



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

PETRA MARIA BARTMEYER

**Valores de Ritz aplicados à troca de fase do  
precondicionador híbrido para métodos de  
pontos interiores**

Campinas

2016

Petra Maria Bartmeyer

**Valores de Ritz aplicados à troca de fase do  
precondicionador híbrido para métodos de pontos  
interiores**

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada.

Orientadora: Silvana Bocanegra

Coorientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira

O arquivo digital corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Petra Maria Bartmeyer e orientada pelo Prof. Dr. Silvana Bocanegra.

---

Campinas

2016

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** Não se aplica.

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

B284v Bartmeyer, Petra Maria, 1990-  
Valores de Ritz aplicados a troca de fase do condicionador híbrido para métodos de pontos interiores / Petra Maria Bartmeyer. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Silvana Bocanegra.

Coorientador: Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Ritz, Valores de. 2. Métodos de pontos interiores. 3. Programação linear. 4. Métodos iterativos (Matemática). 5. Pré-condicionador híbrido. I. Bocanegra, Silvana. II. Oliveira, Aurelio Ribeiro Leite de, 1962-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

#### Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Ritz values applied to phase exchange in the hybrid preconditioner to interior point method

**Palavras-chave em inglês:**

Ritz values

Interior point methods

Linear programming

Iterative methods (Mathematics)

Hybrid preconditioner

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Mestra em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Silvana Bocanegra [Orientador]

Frederico Ferreira Campos Filho

Kelly Cristina Poldi

**Data de defesa:** 19-08-2016

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Dissertação de Mestrado defendida em 19 de agosto de 2016 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof.(a). Dr(a). SILVANA BOCANEGRA**

**Prof.(a). Dr(a). FREDERICO FERREIRA CAMPOS FILHO**

**Prof.(a). Dr(a). KELLY CRISTINA POLDI**

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

*A todos os meus amores, por me mostrarem que posso almejar o que for e vocês me darão  
respaldo.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo amor e pelo suporte infindável. Aos amigos que fiz durante o mestrado, que tornaram essa uma jornada mais leve e prazerosa. À todas as pessoas que amo, pela cuidado e incentivo a cada passo. À minha orientadora e coorientador, pelo tempo desprendido e pela confiança depositada. À CAPES pelo auxílio financeiro.

# Resumo

O método preditor corretor de Mehrotra é uma variante dos métodos de pontos interiores para programação linear onde a cada iteração é necessária a resolução de dois sistemas lineares: o primeiro determina a direção preditora e o segundo a direção corretora. O cálculo desses sistemas lineares detém a maior parte do custo computacional, assim o método de resolução deve ser cuidadosamente escolhido. O método de gradientes conjugados preconditionado é utilizado para resolver tais sistemas lineares. O preconditionamento é realizado de forma híbrida, nas primeiras iterações usa-se o preconditionador fatoração controlada de Cholesky e nas iterações finais o preconditionador separador. O ponto chave do preconditionador híbrido é determinar o momento para a troca. O número de condição, estimado por meio dos valores de Ritz, é utilizado em uma heurística para troca dos preconditionadores. Testes computacionais foram realizados para avaliar a qualidade da heurística quando comparada à duas outras heurísticas propostas na literatura. O tempo computacional obtido ao se utilizar a nova heurística foi reduzido em mais de 60% e o número de iterações necessárias para convergência do método de gradientes conjugados foi reduzido em mais de 40%.

**Palavras-chave:** método preditor-corretor, preconditionador híbrido, troca de fase, valores de Ritz.

# Abstract

The Mehrotra predictor corrector method is a variant of interior point methods for linear programming where at each iteration it is necessary to solve two linear systems: the first determines the predictor direction and the second the corrector direction. Solving these linear systems represents most of the computational cost. For this reason, the solution method must be carefully chosen. In this work the conjugate gradients method is applied, it depends on the convergence of the matrix condition number making it necessary a preconditioner. The preconditioning is performed by the hybrid preconditioner, where in the first iterations, the preconditioner controlled Cholesky factorization is applied and in later iterations, the splitting preconditioner is applied. The key point of the hybrid preconditioner approach is to determine the moment for the phase exchange. Ritz values are used to estimate the condition number and to develop a heuristic to the change of phases. Computational experiments were performed to evaluate the heuristic quality when compared with othe two heuristic in the literature. The computational time obtained when using the new heuristics was reduced by 60% and the number of iterations required for convergence conjugated gradient method was reduced by more than 40 %.

**Keywords:** predictor-corrector method, hybrid preconditioner, phase exchange, Ritz value.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Problema ken-18 (dimensão: $78\,538 \times 128\,434$ )- na figura da esquerda a relação do número de condição em escala logaritmica com o número de iterações do método de gradientes conjugados. Para melhorar a visualização, na figura da direita está destacado o número de condição das iterações do método de gradientes conjugados limitados a 350 iterações. Resultado usando $\gamma = 5$ , $tola = -8$ , $\beta = 5$ e $c = 5$ . . . . .	37
Figura 2 – Problema 25fv47 (dimensão: $788 \times 1843$ ) - influência do valor de $\eta$ no número de iterações do método de gradientes conjugados. A linha azul representa o momento de troca de fase para $\eta = 5$ e 10 e a linha preta para $\eta = 20$ . . . . .	38
Figura 3 – Problema afiro (dimensão: $27 \times 51$ ): distribuição dos valores de Ritz e autovalores, para o maior (acima) e o menor (abaixo), no decorrer das iterações do método de pontos interiores. . . . .	43
Figura 4 – Problema sc50a (dimensão: $49 \times 77$ ): distribuição dos valores de Ritz no decorrer das iterações do método de pontos interiores. . . . .	44
Figura 5 – Problema ken-18 (dimensão: $78538 \times 128434$ ) - Relação entre as iterações do método de pontos interiores e do método de gradientes conjugados conforme a variação do parâmetro $\eta$ e $tola = 10^{-6}$ . Em destaque as linhas vermelha e verde mostram o momento da troca de fase para os valores de $\eta = 10$ e 20 respectivamente. . . . .	45
Figura 6 – Problema ken18 (dimensão: $78538 \times 128434$ ): distribuição dos valores de Ritz nas iterações 15 , 25 e 32 do método de pontos interiores, respectivamente. A troca de fase ocorreu na iteração 31. . . . .	45
Figura 7 – Distribuição do número de correções por iteração para a heurística 1 (esquerda), heurística 2 (centro) e para a heurística proposta (direita). . . . .	46
Figura 8 – A influência da heurística no número de total iterações do método de gradientes conjugados para cada um dos problemas testados, considerando $\eta = 5$ e $tola = 10^{-6}$ . A primeira figura mostra o total de iterações de todos os problemas e a segunda figura mostra os problemas com até 5000 iterações. . . . .	48

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Lista dos 86 problemas testados. . . . .	40
Tabela 2 – Dimensão dos problemas destacados durante o texto. . . . .	41
Tabela 3 – Problema a1 (dimensão: $62 \times 82$ ) - Resultados da diferença entre número de condição calculado usando valores de Ritz e o calculado pelo Matlab, considerando a variação dos parâmetros $\eta$ e $tola$ . . . . .	42
Tabela 4 – Comparativo do erro relativo dos resultados obtidos com a rotina <i>dsterf</i> em relação aos obtidos com a rotina <i>eig</i> . . . . .	42
Tabela 5 – Comparação entre o autovalores da matriz antes da correção com os valores de Ritz depois da correção das falhas na diagonal. . . . .	46
Tabela 6 – Comparação do tempo computacional, em segundos, e a iteração que ocorreu troca de fase, considerando $tola = 10^{-8}$ , $\eta = 5$ e $\eta_{max} = 20$ . . . . .	49
Tabela 7 – Comparação dos resultados do conjunto quando resolvidos pelas heurísticas 1 e 2 e pela heurística proposta para $\eta = 5$ e $tola = 10^{-8}$ . . . . .	49

# Lista de algoritmos

Algoritmo 1 – Método de Gradientes Conjugados . . . . .	23
Algoritmo 2 – Heurística de troca de fase (BOCANEGRA et al., 2007). . . . .	36
Algoritmo 3 – Heurística de troca de fase (VELAZCO et al., 2011). . . . .	36
Algoritmo 4 – Heurística proposta para troca de fases. . . . .	37

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>1 Métodos de Pontos Interiores</b>	<b>16</b>
1.1 Método Preditor-Corretor de Mehrotra	17
1.1.1 Método de Newton	18
1.1.2 Direções de Newton	19
1.2 Resolução do Sistema Linear	20
1.2.1 Fatoração Cholesky	21
1.2.2 Método dos Gradientes Conjugados	21
1.2.2.1 Método dos Gradientes Conjugados	21
1.2.2.2 Métodos de Gradientes Conjugados preconditionados	22
1.3 Estado da arte	23
<b>2 Valores de Ritz e a relação com o método de gradientes conjugados</b>	<b>25</b>
2.1 Estimando erros	25
2.2 Convergência do método de gradientes conjugados	26
2.2.1 Número de condição	26
2.2.2 Cálculo dos autovalores	27
2.3 Valores de Ritz	28
2.3.1 O método de Lanczos e a relação entre os coeficiente dos métodos dos gradientes conjugados e os valores de Ritz	29
<b>3 Precondicionador Híbrido: heurística para troca de fases baseada em valores de Ritz</b>	<b>32</b>
3.1 Precondicionador Fatoração Controlada de Cholesky (FCC)	32
3.1.1 Falhas na diagonal	34
3.2 Precondicionador Separador	34
3.3 Troca de fases	35
3.3.1 Heurística proposta em (BOCANEGRA et al., 2007)	35
3.3.2 Heurística proposta em (VELAZCO et al., 2011)	35
3.3.3 Heurística proposta nesse trabalho	36
<b>4 Resultados Computacionais</b>	<b>40</b>
4.1 Problemas testados	40
4.2 Implementação	41
4.3 Qualidade da aproximação dos valores de Ritz	41
4.4 Influência do preconditionamento na distribuição dos valores de Ritz	45
4.4.1 Falhas na diagonal	45
4.5 Comparação entre as heurísticas de troca de fase	47
<b>5 Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>50</b>

**REFERÊNCIAS** . . . . . 51

# Introdução

Um problema de programação linear de grande porte, em geral, é resolvido utilizando métodos de pontos interiores. O principal custo computacional em métodos de pontos interiores envolve a determinação das direções de busca. A cada iteração um ou mais sistemas lineares esparsos e mal condicionados são resolvidos para determinar essas direções. A resolução desses sistemas lineares pode ser feita utilizando métodos diretos ou iterativos. Métodos diretos fornecem a solução exata porém com custo computacional superior, já os métodos iterativos dependem das condições de convergência para obter a solução, mas demandam menos esforço computacional. Nesse trabalho utiliza-se o método de gradientes conjugados, pois ele preserva a esparsidade original da matriz e tem menor custo computacional, entretanto sua convergência está relacionada com a distribuição dos autovalores.

Uma forma de melhorar o condicionamento da matriz é o preconditionamento. O preconditionador Fatoração Controlada de Cholesky (FCC) (CAMPOS; ROLLETT, 1995) tem seu melhor desempenho nas primeiras iterações do método de pontos interiores, e o preconditionador separador (OLIVEIRA; SORENSEN, 2005) utiliza a fatoração LU e apresenta melhores resultados nas iterações finais dos métodos de pontos interiores. Abordagens híbridas com a combinação desses preconditionadores têm apresentado resultados promissores (BOCANEGRA et al., 2007); (VELAZCO et al., 2011). Nessa abordagem assume-se a existência de fases durante as iterações do método de pontos interiores e em cada fase é usado um tipo de preconditionador. A escolha do momento da troca é essencial para o sucesso dessas abordagens híbridas e, se bem feita, pode reduzir o tempo computacional e/ou o número de iterações. Algumas heurísticas têm sido propostas para determinar a troca de fases em métodos de pontos interiores que usam preconditionadores híbridos (BOCANEGRA, 2005; BOCANEGRA et al., 2007; VELAZCO et al., 2011). Um bom indicativo para a troca do preconditionador é o número de condição, que nesse trabalho será calculado segundo a norma-2.

Para o cálculo do número de condição, na norma-2, usa-se o maior e o menor autovalores da matriz, porém o cálculo dos autovalores é um procedimento com custo computacional elevado. O objetivo desse trabalho é propor uma heurística para troca de fases baseada nos valores de Ritz, os quais são aproximações dos autovalores (PAIGE et al.,

1995) e podem ser usados para estimar o número de condição da matriz dos coeficientes. Para analisar a qualidade da aproximação dos valores de Ritz esses foram comparados com os autovalores da matriz dos coeficientes. Quanto à heurística proposta, ela foi comparada com outras duas heurísticas descritas na literatura (BOCANEGRA, 2005; VELAZCO et al., 2011) no que se refere ao tempo computacional, iterações do método de gradientes conjugados e número de instâncias que atingiram a otimalidade.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 é apresentada uma revisão sobre o método de pontos interiores destacando o método preditor-corretor de Mehrotra. Ainda neste capítulo estão descritos os métodos comumente usados para solução de sistemas lineares oriundos de pontos interiores: o método de gradiente conjugado preconditionado e a fatoração de Cholesky. No Capítulo 2 encontram-se as propriedades de convergência do método de gradientes conjugados e a sua relação com os valores de Ritz. O Capítulo 3 é destinado ao preconditionador híbrido, descrevendo o preconditionador FCC e o preconditionador separador. Ainda fazem parte deste capítulo as heurísticas de mudança de fase descritas na literatura e a proposta de heurística desse trabalho. O Capítulo 4 apresenta os testes numéricos realizados. No Capítulo 5 estão as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros. E por fim, as Referências Bibliográficas.

# Capítulo 1

## Métodos de Pontos Interiores

O desenvolvimento de métodos de pontos interiores para a resolução de problemas de programação linear de grande porte se tornou um atrativo campo de pesquisa após a publicação do trabalho (KARMAKAR, 1984). Tais métodos diferenciam-se principalmente pelo tempo computacional ser polinomial no pior caso, permitindo resolver problemas com dimensões maiores que os resolvidos pelo método Simplex. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} & \min c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é uma matriz de posto completo,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ . Esse problema é conhecido como problema primal e pode ser considerado na forma padrão. No problema primal, para cada ponto interior, factível, pode-se obter uma direção de descida (ou um conjunto dessas direções) de modo que qualquer movimento nessa direção resulte em melhora no valor da função objetivo. É possível trabalhar também com o problema dual:

$$\begin{aligned} & \max b^T y \\ \text{sujeito a} \quad & A^T y + z = c \\ & z \geq 0, \end{aligned}$$

onde  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $z \in \mathbb{R}^m$ .

Existem métodos de pontos interiores que resolvem o problema primal, dual ou ambos. A escolha do método depende das características do problema a ser resolvido. As restrições dos problemas primal e dual formam um conjunto convexo. Dentro desse conjunto estão os pontos factíveis e fora dele os infactíveis. Assim, um método factível usa pontos dentro do conjunto convexo delimitado pelas restrições do problema, portanto, esse ponto satisfaz todas as restrições. Já um método infactível usa pontos que não satisfazem uma ou mais restrições e assim não se encontram no interior do conjunto. A existência

de métodos infactíveis se dá pela dificuldade de determinar um ponto inicial factível em alguns problemas. Nessa dissertação está sendo utilizado um método primal-dual infactível, conhecido como método preditor-corretor (MEHROTRA, 1992).

## 1.1 Método Preditor-Corretor de Mehrotra

Em métodos de pontos interiores as direções de busca são determinadas a partir da aplicação do Método de Newton às condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). No método preditor-corretor de Mehrotra, a cada iteração dois sistemas lineares devem ser resolvidos: um para encontrar a direção preditora (ou afim escala) e outro para a direção corretora (ou de centragem). O maior parte do custo computacional dos métodos de pontos interiores está associada à solução dos sistemas lineares para determinar as direções de busca.

As condições de KKT podem ser vistas como uma generalização do método dos multiplicadores de Lagrange. Foram publicadas pela primeira vez em 1951 por Kuhn e Tucker (KUHN; TUCKER, 1951), porém, já haviam sido desenvolvidas na dissertação de mestrado de Karush em 1939. Usando tais condições é possível caracterizar os pontos candidatos a ótimos de um problema de programação linear. No entanto, as condições de primeira ordem não são suficientes para garantir a otimalidade de um ponto candidato, a menos que o problema seja continuamente diferenciável e convexo.

Seja a função Lagrangeana do problema primal-dual,

$$L(x, y, z) = c^T x - y^T (Ax - b) - z^T x,$$

onde  $y, z \in \mathbb{R}^n$  são vetores contendo os multiplicadores de Lagrange. Ao aplicar as condições de KKT à função Lagrangeana, tem-se:

$$c^T - y^T A - z = 0 \tag{1.1}$$

$$Ax - b = 0$$

$$x \geq 0$$

$$z \geq 0$$

$$z_i x_i = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

O problema (1.1) pode ser relaxado com o termo  $\mu e$  e reescrito na forma matricial:

$$F_\mu(x, y, z) = \begin{bmatrix} A^T y + z - c \\ Ax - b \\ ZXe - \mu e \end{bmatrix} = 0, \tag{1.2}$$

respeitando  $(x, z) \geq 0$ , onde  $Z = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$ ,  $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  e  $e = (1, \dots, 1)^T$ . O parâmetro  $\mu$  é originário do problema de barreira e é usado para relaxar as condições de complementaridade da equação ( $ZXe = 0$ ). Note que se  $\mu \rightarrow 0$  o problema relaxado (1.2) se aproxima do original (1.1). O parâmetro  $\mu$  será reduzido a cada iteração do método de pontos interiores de modo que  $\mu^k \rightarrow 0$ .

A solução de (1.2) pode ser obtida resolvendo um sistema de equações não lineares. Isso pode ser feito aplicando o método de Newton.

### 1.1.1 Método de Newton

No método de Newton para funções  $n$ -dimensionais procura-se um vetor  $x^*$  de modo que  $f(x^*) = 0$ , onde  $f$  é uma função dada pelo sistema de equações (SÜLI; MAYERS, 2003):

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

O vetor  $x^*$  é o limite da sequência  $\{x^{k+1}\}$ , na qual cada termo é dado por  $x^{k+1} = x^k + \delta x^k$ . O vetor  $x^k$  é denominado aproximação de Newton de  $x^*$  e a qualidade dessa aproximação é medida pelo valor  $\|\delta x^k\|$ .

A função  $f$  pode ser aproximada por uma série de Taylor truncada no segundo termo:

$$f(x) \approx f(x^k) + J(x^k)(x - x^k), \tag{1.4}$$

onde  $J$  é a matriz jacobiana, descrita por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

O objetivo é determinar  $x$  tal que  $f(x) = 0$ , assim tem-se que  $f(x^k) + J(x^k)(x - x^k) \approx 0$ . Como  $x^{k+1} \rightarrow x^*$ , tem-se que  $f(x^k) + J(x^k)(x^{k+1} - x^k) \approx 0$ .

Assim,  $x^{k+1}$  pode ser escrito como:

$$x^{k+1} = x^k - J^{-1}(x^k)f(x^k).$$

Na prática, é mais eficiente resolver o sistema linear  $J(x^k)\delta x^k = -f(x^k)$  e atualizar a aproximação  $x^{k+1} = x^k + \delta x^k$ . As equações desse sistema são conhecidas como equações de Newton e  $\delta x^k$  como direção de Newton.

O processo é repetido até que  $\|\delta x^k\| < \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é a tolerância desejada.

### 1.1.2 Direções de Newton

A cada iteração do método preditor corretor é aplicado um passo do método de Newton para resolver o sistema de equações não lineares (1.2) com um dado parâmetro  $\mu_k$  que é o valor do parâmetro  $\mu$  na iteração  $k$  do método de pontos interiores. As direções de Newton ( $\Delta_x, \Delta_y$  e  $\Delta_z$ ) podem ser obtidas resolvendo o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax \\ c - A^T y - z \\ \mu e - ZXe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ r_c \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

onde o resíduo primal é  $r_p$ , o resíduo dual é  $r_d$  e o resíduo da complementaridade é  $r_c$ .

No método preditor-corretor, a direção de Newton  $\Delta = (\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$  é decomposta em duas partes: direção preditora ( $\Delta_a$ ) e direção corretora ( $\Delta_c$ ). A direção preditora, também conhecida como direção afim-escala, consiste em um passo puro na direção de Newton. Já a direção corretora, ou direção de centragem, tenta criar uma trajetória mais central. As direções preditora  $\Delta_a$  e corretora  $\Delta_c$  são obtidas resolvendo os seguintes sistemas lineares na iteração  $k$ :

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_a x^k \\ \Delta_a y^k \\ \Delta_a z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d \\ -Z^k X^k e \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

e

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & I \\ Z & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_c x^k \\ \Delta_c y^k \\ \Delta_c z^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_c \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Os sistemas (1.6) e (1.7) podem ser reescritos como o sistema de equações normais ou ainda o sistema aumentado.

Considere o sistema (1.5), multiplicando a terceira linha por  $-X^{-1}$  e somando com a segunda linha, encontra-se o sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -\Theta^{-1} & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p \\ r_d - X^{-1} r_c \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

onde  $\Theta = Z^{-1}X$ .

A matriz do sistema aumentado é esparsa e simétrica, porém indefinida. A partir do sistema aumentado pode-se obter as equações normais.

Multiplicando a segunda linha de (1.8) por  $A\Theta$  e somando a primeira linha a ela, tem-se as equações normais:

$$(A\Theta A^T)\Delta y = A\Theta(r_d - X^{-1}r_c) + r_p,$$

onde os valores de  $\Delta x$  e de  $\Delta z$  são obtidos das seguintes relações:

$$\begin{aligned}\Delta x &= \Theta A^T \Delta y - \Theta(r_d - X^{-1}r_c) \\ \Delta z &= X^{-1}(r_c - Z\Delta x).\end{aligned}$$

A matriz  $A\Theta A^T$ , do sistema de equações normais, é simétrica e definida positiva e embora tenha dimensão menor que a matriz do sistema aumentado é mais densa. Uma vez que a matriz  $\Theta$  é construída a partir das condições de complementaridade, ela se altera a cada iteração. A matriz  $A\Theta A^T$  tem seu condicionamento deteriorado nas proximidades da solução do método de pontos interiores, uma vez que algumas entradas de  $\Theta$  tendem a zero e outras crescem indefinidamente.

A escolha do método de resolução desses sistemas lineares é importante, pois eles representam a maior parte do esforço computacional dos métodos de pontos interiores. O uso de métodos iterativos é adequado em muitos problemas de programação linear de grande porte, pois requerem menos memória para armazenamento, já que evitam a perda de esparsidade que pode ocorrer quando são aplicados métodos diretos, como a fatoração de Cholesky.

## 1.2 Resolução do Sistema Linear

Um dos métodos diretos mais difundidos para resolver sistemas com matrizes simétricas e definidas positivas é a fatoração de Cholesky  $A = LL^T$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior com diagonal positiva. Essa fatoração trabalha com matrizes simétricas e definidas positivas. Esses quesitos são cumpridos pelos sistemas de equações normais. Contudo, mesmo a matriz contendo boas características, a fatoração pode causar preenchimento na presença de somente uma coluna densa, o que pode tornar o método computacionalmente caro.

Nesse trabalho usamos o método de gradientes conjugados aplicado ao sistema de equações normais. Como esse é um método iterativo, a esparsidade da matriz é preservada. Entretanto a convergência desse método está relacionada com a distribuição dos autovalores da matriz e surge a necessidade de preconditionamento (D'APUZZO et al., 2010).

Ambos os métodos são tratados com mais detalhes a seguir.

### 1.2.1 Fatoração Cholesky

A fatoração Cholesky é uma forma de decomposição de uma matriz  $A$  em um produto das matrizes  $L$ , uma matriz triangular inferior com diagonal positiva, e sua transposta  $L^T$ . Essa decomposição  $A = LL^T$  é única quando  $A$  for uma matriz definida positiva e assim todos os elementos da diagonal de  $L$  são estritamente positivos (GOLUB; LOAN, 2012).

**Teorema 1.1** (Fatoração Cholesky). *Dada uma matriz simétrica definida positiva existe uma única matriz triangular inferior  $L$ , com diagonal positiva, tal que  $A = LL^T$ . A matriz  $L$  é denominada fator de Cholesky.*

O fator de Cholesky  $L$  é construído por colunas usando as relações (1.9):

$$\begin{aligned} \ell_{j,j} &= \sqrt{a_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}^2} \\ \ell_{i,j} &= \frac{1}{\ell_{j,j}} \left( a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{i,k} \ell_{j,k} \right), \quad \text{para } i > j. \end{aligned} \quad (1.9)$$

O custo computacional desse método é da ordem de  $\frac{1}{3}n^3$  flops, onde  $n$  é a dimensão da matriz do sistema. Uma vez construída a decomposição de Cholesky o sistema linear é resolvido por substituição com custo da ordem de  $2n^2$ .

É comum em matrizes esparsas ocorrer preenchimento do fator  $L$ , criando mais elementos no fator de Cholesky do que os existentes na matriz original. Como no método de pontos interiores, em geral, tem-se matrizes esparsas de grande dimensão esse preenchimento pode gerar um alto custo e por vezes impedir a criação o fator de Cholesky da matriz devido a falta de memória.

### 1.2.2 Método dos Gradientes Conjugados

O método de gradientes conjugados foi proposto por Hestenes e Stiefel (1952). Esse método, ao ser aplicado a matrizes simétricas positivas definidas e em aritmética exata, converge em  $n$  passos, onde  $n$  é a dimensão da matriz. Contudo, em aritmética de ponto flutuante isso não é necessariamente verdade.

#### 1.2.2.1 Método dos Gradientes Conjugados

Dado o sistema linear  $Mx = b$ , onde  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $x, b \in \mathbb{R}^n$ , pode ser associado a ele um problema de minimização:

$$F(x^*) = \min F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.10)$$

onde  $x^*$  é o ponto de mínimo do funcional  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow R$  definido da seguinte forma:

$$F(x) = x^T Mx - x^T b.$$

Uma forma de construção do método de gradientes conjugados é considerando a minimização do funcional (1.10) do problema.

Considerando que o vetor gradiente do funcional  $F$  determina a direção de máximo crescimento da função na iteração  $k$ , tem-se que  $-\nabla J(x^k) = b - Mx^k$ , aponta para a direção do mínimo deste funcional. Assim, se o resíduo  $r^k = b - Mx^k$  não for nulo, pode-se encontrar uma direção de descida.

O método se baseia em determinar uma direção de descida para  $x$  e um tamanho de passo ( $\gamma$ ), a partir de  $x$ . Ao tomar direções de descida, que não sejam necessariamente as mesmas do resíduo, constrói-se o método dos gradientes conjugados. As direções de descida  $p^k$  e  $p^{k+1}$  são sempre conjugadas, no produto interno:

$$p^{k+1^T} M p^k = 0.$$

A direção inicial ( $p^0$ ) pode ser definida a partir do resíduo inicial ( $r^0$ ). O método dos gradientes conjugados para resolver um sistema linear  $Mx = b$ , partindo de uma solução inicial  $x^0$ , é apresentado no Algoritmo 1.

Computacionalmente, o método de gradientes conjugados não é um método exato e portanto necessita de um critério de parada. Um critério de parada é o valor da norma do resíduo, assim, se  $\|r^k\| < \epsilon$ , onde  $\epsilon$  é o valor da tolerância, então  $x$  é considerada a solução do sistema  $Mx = b$ .

O método envolve multiplicações matriz-vetor e tem complexidade computacional da ordem de  $n^2$  a cada iteração. Para melhorar as características de convergência se faz necessário o uso de preconditionadores. (STRAKOŠ, 1991).

### 1.2.2.2 Métodos de Gradientes Conjugados preconditionados

A convergência do método de gradientes conjugados está relacionada a distribuição dos autovalores por isso técnicas de preconditionamento são aplicadas. O preconditionamento consiste em transformar o sistema linear  $Mx = b$  em um sistema linear equivalente  $\tilde{M}\tilde{x} = \tilde{b}$  com melhor condicionamento (GOLUB; LOAN, 2012).

Tomando  $\tilde{M} = C^{-1}MC^{-1}$ ,  $\tilde{x} = Cx$  e  $\tilde{b} = C^{-1}b$ , onde  $C$  é uma matriz simétrica definida positiva, o objetivo é que a escolha adequada da matriz  $C$  torne a matriz  $\tilde{M}$

melhor condicionada e/ou com autovalores agrupados.

---

**Algoritmo 1:** Método de Gradientes Conjugados

---

**Entrada:** Matriz  $M$ , solução inicial  $x^0$ , vetor  $b$

**Saída:**  $x^k$

```

1  $r_0 = b - Mx^0$ ,  $k = 0$ ,  $p_0 = r_0$ 
2 enquanto  $r_k \neq 0$  e  $k < k_{max}$  faça
3    $\alpha_{k-1} = \frac{\langle r_{k-1}, r_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, Mp_{k-1} \rangle}$ 
4    $x^k = x_{k-1} + \alpha_k Mp_{k-1}$ 
5    $\beta_{k-1} = \frac{\langle r_k, r_k \rangle}{\langle r_{k-1}, r_{k-1} \rangle}$ 
6    $p_k = r_k + \beta_{k-1} p_{k-1}$ 
7    $k = k + 1$ 
8   verificar critério de parada
9 fim

```

---

### 1.3 Estado da arte

Métodos de programação linear com tempo polinomial foram desenvolvidos assim que se percebeu que o método Simplex de Dantzig (NASH, 2000) se tornava ineficiente para alguns problemas, podendo ter complexidade computacional exponencial no pior caso (ZADEH, 1980). Um dos primeiros relatos de métodos com solução polinomial é de 1979 por Khachian (SHANNO, 2012) depois disso, em 1984, Karmarkar demonstra que, para problemas onde a função objetivo é nula no ponto ótimo, a complexidade computacional do método é menor que a de Khachian, além disso comenta a implementação de um algoritmo eficiente, mesmo que não o tenha mostrado (KARMARKAR, 1984). Alguns anos depois, foi descoberto que os métodos de pontos interiores já haviam sido propostos por (DIKIN, 1967) e sua convergência provada em 1974 (DIKIN, 1974). Foram desenvolvidos então métodos baseados no problema primal, no problema dual e nos problemas primal-dual (POTRA; WRIGHT, 2000). Os problemas primal-dual foram desenvolvidos por (KOJIMA et al., 1989) em 1989 e mais tarde foi demonstrado que esse método deriva diretamente do método de barreira logarítmica.

Mehrotra, em 1992, apresenta um algoritmo para o método primal-dual que é utilizado em muitos dos softwares atuais (MEHROTRA, 1992), ele propôs um método preditor-corretor, com duas direções, a primeira uma direção afim, conhecido como direção preditora e a segunda uma direção para determinar um parâmetro de centragem para o caminho, conhecida como direção corretora. Ao notar que o custo de resolução do sistema linear era representativo no custo final, métodos que tratavam o sistema linear ganharam destaque como o método proposto por (ANSTREICHER, 1999), onde os sistemas lineares são resolvidos pelo método de gradientes conjugados preconditionados.

O método de gradientes conjugados tem sua convergência garantida quando aplicados a sistemas com matrizes simétricas e definidas positiva, assim, são adequados ao sistema de equações normais. Das muitas técnicas de preconditionamento destacam-se a Fatoração Controlada de Cholesky (FCC) (CAMPOS; ROLLETT, 1995), que deriva da fatoração incompleta de Cholesky (MEIJERINK; VORST, 1977) (KERSHAW, 1978), e o preconditionador separador, que trabalha com o sistema aumentado e desenvolvido para sistemas muito mal condicionados (OLIVEIRA; SORENSEN, 2005). O preconditionador híbrido, que utiliza a FCC e o preconditionador separador foi proposto por (BOCANEGRA, 2005) e posteriormente trabalhado por (BOCANEGRA et al., 2007), (VELAZCO et al., 2010), (VELAZCO et al., 2011) e (GHIDINI et al., 2012) no que se refere ao momento da mudança de preconditionador. Em todos os métodos em que se aplica o preconditionamento híbrido a mudança de fase é crucial para o desempenho.

## Capítulo 2

# Valores de Ritz e a relação com o método de gradientes conjugados

A convergência de alguns métodos iterativos na resolução dos sistemas lineares é influenciada pelo número de condição da matriz dos coeficientes (STRAKOŠ, 1991; SLUIS; VORST, 1986). O cálculo do número de condição depende da norma escolhida. Por exemplo, na norma-2 o número de condição está relacionado aos valores singulares da matriz. A distribuição dos autovalores no espectro da matriz também influencia a convergência dos métodos iterativos (VECHARYNSKI et al., 2015). Neste capítulo vamos apresentar uma forma de estimar o número de condição da matriz a partir dos valores de Ritz, e como esses podem ser obtidos a partir das iterações do método de gradientes conjugados.

### 2.1 Estimando erros

Ao trabalhar em aritmética de ponto flutuante existem erros/perturbações inevitáveis, seja na hora de inserir dados, no decorrer das operações ou no próprio método que pode não ser exato, como o método de pontos interiores.

Seja  $x^*$  a solução do sistema linear  $Ax = b$ , sendo  $A$  inversível, e considere  $\delta x$  e  $\delta b$  as perturbações erros na solução deste sistema e no vetor do lado direito, respectivamente. Ou seja,  $A(x + \delta x) = b + \delta b$ . Para que o sistema seja bem condicionado, quando a norma de  $\delta b$  for pequena o valor de  $\delta x$  também deve ser. Seja  $\bar{x}$  uma solução do sistema perturbado dada por  $\bar{x} = x^* + \delta x^*$ , onde  $\delta x^*$  é a solução para  $A\delta x^* = \delta b$ . Então,

$$\delta x^* = A^{-1}\delta b \tag{2.1}$$

$$\|\delta x^*\| = \|A^{-1}\delta b\| \tag{2.2}$$

$$\|\delta x^*\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|. \tag{2.3}$$

Dividindo a equação (2.3) por  $\|A\|\|x^*\|$ :

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|A\| \|\delta b\|}{\|A\| \|x^*\|}.$$

Fazendo as devidas manipulações tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\|\delta x^*\|}{\|x^*\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|},$$

onde  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$  é denominado número de condição de  $A$ . Assim, se o número de condição de  $A$  for pequeno, a perturbação da solução será proporcional a  $\delta b$  e portanto o sistema será bem condicionado. No caso da perturbação ser próxima de zero o erro do sistema tende a ser nulo.

## 2.2 Convergência do método de gradientes conjugados

A convergência do método está relacionada a distribuição dos autovalores da matriz e portanto o número de condição, na norma-2, é uma ferramenta útil. Em aritmética exata a influência dos autovalores é ainda mais precisa pois o método converge em  $n$  passos, onde  $n$  é o número de autovalores distintos da matriz (BRANDTS; VORST, 2004).

### 2.2.1 Número de condição

O número de condição de uma matriz, dado pela norma  $p$ , é definido como:  $\kappa_p(A) = \|A^{-1}\|_p \|A\|_p$ . Ele é uma medida de estabilidade do sistema linear, ou seja, o quanto a solução é afetada por uma perturbação na matriz do sistema. Matrizes bem condicionadas tem número de condição próximo da unidade. Nesse trabalho usaremos a norma-2 para determinar o número de condição e fazer uso da sua relação com os autovalores da matriz.

**Teorema 2.1.** *Seja  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica com entradas reais. Então:*

$$\|K\|_2 = \lambda_{Max} \quad \|K^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{Min}},$$

sendo  $\lambda_{Max} = \max|\lambda_j|$  e  $\lambda_{Min} = \min|\lambda_j|$ , onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $K$ .

Usando o Teorema 2.1 e a definição de número de condição na norma-p, obtem-se:

**Teorema 2.2.** *Seja  $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica inversível. Então:*

$$\kappa(K) = \frac{\lambda_{Max}}{\lambda_{Min}},$$

onde  $\lambda_{Max}$  e  $\lambda_{Min}$  são o maior e o menor autovalor de  $K$ , respectivamente.

A demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2 estão em Luenberger e Ye (1984).

### 2.2.2 Cálculo dos autovalores

Um autopar associado a uma matriz  $A$  é um par  $(\lambda, x)$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$  o autovalor de  $A$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  o autovetor de  $A$  associado a  $\lambda$ , tal que:

$$Ax = \lambda x,$$

e assim, com algumas manipulações determina-se o conjunto de valores  $\lambda$  que satisfaz essa igualdade:

$$Ax - \lambda x = 0 \tag{2.4}$$

$$(A - I\lambda)x = 0. \tag{2.5}$$

Para que a igualdade (2.4) tenha mais de uma solução é preciso que a matriz  $A - I\lambda$  seja singular, isto é,  $\det(A - I\lambda) = 0$ . O cálculo dos autovalores é um processo de custo computacional elevado. Existem diversos métodos para o cálculo dos autovalores de uma matriz, dentre os quais podemos citar o método das potências (GOLUB; LOAN, 2012), o método QR (MOLER; STEWART, 1973), entre outros.

O cálculo dos autovalores também pode ser visto como um problema de minimização, ou seja, encontrar o valor que minimiza  $\|Ax - \lambda x\|^2$ .

Na norma-2 é possível usar algumas propriedades interessantes das matrizes ortogonais ( $M^T = M^{-1}$ ), que são invariantes. Tem-se que:

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \langle M^T Mx, x \rangle = \langle Mx, Mx \rangle = \|Mx\|_2^2.$$

Ao realizar a minimização na norma-2, considere  $v = V_m y$ , onde  $V_m$  é uma base para o subespaço de Krylov de dimensão  $m$ . Define-se o espaço de Krylov de dimensão  $i$ , como  $\mathcal{K}^i(A, r) = r, Ar, \dots, A^{i-1}r$ , onde  $r \in \mathbb{R}^n$ .

Suponha  $y$  um vetor tal que  $\|y\|_2 = 1$  e  $A$  semelhante a uma matriz Hessenberg  $H$ , existe a relação  $AV_m = V_{m+1}H_{m+1,m}$ :

$$\begin{aligned} & \min \|Av - \lambda v\|_2 \\ & \min \|(AV_m - \lambda V_m)y\|_2 \\ & \min \|V_{m+1}(H_{m+1,m} - \lambda I_{m+1,m})y\|_2 \\ & \min \|(H_{m+1,m} - \lambda I_{m+1,m})y\|_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Em (2.6) é usado o fato de  $V_{m+1}$  ser uma matriz ortogonal e, portanto, invariante na norma-2. O problema de minimização (2.6) é um problema de programação linear e a dificuldade de resolução depende do valor de  $m$ . Contudo, se for necessário somente um subconjunto desses autovalores existem algumas alternativas como:

- Método das Potências, o qual encontra o maior autovalor de  $A$  (DAVIDSON, 1975).
- Métodos das Potências Inversas (DAVIDSON, 1975), para encontrar o menor autovalor de  $A$ , pois esse será o maior autovalor de  $A^{-1}$ .
- Método das Potências com shift (WILKINSON, 1965), onde dado um shift encontra-se o autovalor que está mais próximo a ele.
- Método de Rayleigh-Ritz, que usa projeções em subespaços de Krylov, que será visto a seguir (JIA; STEWART, 2001).

Em Zhang et al. (1999) é destacado que, quando se usa métodos iterativos, encontrar boas aproximações para os autovalores menores é mais difícil que para os autovalores maiores.

## 2.3 Valores de Ritz

O método de Rayleigh-Ritz (KNYAZEV, 2001) encontra uma aproximação para os autovalores e autovetores de uma matriz. Essa aproximação é conhecida como autopar de Ritz  $(\tilde{\lambda}, \tilde{x})$ . O autopar de Ritz é uma aproximação para a igualdade,

$$Ax = \lambda x$$

onde  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Para obter o autopar de Ritz, é necessário usar uma matriz ortonormal  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Então, para  $v \in V$ :

$$A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x} \perp V \iff \langle A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}, v \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Como  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  cada vetor nesse espaço pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base, logo,  $\tilde{x} = Vy$ . Reescrevendo a igualdade (2.7):

$$\langle AVy - \tilde{\lambda}Vy, v_j \rangle = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n.$$

Para que isso ocorra para todos os valores de  $j$ , a seguinte igualdade deve ser satisfeita:

$$AVy - \tilde{\lambda}Vy = 0. \quad (2.8)$$

E então,  $V^H AVy = \tilde{\lambda}y$ . Considerando,  $V^H AV = B_k$  uma matriz quadrada de dimensão  $k$ , se obtém,  $B_k y = \tilde{\lambda}y$ .

Portanto,  $\tilde{\lambda}$  é autovalor de  $B_k$  e denominado de valor de Ritz, já o vetor  $y$  é chamado de vetor de Ritz. A qualidade da aproximação entre dos autovalores de  $A$  e os

valores de Ritz depende de vários fatores (TENG et al., 2015) e um deles é a escolha do vetor que gera o subespaço de Krylov. O vetor inicial  $r$  deve garantir que o subespaço gerado seja uma boa aproximação para o autoespaço de  $A$  e portanto contenha uma parcela dos autovetores de  $A$ .

Para criar a base ortonormal  $V$ , pode-se usar os subespaços de Krylov com o processo de Arnoldi para ortogonalização, que são definidos como em Paige et al. (1995). Outro processo empregado para matrizes simétricas é o de Lanczos (LANCZOS, 1950). O método de Lanczos, que será utilizado nesse trabalho, apresenta uma relação ainda mais restritiva. A matriz dos sistemas lineares é simétrica, escrevendo  $V_n^T AV_n = T_n$ , onde  $V_n$  é a base do espaço de Krylov e  $T_n$  é uma matriz tridiagonal de dimensão  $n$ , os valores de Ritz de  $A$  serão os autovalores da matriz  $T_n$ . Essa relação está melhor descrita a seguir.

### 2.3.1 O método de Lanczos e a relação entre os coeficiente dos métodos dos gradientes conjugados e os valores de Ritz

O método de Lanczos é um método de ortogonalização que permite encontrar uma base ortonormal para um espaço, em especial para um espaço de Krylov. Os espaços de Krylov são construídos a partir de uma matriz  $A$  e um vetor  $r$ , que nesse trabalho será o vetor resíduo  $r = b - Ax$ . O subespaço de Krylov de dimensão  $i$  pode ser definido por:  $\mathcal{K}^i(A, r) = \{r, Ar, \dots, A^{i-1}r\}$ .

Como o método de gradientes conjugados é um método de espaços de Krylov, é possível alcançar uma relação entre os coeficientes do método de gradientes conjugados e os valores de Ritz (SLUIS; VORST, 1986).

Quando a matriz do sistema linear é simétrica tem-se a seguinte relação (KUSHIDA, 2015).

$$AV_i = V_{i+1}T_{i+1,i} \quad (2.9)$$

onde  $T_{i+1,i}$  de dimensão  $i + 1 \times i$  é uma matriz tridiagonal e  $V = [v_1, v_2, \dots, v_k]$  é formado por vetores ortogonais. Multiplicando a equação (2.9) à esquerda pela Hermitiana de  $V_i$ , tem-se:

$$\begin{aligned} V_i^H AV_i &= V_i^H V_{i+1} T_{i+1,i} \\ &= I_{i,i+1} T_{i+1,i} \\ &= T_{i,i}. \end{aligned}$$

Suponha agora um autopar  $(z, \theta)$  onde  $\|z\| = 1$ , define-se um resíduo do autopar como  $r = Az - \theta z$ . Deseja-se encontrar um valor tal que

$$Az - \theta z = r \perp \mathcal{K}^i(A, v), \quad (2.10)$$

para um determinado vetor inicial  $v \in \mathbb{R}^n$ , em particular  $v = r_0$ . O vetor  $z$  será reescrito como combinação linear dos elementos da base do subespaço de Krylov e portanto  $z = V_i y$ . Usando as relações definidas nas equações (2.9) e (2.10) tem-se:

$$V_i^H (AV_i y_j - \theta_j^i V_i y_j) = 0$$

ou ainda,

$$T_{i,i} y_j = \theta_j^i y_j.$$

Portanto, o valor de  $\theta_j^i$ , que é o autovalor de  $T_{i,i}$ , será o valor de Ritz e o vetor de Ritz é dado por  $y_j$ . A dimensão da matriz  $T_{i,i}$  aumenta a cada iteração  $i$  do método de gradientes conjugados. Assim a quantidade de valores de Ritz vai depender do número de iterações efetuadas no método dos gradientes conjugados.

Numa iteração  $k$  a matriz tridiagonal  $T_k$  de dimensão  $k \times k$  pode ser definida por:

$$T_k = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \eta_2 & & & \\ \eta_2 & \gamma_2 & \eta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \eta_{k-1} & \gamma_{k-1} & \eta_k \\ & & & \eta_k & \gamma_k \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

onde os valores de  $\gamma$  e  $\eta$  podem ser calculados a partir dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  do método dos gradientes conjugados, apresentado no Algoritmo 1. A relação é dada por:  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_{-1} = 0$ ,  $\gamma_k = \frac{1}{\alpha_{k-1}} + \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-2}}$  e  $\eta_{k+1} = \frac{\sqrt{\beta_k}}{\alpha_{k-1}}$ .

Outra propriedade que deve ser notada está relacionada ao quociente de Rayleigh  $R(A, z)$ , onde  $z \in \mathcal{K}^i(A, r_0)$  é um vetor não nulo e  $z = V_i y$ :

$$R(A, z) = \frac{z^T A z}{z^T z} = \frac{y^T V_i^T A V_i y}{y^T V_i^T V_i y} = \frac{y^T T_{i,i} y}{Y^T y} = R(T_{i,i}, y). \quad (2.12)$$

**Teorema 2.3** (Min-Max). *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz Hermitiana com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  em ordem crescente. E,*

$$R(A, x) = \frac{x^T A x}{x^T x}. \quad (2.13)$$

Então,

$$\lambda_k = \min \{ \max \{ R(A, x) \mid x \in U \text{ e } x \neq 0 \} \mid \dim(U) = k \}. \quad (2.14)$$

Uma simplificação para o maior autovalor é:

$$\lambda_n = \max \{ R(A, x) : x \neq 0 \}$$

e para o menor:

$$\lambda_1 = \min\{R(A, x) : x \neq 0\}.$$

Combinando o Teorema 2.3 com a equação (2.12), tem-se que:

$$\lambda_j = \min \{ \max R(A, z) \} \tag{2.15}$$

$$\theta_j^i = \min \{ \max R(T_{i,i}, y) \}, \tag{2.16}$$

para  $y$  e  $z$  satisfazendo as condições do Teorema 2.3. Usando o resultado (2.15) (BRANDTS; VORST, 2004) pode ser visto que  $\lambda_j \leq \theta_j^i$  sempre que  $j \leq i$ . Assim, em aritmética exata os valores de Ritz convergem para os autovalores de  $A$ .

## Capítulo 3

# Precondicionador Híbrido: heurística para troca de fases baseada em valores de Ritz

O condicionamento é uma estratégia para melhorar o número de condição de uma matriz. Consiste em multiplicar a matriz do sistema  $Ax = b$  por uma matriz condicionadora, conhecida como condicionador. Esse condicionamento pode ocorrer multiplicando a matriz pela direita, pela esquerda ou por ambos os lados.

Neste trabalho será utilizado uma estratégia de condicionamento híbrida que envolve dois tipos diferentes de técnicas para a construção da matriz condicionadora. A utilização de técnicas de condicionamento distintas visa encontrar condicionadores mais adequados às características da matriz do sistema linear que está sendo resolvida em cada iteração do método de pontos interiores.

### 3.1 Precondicionador Fatoração Controlada de Cholesky (FCC)

O condicionador FCC, desenvolvido por Campos (1995), é uma variação da fatoração incompleta de Cholesky (LIN; MORÉ, 1999; KERSHAW, 1978). Este condicionador é construído por colunas através de uma heurística de minimização da norma de Frobenius entre o fator exato de Cholesky  $L$  e o fator controlado de Cholesky  $\tilde{L}$ . Na FCC será calculada uma aproximação para o fator de Cholesky e o seu preenchimento será determinado previamente pela análise de memória disponível. Nesse caso, antes de iniciar a fatoração são analisadas quantas entradas podem ser criadas em cada coluna do condicionador.

Seja  $A\Theta A^T$  a matriz referente ao sistema de equações normais,  $L$  o fator de

Cholesky e  $\tilde{L}$  o fator controlado de Cholesky:

$$\begin{aligned} A\Theta A^T &= LL^T \\ &= \tilde{L}\tilde{L}^T + R. \end{aligned}$$

Sendo  $E = L - \tilde{L}$  e  $R$  a matriz do resto. Considere agora a multiplicação da matriz  $A\Theta A^T$  pelo fator controlado de Cholesky  $\tilde{L}^{-1}$  à esquerda e  $\tilde{L}^{-T}$  à direita:

$$\tilde{L}^{-1}A\Theta A^T\tilde{L}^{-T} = (\tilde{L}^{-1}L)(\tilde{L}^{-1})^T. \quad (3.1)$$

Ao manipular  $L = E + \tilde{L}$  e multiplicando à esquerda por  $\tilde{L}^{-1}$ , tem-se

$$\tilde{L}^{-1}L = I + \tilde{L}^{-1}E. \quad (3.2)$$

Ao substituir a equação (3.2) na equação (3.1):

$$\tilde{L}^{-1}A\Theta A^T\tilde{L}^{-T} = (\tilde{L}^{-1}L)(\tilde{L}^{-1}L)^T = (I + \tilde{L}^{-1}E)(I + \tilde{L}^{-1}E)^T.$$

Note que para  $\tilde{L} \rightarrow L$  tem-se  $E \rightarrow 0$  e ainda  $\tilde{L}^{-1}A\Theta A^T\tilde{L}^{-T} \rightarrow I$ . Para determinar  $\tilde{L}$ , será utilizada uma heurística para minimizar a norma de Frobenius de  $E$ .

$$\begin{aligned} \min \|E\|_F^2 &= \min \sum_{j=1}^m |l_{ij} - \tilde{l}_{ij}|^2 \\ &= \min \sum_{k=1}^{t_j+\eta} |l_{ikj} - \tilde{l}_{ikj}|^2 + \sum_{k=t_j+\eta+1}^m |l_{ikj}|^2. \end{aligned}$$

em que:

- $\tilde{l}_{ij}$  são os maiores valores da coluna  $l_j$  em módulo;
- $t_j$  são as entradas não nulas da coluna  $j$  da matriz  $L$ ;
- $\eta \in \mathbb{Z}$  é o número de entradas que podem ser criadas em cada coluna do preconditionador.

Portanto, para valores de  $\eta$  positivos o preconditionador se aproxima do fator completo de Cholesky, enquanto para valores negativos de  $\eta$  aproxima-se a um preconditionador diagonal.

Essa técnica é aplicada ao sistema de equações normais. No decorrer das iterações do método de pontos interiores a matriz vai ficando cada vez mais mal condicionada e o preconditionador FCC pode perder eficiência.

### 3.1.1 Falhas na diagonal

Durante o processo de construção da FCC pode ocorrer pivôs não positivos, nesses casos algumas estratégias podem ser utilizadas (MEIJERINK; VORST, 1977), como:

- Acrescentar um valor ao elemento da diagonal da matriz  $A\Theta A^T$  onde está ocorrendo a falha;
- Acrescentar um valor a toda diagonal da matriz  $A\Theta A^T$ .

O acréscimo é para encontrar um incremento  $\alpha$  tal que a fatoração incompleta de  $\tilde{A} = A + \alpha I$  exista. Uma das formas de escolher o parâmetro  $\alpha$  é o incremento exponencial:  $\alpha_i = \lambda 2^i$ , onde  $i = 1, \dots, N_{max}$  é o número de vezes que a correção está sendo aplicada e  $\lambda$  é um fator de correção. A cada correção o cálculo da fatoração é reiniciado e se a falha ainda permanecer é realizado um novo incremento e a fatoração é reiniciada, até atingir  $N_{max}$ . O número de reinícios pode elevar o custo computacional, além de que a matriz  $\tilde{A}$  fica mais distante da matriz  $A$ .

## 3.2 Precondicionador Separador

O precondicionador separador trabalha com matrizes definidas e indefinidas e portanto pode ser obtido a partir do sistema aumentado ou das equações normais. Foi proposto por Oliveira e Sorensen (2005) em 1997. Esse precondicionador foi desenvolvido para as iterações finais do método de pontos interiores, quando a matriz do sistema já está muito mal condicionada. No entanto, quando aplicado as iterações iniciais do método de pontos interiores, seu desempenho pode não ser satisfatório.

Dada uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de posto completo, o precondicionador consiste em encontrar uma partição  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  em  $A = [B \ N]$ , tal que  $B$  tenha colunas linearmente independentes. E assim, particionando o sistema, tem-se:

$$A\Theta A^T = B\Theta_B B^T + N\Theta_N N^T.$$

Multiplicado a esquerda por  $\Theta_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1}$  e à direita pela transposta dessa matriz:

$$\Theta_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1} (A\Theta A^T) B^{-T} \Theta_B^{-\frac{1}{2}} = I + WW^T,$$

onde  $W = \Theta_B^{-\frac{1}{2}} B^{-1} N \Theta_N^{\frac{1}{2}}$ .

Se  $B$  for escolhida de forma adequada, próximo de uma solução as normas de  $\Theta_B^{-1}$  e  $\Theta_N$  serão pequenas. Para determinar  $B$  usa-se minimização da norma de  $W$ . As colunas linearmente independentes que formaram  $B$  serão escolhidas como sendo

as  $m$  primeiras colunas com norma-1 mínima da matriz  $A\Theta$ . Deve-se atentar para o fato que o número de colunas linearmente dependentes visitadas pode acarretar um custo computacional expressivo, além de que a escolha de colunas pode necessitar de um reordenamento para evitar preenchimento. Para reduzir o custo do precondicionador, a matriz  $B$  é aproveitada em mais de uma iteração e uma heurística indica o momento em que a nova matriz  $B$  deve ser calculada.

A cada iteração a matriz  $I + WW^T$  muda pois a matriz das condições de complementaridade  $\Theta$  sofre alterações. Na otimalidade as condições de complementaridade do problema primal e dual devem ser satisfeitas, assim,  $x_i z_i \approx 0$  e  $s_i w_i \approx 0$ . Portanto, a matriz  $\Theta$  tem entradas próximas a zero e outras próximas a infinito.

### 3.3 Troca de fases

A troca de precondicionadores é denominada de troca de fase e é o ponto chave do condicionamento híbrido. O momento da troca pode ser determinado por meio do número de condição da matriz. Porém, o número de condição da matriz sofre grandes variações durante as iterações de pontos do método de pontos interiores e entre diferentes problemas o número de condição pode apresentar variações de ordem superior a  $10^{10}$ .

Neste trabalho serão comparadas três heurísticas para a troca de fase, a proposta em Bocanegra (2005), a proposta em Velazco et al. (2011) e uma nova proposta, baseada em valores de Ritz. Nas três heurísticas, o valor inicial para  $\eta$  é estimado a partir da média de elementos não nulos da matriz em cada linha (Mel) (BOCANEGRA, 2005). Assim:

$$Mel = \frac{|A\Theta A^T|}{m},$$

onde  $|A\Theta A^T|$  representa o número de elementos não nulos da matriz.

#### 3.3.1 Heurística proposta em (BOCANEGRA et al., 2007)

A heurística proposta em Bocanegra et al. (2007) está descrita no Algoritmo 2. A troca de fases ocorre quando o gap inicial for reduzido por um fator de  $10^6$ , o qual indica proximidade da solução ótima, ou o gradiente conjugado precondicionado pela FCC estiver perdendo eficiência e o  $\eta$  já tiver atingido o valor máximo estabelecido ( $\eta_{max}$ ). O valor  $\eta_{max}$  é atribuído de acordo com a memória disponível.

#### 3.3.2 Heurística proposta em (VELAZCO et al., 2011)

Em Velazco et al. (2011) a heurística proposta leva em consideração o número de iterações do método de gradientes conjugados ( $iterGC$ ), a dimensão da matriz ( $m$ ) e o valor de  $\eta$  máximo estabelecido  $\eta_{max}$ . Nela o valor de  $\eta$  será incrementado em 10 cada

---

**Algoritmo 2:** Heurística de troca de fase (BOCANEGRA et al., 2007).

---

**Entrada:**  $gap(x_k z_k)$ ,  $gap_0 = x_0^T z_0$ ,  $iterGC$  (iterações do gradiente conjugado),  $\eta$ ,  $\eta_{max}$

**Saída:**  $\eta$ , troca (variável booleana, 1 indica troca)

- 1 **se**  $gap < 10^{-6} gap_0$  ou ( $2^* iterGC \leq m$  e  $\eta = \eta_{max}$ ) **então**
- 2 | troca  $\leftarrow$  1
- 3 | Troca de fase
- 4 **fim**
- 5 **se**  $4 * iterGC \geq m$  e  $\eta < \eta_{max}$  **então**
- 6 |  $\eta \leftarrow \eta + 10$
- 7 **fim**

---

vez que o número de iterações de gradientes conjugados for superior a  $\frac{m}{6}$ . A troca de fases ocorre quando o número de iterações de gradientes conjugados for superior a  $m/6$  e o valor de  $\eta$  maior ou igual a  $\eta_{max}$ . O procedimento para troca é apresentado o algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3:** Heurística de troca de fase (VELAZCO et al., 2011).

---

**Entrada:**  $\eta_{max}$ ,  $\eta$ ,  $iterGC$ ,  $m$

**Saída:**  $\eta$ , troca

- 1 **se**  $6 * iterGC \geq m$  **então**
- 2 | **se**  $\eta < \eta_{max}$  **então**
- 3 | |  $\eta \leftarrow \eta + 10$  **senão**
- 4 | | | troca  $\leftarrow$  1
- 5 | | | Troca de fase
- 6 | | **fim**
- 7 | **fim**
- 8 **fim**

---

### 3.3.3 Heurística proposta nesse trabalho

Nesse trabalho propomos uma nova heurística, adaptada de Bocanegra (2005). Nela, o valor inicial de  $\eta$  é também  $\eta_0 = -Mel$ , mas a troca de fase utiliza uma estimativa do número de condição da matriz ( $\kappa$ ), o número de iterações do método de gradientes conjugados ( $iterGC$ ) e a dimensão da matriz ( $m$ ). O número de condição por sua vez será estimado usando o maior e o menor valor de Ritz da matriz preconditionada, portanto  $\kappa_2(A) \approx \frac{\theta_{max}}{\theta_{min}}$ .

A nova heurística é apresentada no Algoritmo 4. Os valores de  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $c$  foram estimados empiricamente. Foram testados valores de  $c = 1, 3, 5$  e  $7$ ,  $\beta = 4, 5$  e  $6$  e  $\gamma = 4, 5, 6$  e  $7$ . E os melhores valores encontrados foram para  $c = 5$ ,  $\gamma = 5$  e  $\beta = 5$ . A tolerância do método de gradientes conjugados ( $10^{tola}$ ) foi testada com valores de

$tola = -4, -6, -8$  e  $-12$  e os melhores resultados encontrados foram para  $tola = -8$ .

---

**Algoritmo 4:** Heurística proposta para troca de fases.

---

**Entrada:**  $iterGC, \eta, m, \kappa, \gamma, beta, c$

**Saída:**  $\eta, troca$

```

1 se  $\kappa > 10^\beta$  então
2   se  $\kappa > c * 10^\gamma$  então
3     troca ← -1
4     Troca de fase
5   fim
6 se  $3 * iterGC > m$  então
7    $\eta \leftarrow \eta + 10$ 
8 fim
9 fim
    
```

---

**Número de condição:** O número de condição apresenta relação com o número de iterações do método de gradientes conjugados. Quando maior o número de condição mais iterações do método de gradientes conjugados são necessárias. A Figura 1 ilustra essa situação.

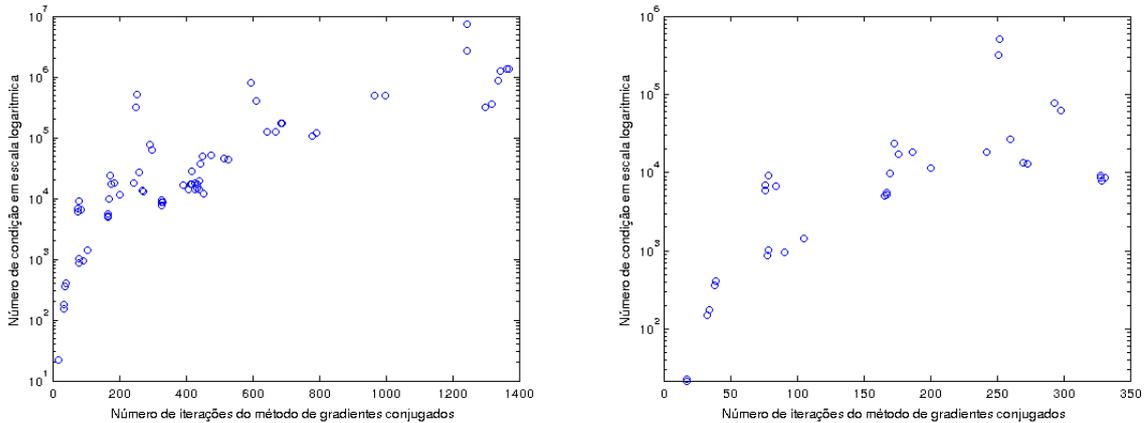


Figura 1 – Problema ken-18 (dimensão:  $78\ 538 \times 128\ 434$ )- na figura da esquerda a relação do número de condição em escala logarítmica com o número de iterações do método de gradientes conjugados. Para melhorar a visualização, na figura da direita está destacado o número de condição das iterações do método de gradientes conjugados limitados a 350 iterações. Resultado usando  $\gamma = 5$ ,  $tola = -8$ ,  $\beta = 5$  e  $c = 5$ .

Nota-se que quanto maior o número de condição, mais iterações de gradientes conjugados são necessárias para a convergência da solução. Esse comportamento é coerente com o que descreve a literatura onde matrizes mal condicionadas demandam mais iterações do método de gradientes conjugados.

**O valor de  $\eta$ :** O valor do parâmetro  $\eta$  influencia no número de iterações

do método de gradientes conjugados, pois quando valores maiores de  $\eta$  são permitidos a qualidade do preconditionador tende a aumentar e portanto necessita menos iterações do método de gradientes conjugados. Contudo, o incremento no valor de  $\eta$  acarreta custo de memória e crescimento do tempo de cálculo do fator controlado de Cholesky. Portanto, é importante criar um critério para o acréscimo de  $\eta$  que possibilite construir melhores preconditionadores com o menor custo computacional. Esse comportamento se verifica antes da troca de fase e está representado na Figura 2. Para maiores valores de  $\eta$  o número de iterações do método de gradientes conjugados é menor.

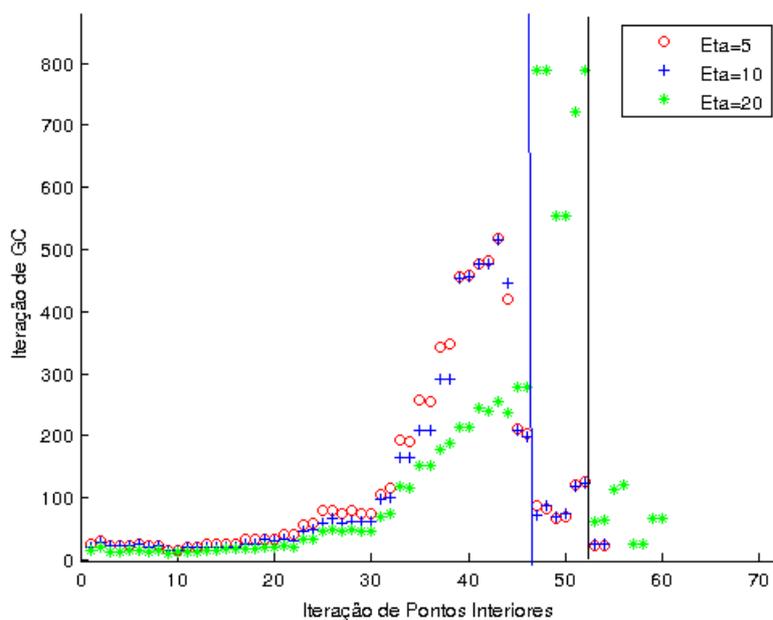


Figura 2 – Problema 25fv47 (dimensão:  $788 \times 1843$ ) - influência do valor de  $\eta$  no número de iterações do método de gradientes conjugados. A linha azul representa o momento de troca de fase para  $\eta = 5$  e  $10$  e a linha preta para  $\eta = 20$ .

**Número de iterações do método de gradientes conjugados:** Como foi notado na Figura 1 existe uma relação direta entre o número de condição e o número de iterações do método de gradientes conjugados. Existe ainda a relação entre o valor de  $\eta$  com ambos os quesitos anteriores. Assim, o número de iterações do método de gradientes conjugados é um indicativo da qualidade do preconditionador (que está diretamente relacionada ao valor de  $\eta$ ) e do grau de mal condicionamento da matriz. Para números elevados de iterações do método de gradientes conjugados percebe-se que o preconditionamento não está sendo realizado de maneira efetiva e portanto deve-se incrementar o valor de  $\eta$ .

**Dimensão da matriz ( $m$ ):** Em aritmética exata o método de gradientes conjugados converge em  $n$  passos, onde  $n$  é o número de autovalores distintos da matriz. No pior caso, a matriz de dimensão  $m \times m$  pode ter  $m$  autovalores distintos. Assim, existe uma relação da dimensão da matriz com a convergência do método de gradientes

conjugados. Em aritmética de ponto flutuante essa relação não é tão simplificada, mas a dimensão da matriz continua sendo um parâmetro para a análise da convergência. Como a matriz está precondicionada, espera-se que o número de iterações seja inferior a dimensão da matriz, pois deve haver *clusters* de autovalores. Esse comportamento foi observado durante os testes, pois nenhum dos sistemas necessitou de mais de  $m$  iterações para convergir.

# Capítulo 4

## Resultados Computacionais

### 4.1 Problemas testados

Os problemas testados foram retirados de algumas bibliotecas ([BROWNE et al., 1995](#); [MAROS](#); [MÉSZÁROS, 1999](#)). Foram selecionados 86 problemas de dimensões variadas e com diferentes graus de esparsidade. Estes problemas estão descritos na Tabela 1. Destes, selecionamos 22 (Tabela 2) para apresentar os resultados mais detalhadamente.

25fv47	cycle	ken-18	scorpion	stocfor1
80bau3b	czprob	maros	scr15	stocfor2
a1	d6cube	maros-r7	scr20	truss
adlittle	degen2	nesm	scrs8	tuff
afiro	degen3	osa-07	scsd1	wood1p
agg	e226	osa-14	sctap1	woodw
agg2	els19	pds-02	sctap2	
agg3	ffff800	pds-06	sctap3	
bandm	finnis	pds-10	share1b	
beaconfd	forplan	pds-20	share2b	
blend	ganges	pilotnov	shell	
bnl1	gfrdpnc	sc50a	ship04l	
bnl2	grow7	sc50b	ship04s	
boeing1	grow15	sc105	ship08l	
boeing2	grow22	sc205	ship08s	
capri	israel	scagr7	ship12l	
cre-a	kb2	scagr25	ship12s	
cre-b	ken11	scfxm1	sierra	
cre-c	ken13	scfxm2	standata	
cre-d	ken-07	scfxm3	standgub	

Tabela 1 – Lista dos 86 problemas testados.

Problema	Linhas	Colunas	Problema	Linhas	Colunas
25fv47	788	1843	grow22	440	946
80bau3b	2140	11066	ken-13	22365	42659
a1	62	82	ken-07	1388	2613
agg2	541	750	ken-18	78538	128434
agg3	514	750	pds-06	9145	28472
bnl2	1964	4008	pds-10	15637	48780
cre-b	2370	5412	pds-20	32276	106180
cre-d	4094	28601	pilotnov	848	2117
cycle	1420	2773	scr15	2234	6210
finnis	438	935	scr20	5079	15980
grow15	300	645	scrs8	421	1199

Tabela 2 – Dimensão dos problemas destacados durante o texto.

## 4.2 Implementação

O PCx (CZYZYK et al., 1999) é um código que utiliza o método preditor-corretor de pontos interiores para resolução de problemas de programação linear. Foi desenvolvido no *Optimization Technology Center*, em parceria com *Argonne National Laboratory* e a *Northwestern University*. Os experimentos numéricos foram realizados utilizando a versão do PCx modificada por Bocanegra (2005).

Na versão utilizada os sistemas lineares são resolvidos a partir do método de gradientes conjugados preconditionados. O preconditionamento é feito de forma híbrida, sendo utilizado a FCC nas primeiras iterações e o preconditionador separador nas últimas (BOCANEGRA, 2005). A nova heurística para troca de fases (Algoritmo 4) foi implementada no código. Por facilidade, denominaremos a heurística de Bocanegra et al. (2007) por heurística 1 e a heurística de Velazco et al. (2011) por heurística 2.

Os valores de Ritz foram calculados com a subrotina *dsterf* do LAPACK, uma biblioteca de rotinas para resolução de problemas de álgebra linear (ANDERSON et al., 1999). Essa rotina calcula todos os autovalores da matriz  $T$ . A qualidade da aproximação entre os autovalores da matriz e os valores de Ritz foi analisada para problemas pequenos. Os autovalores foram obtidos a partir da rotina *eig* do software Matlab e a comparação foi feita a partir do erro relativo. Os experimentos computacionais foram realizados em um *desktop* com processador Intel i7 com 8Gb de memória, em ambiente Linux.

## 4.3 Qualidade da aproximação dos valores de Ritz

A qualidade da aproximação foi mensurada através do erro relativo entre os valores de Ritz e os autovalores encontrados pela rotina *eig* do Matlab. O custo computacional de determinar os autovalores de matrizes de maior dimensão limitou o

experimento a problemas menores. Para essa análise foram utilizados quatro problemas testes pequenos. Os testes foram realizados com os parâmetros  $\eta$  entre 0, 5, 10 e a tolerância do método de gradientes conjugados (*tola*) entre  $10^{-4}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-8}$  e  $10^{-12}$ . Na Tabela 3 encontram-se alguns resultados dos testes realizados para o problema a1.

	$\eta$		
<i>tola</i>	0	5	10
$10^{-4}$	5,12878	1,54527	1,5452
$10^{-6}$	6,7409	1,52309	1,10855
$10^{-8}$	5,12878	1,54527	1,10095
$10^{-12}$	12,6647	12,6647	1,10859

Para os valores de  $\eta = 20$  o problema foi resolvido de maneira direta.

Tabela 3 – Problema a1 (dimensão:  $62 \times 82$ ) - Resultados da diferença entre número de condição calculado usando valores de Ritz e o calculado pelo Matlab, considerando a variação dos parâmetros  $\eta$  e *tola*.

As melhores aproximações, considerando a qualidade da aproximação, foram encontradas para os valores de  $\eta = 10$ . Porém, quando levado em consideração também o tempo, os melhores resultados são para  $\eta = 5$  e *tola* =  $10^{-6}$ . Os resultados para as aproximações, com  $\eta = 5$  e *tola* =  $10^{-6}$ , estão na Tabela 4.

	Maior Autovalor		Menor Autovalor	
Problema	Melhor Caso	Pior Caso	Melhor Caso	Pior Caso
afiro	0,2%	1,55 %	0,09%	1,01 %
scsd1	2,86%	6,34%	6,62%	7,09 %
sc50a	0,94%	33,5 %	0,42 %	23,4 %
a1	0,09%	30,5%	0,084 %	27,6%

Tabela 4 – Comparativo do erro relativo dos resultados obtidos com a rotina *dsterf* em relação aos obtidos com a rotina *eig*.

A Figura 3 ilustra a distribuição dos maiores e menores autovalores e valores de Ritz no decorrer das iterações do método de pontos interiores na solução do problema afiro. Pode-se observar que para 7 das 12 iterações os maiores e menores valores de Ritz e autovalores estão praticamente sobre o mesmo pontos e portanto nessas iterações o número de condição da matriz dos coeficientes está muito próximo de 1, é possível afirmar portanto que o condicionador teve excelente resultado. As aproximações menos satisfatórias ocorreram para os menores valores de Ritz, como podem ser notado nas iterações 2, 9 e 10 do método de pontos interiores. A maior dificuldade na aproximação do menor autovalor já havia sido citada na literatura (DAVIDSON, 1975).

A distribuição dos valores de Ritz da matriz também foi analisada. Na Figura 4 estão os resultados obtidos na solução do problema sc50a. A existência de agrupamentos

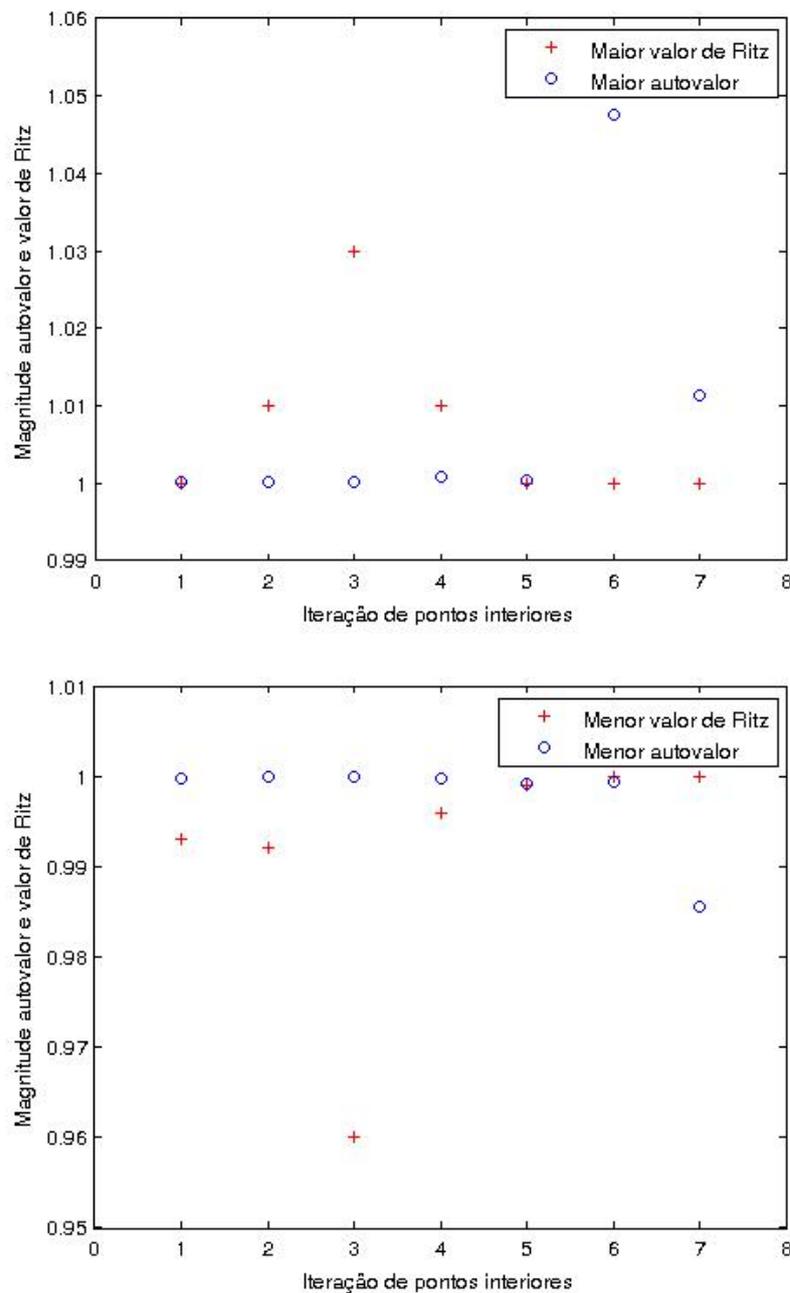


Figura 3 – Problema afiro (dimensão: 27 x 51): distribuição dos valores de Ritz e autovalores, para o maior (acima) e o menor (abaixo), no decorrer das iterações do método de pontos interiores.

de autovalores, em teoria, facilita a convergência do método de gradientes conjugados. Na Figura 4 nota-se que as primeiras iterações têm autovalores próximos da unidade e agrupados. No decorrer das iterações do método de pontos interiores os autovalores vão se desagrupando e o menor autovalor vai se aproximando de zero, o que faz o número de condição tender a infinito. Observa-se também que o número de iterações do método de gradientes conjugados é sensível ao menor autovalor e sempre que esse se aproxima de zero o número de iterações aumenta. Isso pode ser visto nas iterações 14 e 15, onde o maior

autovalor é o mesmo, contudo, como o menor autovalor da iteração 15 está mais próximo de zero, ela requer o dobro de iterações de gradientes conjugados.

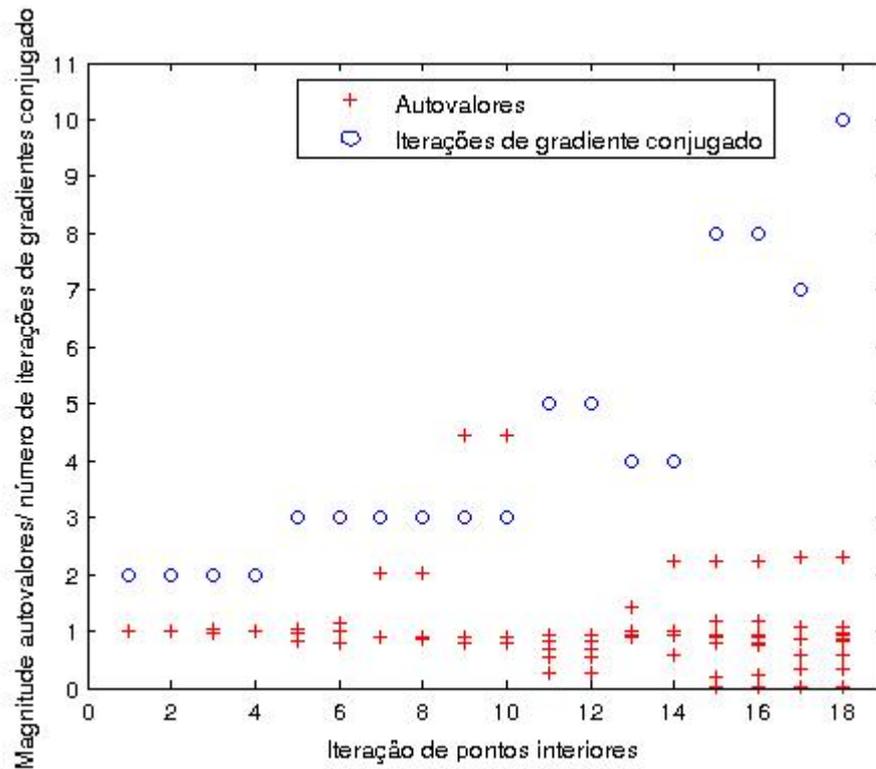


Figura 4 – Problema sc50a (dimensão: 49 x 77): distribuição dos valores de Ritz no decorrer das iterações do método de pontos interiores.

Durante a implementação os parâmetros  $\eta$  e a tolerância do método de gradientes conjugados (*tola*) foram alterados. A influência do parâmetro  $\eta$  pode ser observada na Figura 5. Nota-se que as primeiras iterações do método de pontos interiores apresentam menos iterações do método de gradientes conjugados. A partir do momento que esse número de iterações começa a aumentar ele cresce de forma exponencial culminando no momento da troca de fase. Logo após a troca de fase, indicada pelas linhas verticais no gráfico, o número de iterações do método de gradientes conjugados voltar a diminuir, caindo para os níveis iniciais. Observe que para o problema ken-18, na Figura 5, após a mudança de fase o número de iterações do método de gradientes conjugados volta a crescer de forma exponencial. Durante a primeira fase do condicionamento, para  $\eta = 20$  há menos iterações do método de gradientes conjugados, o que era esperado uma vez que o fator controlado de Cholesky é mais próximo do fator de Cholesky.

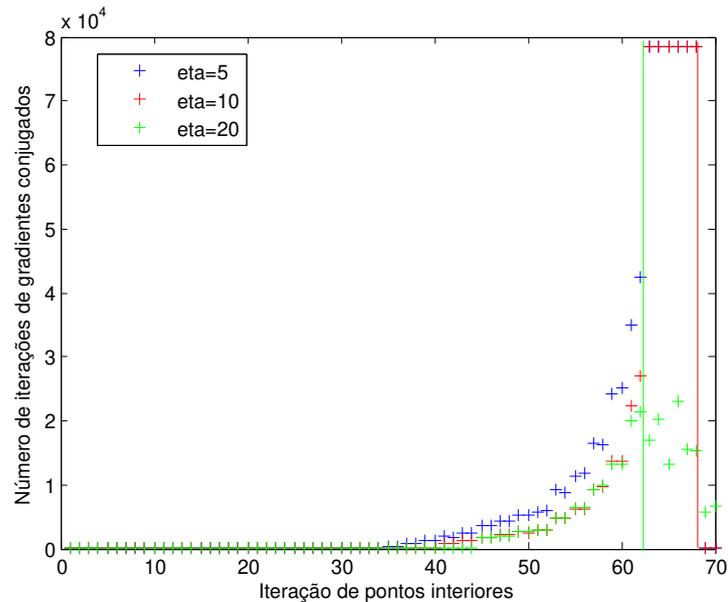


Figura 5 – Problema ken-18 (dimensão: 78538 x 128434 ) - Relação entre as iterações do método de pontos interiores e do método de gradientes conjugados conforme a variação do parâmetro  $\eta$  e  $tola = 10^{-6}$ . Em destaque as linhas vermelha e verde mostram o momento da troca de fase para os valores de  $\eta = 10$  e 20 respectivamente.

## 4.4 Influência do condicionamento na distribuição dos valores de Ritz

Para analisar a influência do condicionamento na distribuição dos valores de Ritz os parâmetros dos problemas foram alterados forçando todos a trocarem de fase. O comportamento esperado é que a distribuição dos valores de Ritz vá se espaçando e quando ocorre a troca de fase os valores de Ritz voltem a se agrupar. Em relação ao número de condição, em específico, é esperado que ele se aproxime de zero no decorrer das iterações condicionadas pela FCC e, ao mudar para o condicionador separador, ele se afaste de zero. O comportamento descrito acima é observado na Figura 6, para essa análise os parâmetros foram  $\gamma = 7$ ,  $c = 5$  e  $\beta = 7$  garantindo a ocorrência da troca de fase.

Figura 6 – Problema ken18 (dimensão: 78538 x 128434): distribuição dos valores de Ritz nas iterações 15 , 25 e 32 do método de pontos interiores, respectivamente. A troca de fase ocorreu na iteração 31.

### 4.4.1 Falhas na diagonal

A qualidade da aproximação também depende do número de correções na diagonal da matriz. Dos 86 problemas testados, 45 apresentam correções na diagonal quando resolvidos com a heurística proposta. Por esse motivo foi analisado a qualidade

dos valores de Ritz após essas correções. Essa análise de qualidade foi feita a partir da comparação dos valores de Ritz do problema após as correções com os autovalores obtidos pela rotina *eig*, da antes das correções. Esses resultados se encontram na Tabela 5, nela podemos notar que o número maior de correções está relacionado a piores aproximações. Destacando o problema *pilotnov* que apresenta 6 correções, onde a diferença absoluta entre autovalor e valor de Ritz é superior a  $10^4$  para o maior autovalor. Já para o problema *scorpion*, que apresenta somente 1 correção, a diferença absoluta é inferior a 5.

Problema	Correções	Maior		Menor	
		Valor de Ritz	Autovalor	Valor de Ritz	Autovalor
scorpion	1	7,11	$1,19 \cdot 10^1$	$1,49 \cdot 10^{-4}$	$4,96 \cdot 10^{-3}$
scagr7	1	4,15	$2,54 \cdot 10^3$	$5,87 \cdot 10^{-4}$	$4,14 \cdot 10^1$
sc105	4	$3,30 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10^4$	$5,31 \cdot 10^{-6}$	2,43
sc105	4	$3,30 \cdot 10^2$	$1,18 \cdot 10^4$	$5,31 \cdot 10^{-6}$	2,43
sc50a	5	$3,24 \cdot 10^1$	$4,68 \cdot 10^3$	$8,05 \cdot 10^{-6}$	4,96
wood1p	5	$6,09 \cdot 10^1$	$1,69 \cdot 10^4$	$4,73 \cdot 10^{-2}$	$8,27 \cdot 10^{-2}$
pilotnov	6	1,31	$9,07 \cdot 10^4$	$2,74 \cdot 10^{-6}$	$4,13 \cdot 10^{-2}$

Tabela 5 – Comparação entre o autovalores da matriz antes da correção com os valores de Ritz depois da correção das falhas na diagonal.

A Figura 7 apresenta a influência das heurísticas de troca de fases no número de correções na diagonal. Entre os autovalores da matriz sem correções e os valores de Ritz estimados depois das correções existe uma variação significativa de modo que, em geral, nem mesmo a ordem de grandeza é mantida. Com relação ao número total de correções, considerando os 86 problemas, a heurística 1 apresentou 3630 enquanto a heurística proposta apresentou 1632 correções, ou seja, a heurística 1 apresentou 2 vezes mais correções, como pode ser visto na Figura 7. A heurística 2 realizou 4291 correções, ou seja, 2,6 vezes mais que a heurística proposta. Contudo, na heurística 2 as iterações apresentam mais frequentemente de 1 a 5 correções enquanto a heurística 1 e a heurística proposta estão entre 5 e 10 correções.

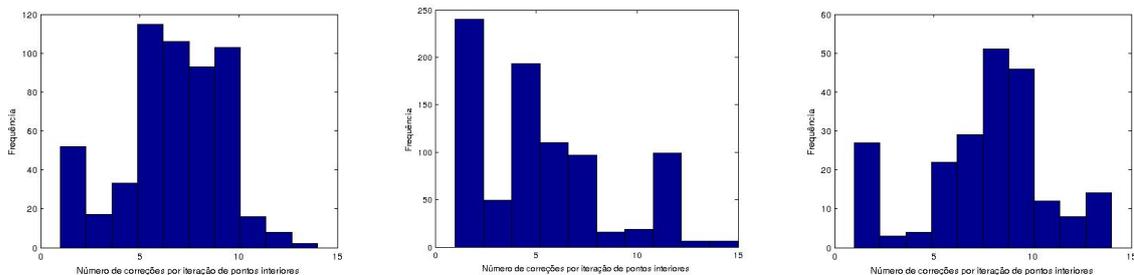


Figura 7 – Distribuição do número de correções por iteração para a heurística 1 (esquerda), heurística 2 (centro) e para a heurística proposta (direita).

## 4.5 Comparação entre as heurísticas de troca de fase

Nos testes realizados com problemas pequenos notamos que os valores de Ritz apresentaram erro relativo médio inferior a 20% e o número de condição foi estimado a partir deles. Os melhores desempenhos com relação ao tempo computacional e número de problemas com solução ótima foram encontrados para  $c = 5$ ,  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 5$  e o valor do parâmetro  $\eta$  acrescido como no algoritmo de Bocanegra et al. (2007) e considerando  $tola$  inferior a  $10^{-6}$ .

O número de iterações do método de gradientes conjugados ao final das iterações do método de pontos interiores podem ser analisado na Figura 8. Os 86 problemas testados nesse trabalho foram numerados em correspondência com a ordem alfabética. Nota-se que as heurísticas 1 e a heurística proposta apresentam comportamentos semelhantes para a maioria dos problemas testados. A heurística 2 apresenta menor número de iterações do método de gradientes conjugados quando comparada as outras duas heurísticas.

Os resultados de alguns dos problemas testados estão reportados na Tabela 6. As colunas Heurística 1, Heurística 2 e Heurística proposta, representam os resultados referentes as heurísticas apresentadas nos Algoritmos 2, 3 e 4 respectivamente. São comparados o tempo computacional total em segundos (colunas Tempo(s)) e a iteração em que ocorreu a troca de fases (colunas Troca).

Note que o problema ken-18 mesmo não trocando de fase segundo a heurística proposta apresenta tempo computacional inferior às duas outras heurísticas, 20 vezes menor que a heurística 1 e 5 vezes menor que a heurística 2. Outro comportamento a ser destacado é do problema pds-20, que nas heurísticas 1 e 2 não troca de fase e na heurística proposta isso ocorre reduzindo o tempo computacional em 3,2 vezes quando comparado com a heurística 1 e em 1,8 vezes quando comparado com a heurística 2.

Contudo, os problemas testados que haviam sido resolvidos pelas heurísticas 1 e 2, como grow15 e grow22, não atingiram o ótimo na heurística proposta. Em contra partida os problemas como 25fv47, 80bau3b, agg2, agg3, bnl2, cycle, finnis, scr15 e scrs8 não atingiram o ótimo com a heurística 1 ou 2 e foram resolvidos no ótimo pela heurística proposta.

Os resultados do conjunto dos 86 problemas testados serão apresentado levando em consideração o número total de iterações do método do gradientes conjugados, o número de problemas que trocou de fase, quantos deles atingiram a otimalidade e o tempo de resolução. Esses resultados se encontram na Tabela 7. A heurística proposta quando comparada a heurística 1 apresenta redução de 80% no número de iterações do método de gradientes conjugados e em relação a heurística 2 apresenta aproximadamente 40%. Ao analisar o tempo computacional, o da heurística 1 é 8,9 vezes maior que o da heurística proposta e o da heurística 2 é 3 vezes maior. O número de problemas em que ocorreu a

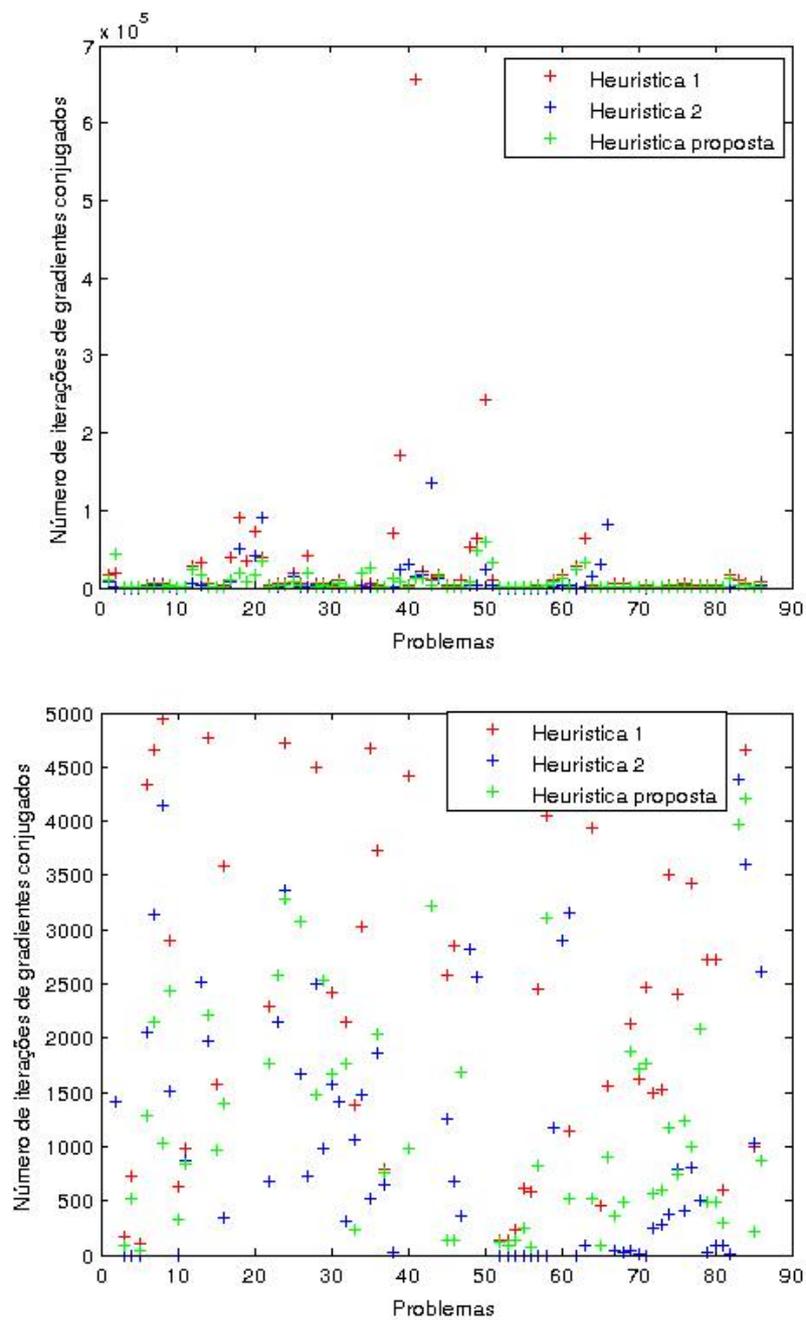


Figura 8 – A influência da heurística no número de total iterações do método de gradientes conjugados para cada um dos problemas testados, considerando  $\eta = 5$  e  $tola = 10^{-6}$ . A primeira figura mostra o total de iterações de todos os problemas e a segunda figura mostra os problemas com até 5000 iterações.

troca de fases aumentou em 85% com a heurística proposta em relação a heurística 1 e 57% em relação a heurística 2. Considerando os problemas resolvidos no ótimo em relação a heurística 1 houve um aumento de 4,9% e de pouco mais de 1% para a heurística 2.

Problema	Heurística 1		Heurística 2		Heurística proposta	
	Troca	Tempo(s)	Troca	Tempo(s)	Troca	Tempo(s)
25fv47	16	1,99	15	5,97*	<b>17</b>	<b>1,4</b>
80bau3b	-	3,72*	-	2,03*	<b>11</b>	<b>10,07</b>
agg2	-	<b>0,27</b>	-	0,39	17	0,36
agg3	-	0,41*	-	0,66*	<b>16</b>	<b>0,3</b>
bnl2	25	4,97	-	1,66*	<b>25</b>	<b>3,2</b>
cre-b	28	65,06	25	49,12	<b>15</b>	<b>32,24</b>
cre-d	28	41,7	25	33,55	<b>7</b>	<b>18,93</b>
cycle	9	6,31	7	15,8*	<b>8</b>	<b>5,49</b>
finnis	17	0,22	19	0,2	<b>14</b>	<b>0,18</b>
grow15	-	0,12	-	<b>0,06</b>	16	0,82*
grow22	-	0,27	-	<b>0,12</b>	19	1,6*
ken-13	24	222,46	22	81,06	<b>13</b>	<b>19,79</b>
ken-07	-	0,35	-	<b>0,07</b>	13	0,12
ken-18	31	3591,49	-	930,91	-	<b>175,57</b>
pds-06	-	26,12	-	14,8	<b>26</b>	<b>11,41</b>
pds-10	-	55,19	-	30,14	<b>43</b>	<b>26,4</b>
pds-20	-	607,42	-	355,13	<b>34</b>	<b>188,93</b>
pilotnov	-	1,04*	-	<b>0,8</b>	26	1,45
scr15	<b>10</b>	<b>9,91</b>	11	14,07	11	13,28
scr20	12	109,85*	13	91,52	<b>12</b>	<b>82,27</b>
scrs8	-	0,16*	-	0,04*	<b>20</b>	<b>0,06</b>

\* representa os problemas que não atingiram o ótimo

- representa os problemas em que não trocaram de fase

Tabela 6 – Comparação do tempo computacional, em segundos, e a iteração que ocorreu troca de fase, considerando  $tola = 10^{-8}$ ,  $\eta = 5$  e  $\eta_{max} = 20$ .

	Heurística 1	Heurística 2	Heurística proposta
Problemas testados que atingiram o ótimo	81	80	84
Problemas testados que trocaram de fase	40	47	74
Iterações de gradientes conjugados	2 070 769	681 771	422 467
Tempo (segundos)	4903	1674	546

Tabela 7 – Comparação dos resultados do conjunto quando resolvidos pelas heurísticas 1 e 2 e pela heurística proposta para  $\eta = 5$  e  $tola = 10^{-8}$ .

## Capítulo 5

# Conclusões e trabalhos futuros

Nesse trabalho foi apresentada uma heurística para a troca de fase do preconditionador híbrido que foi aplicada ao método de gradientes conjugados. A heurística proposta tem como base a estimativa do número de condição obtida através dos valores de Ritz.

No que se refere aos valores de Ritz encontrados com a rotina *dsterf* eles se mostraram boas aproximações para as quatro instâncias testadas como pode ser visto na Tabela 4 e na Figura 3. O número de correções na diagonal prejudica a aproximação dos valores de Ritz, dificultando portanto o bom desempenho da heurística apresentada.

A heurística proposta nesse trabalho mostrou bons resultados acarretando redução no tempo computacional e no número de iterações de gradientes conjugados na solução do conjunto de problemas quando comparado as heurística 1 e 2.

Além disso, a heurística proposta mudou o critério que dá acesso ao acréscimo de  $\eta$ , assim o número de iterações do método de gradientes conjugados foi diferente entre heurística 1 e a heurística proposta mesmo nas iterações anteriores a mudança de fase. Essa diferença entre o número de iterações do método de gradientes conjugados auxiliou na melhora do tempo computacional. Assim, pode-se afirmar que a heurística baseada em valores de Ritz se mostrou eficiente.

A existência de uma relação entre o número de iterações do método de gradientes conjugados e o menor valor de Ritz foi observada e pode ser considerada como outro critério para a troca de fase. O desenvolvimento de uma nova heurística que considere a distribuição dos valores de Ritz da matriz e experimentos numéricos com problemas de maior dimensão serão considerados em trabalhos futuros.

# Referências

- ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C.; BLACKFORD, S.; DONGARRA, J.; CROZ, J. D.; GREENBAUM, A.; HAMMARLING, S.; MCKENNEY, A.; SORENSEN, D. *LAPACK Users' guide*. [S.l.]: Siam, 1999.
- ANSTREICHER, K. M. Linear programming in  $O(n^3/\ln n)$  operations. *SIAM Journal on Optimization*, SIAM, v. 9, n. 4, p. 803–812, 1999.
- BOCANEGRA, S. *Algoritmos de Newton-Krylov preconditionados para métodos de pontos interiores*. Tese (Doutorado), 2005.
- BOCANEGRA, S.; CAMPOS, F.; OLIVEIRA, A. R. Using a hybrid preconditioner for solving large-scale linear systems arising from interior point methods. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 36, n. 2-3, p. 149–164, 2007.
- BRANDTS, J.; VORST, H. van der. The convergence of krylov methods and ritz values. In: *Conjugate gradient algorithms and finite element methods*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 47–68.
- BROWNE, S.; DONGARRA, J.; GROSSE, E.; ROWAN, T. The netlib mathematical software repository. *D-Lib Magazine*, Sep, 1995.
- CAMPOS, F. F. *Analysis of conjugate gradients-type methods for solving linear equations*. Tese (Doutorado) — University of Oxford, 1995.
- CAMPOS, F. F.; ROLLETT, J. S. *Controlled Cholesky factorisation for preconditioning the conjugate gradient method*. [S.l.]: Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group, 1995.
- CZYZYK, J.; MEHROTRA, S.; WAGNER, M.; WRIGHT, S. J. Pcx: An interior-point code for linear programming. *Optimization Methods and Software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 397–430, 1999.
- DAVIDSON, E. R. The iterative calculation of a few of the lowest eigenvalues and corresponding eigenvectors of large real-symmetric matrices. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 17, n. 1, p. 87–94, 1975.
- DIKIN, I. Iterative solution to problems of linear and quadratic programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, MEZHODUNARODNAYA KNIGA 39 DIMITROVA UL., 113095 MOSCOW, RUSSIA, v. 174, n. 4, p. 747, 1967.
- DIKIN, I. On the speed of an iterative process. *Upravlyaemye Sistemy*, v. 12, p. 54–60, 1974.

- D'APUZZO, M.; SIMONE, V. D.; SERAFINO, D. D. On mutual impact of numerical linear algebra and large-scale optimization with focus on interior point methods. *Computational Optimization and Applications*, Springer, v. 45, n. 2, p. 283–310, 2010.
- GHIDINI, C. T.; OLIVEIRA, A. R. L.; SILVA, J.; VELAZCO, M. Combining a hybrid preconditioner and a optimal adjustment algorithm to accelerate the convergence of interior point methods. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 436, n. 5, p. 1267–1284, 2012.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. *Matrix computations*. [S.l.]: JHU Press, 2012.
- HESTENES, M. R.; STIEFEL, E. *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. [S.l.]: NBS, 1952.
- JIA, Z.; STEWART, G. An analysis of the rayleigh–ritz method for approximating eigenspaces. *Mathematics of Computation*, v. 70, n. 234, p. 637–647, 2001.
- KARMAKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In: ACM. *Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing*. [S.l.], 1984. p. 302–311.
- KERSHAW, D. S. The incomplete cholesky—conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 43–65, 1978.
- KNYAZEV, A. V. Toward the optimal preconditioned eigensolver: Locally optimal block preconditioned conjugate gradient method. *SIAM journal on scientific computing*, SIAM, v. 23, n. 2, p. 517–541, 2001.
- KOJIMA, M.; MIZUNO, S.; YOSHISE, A. *A primal-dual interior point algorithm for linear programming*. [S.l.]: Springer, 1989.
- KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. Nonlinear programming. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1951. p. 481–492. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.bsmsp/1200500249>>.
- KUSHIDA, N. Condition number estimation of preconditioned matrices. *PloS one*, Public Library of Science, v. 10, n. 3, 2015.
- LANCZOS, C. *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*. [S.l.]: United States Governm. Press Office Los Angeles, CA, 1950.
- LIN, C.-J.; MORÉ, J. J. Incomplete cholesky factorizations with limited memory. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 21, n. 1, p. 24–45, 1999.
- LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and nonlinear programming*. [S.l.]: Springer, 1984.
- MAROS, I.; MÉSZÁROS, C. A repository of convex quadratic programming problems. *Optimization Methods and Software*, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 671–681, 1999.
- MEHROTRA, S. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM J. Optim.* 2, Elsevier, p. 575–601, 1992.

- MEIJERINK, J. A.; VORST, H. A. van der. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric  $M$ -matrix. *Mathematics of computation*, v. 31, n. 137, p. 148–162, 1977.
- MOLER, C. B.; STEWART, G. W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 10, n. 2, p. 241–256, 1973.
- NASH, J. C. The (dantzig) simplex method for linear programming. *Computing in Science & Engineering*, AIP Publishing, v. 2, n. 1, p. 29–31, 2000.
- OLIVEIRA, A. R. L.; SORENSEN, D. C. A new class of preconditioners for large-scale linear systems from interior point methods for linear programming. *Linear Algebra and its applications*, Elsevier, v. 394, p. 1–24, 2005.
- PAIGE, C. C.; PARLETT, B. N.; VORST, H. A. Van der. Approximate solutions and eigenvalue bounds from krylov subspaces. *Numerical linear algebra with applications*, Wiley Online Library, v. 2, n. 2, p. 115–133, 1995.
- POTRA, F. A.; WRIGHT, S. J. Interior-point methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 124, n. 1, p. 281–302, 2000.
- SHANNO, D. Who invented the interior-point method? *Documenta mathematica, optimization stories, 21st ISMP Berlin*, p. 55–64, 2012.
- SLUIS, A. Van der; VORST, H. A. van der. The rate of convergence of conjugate gradients. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 48, n. 5, p. 543–560, 1986.
- STRAKOŠ, Z. On the real convergence rate of the conjugate gradient method. *Linear algebra and its applications*, Elsevier, v. 154, p. 535–549, 1991.
- SÜLI, E.; MAYERS, D. F. *An introduction to numerical analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 2003.
- TENG, Z.; ZHANG, L.; LI, R.-C. Accuracy of rayleigh–ritz approximations. Department of Mathematics, University of Texas at Arlington, 2015.
- VECHARYNSKI, E.; YANG, C.; PASK, J. E. A projected preconditioned conjugate gradient algorithm for computing many extreme eigenpairs of a hermitian matrix. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 290, p. 73–89, 2015.
- VELAZCO, M.; OLIVEIRA, A. R. L.; CAMPOS, F. F. A note on hybrid preconditioners for large-scale normal equations arising from interior-point methods. *Optimization Methods & Software*, Taylor & Francis, v. 25, n. 2, p. 321–332, 2010.
- VELAZCO, M. I.; OLIVEIRA, A. R. L. d.; CAMPOS, F. F. Heuristics for implementation of a hybrid preconditioner for interior-point methods. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 31, n. 3, p. 579–591, 2011.
- WILKINSON, J. H. *The algebraic eigenvalue problem*. [S.l.]: Clarendon Press Oxford, 1965.
- ZADEH, N. What is the worst case behavior of the simplex algorithm. *Polyhedral computation*, v. 48, p. 131–143, 1980.

---

ZHANG, T.; GOLUB, G.; LAW, K. Subspace iterative methods for eigenvalue problems. *Linear algebra and its applications*, Elsevier, v. 294, n. 1, p. 239–258, 1999.