SÔBRE A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES POSITIVAS PARA SISTEMAS COOPERATIVOS NÃO LINEARES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Marco Aurelio Soares Souto e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 08 de maio de 1992.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR EM CIÊNCIAS.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família pela compreensão e sacrifício de tanta mudança de endereço em tão pouco tempo. Agradeço ao Professor Djairo que sempre esteve disponível quando precisei de sua orientação durante este programa. Agradeço a participação dos integrantes da comissão julgadora. Finalmente, agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

a

Camilinha e a

Mariana cara de banana

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Alguns modelos biológicos são descritos por sistemas de reação-difusão da forma

$$(0.1)\qquad \begin{cases} u_t - \Delta u = F(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega, \quad t \in I\!R \\ v_t - \Delta v = G(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega, \quad t \in I\!R \\ u(t,x) = v(t,x) = 0 & \text{para} \quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 2$ é um aberto limitado e F, G são funções dadas. Neste trabalho, nosso objetivo é estudar a existência de soluções positivas do estado estacionário do sistema (0.1):

$$(0.2)\qquad \begin{cases} -\Delta u = F(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v = G(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

A forma que atacaremos o problema é inspirada em artigos clássicos como Brézis-Turner [1], Nussbaum [16], de Figueiredo-Lions-Nussbaum [3], e consiste em obter estimativas a priori na norma do supremo das soluções positivas do sistema (0.2) e a partir daí, utilizar teoria do grau topológico, como por exemplo: índice de ponto fixo em cones.

Aqui consideraremos sistemas de equações elíticas não-lineares (0.2) com

$$F(x,u,v) = m_{11}(x)u + m_{12}(x)v + f(x,u,v) \quad \text{e}$$
$$G(x,u,v) = m_{21}(x)u + m_{22}(x)v + g(x,u,v),$$

onde $M(x) = (m_{ij}(x))$ é uma matriz cooperativa e f, g satisfazem

$$(0.3)\qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(x,u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0, \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(x,u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0,$$

uniformemente em $x \in \Omega$.

O sistema (0.2) pode ser reescrito na forma matricial abaixo:

$$-\Delta U = M(x)U + \begin{pmatrix} f(x,u,v) \\ g(x,u,v) \end{pmatrix}, \quad U = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega,$$

onde U e $-\Delta U$ são respectivamente os vetores coluna $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix}$.

Em artigo recente, Clément, de Figueiredo e Mitidieri [6], nesta mesma linha de raciocínio, obtiveram estimativas a priori para sistemas na forma

$$\text{(0.4)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(v) & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v = g(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $f, g \in C^1(I\!R^+)$; $f'(s) \geq 0, g'(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$ e

$$\text{(0.5)} \qquad \liminf_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = a, \quad \liminf_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s} = b,$$

com $a, b \in (0, \infty], ab > \lambda_1^2$, sendo λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta; H_o^1(\Omega))$. Além disso, existem números positivos A, B tais que

$$\text{(0.6)} \qquad \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^\alpha} = A \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{g(s)}{s^\beta} = B,$$

com $1 \leq \alpha, \beta < \infty$ satisfazendo $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} > \frac{N-2}{N}, N > 2$. A estimativa a priori é obtida usando uma versão dos resultados de Gidas-Ni-Nirenberg [10], obtida por Troy [17], e uma extensão da identidade de Rellich, seguindo a mesma idéia em [3].

Mancini e Mitidieri [15], estudaram a existência e não existência de soluções para sistemas:

$$\text{(0.7)} \qquad -\Delta U = MU + \begin{pmatrix} f(u) \\ h(v) \end{pmatrix} \quad \text{em} \quad \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

onde $M = \begin{pmatrix} \lambda & -\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$; $f(t) = |t|^{\frac{4}{N-2}}t$ e $h \in C^1(I\!R)$, $h(0) = h'(0) = 0$ e $h'(0) \leq 0$, para $t \in I\!R$. Entre outros resultados, os autores mostraram que o sistema (0.7) possui uma solução $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, tal que $u \geq v > 0$, desde que $th(t) \geq 2H(t)$, para $t \in I\!R$ e

$$\gamma + 2\delta \leq \lambda < \min_j \quad \lambda_j + \frac{\delta^2}{\lambda_j - \gamma},$$

onde $H(t) = \int_0^t h(s)ds$.

Usando teoria de ponto crítico, Costa e Magalhães [9] estudaram sistemas elíticos não-lineares

$$(0.8) \qquad -\Delta U = M_{\pm} U + \begin{pmatrix} f(x,u,v) \\ g(x,u,v) \end{pmatrix} \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega$$

com $M_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda & \pm\delta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$ e (f,g) é o gradiente de uma função $F \in C^2(\Omega \times I\!R \times I\!R)$, no caso M_+ e $(f,-g) = \nabla F$ no caso M_-. Além disso, F satisfaz a seguinte condição de crescimento:

$$(0.9) \qquad \lim_{|U| \to \infty} \frac{\nabla F(x,U)}{|U|} = 0, \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \Omega \quad \text{q.s.}$$

É provado em [9] que para obter solução do problema (0.8) é suficiente que os auto-valores de $M_{\pm}$ não coincidam com os auto-valores de $(-\Delta; H_o^1(\Omega))$ (caso não-ressonante). Também é dada uma condição em F para se obter solução no caso ressonante.

Trataremos o problema de modo diferente dos trabalhos citados acima e um dos resultados que escreveremos aqui não tem interseção com nenhum dos supra citados. No decorrer desta introdução discutiremos tais divergências. As nossas estimativas a priori usam argumentos do tipo "blow up" como em Gidas e Spruck [11] e precisaremos de alguns resultados preliminares sobre equações não-lineares em $I\!R^N$ do tipo Liouville. É daí que começaremos a organizar o nosso trabalho.

No capítulo I demonstraremos alguns resultados do tipo: " Se $u, v \in C^2(I\!R^N)$ são funções não-negativas satisfazendo $\Delta u + v^\alpha = 0, \Delta v + u^\beta = 0$, com $\alpha, \beta \geq 0$ satisfazendo certas condições, então $u \equiv v \equiv 0$". Resultados como este são conhecidos como do tipo Liouville. Este resultado é uma extensão para sistemas do teorema 1.1 [12], devido à Gidas e Spruck: "Se uma função não-negativa $u \in C^2(I\!R^N), N > 2$, satisfaz $\Delta u + u^\sigma = 0$, com $1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, então $u \equiv 0$". Faremos a demonstração deste último resultado para o caso $N = 2$. Ainda no primeiro capítulo, discutiremos os mesmos resultados no semi-espaço $I\!R^N_+$.

No Capítulo II estabeleceremos estimativas a priori em duas classes distintas de sistemas da forma

$$
(0.10) \qquad \begin{cases} -Lu = f(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega \\ -Lv = g(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega \\ u = \varphi, \quad v = \phi & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}
$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1;

$$
Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u
$$

é um operador uniformemente elítico com coeficientes $a_{ij} \in C^o(\overline{\Omega})$, $b_i \in L^\infty(\Omega)$; φ, ϕ são funções de Carathéodory em $\Omega \times I\!R_+ \times I\!R$ tais que: f pode ser escrito como soma de duas funções de Carathéodory ℓ e h que satisfazem

$$
(0.11) \qquad |h(x,u,v)| \leq a(u^n + |v|^p) + b, \quad \text{para todo} \quad (x,u,v) \in \Omega \times I\!R_+ \times I\!R
$$

$$
\lim_{u \to \infty} \frac{\ell(x,u,v)}{u^\sigma} = \alpha(x), \quad \text{uniformemente em } (x,v) \in \overline{\Omega} \times I\!R,
$$

onde a e b são constantes positivas; α é uma função contínua e positiva no compacto $\overline{\Omega}$, $p \geq 0$, $0 \leq n < \sigma$, $1 < \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, se $N > 2$ e $1 < \sigma < \infty$ se $N = 2$.

$$
(0.12) \qquad |g(x,u,v)| \leq au^q + b, \quad \text{em} \quad (x,u,v) \in \overline{\Omega} \times I\!R_+ \times I\!R,
$$

com $q \geq 0$, $pq < \sigma$. Observe que a classe de sistemas (0.10) é absolutamente distinta da classe de sistemas (0.4). A condição (0.11) implica que f depende necessariamente da variável u, enquanto que no sistema (0.4) f depende somente da variável v. Um exemplo de um sistema satisfazendo (0.11) e (0.12) é:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^\sigma + v^p & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v = u^q \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $pq < \sigma$. Vamos obter outra estimativa a priori para sistemas (0.10) com f e g funções de Carathéodory em $\Omega \times I\!R_+ \times I\!R_+$ tais que $f = \ell + h$, como em (0.11) e g pode ser escrito como soma de funções de Carathéodory γ e m cumprindo as propriedades:

$$(0.13) \qquad |h(x,u,v)| \le a(u+v)^p + b, \quad \text{em} \quad (x,u,v) \in \Omega \times I\!R_+ \times I\!R_+$$

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\ell(x,u,v)}{v^\sigma} = \alpha(x), \quad \text{uniformemente em } (x,u) \in \overline{\Omega} \times I\!R_+,$$

com a, b, α como em (0.11), $p < \sigma$, $1 < \sigma \le \frac{N}{N-2}$, caso $N > 2$ e $1 < \sigma < \infty$, quando $N = 2$.

$$(0.14) \qquad |m(x,u,v)| \le a(u+v)^p + b, \quad \text{em} \quad (x,u,v) \in \Omega \times I\!R_+ \times I\!R_+$$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\gamma(x,u,v)}{u^\sigma} = \beta(x), \quad \text{uniformemente em } (x,v) \in \overline{\Omega} \times I\!R_+.$$

onde β é uma função positiva e contínua no conjunto $\overline{\Omega}$ e a, b, p e σ são os mesmos de (0.13). O Sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = v^\sigma & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v = u^\sigma & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{onde} \quad 1 < \sigma \le \frac{N}{N-2}$$

é um exemplo de um sistema (0.10) com f e g satisfazendo (0.13) e (0.14), e quando Ω é convexo temos também um exemplo para a classe de sistemas (0.4).

No capítulo III, estudaremos sistemas de equações lineares na forma

$$(0.15) \qquad -\Delta U = M(x)U + \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \quad \text{em } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega;$$

com $M = M(x)$ sendo uma matriz cooperativa e f, g em $L^p(\Omega)$ são funções dadas. Como em [9] e [15] trataremos de questões de existência e princípio do máximo para (0.15). Mais especificamente, daremos condições na matriz M que sejam suficientes para garantir existência de soluções: Seja $\mu(x)$ o máximo valor que a forma quadrática associada à matriz $M(x)$ atinge no círculo S^1 e λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta; H_o^1(\Omega))$. Assuma que

$$(0.16) \qquad \mu(x) \leq \hat{\lambda}, \quad \text{q.s em} \quad \Omega$$

onde $\hat{\lambda} < \lambda_1$. Então para cada $f, g \in L^p(\Omega)$ existe um único par $u, v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_o^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (0.15). A condição nas linhas de M:

$$(0.17) \qquad m_{11}(x) + m_{12}(x) \leq \hat{\lambda}, \quad m_{21}(x) + m_{22}(x) \leq \hat{\lambda}, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega \quad \text{q.s.}$$

é suficiente para (0.15) satisfazer um princípio de máximo.

No último capítulo, aplicaremos os resultados obtidos para obter soluções positivas para sistemas na forma:

$$(0.18) \qquad -\Delta U = M(x)U + \begin{pmatrix} f(x,u,v) \\ g(x,u,v) \end{pmatrix} \quad \text{em } \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega;$$

onde $M = M(x)$ é uma matriz cooperativa satisfazendo (0.16), (0.17) e f, g satisfazem (0.3), (0.11) e (0.12) (ou (0.3), (0.13) e (0.14)). As condições (0.13) e (0.14) caracterizam o sistema (0.18) como um problema superlinear e f, g tem crescimento subcrítico. Observe que (0.8) é um problema sublinear e que a função f em (0.7) possui o crescimento crítico $\frac{N+2}{N-2}$.

Para a comodidade do leitor, no final destas notas faremos um apêndice com uma lista de alguns resultados que nos serão úteis durante todo este trabalho.

CAPÍTULO I

Resultados Globais do Tipo Liouville

Neste capítulo faremos um estudo nas soluções positivas do sistema elítico não-linear:

$$\text{(I.1)} \qquad \begin{cases} \Delta u + v^{\alpha} = 0, \\ \Delta v + u^{\beta} = 0, \qquad \text{em} \quad I\!R^N, \quad N \geq 2 \end{cases}$$

onde α, β são reais positivos. Estaremos interessados em dar condições em α e β para que a única solução não-negativa de (I.1) seja a solução trivial $u \equiv v \equiv 0$. Gidas e Spruck em [12], demonstraram o seguinte resultado:

Teorema I.1: Seja $u \in C^2(I\!R^N)$, $N \geq 2$, uma função não-negativa satisfazendo

$$\text{(I.2)} \qquad \Delta u + u^{\sigma} = 0, \quad \text{em} \quad I\!R^N.$$

com $1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$. Então $u \equiv 0$.

Observação I.1: A limitação no valor de σ é essêncial. De fato, a função não-negativa

$$u(x) = \left[\frac{\mu\sqrt{N(N-2)}}{\mu^2 + |x-a|^2} \right]^{\frac{N-2}{N}}, \quad \mu > 0, \quad a \in I\!R^N, \quad N > 2$$

satisfaz (I.2) para $\sigma = \frac{N+2}{N-2}$. Este exemplo é dado em [12].

Começaremos considerando o mesmo problema. Para o caso $N = 2$ pode-se dar uma demonstração mais simplificada do Teorema I.1, que faremos a seguir considerando uma desigualdade em vez da igualdade (I.2).

Teorema I.2: Seja $u \in C^2(I\!R^2)$, uma função não-negativa tal que

$$\text{(I.3)} \qquad \Delta u + u^{\sigma} \leq 0, \quad \text{em} \quad I\!R^2.$$

com $1 \leq \sigma < \infty$. Então $u \equiv 0$.

Antes da demonstração do Teorema I.2, façamos as seguintes considerações: Seja B_R, $R > 0$, a bola aberta no $I\!R^N$ com centro na origem e raio R, e seja $\varphi_1 \in H_o^1(B_1)$ uma auto-função positiva associada ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta; H_o^1(B_1))$. Veja que $\varphi_R(x) = \varphi_1(\frac{x}{R})$ satisfaz $-\Delta\varphi_R = \frac{\lambda_1}{R^2}\varphi_R$ em $|x| < R$ e $\varphi_R = 0$ sobre $|x| = R$. Suponha que $u \in C^2(I\!R^N)$, $N \geq 2$ é não-negativa e

$$(I.4) \qquad \Delta u + u^\sigma \leq 0, \quad \text{em} \quad I\!R^N, \quad \sigma \geq 1.$$

Para $\sigma > 1$, tomemos $\sigma' > 1$ tal que $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1$. Multiplicando (I.4) por φ_R^σ e integrando em B_R, temos:

$$\int_{|x|<R} u^\sigma \varphi_R^\sigma \leq -\int_{|x|<R} \Delta u \varphi_R^\sigma = -\int_{|x|<R} u\Delta(\varphi_R^\sigma) =$$

$$= -\sigma(\sigma-1)\int_{|x|<R} u\varphi_R^{\sigma-2}|\nabla\varphi_R|^2 + \frac{\sigma\lambda_1}{R^2}\int_{|x|<R} u\varphi_R^\sigma.$$

Observe que o primeiro termo no último membro da desigualdade acima é menor ou igual a zero. Portanto,

$$\int_{|x|<R}(u\varphi_R)^\sigma \leq \frac{\sigma\lambda_1}{R^2}\int_{|x|<R} u\varphi_R^\sigma.$$

Usando a desigualdade de Hölder na desigualdade acima, obtemos

$$(I.5) \qquad \|u\varphi_R\|_{L^\sigma(B_R)}^{\sigma-1} \leq \frac{\sigma\lambda_1}{R^2}\|\varphi_R\|_{L^\sigma(B_R)}^{\sigma-1} = \sigma\lambda_1 R^{\frac{N}{\sigma'}-2}\|\varphi_1\|_{L^\sigma(B_1)}^{\sigma-1}$$

Se $\sigma = 1$, multiplicamos (I.4) por φ_R^2 e procedendo como acima, obteremos

$$\left(1 - \frac{2\lambda_1}{R^2}\right)\int_{|x|<R} u\varphi_R^2 \leq 0, \quad \text{para todo} \quad R > 0,$$

daí $u \equiv 0$.

Prova do Teorema I.2: Fazendo $N = 2$ em (I.5) e observando que $\frac{2}{\sigma'} - 2$ é sempre negativo, temos

$$\lim_{R \to \infty} \|u\varphi_R\|_{L^\sigma(B_R)} = 0$$

e consequentemente $u \equiv 0$. $\square$

Observação I.2: A desigualdade (I.5) mostra que a única função não-negativa que satisfaz (I.4), com $N \geq 3$ e $1 \leq \sigma < \frac{N}{N-2}$ é a função nula. Gidas em [13], mostra o mesmo resultado para $1 < \sigma \leq \frac{N}{N-2}$, embora tenha enunciado o resultado no caso de igualdade como em (I.2) mas não para desigualdade como em (I.4).

O caso do semi-espaço apresenta características diferentes. Em seguida estudaremos as soluções não-negativas de (I.1) em $\mathbb{R}^N_+$ com condições de fronteiras de Dirichlet. Como em Gidas e Spruck [11], faremos uso do método de movimento de planos paralelos, desenvolvido por Gidas, Ni e Nirenberg em [10], e provaremos o seguinte:

Teorema I.3: Sejam $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N_+) \cap C^o(\overline{\mathbb{R}^N_+})$ soluções não-negativas de (I.1) no semi-espaço $\mathbb{R}^N_+$, com $u = v = 0$ sobre $\partial\mathbb{R}^N_+$ e $0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{N+2}{N-2}$, caso $N > 2$ ou $0 \leq \alpha, \beta < \infty$, se $N = 2$. Então $u \equiv v \equiv 0$.

A demonstração é feita em duas etapas. Primeiramente mostraremos que u e v só dependem da variável x_N e portanto $u = u(x_N), v = v(x_N)$ satisfazem $u'' + v^\alpha = 0$, $v'' + u^\beta = 0$ em $\mathbb{R}_+$, com $u(0) = v(0) = 0$. Daqui por diante (x', x_N) denotará o vetor $x = (x_1, ..., x_N)$, onde $x' = (x_1, ..., x_{N-1})$ e $e_N = (0, ..., 1) = (0', 1)$. Queremos mostrar que $u(x) = u(\overline{x})$ sempre que $x_N = \overline{x_N}$. Sem perder a generalidade podemos supor que $x' = -\overline{x'}$, pois com uma translação, podemos escolher o ponto $\left(\frac{x' + \overline{x'}}{2}, 0\right)$ para ser a origem do $\mathbb{R}^N$. Considere a inversão com relação ao ponto $-e_N$ seguida de translação $y = \frac{x + e_N}{|x + e_N|^2}$. Esta transformação leva o semi-espaço $x_N > 0$ na bola aberta B com centro em $\frac{1}{2}e_N$ e raio $\frac{1}{2}$, e leva o hiperplano $x_N = 0$ na esfera $|y - \frac{1}{2}e_N| = \frac{1}{2}$ menos $y = 0$. Defina em $\overline{B} \setminus \{0\}$

$$\overline{u}(y) = |x + e_N|^{N-2} u(x) \quad \text{e} \quad \overline{v}(y) = |x + e_N|^{N-2} v(x).$$

As funções $\overline{u}$ e $\overline{v}$ são as transformações de Kelvin de u e v, e satisfazem

$$\text{(I.6)} \qquad \begin{cases} \Delta\overline{u} + |y|^{-p}\overline{v}^{\alpha} = 0 \\ \Delta\overline{v} + |y|^{-q}\overline{u}^{\beta} = 0 \quad \text{em} \quad B \\ \overline{u} = \overline{v} = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B \setminus \{0\} \end{cases}$$

onde $p = (N-2)\alpha - (N+2)$, $\quad q = (N-2)\beta - (N+2)$.

A seguir iremos fazer algumas observações sobre transporte paralelo de planos:

Seja γ um vetor unitário no $\mathbb{R}^N$ perpendicular ao vetor e_N, $\quad \gamma = (\gamma', 0)$ e $|\gamma'| = 1$. Para $\lambda \in \mathbb{R}_+$, denote por T_λ o hiperplano perpendicular ao vetor γ e passando pelo ponto $\lambda\gamma$. Observe que $T_\lambda \cap B$ é vazio para $\lambda \geq \frac{1}{2}$ e não-vazio quando $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$. Seja Σ_λ a calota cheia de B, determinada pelo hiperplano T_λ, e denote por Σ'_λ o conjunto obtido através da reflexão de Σ_λ com relação ao hiperplano T_λ. Observe que $\Sigma'_\lambda \subset B$, para λ em $[0, \frac{1}{2})$.

É consequência do lema de Hopf (lema A.1 do apêndice) a seguinte afirmação: Para todo $x_o \in \partial B$ com $(x_o - \frac{1}{2}e_N).\gamma > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{(I.7)} \qquad \frac{\partial\overline{u}}{\partial\gamma} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\overline{v}}{\partial\gamma} < 0 \quad \text{em} \quad B \cap \{|y - x_o| < \delta\}.$$

O próximo resultado é uma versão do Lema 2.2 em [10]. Usaremos a notação x^λ para indicar o ponto refletido de x com relação ao hiperplano T_λ.

Lema I.1: Assuma que $\overline{u}$ e $\overline{v}$ satisfazem (I.6), com $0 \leq \alpha, \beta < \infty$ como no Teorema I.3, e para algum $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$

$$\text{(I.8)} \qquad \frac{\partial\overline{u}}{\partial\gamma}(x) < 0, \quad \frac{\partial\overline{v}}{\partial\gamma}(x) < 0, \quad \overline{u}(x) \leq \overline{u}(x^\lambda), \quad \text{e} \quad \overline{v}(x) \leq \overline{v}(x^\lambda), \quad \text{em} \quad \Sigma_\lambda.$$

Então:

(i) $\overline{u}(x) < \overline{u}(x^\lambda)$ em Σ_λ e $\frac{\partial \overline{u}}{\partial \gamma} < 0$ sobre $T_\lambda \cap B$, desde que $\overline{u}(x) \not\equiv \overline{u}(x^\lambda)$;

(ii) o mesmo para a função $\overline{v}$.

Prova do Lema I.1: Vamos definir em Σ'_λ as aplicações

$$U(x) = \overline{u}(x^\lambda) \quad \text{e} \quad V(x) = \overline{v}(x^\lambda).$$

Observe que $\overline{u} \geq U$, $\overline{v} \geq V$ em Σ'_λ, $\overline{u} = U$, $\overline{v} = V$ sobre $T_\lambda \cap B$. Como $p, q \geq 0$ e $|x^\lambda| \geq |x|$, para todo $x \in \Sigma'_\lambda$, temos

$$\Delta(U - \overline{u}) = |x|^{-p}\overline{v}^\alpha - |x^\lambda|^{-p}V^\alpha \geq 0 \quad \text{em} \quad \Sigma'_\lambda.$$

Analogamente,

$$\Delta(V - \overline{v}) \geq 0.$$

Usando o lema de Hopf (Lema A.1), $\overline{u} > U$ e $\frac{\partial U}{\partial \gamma} > \frac{\partial \overline{u}}{\partial \gamma}$ sobre $T_\lambda \cap B$ e o resultado fica demonstrado.

Para concluir a afirmação de que u e v dependem somente da variável x_N, basta verificar que zero é o ínfimo do conjunto Λ_γ dos números $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ tais que

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \gamma} < 0, \frac{\partial \overline{v}}{\partial \gamma} < 0, \overline{u}(x) < \overline{u}(x^\lambda) \quad \text{e} \quad \overline{v}(x) < \overline{v}(x^\lambda) \quad \text{em} \quad \Sigma'_\lambda,$$

qualquer que seja o vetor γ perpendicular ao vetor e_N. Isto implica que $\overline{u}(x) \equiv \overline{u}(x^o)$ e portanto, $\overline{u}(y) = \overline{u}(|y|, y_N)$. Mostremos que $0 = inf \Lambda_\gamma$. $\Lambda_\gamma \neq \emptyset$ por (I.7). Se $\mu = inf \Lambda_\gamma$ então (I.8) é satisfeita para $\lambda = \mu$. Caso $\mu > 0$, temos $\overline{u}(x) \not\equiv \overline{u}(x^\mu)$ e $\overline{v}(x) \not\equiv \overline{v}(x^\mu)$, pois se este não for o caso, $\overline{u}(x_o^\mu) = 0$, para todo $x_o \in \partial\Sigma_\mu \setminus T_\mu$ e $x_o^\mu \in B$, contradizendo a positividade de $\overline{u}$. Usando o Lema I.1 e a afirmação (I.7), vemos que nenhum μ positivo pode ser o ínfimo de Λ_γ.

Prova do Teorema I.3: Agora temos que $u = u(x_N)$ e $v = v(x_N)$ satisfazem em $t > 0$:

$$\begin{cases} u'' + v^\alpha = 0 \\ v'' + u^\beta = 0 \\ u(0) = v(0) = 0 \end{cases}$$

Observe que u e v são côncavas. Suponha que v é crescente e tome algum t_1 tal que $u'(t_1) > 0$. Pelo teorema de Taylor

$$0 < u(t) = u(t_1) + (t - t_1)u'(t_1) + \int_{t_1}^{t} (t - s)u''(s)ds.$$

Portanto

$$0 < u(t_1) + (t - t_1)u'(t_1) - \frac{1}{2}(t - t_1)^2 v^{\alpha}(t_1),$$

e daí

$$v^{\alpha}(t_1) < \frac{2u(t_1)}{(t - t_1)^2} + \frac{2u'(t_1)}{t - t_1}, \qquad \text{para todo} \qquad t > t_1,$$

que é uma contradição à positividade de v. Portanto u atinge o máximo em algum ponto $t = t_1$ e a partir daí decresce até atingir $u = 0$ em algum $t = t_2$, que é um absurdo. Portanto $u \equiv v \equiv 0$. □

Para finalizar este capítulo voltaremos ao caso do $I\!R^N$. Consideraremos agora funções não-negativas $u, v \in C^2(I\!R^N)$ tais que:

$$\text{(I.9)} \qquad \begin{cases} \Delta u + v^{\alpha} \leq 0, \\ \Delta v + u^{\beta} \leq 0, \qquad \text{em} \quad I\!R^N, \quad N \geq 2, \qquad \alpha, \beta \geq 0 \end{cases}$$

Sejam $\omega = uv$, $q > 0$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ e $p > 1$ tal que $pq = \alpha + 1$ e portanto o conjugado p' de p, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ satisfaz $p'q = \beta + 1$. Usando (I.9) e a desigualdade de Young, obtemos:

$$\text{(I.10)} \qquad \Delta\omega = 2\nabla u \nabla v + u\Delta v + v\Delta u \leq 2\nabla u \nabla v - u^{\beta+1} - v^{\alpha+1};$$

$$\text{(I.11)} \qquad \omega^q \leq \frac{u^{\beta+1}}{p'} + \frac{v^{\alpha+1}}{p};$$

$$\text{(I.12)} \qquad 2\nabla u \nabla v \leq \nabla u \nabla v + \frac{u}{2v}|\nabla v|^2 + \frac{v}{2u}|\nabla u|^2 = \frac{1}{2}\omega^{-1}|\nabla\omega|^2.$$

Combinando (I.10), (I.11) e (I.12), obtemos

$$\Delta\omega + \omega^q \leq \frac{1}{2}\omega^{-1}|\nabla\omega|^2.$$

Agora ponha $\omega = f^2$. Verifica-se facilmente que $\Delta f + \frac{1}{2}f^{2q-1} \leq 0$ em $I\!R^N$. Pela observação I.2, se $2q-1 \leq \frac{N}{N-2}$, então $f \equiv 0$ e consequentemente temos demonstrado o:

Teorema I.4: Sejam $u, v \in C^2(I\!R^N)$ funções não-negativas satisfazendo (I.9) para α, β satisfazendo $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} \geq \frac{N-2}{N-1}$, $N \geq 3$ e $\alpha, \beta < \infty$ para $N = 2$. Então $u \equiv v \equiv 0$.

Observação I.3: É possível que o Teorema I.1 ainda seja verdadeiro se em vez da igualdade (I.2) tivermos uma desigualdade como em (I.4). Observe que caso isto ocorra, a condição em α, β no Teorema I.4, pode ser exatamente a condição (0.6) na introdução.

CAPÍTULO II

Estimativas A Priori

Vamos considerar o sistema elítico não-linear:

$$
\text{(II.1)} \qquad \begin{cases} -Lu = f(x,u,v) \quad \text{em} \quad \Omega; \\ -Lv = g(x,u,v) + \gamma(x)v \quad \text{em} \quad \Omega; \\ u = \varphi, v = \phi \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}
$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira C^2 em $\mathbb{R}^N$; φ, ϕ são funções limitadas e mensuráveis sobre $\partial\Omega$;

$$
Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u
$$

é um operador uniformemente elítico em Ω, isto é, existem números positivos λ, Λ tais que

$$
\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^N
$$

sendo a matriz $A(x) = (a_{ij}(x))_{N\times N}$ uma matriz simétrica para todo $x \in \Omega$. Além disso suponha que $a_{ij} \in C^o(\overline{\Omega})$ e $b_i \in L^\infty(\Omega)$, para $i, j = 1, 2, ..., N$.

Assuma que f, g são funções de Carathéodory em $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tais que: f pode ser escrito como soma de duas funções de Carathéodory ℓ e h tais que

$$
\text{(II.2)} \qquad |h(x,u,v)| \leq a(u^n + |v|^p) + b, \quad \text{para todo} \quad (x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}
$$

$$
\lim_{u\to\infty} \frac{\ell(x,u,v)}{u^\sigma} = \alpha(x), \quad \text{uniformemente em } (x,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}
$$

onde α é uma função positiva e contínua no compacto $\overline{\Omega}$; a e b são constantes positivas e os expoentes p, n, σ satisfazem: $p \geq 0$, $0 \leq n < \sigma$, $1 < \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, se $N > 2$ e $1 < \sigma < \infty$ se $N = 2$;

$$\text{(II.3)} \qquad |g(x,u,v)| \leq au^q + b, \quad \text{em} \quad (x,u,v) \in \overline{\Omega} \times I\!R_+ \times I\!R,$$

com $q \geq 1$, $pq < \sigma$ e a, b, p e σ são os mesmos que aparecem em (II.2)

Um dos nossos principais resultados neste capítulo é o seguinte:

Teorema II.1: Assuma que as condições (II.2) e (II.3) são satisfeitas, $\gamma \in L^\infty(\Omega)$, $\gamma \leq 0$, q.s. em Ω. Então, existe uma constante positiva $C = C(L, \Omega, f, g, \gamma)$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

para todos $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo (II.1) com $u \geq 0$. Caso L seja o operador Laplaciano Δ e as condições de fronteira de Dirichlet sejam $\varphi = 0, \phi = 0$, o resultado ainda é verdadeiro para $\gamma \leq \hat{\lambda}$, q.s. em Ω, onde $\hat{\lambda}$ é menor que o primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta : H_o^1(\Omega))$.

Observação II.1: A constante C do teorema acima depende somente das constantes dadas em (II.2), (II.3) e dos módulos do limite que aparece em (II.2).

Em seguida vamos apresentar alguns resultados preliminares que posteriormente nos serão úteis.

Lema II.1: Sejam λ_k uma sequência de números positivos convergindo para zero e $\ell : \Omega \times I\!R_+ \times I\!R \to I\!R$ uma função de Carathéodory tal que

$$\text{(II.4)} \qquad \lim_{u \to \infty} \frac{\ell(x,u,v)}{u^\sigma} = \alpha(x)$$

uniformemente em $(x, v) \in \Omega \times I\!R$, onde $\alpha \in L^\infty(\Omega)$. Então

$$\lim_{k \to \infty} |\lambda_k^\sigma \ell(x, \lambda_k^{-1} u, v) - \alpha(x) u^\sigma| = 0,$$

uniformemente em $x \in \Omega$, $\quad 0 \leq u \leq 1$ e $v \in I\!R$.

Prova do Lema II.1: Dado $\varepsilon > 0$, existe $u_o > 0$ tal que

$$\left|\frac{\ell(x,u,v)}{u^\sigma} - \alpha(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad u \geq u_o, x \in \Omega, v \in I\!R.$$

Se $\lambda_k^{-1} u \geq u_o$ então $|\lambda_k^\sigma \ell(x, \lambda_k^{-1}u, v) - \alpha(x)u^\sigma| \leq \varepsilon$ e se $\lambda_k^{-1} u \leq u_o$,

$$|\lambda_k^\sigma \ell(x, \lambda_k^{-1}u, v) - \alpha(x)u^\sigma| \leq \lambda_k^\sigma \left(\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{0 \leq u \leq u_o} |\ell|\right).$$

□

Este próximo resultado diz respeito a estimativa na fronteira do gradiente das soluções de equações elíticas de segunda ordem.

O que faremos agora é construir uma "barreira" para soluções de uma classe de equações elíticas de segunda ordem. Suponha que L é um operador linear elítico como em (II.1) e que o domínio Ω satisfaz a condição da esfera exterior em algum $x_o \in \partial\Omega$, ou seja, existe uma bola aberta B tal que $x_o \in \partial\Omega \cap \partial B$ e $\Omega \cap B = \emptyset$. Considere d a função distância $d(x, \partial B)$ definida em $I\!R^N \setminus B$ por $d(x) = |x - y| - R$, onde R e y são respectivamente o raio e o centro da bola B. Fixe uma função $\psi \in C^2[0, \infty)$ tal que $\psi' > 0$ e defina $\omega = \psi(d)$. Observe que $|\nabla\omega| = \psi'$ e

$$L\omega = \psi' \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_{ij} d + \psi' \sum_{i=1}^N b_i(x) D_i d + \psi'' \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i d D_j d.$$

Como $\nabla d = \frac{x-y}{|x-y|}$ e $D_{ij} d = |x-y|^{-3}(|x-y|^2 \delta_{ij} - (x_i - y_i)(x_j - y_j))$, é fácil verificar que

$$\text{(II.5)} \qquad L\omega + f(x) \leq \frac{N-1}{R}\psi'\Lambda + \sum_{i=1}^N b_i(x) D_i\omega$$

$$\frac{\psi''}{(\psi')^2} + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) D_i\omega D_j\omega + f(x)$$

onde f é uma função de $L^\infty(\Omega)$. Observe que quando $\psi' = |\nabla\omega| \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i\omega + f(x) + \frac{N-1}{R}\psi'\Lambda$$

$$\text{(II.6)} \qquad \leq |b||\nabla\omega| + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{N-1}{R}|\nabla\omega|\Lambda$$

$$\leq \left(|b| + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{N-1}{R}\Lambda\right)|\nabla\omega| \leq \nu \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_i\omega D_j\omega$$

com $\nu = \left(|b| + \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{N-1}{R}\Lambda\right)\lambda^{-1}$ e $|b|^2 = \sum_{i=1}^{N} b_i(x)^2$. Combinando (II.5) e (II.6) obtemos

$$L\omega + f(x) \leq \left(\frac{\psi''}{(\psi')^2} + \nu\right) \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_i\omega D_j\omega.$$

Sejam $\psi(d) = \frac{1}{\nu}log(1 + kd)$, $k > 0$ e V uma vizinhança de x_o em $\overline{\Omega}$ da forma $\{x \in \overline{\Omega} : d(x) < a\}$, $a > 0$. Certamente que $\psi'' + \nu(\psi')^2 = 0$ e para $|\nabla\omega| \geq 1$,

$$\text{(II.7)} \qquad L\omega + f(x) \leq 0$$

Se k e a são escolhidos de forma que

$$\psi'(d) = \frac{k}{\nu(1+kd)} \geq \frac{k}{\nu(1+ka)} \geq 1, \quad \text{para} \quad 0 \leq d \leq a,$$

teremos ω satisfazendo (II.7) em $\Omega \cap V$. Agora seja $u \in C^2(\Omega)$ tal que

$$\text{(II.8)} \qquad Lu + f(x) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Ora, $L(\omega + \sup_{\partial\Omega} u - u) \leq 0$ em $\Omega \cap V$ e $u \leq \omega + \sup_{\partial\Omega} u$ sobre $\partial\Omega \cap V$. Tomando a e k tais que $1 + ka = e^{\nu M}$, onde $M \geq 2\sup_\Omega u$, teremos $\psi(a) = M$ e consequentemente $\omega + \sup_{\partial\Omega} u \geq u$ em $\partial(\Omega \cap V)$. Usando o princípio do máximo na região $\Omega \cap V$, segue que

$$u \leq \omega + \sup_{\partial\Omega} u \quad \text{em} \quad \Omega \cap V.$$

A função ω é conhecida como uma função barreira superior para u. Mostramos o seguinte lema:

Lema II.2: Suponha que $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz (II.8) em um domínio Ω que satisfaz a condição da esfera exterior em algum $x_o \in \partial\Omega$. Se $f \in L^\infty(\Omega)$, existe uma função barreira ω que satisfaz

$$\omega = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B, \quad |\nabla\omega| \leq C \quad \text{em} \quad \Omega_a = \{x \in \Omega : dist(x, \partial B) \leq a\}$$

e

$$u(x) \leq \omega(x) + \sup_{\partial\Omega} u, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega_a$$

onde a, C dependem apenas de $N, \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \lambda, \Lambda$ e do raio de B.

O resultado acima é encontrado numa forma mais geral em [18] Wang e Deng. Nossa demonstração é inspirada na prova do teorema 14.1 em [14-pag.337].

Prova do Teorema II.1: A demonstração é feita por contradição e usa um argumento do tipo "blow up" como em Gidas e Spruck [11]. Suponha que existam sequências u_k, v_k em $C^2(\overline{\Omega})$, com $u_k \geq 0$, satisfazendo (II.1) e uma sequência x_k em Ω convergindo para $x_o \in \overline{\Omega}$ tal que $u_k(x_k) \to \infty$. Trataremos os dois casos distintos: $x_o \in \Omega$ ou $x_o \in \partial\Omega$.

Caso 1: $x_o \in \Omega$.

Seja $d > 0$, $2d < dist(x_o, \partial\Omega)$ e defina

$$\overline{u}_k(y) = \lambda_k u_k(t_k y + x_k) \quad \text{para} \quad |y| \leq \frac{d}{t_k}.$$

t_k e λ_k são números reais positivos a serem escolhidos posteriormente. É fácil ver que

$$\text{(II.9)} \qquad L_k\overline{u}_k(y) + \ell_k(y) + h_k(y) = 0 \quad \text{em} \quad |y| < \frac{d}{t_k},$$

onde $L_k\omega(y) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}^k(y) D_{ij}\omega(y) + \sum_{i=1}^N b_i^k(y) D_i\omega(y)$, com

$$a_{ij}^k(y) = a_{ij}(t_k y + x_k), \quad b_i^k(y) = t_k b_i(t_k y + x_k),$$

$$\ell_k(y) = t_k^2 \lambda_k \ell(t_k y + x_k, u_k(t_k y + x_k), v_k(t_k y + x_k)) \quad \text{e}$$

$$h_k(y) = t_k^2 \lambda_k h(t_k y + x_k, u_k(t_k y + x_k), v_k(t_k y + x_k)).$$

Vamos mostrar que (II.9) converge, em algum sentido, para a equação elítica não-linear (I.2). Tome t_k, λ_k tais que $\lambda_k u_k(x_k) = 1$ e $t_k^2 \lambda_k = \lambda_k^\sigma$. Portanto $\lambda_k \to 0, t_k \to 0$, $0 \leq \overline{u}_k \leq 1$ em $|y| \leq \frac{d}{t_k}$ e $\overline{u}_k(0) = 1$. Para cada $R > 0$, as funções indexadas por k estão definidas em $|y| \leq 2R$, desde que k seja suficientemente grande. Além disso,

$$a_{ij}^k \to a_{ij}(x_o), b_i^k \to 0 \quad \text{uniformemente em} \quad |y| \leq 2R.$$

Pelo Lema II.1,

$$\text{(II.10)} \qquad \lim_{k \to 0} |\ell_k(y) - \alpha(t_k y + x_k)\overline{u}_k(y)^\sigma| = 0, \quad \text{uniformemente em} \quad |y| \leq 2R,$$

e portanto ℓ_k é uniformemente limitada. É consequencia do Lema A.2 do apêndice a seguinte desigualdade:

$$\text{(II.11)} \qquad \|v_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \sup_{\partial\Omega} |\phi| + C \sup_{\Omega} |g(x, u_k, v_k)|,$$

onde C é uma constante que depende apenas de Ω. Caso L seja o operador Laplaciano, $\varphi = \phi = 0$ e $\gamma \leq \hat{\lambda}$ a desigualdade (II.11) ainda é verdadeira pelo Lema A.3 do apêndice, só que neste caso C depende também de γ. Combinando (II.11) com as hipóteses (II.2) e (II.3), temos

$$|h(x, u_k(x), v_k(x)| \leq \hat{a}(\lambda_k^{-n} + \lambda_k^{-pq}) + \hat{b},$$

onde $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são constantes que independem de k. Portanto

$$|h_k(y)| \leq \hat{a}(\lambda_k^{\sigma-n} + \lambda_k^{\sigma-pq}) + \hat{b}\lambda_k^\sigma,$$

isto é, $h_k \to 0$ uniformemente em $|y| \leq 2R$. Fixe $r > N$. Usando o Lema A.6 do apêndice, existe uma constante $C > 0$, independente de k, satisfazendo

$$\|\overline{u}_k\|_{W^{2,r}(B_R)} \leq C \left(\|\overline{u}_k\|_{L^r(B_{2R})} + \|\ell_k\|_{L^r(B_{2R})} + \|h_k\|_{L^r(B_{2R})} \right),$$

onde B_ρ denota a bola aberta com centro na origem e raio ρ. Consequentemente $\|\overline{u}_k\|_{W^{2,r}(B_R)}$ são limitados uniformemente. Como $W^{2,r}(B_R) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B}_R)$ compactamente, para algum $0 < \alpha < 1$, podemos extrair uma subsequência, representada pela mesma notação, convergindo em $C^{1,\alpha}(\overline{B}_R)$ para algun $u \in C^{1,\alpha}(\overline{B}_R)$ e portanto (II.10) implica que ℓ_k converge uniformemente para $\alpha(x_o)u^\sigma$ em $|y| \leq 2R$. Observe que

$$L_k(\overline{u}_k - \overline{u}_m) = (\ell_m - \ell_k) + (h_m - h_k) + (b_i^m - b_i^k)D_i\overline{u}_m + (a_{ij}^m - a_{ij}^k)D_{ij}\overline{u}_m \quad \text{em} \quad B_R.$$

Novamente, em virtude do Lema A.6 do apêndice, existe uma constante C independente de k, tal que

$$\|\overline{u}_k - \overline{u}_m\|_{W^{2,r}(B_{\frac{R}{2}})} \leq C(\|\overline{u}_k - \overline{u}_m\|_{L^r(B_R)} + \|\ell_k - \ell_m\|_{L^r(B_R)} + \|h_k - h_m\|_{L^r(B_R)} +$$
$$\|a_{ij}^k - a_{ij}^m\|_{L^\infty(B_R)}\|D_{ij}\overline{u}_m\|_{L^r(B_R)} + \|b_i^k - b_i^m\|_{L^\infty(B_R)}\|D_i\overline{u}_m\|_{L^r(B_R)}).$$

Como $\|D_{ij}\overline{u}_k\|_{L^r(B_R)}$ é limitada, a última desigualdade implica que a sequência $\overline{u}_k$ converge em $W^{2,r}(B_{\frac{R}{2}})$ e u satisfaz em $B_{\frac{R}{2}}$,

$$\text{(II.12)} \qquad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_o)D_{ij}u + \alpha(x_o)u^\sigma = 0, \quad u \geq 0, \quad u(0) = 1.$$

Por um argumento de subsequência diagonal, u_k possui uma subsequência que converge uniformemente em compactos do $\mathbb{R}^N$, para alguma função $C^2(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (II.12) em $\mathbb{R}^N$. Finalmente, usando uma conveniente mudança de coordenadas, transformamos o operador elítico de segunda ordem em (II.12) no operador Laplaciano e dessa forma chegaremos a uma contradição do Teorema I.1.

Caso 2: $x_o \in \partial\Omega$.

Sem perder a generalidade, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}_+^N$ e que para algum $d > 0$, $\partial\mathbb{R}_+^N \cap \partial\Omega$ contém o disco $\{(x', 0) : |x' - x_o'| < 2d\}$. Estamos utilizando aqui a mesma notação do capítulo I deste trabalho. Seja d_k a última coordenada de x_k, isto é, $x_k = (x_k', d_k)$. Vamos definir $\overline{u}_k$ em $D_k = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| \leq \frac{d}{t_k} \quad \text{e} \quad y_N > -\frac{d_k}{t_k}\}$ como no primeiro caso (t_k e λ_k também são os mesmos). Como no caso 1, $\overline{u}_k$ satisfaz (II.9) em D_k. Afirmamos que a sequência $\frac{d_k}{t_k}$ é limitada inferiormente por uma constante positiva s. De fato, usando o Lema II.2, existe uma sequência de funções barreira ω_k e constantes $a > 0, C > 0$ que não dependem de k, tais que

$$\omega_k(y', -\frac{d_k}{t_k}) = 0,$$

$$\text{(II.13)} \qquad \overline{u}_k(y) \leq \omega_k(y) + \lambda_k \sup_{\partial\Omega} \varphi \quad \text{em} \quad D_{k,a} = D_k \cap \{y \in I\!R^N : |y| + |y + \frac{d}{t_k}| \leq a\}$$

$$\text{e} \quad |\nabla \omega_k(y)| \leq C \quad \text{em} \quad D_{k,a}.$$

Caso $\frac{d_k}{t_k} \to 0$, para todo k suficientemente grande, teremos $0 \in D_{k,a}$ e dessa forma $1 = \overline{u}_k(0) \leq \omega_k(0) + \lambda_k \sup_{\partial\Omega} \varphi$. Passando o limite nesta última desigualdade chegaremos a um absurdo e a afirmação está justificada. Quando $\frac{d_k}{t_k}$ não é limitada, usamos os argumentos do caso 1. Dessa forma, podemos supor que $\frac{d_k}{t_k} \to s > 0$. Usando o Lema A.6 do apêndice e argumentos análogos aos usados no caso 1 (passando para subsequência se necessário) $\overline{u}_k$ converge para uma função u, uniformemente em compactos de $H_s = \{y \in I\!R^N : y_N > -s\}$, onde $u \in C^2(H_s)$ e satisfaz (II.12) em H_s. Finalmente, observe que u pode ser extendida a uma função contínua em $\overline{H}_s$ se anulando sobre $y_N = -s$. Pelo Teorema I.3, deveríamos ter $u \equiv v \equiv 0$ que é uma contradição ao fato de $u = 1$ em $y = 0$. Vejamos, então a continuidade de u em $\overline{H}_s$: (Por II.13)

$$\overline{u}_k(y) \leq C(y_N + \frac{d_k}{t_k}) + \lambda_k \sup_{\partial\Omega} \varphi$$

Passando o limite na desigualdade acima, obtemos

$$u(y) \leq C(y_N + s) \quad \text{para} \quad y_N > -s + a,$$

portanto u pode ser extendido continuamente em $y_N = -s$ e a demonstração fica concluída.

Observação II.2: Usamos o Lema A.6 para uma família de operadores L_k. Este teorema afirma que para um operador uniformemente elítico como em (II.1), a estimativa a priori obtida para as soluções de $L\omega = f$, depende somente dos argumentos: $\lambda, \Lambda, \sup_\Omega |b_i|$ e das constantes que aparecem na definição da continuidade uniforme de a_{ij} sobre B_R. Se $a_{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, por exemplo, a dependência seria de $\|a_{ij}\|_{C^{0,1}(\overline{\Omega})}$. Com um pouco de atenção, vê-se que podemos tomar uma estimativa uniforme para a família L_k.

Em seguida, trataremos de obter estimativa a priori para outra classe de sistemas da forma (II.1). Sejam f e g funções de Carathéodory em $\Omega \times I\!R_+ \times I\!R_+$ com as seguintes propriedades: f pode ser escrito como soma de duas funções de Carathéodory ℓ e h tais que:

(II.14) $$|h(x,u,v)| \leq a(u+v)^p + b, \quad \text{para todo} \quad (x,u.v) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\ell(x,u,v)}{v^\sigma} = \alpha(x) \quad \text{uniformemente em } (x,u) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

onde α é uma função positiva e contínua em $\overline{\Omega}$; a e b são constates positivas e os expoentes p e σ satisfazem: $1 \leq p < \sigma \leq \frac{N}{N-2}$, caso $N \geq 3$ e $1 \leq p < \sigma < \infty$ quando $N = 2$;

Da mesma forma g é uma soma $m + n$ de funções de Carathéodory satisfazendo:

(II.15) $$|n(x,u,v)| \leq a(u+v)^p + b, \quad \text{para todo} \quad (x,u.v) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{m(x,u,v)}{u^\sigma} = \beta(x) \quad \text{uniformemente em } (x,v) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

onde β é uma função positiva e contínua em $\overline{\Omega}$.

O Resultado é o seguinte:

Teorema II.2: Assuma que (II.14) e (II.15) são cumpridas. Então, existe uma constante positiva $C = C(L, \Omega, f, g)$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

para todo par de funções não-negativas $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo (II.1), com $\gamma = 0$

Observação II.3: A condição $\gamma = 0$ pode ser relaxada para γ limitada. O fato é que neste caso o termo $\gamma(x)v$ pode ser absorvido pela função n que aparece na hipótese (II.15).

Prova do Teorema II.2: Suponha que o Teorema II.2 é falso. Portanto existem funções não-negativas $u_k, v_k \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo (II.1) e com $\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to \infty$. Sem perder a generalidade vamos supor que existe uma sequência $x_k \in \Omega$ convergindo para algum $x_o \in \overline{\Omega}$ e

(II.16) $$\|v_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} = u_k(x_k).$$

Como na demonstração do Teorema II.1, vamos considerar dois casos:

Caso 1: $x_o \in \Omega$.

Seja $d > 0$, $\quad 2d < dist(x_o, \partial\Omega)$ e defina

$$\overline{u}_k(y) = \lambda_k u_k(t_k y + x_k), \quad \overline{v}_k(y) = \lambda_k v_k(t_k y + x_k), \quad \text{para} \quad |y| \leq \frac{d}{t_k},$$

onde t_k e λ_k são números positivos tais que $\lambda_k u_k(x_k) = 1$ e $t_k^2 \lambda_k = \lambda_k^\sigma$. Portanto $\lambda_k \to 0$, $t_k \to 0$, $\quad 0 \leq \overline{u}_k, \overline{v}_k \leq 1$,, $\overline{u}_k(0) = 1$ e quando $2R \leq \frac{d}{t_k}$

$$\text{(II.17)} \qquad \begin{cases} L_k \overline{u}_k(y) + \ell_k(y) + h_k(y) = 0 & \text{em} \quad B_{2R} \\ L_k \overline{v}_k(y) + m_k(y) + n_k(y) = 0 & \text{em} \quad B_{2R}, \end{cases}$$

onde L_k é a mesma família de operadores em (II.9),

$$\ell_k(y) = \lambda_k^\sigma \ell(t_k y + x_k, \lambda_k^{-1}\overline{u}_k(y), \lambda_k^{-1}\overline{v}_k(y)),$$

$$h_k(y) = \lambda_k^\sigma h(t_k y + x_k, \lambda_k^{-1}\overline{u}_k(y), \lambda_k^{-1}\overline{v}_k(y)),$$

$$m_k(y) = \lambda_k^\sigma m(t_k y + x_k, \lambda_k^{-1}\overline{u}_k(y), \lambda_k^{-1}\overline{v}_k(y)) \quad \text{e}$$

$$n_k(y) = \lambda_k^\sigma n(t_k y + x_k, \lambda_k^{-1}\overline{u}_k(y), \lambda_k^{-1}\overline{v}_k(y)).$$

Usando o Lema II.1 e as hipóteses (II.14) e (II.15), temos

$$\lim_{k \to \infty} |\ell_k(y) - \alpha(t_k y + x_k)\overline{v}_k(y)^\sigma| = 0, \quad \text{e}$$

$$\lim_{k \to \infty} |m_k(y) - \beta(t_k y + x_k)\overline{u}_k(y)^\sigma| = 0, \quad \text{uniformemente em} \quad |y| \leq 2R.$$

Mais uma vez, usando (II.14) e (II.15):

$$|h_k(y)| + |n_k(y)| \leq 2a\lambda_k^{\sigma - p}(\overline{u}_k(y) + \overline{v}_k(y))^p + 2b\lambda_k^\sigma \leq 2^{p-1}a\lambda_k^{\sigma - p} + 2b\lambda_k^\sigma,$$

para todo $|y| \leq 2R$, portanto $h_k \to 0$, $n_k \to 0$ uniformemente em $|y| \leq 2R$. Usando os mesmos argumentos do Teorema II.2 e passando a uma subsequência conveniente, $\overline{u}_k$

e $\overline{v}_k$ convergem uniformemente em compactos do $I\!R^N$ para certas funções não-negativas $u, v \in C^2(I\!R^N)$ satisfazendo

$$
\text{(II.18)} \qquad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_o) D_{ij} u + \alpha(x_o) v^\sigma = 0, \\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_o) D_{ij} v + \alpha(x_o) u^\sigma = 0, \quad \text{com} \quad u(0) = 1. \end{cases}
$$

Pelo Teorema (I.4), $u \equiv v \equiv 0$ que é um absurdo.

Caso 2: $x_o \in \partial\Omega$

Sem perder generalidade, suponha que $\Omega \subset I\!R^N_+$ e que para algum $d > 0$, $\partial I\!R^N_+ \cap \partial\Omega$ contém o disco $\{(x', 0) : |x' - x'_o| < 2d\}$. Seja d_k a última coordenada de x_k e denote por D_k como na prova do teorema anterior o conjunto $\{y \in I\!R^N : |y| \leq \frac{d_k}{t_k}, y_N > -\frac{d_k}{t_k}\}$, onde $t_k^2 \lambda_k = \lambda_k^\sigma$ e $\lambda_k u_k(x_k) = 1$. Podemos supor, como anteriormente, que $\frac{d_k}{t_k}$ converge para algum $s > 0$. Defina em D_k as funções $\overline{u}_k$ e $\overline{v}_k$ como no caso 1 da demonstração deste teorema. Claro que $\overline{u}_k$ e $\overline{v}_k$ satisfazem (II.17) em D_k. Argumentos análogos aos utilizados na prova do caso 2 do Teorema II.1, permitem obter soluções não-negativas $u, v \in C^2(H_s)$ de (II.18) em H_s, com $u(0) = 1$. Por outro lado, o Teorema I.3 afirma que $u \equiv v \equiv 0$ que é uma contradição. $\square$

CAPÍTULO III

Sistemas Elíticos Cooperativos Lineares

Durante todo este capítulo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será sempre um domínio limitado com fronteira regular e $M(x) = (m_{ij}(x))$ será uma matrix 2×2, com $m_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Dizemos que $M(x)$ é uma matriz cooperativa, quando as entradas $m_{12}(x)$ e $m_{21}(x)$ são não-negativas. Considere o seguinte sistema:

$$\text{(III.1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = m_{11}(x)u + m_{12}(x)v + f(x) & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v = m_{21}(x)u + m_{22}(x)v + g(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Podemos reescrever o sistema (III.1) na forma matricial:

$$-\Delta U = M(x)U + F(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega$$

com $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ e $-\Delta U$ denota a matriz coluna $\begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix}$. Dizemos que o sistema (III.1) é um sistema cooperativo quando a matriz $M(x)$ é cooperativa, para todo $x \in \Omega$. O sistema (III.1) satisfaz um princípio de máximo quando u e v são não-negativas sempre que f e g também o sejam. Em [6], de Figueiredo e Mitidieri estabeleceram o seguinte resultado:

Lema III.1: Suponha que (III.1) é um sistema cooperativo e as linhas de M satisfazem:

$$\text{(III.2)} \qquad m_{11}(x) + m_{12}(x) \leq \hat{\lambda}, \quad m_{21}(x) + m_{22}(x) \leq \hat{\lambda}, \quad \text{q.s. em} \quad x \in \Omega,$$

onde $\hat{\lambda}$ é estritamente menor que o primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta; H_o^1(\Omega))$. Então (III.1) satisfaz um princípio do máximo.

Agora, vamos dar uma condição na matriz M que seja suficiente para se obter existência de soluções para o sistema (III.1). Comecemos com algumas considerações preliminares. Seja $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ uma matriz real 2×2 e $q(u,v) = au^2 + (b+c)uv + dv^2$ a forma quadrática (BU, U), com $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $(.,.)$ denotando o produto interno canônico do $I\!R^2$. Observe que a forma q é exatamente a forma quadrática associada a matriz simétrica $B' = \begin{pmatrix} a & e \\ e & d \end{pmatrix}$, onde $2e = b + c$, O máximo valor que q assume no círculo unitário S^1 é o maior autovalor de B'

$$\frac{(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4e^2}}{2}.$$

Denotemos este máximo valor por $\mu(B)$, isto é,

$$\mu(B) = \frac{(a+d) + \sqrt{(a-d)^2 + (b+c)^2}}{2}$$

Portanto,

$$(BU, U) \leq \mu(B)(U, U), \quad \text{para todo} \quad U \in I\!R^2.$$

Observação III.1: O valor $\mu(B)$ depende continuamente das entradas da matriz B.

Observação III.2: Quando os autovalores μ_1 e μ_2 de B são reais e $\mu_1 \leq \mu_2$ então $\mu_2 \leq \mu(B)$ e $\mu_2 = \mu(B)$ se e somente se B é simétrica.

Denotemos $\mu(M(x))$ por $\mu(x)$. Suponha que a matriz $M(x)$ satisfaz

(III.3) $$\mu(x) \leq \hat{\lambda} < \lambda_1, \quad \text{q.s. em} \quad x \in \Omega$$

Lema III.2: Assuma (III.3). Então:

(i) Para cada $f, g \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < \infty$, existem soluções únicas $u, v \in W_o^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$ do sistema (III.1). Mais ainda, existe uma constante positiva C, independente de u, v, f e g tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}\right);$$

(ii) Se $f, g, m_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e Ω tem fronteira $C^{2,\alpha}$, para $0 < \alpha < 1$ então $u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e existe uma constante positiva C que não depende de f, g, u e v tal que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|v\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\left(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \|g\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)}\right).$$

Observação III.3: A condição (III.3) é suficiente mas não é necessária. Em [9], Costa e Magalhães mostram a existência de soluções sem a condição (III.3), no caso em que M é uma matriz constante e $m_{12} + m_{21} = 0$. Neste caso, é suficiente assumir que nenhum dos autovalores de M é um autovalor de $(-\Delta; H_o^1(\Omega))$.

Observação III.4: No caso em que $m_{12} \equiv 0$, o Lema III.2 é ainda verdadeiro mesmo que (III.3) falhe. Basta assumir que $m_{ii} \leq \hat{\lambda} < \lambda_1$ em Ω, $i = 1, 2$. Neste caso m_{11} e m_{22} são os autovalores de M. Uma condição suficiente melhor que a condição (III.3), pode ser a seguinte: os autovalores de M são menores que $\hat{\lambda}$. Quando $m_{12} \equiv 0$ e $m_{ii} \leq \hat{\lambda}$, os lemas III.1 e III.2 são consequencias do correspondente resultado no caso escalar, Lema A.8 do apêndice.

Prova do Lema III.2: Caso $p = 2$; Defina em $H = H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega)$ a forma bilinear $B : H \times H \to I\!R$ por

$$B(U, \Phi) = < U, \Phi > - \int_\Omega (M(x)U, \Phi), \quad \text{onde} \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

e $< ., . >$ é o produto interno em H dado por $\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + \nabla v \nabla \psi)$. B não é uma forma bilinear simétrica, contudo é contínua e coerciva. De fato,

$$\int_\Omega (M(x)U, U) \leq \int_\Omega \mu(x)(U, U) \leq \hat{\lambda} \int_\Omega (u^2 + v^2) \leq \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_1} \|U\|^2,$$

para todo $U \in H$, $< U, U > = \|U\|^2$, e daí a coercividade:

$$B(U, U) \geq (1 - \frac{\hat{\lambda}}{\lambda_1}) \|U\|^2, \quad \text{para todo} \quad U \in H.$$

A continuidade da forma B vem da desigualdade

$$B(U, \Phi) \leq \|U\| \|\Phi\| + \max_{i,j} \|m_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)})(\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\Omega)}).$$

Queremos usar o teorema de Lax-Milgram para obter a solução desejada. Com esta finalidade defina $G : H \to I\!R$ o funcional linear

$$G(U) = \int_\Omega (U, F(x)), \quad U \in H, \quad \text{onde} \quad F(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

G é um funcional contínuo:

$$\begin{aligned} G(U) &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)})(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq 2^{\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{1}{2}}(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)})\|U\|, \quad U \in H. \end{aligned}$$

Pelo teorema de Lax-Milgram existe um único $U \in H$ tal que

$$B(U, \Phi) = \int_\Omega (\Phi, F(x)), \quad \text{para todo} \quad \Phi \in H.$$

Portanto $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ satisfaz (III.1) no sentido fraco. Usando resultados de regularidade do tipo Agmon-Douglis-Nirenberg (Lema A.5), teremos $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega))$ e

(III.4)
$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}) \\ \|v\|_{H^2(\Omega)} &\leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}) \end{aligned}$$

onde C depende de N , da matriz M e de $\partial\Omega$. Para finalizar o caso $p = 2$, mostremos que podemos encontrar uma constante positiva $C = C(N, M, \partial\Omega)$ tal que

(III.5)
$$\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)})$$

Caso contrário, existem sequências $u_n, v_n \in H_o^1(\Omega), f_n, g_n \in L^2(\Omega)$ satisfazendo (III.1) e $\|u_n\|_{H^2(\Omega)} + \|v_n\|_{H^2(\Omega)} = 1$, $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \|g_n\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Observe que

$$-\Delta(U_n - U_m) = M(x)(U_n - U_m) + (F_n(x) - F_m(x)) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ e $F_n(x) = \begin{pmatrix} f_n(x) \\ g_n(x) \end{pmatrix}$. Usando a imersão compacta de Sobolev $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, podemos supor que $u_n \to u_o, v_n \to v_o$ em $L^2(\Omega)$ para alguns $u_o, v_o \in H^2(\Omega)$. As desigualdades (III.4) implicam que u_n e v_n são de sequências de Cauchy em $H^2(\Omega)$ e que $U_o = \begin{pmatrix} u_o \\ v_o \end{pmatrix} \in H$ satisfaz no sentido fraco

$$-\Delta U_o = M(x)U_o \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \text{e} \quad \|u_o\|_{H^2(\Omega)} + \|v_o\|_{H^2(\Omega)} = 1.$$

Por outro lado, a unicidade do teorema de Lax-Milgram implica que $u_o \equiv v_o \equiv 0$.

Caso $p > 2$: Se $f, g \in L^p(\Omega)$, então $f, g \in L^2(\Omega)$. Usando o caso $p = 2$, existem $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_o^1(\Omega)$ satisfazendo (III.1) no sentido forte. Ponha

$$f_o(x) = m_{11}(x)u + m_{12}(x)v + f(x) \quad \text{e} \quad g_o(x) = m_{21}(x)u + m_{22}(x)v + g(x).$$

Dessa forma

$$-\Delta u = f_o(x), -\Delta v = g_o(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Fixe $i \in I\!N$ tal que $\frac{N-4i}{2i} \leq 2$ e seja p_i dado por $\frac{1}{p_i} = \frac{1}{2} - \frac{2i}{N}$. Portanto $\frac{N}{p_i} \leq 2$ e teremos a imersão de Sobolev $W^{2,p_i}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \geq p_i$. Mostremos que $u, v \in W^{2,r}(\Omega)$, $r = min\{p, p_i\}$ e assim ficaremos com este caso concluído, pois quando $r = p_i$, temos $f_o, g_o \in L^p(\Omega)$ e usando resultados de regularidade (Lema A.7 do apêndice), $u, v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_o^{1,p}(\Omega)$. Com efeito, $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$, para $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{N}$ e assim f_o, g_o estão em $L^{p_1}(\Omega)$ e consequentemente $u, v \in W_o^{1,p_1}(\Omega) \cap W^{2,p_2}(\Omega)$. Se $\frac{N}{p_1} = \frac{N-4}{2} \leq 2$ (caso $N \leq 4$) ou simplesmente se $p \leq p_1$, teremos $f_o, g_o \in L^p(\omega)$. Caso contrário, temos a imersão $W^{2,p_1} \hookrightarrow L^{p_2}(\Omega)$, para $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{2}{N} = \frac{1}{2} - \frac{4}{N}$ e assim $f_o, g_o \in L^{p_2}(\Omega)$ e $u, v \in W^{2,p_2}(\Omega)$. Se $p \leq p_2$ ou $\frac{N}{p_2} \leq 2$, teremos $f_o, g_o \in L^p(\omega)$. Caso contrário, continuaremos passo a passo no mesmo caminho, um número finito máximo i de vezes, até colocar u, v em $W^{2,p_i}(\Omega)$ ou parar antes mesmo se $p \leq p_i$. A estimativa a priori para este caso é obtida como no caso $p = 2$ e é consequencia da unicidade das soluções e da imersão compacta de $W^{2,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$. A parte (i) do Lema III.2 está provada.

Suponha que $f, g, m_{ij} \in C^{o,\alpha}(\overline{\Omega})$, $i, j = 1, 2$ e que a fronteira de Ω seja de classe $C^{2,\alpha}$. Vamos usar a parte (i) para $p > N$. Neste caso $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \beta < 1$. Dessa forma, pela parte (i), existem funções $u, v \in W^{2,p}(\Omega)$ satisfazendo (III.1). Neste caso, $f_o, g_o \in C^{o,\alpha}(\overline{\Omega})$. Usando resultados de regularidadade de Schauder (Lema A.4 do apêndice), u e v estão em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Para a estimativa a priori procede-se exatamente como na parte (i). □

Vamos finalizar este capítulo com um lema que nos será útil posteriormente. Faremos uma versão matricial do seguinte fato conhecido: "A única função não-negativa $u \in H_o^1(\Omega)$ satisfazendo $-\Delta u \leq \gamma(x)u$ no sentido fraco, com $\gamma \leq \hat{\lambda} < \lambda_1$, q.s. em Ω, é a função nula $u \equiv 0$". Daqui por diante usaremos a seguinte notação $U \geq 0$, quando $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, com u e v não-negativas e $U \geq V$, quando $U - V \geq 0$.

Lema III.3: Suponha que M satisfaz (III.3) e que $U \geq 0$ satisfaz

$$-\Delta U \leq M(x)U \quad \text{em} \quad \Omega, \quad U \in H.$$

Então $U \equiv 0$.

Prova do Lema III.3: Como $U \geq 0$,

$$(-\Delta U, U) \leq (M(x)U, U) \leq \mu(x)(U, U) \leq \hat{\lambda}(U, U) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Integrando em Ω, teremos

$$\lambda_1 \int_\Omega (u^2 + v^2) \leq \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \leq \hat{\lambda} \int_\Omega (u^2 + v^2).$$

e portanto $u \equiv v \equiv 0$.

CAPÍTULO IV

Existência de Soluções Positivas para Sistemas Cooperativos Não Lineares

Neste capítulo vamos utilizar teoria do grau para estabelecer a existência de soluções positivas de certas classes de sistemas elíticos que veremos abaixo. No que segue, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $C^{2,\alpha}$; para cada $x \in \Omega, M(x) = (m_{ij}(x))$ é uma matriz 2×2 cooperativa com $m_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Os sistemas objetos de nosso estudo são da forma

$$\text{(IV.1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = m_{11}(x)u + m_{12}(x)v + f(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v = m_{21}(x)u + m_{22}(x)v + g(x,u,v) & \text{em} \quad \Omega \\ u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde f, g são funções localmente Lipschitzianas cumprindo as seguintes propriedades:

$$\text{(IV.2)} \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(x,u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0, \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \overline{\Omega};$$

$$\text{(IV.3)} \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(x,u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0, \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Podemos observar o sistema (IV.1) do seguinte ponto de vista: Sejam $F, G \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tais que $F(x,0,0) = G(x,0,0) = 0$. Escrevendo o desenvolvimento de Taylor de F e G teremos para cada $x \in \Omega$.

$$F(x,u,v) = \frac{\partial F}{\partial u}(x,u,v)u + \frac{\partial F}{\partial v}(x,u,v)v + r(x,u,v) \quad \text{e}$$

$$G(x,u,v) = \frac{\partial G}{\partial u}(x,u,v)u + \frac{\partial G}{\partial v}(x,u,v)v + \rho(x,u,v),$$

onde r e ρ são as funções resto satisfazendo para cada $x \in \Omega$

$$\text{(IV.4)} \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(x,u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0, \qquad \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\rho(x,u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$$

Dessa forma, o sistema

$$-\Delta u = F(x,u,v), \quad -\Delta v = G(x,u,v) \quad \text{em} \quad \Omega,$$

$$\text{com} \quad u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega$$

é da mesma classe de sistemas (IV.1) desde que os limites (IV.4) sejam uniformes em $x \in \Omega$.

Teorema IV.1: Assuma que M é uma matriz cooperativa satisfazendo (III.2), (III.3) e que f e g sejam funções não-negativas satisfazendo (II.2), (II.3), (IV.2), (IV.3) e

$$\text{(IV.5)} \qquad f(x,u,v) \geq \mu u - C_o, \quad \text{para todos} \quad (x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+,$$

onde μ, C são constantes positivas e $\mu \geq 2\lambda_1$. Então o sistema (IV.1) possui pelo menos uma solução positiva $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

A prova deste resultado é uma aplicação imediata do seguinte resultado:

Proposição IV.1: Seja C um cone em um espaço de Banach X e $F : C \to C$ uma aplicação compacta com $F(0) = 0$. Assuma que existam $t_o > 0$, $0 < r < R$ tais que:

(i) $x \neq tF(x)$, se $|x| = r$, $x \in C$, $0 \leq t \leq 1$; e

(ii) Existe uma aplicação compacta

$$\Psi : C \times \mathbb{R}_+ \to C \quad \text{satisfazendo}:$$

$\Psi(x,0) = F(x)$, em $|x| \leq R, x \in C$;

$\Psi(x,t) \neq x$, para todo $|x| \leq R, x \in C, t \geq t_o$; e

$\Psi(x,t) \neq x$, se $|x| = R, x \in C$ e $t \geq 0$.

Então F possui pelo menos um ponto fixo $x \in C$ com $r < |x| < R$.

Para a demonstração desta proposição citamos [2],[4] e [16].

Prova do Teorema IV.1 Vamos considerar o espaço de Banach

$$X = \{U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : u, v \in C^o(\overline{\Omega}), \quad u = v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\},$$

munido com a norma do supremo $|U|_o = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Pelo Lema III.2 e a hipótese (III.3), podemos definir a aplicação $S : C^o(\overline{\Omega}) \times C^o(\overline{\Omega}) \to X$ dada por $S\begin{pmatrix}\varphi \\ \psi\end{pmatrix} = U = \begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix}$, onde U é a única solução de

$$\text{(IV.6)} \qquad -\Delta U = M(x)U + \begin{pmatrix}\varphi(x) \\ \psi(x)\end{pmatrix} \quad \text{em} \quad \Omega, \quad U = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Com efeito, $\varphi, \psi \in L^p(\Omega)$ para todo p e em particular para $p > N$. O Lema III.2 implica que existem $u, v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_o^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (IV.6). Ora, $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \beta < 1$. Isto implica que $U = \begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} \in X$ e que S é uma aplicação compacta. Denote por C o cone positivo de X, $C = \{U \in X : U \geq 0\}$, e defina $F : C \to C$ por $F(U) = S\begin{pmatrix}f(.,u,v) \\ g(.,u,v)\end{pmatrix}$. O Lema III.1 e a hipótese (III.2) implicam que $F(C) \subset C$. Agora vamos verificar que F cumpre as hipóteses da proposição (IV.1). As propriedades (IV.1) e (IV.3) implicam que para cada $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que

$$\text{(IV.7)} \qquad f(x,u,v) \leq \varepsilon(u+v), \quad g(x,u,v) \leq \varepsilon(u+v), \quad \text{para todos} \quad 0 \leq u, v \leq r.$$

Suponha que $U = tF(U)$ para algum $U \in C$, $|U|_o \leq r$ e $0 \leq t \leq 1$. Por meio de (IV.7), obtemos a desigualdade matricial

$$-\Delta U \leq [M(x) + \varepsilon J]U \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde J é a matriz $\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Tome ε suficientemente pequeno para o qual $\mu(M(x) + \varepsilon J) \leq \hat{\lambda}$, $x \in \Omega$ q.s.. Aplicando o Lema III.3 na desigualdade matricial acima, teremos $U = 0$ e portanto, F satisfaz a primeira hipótese da proposição acima para o número r escolhido acima. Em seguida defina $\Psi : U \times \mathbb{R}_+ \to C$ por

$$\Psi(U,t) = S\begin{pmatrix}f(.,u+t,v) \\ g(.,u,v)\end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix}u \\ v\end{pmatrix} \in X.$$

$\Psi(U,0) = F(U)$, por definição. Verifiquemos que Ψ satisfaz (ii) da Proposição (IV.1). Admita que $\Psi(U,t) = U$ para algum $U \in C$. Denote por φ_1 uma autofunção positiva associada ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta; H_o^1(\Omega))$. A condição (IV.5) implica que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Omega u\varphi_1 &= \int_\Omega m_{11}(x)u\varphi_1 + \int_\Omega m_{12}(x)v\varphi_1 + \int_\Omega f(x, u+t, v)\varphi_1 \\ &\geq \int_\Omega (m_{11}(x)+\mu)u\varphi_1 + (\mu t - C_o)\int_\Omega \varphi_1,\end{aligned}$$

pelo fato de $m_{12}(x)u\varphi_1$ ser sempre não-negativa. Agora veja que $m_{11}(x)$ é o valor que a forma quadrática associada a matriz $M(x)$ assume no vetor canônico $e_1 = (1,0)$, portanto $m_{11}(x)$ é menor que $\hat{\lambda}$. Como $\mu \geq 2\lambda_1$ temos $\mu > \lambda_1 - m_{11}(x)$ e a desigualdade acima implica que $t \leq C_o/\mu$. Portanto $\Psi(U,t) \neq U$ para todo $U \in C$, desde que $t \geq t_o = C_o/\mu$. Finalmente, observando em (II.2) que

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f(x, u+t, v)}{u^\sigma} = \alpha(x), \quad \text{uniformemente em} \quad (x,v) \in \Omega \times I\!R_+,$$

pode ser dado uniformemente em $0 \leq t \leq t_o$ (veja observação II.1), e aplicando o Teorema II.1 ao sistema $\Psi(U,t) = U$, podemos obter uma constante $R > 0$ tal que $\Psi(U,t) \neq U$, para todo $0 \leq t \leq t_o$ (e portanto, para todo $t \geq 0$), quando $|U| \geq R$. Dessa forma, existe $U \in C$ tal que $F(U) = U$ e $r \leq |U| \leq R$, ou seja, U é solução não trivial de (IV.1). A razão de u e v estarem em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ deve-se ao fato das aplicações

$$x \mapsto f(x, u(x), v(x)), \quad x \mapsto g(x, u(x), v(x))$$

serem de classe $C^{o,\alpha}(\overline{\Omega})$ (Lembre-se que $F(C) \subset C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e que f e g são localmente Lipschitzianas). □

Observação IV.1: A condição (IV.5) pode ser relaxada quando f só depende da variável u.

Agora vamos considerar outra classe de sistemas (IV.1). Assuma que f e g satisfazem (II.14), (II.15), (IV.2), (IV.3). Consequentemente, para todo $\mu > 0$:

(IV.8) $[f(x,u,v) + g(x,u,v)] \geq \mu(u+v) - C_o, \quad$ para todos $\quad (x,u,v) \in \Omega \times I\!R_+ \times I\!R_+,$

Aqui escolheremos $\mu \geq 2\lambda_1$. Demonstraremos um resultado semelhante ao Teorema IV.1 e a prova é quase a mesma a menos das seguintes considerações:

Considere X, C, S e F definidos como na prova do Teorema IV.1. Vamos definir Ψ do seguinte modo

$$\Psi(U,t) = S\begin{pmatrix} f(.,u+t,v+t) \\ g(.,u+t,v+t) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X.$$

O que vai modificar da prova do teorema anterior é observação: Se para alguns $U \in C, t \geq 0$ tivermos $\Psi(U,t) = U$. Então (IV.8) implica que

$$\begin{aligned}\lambda_1 \int_\Omega (u+v)\varphi_1 = &\int_\Omega (m_{11}(x) + m_{21}(x))u\varphi_1 + \int_\Omega (m_{12}(x) + m_{22}(x))v\varphi_1 + \\ &\int_\Omega (f(x,u+t,v+t) + g(x,u+t,v+t))\varphi_1 \\ &\geq (\mu - \hat{\lambda}) \int_\Omega (u+v)\varphi_1 + (\mu t - C_o)\int_\Omega \varphi_1,\end{aligned}$$

pois $m_{12}v\varphi_1, m_{21}u\varphi_1$ são não-negativas e $m_{ii}(x) \leq \hat{\lambda}$, $i = 1, 2$ ($m_{ii}(x)$ é o valor que a forma quadrática associada à matriz $M(x)$ assume no vetor canônico e_i). Portanto $t \leq C_o/\mu$ e consequentemente, procedendo como anteriormente teremos provado o:

Teorema IV.2: Suponha que M é uma matriz cooperativa satisfazendo (III.2), (III.3) e que f e g são funções não-negativas cumprindo as propriedades (II.14), (II.15), (IV.2) e (IV.3). Então o sistema (IV.1) possui pelo menos uma solução não trivial positiva $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $\quad u, v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Para finalizar, faremos um breve comentário de outra aplicação da nossa estimativa no caso não-cooperativo

$$\text{(IV.9)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u,v) - v, & \text{em} \quad \Omega \\ -\Delta v = \delta u - \gamma v, & \text{em} \quad \Omega \\ u = v = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega \qquad \text{com} \quad \gamma, \delta > 0 \quad \text{e} \quad 4\delta \leq \gamma^2. \end{cases}$$

Como referências de resultados com respeito à classe de sistemas (IV.9), poderemos citar: [5], [8].

Teorema IV.3: Suponha que f é uma função não-negativa localmente Lipschitziana satisfazendo (II.2), com $p < \sigma$, (IV.5) e

$$\text{(IV.10)} \qquad \limsup_{u \to 0} \frac{f(x,u,v)}{u} < \hat{\lambda}_1 = \lambda_1 + \frac{\delta}{\gamma + \lambda_1},$$

uniformemente em $v \geq 0, x \in \Omega$. Então (IV.9) possui pelo menos uma solução positiva não-trivial.

$\hat{\lambda}_1$ é o primeiro autovalor de $-\Delta + \delta(-\Delta + \gamma)^{-1}$ com condições de fronteira de Dirichlet (Veja [5]). A prova deste teorema é uma simples aplicação da Proposição IV.1, depois de observados os seguintes pontos:

Se B denota o operador $\delta(-\Delta + \gamma)^{-1}$ com condições de Dirichlet e

$$X = \{u \in C^o(\overline{\Omega}) : u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\},$$

então o sistema (IV.9) é equivalente à equação integro-diferencial

$$-\Delta u + Bu = f(x,u,Bu) \quad \text{com} \quad x \in X.$$

Em [5], de Figueiredo e Mitidieri mostraram que a aplicação $S : C^o(\overline{\Omega}) \to X$, dada por $S(h) = u \iff -\Delta u + Bu = h$ em Ω, é linear compacta e positiva, isto é, $h \geq 0$ implica que $S(h) \geq 0$. Defina $F(u)$ por $S(f(.,u,Bu))$ e veja que (IV.9) pode ser reescrito na forma $u = F(u), \quad u \in C$, o cone positivo de X. Como na demonstração do Teorema IV.1, as hipóteses (II.2), (IV.5) e (IV.10) implicam que F satisfaz as condições (i) e (ii) da Proposição IV.1.

APÊNDICE

Neste apêndice listaremos alguns resultados básicos da teoria de equações elíticas de segunda ordem e que na maioria dos casos estão demonstrados em Gilbarg-Tudinger [14]. Portanto, procuramos seguir a ordem em que estes aparecem nesta referência.

Durante todo este apêndice Ω denotará um aberto limitado do R^N; L será um operador uniformemente elítico

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) D_i u$$

com $b_i \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} \in C^o(\overline{\Omega})$ e

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^N$$

onde λ e Λ são constantes positivas.

Começaremos com uma versão do lema de Hopf. Seja c uma função mensurável e limitada.

Lema A.1: Suponha que $u \in C^2(\Omega)$, $Lu + c(x)u \geq 0$ em Ω. Seja $x_o \in \partial\Omega$ tal que:

(i) u é contínua em x_o;

(ii) $u(x) < u(x_o)$, para todo $x \in \Omega$;

(iii) $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera exterior em x_o.

Então, se existe a derivada normal exterior de u em x_o e $c \leq 0$ teremos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_o) > 0.$$

Mais geralmente, mesmo que a derivada normal exterior não exista, teremos

$$\liminf_{x \to x_o} \frac{u(x) - u(x_o)}{|x - x_o|} > 0,$$

onde o limite é tomado dentre os elementos $x \in \Omega$ tais que o angulo entre o vetor $x_o - x$ e a normal exterior em x_o é menor que $\frac{\pi}{2} - \delta$ para algum $\delta > 0$. Quando $u(x_o) = 0$ o resultado ainda é válido, independendo do sinal de c.

Prova: Veja o Lema 3.4 em [14-pag.34].

O proximo resultado diz respeito a limitação a priori de soluções de equações não homogêneas na forma

$$Lu + c(x)u = f \tag{A.1}$$

onde c é uma função não-positiva.

Lema A.2: Suponha que $u \in C^o(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ satisfaz (A.1). Então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \frac{C}{\lambda} \sup_{\Omega} |f|$$

onde C é uma constante positiva que depende somente do diâmetro de Ω e de $|b| = \sum_i |b_i|^2$. Se em vez da igualdade tivermos $Lu + c(x)u \geq f$ então

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{C}{\lambda} \sup_{\Omega} |f^-|$$

Prova: Veja o Teorema 3.7 em [14-pag 36].

Faremos agora uma concessão no sinal de c. Para simplificar a demonstração do próximo resultado vamos nos ater ao caso $L = \Delta$.

Lema A.3: Suponha que $c(x) \leq \hat{\lambda}$, q.s. em Ω, com $\hat{\lambda} < \lambda_1$. Então existe uma constante positiva $C = C(\Omega, c)$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \sup_{\Omega} |f|$$

para todo $u \in C^2(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta u + c(x)u = f$ em Ω com $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Prova do Lema A.3: Fixe um domínio $\Omega' \subset I\!R^N$ tal que $\overline{\Omega} \subset \Omega'$ e o primeiro autovalor $\hat{\lambda}_1$ de $(-\Delta; H_o^1(\Omega'))$ está no intervalo $\hat{\lambda} \leq \lambda < \lambda_1$. Seja φ_o uma autofunção positiva associada ao autovalor $\hat{\lambda}_1$. É fácil verificar que $\omega = \frac{u}{\varphi_o} \in C^2(\Omega)$ e satisfaz

$$\text{(A.2)} \qquad \Delta\omega + \frac{2}{\varphi_o}\nabla\varphi_o\nabla\omega + (c(x) - \hat{\lambda}_1)\omega = \frac{f(x)}{\varphi_o} \quad \text{em} \quad \Omega$$

e $\omega = 0$ sobre $\partial\Omega$. Usando o lema anterior e lembrando que φ_o é positiva no compacto $\overline{\Omega}$ a demonstração fica concluída. □

Passamos, agora, a considerar o problema de obter soluções clássicas para (A.1).

Lema A.4: Suponha que a fronteira $\partial\Omega$ é de classe $C^{2,\alpha}$, para algum $0 < \alpha < 1$. Se os coeficientes de L e as funções f e c estão em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e além disso $c \leq 0$ em Ω, então, para cada $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ o problema de Dirichlet

$$Lu + c(x)u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega,$$

possui uma única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Prova: Veja o Teorema 6.14 em [14-pag.107].

Em seguida, enunciaremos um resultado de regularidade global para soluções fracas de equações elíticas de segunda ordem.

Lema A.5: Suponha que $\partial\Omega$ é de classe C^2 e $u \in H^2(\Omega)$ é uma solução fraca de

$$-\Delta u = f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \quad u - \varphi \in H_o^1(\Omega)$$

com $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^2(\Omega)$. Então $u \in H^2(\Omega)$ e

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^2(\Omega)})$$

onde $C = C(N, \partial\Omega)$

Prova: Veja os Teoremas 8.8 e 8.12 em [14-pag 186].

Os dois resultados seguintes dizem respeito a soluções no sentido forte de equações elíticas de segunda ordem.

Lema A.6: Suponha que $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, é uma solução forte da equação $Lu = f$ em Ω, com $f \in L^p(\Omega)$. Então para qualquer subdomínio $\Omega' \subset \Omega$,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)})$$

onde C depende de $N, p, \lambda, \Lambda, \Omega', \Omega$ e das constantes que aparecem na definição de continuidade uniforme de a_{ij} sobre Ω'.

Prova: Veja o Teorema 9.11 em [14-pag.235].

Lema A.7: Suponha que $\partial\Omega$ seja de classe $C^{1,1}$ e que $c \leq 0$. Então se $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $Lu + c(x)u = f$ em Ω, $u = 0$ sobre $\partial\Omega$ possui uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_o(\Omega)$. Mais ainda,

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)})$$

onde C depende da mesma forma da constante do Lema A.6.

Prova: Veja os Teoremas 9.13 e 9.15 em [14-pp.239].

Para finalizar considere mais uma vez $\omega, \Omega', \hat{\lambda}_1$ definidos na prova do Lema A.3. Aplicando os resultados acima citados na equação (A.2), demonstra-se sem maiores dificuldades o lema abaixo:

Lema A.8: Suponha que $c \leq \hat{\lambda}, c \in L^\infty(\Omega)$ e $\hat{\lambda} < \lambda_1$. Então:

(i) (Estimativa a priori) Existe uma constante positiva C dependendo de Ω, c, tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}$$

para todos $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ satisfazendo

$$\Delta u + c(x)u = f \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega; \tag{A.3}$$

(ii) (Existência e unicidade) Para cada $f \in L^p(\Omega)$, existe um único $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ solução de (A.3);

(iii) (Princípio do máximo) Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ satisfaz (A.3), com $f \leq 0$, então $u \geq 0$.

REFERÊNCIAS:

[1] **H. Brézis - R. E. L. Turner**, "On a class of superlinear elliptic problems", Comm. in P.D.E., vol.2, 1977, p.p. 601-614.

[2] **K. Deimling**, "Nonlinear functional analysis", Springer-Verlag, 1985.

[3] **D. G. de Figueiredo - P. L. Lions - R. Nussbaum**, "A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations", J. Math. Pures et appl., 61, p.p 41-63, 1982.

[4] **D. G. de Figueiredo**, "Positive solutions of semilinear elliptic problems", Lecture Notes in Math., n.957, Springer-Verlag, 1982, p.p 34-97.

[5] **D. G. de Figueiredo - E. Mitidieri**, "A maximum principle for an elliptic systems and application to semilinear problems", SIAM J. Math. Anal., vol. 17, n.4, 1986.

[6] **D. G. de Figueiredo - E. Mitidieri**, "Maximum principle for cooperative elliptic systems". C. R. Acad. Sci. Paris, t310, série I, p.p 49-52, 1990.

[7] **Ph. Clément - D. G. de Figueiredo - E. Mitidieri**, "Positive solutions of semilinear elliptic systems", report n.91-16, Delft, 1991.

[8] **F. J. Corrêa**, "On the existence and multiplicity of positive solutions of a semilinear elliptic system", Anais Acad. Brasileira de ciências, vol. 60, n.3, 1988, p.p 266-270.

[9] **D. G. Costa - C. A. Magalhães**, "A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic equations"; Preprint.

[10] **B. Gidas - W. Ni - Nirenberg**, "Symmetry and related properties via the maximum principle", Commun. Math. Phys., 68, p.p 209-243, 1979.

[11] **B. Gidas - J. Spruck**, "Apriori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations", Comm. in Partial Diff. Equations, 6(8), p.p 883-901, 1981.

[12] **B. Gidas - J. Spruck**, "Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations", Comm. on Pure and Applied Math., vol.34, p.p 525-598, 1981

[13] **B. Gidas**, "Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations", Eds. R. Sternberg, A.Kalinowski and J. Papadakis, Proc. Conf. Kingston, R.I., 1979; Lect. Notes on Pure Appl. Math., 54, Decker, New York, 1980, p.p 255-273.

[14] **D. Gilbarg - N. S. Trudinger**, "Elliptic partial differential equations of second order", 2.ª ed., Springer-Verlag, 1983.

[15] **G. Mancini - E. Mitidieri**, "Positive solutions of some coercive-anticoercive elliptic systems", Ann. Fac. Sci. Toulouse, Vol. VIII, n.3, p.p 257-292 (1986-1987).

[16] **R. Nussbaum**, "Positive solutions of nonlinear Elliptic boundary value problems", J. Math. and Appli. 51, p.p 461-482, 1975.

[17] **W. Troy**, "Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations", J. of Diff. Equations, 42, p.p 400-413, 1981.

[18] **X. Wang - Y. Deng**, "Existence of multiple solutions to nonlinear elliptic equations of nondivergence form", Preprint.