

SOBRE UM PROBLEMA NÃO LINEAR
EM MECÂNICA DOS SOLOS

MARIA CRISTINA CUNHA BEZERRA

Orientador: Marco Antonio Raupp

Tese apresentada ao Instituto
de Matemática, Estatística e
Ciência da Computação da Uni
versidade Estadual de Campinas,
como requisito parcial para a
obtenção do título de Doutor
em Matemática.

CAMPINAS
Estado de São Paulo - Brasil
1979

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

I N D I C E

INTRODUÇÃO.....	i
CAPÍTULO 1	
DESCRIÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	1
CAPÍTULO 2	
ASPECTOS TEÓRICOS.....	17
CAPÍTULO 3	
ASPECTOS NUMÉRICOS.....	62
1 - INTRODUÇÃO.....	62
2 - O ESQUEMA.....	62
3 - ESTABILIDADE DO ESQUEMA DE EVOLUÇÃO.....	77
4 - CONVERGÊNCIA DO ESQUEMA NUMÉRICO.....	92
BIBLIOGRAFIA.....	107

AGRADECIMENTOS

- ao Prof. Marco Antonio Raupp por ter me proporcionado a chance de trabalhar nesta área tão fascinante da matemática e pela orientação durante a elaboração desta tese;
- aos professores Carlos Moura e José Vitório Zago pelas sugestões e comentários;
- a todos os professores e colegas do IMECC que, de alguma forma, colaboraram para que este trabalho se tornasse realidade, especialmente os professores Dicesar Lass Fernandez, Carlos Segovia Fernández;
- ao Paulo Cesar pela ajuda e estímulo constantes;
- aos meus pais, pelo exemplo vivo que sempre representaram para mim;
- à Antonia que há dez anos vem me oferecendo tranquilidade por dedicar-se tão bem aos meus filhos.

ao Miguel, meu pai

O problema da simulação do movimento de penetração de uma estaca unidimensional no solo, sob a ação de um martelo bate-estacas, foi estudado recentemente pelos professores Marco Antonio Raupp, Carlos Moura e Raul Feijó do Laboratório de Cálculo do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas.

Em um primeiro artigo RAUPP - FEIJÓ - MOURA [19] propõem um modelo consistindo, em última análise, de uma inequação variacional, e apresentam resultados teóricos de existência unicidade e estabilidade da solução, caracterizando um problema matemático bem posto.

Em dois outros trabalhos MOURA - FEIJÓ - RAUPP [12], RAUPP - FEIJÓ - MOURA [20] eles consideram algoritmos para o cálculo da solução de tal problema bem como apresentam resultados numéricos de alguns experimentos computacionais. Dois tipos de algoritmos são analisados: um Uzawa para o cálculo de pontos de sela e no outro regularização mais elementos finitos no espaço e preditor corretor no tempo.

No presente trabalho nós nos propomos a generalizar os resultados obtidos considerando a estaca como um corpo tridimensional.

Do ponto de vista da mecânica as diferenças básicas entre o modelo unidimensional e o tridimensional são duas. Em primeiro lugar o atrito, que no caso unidimensional é modelado como força de massa, no caso tridimensional é representado por uma

força superficial. Além disto, no modelo unidimensional as pressões normais exercidas pelo solo sobre a estaca se anulam, por atuarem em direções opostas em cada partícula da estaca que penetrou no solo. Isto não ocorre no problema tridimensional, provocando o surgimento de mais um funcional, não linear e não diferenciável, na inequação variacional que representará o problema.

A apresentação do presente trabalho será feita em três capítulos.

No primeiro capítulo descreveremos o problema físico. Utilizaremos as equações da mecânica, da elasticidade e descreveremos as forças que atuam na estaca, para estabelecer uma formulação para o problema. A utilização da lei de Coulomb na caracterização da força de atrito faz com que o nosso problema seja descrito por uma inequação variacional que inclui funcionais não lineares e não diferenciáveis.

No capítulo seguinte desenvolveremos a teoria matemática do problema, estabelecendo resultados de existência e unicidade da solução análogos aos obtidos para o problema unidimensional. A técnica utilizada consiste em regularizar os funcionais não diferenciáveis e aplicar o método de Faedo - Galerkin, para então lançar mão de argumentos de compacidade adequados.

No terceiro capítulo faremos a análise numérica do problema, apresentando um algoritmo para o cálculo de soluções aproximadas. São estabelecidos resultados de estabilidade e convergência do esquema numérico proposto.

CAPÍTULO 1

DESCRIÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Nosso propósito é analisar o movimento de um corpo sólido tridimensional (estaca) que penetra no solo impulsionado pela ação de um agente exterior, por exemplo, um martelo. Assumiremos que o corpo é composto de um material visco-elástico, tipo Kelvin (cf. FUNG [5]).

À medida que a estaca penetra no solo surgem forças em oposição ao movimento, que são as forças de resistência de ponta do solo, a força de atrito estaca-solo e a força resultante da pressão que o solo exerce sobre a superfície lateral da estaca.

Para descrevermos o fenômeno introduziremos de início os elementos de mecânica que serão utilizados neste trabalho. Consideraremos os campos.

- $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ - vetor deslocamento da partícula $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x \in \Omega$ - configuração não deformada - no instante t . Decorrido um tempo t as coordenadas desta partícula são $x + u(x,t)$;
- $f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t), f_3(x,t))$ = densidade de forças de massa atuando na estaca; f é supostamente conhecida;
- σ_{ij} - tensor das tensões;
- ϵ_{ij} - tensor das deformações linearizado,

$$\epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

A equação do movimento generalizada é

$$(1.1) \quad \rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde ρ é a densidade do material que compõe a estaca,

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

isto é, assumiremos a convenção de somatório sobre índices repetidos.

A lei de comportamento de materiais visco-elásticos relaciona o tensor das tensões, o tensor das deformações e o tensor das taxas de deformações através da equação (cf. DUVAUT-LIONS [4])

$$(1.2) \quad \sigma_{ij}(t) = a_{ijkh}^{(0)} \epsilon_{kh}(t) + a_{ijkh}^{(1)} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{kh}(t),$$

na qual os coeficientes $a_{ijkh}^{(0)}$ ($a_{ijkh}^{(1)}$) são os coeficientes de elasticidade (viscosidade) do material constituinte da estaca. Admitiremos, de conformidade com a experiência, que estes coeficientes satisfazem às condições:

$$\text{(Simetria)} \quad a_{ijkh}^{(\mu)} = a_{jihk}^{(\mu)} = a_{khij}^{(\mu)}, \quad \mu = 0, 1$$

$$\text{(eliticidade)} \quad a_{ijkh}^{(\mu)} \epsilon_{ij} \epsilon_{kh} \geq \alpha_\mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}, \quad \alpha_\mu \geq 0.$$

As forças que exercem ação na estaca são de dois tipos

- forças de massa, cuja densidade chamaremos f e su poremos conhecida;
- forças de superfície.

As forças de superfície são:

- $F(x,t)$ - força exercida pelo martelo, que impulsio na a estaca, atuando no topo da mesma; assumiremos que esta força é normal à superfície;
- $G_N(x,t)$ - módulo da força normal resultante da pres são que o solo exerce sobre a superfície lateral da estaca;
- $G_T(x,t)$ - força de atrito solo-estaca exercida na superfície lateral da estaca; a força de atrito atua em oposição ao movimento;
- $k_\ell u(x,t)$ - força de resistência direta do solo, de vido às propriedades elásticas deste; esta força exerce sua ação na direção normal à ponta pene trante da estaca. A constante k_ℓ é uma caracterís- tica do solo chamada coeficiente de elasticidade do solo;
- $k_v \dot{u}(x,t)$ - força de resistência direta do solo, de vido às propriedades viscosas deste; esta força tam- bém atua na ponta penetrante da estaca e, admitire mos, na direção normal à superfície. Aqui k_v é o coeficiente de viscosidade do solo.

A caracterização da força de atrito resultante do contacto direto solo-estaca é feita através da lei de Coulomb (cf DUVAUT-LIONS [4]) que estabelece a seguinte:

"Seja c um ponto qualquer da superfície de contacto solo-estaca, G_N módulo da força normal exercida pelo solo sobre a estaca e μ o coeficiente de atrito; num instante t :

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i. se } |G_T(c)| < \mu G_N(c) \text{ então } \dot{u}(c) = 0 \\ \text{ii. se } |G_T(c)| = \mu G_N(c) \text{ então existe } \lambda \geq 0 \\ \text{tal que } \dot{u}(c) = -\lambda G_T(c) \end{array} \right.$$

O modelo mais simples para a pressão lateral exercida pelo solo sobre a estaca é a lei experimental da mecânica dos solos conhecida como lei de Rankine [10], que diz que a pressão exercida pelo solo é simplesmente a "pressão hidrostática" e que em nosso caso pode ser expressada matematicamente pela equação:

$$(1.4) \quad G_N = K\gamma H(x_3+u_3-\ell) H(x_3+u_3-\ell) ,$$

onde K é o coeficiente de Rankine, γ é o peso específico do solo, ℓ é o comprimento da estaca na configuração não deformada e $H(\lambda)$ é a função de Heaviside. A pressão do solo sobre a estaca é exercida na direção da normal interior da superfície e somente em partículas que penetraram no solo, donde a presença da função de Heaviside na expressão de G_N .

Introduzidos os elementos mecânicos básicos para a especi

ficação do modelo, passamos a considerar agora a classe de todos os movimentos admissíveis v (velocidades) para a estaca, que indicaremos por Kin .

A potência dissipada pela força de inércia ao longo de um movimento v é

$$\rho \int_{\Omega} \ddot{u}_i v_i dx,$$

onde Ω é a configuração da estaca em seu estado não deformado.

Se usarmos a equação do movimento (1.1) esta potência pode ser expressa por

$$\rho \int_{\Omega} \ddot{u}_i v_i dx = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i dx + \int_{\Omega} f_i v_i dx, \quad v \in Kin,$$

que pela utilização do teorema da divergência, no primeiro termo do lado direito, passa a:

$$(1.5) \quad \rho \int_{\Omega} \ddot{u}_i v_i dx = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i d\sigma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} f_i v_i dx,$$

onde Γ representa a fronteira de Ω e $N(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ é a normal exterior a Γ em x .

Usando a notação:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f_i g_i dx$$

$$\langle \sigma, \zeta \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \zeta_{ij} dx,$$

teremos

$$(1.5') \quad \rho \langle \ddot{u}, v \rangle = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i d\sigma - \langle \sigma, \nabla v \rangle + \langle f, v \rangle ,$$

$v \in \text{Kin.}$

Neste ponto, se introduzimos

$$\sigma_N = \sigma_{ij} n_i n_j - \text{m\u00f3dulo da componente normal da for\u00e7a de tra\u00e7\u00e3o;}$$

$$\sigma_T = \{\sigma_{iT}\} - \text{componente tangencial da for\u00e7a de tra\u00e7\u00e3o,}$$

onde $\sigma_{iT} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_N n_i$;

$$v_N = v_i n_i - \text{m\u00f3dulo da componente normal da velocidade,}$$

$$v_T = v - v_N N - \text{componente tangencial da velocidade;}$$

a pot\u00eancia das for\u00e7as que atuam na superf\u00edcie externa da estaca tem a seguinte express\u00e3o:

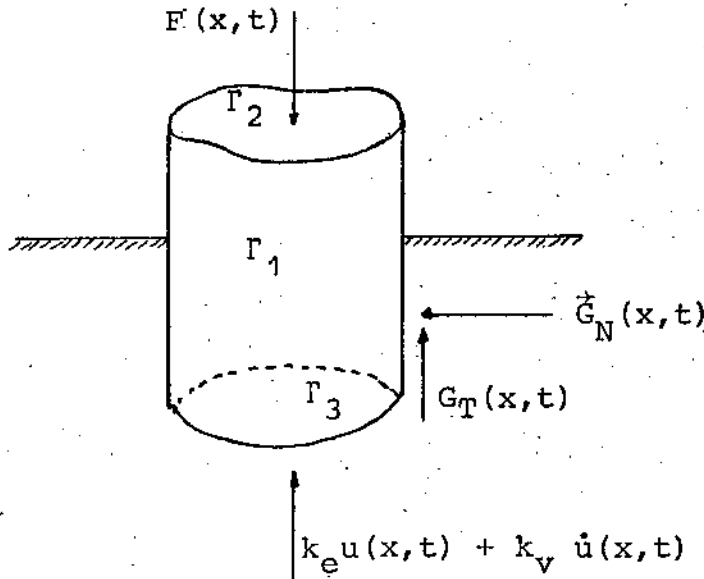
$$(1.6) \quad \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i d\sigma = \int_{\Gamma} (\sigma_T \cdot v_T + \sigma_N v_N) d\sigma .$$

Como as for\u00e7as de superf\u00edcie que atuam em Γ t\u00eam caracter\u00edsticas distintas na superf\u00edcie lateral, no topo e na ponta penetrante da estaca, dividiremos Γ em tr\u00eas subregi\u00f5es:

Γ_1 - superf\u00edcie lateral da estaca,

Γ_2 - superf\u00edcie da face superior, topo, da estaca e

Γ_3 - superfície da ponta penetrante da estaca, não plana (o significado físico desta hipótese ficará claro no capítulo II).



O integral (1.6) calculada em Γ_2 é:

$$- \int_{\Gamma_2} F(x,t) v_N d\sigma$$

visto que a única força que exerce ação em Γ_2 é a força do martelo, $F(x,t)$, e já admitimos que ela atua na direção da normal interior da superfície.

Em Γ_1 atuam as forças de atrito $G_T(x,t)$, tangente a superfície, e a pressão normal do solo sobre a estaca $G_N(x,t)$. Assim a integral (1.6) calculada em Γ_1 será:

$$\int_{\Gamma_1} H(x_3+u_3-l) \{G_T(x,t) \cdot v_T - G_N(x,t) v_N\} d\sigma ;$$

a presença da função de Heaviside na integral assegura que as

forças G_T e G_N atuam somente nos pontos da superfície lateral que no instante t estão em contacto com o solo.

Na ponta penetrante da estaca atuam as forças de resistência direta - $k_e u(x,t)$ e $k_v \dot{u}(x,t)$ - ambas na direção do normal interior da superfície; assim

$$- \int_{\Gamma_3} \{k_e u(x,t) v_N + k_v \dot{u}(x,t) v_N\} d\sigma$$

será a potência dissipada pelas forças que atuam na superfície Γ_3 .

Levando estes cálculos para (1.6) obteremos

$$(1.7) \quad \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j v_i d\sigma = \int_{\Gamma_1} H(x_3+u_3-l) \{G_T(x,t) \cdot v_T - G_N(x,t) v_N\} d\sigma -$$

$$- \int_{\Gamma_2} F(x,t) v_N d\sigma - \int_{\Gamma_3} \{k_e u(x,t) v_N + k_v \dot{u}(x,t) v_N\} d\sigma .$$

Por outro lado:

$$(1.8) \quad \langle \sigma, \nabla v \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx =$$

$$= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(v) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dx .$$

Chamando

$$\omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} ,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \omega_{ij} &= \sum_{i < j} \sigma_{ij} \omega_{ij} + \sum_{i=j} \sigma_{ij} \omega_{ij} + \sum_{i > j} \sigma_{ij} \omega_{ij} = \\ &= \sum_{i < j} \sigma_{ij} \omega_{ij} + \sum_{j > i} \sigma_{ji} \omega_{ji} = \sum_{i < j} (\sigma_{ij} - \sigma_{ji}) \omega_{ij} , \end{aligned}$$

e tendo em vista a simetria do tensor das tensões (DUVAUT-LIONS [4]) teremos a nulidade da última integral de (1.8).

Levando em consideração a lei do comportamento do material visco-elástico que constitui a estaca (1.2), chamando

$$\begin{aligned} a_e(u, v) &= \int_{\Omega} a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kh}(v) dx , \\ a_v(u, v) &= \int_{\Omega} a_{ijkh}^{(1)} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kh}(v) dx , \end{aligned}$$

reescrevemos (1.8):

$$(1.9) \quad \langle \sigma , \nabla v \rangle = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx = a_e(u, v) + a_v(\dot{u}, v) .$$

Levando (1.7) e (1.9) em (1.5') obtemos a equação seguinte

$$\begin{aligned} (1.10) \quad \rho \langle \ddot{u} , v \rangle + a_e(u, v) + a_v(\dot{u}, v) + \int_{\Gamma_2} F v_N d\sigma + \\ + \int_{\Gamma_3} k_e u v_N d\sigma + \int_{\Gamma_3} k_v \dot{u} v_N d\sigma = \langle f , v \rangle + \\ + \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3 - \ell) \{ G_T \cdot v_T - G_N v_N \} d\sigma , \quad v \in \text{Kin} . \end{aligned}$$

que é a expressão do chamado "Teorema das potências virtuais" para o problema específico que nós estamos trabalhando.

Podemos concluir assim que são três as condições independentes que caracterizam mecânicamente o nosso problema (além das condições iniciais, é claro): o teorema das potências virtuais (1.10), a lei de Coulomb (1.3) e a lei de Rankine (1.4). As incógnitas são u , G_T e G_N , e a questão básica é a compatibilidade deste sistema.

Em realidade este sistema de condições pode ser resolvido em uma única variável u por eliminação de G_T e G_N .

A incógnita G_N pode ser eliminada diretamente através da lei de Rankine (1.4) e a lei de Coulomb implica que a relação

$$(1.11) \quad G_T \cdot (v_T - \dot{u}_T) + \mu G_N (|v_T| - |\dot{u}_T|) \geq 0$$

é satisfeita para todos os pontos de Γ_1 . De fato:

i) Se

$$|G_T(c)| < \mu G_N(c)$$

então $\dot{u}(c) = 0$ e

$$G_T \cdot (v_T - \dot{u}_T) + \mu G_N (|v_T| - |\dot{u}_T|) =$$

$$= G_T \cdot v_T + \mu G_N |v_T| \geq 0,$$

pois

$$G_T \cdot v_T \leq |G_T| |v_T| < \mu G_N |v_T| .$$

ii) Se

$$|G_T(c)| = \mu G_N(c)$$

então existe $\lambda \geq 0$ tal que

$$\dot{u}(c) = -\lambda G_T(c) ;$$

assim

$$\begin{aligned} G_T \cdot (v_T - \dot{u}_T) + \mu G_N (|v_T| - |\dot{u}_T|) &= \\ = G_T \cdot v_T + \lambda |G_T|^2 + |G_T| |v_T| - \lambda |G_T|^2 &= \\ = G_T \cdot v_T + |G_T| |v_T| \geq 0 \end{aligned}$$

Então se tomarmos em (1.10) v igual a uma variação admissível (não existem vínculos geométricos!) igual a um movimento admissível menos o movimento real, isto é,

$$v = \psi - \dot{u} , \quad \psi \in \text{Kin} ,$$

usarmos (1.4) e (1.11) teremos

$$\begin{aligned}
 & \rho \langle \ddot{u}, \psi - \dot{u} \rangle + a_e(u, \psi - \dot{u}) + a_v(\dot{u}, \psi - \dot{u}) + \\
 & \int_{\Gamma_2} F(\psi - \dot{u})_N \, d\sigma + k_e \int_{\Gamma_3} u(\psi - \dot{u})_N \, d\sigma + k_v \int_{\Gamma_3} \dot{u}(\psi - \dot{u})_N \, d\sigma + \\
 (1.12) \quad & + K\gamma \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3 - \ell) (x_3 + u_3 - \ell) (\psi - \dot{u})_N \, d\sigma + \\
 & + K\gamma \mu \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3 - \ell) (x_3 + u_3 - \ell) (|\psi_T| - |\dot{u}_T|) \, d\sigma \geq \\
 & \geq \langle f, \psi - \dot{u} \rangle, \quad \forall \psi \in \text{Kin}.
 \end{aligned}$$

Em resumo, os deslocamentos $u(x,t)$ das partículas da estaca são caracterizados pela inequação (1.12). Admitindo ainda que a estaca partiu do repouso, devemos juntar a (1.12) as condições iniciais

$$u(x,0) = 0$$

$$\dot{u}(x,0) = 0$$

para todo x em Ω .

O fim de dar sentido matemático preciso aos termos da inequação (1.12) introduziremos a notação seguinte.

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^3 . Chamaremos

a) $L^2(\Omega)$ = espaço das funções mensuráveis tais que

$$|f|_0 = \left\{ \int_{\Omega} f^2(x) dx \right\}^{1/2} < \infty .$$

Este espaço é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx ;$$

b) $L^{\infty}(\Omega)$ = espaço das funções mensuráveis tais que

$$|f|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)| < \infty ;$$

c) $H^1(\Omega) = \{v | v \in L^2(\Omega), D^{\alpha}v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq 1\}$

que também é espaço de Hilbert munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_1 = \sum_{|\alpha| \leq 1} \langle D^{\alpha} u, D^{\alpha} v \rangle ;$$

d) $H = \{v | v = \{v_i\}, v_i \in L^2(\Omega)\} = (L^2(\Omega))^3$

munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \langle u_i, v_i \rangle ;$$

e) $V = \{v | v = \{v_i\}, v_i \in H^1(\Omega)\} = (H^1(\Omega))^3$

munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \langle u_i, v_i \rangle_1$$

Se X é um espaço de Banach e $T \in (0, \infty)$, definimos:

$$f) \quad L^2(0, T; X) = \{v: (0, T) \rightarrow X \mid \int_0^T |v|_X^2 dt < \infty\}$$

e

$$|v|_{L^2(0, T; X)} = \left\{ \int_0^T |v|_X^2 dt \right\}^{1/2}$$

$$g) \quad L^\infty(0, T; X) = \{v: (0, T) \rightarrow X \mid \sup_{(0, T)} \text{ess} |v|_X < \infty\}$$

e

$$|v|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{(0, T)} \text{ess} |v|_X$$

Com esta notação podemos dar um sentido matemático preciso a todas as expressões aparecendo nas várias fases do argumento que nos levou ao estabelecimento da inequação (1.12). Tendo em vista que os deslocamentos não estão sujeitos a vínculos, tomamos inicialmente

$$K_{in} = V = (H^1(\Omega))^3$$

A partir daí podemos definir a forma linear em V

$$L(v) = \langle f, v \rangle - \int_{\Gamma_2} F v_N d\sigma,$$

as duas formas bilineares em $V \times V$

$$A_e(u, v) = a_e(u, v) + k_e \int_{\Gamma_3} u_N v_N d\sigma$$

(1.13)

$$A_v(u, v) = a_v(u, v) + k_v \int_{\Gamma_3} u_N v_N d\sigma ,$$

e os funcionais

$$J(u, \cdot) : V \longrightarrow R$$

$$v \longmapsto \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3 - \ell) (x_3 + u_3 - \ell) v_N d\sigma$$

$$J(u, \cdot) : V \longrightarrow R$$

$$v \longmapsto \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3 - \ell) (x_3 + u_3 - \ell) |v_T| d\sigma .$$

Utilizando esta notação na inequação (1.12) o problema do movimento da estaca é colocado na seguinte forma:

determinar $u \in L^2(0, T; V)$ tal que

- i. $\dot{u} \in L^2(0, T; V)$
- ii. $\ddot{u} \in L^2(0, T; H)$

$$u(x, 0) = 0$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} & \rho \langle \ddot{u}, v - \dot{u} \rangle + A_e(u, v - \dot{u}) + A_v(\dot{u}, v - \dot{u}) + \\ & K \gamma J(u, v - \dot{u}) + K \gamma \mu j(u, v) - K \gamma \mu j(u, \dot{u}) \geq \\ & \geq L(v), \quad v \in V. \end{aligned}$$

Assim posto, o problema do movimento da estaca, que penetra no solo sob a ação de um martelo, se reduz ao problema de resolver uma inequação variacional de evolução (segunda ordem no tempo) com condições iniciais. Salientamos que o funcional $J(u, v)$ é linear na variável v mas não diferenciável na variável u e que $j(u, v)$ é não diferenciável tanto na variável u quanto na variável v .

Antes de entrarmos na análise teórica do problema enunciaremos um resultado, demonstrado em LIONS-MAGENES [22], que se aplica em situações que ocorrerão diversas vezes neste trabalho. Sejam V e H espaços de Hilbert

$$V \subset H, \quad V \text{ denso em } H.$$

Identificando H ao seu dual, H se identifica a um subespaço do dual V' de V , isto é,

$$V \subset H \subset V'.$$

Se v é tal que

$$v \in L^2(0, T; V) \text{ e } \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; V'),$$

então, após eventual modificação num conjunto de medida nula em $(0, T)$, v é contínua de $[0, T]$ em H .

CAPÍTULO 2

ASPECTOS TEÓRICOS

Este capítulo é dedicado ao estudo de existência e unicidade de de solução do problema proposto no capítulo anterior. Para simplificar estabeleceremos $\rho = \ell = K = \gamma = \mu = k_e = k_v = 1$, mas obviamente o raciocínio aqui desenvolvido não se altera se as constantes assumirem valores distintos de 1.

Inicialmente mostraremos que as formas bilineares $A_e(u,v)$ e $A_v(u,v)$ são coercivas; esta propriedade desempenhará papel fundamental tanto no estudo teórico quanto na análise numérica do problema.

LEMA 2.1 - Seja Ω um aberto limitado de fronteira regular Γ e Γ_3 uma parte não plana de Γ , medida de Γ_3 positiva. Então existem constantes positivas α_e e α_v tais que

$$A_e(v,v) \geq \alpha_e |v|_1^2 \quad \text{e} \quad A_v(v,v) \geq \alpha_v |v|_1^2, \quad \forall v \in V.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Demonstraremos a coercividade de $A_e(u,v)$; a coercividade de $A_v(u,v)$ é obtida analogamente.

Da eliticidade dos coeficientes de elasticidade do material do qual a estaca é constituída segue

$$(2.1) \quad a_e(v, v) = \int_{\Omega} a_{ijkh}^{(0)} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{kh}(v) dx \geq \alpha'_e \varepsilon(v)$$

onde

$$\varepsilon(v) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(v) \varepsilon_{ij}(v) dx$$

e α'_e é uma constante positiva.

Mostremos inicialmente a existência de $c > 0$ tal que

$$(2.2) \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_3} v_N^2 d\sigma \geq c |v|_0^2 \quad \forall v \in V.$$

Substituindo v por $\frac{v}{|v|_0}$ em (2.2) obtemos a equivalência entre (2.2) e

$$(2.2') \quad \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_3} v_N^2 d\sigma \geq c, \quad \forall v \in V \text{ tal que } |v|_0 = 1.$$

Suponhamos, por absurdo, que (2.2') não ocorra. Então existe uma seqüência $v_\alpha \in V$ tal que

$$|v_\alpha|_0 = 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma_3} v_{\alpha N}^2 d\sigma \rightarrow 0.$$

Mas, pela desigualdade de Korn (cf. DUVAUT - LIONS [4])

$$(2.3) \quad \varepsilon(v) + |v|_0^2 \geq c_1 |v|_1^2 \quad \forall v \in V$$

e portanto

$$|v_\alpha|_1 \leq \text{constante} .$$

Podemos então extrair de $\{v_\alpha\}$ uma subsequência, que também denotaremos por $\{v_\alpha\}$, tal que

$$v_\alpha \longrightarrow v \text{ fraco em } V .$$

Sendo

$$h(v) = \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_3} v_N^2 \, d\sigma$$

convexa, com gradiente contínuo, será também fracamente semi-contínua inferiormente (cf. LIONS [11]).

$$\liminf \{ \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma_3} v_{\alpha N}^2 \, d\sigma \} \geq \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_3} v_N^2 \, d\sigma .$$

Dai, como

$$\liminf \{ \varepsilon(v_\alpha) + \int_{\Gamma_3} v_{\alpha N}^2 \, d\sigma \} = 0$$

concluimos que

$$\varepsilon(v) + \int_{\Gamma_3} v_N^2 \, d\sigma = 0 ,$$

isto é, $\varepsilon(v) = 0$ e $v_N = 0$ em Γ_3 .

A condição $\varepsilon(v) = 0$ nos diz que (cf. DUVAUT [3])

$$v = a + b \wedge x, \quad a, b \in \mathbb{R}^3,$$

e a condição $v_N = 0$ em Γ_3 implica em

$$a \cdot N + b \wedge x \cdot N = 0, \quad \forall x \in \Gamma_3,$$

que só admite solução não trivial no caso $a = 0$ e b paralelo a N , o que significa que Γ_3 é um plano e v é um movimento de rotação constante em torno do eixo perpendicular a Γ_3 . Mas por hipótese Γ_3 é parte não plana de Γ e portanto

$$v = 0.$$

Mas, pelo teorema de Rellich, a imersão de V em H é compacta e portando

$$v_\alpha \rightarrow v \text{ em } H;$$

como $\|v_\alpha\|_0 = 1$ está demonstrado, por absurdo, (2.2).

De (2.2) e da desigualdade de Korn (2.3) segue

$$A_e(v, v) \geq \alpha'_e \varepsilon(v) + \int_{\Gamma_3} v_N^2 d\sigma \geq$$

$$\frac{\alpha'_e}{2} \varepsilon(v) + \inf\left\{\frac{\alpha'_e}{2}, 1\right\} [\varepsilon(v) + \int_{\Gamma_3} v_N^2 d\sigma] \geq$$

$$\frac{\alpha'_e}{2} \varepsilon(v) + \inf\left\{\frac{\alpha'_e}{2}, 1\right\} c |v|_0^2 \geq c_1 |v|_1^2,$$

e o lema 2.1 está demonstrado.

De posse da coercividade das formas bilineares $A_e(u,v)$ e $A_v(u,v)$ passaremos a discutir as condições a serem impostas a f e F de modo a garantir a existência e a unicidade da solução do problema proposto. O seguinte resultado é obtido:

TEOREMA 2.1 - Sejam

$$(2.4) \quad f, \dot{f} \in L^2(0,T; H), f(0) \in H,$$

$$(2.5) \quad F, \dot{F} \in L^2(0,T; (L^2(\Gamma_2)^3)), F(0) = 0.$$

Então, para todo $T > 0$, existe uma única

$$(2.6) \quad u \in L^\infty(0,T; V),$$

tal que

$$(2.7) \quad \dot{u} \in L^\infty(0,T; V)$$

$$(2.8) \quad \ddot{u} \in L^\infty(0,T; H) \cap L^2(0,T; V),$$

e

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \langle \ddot{u}, v - \dot{u} \rangle + A_e(u, v - \dot{u}) + A_v(\dot{u}, v - \dot{u}) + J(u, v - \dot{u}) + \\ & + j(u, v) - j(u, \dot{u}) \geq L(v - \dot{u}), \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

$$(2.10) \quad u(x, 0) = 0,$$

$$(2.11) \quad \dot{u}(x,0) = 0.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Dividiremos a demonstração do teorema em quatro etapas, de acordo com a estratégia seguinte:

1. unicidade da solução;
2. estabelecimento de um problema aproximado obtido da regularização dos funcionais $J(u,v)$ e $j(u,v)$. Também será mostrado que este problema aproximado, envolvendo uma inequação variacional, é equivalente a uma equação variacional, em u^ϵ , com dados iniciais;
3. solução desta equação variacional pela utilização do método de Galerkin; serão obtidas estimativas a priori para as aproximações de Galerkin $p_h u^{\epsilon,h}$, que serão independentes de ϵ e de h ; em consequência das estimativas, as aproximações de Galerkin estarão definidas em $[0,T]$ e poderemos extrair uma subsequência de $p_h u^{\epsilon,h}$ que converge para u_ϵ , quando h tende a zero;
4. passagem ao limite em ϵ ; sendo as estimativas independentes de ϵ , extrairemos de u^ϵ subsequência que converge para u solução da inequação (2.9). Em realidade tendo em conta a unicidade da solução ficará demonstrado que a sequência u^ϵ inteira converge para u .

1 - UNICIDADE

Suponhamos que existam duas soluções u^1 e u^2 de (2.9)-(2.11) e tomemos $u = u^2 - u^1$. Fazendo em (2.9) $u = u^2$ e $v = \dot{u}^1$:

$$- \langle \ddot{u}^2, \dot{u} \rangle - A_e(u^2, \dot{u}) - A_v(\dot{u}^2, \dot{u}) - J(u^2, \dot{u}) + \\ + j(u^2, \dot{u}^1) - j(\dot{u}^2, \dot{u}^1) \geq -L(\dot{u}) ;$$

tomando, ainda em (2.9), $u = u^1$ e $v = u^2$ obtemos

$$\langle \ddot{u}^1, \dot{u} \rangle + A_e(u^1, \dot{u}) + A_v(\dot{u}^1, \dot{u}) + J(u^1, \dot{u}) + j(u^1, \dot{u}^2) \\ - j(\dot{u}^1, \dot{u}^2) \geq L(\dot{u}) .$$

Somando estas duas inequações e usando as definições de $J(u,v)$ e $j(u,v)$ teremos

$$(2.12) \quad - \langle \ddot{u}, \dot{u} \rangle - A_e(u, \dot{u}) - A_v(\dot{u}, \dot{u}) \geq \\ \geq \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3^1 - 1) (x_3 + u_3^1 - 1) \{ \dot{u}_N - (|\dot{u}_T^2| - |\dot{u}_T^1|) \} d\sigma + \\ + \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3^2 - 1) (x_3 + u_3^2 - 1) \{ -\dot{u}_N + (|\dot{u}_T^2| - |\dot{u}_T^1|) \} d\sigma$$

Mas,

$$\dot{u}_N + |\dot{u}_T^1| - |\dot{u}_T^2| \leq |\dot{u}_N| + |\dot{u}_T^1 - \dot{u}_T^2| \leq |\dot{u}_N| + |\dot{u}_T| \leq 2|\dot{u}| ,$$

donde, multiplicando (2.12) por (-1):

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}, \dot{u} \rangle + A_e(u, \dot{u}) + A_v(\dot{u}, \dot{u}) \leq \\ & \leq \int_{\Gamma_1} 2|\dot{u}| \{H(x_3+u_3^2-1)(x_3+u_3^2-1) - H(x_3+u_3^1-1)(x_3+u_3^1-1)\} d\sigma. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} & H(x_3+u_3^2-1)(x_3+u_3^2-1) - H(x_3+u_3^1-1)(x_3+u_3^1-1) \\ & \leq |u_3^2 - u_3^1| \\ & \leq |u_3| \leq |u| \end{aligned}$$

e portanto

$$\langle \ddot{u}, \dot{u} \rangle + A_e(u, \dot{u}) + A_v(\dot{u}, \dot{u}) \leq 2 \int_{\Gamma_1} |u| |\dot{u}| d\sigma.$$

Assim sendo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |\dot{u}|_0^2 + A_e(u, u) \} + A_v(\dot{u}, \dot{u}) \leq \lambda |\dot{u}|^2_{(L^2(\Gamma_1))} +$$

(2.13)

$$+ \frac{1}{4\lambda} |u|^2_{(L^2(\Gamma_1))}.$$

qualquer que seja $\lambda > 0$.

Neste ponto faremos uso do teorema do traço (cf. NEČAS [13]) que pode ser aplicado desde que façamos hipóteses, por exemplo, Ω aberto limitado do R^3 com fronteira Lipchitziana. Ele nos dá

$$|v|_{(L^2(\Gamma_1))}^2 \leq C(\Omega) |v|_1^2, \quad \forall v \in V.$$

Usando a coercividade de A_v e A_e , as condições iniciais, $u(0) = \dot{u}(0) = 0$, e o teorema do traço, em (2.13) integrada de 0 a t:

$$\begin{aligned} |\dot{u}|_0^2(t) + \alpha_e |u|_1^2(t) + \alpha_v \int_0^t |\dot{u}|_1^2(s) ds &\leq C \lambda \int_0^t |\dot{u}|_1^2(s) ds + \\ + \frac{C}{4\lambda} \int_0^t |u|_1^2(s) ds. \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = \frac{\alpha_v}{C}$, obteremos

$$|u|_1^2(t) \leq C^1 \int_0^t |u|_1^2(s) ds, \quad C^1 > 0,$$

e pela desigualdade de Gronwall (cf. BRAUER [2])

$$|u|_1 = 0$$

o que encerra a demonstração da unicidade.

2 - O PROBLEMA REGULARIZADO

Empregaremos a função $\phi_\varepsilon: R^3 \rightarrow R^+$ definida por

$$(2.14) \quad \phi_\varepsilon(v) = \sqrt{\varepsilon^2 + |v|^2}$$

para qualquer $\varepsilon > 0$, e a função $\tilde{\psi}_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$(2.15) \quad \tilde{\psi}_\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda < 0, \\ \frac{\lambda^2}{2\varepsilon}, & \text{se } 0 \leq \lambda < \varepsilon \\ H(\lambda)\lambda - \frac{\varepsilon}{2}, & \text{se } \lambda \geq \varepsilon \end{cases}$$

Por definição ϕ_ε é contínua; como

$$D\phi_\varepsilon(v) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + |v|^2}} [v_1 \quad v_2 \quad v_3],$$

$v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$, segue a continuidade de $D\phi_\varepsilon$ e a existência de $D^2\phi_\varepsilon(v)$ qualquer que seja $v \in \mathbb{R}^3$.

Para mostrar a convexidade de ϕ_ε usaremos a caracterização de funções convexas (cf. PSHENICHNY - DANILIN [16])

"f(x) é convexa $\Leftrightarrow Df(x + \lambda p) \cdot p$ é uma função não decrescente de λ ".

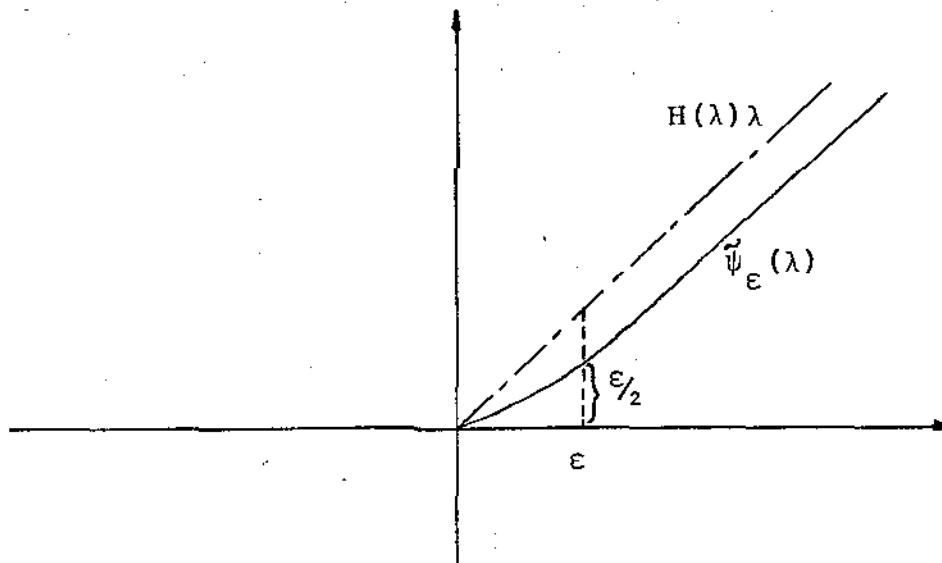
Examinemos a função

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= D\phi_\varepsilon(x + \lambda p) \cdot p = \\ &= \frac{x \cdot p + \lambda |p|^2}{\{\varepsilon^2 + |x|^2 + \lambda^2 |p|^2 + 2\lambda x \cdot p\}^{1/2}} \\ h'(\lambda) &= \frac{|p|^2}{\{\varepsilon^2 + |x|^2 + \lambda^2 |p|^2 + 2\lambda x \cdot p\}^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\{x.p + \lambda|p|^2\}\{x.p + \lambda|p|^2\}}{\{\epsilon^2 + |x|^2 + \lambda^2|p|^2 + 2\lambda x.p\}^{3/2}} = \\
 & = \frac{|p|^2 \{\epsilon^2 + |x|^2 + \lambda^2|p|^2 + 2\lambda x.p\}}{\{\epsilon^2 + |x + \lambda p|^2\}^{3/2}} \\
 & - \frac{\lambda^2|p|^4 + 2\lambda|p|^2 x.p + (x.p)^2}{\{\epsilon^2 + |x + \lambda p|^2\}^{3/2}} \geq 0
 \end{aligned}$$

pois $(x.p)^2 \leq |x|^2|p|^2$.

Por outro lado $\tilde{\psi}_\epsilon$ também é uma função convexa diferenciável.



Chamaremos

$$\psi_\epsilon(\lambda) = \tilde{\psi}_\epsilon(\lambda - (1-x_3)) ,$$

e definiremos os funcionais

$$J_{\epsilon}(u, v) = \int_{\Gamma_1} \psi_{\epsilon}(u_3) v_N \, d\sigma$$

$$j_{\epsilon}(u, v) = \int_{\Gamma_1} \psi_{\epsilon}(u_3) \phi_{\epsilon}(v_T) \, d\sigma$$

A inequação

$$(2.16) \quad \begin{aligned} & \langle \ddot{u}^{\epsilon}, v - \dot{u}^{\epsilon} \rangle + A_{\epsilon}(u^{\epsilon}, v - \dot{u}^{\epsilon}) + A_V(\dot{u}^{\epsilon}, v - \dot{u}^{\epsilon}) + J_{\epsilon}(u^{\epsilon}, v - \dot{u}^{\epsilon}) \\ & + j_{\epsilon}(u^{\epsilon}, v) - j_{\epsilon}(u^{\epsilon}, \dot{u}^{\epsilon}) \geq L(v - \dot{u}^{\epsilon}), \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

podemos juntar as condições iniciais

$$(2.17) \quad \dot{u}^{\epsilon}(x, 0) = 0,$$

$$(2.18) \quad \dot{u}^{\epsilon}(x, 0) = 0.$$

Chamaremos (2.16)-(2.18) de problema regularizado.

Agora mostraremos que o problema regularizado é equivalente a uma equação variacional com dados iniciais. Tomando em (2.16)

$$v = \dot{u}^{\epsilon} + \lambda w, \quad \lambda > 0 \quad \text{e} \quad w \in V$$

temos

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}^\varepsilon, w \rangle + A_e(u^\varepsilon, w) + A_V(\dot{u}^\varepsilon, w) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) w_N^\varepsilon \, d\sigma + \\ & + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) \frac{1}{\lambda} \{ \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon + \lambda w_T) - \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) \} \, d\sigma \geq L(w), \quad w \in V. \end{aligned}$$

Passando ao limite em λ , tendo em vista que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \{ \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon + \lambda w_T) - \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) \} = D\phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) \cdot w_T,$$

segue

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}^\varepsilon, w \rangle + A_e(u^\varepsilon, w) + A_V(\dot{u}^\varepsilon, w) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) w_N \, d\sigma + \\ & \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) D\phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) \cdot w_T \, d\sigma \geq L(w), \quad \forall w \in V. \end{aligned}$$

A inequação ficará invertida se tomarmos $-w$ em vez de w . Assim (2.16) implica em

$$(2.19) \quad \langle \ddot{u}^\varepsilon, w \rangle + A_e(u^\varepsilon, w) + A_V(\dot{u}^\varepsilon, w) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) w_N \, d\sigma +$$

$$\int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) D\phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) \cdot w_T \, d\sigma = L(w), \quad \forall w \in V$$

Reciprocamente, tomando em (2.19) $w = v - \dot{u}^\varepsilon$ e usando a propriedade de funções convexas

$$D\phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) \cdot (v_T - \dot{u}_T^\varepsilon) \leq \phi_\varepsilon(v_T) - \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon)$$

obteremos (2.16).

Assim (2.16)-(2.18) é equivalente ao problema (2.19) com as condições iniciais (2.17) e (2.18).

3 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO VARIACIONAL

Usaremos o método de Galerkin para mostrar que (2.19) com as condições iniciais (2.17) e (2.18) tem solução

$$(2.20) \quad u^\varepsilon \in L^\infty(0, T; V)$$

tal que

$$(2.21) \quad \dot{u}^\varepsilon \in L^\infty(0, T; V)$$

$$(2.22) \quad \ddot{u}^\varepsilon \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V).$$

Introduzimos uma aproximação convergente (V_h, p_h, r_h) de V , associada ao parâmetro h , caracterizada pelas condições

i) o espaço discreto

$$V_h = \mathbb{R}^{N_h}, \quad N_h \text{ inteiro, } N_h \rightarrow \infty \text{ quando } h \rightarrow 0;$$

ii) o operador prolongamento

$$p_h: V_h \longrightarrow V, \text{ isomorfismo sobre a imagem } p_h(V_h);$$

iii) o operador de restrição

$$r_h: \longrightarrow V_h, \text{ linear e sobre } V_h;$$

iv) $\lim_{h \rightarrow 0} |v - p_h r_h v|_1 = 0, \forall v \in V.$

A imagem $p_h(V_h)$ é conhecida como espaço das aproximantes.

Exemplos de esquemas convergentes podem ser encontrados em RAUPP [18], SCHULTZ [21], ODEN-REDDY [14], AUBIN [1].

As aproximações de Galerkin de u^ϵ , associadas a (V_h, p_h, r_h) , são definidas como as aplicações

$$u^{\epsilon, h}: [0, T] \longrightarrow V_h$$

tais que

$$\begin{aligned} & \langle p_h \ddot{u}^{\epsilon, h}, p_h v^h \rangle + A_e(p_h u^{\epsilon, h}, p_h v^h) + A_v(p_h \dot{u}^{\epsilon, h}, p_h v^h) + \\ (2.23) \quad & + \int_{\Gamma_1} \psi_\epsilon(p_h u_3^{\epsilon, h}) p_h v_N^h \, d\sigma + \int_{\Gamma_1} \psi_\epsilon(p_h u_3^{\epsilon, h}) D\phi_\epsilon(p_h \dot{u}_T^{\epsilon, h}) \cdot p_h v_T^h \, d\sigma = \\ & = L(p_h v^h), \quad \forall v^h \in V^h, \end{aligned}$$

$$(2.24) \quad u^{\epsilon, h}(0) = 0,$$

$$(2.25) \quad \dot{u}^{\epsilon, h}(0) = 0.$$

Em (2.23) $p_h u_3^{\epsilon, h}$ representa a terceira componente de $p_h u^{\epsilon, h}$,

$p_h v_N^h$ ($p_h v_T^h$) representa a componente normal (respectivamente tangencial) de $p_n v^h$.

Tomando

$$u^{\varepsilon, h}: [0, T] \rightarrow V_h$$
$$t \rightsquigarrow \left\{ g_j^\varepsilon(t) \right\}_{j=1}^{N_h}$$

então (2.23)-(2.25) é um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em $g_j^\varepsilon(t)$, de dimensão N_h , com dados iniciais $g_j^\varepsilon(0) = \dot{g}_j^\varepsilon(0) = 0$. Como as funções envolvidas são regulares, este sistema tem solução $u^{\varepsilon, h}$ definida no intervalo $(0, t_h)$.

A seguir obteremos estimativas a priori, independentes de ε e h ; uma primeira consequência destas estimativas será " $t_h = T$."

Das definições de ϕ_ε e ψ_ε segue

$$(2.26) \quad D\phi_\varepsilon(v) \cdot v = \frac{|v|^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + |v|^2}} \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

$$(2.27) \quad \psi_\varepsilon(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Estas propriedades serão usadas no que se segue.

Estimativas a priori (I)

Tomando em (2.23) $v^h = \dot{u}^{\varepsilon, h}$, em vista de (2.26) e (2.27)

temos

$$\begin{aligned} & \langle p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}, p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} \rangle + A_e(p_h u^{\varepsilon, h}, p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}) + \\ & A_v(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u^{\varepsilon, h}) p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} d\sigma \leq \\ & \leq L(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}), \end{aligned}$$

onde

$$A_v(v) = A_v(v, v).$$

Ou ainda, pela coercividade de A_v ,

$$\begin{aligned} (2.28) \quad & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_0^2 + A_e(p_h u^{\varepsilon, h}) \} + \alpha_v |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2 \leq \\ & \leq L(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}) - \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) p_h \dot{u}_N^{\varepsilon, h} d\sigma. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \psi_\varepsilon(v_3) \leq |v_3| \leq |v|, \quad \forall v; \\ \text{ii)} \quad & |L(v)| = \left| \int_{\Omega} f \cdot v \, dx - \int_{\Gamma_2} F v_N \, d\sigma \right| \leq |f|_0 |v|_0 + \\ & + |F|_{(L^2(\Gamma_2))^3} |v|_{(L^2(\Gamma_2))^3}, \end{aligned}$$

pela desigualdade de Schwarz. A utilização do teorema do traço nos dará

$$L(v) \leq \{ |f|_0 + c|F|_{(L^2(\Gamma_2))^3} \} |v|_1 = \|L\| |v|_1$$

Assim,

$$\begin{aligned} L(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}) - \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) p_h \dot{u}_N^{\varepsilon, h} d\sigma &\leq \\ &\leq \|L\| |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1 + \int_{\Gamma_1} |p_h u^{\varepsilon, h}| |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}| d\sigma \leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda} \|L\|^2 + \frac{\lambda}{2} (1+c) |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2 + \frac{C}{2\lambda} |p_h u^{\varepsilon, h}|_1^2 \end{aligned}$$

qualquer que seja $\lambda > 0$, sendo $C = C(\Omega)$ uma constante oriunda da aplicação do teorema do traço. Levando esta majoração para (2.28) e escolhendo λ tal que $(1+c)\lambda = \alpha_v$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_0^2 + A_\varepsilon(p_h u^{\varepsilon, h}) \} + \alpha_v |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2 &\leq \\ \frac{1}{\lambda} \|L\|^2 + \frac{C}{\lambda} |p_h u^{\varepsilon, h}|_1^2 &. \end{aligned}$$

Integrando de 0 a t , $t \leq T$, usando as condições iniciais e chamando

$$K_1 = \frac{1}{\lambda} \int_0^T \{ |f|_0^2(s) + c|F|_{(L^2(\Gamma_2))^3}^2 \} ds$$

Obteremos

$$(2.29) \quad |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(t) + A_e(p_h u^{\varepsilon, h})(t) + \int_0^t |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2(s) ds \leq \\ \leq K_1 + c' \int_0^t |p_h u^{\varepsilon, h}|_1^2(s) ds .$$

Portanto,

$$\alpha_e |p_h u^{\varepsilon, h}|_1^2(t) \leq K_1 + c' \int_0^t |p_h u^{\varepsilon, h}|_1^2(s) ds ,$$

e pela desigualdade de Gronwall ,

$$(2.30) \quad |p_h u^{\varepsilon, h}|_1^2(t) \leq k_1(T) .$$

Levando este resultado a (2.29) teremos

$$(2.31) \quad |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(t) \leq k_2(T) ,$$

$$(2.31') \quad |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_{L^2(0, T; V)} \leq k_3(T) .$$

Em resumo as estimativas a priori (2.30), (2.31) e 2.21') nos asseguram que

$$(2.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_h u^{\varepsilon, h} \text{ estão num limitado de } L^\infty(0, T; V) \\ p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} \text{ estão num limitado de } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \end{array} \right.$$

Estimativas a priori (II)

Derivando (2.23) com relação a t e tomando $v^h = \ddot{u}^{\varepsilon, h}$ temos

$$\begin{aligned}
 & \langle p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}, p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h} \rangle + A_e(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}, p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}) + \\
 & A_v(p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}) + \int_{\Gamma_1} \frac{d}{dt} \{ \psi_\varepsilon(p_h u^{\varepsilon, h}) \} (p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}) d\sigma + \\
 & \int_{\Gamma_1} \frac{d}{dt} \{ \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) \} D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon, h}) \cdot p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h} d\sigma + \\
 & \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) \frac{d}{dt} D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon, h}) \cdot p_h \ddot{u}_T^{\varepsilon, h} d\sigma = \\
 & = \langle \dot{f}, p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h} \rangle - \int_{\Gamma_2} \dot{F}(t) p_h \ddot{u}_N^{\varepsilon, h} d\sigma .
 \end{aligned}$$

Mas tendo em vista que

$$0 \leq \psi'_\varepsilon(\lambda) \leq 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

e

$$D\phi_\varepsilon(v) \cdot w = \frac{v \cdot w}{\sqrt{\varepsilon^2 + |v|^2}} \leq |w|, \quad \forall v, w \in V,$$

temos

$$i) \quad \frac{d}{dt} D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}) \cdot p_h \ddot{u}_T^{\varepsilon,h} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t+\Delta t)) - D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t))\}.$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t+\Delta t) - p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t)\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \{[D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t+\Delta t)) - D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t))]\}.$$

$$\cdot [p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t+\Delta t) - p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}(t)] \geq 0$$

pela convexidade de ϕ_ε , ou seja

$$\int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) \frac{d}{dt} D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}) \cdot p_h \ddot{u}_T^{\varepsilon,h} d\sigma \geq 0 ;$$

$$ii) \quad \int_{\Gamma_1} \frac{d}{dt} \{\psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h})\} D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}) \cdot p_h \ddot{u}_T^{\varepsilon,h} d\sigma =$$

$$= \int_{\Gamma_1} \psi'_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) p_h \dot{u}_3^{\varepsilon,h} D\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon,h}) \cdot p_h \ddot{u}_T^{\varepsilon,h} d\sigma \leq$$

$$\leq \int_{\Gamma_1} |p_h \dot{u}_3^{\varepsilon,h}| |p_h \ddot{u}_T^{\varepsilon,h}| d\sigma ;$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad & \int_{\Gamma_1} \frac{d}{dt} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) p_h \ddot{u}_N^{\varepsilon,h} d\sigma = \\
 & \int_{\Gamma_1} \psi'_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) p_h \dot{u}_3^{\varepsilon,h} p_h \ddot{u}_N^{\varepsilon,h} d\sigma \leq \\
 & \leq \int_{\Gamma_1} |p_h \dot{u}_3^{\varepsilon,h}| |p_h \ddot{u}_N^{\varepsilon,h}| d\sigma ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad & |\dot{L}(v)| = | \langle \dot{f}, v \rangle - \int_{\Gamma_2} \dot{F} v_N d\sigma | \\
 & \leq \{ |\dot{f}|_0 + c |\dot{F}|_{(L^2(\Gamma_2))} \} \cdot |v|_1, \quad \forall v \in V ;
 \end{aligned}$$

A utilização de (i) - (iv) e do teorema do traço nos dará

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |p_h \ddot{u}^{\varepsilon,h}|_0^2 + A_\varepsilon(p_h \dot{u}^{\varepsilon,h}) \} + \\
 & \alpha_v |p_h \ddot{u}^{\varepsilon,h}|_1^2 \leq \int_{\Gamma_1} |p_h \dot{u}_3^{\varepsilon,h}| |p_h \ddot{u}_T^{\varepsilon,h}| d\sigma + \\
 & \int_{\Gamma_1} |p_h \dot{u}_3^{\varepsilon,h}| |p_h \ddot{u}_N^{\varepsilon,h}| d\sigma + \\
 & + \{ |\dot{f}|_0 + c |\dot{F}|_{(L^2(\Gamma_2))} \} |p_h \ddot{u}^{\varepsilon,h}|_1 \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 2 \int_{\Gamma_1} |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}| |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}| d\sigma + \{|\dot{f}|_0 + c|\dot{F}|_{(L^2(\Gamma_2))_3}\} |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_1 \\
 &\leq \frac{1}{\lambda} \int_{\Gamma_1} |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|^2 d\sigma + \lambda \int_{\Gamma_1} |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|^2 d\sigma + \\
 &\quad \frac{\lambda}{2} |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2 + \frac{1}{2\lambda} \{|\dot{f}|^2 + c^2 |\dot{F}|_{(L^2(\Gamma_2))_3}^2\} \leq \\
 &\leq \frac{c}{\lambda} |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2 + \frac{\lambda}{2} (2c+1) |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2\lambda} \{|\dot{f}|^2 + c^2 |\dot{F}|_{(L^2(\Gamma_2))_3}^2\}
 \end{aligned}$$

Tomando $\lambda = \frac{\alpha_v}{(2c+1)}$ e integrando a inequação, obtida desta substituição, de 0 a t, $t \leq T$ e usando as condições iniciais te remos

$$\begin{aligned}
 &|p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(t) + A_e(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h})(t) + \alpha_v \int_0^t |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2(s) ds \leq \\
 (2.33) \quad &\leq K_1 + |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(0) + c' \int_0^t |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2(s) ds,
 \end{aligned}$$

onde

$$K_1 = \int_0^T \{|\dot{f}|_0^2(s) + c^2 |\dot{F}|_{(L^2(\Gamma_2))_3}^2(s)\} ds.$$

Para a aplicação do Lema de Gronwall, resta-nos mostrar que

$$|p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(0) \leq \text{conste};$$

é o que faremos agora.

Avaliando a equação (2.23) em $t = 0$, usando as condições iniciais, observando que $\psi_\varepsilon(0) = 0$ e escolhendo $v^h = \hat{u}^{\varepsilon, h}$ obtemos

$$|p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(0) = \langle f(0), p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}(0) \rangle - \int_{\Gamma_1} F(0) p_h \hat{u}_N^{\varepsilon, h}(0) d\sigma.$$

Como, por hipóteses, $F(0) = 0$:

$$|p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(0) \leq |f|_0(0) |p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}|_0$$

e portanto

$$|p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}|_0(0) \leq |f|_0(0).$$

Assim de (2.33) podemos deduzir a desigualdade

$$\alpha_e |p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}|_1^2(t) \leq K_2 + c' \int_0^t |p_h \hat{u}^{\varepsilon, h}|_1^2(s) ds$$

na qual

$$K_2 = K_1 + |f|_0(0).$$

Finalmente, usando Gronwall,

$$(2.34) \quad |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1(t) \leq \frac{K_2}{\alpha_e} e^{\frac{c't}{\alpha_e}} \leq c(T) .$$

Com este resultado em (2.33) obtemos

$$(2.34') \quad |p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}|_0^2(t) \leq c(T)$$

$$(2.34'') \quad |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_{L^2(0, T; V)} \leq c(T)$$

Em resumo as estimativas a priori (2.34), (2.34') e (2.34'') juntamente com (2.32) mostram que

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_h u^{\varepsilon, h} \text{ estão num limitado de } L^\infty(0, T; V) \\ p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} \text{ estão num limitado de } L^\infty(0, T; V) \\ p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h} \text{ estão num limitado de } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V) \end{array} \right.$$

Mostraremos que estas propriedades permitem-nos passar ao limite em h , o que nos leva a uma solução u^ε de (2.19) com as condições iniciais $u^\varepsilon(0) = \dot{u}^\varepsilon(0) = 0$.

Chamemos $Q_T = [0, T] \times \Omega$. Estando $p_h u^{\varepsilon, h}$ e $p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}$ num limitado de $L^2(0, T; V)$,

$$\int_0^T |p_h u^{\varepsilon, h}|_1^2(s) + |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_1^2(s) ds \leq \text{conste} ,$$

e portanto

$p_h u^{\epsilon, h}$ estão num limitado de $(H^1(Q_T))^3$

Argumentando anologicamente, por estarem $p_h \dot{u}^\epsilon$ e $p_h \dot{u}^{\epsilon, h}$ num limitado de $L^2(0, T; V)$, concluimos

$p_h \dot{u}^{\epsilon, h}$ estão num limitado de $(H^1(Q_T))^3$.

Assim, é possível extrair subsequências, que serão também denotadas $p_h u^{\epsilon, h}$ e $p_h \dot{u}^{\epsilon, h}$ tais que

$$(2.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_h u^{\epsilon, h} \longrightarrow u^\epsilon \\ p_h \dot{u}^{\epsilon, h} \longrightarrow \dot{u}^\epsilon \end{array} \right. \quad \text{fraco em } (H^1(Q_T))^3$$

O teorema de RELICH (cf. NEČAS [13]) pode ser aplicado pois Q_T é um limitado de fronteira continua. Este teorema nos diz que a imersão $(H^1(\Omega))^3$ em $(L^2(\Omega))^3$ é compacta e portanto

$$(2.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_h u^{\epsilon, h} \longrightarrow u^\epsilon \\ p_h \dot{u}^{\epsilon, h} \longrightarrow \dot{u}^\epsilon \end{array} \right. \quad \text{forte em } (L^2(Q_T))^3$$

Por outro lado Q_T é um dominio de \mathbb{R}^4 com fronteira Lipschitziana; estamos nas condições do teorema do traço (cf. NEČAS) que nos afirma ser a aplicação traço uma aplicação compacta de $(H^1(Q_T))^3$ em $L^2(\partial Q_T)$. Assim

$$(2.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_h u^{\varepsilon, h} \longrightarrow u^\varepsilon \\ p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} \longrightarrow \dot{u}^\varepsilon \end{array} \right. \quad \text{forte em } L^2(\partial Q_T)$$

Segue também de (2.35) a existência de subsequência, aqui denotada por $p_h u^{\varepsilon, h}$, $p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}$ e $p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}$ tais que

$$(2.39) \quad p_h u^{\varepsilon, h} \longrightarrow u^\varepsilon \quad \text{fraco em } L^2(0, T; V)$$

$$(2.39') \quad p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} \longrightarrow \dot{u}^\varepsilon \quad " \quad " \quad "$$

$$(2.39'') \quad p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h} \longrightarrow \ddot{u}^\varepsilon \quad " \quad " \quad "$$

Mostraremos a seguir que este limite u^ε é solução de (2.16). Da equivalência entre (2.16) e (2.19) podemos concluir que as aproximações de Galerkin são tais que para quaisquer $\alpha(t) \in L^2(0, T; R)$ e $v \in V$,

$$(2.40) \quad \int_0^T \{ \langle p_h \ddot{u}^{\varepsilon, h}, p_h v^h \rangle + A_e(p_h u^{\varepsilon, h}, p_h v^h) + A_v(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}, p_h v^h) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) p_h v_N^h d\sigma - L(p_h v^h) \} \alpha(t) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) \phi_\varepsilon(\alpha(t) p_h v_T^h) d\sigma \geq$$

$$\frac{1}{2} \|p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}\|_0^2(T) + \frac{1}{2} A_e(p_h u^{\varepsilon, h})(T) + \int_0^T \{A_v(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}) +$$

$$+ \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) p_h \dot{u}_N^{\varepsilon, h} d\sigma + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) \phi_\varepsilon(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}) - L(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h})\} dt$$

Observemos que $\alpha(t) \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ e $v \in V$ então $\alpha(t)v \in L^2(0, T; V)$ e pela convergência do esquema de aproximações (V_h, p_h, r_h)

$$(2.41) \quad \alpha(t) p_h v^h \longrightarrow \alpha(t)v \text{ forte em } L^2(0, T; V)$$

Se $b(u, v)$ é uma forma bilinear contínua definida num espaço normado X ,

$$u_\alpha \longrightarrow u \text{ forte em } X$$

e
$$v_\alpha \longrightarrow v \text{ fraco em } X$$

então podemos verificar sem dificuldade que

$$b(u_\alpha, v_\alpha) \longrightarrow b(u, v) .$$

Usando este resultado, de (2.39)-(2.39') e de (2.41) segue a convergência de

$$\int_0^T \{ \langle p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}, p_h v^h \rangle + A_e(p_h u^{\varepsilon, h}, p_h v^h)$$

$$+ A_v(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}, p_h v^h) \} \alpha(t) dt$$

para

$$\int_0^T \{ \langle \ddot{u}^\varepsilon, v \rangle + A_e(u^\varepsilon, v) + A_v(\dot{u}^\varepsilon, v) \} \alpha(t) dt$$

quando $h \rightarrow 0$.

Por serem normas em espaços de Hilbert, $A_e(v)^{1/2}$ e $A_v(v)^{1/2}$ são fracamente semi contínuas inferiormente. Dai

$$\begin{aligned} & \lim \inf \{ \frac{1}{2} |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}|_0(T) + \frac{1}{2} A_e(p_h u^{\varepsilon, h})(T) + \\ & + \int_0^T A_v(p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}) dt \} \geq \frac{1}{2} |\dot{u}^\varepsilon|_0^2(T) + \\ & + \frac{1}{2} A_e(u^\varepsilon)(T) + \int_0^T A_v(\dot{u}^\varepsilon) dt \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$i) \quad \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) p_h v^h \alpha(t) d\sigma dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u^\varepsilon) v \alpha(t) d\sigma dt$$

pois

$$\left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) p_h v_N^h \alpha(t) d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) v_N \alpha(t) d\sigma dt \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) (p_h v^{h-v})_N \alpha(t) d\sigma dt \right| + \\
 & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \{ \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) - \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \} v_N \alpha(t) d\sigma dt \right| \leq \\
 & \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} |p_h u_3^{\varepsilon,h}| | (p_h v^{h-v}) \alpha(t) | d\sigma dt + \\
 & \int_0^T \int_{\Gamma_1} |p_h u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon| |\alpha(t) v| d\sigma dt \leq \\
 & \leq C |p_h u^{\varepsilon,h}|_{L^2(0,T;V)} |\alpha(t) p_h v^h - \alpha(t) v|_{L^2(0,T;V)} \\
 & + C |p_h u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon|_{L^2(\partial Q_T)} |\alpha(t) v|_{L^2(0,T;V)} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

em consequência de (2.38) e 2.41)

$$\text{ii) } \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) \phi_\varepsilon(\alpha(t) v_T^h) d\sigma dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(\alpha(t) v) d\sigma dt$$

de fato

$$\left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) \phi_\varepsilon(\alpha(t) p_h v_T^h) d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(\alpha(t) v_T) d\sigma dt \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) - \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon)| |\phi_\varepsilon(\alpha(t) p_h v_T^h)| d\sigma dt + \\
 &\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon)| |\phi_\varepsilon(\alpha(t) p_h v_T^h) - \phi_\varepsilon(\alpha(t) v_T)| d\sigma dt \\
 &\leq c \|p_h u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon\|_{L^2(\partial Q_T)} \|\phi_\varepsilon(\alpha(t) p_h v_T^h)\|_{L^2(\partial Q_T)} + \\
 &+ c \|u^\varepsilon\|_{L^2(\partial Q_T)} \cdot \|\alpha(t) p_h v_T^h - \alpha(t) v_T\|_{L^2(0,T;V)} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\phi_\varepsilon(\alpha(t) p_h v_T^h)|^2 d\sigma dt = \\
 &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} \varepsilon^2 + |\alpha(t) p_h v_T^h|^2 d\sigma dt \leq \text{conste}
 \end{aligned}$$

e temos os modos de convergências (2.38) e (2.41);

$$\text{iii) } \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) p_h \dot{u}_N^{\varepsilon,h} d\sigma dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u^\varepsilon) \dot{u}_N^\varepsilon d\sigma dt ;$$

de fato, procedendo como em i mostramos

$$\left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon,h}) p_h \dot{u}_N^{\varepsilon,h} d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u^\varepsilon) \dot{u}_N^\varepsilon d\sigma dt \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |p_h u_3^{\varepsilon, h}|_{L^2(0, T; V)} |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} - \dot{u}^\varepsilon|_{L^2(\partial Q_T)} + \\ &+ |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} - \dot{u}^\varepsilon|_{L^2(\partial Q_T)} |\dot{u}^\varepsilon|_{L^2(0, T; V)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

em vista de (2.38) ;

$$\text{iv) } \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) \phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon, h}) d\sigma dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) d\sigma dt ;$$

esta convergência pode ser mostrada procedendo como em (ii):

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(p_h u_3^{\varepsilon, h}) \phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon, h}) d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) d\sigma dt \right| \\ & \leq c |p_h u^{\varepsilon, h} - u^\varepsilon|_{L^2(\partial Q_T)} |\phi_\varepsilon(p_h \dot{u}_T^{\varepsilon, h})|_{L^2(0, T; V)} + \\ & + c |u^\varepsilon|_{L^2(0, T; V)} |p_h \dot{u}^{\varepsilon, h} - \dot{u}^\varepsilon|_{L^2(\partial Q_T)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

tendo em vista (2.38).

Se usarmos estas convergências em (2.40) obteremos, ao fazer $h \rightarrow 0$,

$$\int_0^T \{ \langle \ddot{u}^\varepsilon, v \rangle + A_e(u^\varepsilon, v) + A_v(\dot{u}^\varepsilon, v) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) v_N d\sigma - L(v) \} \alpha(t) dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) \phi_\varepsilon(\alpha(t) v_T) d\sigma dt \\
 & \geq \frac{1}{2} |\dot{u}^\varepsilon|_0^2(T) + \frac{1}{2} A_e(u^\varepsilon)(T) + \int_0^T A_v(\dot{u}^\varepsilon) dt +
 \end{aligned}$$

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \dot{u}_N^\varepsilon d\sigma + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3) \phi_\varepsilon(\dot{u}^\varepsilon) d\sigma - L(\dot{u}^\varepsilon) \right\} dt$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \{ \langle \ddot{u}^\varepsilon, \alpha(t) v - \dot{u}^\varepsilon \rangle + A_e(u^\varepsilon, \alpha(t) v - \dot{u}^\varepsilon) + \\
 & + A_v(\dot{u}^\varepsilon, \alpha(t) v - \dot{u}^\varepsilon) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) (\alpha(t) v_N - \dot{u}_N^\varepsilon) d\sigma +
 \end{aligned}$$

(2.42)

$$+ \int_{\Gamma} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(\alpha(t) v_T) d\sigma - \int_{\Gamma} \psi_\varepsilon(u_3) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) d\sigma$$

$$> L(\alpha(t) v - \dot{u}^\varepsilon) \} dt, \quad \forall v \in V, \quad \forall \alpha(t) \in L^2(0, T; \mathbb{R}).$$

Seja $S \in (0, T)$, fixo temporariamente, $v \in V$ qualquer. Para a familia de vizinhanças θ_k de S ,

$$\theta_k = (S - \frac{1}{k}, S + \frac{1}{k}),$$

tomemos $\alpha(t)$ e v tais que

$$\alpha(t)v = \begin{cases} \dot{u}^\varepsilon(t) & \text{se } t \notin \theta_k \\ v & \text{se } t \in \theta_k \end{cases}$$

em (2.42). Assim

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_k} \{ \langle \ddot{u}^\varepsilon(t), v - \dot{u}^\varepsilon(t) \rangle + A_e(u^\varepsilon(t), v - \dot{u}^\varepsilon(t)) + \\ & A_v(\dot{u}^\varepsilon(t), v - \dot{u}^\varepsilon(t)) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(t)) (v - \dot{u}^\varepsilon(t))_N d\sigma + \\ & + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(t)) \phi_\varepsilon(v_T) d\sigma - \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(t)) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) d\sigma - \\ & - L(v - \dot{u}^\varepsilon) \} dt \geq 0 . \end{aligned}$$

Dividindo esta equação por $2k$ (medida de θ_k) teremos

$$\begin{aligned} & \langle \frac{1}{2k} \int_{\theta_k} \ddot{u}^\varepsilon dt, v \rangle + A_e(\frac{1}{2k} \int_{\theta_k} u^\varepsilon(t) dt, v) + \\ & + A_v(\frac{1}{2k} \int_{\theta_k} \dot{u}^\varepsilon(t) dt, v) + \int_{\Gamma_1} \frac{1}{2k} \int_{\theta_k} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(t)) dt v_N d\sigma + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.43) \quad & + \int_{\Gamma_1} \frac{1}{2k} \int_{\theta_k} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(t)) dt \phi_\varepsilon(v_T) d\sigma - \frac{1}{2k} \int_{\theta_k} L(v)(t) dt - \\
 & - \frac{1}{2k} \int_{\theta} \{ \langle \ddot{u}^\varepsilon, \dot{u}^\varepsilon \rangle (t) + A_e(u^\varepsilon, \dot{u}^\varepsilon)(t) + A_v(\dot{u}^\varepsilon)(t) + \\
 & + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(t)) \dot{u}_N^\varepsilon(t) d\sigma + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(t)) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon(t)) d\sigma + \\
 & + L(\dot{u}^\varepsilon)(t) \} dt \geq 0 .
 \end{aligned}$$

Por um dos teoremas de Lebesgue, se g é uma função mensurável a valores escolares ou vetoriais

$$\frac{1}{2k} \int_{\theta_k} g(t) dt \rightarrow g(s)$$

para quase todo s , quando $k \rightarrow 0$.

Assim, de (2.43) concluímos que, a menos de s num conjunto de medida nula,

$$\begin{aligned}
 & \langle \ddot{u}^\varepsilon(s), v - \dot{u}^\varepsilon(s) \rangle + A_e(u^\varepsilon(s), v - \dot{u}^\varepsilon(s)) + \\
 (2.44) \quad & + A_v(\dot{u}^\varepsilon(s), v - \dot{u}^\varepsilon(s)) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(s)) (v - \dot{u}^\varepsilon(s))_N d\sigma +
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(s)) \phi_\varepsilon(v_T) d\sigma - \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon(s)) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon(s)) d\sigma \geq$$

$$L(v - \dot{u}^\varepsilon(s)), \quad \forall v \in V.$$

e portanto $u^\varepsilon(s)$ é solução de (2.16).

Verificaremos que as condições iniciais (2.17) e (2.18) são satisfeitas pela função limite u^ε . Seja $\alpha(t) \in C^1(0, T)$ tal que $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(T) = 0$. Como

$$\int_0^T \frac{d}{dt} [\langle p_h u^{\varepsilon, h}, v \rangle \alpha(t)] dt = - \langle p_h u^{\varepsilon, h}(0), v \rangle = 0,$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d}{dt} [\langle p_h u^{\varepsilon, h}(t), v \rangle \alpha(t)] dt &= \int_0^T \langle p_h \dot{u}^{\varepsilon, h}, v \rangle \alpha(t) dt + \\ &+ \int_0^T \langle p_h u^{\varepsilon, h}, v \rangle \alpha'(t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^T \langle \dot{u}^\varepsilon, v \rangle \alpha(t) dt + \\ &+ \int_0^T \langle u^\varepsilon, v \rangle \alpha'(t) dt = \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} [\langle u^\varepsilon, v \rangle \alpha(t)] dt = - \langle u^\varepsilon(0), v \rangle, \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

segue

$$u^\varepsilon(0) = 0.$$

Analogamente, usando (2.39') e (2.39'') mostramos

$$\dot{u}^\varepsilon(0) = 0 .$$

Assim demonstramos que u^ε , limite das aproximações de Galerkin, é solução do problema regularizado (2.16)-(2.18).

4 - PASSAGEM AO LIMITE EM ε :

As estimativas estabelecidas no item anterior são independentes de ε ; isso nos assegura que u^ε , \dot{u}^ε , e \ddot{u}^ε estão num subconjunto limitado de $L^2(0,T;V)$ qualquer que seja ε . Assim podemos extrair subsequências, que também serão indicadas por u^ε , \dot{u}^ε e \ddot{u}^ε , tais que

$$(2.45) \quad u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ fraco em } L^2(0,T;V)$$

$$(2.45') \quad \dot{u}^\varepsilon \rightharpoonup \dot{u} \text{ fraco em } L^2(0,T,V)$$

$$(2.45'') \quad \ddot{u}^\varepsilon \rightharpoonup \ddot{u} \text{ fraco em } L^2(0,T,V)$$

Com os mesmos argumentos usados na demonstração de (2.36), tendo em vista que \dot{u}^ε e \ddot{u}^ε estão num limitado de $L^2(0,T;V)$, concluimos

$$(2.46) \quad u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ fraco em } H^1(Q_T)$$

$$(2.46') \quad \dot{u}^\varepsilon \rightharpoonup \dot{u} \text{ fraco em } H^1(Q_T)$$

Convocando novamente o teorema de Rellich, a compacidade da imersão de $H^1(Q_T)$ em $L^2(Q_T)$ no dá

$$(2.47) \quad u^\varepsilon \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(Q_T) ,$$

$$(2.47') \quad \dot{u}^\varepsilon \longrightarrow \dot{u} \text{ forte em } L^2(Q_T) .$$

Também, pela compacidade da aplicação traço de $H^1(Q_T)$ em $L^2(\partial Q_T)$ (cf. NEČAS [13])

$$(2.48) \quad u^\varepsilon \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(\partial Q_T) ,$$

$$(2.48') \quad \dot{u}^\varepsilon \longrightarrow \dot{u} \text{ forte em } L^2(\partial Q_T) .$$

De (2.44) podemos concluir que, para toda $v \in L^2(0, T; V)$,

$$(2.49) \quad \int_0^T \{ \langle \ddot{u}^\varepsilon, v \rangle + A_e(u^\varepsilon, v) + A_v(\dot{u}^\varepsilon, v) + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) v_N d\sigma + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(v_T) d\sigma - L(v) \} dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |\dot{u}^\varepsilon|_0^2(T) + \frac{1}{2} A_e(u^\varepsilon)(T) + \int_0^T A_v(\dot{u}^\varepsilon) dt +$$

$$+ \int_0^T \left\{ \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \dot{u}_N^\varepsilon d\sigma + \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) d\sigma - L(\dot{u}^\varepsilon) \right\} dt$$

onde

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x,t)v \, dx - \int_{\Gamma_2} F(t)v_N \, d\sigma$$

Com argumentos análogos aos usados na etapa anterior concluímos que, ao fazer $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\int_0^T \{ \langle \ddot{u}^\varepsilon, v \rangle + A_e(u^\varepsilon, v) + A_v(\dot{u}^\varepsilon, v) \} dt$$

converge para

$$\int_0^T \{ \langle \ddot{u}, v \rangle + A_e(u, v) + A_v(\dot{u}, v) \} dt .$$

Também por serem normas em espaços de Hilbert fracamente semi-continua inferiormente,

$$\lim \inf \left\{ \frac{1}{2} |\dot{u}^\varepsilon|_0^2(T) + \frac{1}{2} A_e(u^\varepsilon)(T) + \int_0^T A_v(\dot{u}^\varepsilon) dt \right\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |\dot{u}|_0^2(T) + \frac{1}{2} A_e(u)(T) + \int_0^T A_v(\dot{u}) dt .$$

Observemos que

- as funções ψ_ϵ são Lipchitz contínuas com constantes de Lipchitz independentes de ϵ ;
- ψ_ϵ e ϕ_ϵ satisfazem a

$$(2.50) \quad \psi_\epsilon(v_3) - H(x_3+v_3-1)(x_3+v_3-1) \leq \frac{1}{2} \epsilon, \quad \forall v$$

$$(2.41) \quad \phi_\epsilon(v) - |v| = \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\epsilon^2 + |v|^2} + |v|} \leq \epsilon, \quad \forall v.$$

Com isto serão estabelecidas as convergências seguintes, quando $\epsilon \rightarrow 0$.

$$i) \quad \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\epsilon(u_3^\epsilon) v_N d\sigma dt \rightarrow \int_0^T J(u, v) dt ;$$

Realmente,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\epsilon(u_3^\epsilon) v_N d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} H(x_3+u_3-1)(x_3+u_3-1) v_N d\sigma \right| \\ & \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\psi_\epsilon(u_3) - H(x_3+u_3-1)(x_3+u_3-1)| |v| \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) - \psi_\varepsilon(u_3)| |v| d\sigma dt \leq$$

$$\leq c \frac{\varepsilon}{2} T \mu(\Gamma_1) |v|_{L^2(0,T;V)} + c |u^\varepsilon - u|_{L^2(\partial Q_T)} \cdot |v|_{L^2(0,T;V)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

ii) $\int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(v_T) d\sigma dt \rightarrow \int_0^T j(u,v) dt ;$

de fato,

$$\left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(v_T) d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3 - 1) (x_3 + u_3 - 1) |v_T| d\sigma dt \right|$$

$$\leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) - \psi_\varepsilon(u_3)| |\phi_\varepsilon(v_T)| d\sigma dt +$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\psi_\varepsilon(u_3) - H(x_3 + u_3 - 1) (x_3 + u_3 - 1)| |\phi_\varepsilon(v_T)| d\sigma dt +$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} |H(x_3 + u_3 - 1) (x_3 + u_3 - 1)| |\phi_\varepsilon(v_T) - |v_T|| d\sigma dt \leq$$

$$\leq |u^\varepsilon - u|_{L^2(\partial Q_T)} \cdot \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \varepsilon^2 + |v_T|^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} T \mu(\Gamma_1) \cdot \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \varepsilon^2 + |v_T|^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ c \varepsilon T u(\Gamma_1) |u|_{L^2(0,T;V)} \rightarrow 0 .$$

$$\text{iii) } \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \dot{u}_N^\varepsilon d\sigma dt \rightarrow \int_0^T J(u, \dot{u}) dt$$

pois

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \dot{u}_N^\varepsilon d\sigma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} H(x_3+u_3-1) (x_3+u_3-1) \dot{u}_N d\sigma dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \dot{u}_N^\varepsilon - H(x_3+u_3-1) (x_3+u_3-1) \dot{u}_N^\varepsilon d\sigma dt \right| + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |H(x_3+u_3-1) (x_3+u_3-1)| |\dot{u}^\varepsilon - \dot{u}| d\sigma dt \leq \\ & \leq c \frac{\varepsilon}{2} T u(\Gamma_1) |\dot{u}^\varepsilon|_{L^2(0,T;V)} + c |u^\varepsilon - u|_{L^2(\partial Q_T)} |\dot{u}^\varepsilon|_{L^2(0,T;V)} + \\ & + c |u|_{L^2(0,T;V)} |\dot{u}^\varepsilon - \dot{u}|_{L^2(\partial Q_T)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \int_0^T \int_{\Gamma} \psi_\varepsilon(u_3^\varepsilon) \phi_\varepsilon(\dot{u}_T^\varepsilon) d\sigma dt \rightarrow \int_0^T j(u, \dot{u}) dt ;$$

de fato

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} \{ \psi_\epsilon(u_3^\epsilon) \phi_\epsilon(\dot{u}_T^\epsilon) - H(x_3+u_3-1)(x_3+u_3-1) |\dot{u}_T| \} d\sigma dt \right| \leq \\
 & \leq \int_0^T \int_{\Gamma} \{ \psi_\epsilon(u_3^\epsilon) \phi_\epsilon(\dot{u}_T^\epsilon) - H(x_3+u_3-1)(x_3+u_3-1) |\dot{u}_T^\epsilon| \} d\sigma dt \\
 & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |H(x_3-u_3-1)(x_3+u_3-1)| | |\dot{u}_T^\epsilon| - |\dot{u}_T| | d\sigma dt \leq \\
 & \leq |u^\epsilon - u|_{L^2(\partial Q_T)} \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\epsilon^2 + |\dot{u}^\epsilon|^2) d\sigma dt \right\}^{1/2} \\
 & + \frac{\epsilon}{2} Tu(\Gamma_1) \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\epsilon^2 + |\dot{u}^\epsilon|^2) d\sigma dt \right\}^{1/2} + \\
 & + c \epsilon T \mu(\Gamma_1) |u|_{L^2(0,T;V)} + \\
 & + |u|_{L^2(0,T;V)} \cdot |\dot{u}^\epsilon - \dot{u}|_{L^2(\partial Q_T)} \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Em (iii) e (iv) foram usadas as majorações de (i) e (ii) respectivamente.

Segue de (2.49) e das convergências acima que

$$\int_0^T \{ \langle \ddot{u}, v \rangle + A_e(u, v) + A_v(\dot{u}, \dot{v}) + J(u, v) + j(u, v) - L(v) \} dt \geq \frac{1}{2} |\dot{u}|_0^2(T) + \frac{1}{2} A_e(u)(T) + \int_0^T \{ A_v(\dot{u}) dt + J(u, \dot{u}) + j(u, \dot{u}) - L(\dot{u}) \} dt$$

ou ainda

$$(2.53) \quad \int_0^T \{ \langle \ddot{u}, v - \dot{u} \rangle + A_e(u, v - \dot{u}) + A_v(\dot{u}, v - \dot{u}) + J(u, v - \dot{u}) + j(u, v) - j(u, \dot{u}) - L(v - \dot{u}) \} dt \geq 0$$

para $v \in L^2(0, T; V)$.

Para mostrar que u é solução forte de (2.9) procedemos como na etapa anterior. Fixamos $s \in (0, T)$, tomamos

$$\theta_k = \left(s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k} \right)$$

$$v(t) = \begin{cases} \dot{u}(t) & \text{se } t \in \theta_k, \\ \bar{w} & \text{se } t \notin \theta_k, \end{cases}$$

em uma função qualquer de V , em (2.53) dividida por $2k$. A aplicação do teorema de Lebesgue nos dá (2.9).

Com os mesmos argumentos usados na verificação de (2.17) e (2.18) concluímos as condições iniciais (2.10) e (2.11). Aqui es colhemos

$$v(t) = \alpha(t) w$$

com w função qualquer de V e $\alpha(t) \in C^1(0, T)$ tal que $\alpha(0) = 1$ e $\alpha(T) = 0$.

Como a solução é única, o processo de extração de subsequências de $p_h u^{\varepsilon, h}$ e de u^ε é inútil: a sequência inteira converge para a solução u .

Esta concluída a demonstração do teorema 2.1 .

xxxxx
x

CAPÍTULO 3

ASPECTOS NUMÉRICOS

1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo analizaremos um algoritmo para cálculo de soluções aproximadas do problema proposto no capítulo 1 e teoricamente analisado no capítulo 2. Neste algoritmo é usada uma discretização na variável t , incorrendo em problemas estacionários a serem resolvidos em cada nível de t .

O esquema será proposto na seção 2; nele é usada uma regularização da função $|v|$ presente na expressão de $j(u,v)$. A estabilidade será analisada na seção 3 e o estudo da convergência na seção 4.

2 - O ESQUEMA

Inicialmente introduziremos a terminologia que será utilizada neste capítulo.

Seja $h = (h_1, h_2, h_3)$, $h_i \in \mathbb{R}$; associamos à h a malha

$$R_h = \{M \in \mathbb{R}^3; M = (j_1 h_1, j_2 h_2, j_3 h_3), j_i \in \mathbb{Z},$$

$$0 \leq j_i \leq M_i\}.$$

Para $N > 0$ tomamos

$$k = \frac{T}{N}, \quad t_n = nk, \quad n = 0, 1, \dots, N$$

e

$$\theta_k^n(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [t_n, t_{n+1}), \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} - [t_n, t_{n+1}) \end{cases}$$

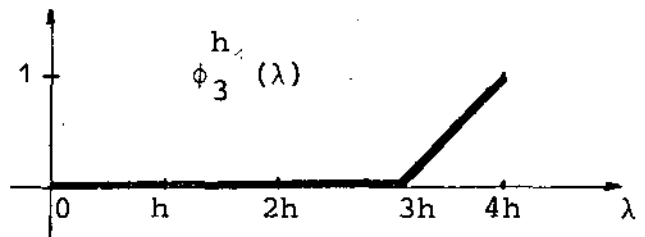
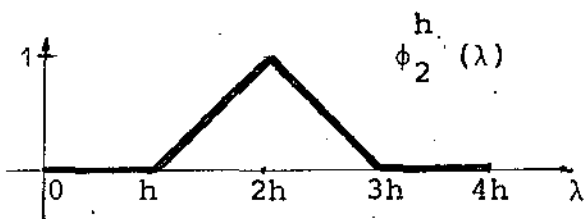
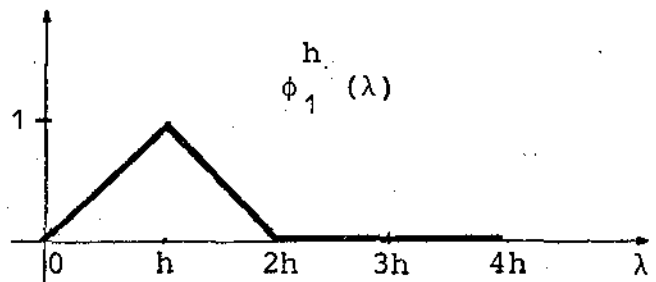
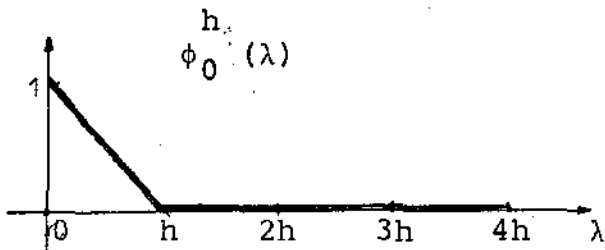
Seja

$$L(\lambda) = \begin{cases} 1 + \lambda, & -1 \leq \lambda \leq 0, \\ 1 - \lambda, & 0 \leq \lambda \leq 1, \\ 0 & , \quad \lambda \in \mathbb{R} - [-1, 1] \end{cases}$$

e

$$\phi_i^s(\lambda) = L\left(\frac{\lambda}{s} - i\right), \quad i = 0, 1, \dots, K-1$$

definidas em $0 \leq \lambda \leq (K+1)s$. Por exemplo, se $K = 3$ as funções $\phi_i^h(\lambda)$ serão



Com estas funções formamos o conjunto de funções

$$\left\{ \varphi_{j_1 j_2 j_3}^\alpha \right\} \quad \alpha = 1, 2, 3 ; j_i = 0, 1, \dots, M_i$$

definidas por

$$\varphi_{j_1 j_2 j_3}^1 = (\phi_{j_1}(x_1) \phi_{j_2}(x_2) \phi_{j_3}(x_3), 0, 0)$$

$$\varphi_{j_1 j_2 j_3}^2 = (0, \phi_{j_1}(x_1) \phi_{j_2}(x_2) \phi_{j_3}(x_3), 0)$$

$$\varphi_{j_1 j_2 j_3}^3 = (0, 0, \phi_{j_1}(x_1) \phi_{j_2}(x_2) \phi_{j_3}(x_3))$$

Chamaremos espaço das aproximantes

$$V_h^1 = \{v(x) = (v_1(x), v_2(x), v_3(x)) \in V \text{ tais que}$$

$$v(x_1, x_2, x_3) = \sum_{j_3=0}^{M_3} \sum_{j_2=0}^{M_2} \sum_{j_1=0}^{M_1} \sum_{i=1}^3 v_i(j_1 h_1, j_2 h_2, j_3 h_3) \varphi_{j_1 j_2 j_3}^i(x_1, x_2, x_3)\}$$

A dimensão deste espaço é $3 M_1 M_2 M_3$.

Designaremos por $U^n = U^n(x)$ a função $U(x, t)$ calculada no nível $t = t_n$, isto é,

$$U^n = U(x, t_n).$$

Para as funções $U^n(x)$, $1 \leq n \leq N$, consideremos:

(i) as diferenças divididas

$$(3.1.a) \quad \partial_t U^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{k} \quad (\text{inclusive } n = 0)$$

$$(3.1.b) \quad \delta_t U^n = \frac{\partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}}{2} = \frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2k}$$

$$(3.1.c) \quad \partial_t^2 U^n = \frac{\partial_t U^n - \partial_t U^{n-1}}{k} = \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{k^2};$$

(ii) as médias ponderadas

$$(3.1.d) \quad U^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U^{n+1} + U^n}{2}, \quad (\text{inclusive } n = 0)$$

$$(3.1.e) \quad w_\theta U^n = \theta U^{n+1} + (1-2\theta)U^n + \theta U^{n-1}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2};$$

(iii) as funções lineares por partes:

$$(3.1.f) \quad U_{h,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ U^n + \frac{U^{n+1} - U^n}{k} (t - t_n) \right\} \theta_k^n(t),$$

$$(3.1.g) \quad \partial_t U_{h,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N-2} \left\{ \partial_t U^n + \frac{\partial_t U^{n+1} - \partial_t U^n}{k} (t - t_n) \right\} \theta_k^n(t),$$

$$(3.1.h) \quad \delta_t U_{h,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N-2} \left\{ \delta_t U^n + \frac{\delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n}{k} (t-t_n) \right\} \theta_k^n(t) ,$$

$$(3.1.i) \quad \partial_t^2 U_{h,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N-2} \left\{ \partial_t^2 U^n + \frac{\partial_t^2 U^{n+1} - \partial_t^2 U^n}{k} (t-t_n) \right\} \theta_k^n(t) ,$$

$$(3.1.j) \quad \tilde{\partial}_t^2 U_{n,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N-2} \left\{ \partial_t^2 U^{n+1/2} + \frac{\partial_t^2 U^{n+1+1/2} - \partial_t^2 U^{n+1/2}}{k} \right\} \theta_k^n(t) ,$$

$\theta_k^n(t)$ função característica de $(t_n, t_{n+1}]$

Introduzida a terminologia que se faz necessária, passare mos a estudar um algoritmo para resolução do problema

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{encontrar } u^\varepsilon \text{ tal que} \\ \langle \ddot{u}^\varepsilon, v - \dot{u}^\varepsilon \rangle + A_e(u^\varepsilon, v - \dot{u}^\varepsilon) + A_v(\dot{u}^\varepsilon, v - \dot{u}^\varepsilon) + \\ + J(u^\varepsilon, v - \dot{u}^\varepsilon) + j_\varepsilon(u^\varepsilon, v) - j_\varepsilon(u^\varepsilon, \dot{u}^\varepsilon) \geq \\ L(v - \dot{u}^\varepsilon), \quad \forall v \in V \\ u^\varepsilon(0) = 0 \\ \dot{u}^\varepsilon(0) = 0 \end{array} \right.$$

Em (3.2) $A_e(u, v)$, $A_v(u, v)$, $J(u, v)$ e $L(v)$ são os mesmos de finidos no capítulo 1; porém, o funcional $j_\varepsilon(u, v)$ receberá nova definição:

$$j_\varepsilon(u, v) = \int_{\Gamma_1} H(x_3 + u_3 + 1)(x_3 + u_3 - 1) \phi_\varepsilon(v_T) d\sigma ,$$

na qual

$$\phi_\varepsilon(v) = (\varepsilon^2 + |v|^2)^{1/2}.$$

Caracterizemos $U^n = U^n(x)$, aproximações em cada nível t_n da solução u^ε de (3.2), através de

$$(3.3) \quad \text{i.} \quad U^n \in V_h^1 \quad n = 2, 3, \dots, N$$

$$(3.4) \quad \text{ii.} \quad U^0 = U^1 = 0$$

$$\text{iii.} \quad \langle \partial_t^2 U^n, v - \delta_t U^n \rangle + A_e(W_\theta U^n, v - \delta_t U^n) +$$

$$+ A_v(\delta_t U^n, v - \delta_t U^n) + \int_{\Gamma_1} H(x_3 + U_3^n - 1)(x_3 + U_3^n - 1)(v - \delta_t U^n)_N d\sigma$$

$$(3.5) \quad + \int_{\Gamma_1} H(x_3 + U_3^n - 1)(x_3 + U_3^n - 1)\phi_\varepsilon(v_T) d\sigma$$

$$- \int_{\Gamma_1} H(x_3 + U_3^n - 1)(x_3 + U_3^n - 1)\phi_\varepsilon(\delta_t U_T^n) d\sigma \geq$$

$$\geq L^n(v - \delta_t U^n), \quad v \in V_h^1, \quad n \geq 1,$$

sendo

$$L^n(v) = \langle f(t_n), v \rangle - \int_{\Gamma_2} F(t_n) v_N d\sigma.$$

Observamos que um esquema assim definido é consistente com o problema contínuo (3.2) e o seu erro local é da ordem de k^2 .

Por outro lado,

$$(i) \quad U^{n+1} = U^{n-1} + 2k \delta_t U^n \quad \text{implica em}$$

$$(3.6) \quad W_\theta U^n = 2k\theta \delta_t U^n + (1-2\theta)U^n + 2\theta U^{n-1};$$

$$(ii) \quad k \frac{\partial_t^2 U^n}{2} + \partial_t U^{n-1} = \frac{\partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}}{2} = \delta_t U^n \quad e$$

portanto

$$(3.7) \quad \partial_t^2 U^n = \frac{2}{k} \{ \delta_t U^n - \partial_t U^{n-1} \}.$$

Usando (3.6) e (3.7) na inequação (3.5) teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{k} \langle \delta_t U^n, v - \delta_t U^n \rangle + 2k\theta A_e(\delta_t U^n, v - \delta_t U^n) + \\ & + A_v(\delta_t U^n, v - \delta_t U^n) + j_\epsilon^n(v) - j_\epsilon^n(\delta_t U^n) \geq \\ & \geq L^n(v - \delta_t U^n) - J(U^n, v - \delta_t U^n) + \frac{2}{k} \langle \partial_t U^{n-1}, v - \delta_t U^n \rangle - \\ & - A_e((1-2\theta)U^n + 2\theta U^{n-1}, v - \delta_t U^n), \end{aligned}$$

$$\forall v \in V_h^1, n \geq 1;$$

Nesta equação

$$j_{\varepsilon}^n(v) = \int_{\Gamma_1} g(U^n) \phi_{\varepsilon}(v_T) d\sigma$$

e

$$g(U^n) = H(x_3 + U_3^{n-1})(x_3 + U_3^{n-1})$$

Como j_{ε}^n é diferenciável, o esquema (3.3)-(3.5) é equivalente a

$$(3.8) \quad U^n \in V_h^1, \quad n = 2, 3, \dots, N$$

$$(3.9) \quad U^0 = U^1 = 0$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \frac{2}{k} \langle \delta_t U^n, v \rangle + 2k\theta A_e (\delta_t U^n, v) + A_v (\delta_t U^n, v) + \\ & D j_{\varepsilon}^n(\delta_t U^n) \cdot v = L^n(v) - J(U^n, v) + \\ & + \frac{2}{k} \langle \partial_t U^{n-1}, v \rangle - A_e ((1-2\theta)U^n + 2\theta U^{n-1}, v), \end{aligned}$$

$$v \in V_h^1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

$$(3.11) \quad U^{n+1} = U^{n-1} + 2k \delta_t U^n$$

que é um algoritmo de cálculo de $U^n(x)$ passo a passo; no n -ésimo passo a incógnita de (3.10) é $\delta_t U^n$ pois $\partial_t U^{n-1}$, U^n e U^{n-1} fo-

ram estabelecidos nos passos anteriores.

Para simplificação visaremos em (3.10) a notação

$$(3.12) \quad a(u, v) = \frac{2}{k} \langle u, v \rangle + 2k\theta A_e(u, v) + A_v(u, v) ;$$

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \ell^n(v) = & L^n(v) - J(U^n, v) + \frac{2}{k} \langle \delta_t U^{n-1}, v \rangle \\ & - A_e(1-2\theta)U^n + 2\theta U^{n-1}, v) . \end{aligned}$$

Mas (3.8)-(3.11) só será um esquema de cálculo efetivo se estivermos aptos, em cada passo, a

$$(3.14) \quad \left| \begin{array}{l} \text{encontrar } \delta_t U^n \text{ tal que} \\ a(\delta_t U^n, v) + D \cdot j_\varepsilon^n(\delta_t U^n) \cdot v = \ell^n(v) \\ \forall v \in V_h^1 ; \end{array} \right.$$

a seguir estudaremos este problema.

Definindo, em V_h^1 , o funcional

$$G_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \ell^n(v) + j_\varepsilon^n(v),$$

(3.14) é equivalente a resolver

$$(3.15) \quad D G_\varepsilon(\delta_t U^n) \cdot v = 0, \quad \forall v \in V_h^1 .$$

Como veremos a seguir, o funcional $G_\varepsilon(v)$ satisfaz as pro-

priedades

- i. $G_\varepsilon(v)$ é contínuo
- ii. $G_\varepsilon(v)$ é estritamente convexo
- iii. $G_\varepsilon(v) \rightarrow \infty$ quando $|v|_1 \rightarrow \infty$

e portanto (3.15) tem solução única, que é exatamente a função que minimiza $G_\varepsilon(v)$. Mostremos estas propriedades.

- i. $G_\varepsilon(v)$ é contínuo

Como

$$|j_\varepsilon^n(v_1) - j_\varepsilon^n(v_2)| \leq \int_{\Gamma_1} g(U^n) |\phi_\varepsilon(v_{1T}) - \phi_\varepsilon(v_{2T})| d\sigma,$$
$$g(U^n) \leq |U_3^n|,$$

e

$$|\phi_\varepsilon(v_{1T}) - \phi_\varepsilon(v_{2T})| \leq |v_{1T} - v_{2T}|,$$

temos

$$|j_\varepsilon^n(v_1) - j_\varepsilon^n(v_2)| \leq \int_{\Gamma_1} |U^n| |v_1 - v_2| d\sigma$$
$$\leq \|U^n\|_{(L^2(\Gamma_1))^3} \|v_1 - v_2\|_{(L^2(\Gamma_1))^3}$$
$$\leq C \|U^n\|_1 \|v_1 - v_2\|_1$$

e está demonstrada a continuidade de $G_\epsilon(v)$.

ii. $G_\epsilon(v)$ é estritamente convexo

Sendo $\phi_\epsilon(v)$ função convexa temos a convexidade de $j_\epsilon^n(v)$. Como $a(v,v)$ e $\ell^n(v)$ são convexas, basta mostrarmos que $a(v,v)$ é estritamente convexa.

Por um lado

$$\begin{aligned} a(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda u + (1-\lambda)v) &= \lambda^2 a(u,u) + \\ &+ (1-\lambda)^2 a(v,v) + 2\lambda(1-\lambda)a(u,v); \end{aligned}$$

por outro lado, a coercividade de $a(v,v)$ nos dá

$$\begin{aligned} \alpha |v-u|_1^2 &\leq a(v-u, v-u) = \\ &= a(v,v) + a(u,u) - 2a(u,v) \end{aligned}$$

e portanto

$$a(v,v) + a(u,u) > 2a(u,v), \quad \forall u, v \in V_h^1, \quad u \neq v.$$

Assim

$$a(\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda^2 a(u,u) +$$

$$\begin{aligned} & + \lambda(1-\lambda)a(u,u) + \lambda(1-\lambda)a(v,v) + (1-\lambda)^2 a(v,v) = \\ & = \lambda a(u,u) + (1-\lambda)a(v,v) \end{aligned}$$

e segue a convexidade estrita de $G_\varepsilon(v)$.

iii. $G_\varepsilon(v) \rightarrow +\infty$ quando $|v|_1 \rightarrow \infty$

Seja $j_\varepsilon^n(v)$ um funcional positivo,

$$G_\varepsilon(v) \geq \frac{1}{2} a(v,v) - \ell^n(v) ;$$

pela coercividade de $a(v,v)$ e continuidade de $\ell^n(v)$,

$$G_\varepsilon(v) \geq \frac{\alpha}{2} |v|_1^2 - |\ell^n|_* |v|_1$$

onde $|\cdot|_*$ é a norma do funcional linear ℓ^n . Assim

$$\lim_{|v|_1 \rightarrow \infty} G_\varepsilon(v) = +\infty .$$

Assegurada a existência de w que resolva (3.14), resta-nos estabelecer o meio de calcula-la.

Seja M_h a dimensão de V_h^1 ; designemos por $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M_h}$ a base de V_h^1 . Assim, se $w \in V_h^1$,

$$w = \sum_{i=1}^{M_h} w_i \varphi_i, \quad w_i \in \mathbb{R} .$$

De (3.14) segue

$$a(w, \varphi_i) + Dj_{\varepsilon}^n(w) \cdot \varphi_i = \ell^n(\varphi_i), \quad i = 1, \dots, M_h ;$$

ou ainda

$$(3.16) \quad \sum_1^{M_h} w_j a(\varphi_j, \varphi_i) + Dj_{\varepsilon}^n(\sum w_j \varphi_j) \cdot \varphi_i = \ell^n(\varphi_i),$$
$$i = 1, \dots, M_h ,$$

que é um sistema não linear de equações.

Existe na literatura (cf. ISAACSON - KELLER [8], ORTEGA - RHEINBOLDT [15], RALL, L.B. [17]) vasta gama de métodos iterativos que podem ser usados para Resolver (3.16): método de Newton, método da secante generalizado, método de Steffensen, método não linear de Gauss - Seidel e suas variações. Analizaremos em detalhes a aplicação do método de Newton no nosso problema específico.

Para simplificar escrevemos o sistema (3.16) na forma

$$f(w) = 0$$

onde $f(w) = [f_1(w), f_2(w), \dots, f_{M_h}(w)]$ é uma matriz coluna e chamaremos J a matriz $M_h \times M_h$, Jacobiano:

$$J(w) \equiv \left(\frac{\partial f_i(w)}{\partial w_j} \right) .$$

Suponhamos (em seguida verificaremos esta hipótese) que próximo da raiz, $\det J(w) \neq 0$.

As iterações do método de Newton são

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} - J^{-1}(w^{(k)}) f(w^{(k)}) .$$

Daí obtemos

$$J(w^{(k)}) (w^{(k)} - w^{(k+1)}) = f(w^{(k)})$$

que um sistema a ser resolvido em $(w^{(k)} - w^{(k+1)})$.

De (3.16) tiramos

$$f_i(w) = \sum_{j=1}^{M_h} w_j a(\varphi_j, \varphi_i) + D j_\varepsilon^n(\sum w_j \varphi_j) \cdot \varphi_i - \ell^n(\varphi_i) ;$$

portanto

$$\frac{\partial f_i(w)}{\partial w_j} = a(\varphi_j, \varphi_i) + (D^2 j_\varepsilon^n(w) \varphi_j, \varphi_i) .$$

Como $a(u,v)$ é coerciva e $j_\varepsilon^n(v)$ é convexa segue que $J(w)$ é uma matriz positiva definida.

Sendo $f(w)$ duas vezes diferenciável e $J(w)$ não singular a convergência do método de Newton é quadrática (cf. ISAACSON - KELLER [8]), desde que a aproximação inicial w^0 seja conve

nientemente escolhida.

Em resumo, a versão final do algoritmo proposto para o cálculo da solução de

$$(3.17) \quad \langle \ddot{u}^\varepsilon, v \rangle + A_e(u^\varepsilon, v) + A_v(\dot{u}^\varepsilon, v) +$$

$$(3.18) \quad J(u^\varepsilon, v) + D_j^\varepsilon(u^\varepsilon) \cdot v = L(v) \quad , \quad \forall v \in v_h^1$$

$$(3.18) \quad u^\varepsilon(0) = 0$$

$$(3.19) \quad \dot{u}^\varepsilon(0) = 0$$

em cada nível de tempo $t_n = nk \hat{e}$

ALGORITMO 3.1

(A) $U^n \text{ e } v_h^1 \quad n = 2, 3, \dots, N ;$

(B) $U^1 = U^0 = 0 ;$

(C) para $n = 1, 2, \dots, n-1$ calculamos

$$\delta_t U^n = w^\ell = \sum_{j=1}^{M_h} w_j^\ell \varphi_j$$

pelo método iterativo

$$\begin{cases} w^0 = (w_1^0, \dots, w_{M_h}^0) \\ J(w^k)(w^k - w^{k+1}) = f(w^k), \quad k = 1, 2, \dots, N-2. \end{cases}$$

Neste sistema linear de equações

$$J_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j) + (D^2 j_\varepsilon^n(w^k) \varphi_j, \varphi_i),$$

$$f_i(w^k) = a(w^k, \varphi_i) + D j_\varepsilon^n(w) \varphi_i - \ell^n(\varphi_i).$$

$$(D) \quad U^{n+1} = U^{n-1} + \delta_t U^n, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

3 - ESTABILIDADE DO ESQUEMA DE EVOLUÇÃO

Com os valores de $U^n(x)$ calculados pelo algoritmo 3.1 construímos as funções $U_{h,k}(x,t)$, $\partial_t U_{h,k}(x,t)$, $\delta_t U_{h,k}(x,t)$, $\partial_t^2 U_{h,k}(x,t)$ e $\delta_t^2 U_{h,k}(x,t)$ definidas em (3.1 f) - (3.1 j). Para estas funções mostraremos o resultado seguinte.

PROPOSIÇÃO 3.1: Suponhamos que as hipóteses do teorema 2.1 sejam satisfeitas e tomemos $0 < \theta \leq 1/2$.

Então

- (i) $\{U_{h,k}\}, \{\partial_t U_{h,k}\}$ estão num conjunto limitado de $L^\infty(0, T; V)$;

(ii) $\{\partial_t^2 U_{h,k}\}$ estão num conjunto limitado de $L^\infty(0,T; H)$;

(iii) $\{\delta_t U_{h,k}\}$ e $\{\delta_t^2 U_{h,k}\}$ estão num conjunto limitado de $L^2(0,T; V)$.

DEMONSTRAÇÃO

Em primeiro lugar mostraremos que

$$(3.20) \quad |\partial_t U^{j+1}|_0^2(t) + |U^{j+1}|_1^2(t) + \sum_1^N k |\delta_t U^n|_1^2 \leq C(T) ,$$

$$0 \leq j \leq N-1 .$$

Tomando em (3.5)

$$v = \delta_t U^n + \lambda w , \quad w \in V_h , \quad \lambda > 0 ,$$

fazendo $\lambda \rightarrow 0$ e levando em conta que a inequação resultante também é válida para $-w$ mostramos a equivalência de (3.5) à equação

$$(3.21) \quad \begin{aligned} & \langle \partial_t^2 U^n, w \rangle + A_e(w_\theta U^n, w) + A_v(\delta_t U^n, w) + \\ & + \int_{\Gamma_1} g(U^n) w_N d\sigma + \int_{\Gamma} g(U^n) D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^n) \cdot w_T d\sigma = L^n(w) \end{aligned}$$

$$vw \in V_h^1 ,$$

onde

$$g(U^n) = H(x_3 + U_3^n - 1)(x_3 + U_3^n - 1).$$

Temos

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \langle \partial_t^2 U^n, \delta_t U^n \rangle &= \left\langle \frac{\partial_t U^n - \partial_t U^{n-1}}{k}, \frac{\partial_t U^n + \partial_t U^{n-1}}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2k} \{ |\partial_t U^n|_0^2 - |\partial_t U^{n-1}|_0^2 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad 2k A_e(w_\theta U^n, \delta_t U^n) &= 2k A_e(\theta U^{n+1} + (1-2\theta)U^n + \theta U^{n-1}, \delta_t U^n) = \\ &= \theta \{ A_e(U^{n+1}) - A_e(U^{n-1}) \} + 2k(1-2\theta) A_e(U^n, \delta_t U^n); \end{aligned}$$

(iii) de $g(U^n) \leq |U^n|$ e do teorema do traço segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} g(U^n) (\delta_t U^n)_N d\sigma \right| &\leq \int_{\Gamma_1} |U^n| |\delta_t U^n| d\sigma \\ &< C \lambda_1 |U^n|_1^2 + \frac{C}{4\lambda_1} |\delta_t U^n|_1^2, \end{aligned}$$

$\forall \lambda_1 > 0$ e C a constante do teorema do traço;

(iv) ϕ_ϵ é tal que $|D\phi_\epsilon(w) \cdot p| \leq |p|$ e portanto

$$\left| \int_{\Gamma_1} g(U^n) D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^n) \cdot \delta_t U_T^n d\sigma \right|$$

$$\leq \int_{\Gamma_1} |U^n| |\delta_t U_T^n| d\sigma$$

$$\leq C\lambda_1 |U^n|_1^2 + \frac{C}{4\lambda_1} |\delta_t U^n|_1^2, \quad \forall \lambda_1 > 0$$

$$(v) \quad L^n(v) = \int_{\Omega} f(x, t_n) v \, dx - \int_{\Gamma_2} F(x, t_n) v_N \, d\sigma$$

então

$$|L^n(v)| \leq |f^n|_0 |v|_0 + C |F^n|_{(L^2(\Gamma_3))^3} |v|_1 \leq$$

$$\leq C\lambda_1 \{ |f^n|_0^2 + |F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3} \} + \frac{C}{2\lambda_1} |v|_1^2$$

para qualquer $\lambda_1 > 0$;

Tomando em (3.21) $w = \delta_t U^n$ e usando de (i) - (v) temos

$$\{ |\partial_t U^n|_0^2 - |\partial_t U^{n-1}|_0^2 \} + \theta \{ A_e(U^{n+1}) - A_e(U^{n-1}) \} +$$

$$2k A_v(\delta_t U^n, \delta_t U^n) \leq 2k(1-2\theta) A_e(U^n, \delta_t U^n) +$$

$$2k \left(2C\lambda_1 |U^n|_1^2 + \frac{C}{2\lambda_1} |\delta_t U^n|_1^2 + C\lambda_1 (|f^n|_0^2 + |F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}^2) \right) +$$

$$\frac{C}{2\lambda_1} |\delta_t U^n|_1^2 \} .$$

Mas

$$A_e(u,v) \leq C_1 A_e(u)^{1/2} A_e(v)^{1/2} \text{ e portanto}$$

$$A_e(U^n, \delta_t U^n) \leq C_1 |U^n|_1 |\delta_t U^n|_1 \leq C_1 \lambda_1 |U^n|_1^2 + \frac{C_1}{4\lambda_1} |\delta_t U^n|_1^2 ;$$

disto e da coercividade de $A_v(u,v)$ obtemos

$$\begin{aligned} & \{ |\partial_t U^n|_0^2 - |\partial_t U^{n-1}|_0^2 \} + \theta \{ A_e(U^{n+1}) - A_e(U^{n-1}) \} + \\ & + 2k \alpha_v |\delta_t U^n|_1^2 \leq 2k C_2 \{ 3\lambda_1 |U^n|_1^2 + \frac{1}{\lambda_1} |\delta_t U^n|_1^2 + \\ & + \lambda_1 (|f^n|_0^2 + |F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}) \} , \quad \forall \lambda_1 > 0 , \end{aligned}$$

onde $C_2 = \max(C, C_1)$.

Escolhendo λ_1 tal que $\frac{C_2}{\lambda_1} = \frac{\alpha_v}{2}$ obtemos

$$\{ |\partial_t U^n|_0^2 - |\partial_t U^{n-1}|_0^2 \} + \theta \{ A_e(U^{n+1}) - A_e(U^{n-1}) \} +$$

$$k\alpha_v |\delta_t U^n|_1^2 \leq k\lambda_2 \{ |U^n|_1^2 + |f^n|_0^2 + |F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}^2 \} ,$$

sendo $\lambda_2 = \frac{12 C_2}{\alpha_v}$

Somando estas desigualdades de $n = 1$ a $n = j \leq N-1$ e considerando que $U^0 = U^1 = 0$ temos

$$(3.22) \quad \begin{aligned} & |\partial_t U^j|_0^2 + \theta \alpha_e |U^{j+1}|_1^2 + \alpha_v \sum_{n=1}^j k |\delta_t U^n|_1^2 \leq \\ & \leq k \lambda_2 \left\{ \sum_{n=1}^j |U^n|_1^2 + \sum_{n=1}^j |f^n|_2^2 + \sum_{n=1}^j |F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Como por hipótese

$$f \in L^2(0, T; H) \quad \text{e} \quad F \in L^2(0, T; (L^2(\Gamma_2))^3)$$

segue

$$\frac{k \lambda_2}{\theta \alpha_e} \left\{ \sum_1^j |f^n|_0^2 + \sum_1^j |F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}^2 \right\} \leq k_1$$

De (3.22) concluimos que

$$|U^{j+1}|_1^2 \leq k_1 + \frac{\lambda_2}{\theta} \sum_1^j k |U^n|_1^2$$

e pela desigualdade de Gronwall discreta

$$|U^{j+1}|_1^2 \leq k_1 \exp\left(\frac{\lambda_2}{\theta} k j\right),$$

$1 \leq j \leq N-1$. Como $k \cdot j \leq (N-1)k < T$ obtemos

$$|U^{j+1}|_1^2 \leq \text{conste } (T)$$

Voltando com este resultado em (3.22) estará concluída a demonstração de (3.20). Observemos que $C(T)$, além de T , depende também dos dados do problema.

Agora mostraremos que

$$(3.23) \quad |\partial_t^2 U^{j+1}|_0^2 + |\partial_t U^j|_1^2 + \sum_1^{N-1} k |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 \leq C(T)$$

Subtraindo a equação (3.21) no nível n da mesma equação no nível $n+1$ obtemos

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t^2 U^{n+1} - \partial_t^2 U^n, w \rangle + A_e (W_\theta U^{n+1} - W_\theta U^n, w) + \\ & + A_v (\delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n, w) + \int_{\Gamma_1} \{g(U^{n+1}) - g(U^n)\} w_N d\sigma + \\ & + \int_{\Gamma_1} \{g(U^{n+1}) D\phi_\epsilon(\delta_t U^{n+1}) - g(U^n) D\phi_\epsilon(\delta_t U^n)\} \cdot w_T d\sigma = \\ & = (L^{n+1} - L^n)(w), \quad \forall w \in V_h^1. \end{aligned}$$

Tomando $w = \delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n$, usando

$$(i) \quad w = \delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n = \frac{\partial_t U^{n+1} - \partial_t U^{n-1}}{2} =$$

$$= \frac{k}{2} (\partial_t^2 U^{n+1} + \partial_t^2 U^n) = k \delta_t \partial_t U^n = k \partial_t^2 U^{n+1/2} ;$$

$$(ii) \quad w_\theta U^{n+1} - w_\theta U^n = k w_\theta \partial_t U^n ,$$

somando e subtraindo $\int_{\Gamma_1} g(U^n) D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^{n+1}) \cdot w_T d\sigma$, temos

$$\frac{k}{2} \{ |\partial_t^2 U^{n+1}|_0^2 - |\partial_t^2 U^n|_0^2 \} + k^2 A_e (w_\theta \partial_t U^n, \delta_t \partial_t U^n) +$$

$$k^2 A_v (\partial_t^2 U^{n+1/2}) + k \int_{\Gamma_1} \{g(U^{n+1}) - g(U^n)\} \partial_t^2 U_N^{n+1/2} d\sigma +$$

$$+ k \int_{\Gamma_1} \{g(U^{n+1}) - g(U^n)\} D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^{n+1}) \cdot \partial_t^2 U_T^{n+1/2} d\sigma +$$

(3.24)

$$+ \int_{\Gamma_1} g(U^n) \{D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^{n+1}) - D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^n)\} \cdot (\delta_t U_T^{n+1} - \delta_t U_T^n) d\sigma =$$

$$= k^2 \partial_t L^n (\partial_t^2 U^{n+1/2}) .$$

Mas,

$$(i) \quad k A_e (W_\theta \partial_t U^n, \delta_t \partial_t U^n) = \frac{\theta}{2} [A_e (\partial_t U^{n+1}) - A_e (\partial_t U^{n-1})] + \\ + (1-2\theta)k A_e (\partial_t U^n, \delta_t \partial_t U^n) ;$$

$$(ii) \quad A_e (\partial_t U^n, \delta_t \partial_t U^n) = A_e (\partial_t U^n, \partial_t^2 U^{n+1/2}) \\ \leq C_1 \{ \gamma |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 + \frac{1}{4\gamma} |\partial_t U^n|_1^2 \} ;$$

$$(iii) \quad |\partial_t L^n (\partial_t^2 U^{n+1/2})| \leq 2\gamma C |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 + \\ \frac{C}{4\gamma} \{ |\partial_t f^n|_0^2 + |\partial_t F^n|_{(L^2(\Gamma_2))}^2 \}, \quad \forall \gamma > 0 .$$

$$(iv) \quad |H(x_3+u_3-1)(x_3+u_3-1) - H(x_3+v_3-1)(x_3+v_3-1)| \leq |u-v|$$

e pertanto

$$|\int_{\Gamma_1} \{g(U^{n+1}) - g(U^n)\} \cdot \partial_t^2 U^{n+1/2} d\sigma| \leq \\ \leq \int_{\Gamma_1} |U^{n+1} - U^n| |\partial_t^2 U^{n+1/2}| d\sigma \leq$$

$$\leq k \int_{\Gamma_1} |\partial_t U^n| |\partial_t^2 U^{n+1/2}| d\sigma$$

$$\leq k C \left\{ \frac{1}{4\gamma} |\partial_t U^n|_1^2 + \gamma |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 \right\}, \quad \forall \gamma > 0;$$

(v) ϕ_ϵ é tal que $|D\phi_\epsilon(v) \cdot p| \leq |p| \quad \forall p \in V$

e então

$$\left| \int_{\Gamma_1} \{g(U^{n+1}) - g(U^n)\} D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^{n+1}) \cdot \partial_t^2 U_T^{n+1/2} d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \int_{\Gamma} |U^{n+1} - U^n| |\partial_t^2 U^{n+1/2}| d\sigma \leq$$

$$\leq kC \left\{ \frac{1}{4\gamma} |\partial_t U^n|_1^2 + \gamma |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 \right\}, \quad \forall \gamma > 0;$$

(vi) sendo ϕ_ϵ é convexa ,

$$\{D\phi_\epsilon(x_1) - D\phi_\epsilon(x_2)\} \cdot (x_1 - x_2) \geq 0$$

e portanto

$$\int_{\Gamma_1} g(U^n) \{D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^{n+1}) - D\phi_\epsilon(\delta_t U_T^n)\} \cdot (\delta_t U_T^{n+1} - \delta_t U_T^n) d\sigma \geq 0 .$$

Usando (i) - (vi) em (3.24) dividida por $\frac{k}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} & \{ |\partial_t^2 U^{n+1}|_0^2 - |\partial_t^2 U^n|_0^2 \} + \theta \{ A_e(\partial_t U^{n+1}) - A_e(\partial_t U^{n-1}) \} + \\ & + 2k\alpha_v |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 \leq 2k [(1-2\theta) C_1 \{ \gamma |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 + \\ & + \frac{1}{4\gamma} |\partial_t U^n|_1^2 \} + 4C\gamma |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 + \frac{C}{2\gamma} |\partial_t U^n|_1^2 + \\ & + \frac{C}{4\gamma} \{ |\partial_t f^n|_0^2 + |\partial_t F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}^2 \}] \end{aligned}$$

Agora escolhendo γ tal que $\gamma(4C + (1-2\theta)C_1) = \frac{\alpha_v}{2}$ temos

$$\begin{aligned} & \{ |\partial_t^2 U^{n+1}|_0^2 - |\partial_t^2 U^n|_0^2 \} + \theta \{ A_e(\partial_t U^{n+1}) - A_e(\partial_t U^{n-1}) \} + \\ & + k\alpha_v |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 \leq k C_2 \{ |\partial_t U^n|_1^2 + |\partial_t f^n|_0^2 + \\ & + |\partial_t F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}^2 \} , \end{aligned}$$

onde $C_2 = \max \left\{ \frac{C_1(1-2\theta) + 2C}{4\gamma} , \frac{C}{4\gamma} \right\}$.

Somando estas equações nos níveis $n = 1$ ao $n = j < N-1$:

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad & |\partial_t^2 U^{j+1}|_0^2 + \theta A_e(\partial_t U^{j+1}) + \alpha_v \sum_1^j k |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 \leq \\
 & \leq |\partial_t^2 U^1|_0^2 + \theta A_e(\partial_t U^1) + C_2 \sum_1^j k |\partial_t U^n|_1^2 + \\
 & C_2 \sum_1^j k |\partial_t f^n|_0^2 + C_2 \sum_1^j k |\partial_t F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3}
 \end{aligned}$$

Pelas hipóteses $\dot{f} \in L^2(0, T; H)$ e $\dot{F} \in L^2(0, T; (L^2(\Gamma_2))^3)$ e portanto

$$(3.26) \quad \sum_1^j k |\partial_t f^n|_0^2 + \sum_1^j k |\partial_t F^n|_{(L^2(\Gamma_2))^3} \leq \text{constante.}$$

Agora mostraremos que

$$(3.27) \quad |\partial_t^2 U^1|_0^2 + \theta A_e(\partial_t U^1) \leq \text{constante.}$$

Tomando (3.21) no nível $n=1$ e

$$w = \partial_t^2 U^1 = \frac{\partial_t U^1}{k} = 2 \frac{\delta_t U^1}{k} = \frac{U^2}{k^2}$$

temos

$$\begin{aligned} |\partial_t^2 U^1|_0^2 + \theta \alpha_e (\partial_t U^1) + \frac{2}{k} \alpha_v (\delta_t U^1) &= \\ &= (L^1 - L^0) \left(\frac{\partial_t U^1}{k} \right) + L^0 (\partial_t^2 U^1) \end{aligned}$$

Como por hipótese $F(0) = 0$ segue

$$L^0(v) = \int_{\Omega} f(x, 0) v \, dx - \int_{\Gamma_2} F(x, 0) v_N \, d\sigma = \int_{\Omega} f(x, 0) v \, dx ;$$

então

$$L^0(v) \leq |f(0)|_0 |v|_0$$

Assim

$$|\partial_t^2 U^1|_0^2 + \theta \alpha_e |\partial_t U^1|_1^2 + \frac{2}{k} \alpha_v |\delta_t U^1|_1^2 \leq$$

$$\leq |\partial_t L^0| |\partial_t U^1|_1 + |f(0)|_0 |\partial_t^2 U^1|_0$$

$$\leq \frac{1}{4\gamma} |\partial_t L^0|^2 + \lambda |\partial_t U^1|_1^2 + \frac{1}{4\lambda_1} |f(0)|_0^2 + \lambda_1 |\partial_t^2 U^1|_0^2 ;$$

escolhendo $\lambda = \frac{\theta \alpha_e}{2}$ e $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ temos

$$\frac{1}{2} |\partial_t^2 U^1|_0^2 + \frac{\theta\alpha_e}{2} |\partial_t U^1|_1^2 + \frac{2\alpha_v}{k} |\delta_t U^1|_1^2 \leq$$

$$\leq C\{|\partial_t L^0|^2 + |f(0)|_0^2\} = \text{constante}$$

e fica demonstrado (3.27).

Usando (3.26) e (3.27) em (3.25) temos

$$|\partial_t^2 U^{j+1}|_0^2 + \theta\alpha_e |\partial_t U^{j+1}|_1^2 + \alpha_v \sum_1^j k |\partial_t^2 U^{n+1/2}|_1^2 \leq$$

(3.28)

$$\leq k_1 + C_2 \sum_1^j k |\partial_t U^n|_1^2$$

para todo $j \leq N-1$. Recorrendo, mais uma vez à desigualdade de Gronwall discreta (cf. LIONS [11]) em

$$|\partial_t U^{j+1}|_1^2 \leq \frac{k_1}{\theta\alpha_e} + \frac{C_2}{\theta\alpha_e} \sum k |\partial_t U^n|_1^2$$

obtemos

$$|\partial_t U^{j+1}|_1^2 \leq \frac{k_1}{\theta\alpha_e} \exp \frac{C_2}{\theta\alpha_e} k j \leq$$

$$\leq \frac{k_1}{\theta\alpha_e} \exp \frac{C_2}{\theta\alpha_e} T = C(T) .$$

Có com este resultado em (3.28) encerramos a demonstração da delimi

tação (3.23).

Para $t_0 \in [0, T]$, $t_0 \in \theta_k^i(t)$ para algum i ,

$$U_{h,k}(x, t_0) = U^i + \frac{U^{i+1} - U^i}{k} (t_0 - t_i),$$

e então

$$|U_{h,k}|_1(t_0) \leq \sup \{ |U^i|_1, |U^{i+1}|_1 \} \leq C(T)^{1/2}$$

o que demonstra que

$\{U_{h,k}\}$ estão em limitados de $L^\infty(0, T; V)$

Analogamente mostramos que $\{\partial_t U_{h,k}\}$ estão num limitado de $L^\infty(0, T; V)$ e que $\{\partial_t^2 U_{h,k}\}$ estão num limitado de $L^\infty(0, T; H)$.

Também

$$\int_0^T |\delta_t U_{h,k}|_1^2(t) dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{N-1} |\delta_t U^n + \frac{\delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n}{k} (t - t_n)|_1^2 \theta_k^n(t) dt$$

$$\leq 2 \left\{ \sum_1^{N-1} k |\delta_t U^n|_1^2 + \frac{k}{2} \sum_1^{N-1} |\delta_t U^{n+1} - \delta_t U^n|_1^2 \right\} \leq$$

$$\leq C \left\{ \sum_1^{N-1} 2k (|\partial_t U^n|_1^2 + |\partial_t U^{n-1}|_1^2) + \sum_1^{N-1} k (|\partial_t U^{n+1}|_1^2 + |\partial_t U^{n-1}|_1^2) \right\} \leq C_1(T);$$

portanto $\{\delta_t U_{n,k}\}$ estão num limitado de $L^2(0,T ; V)$.

Com argumentos análogos concluimos que $\{\delta_t U_{h,k}\}$ estão num conjunto limitado de $L^2(0,T ; V)$.

Esta concluída a demonstração da proposição 3.1.

4. CONVERGÊNCIA DO ESQUEMA NUMÉRICO

Como consequências diretas da proposição 3.1:

$\{U_{h,k}\}$ estão num limitado de $L^2(0,T ; V)$,

$\{\partial_t U_{h,k}\}$ estão num limitado de $L^2(0,T ; V)$,

$\{\partial_t^2 U_{h,k}\}$ estão num limitado de $L^2(0,T ; H)$;

portanto podemos extrair subsequências, que serão também indicadas por $U_{h,k}$, $\partial_t U_{h,k}$ e $\partial_t^2 U_{h,k}$, tais que

$$(2.29a) \quad U_{h,k} \rightarrow U \text{ fraco em } L^2(0,T ; V)$$

$$(3.29b) \quad \partial_t U_{h,k} \rightarrow U_1 \text{ fraco em } L^2(0,T ; V)$$

$$(3.29c) \quad \partial_t^2 U_{h,k} \rightarrow U_2 \text{ fraco em } L^2(0,T ; H)$$

Da definição de $U_{h,k}(x,t)$ temos

$$\dot{U}_{h,k}(x,t) \in L(0,T; H) ,$$

segue então

$$\int_0^T |U_{h,k}|_1^2(t) dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\dot{U}_{h,k}(x,t)|^2 dx dt < \infty$$

isto é

$$U_{h,k}(x,t) \in H^1(Q_T)$$

onde $Q_T = [0,T] \times \Omega$. Também:

$$\partial_t \dot{U}_{h,k}(x,t) \in L^2(0,T; H) ,$$

o que implica em

$$\partial_t U_{h,k}(x,t) \in H^1(Q_T) .$$

Sendo a imersão de $H^1(Q_T)$ em $L^2(Q_T)$ compacta (cf. NEČAS [13])

$$(3.30a) \quad U_{h,k} \rightarrow U \text{ forte em } L^2(Q_T) ,$$

$$(3.30b) \quad \partial_t U_{h,k} \rightarrow U_1 \text{ forte em } L^2(Q_T) .$$

Também por ser compacta a aplicação traço (cf. NECAS [13]) de $H^1(Q_T)$ em $L^2(\partial Q_T)$,

$$(3.31a) \quad U_{h,k} \rightarrow U \text{ forte em } L^2(\partial Q_T) ,$$

$$(3.31b) \quad \partial_t U_{h,k} \rightarrow U_1 \text{ forte em } L^2(\partial Q_T)$$

A seguir mostraremos que $U_1 = \dot{U}$ e $U_2 = \ddot{U}$.

Chamemos

— $(D(0,T))^3 = (C_0^\infty(0,T))^3$ com a noção de convergência

i) ϕ_i possuem suporte compacto em $(0,T)$

ii) $D^\alpha \phi_i \rightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente para qualquer α

— $D'(0,T ; V) =$ espaço das aplicações lineares e contínuas de $(D(0,T))^3$ em V , i.e., o espaço das distribuições.

As funções $f \in L^2(0,T ; V)$ estão associadas distribuições $T(f) \in D'(0,T ; V)$

$$\psi \in (D(0,T))^3 \rightarrow \langle T(f), \psi \rangle = \int_0^T f(t)\psi(t)dt \in V ;$$

também

(i) Se $\langle T(f_1), \psi \rangle = \langle T(f_2), \psi \rangle$, $\forall \psi \in (D(0,T))^3$, então $f_1 = f_2$, quaisquer que sejam f_1 e f_2 em $L^2(0,T ; V)$;

(ii) Se $f_n \in L^2(0, T; V)$, $n = 0, 1, \dots$, e $f_n \rightarrow f_0$ fraco em $L^2(0, T; V)$ então

$$\langle T(f_n), \psi \rangle \rightarrow \langle T(f_0), \psi \rangle \quad \forall \psi \in (D(0, T))^3; \text{ isto é,}$$

$$T(f_n) \rightarrow T(f_0) \text{ no sentido de distribuições.}$$

Com esta notação, fixando $\psi \in (D(0, T))^3$,

$$\begin{aligned} \langle T(\partial_t U_{h,k}), \psi \rangle &= \int_0^T \sum_0^{N-1} \left\{ \partial_t U^n + \frac{\partial_t U^{n+1} - \partial_t U^n}{k} (t - t_n) \right\} \theta_k^n(t) \psi(t) dt = \\ &= \sum_1^{N-1} \frac{1}{k} (U^{n+1} - U^n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi(t) dt + \\ &\quad + \sum_0^{N-1} \frac{1}{k} (\partial_t U^{n+1} - \partial_t U^n) \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t - t_n) \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Agora, usando a fórmula de somatório por partes (cf. DAHLQUIST - BJÖRCK [23])

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n (b_{n+1} - b_n) = a_N b_N - a_0 b_0 - \sum_{n=0}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) b_{n+1},$$

e tomando $0 < k < \delta(\psi)$, $\delta > 0$ tal que ψ se anula fora de $[\delta, T - \delta]$:

$$\langle T(\partial_t U_{h,k}), \psi \rangle = - \frac{1}{k} \sum_0^{N-1} U^{n+1} \left\{ \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} \psi(t) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \psi(t) dt \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{k} \sum_0^{N-1} \partial_t U^{n+1} \left\{ \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} (t-t_{n+1}) \psi(t) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t-t_n) \psi(t) dt \right\} = \\
 & = - \frac{1}{k} \sum_0^{N-1} U^{n+1} \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} \psi(t) - \psi(t-k) dt - \\
 & \quad - \frac{1}{k} \sum_0^{N-1} \partial_t U^{n+1} \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} (t-t_{n+1}) \{ \psi(t) - \psi(t-k) \} dt = \\
 & = - \sum_0^{N-1} \int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} \left\{ U^{n+1} + \frac{U^{n+2} - U^{n+1}}{k} (t-t_{n+1}) \right\} \left\{ \frac{\psi(t) - \psi(t-k)}{k} \right\} dt = \\
 & = - \sum_0^{N-1} \int_0^T \left\{ U^{n+1} + \frac{U^{n+2} - U^{n+1}}{k} (t-t_{n+1}) \right\} \theta_k^{n+1}(t) \left\{ \frac{\psi(t) - \psi(t-k)}{k} \right\} dt = \\
 & = - \int_0^T U_{h,k} \left\{ \frac{\psi(t) - \psi(t-k)}{k} \right\} dt .
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle T(\partial_t U_{h,k}), \psi \rangle \xrightarrow{k, h \rightarrow 0} - \langle T(U), \dot{\psi} \rangle = \langle T(\dot{U}), \psi \rangle$$

Mas de (3.29b) segue

$$\langle T(\partial_t U_{h,k}), \psi \rangle \longrightarrow \langle T(U_1), \psi \rangle$$

e portanto $\dot{U} = U_1$ q.t.p. . Seguindo exatamente os mesmos passos mostramos que $U_2 = \ddot{U}$ q.t.p. .

Em resumo, verificamos os seguintes modos de convergência:

$$(3.32) \quad U_{h,k} \rightarrow U \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) fraco em } L^2(0,T ; V) \\ \text{ii) forte em } L^2(Q_T) \\ \text{iii) forte em } L^2(\partial Q_T) \end{array} \right.$$

$$(3.33) \quad \partial_t U_{h,k} \rightarrow \dot{U} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) fraco em } L^2(0,T ; V) \\ \text{ii) forte em } L^2(Q_T) \\ \text{iii) forte em } L^2(\partial Q_T) \end{array} \right.$$

$$(3.34) \quad \partial_t^2 U_{h,k} \rightarrow \ddot{U} \quad \text{fraco em } L^2(0,T ; H)$$

Um resultado de convergência das aproximações será demonstrado a seguir.

TEOREMA 3.1

Seja $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ e suponhamos satisfeitas as hipóteses do teorema 2.1. Então $U \equiv U^\varepsilon$ - limite (nos modos de convergência (3.32)-(3.34)) das aproximações $U_{h,k}$ definidas em (3.1f) e pelo algoritmo 3.1 - é solução de (3.17)-(3.19).

DEMONSTRAÇÃO:

Em primeiro lugar mostraremos que as aproximações $U_{h,k} \equiv U_{h,k}^\varepsilon$ satisfazem a equação

$$\begin{aligned}
 (3.35) \quad & \int_0^T \langle \partial_t^2 U_{h,k}, V_{h,k} \rangle dt + \int_0^T A_e(W_\theta U_{h,k}, V_{h,k}) dt + \\
 & + \int_0^T A_v(\delta_t U_{h,k}, V_{h,k}) dt + \int_0^T \int_\Gamma g_k(U_{h,k}) V_{h,k_N} d\sigma dt + \\
 & + \int_0^T \int_{\Gamma_1} g_k(U_{h,k}) D\phi_{\varepsilon,k}(\delta_t U_{h,k}) \cdot V_{h,k_T} d\sigma dt = \\
 & = \int_0^T L_{h,k}(V_{h,k}) dt, \quad \forall v \in L^2(0, T; V_h^1);
 \end{aligned}$$

nesta equação estamos usando aproximações lineares por partes para as funções envolvidas, isto é,

$$(3.36) \quad v_{h,k}(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ v(x,t_n) + \frac{v(x,t_{n+1}) - v(x,t_n)}{k} (t-t_n) \right\} \theta_k^n(t);$$

$$w_\theta U_{h,k} = \sum_0^{N-2} \left\{ w_\theta U^n + \frac{w_\theta U^{n+1} - w_\theta U^n}{k} (t-t_n) \right\} \theta_k^n(t),$$

$$g_k(U_{h,k}) = \sum_0^{n-2} \left\{ g(U^n) + \frac{g(U^{n+1}) - g(U^n)}{k} (t-t_n) \right\} \theta_k^n(t) ,$$

$$g_k(U_{h,k}) D\phi_{\epsilon k}(\delta_t U_{h,k}) = \sum_0^{N-2} \left\{ g(U^n) D\phi_{\epsilon}(U^n) + \right.$$

$$\left. + [g(U^{n+1}) D\phi_{\epsilon}(\delta_t U^{n+1}) - g(U^n) D\phi_{\epsilon}(U^n)] \frac{(t-t_n)}{k} \right\} \theta_k^n(t) ,$$

$$L_{h,k}(v) = \sum_0^{N-2} \left\{ L^n(v) + \frac{L^{n+1}(v) - L^n(v)}{k} (t-t_n) \right\} \theta_k^n(t)$$

Para simplificar a notação, usaremos

$$v^n = v(x, t_n) .$$

De (3.1 i) e (3.36):

$$\int_0^T \langle \partial_t^2 U_{h,k} , v_{h,k} \rangle dt =$$

$$\sum_{m=0}^{N-2} \sum_{n=0}^{N-2} \int_0^T \left\langle \left[\partial_t^2 U^n + \frac{\partial_t^2 U^{n+1} - \partial_t^2 U^n}{k} (t-t_n) \right] \theta_k^n(t) , \left[v^m + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{v^{m+1} - v^m}{k} (t-t_n) \right] \theta_k^m(t) \rangle dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{N-2} \left\{ k \langle \partial_t^2 U^n, v^n \rangle + \frac{k}{2} \langle \partial_t^2 U^{n+1} - \partial_t^2 U^n, v^n \rangle + \right. \\
 &+ \left. \frac{k}{2} \langle \partial_t^2 U^n, v^{n+1} - v^n \rangle + \frac{k}{3} \langle \partial_t^2 U^{n+1} - \partial_t^2 U^n, v^{n+1} - v^n \rangle \right\} = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-2} \left\{ \frac{k}{3} \langle \partial_t^2 U^n, v^n \rangle + \frac{k}{6} \langle \partial_t^2 U^n, v^{n+1} \rangle + \right. \\
 &+ \left. \frac{k}{6} \langle \partial_t^2 U^{n+1}, v^n \rangle + \frac{k}{3} \langle \partial_t^2 U^{n+1}, v^{n+1} \rangle \right\}
 \end{aligned}$$

Assim

$$\int_0^T \langle \partial_t^2 U_{h,k}, v_{h,k} \rangle dt = \frac{k}{2} \langle \partial_t^2 U^0, \frac{2v^0 + v^1}{3} \rangle +$$

(3.37)

$$+ \sum_{n=1}^{N-2} k \langle \partial_t^2 U^n, \frac{v^{n-1} + 4v^n + v^{n+1}}{6} \rangle + \frac{k}{2} \langle \partial_t^2 U^{N-1}, \frac{v^{N-2} + 2v^{N-1}}{3} \rangle.$$

Usando a definição de $W_\theta U_{h,k}$ e (3.36) teremos

$$\int_0^T A_e(W_\theta U_{h,k}, v_{h,k}) dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{N=0}^{N-2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} A_e \left(W_\theta U^n + \frac{W_\theta U^{n+1} - W_\theta U^n}{k} (t-t_n), V^n + \frac{V^{n+1} - V^n}{k} (t-t_n) \right) dt = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-2} \left\{ k A_e (W_\theta U^n, V^n) + \frac{k}{2} A_e (W_\theta U^{n+1} - W_\theta U^n, V^n) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k}{2} A_e (W_\theta U^n, \frac{V^{n+1} - V^n}{k}) + \frac{k}{3} A_e (W_\theta U^{n+1} - W_\theta U^n, V^{n+1} - V^n) \right\};
 \end{aligned}$$

isto é

$$\int_0^T A_e (W_\theta U_{h,k}, V_{h,k}) dt = \frac{k}{2} A_e (W_\theta U^0, \frac{2V^0 + V^1}{3}) +$$

(3.38)

$$\sum_1^{N-2} k A_e (W_\theta U^n, \frac{V^{n-1} + 4V^n + V^{n+1}}{6}) + \frac{k}{2} A_e (W_\theta U^{N-1}, \frac{V^{N-2} + 2V^{N-1}}{3}).$$

Procedendo analogamente, de (3.1h) e (3.36) obtemos:

$$\int_0^T A_v (\delta_t U_{h,k}, V_{h,k}) dt = \frac{k}{2} A_v (\delta_t U^0, \frac{2V^0 + V^1}{3}) +$$

(3.39)

$$+ \sum_1^{N-2} k A_v (\delta_t U^n, \frac{V^{n-1} + 4V^n + V^{n+1}}{6}) + \frac{k}{2} A_v (\delta_t U^{N-1}, \frac{V^{N-2} + 2V^{N-1}}{3}).$$

Das expressões que definem $g_k(U_{h,k})$, $g_k(U_{h,k}) D\phi_{\epsilon k}(\delta_t U_{h,k})$ e $L_{h,k}(V_{h,k})$ concluímos

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Gamma_1} g_k(U_{h,k}) V_{h,k} d\sigma dt &= \sum_1^{N-2} k \int_{\Gamma_1} g(U^n) \frac{(V^{n-1} + 4V^n + V^{n+1})}{6} N d\sigma + \\
 (3.40) \quad &+ \frac{k}{2} \int_{\Gamma_1} g(U^{N-1}) \frac{(V^{N-2} + 2V^{N-1})}{3} N d\sigma ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\Gamma_1} g_k(U_{h,k}) D\phi_{\epsilon,k}(\delta_t U_{h,k}) V_{h,k} d\sigma dt &= \\
 \sum_1^{N-2} \int_{\Gamma_1} g(U^n) D\phi_{\epsilon}(\delta_t U^n) \frac{(V^{n-1} + 4V^n + V^{n+1})}{6} d\sigma + \\
 (3.41) \quad &+ \frac{k}{2} \int_{\Gamma} g(U^{N-1}) D\phi_{\epsilon}(\delta_t U^{N-1}) \cdot \frac{(V^{N-2} + 2V^{N-1})}{3} d\sigma ;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^T L_{h,k}(V_{h,k}) dt &= \frac{k}{2} L^0 \left(\frac{2V^0 + V^1}{3} \right) + \\
 (3.42) \quad &k \sum_{n=1}^{N-2} L^n \left(\frac{V^{n-1} + 4V^n + V^{n+1}}{6} \right) + \frac{k}{2} L^{N-1} \left(\frac{V^{N-2} + 2V^{N-1}}{3} \right)
 \end{aligned}$$

A qualquer $v \in L^2(0, T; V_h^1)$ podemos associar funções $w(x, t_i)$ e V_h^1 , $i = 0, \dots, N-1$, definidas por

$$(3.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} W^0 = w(x, t_0) = \frac{2V^0 + V^1}{3} ; \\ W^i = w(x, t_i) = \frac{V^{i+1} + 4V^i + V^{i-1}}{6}, \quad i=1, 2, \dots, N-2 ; \\ W^{N-1} = w(x, t_{N-1}) = \frac{V^{N-2} + 2V^{N-1}}{3} . \end{array} \right.$$

Tomamos W^i , definidas acima, em (3.21) $n = 0, \dots, N-1$; multiplicando as equações nos níveis $n=0, N-1$ por $\frac{k}{2}$, as equações nos níveis $1 \leq n \leq N-2$ por k e somando todas estas equações obteremos (3.35).

Como

$$\delta_t U^n = \frac{\partial_t U^n + \partial_t U^{n+1}}{2}$$

e em vista de (3.33) temos

$$(3.44) \quad \delta_t U_{h,k} \rightarrow \dot{U} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i) fraco em } L^2(0, T; V) , \\ \text{ii) forte em } L^2(Q_T) , \\ \text{iii) forte em } L^2(Q_T) ; \end{array} \right.$$

por ser forte o esquema de aproximações usado,

$$(3.45) \quad V_{h,k} \rightarrow V \text{ forte em } L^2(0, T; V) .$$

$$U^\varepsilon \rightarrow U \begin{cases} \text{fraco em } L^2(0, T ; V) \\ \text{forte em } L^2(Q_T) \\ \text{forte em } L^2(\partial Q_T) \end{cases}$$

$$\dot{U}^\varepsilon \rightarrow \dot{U} \begin{cases} \text{fraco em } L^2(0, T ; V) \\ \text{forte em } L^2(Q_T) \\ \text{forte em } L^2(\partial Q_T) \end{cases}$$

$$\ddot{U}^\varepsilon \rightarrow \ddot{U} \quad \text{fraco em } L^2(0, T ; H)$$

O que diferencia a presente situação e o caso contínuo é a não regularização da função $H(x + u_3 - 1)(x + u_3 - 1)$. Como esta regularização não teve influência na passagem do limite em ε da demonstração do teorema 2.1, podemos usar a mesma demonstração do caso contínuo para o corolário abaixo.

COROLARIO 3.1 - U é solução de (2.9)-(2.11).

XXXXX
X
XXXXX

Em consequência dos modos de convergência (3.32)i , (3.34), (3.44)i e (3.45) fazendo h e k tenderem a zero a integral

$$\int_0^T \{ \langle \partial_t^2 U_{h,k} , V_{h,k} \rangle + A_e(W_\theta U_{h,k} , V_{h,k}) + A_v(\delta_t U_{h,k} , V_{h,k}) - L_{h,k}(V_{h,k}) \} dt$$

converge para

$$\int_0^T \{ \langle \ddot{U}, V \rangle + A_e(U, V) + A_v(\dot{U}, V) - L(V) \} dt .$$

A forma como foi definida $g_k(U_{h,k})$, os modos de convergência (3.32)iii e (3.45) são suficientes para garantir a convergência

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} g_k(U_{h,k}) V_{h,k} d\sigma dt \xrightarrow{h,k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Gamma_1} g(U) V_N d\sigma dt$$

Também da definição de $g_k(U_{h,k}) D\phi_{\epsilon k}(\delta_t U_{h,k})$, de (3.44)iii e (3.45) segue

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} g_k(U_{h,k}) D\phi_{\epsilon k}(\delta_t U_{h,k}) V_{h,k} d\sigma dt \xrightarrow{h,k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Gamma_1} g(U) D\phi_\epsilon(\dot{U}) \cdot V d\sigma dt$$

Com isto fica demonstrado que o limite U da sequência $U_{n,k}$ é solução da equação

$$\int_0^T \{ \langle \ddot{U}^\varepsilon, v \rangle + A_e(U^\varepsilon, v) + A_v(\dot{U}^\varepsilon, v) + \int_{\Gamma_1} g(U^\varepsilon) v_N d\sigma + \int_{\Gamma_1} g(U^\varepsilon) D\phi_\varepsilon(\dot{U}^\varepsilon) \cdot v d\sigma \} dt = \int_0^T L(v) dt, \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

Tomando $v = v - \dot{U}^\varepsilon$ e usando a propriedade de funções convexas

$$D\phi_\varepsilon(\dot{U}^\varepsilon) \cdot (v - \dot{U}^\varepsilon) \leq \phi_\varepsilon(v) - \phi_\varepsilon(\dot{U}^\varepsilon)$$

fica demonstrado que U^ε é solução fraca de (3.17). Seguindo os mesmos argumentos usados no caso contínuo ao verificar que U^ε é solução forte de (2.16), mostramos que U^ε é solução forte de (3.17).

Está concluída a demonstração do teorema 3.1.

Sendo as limitações (3.20) e (3.23) independentes de ε , é possível extrair subsequências, também denotadas U^ε , \dot{U}^ε e \ddot{U}^ε tais

$$U^\epsilon \rightarrow U \left\{ \begin{array}{l} \text{fraco em } L^2(0, T ; V) \\ \text{forte em } L^2(Q_T) \\ \text{forte em } L^2(\partial Q_T) \end{array} \right.$$

$$\dot{U}^\epsilon \rightarrow \dot{U} \left\{ \begin{array}{l} \text{fraco em } L^2(0, T ; V) \\ \text{forte em } L^2(Q_T) \\ \text{forte em } L^2(\partial Q_T) \end{array} \right.$$

$$\ddot{U}^\epsilon \rightarrow \ddot{U} \quad \text{fraco em } L^2(0, T ; H)$$

O que diferencia a presente situação e o caso contínuo é a não regularização da função $H(x + u_3 - 1)(x + u_3 - 1)$. Como esta regularização não teve influência na passagem do limite em ϵ da demonstração do teorema 2.1, podemos usar a mesma demonstração do caso contínuo para o corolário abaixo.

COROLARIO 3.1 - U é solução de (2.9)-(2.11).

xxxxx
x

B I B L I O G R A F I A

- [1] AUBIN, J. P. ; Aproximation of elliptic boundary - value problems, Wiley, N. York, 1972.
- [2] BRAUER, F. - NOHEL, J.A ; Ordinary differential equations, W.A. Benjamin, Inc., 1967.
- [3] DUVAUT, G. ; Vectors tensors, fundamental laws of continua, proprieties of fluids; in Mathematical and numerical methods in fluid dynamics, International Autumn Course, ICTP, Trieste 1973.
- [4] DUVAUT, G - LIONS, J.L ; Les inéquation en mécanique et en physique, Dunod, 1972
- [5] FUNG, Y.C. ; A first course in continuum mechanics, Prentice - Hall, 1969.
- [6] GLOWINSKI, R. ; Introduction to the approximation of elliptic variational inequalities. Rapport 76006, Laboratoire d'Analyse Numérique, LA 189, Université Paris IV, 1979.
- [7] GLOWINSKI, R.G. , J.L. LIONS, TREMOLIÈRES, R. ; Analyse Numérique des inequations variationnelles, Dunod, 1976.

- [8] ISAACSON, E., H.B. KELLER ; Analysis of numerical methods, John Wiley, 1966.
- [9] KOLMOGOROV, A.N, S.V. FOMIN ; Elementos de la teoria de funciones y del analisis funcional, Mir-Moscou, 1972.
- [10] LEONARDS, G.; Foundation engineering, Mc Graw Hill - Kogakusha, N. York - London - Tokyo, 1962.
- [11] LIONS, J.L. ; Cours d'analyse numérique, Herman, Paris, 1974.
- [12] MOURA, C.A, R.A. FEIJÓO, M.A. RAUPP ; Numerical simulation of the mation of a pile thrust into the soil ; Relatorio CBPF, serie A.
- [13] NECAS, J ; Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques; Masson, Paris, 1967.
- [14] ODEN, J.T , J.N. REDDY ; An introduction to the mathematical theory of finite elements; John Wiley, 1976.
- [15] ORTEGA, J. , W.C. RHEINBOLDT ; Iterative solution of non linear equations in several variables; Academic Press, 1970.

- [16] PSHENICHNY, B.N., Yu. M. DANILIN ; Numerical methods in extremal problems; Mir - Moscou, 1978.
- [17] RALL, L. B ; Computational solution of nonlinear operator equations; John Wiley - New York, 1969.
- [18] RAUPP, M.A. ; Análise numérica e equações diferenciais; notas da I Escola de Matemática Aplicada - LAC, CBPF, 1978.
- [19] RAUPP, M.A. , R.A. FEIJÃO, C.A. DE MOURA ; Anonlinear problem in dynamic visco-elasticity with friction; Bol. Soc. Bras. Mat. vol. 9, nº 1, 1978.
- [20] RAUPP, M.A. , R.A. FEIJÃO, C.A. MOURA ; An optimization algorithm for the pile driver problem; Bol. Soc. Bras. Mat. vol. 9, nº 2 , 1978.
- [21] SCHULTZ, M.H. ; Spline analysis, Prentice-Hall, Englewood cliffs, N.J. 1973.
- [22] LIONS, J.L., MAGENES, E.; Problemes aux limites nonhomogènes et applications. Vol. I, Dunod 1968.
- [23] DAHLQUIST, G. , BJÖRCK, A.; Numerical methods, Prentice-Hall, Inc, 1974.