseada apenas na versão simétrica da distribuição Normal Inversa Gaussiana. O caso geral ainda não tem sido desenvolvido;
3. Uma etapa natural a seguir com a aplicação da distribuição BSIG, é considerar modelos de regressão.

Referências Bibliográficas

- [1] Achcar, J. A. Inferences for the Birnbaum-Saunders fatigue life model using Bayesian methods. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 15, n. 4, p. 367-380, 1993.
- [2] Ahmed, S.; Budsaba, K.; Lisawadi, S.; Volodin, A. I. Parametric estimation for the Birnbaum-Saunders lifetime distribution based on a new parameterization. *Thailand Statistician*, v. 6, n. 2, p. 213-240, 2008.
- [3] Andrews, D. F.; Mallows C. L. Scale mixtures of normal distributions. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, v. 36, p. 99-102, 1994.
- [4] Balakrishnan, N.; Leiva, V.; Sanhueza, A.; Vilca, F. Estimation in the Birnbaum-Saunders distribution based on scale-mixture of normals and the EM-algorithm. *Statistics and operations research transactions*, v. 33, n. 2, p. 171-192, 2009.
- [5] Barndorff-Nielsen, O. Hiperbolic distributions and distributions on hyperbolae. *Scandinavian Journal of statistics*, p. 151-157, 1978.
- [6] Barndorff-Nielsen, O.; Blaesild, P. *Hiperbolic distributions and ramifications: Contributions to the theory and application*, Springer, 1981.
- [7] Barndorff-Nielsen, O. Normal inverse gaussian distributions and stochastic volatility modeling. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 24, n. 1, p. 1-13, 1997.
- [8] Barros, M.; Paula, G. A.; Leiva, V. An R implementation for generalized Birnbaum-Saunders distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 53, n. 4, p. 1511-1528, 2009.
- [9] Bhattacharyya, G. K.; Fries, A. Fatigue failure models Birnbaum-Saunders vs. inverse gaussian. *Reliability, IEEE Transactions on*, v. 31, n. 5, p. 439-441, 1982.
- [10] Birnbaum, Z. W.; Saunders, S. C. A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, p. 319-327, 1969a.
- [11] Birnbaum, Z. W.; Saunders, S. C. Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue. *Journal of Applied Probability*, p. 328-347, 1969b.
- [12] Cambanis, S.; Fotopoulos, B.; He, L. On the conditional variance for scale mixtures of normal distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 74, n. 2, p. 163-192, 2000.

- [13] Chang, Y. P.; Hung, M. C.; Liu, H.; Jan, J. F. Testing symmetry of a NIG distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, v. 34, n. 4, p. 851-862, 2005.
- [14] Chang D. S.; Tang L. C. Percentile bounds and tolerance limits for the Birnbaum-Saunders distribution. *Communication in Statistics-Theory and Methods*, v. 23, n. 10, p. 2853-2863, 1994.
- [15] Chhikara, R. S.; Folks, J. L. The inverse gaussian distribution as a lifetime model. *Technometrics*, v. 19, n. 4, p. 461-468, 1977.
- [16] Chhikara, R. S.; Folks, J. L. *The inverse gaussian distribution*. New York: Marrei Dekker, 1989.
- [17] Chhikara, R. S.; Folks, J. L. Estimation of the inverse gaussian distribution function. *Journal of the American Statistical Association*, v. 69, n. 345, p. 250-254, 1974.
- [18] Dempster, A. P.; Laird, N. M.; Rubin, D. B. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological)*, v. 39, n. 1, p. 1-38, 1977.
- [19] Dempster, A. P.; Laird, N. M.; Rubin, D. B. Iteratively reweighted least squares for linear regression when errors are normal/independent distributed. *Multivariate Analysis V*, p. 35-57, 1980.
- [20] Desmond, A. F. On the relationship between two fatigue-life models. *Reliability, IEEE Transactions on*, v. 35, n. 2, p. 167-169, 1986.
- [21] Desmond, A. F. Stochastic models of failure in random environments. *Canadian Journal of Statistics*, v. 13, n. 3, p. 171-183, 1985.
- [22] Diaz, J. A.; Leiva, V. A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 128, n. 2, p. 445-457, 2005.
- [23] Dupuis, J. D.; Mills, J. E. Robust estimation of the Birnbaum-Saunders distribution. *Reliability, IEEE Transactions on*, v. 47, n. 1, p. 88-95, 1998.
- [24] Eberlein, E.; Keller, U. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, p. 281-299, 1995.
- [25] Engelhardt, M.; Bain, L. J.; Wright, F. T. Inferences on the parameters of the Birnbaum-Saunders fatigue life distribution based on maximum likelihood estimation. *Technometrics*, v. 23, n. 3, p. 251-256, 1981.
- [26] Fernandez, C.; Steel, M. F. Bayesian regression analysis with scale mixtures of normals. *Econometric Theory*, v.16 , n. 1, p. 80-101, 2000.
- [27] Galea, M.; Leiva, V.; Paula, G. Influence diagnostics in log-Birnbaum-Saunders regression models. *Journal of Applied Statistics*, v. 31, n. 9, p. 1049-1064, 2004.

- [28] Guiraud, Pierre; Leiva, V.; Fierro, R. A non-central version of the Birnbaum-Saunders distribution for reliability analysis. *Reliability, IEEE Transactions on*, v. 58, n. 1, p. 152-160, 2009.
- [29] Hanssen, A.; Oirgard, T. A. The normal inverse gaussian distribution: A versatile model for heavy-tailed stochastic processes. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings.(ICASSP'01). 2001 IEEE International Conference on*, v. 6, p. 3985-3988, 2001.
- [30] Johnson, N. L.; Kotz, S. *Distributions in Statistics: Continuous univariate distributions 1*. Boston: Houghton Mifflin, 1970.
- [31] Jorgensen, B. *Statistical properties of the generalized inverse gaussian distribution*. Springer, 1982.
- [32] Kalemánova, A.; Schmid, B.; Werner, R. The normal inverse gaussian distribution for synthetic cdo pricing. *The Journal of Derivatives*, v. 14, n. 3, p. 80-94, 2007.
- [33] Kundu, D.; Balakrishnan, N.; Jamalizadeh, A. Bivariate Birnbaum-Saunders distribution and associated inference. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 101, n. 1, p. 113-125, 2010.
- [34] Kundu, D.; Balakrishnan, N.; Jamalizadeh, A. Generalized multivariate Birnbaum-Saunders distributions and related inferential issues. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 116, p. 230-244, 2013.
- [35] Lange, K.; Sinsheimer, J. Normal/independent distributions and their applications in robust regression. *Journal of the American Statistical Association*, v. 2, n. 2, p. 175-198, 1993.
- [36] Lange, K.; Little, R.; Taylor, J. Robust statistical modeling using the t distribution. *Journal of the American Statistical Association*, v. 84, n. 408, p. 881-896, 1989.
- [37] Leiva, V.; Barros, M.; Paula, G.; Sanhueza, A. Generalized Birnbaum-Saunders distributions applied to air pollutant concentration. *Environmetrics*, v. 19, n. 3, p. 235-249, 2008a.
- [38] Leiva, V.; Riquelme, M.; Balakrishnan, N.; Sanhueza, A. Lifetime analysis based on the generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 52, n. 4, p. 2079-2097, 2008b.
- [39] Leiva, V.; Sanhueza, A.; Sen, P. K.; Paula, G. Random number generators for the generalized Birnbaum-Saunders distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, v. 78, n. 11, p. 1105-1118, 2008c.
- [40] Lillestol, J. Risk analysis and the NIG distribution. *Journal of Risk*, v. 2, p. 41-56, 2000.
- [41] Little, R. J. Robust estimation of the mean and covariance matrix from data with missing values. *Applied Statistics*, p. 23-38, 1988.
- [42] Lu, M. C.; Chang, D. S. Bootstrap prediction intervals for the Birnbaum-Saunders distribution. *Microelectronics Reliability*, v. 37, n. 8, p. 1213-1216, 1997.

- [43] Lucas, A. Robustness of the student t based m-estimator. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 26, n. 5, p. 1165-1182, 1997.
- [44] Mann N. R.; Singpurwalla N. D.; Schafer R. E. Methods for statistical analysis of reliability and life data. 1974.
- [45] McCarter K. S. *Estimation and prediction for the Birnbaum-Saunders distribution using Type-II censored samples, with a comparison to the Inverse Gaussian Distribution*. Tese(Doutorado), Kansas State University, 1999.
- [46] Meeker W. Q.; Escobar L. A. *Statistical methods for reliability data*. John Wiley and Sons, 2014.
- [47] Ng H. K.; Kundu D.; Balakrishnan N. Modified moment estimation for the two-parameter Birnbaum-Saunders distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 43, n. 3, p. 283-298, 2003.
- [48] Owen W. J.; Padgett W. J. Accelerated test models for system strength based on Birnbaum-Saunders distributions. *Lifetime Data Analysis*, v. 5, n. 2, p. 133-147, 1999.
- [49] Richard J.; Dean W. *Applied multivariate statistical analysis*. Prentice Hall, New York, 2002.
- [50] Rieck J. R. A moment-generating function with application to the Birnbaum-Saunders distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 28, n. 9, p. 2213-2222, 1999.
- [51] Rieck J. R.; Nedelman J. R. A log-linear model for the Birnbaum-Saunders distribution. *Technometrics*, v. 33, n. 1, p. 51-60, 1991.
- [52] Sanhueza A.; Leiva V.; Balakrishnan N. The generalized Birnbaum-Saunders distribution and its theory, methodology, and application. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 37, n. 5, p. 645-670, 2008.
- [53] Santana L. R. *Estimação e diagnóstico em modelos Birnbaum-Saunders skew-normal*. Tese(Mestrado), UNICAMP, 2009.
- [54] Saunders S. C. A family of random variables closed under reciprocation. *Journal of the American Statistical Association*, v. 69, n. 346, p. 533-539, 1974.
- [55] Schrodinger E. Zur theorie der fall-und steigversuche an teikhen mit brownscber bewegung. *Physikalische Zeitschrift*, v. 16, p. 133-134, 1915.
- [56] Shuster J. On the inverse gaussian distribution function. *Journal of the American Statistical Association*, v. 63, n. 324, p. 1514-1516, 1968.
- [57] Spiegelhalter D. J.; Best N. G.; Carlin B. P.; Van Der Linde A. Bayesian measures of model complexity and fit. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, v. 64, n. 4, p. 583-639, 2002.

- [58] Tweedie M. Some statistical properties of inverse gaussian distributions. *Virginia J. Sei.*, v. 7, p. 160-165, 1956.
- [59] Tweedie M. Statistical properties of inverse gaussian distributions I. *The Annals of Mathematical Statistics*, p. 362-377, 1957.
- [60] Tweedie M. Statistical properties of inverse gaussian distributions II. *The Annals of Mathematical Statistics*, v. 28, n. 3, p. 696-705, 1957.
- [61] Venter J. H.; de Jongh P. J. Risk estimation using the normal inverse gaussian distribution. *Journal of Risk*, v. 4, p. 1-24, 2002.
- [62] Vilca F.; Leiva V. A new fatigue life model based on the family of skew-elliptical distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, v. 35, n. 2, p. 229-244, 2006.
- [63] Vilca F.; Balakrishnan N.; Zeller C. B. The bivariate sinh-elliptical distribution with applications to Birnbaum-Saunders distribution and associated regression and measurement error models. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 80, p. 1-16, 2014a.
- [64] Vilca F.; Balakrishnan N.; Zeller C. B. A robust extension of the bivariate Birnbaum-Saunders distribution and associated inference. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 124, p. 418-435, 2014b.
- [65] Wald A. *Sequential Analysis*. New York: Wiley, 1974.
- [66] Xie F. C.; Wei B. C. Diagnostics analysis for log-Birnbaum-Saunders regression models. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 51, n. 9, p. 4692-4706, 2007.
- [67] Yamaguchi K. Generalized algorithm for model with contaminated error term. In *Proceedings of the Seven Japan and Korea Joint Conference of Statistics*, p. 107-114, 1990.

Capítulo 6

Anexo I

Tabela 6.1: Mineral contido no osso

numero de sujeito	Dominant radius	Radius	Dominant humerus	Humerus	Dominant ulna	Ulna
1	1.103	1.052	2.139	2.238	0.873	0.872
2	0.842	0.859	1.873	1.741	0.590	0.744
3	0.925	0.873	1.887	1.809	0.767	0.713
4	0.857	0.744	1.739	1.547	0.706	0.674
5	0.795	0.809	1.734	1.715	0.549	0.654
6	0.787	0.779	1.509	1.474	0.782	0.571
7	0.933	0.880	1.695	1.656	0.737	0.803
8	0.799	0.851	1.740	1.777	0.618	0.682
9	0.945	0.876	1.811	1.759	0.853	0.777
10	0.921	0.906	1.954	2.009	0.823	0.765
11	0.792	0.825	1.624	1.657	0.686	0.668
12	0.815	0.751	2.204	1.846	0.678	0.546
13	0.755	0.724	1.508	1.458	0.662	0.595
14	0.880	0.866	1.786	1.811	0.810	0.819
15	0.900	0.838	1.902	1.606	0.723	0.677
16	0.764	0.757	1.743	1.794	0.586	0.541
17	0.733	0.748	1.863	1.869	0.672	0.752
18	0.932	0.898	2.028	2.032	0.836	0.805
19	0.856	0.786	1.390	1.324	0.578	0.610
20	0.890	0.950	2.187	2.087	0.758	0.718
21	0.688	0.532	1.650	1.378	0.533	0.482
22	0.940	0.850	2.334	2.225	0.757	0.731
23	0.493	0.616	1.037	1.268	0.546	0.615
24	0.835	0.752	1.509	1.422	0.618	0.664
25	0.915	0.936	1.971	1.869	0.869	0.868