APROXIMAÇÃO UNIFORME EM ESPAÇOS VETORIAIS DE FUNÇÕES REAIS

Márcia Sayuri Kashimoto

Orientadora: *Maria Sueli Marconi Roversi*

IMECC – UNICAMP

1994

APROXIMAÇÃO UNIFORME EM ESPAÇOS VETORIAIS DE FUNÇÕES REAIS

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida pela Srta. Márcia Sayuri Kashimoto e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 17 de agosto de 1994

Profa. Dra. Maria Sueli Marconi Roversi
Orientadora

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

IMECC – UNICAMP

À

minha família.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho. Em especial:

- À Profa. Sueli Roversi, pela orientação, paciência e dedicação.
- Ao Prof. Ary Orozimbo Chiacchio pelos comentários e sugestões apresentadas.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.
- À Lourdes pela digitação deste trabalho.
- À minha família pelo apoio e incentivo.
- Aos amigos, pelo estímulo e companheirismo.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Neste trabalho fazemos um estudo da aproximação uniforme em espaços vetoriais de funções reais.

O objetivo principal é obter uma caracterização do fecho uniforme de um dado subespaço vetorial do espaço $F(X)$ das funções reais definidas sobre um espaço topológico X.

Este estudo foi motivado pela seguinte questão: Dado um subconjunto E do espaço $C(X)$ das funções reais contínuas em X, onde X é compacto de Hausdorff, é possível obter condições suficientes para que uma função contínua sobre X esteja no fecho uniforme de E?

Os primeiros resultados nesta linha foram obtidos por Stone (1937) [15] e Kakutani (1941) [9] para subálgebras e subreticulados de $C(X)$: o Teorema de Stone-Weierstrass e o Teorema de Kakutani-Stone. Em 1947, Hewitt [7] generalizou o Teorema de Stone-Weierstrass para o caso em que X é completamente regular de Hausdorff.

Entretanto, tais resultados não são válidos para subespaços vetoriais de $C(X)$ mesmo que X seja compacto. Daí surgiu o interesse em estudar o fecho uniforme de subespaços vetoriais de funções reais. Tal problema foi estudado por vários autores, entre os quais podemos citar: Tietze [16], Mrowka [11], Jameson [8] e Blasco-Moltó [2].

Recentemente, Garrido e Montalvo [5] consideraram esta questão para funções não-limitadas, generalizando os resultados de Blasco-Moltó. Essa dissertação é baseada nestes artigos.

No Capítulo 1 apresentamos as notações e resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

O Capítulo 2 trata da aproximação uniforme em espaços vetoriais de funções reais limitadas. Estudamos a caracterização do fecho uniforme de subespaços vetoriais de $C_b(X)$ através do conceito de S-separação. Tal condição nos permite identificar os subespaços vetoriais de $F_b(X)$ cujos fechos uniformes são subanéis ou subreticulados contendo as funções constantes.

No Capítulo 3 estudamos o problema da aproximação uniforme em espaços vetoriais de funções reais não-limitadas. Uma caracterização do fecho uniforme de subespaços vetoriais de $C(X)$ é obtida através da "Condição de Cadeia de Lebesgue". Com esta condição podemos caracterizar os subespaços vetoriais de $F(X)$, cujos fechos uniformes são fechados sob composição com funções uniformemente contínuas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, estabelecemos as principais notações e definições, e alguns resultados preliminares, necessários para a compreensão dos enunciados dos capítulos posteriores.

Se X é um espaço topológico não vazio, indicamos por $F(X)$ o conjunto das funções definidas em X e com valores reais. O subconjunto de $F(X)$ das funções limitadas será denotado por $F_b(X)$. Recordemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é dita limitada se $f(X)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Indicamos por $C(X)$ o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{R}$, e por $C_b(X)$ o subconjunto das funções contínuas e limitadas.

Consideramos em $F(X)$ as operações algébricas usuais de soma e produto, isto é, se $f, g \in F(X)$ definimos $f + g$ e $f.g$, respectivamente por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (f.g)(x) = f(x)g(x)$$

para todo $x \in X$.

Recordemos que um subconjunto não vazio E de $F(X)$ é:

(A) um anel, se $f, g \in E \Rightarrow f - g \in E$ e $f.g \in E$.

(B) um espaço vetorial se, $f, g \in E$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in E$.

(C) uma álgebra se E é um anel e um espaço vetorial.

(D) um reticulado se, $f, g \in E \Rightarrow f \vee g \in E$ e $f \wedge g \in E$, onde

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

e

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

para todo $x \in X$. Observe que para provar que um subespaço vetorial E é um subreticulado basta mostrar que se $f \in E$ então $|f| \in E$.

Os subconjuntos $F_b(X)$, $C(X)$ e $C_b(X)$ possuem todas as estruturas definidas acima.

A topologia que consideramos em $F(X)$ é a da convergência uniforme, isto é, a topologia que tem como base de vizinhanças de $f \in F(X)$ a família de conjuntos

$$V_\varepsilon(f) = \{g \in F(X) \ ; \ |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \ x \in X\}$$

sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário. Nesse caso, uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $F(X)$ converge uniformemente para $f \in F(X)$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$, sempre que $n \geq N(\varepsilon)$. Indicamos tal convergência por $f_n \to f$.

É importante observar que $F_b(X)$, $C(X)$ e $C_b(X)$ são subespaços uniformemente fechados de $F(X)$.

1.1. Definição. Dada $f \in F(X)$ definimos:

$$Z(f) = \{x \in X \ ; \ \ f(x) = 0\}$$
$$\mathrm{Coz}(f) = \{x \in X \ ; \ \ f(x) \neq 0\} = X \backslash Z(f)$$

$Z(f)$ é denominado conjunto de zeros de f e $\mathrm{Coz}(f)$ de cozero de f.

1.2. Observação. Dadas $f, g \in F(X)$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

(1) $Z(f) = Z(|f|)$.

(2) $Z(f.g) = Z(f) \cup Z(g)$.

(3) $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2) = Z(|f| + |g|)$.

(4) $\{x \in X; \ f(x) \geq 0\} = Z(f \wedge 0)$

$\{x \in X; \ f(x) \leq 0\} = Z(f \vee 0)$.

(5) Se $f \in C(X)$ então $\mathrm{Coz}(f)$ é um subconjunto aberto de X.

1.3. Proposição. *A intersecção de uma família enumerável de conjuntos de zeros de funções contínuas é um conjunto de zeros de uma função contínua.*

Prova: Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \in C(X)$. Definamos $g_n = |f_n| \wedge \frac{1}{2^n}$ e consideremos $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, para cada $x \in X$. Como $|g_n| \leq \frac{1}{2^n}$, a série acima converge uniformemente para g. Portanto, $g \in C(X)$, e o resultado segue da igualdade:

$$Z(g) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(g_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z(f_n).$$

□

1.4. Proposição. *A reunião de uma família finita de conjuntos de zeros de funções é um conjunto de zeros de uma função.*

Prova: Segue diretamente do fato que

$$\bigcup_{i=1}^{n} Z(f_i) = Z(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n), \quad \text{onde} \quad f_i \in F(X), \quad i = 1, \ldots, n.$$

□

1.5. Definição. Se $f \in F(X)$ e $\alpha < \beta$ são números reais quaisquer, os conjuntos

$$L_\alpha(f) = \{x \in X \; ; \; f(x) \leq \alpha\}$$

$$L^\beta(f) = \{x \in X \; ; \; f(x) \geq \beta\}$$

são denominados conjuntos de Lebesgue de f.

1.6. Observação.

(i) Para estender as definições acima a $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ convencionamos:

$$L_\infty(f) = L^{-\infty}(f) = X$$

$$L_{-\infty}(f) = L^\infty(f) = \emptyset$$

(ii) Todo conjunto de Lebesgue é um conjunto de zeros de alguma função. Com efeito, basta observar que $L_\alpha(f) = Z((f - \alpha) \vee 0)$ e $L^\beta(f) = Z((f - \beta) \wedge 0)$.

Recordemos que um espaço topológico X é dito completamente regular quando, dados arbitrariamente um ponto $x \in X$ e um fechado A em X, com $x \notin A$, existir uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f(A) = \{1\}$.

1.7. Proposição. *Se X é um espaço topológico completamente regular então $\{Coz(f)\ ;\ f \in C(X)\}$ é uma base para a topologia de X.*

Prova: Seja $G \subset X$ aberto. Como X é completamente regular, dado $x \in G$ existe $f_x \in C(X)$ tal que $f_x(x) = 1$ e $f_x(X \backslash G) = \{0\}$. Assim, $x \in \mathrm{Coz}(f_x)$ e portanto $G \subset \bigcup_{x \in G} \mathrm{Coz}(f_x)$.

Por outro lado, como $X \backslash G \subset Z(f_x)$, ou equivalentemente, $\mathrm{Coz}(f_x) \subset G$, concluímos que $G = \bigcup_{x \in G} \mathrm{Coz}(f_x)$. Portanto $\{\mathrm{Coz}(f);\ f \in C(X)\}$ é uma base para a topologia de X. □

1.8. Definição. Seja E um subconjunto não vazio de $F(X)$.

(i) Dizemos que E S_1-separa dois subconjuntos A e B de X, quando existe $f \in E$, com $0 \leq f \leq 1$, tal que $f(A) = \{0\}$ e $f(B) = \{1\}$.

(ii) Dizemos que E S_1-separa os conjuntos de Lebesgue de uma função $f \in F(X)$, quando E S_1-separa $L_\alpha(f)$ e $L^\beta(f)$, para todo $\alpha < \beta$.

1.9. Exemplos.

(a) Considere o subespaço vetorial E das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são mensuráveis e limitadas. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ 1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Então g é mensurável, $0 \leq g \leq 1$, $g(\mathbb{Q}) = \{0\}$ e $g(R \backslash \mathbb{Q}) = \{1\}$. Portanto, E S_1-separa os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

(b) Considere o subespaço vetorial E de $C_b(\mathbb{R})$ das funções poligonais contínuas.

Sejam $\alpha < \beta$ números reais quaisquer. A função $h : I\!R \to I\!R$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha < x < \beta \\ 1 & \text{se } x \geq \beta \end{cases}$$

pertence a E. Logo, E S_1-separa os conjuntos $L_\alpha(Id)$ e $L^\beta(Id)$, onde $Id : I\!R \to I\!R$ é a função identidade.

(c) Suponha que X é um espaço normal. Então $C_b(X)$ S_1-separa dois subconjuntos fechados e disjuntos quaisquer de X. Isto é uma consequência imediata do Lema de Urysohn. (Simmons [14], p. 135)

(d) Suponha que X é um espaço completamente regular de Hausdorff. Então $C_b(X)$ S_1-separa dois pontos distintos quaisquer de X.

1.10. Proposição. *Seja E um subespaço de $F_b(X)$. Se E S_1-separa os conjuntos de Lebesgue de alguma função $f \in F_b(X)$ então E contém as funções constantes.*

Prova: De fato, sejam $f \in F_b(X)$ e $\alpha = \inf\{f(x);\ x \in X\}$. Pela hipótese, existe $g \in E$, $0 \leq g \leq 1$, tal que

$$g(L_{\alpha-1}(f)) = \{0\} \quad \text{e} \quad g(L^\alpha(f)) = \{1\}.$$

Como $L_{\alpha-1}(f) = \emptyset$ e $L^\alpha(f) = X$, segue-se que $g \equiv 1$. Portanto, E contém as funções constantes. □

No Capítulo 3, veremos que, sob certas condições, é possível construir uma partição da unidade, através da S_1-separação. Recordemos inicialmente que dados um espaço topológico X e $f \in F(X)$, o suporte de f é o fecho do conjunto $\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}$, que é denotado por supp$f$.

1.11. Definição. Dizemos que uma família $\{g_i; i \in I\}$ de funções de $C(X)$ é uma partição da unidade em X quando $0 \leq g_i \leq 1$, para todo $i \in I$ e $\sum_{i \in I} g_i(x) = 1$, para cada $x \in X$.

1.12. Observação. Se $\{g_i; i \in I\}$ é uma partição da unidade em X então a família $\{\mathrm{Coz}(g_i); i \in I\}$ é uma cobertura de X.

1.13. Definição. Dizemos que uma partição da unidade $\{g_i; i \in I\}$ é localmente finita se, para cada $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que $\{i \in I;$ $(\mathrm{supp} g_i) \cap U \neq \emptyset\}$ é finito.

1.14. Definição. Dada uma cobertura $\{C_\lambda; \lambda \in I\}$ de X dizemos que uma partição da unidade $\{g_\lambda; \lambda \in I\}$ é subordinada à cobertura $\{C_\lambda; \lambda \in I\}$ quando $\mathrm{supp} g_\lambda \subset C_\lambda$, para cada $\lambda \in I$.

1.15. Teorema. *Sejam Ω um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\{U_i; i \in I\}$ uma cobertura aberta de Ω. Então existe uma partição da unidade $\{g_i; i \in I\}$ em Ω, com $g_i \in C^\infty(\Omega)$ subordinada a $\{U_i; i \in I\}$.*

Prova: R. Narasimhan [12], p. 11. □

1.16. Teorema. *Se X é um espaço paracompacto e de Hausdorff então para cada cobertura $\{U_i; i \in I\}$ de X existe uma partição da unidade $\{g_i; i \in I\}$ subordinada a $\{U_i; i \in I\}$.*

Prova: Dugundji [3], p. 170. □

1.17. Definição. Dizemos que $f \in F(X)$ tem suporte compacto se o conjunto $\mathrm{supp} f$ é compacto em X.

O conjunto das funções contínuas em X com suporte compacto será denotado por $C_K(X)$. Note que $C_K(X)$ é um subespaço vetorial de $C(X)$.

1.18. Definição. Dizemos que $f \in C(X)$ se anula no infinito se, dado $\varepsilon > 0$ existe um compacto K_ε em X tal que $|f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \notin K_\varepsilon$.

Denotamos por $C_0(X)$ o conjunto das funções contínuas que se anulam no infinito. É imediato que $C_0(X) \subset C_b(X)$.

1.19. Proposição. *Se X é um espaço de Hausdorff então o fecho uniforme de $C_K(X)$ é $C_0(X)$.*

Prova: Sejam $f \in \overline{C_K(X)}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Existe $h_\varepsilon \in C_K(X)$ tal que $|f(x) - h_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Logo, $|f(x)| \leq |f(x) - h_\varepsilon(x)| + |h_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, para todo $x \notin \operatorname{supp} h_\varepsilon$. Portanto, $f \in C_0(X)$.

Reciprocamente, sejam $f \in C_0(X)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Suponha $f > 0$, e considere a função g definida por $g(x) = \max\{f(x), \varepsilon/2\} - \varepsilon/2$, para todo $x \in X$. Se $g(x) \neq 0$, então $f(x) > \varepsilon/2$. Logo $\operatorname{supp} g \subset K_\varepsilon$, e portanto $\operatorname{supp} g$ é compacto. Assim, $g \in C_K(X)$. Seja $x \in X$. Se $x \in K_\varepsilon$ então $f(x) > \varepsilon/2$. Logo $g(x) = f(x) - \varepsilon/2$. Se $x \notin K_\varepsilon$ então $f(x) \leq \varepsilon/2$ e $g(x) = 0$. Portanto, $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Logo, $f \in \overline{C_K(X)}$.

Para o caso de uma função arbitrária, escrevemos $f = f^+ - f^-$ onde $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$. Se $f \in C_0(X)$ então f^+ e f^- também pertencem a $C_0(X)$. Segue da demonstração anterior que $f^+, f^- \in \overline{C_K(X)}$. Logo, $f \in \overline{C_K(X)}$. □

1.20. Teorema de Aproximação de Weierstrass. *Sejam $f \in C[a,b]$ e $\varepsilon > 0$. Existe uma função polinomial p com coeficientes reais tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in [a,b]$.*

Prova: Simmons [14], p. 154. □

1.21. Lema de Lebesgue. *Toda álgebra $E \subset F_b(X)$ uniformemente fechada e contendo as funções constantes é um reticulado.*

Prova: Sejam $f \in E$ e $M > 0$ tal que $f(X) \subset [-M, M]$. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass, existe uma função polinomial p tal que $|p(t) - |t|| < \varepsilon$, para todo $t \in [-M, M]$. Como E é uma álgebra, $p \circ f \in E$, e ainda $|p(f(x)) - |f(x)|| < \varepsilon$, para todo $x \in X$. Portanto, $|f| \in E$, o que completa a demonstração. □

1.22. Teorema de Stone-Weierstrass. *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e A uma subálgebra fechada de $C(X)$, que separa pontos em X e contém uma função constante não nula. Então $A = C(X)$.*

Prova: Simmons [14], p. 160. □

Recordermos que uma subálgebra $A \subset C(X)$ separa pontos em X se dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

1.23. Exemplo. Seja $K \subset I\!R^n$ compacto. O conjunto $\mathcal{P}(K)$ das funções polinomiais reais, definidas em K é uniformemente denso em $C(K)$.

1.24. Teorema de Kakutani-Stone. *Sejam X um espaço compacto de Hausdorff, E um subreticulado de $C(X)$ e $f \in C(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $f \in \overline{E}$.

(b) *Para cada par de pontos distintos de X, x_1, x_2 e para cada $\varepsilon > 0$ existe $g \in E$ tal que $|g(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon$ e $|g(x_2) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Prova: Garrido, M.I.; Aproximación uniforme en espacios de funciones continuas. Publ. Depto. Mat. Univ. de Extremadura, vol. 24, 1990. □

1.25. Teorema de Hewitt. *Se X é completamente regular de Hausdorff e $H \subset C_b(X)$ tal que para cada par de fechados disjuntos F_1 e F_2 de X completa-*

mente separados (i.é., existe $\varphi \in C_b(X)$ *tal que* $\varphi(F_1) = \{0\}$ *e* $\varphi(F_2) = \{1\}$*) existe uma função* $g \in H$ *tal que* $\sup g(F_i) < \inf g(F_j)$ $i = 1$ *e* $j = 2$ *ou* $i = 2$ *e* $j = 1$*; então o anel gerado por* H *e pelas funções contantes é uniformemente denso em* $C_b(X)$*.*

Prova: [17] Hewitt, E. □

CAPÍTULO 2

APROXIMAÇÃO UNIFORME EM ESPAÇOS VETORIAIS DE FUNÇÕES REAIS LIMITADAS

Para estudar o fecho uniforme de um subespaço vetorial do espaço $F_b(X)$ das funções reais limitadas, definidas num espaço completamente regular de Hausdorff X, e, em particular, a densidade uniforme de subespaços de $C_b(X)$, introduzimos a noção de S-separação.

Através da S-separação é possível caracterizar os subespaços vetoriais de $F_b(X)$ cujos fechos uniformes são subanéis ou subreticulados, contendo as funções constantes.

Recordemos inicialmente que $E \subset F_b(X)$ S_1-separa dois subconjuntos A e B de X, quando existe uma função $g \in E$, $0 \leq g \leq 1$, tal que $g(A) = \{0\}$ e $g(B) = \{1\}$.

2.1. Teorema (Tietze [16], Mrowka [11]). *Sejam E um subespaço vetorial de $F_b(X)$ e $f \in F_b(X)$. Se E S_1-separa os conjuntos de Lebesgue de f então $f \in \overline{E}$.*

Prova: Suponha que E S_1-separa os conjuntos de Lebesgue de $f \in F_b(X)$. Sejam $\alpha = \inf\{f(x)\ ;\ x \in X\}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Considere $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(X) \subset [\alpha, \alpha + p\varepsilon]$. Pela S_1-separação, para cada $1 \leq i \leq p$, existe $g_i \in E$, $0 \leq g_i \leq 1$, tal que

$$g_i(L_{\alpha+(i-1)\varepsilon}(f)) = \{0\}$$
$$g_i(L^{\alpha+i\varepsilon}(f)) = \{1\}.$$

Considere $h = \alpha + \varepsilon(g_1 + \cdots + g_p)$. Segue da Proposição 1.10 que $h \in E$. Vamos mostrar que $|h(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Seja $x \in X$ arbitrário. Existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\alpha + (j-1)\varepsilon \leq f(x) \leq \alpha + j\varepsilon$. Consequentemente, se $i \leq j-1$ então $f(x) \geq \alpha + i\varepsilon$, e portanto $x \in L^{\alpha+i\varepsilon}(f)$. Analogamente, se $i \geq j+1$ segue que $x \in L_{\alpha+(i-1)\varepsilon}(f)$. Concluímos daí que $g_i(x) = 0$, se $i \geq j+1$ e $g_i(x) = 1$, se $i \leq j-1$. Portanto $h(x) = \alpha + \varepsilon(j - 1 + g_j(x))$. Como $0 \leq g_j \leq 1$, segue-se que $\alpha + (j-1)\varepsilon \leq h(x) \leq \alpha + j\varepsilon$. Portanto, $|h(x) - f(x)| < \varepsilon$. □

Quando $f \in C_b(X)$, os resultados abaixo seguem imediatamente do Teorema 2.1, uma vez que os conjuntos de Lesbegue de f são conjuntos de zeros (Observação 1.6) e, são fechados em X (Observação 1.2).

2.2. Corolário. *Seja E um subespaço vetorial de $C_b(X)$. Se E S_1-separa cada par de conjuntos de zeros disjuntos em X, então E é uniformemente denso em $C_b(X)$.*

2.3. Corolário (Jameson [8]). *Seja E um subespaço vetorial de $C_b(X)$. Se E S_1-separa cada par de fechados disjuntos em X, então E é uniformemente denso em $C_b(X)$.*

2.4. Exemplo. Considere X um espaço munido com a topologia discreta. Segue do Colorário 2.3 que o conjunto das funções reais definidas em X, que assumem somente um número finito de valores é denso em $F_b(X)$.

O exemplo seguinte mostra que, nos resultados anteriores, as condições não são necessárias.

2.5. Exemplo. Seja $\mathcal{P}([0,1])$ o espaço dos polinômios reais definidos em $[0,1]$. Afirmamos que $\mathcal{P}([0,1])$ não satisfaz a condição de S_1-separação para conjuntos fechados e disjuntos em [0,1]. De fato, consideremos $A = [0, 1/3]$ e $B = [2/3, 1]$. Se existisse $p \in \mathcal{P}([0,1])$, $0 \leq p \leq 1$ tal que $p(A) = \{0\}$, do fato de p ter somente um número finito de raízes, concluiríamos que A seria finito, o que é impossível.

2.6. Definição (Blasco-Moltó [2]). Sejam $E \subset F_b(X)$ e $A, B \subset X$. Dizemos que E S-separa A e B, se, para cada $\delta > 0$, existe $g \in E$, $0 \leq g \leq 1$, tal que $g(A) \subset [0, \delta]$ e $g(B) \subset [1 - \delta, 1]$.

2.7. Definição. Sejam $E \subset F_b(X)$ e $A, B \subset X$. Dizemos que E S'-separa A e B se, para cada $\delta > 0$, existe $g \in E$, $-\delta \leq g \leq \delta + 1$, tal que $g(A) \subset [-\delta, \delta]$ e $g(B) \subset [1 - \delta, 1 + \delta]$.

2.8. Observação.

(a) É imediato que S_1-separação $\Rightarrow$ S-separação $\Rightarrow$ S'-separação.

(b) Se $\overline{E}$ S-separa A e B então E S'-separa A e B.

De fato, seja $\delta > 0$ arbitrário. Pela hipótese, existe $g \in \overline{E}$, $0 \leq g \leq 1$ tal que $g(A) \subset [0, \delta/2]$ e $g(B) \subset [1 - \delta/2, 1]$. Considere $h \in E$ tal que $|h(x) - g(x)| < \delta/2$ para todo $x \in X$. Então $-\delta < h < 1 + \delta$, $h(A) \subset [-\delta, \delta]$ e $h(B) \subset [1 - \delta, 1 + \delta]$. Portanto, E S'-separa A e B.

2.9. Definição. Seja $f \in F_b(X)$. Se E S-separa (respectivamente S'-separa) os conjuntos $L_\alpha(f)$ e $L^\beta(f)$, para todo $\alpha < \beta$, dizemos que E S-separa (respectivamente S'-separa) os conjuntos de Lebesgue de f.

2.10. Proposição. *Seja E um subespaço vetorial de $F_b(X)$ tal que $\overline{E}$ contém as funções constantes. Sejam A e B subconjuntos disjuntos de X. Se E S'-separa A e B então E S-separa A e B.*

Prova: Seja $\delta > 0$ arbitrário. Considere $0 < r < \delta$ e $h \in E$ tais que $-r \leq h \leq r+1$, $h(A) \subset [-r, r]$ e $h(B) \subset [1-r, 1+r]$. Como $\overline{E}$ contém as funções constantes, segue-se que $\varphi = \dfrac{h + \delta}{1 + 2\delta} \in \overline{E}$. Mais ainda,

$$0 < \frac{\delta - r}{1 + 2\delta} \leq \varphi \leq \frac{r + 1 + \delta}{1 + 2\delta} < 1.$$

Considere $0 < \theta < \dfrac{\delta - r}{1 + 2\delta} < \delta$. Como $\varphi \in \overline{E}$, existe $g \in E$ tal que $|g(x) - \varphi(x)| < \theta$, para todo $x \in X$. Afirmamos que g S-separa A e B. Com efeito,

(i) $0 \leq g \leq 1$

Como $\varphi - \theta < g < \varphi + \theta$, a conclusão segue de

$$\frac{h + \delta}{1 + 2\delta} - \theta \geq \frac{h + \delta}{1 + 2\delta} - \frac{\delta - r}{1 + 2\delta} = \frac{h + r}{1 + 2\delta} \geq 0$$

e

$$\varphi+\theta=\frac{h+\delta}{1+2\delta}+\theta\leq\frac{1+r+\delta}{1+2\delta}+\theta\leq\frac{1+r+\delta}{1+2\delta}+\frac{\delta-r}{1+2\delta}=1$$

(ii) $g(A)\subset[0,3\delta]$

De fato, se $x\in A$ então $h(x)\leq r$. Logo,

$$0\leq g(x)\leq\varphi(x)+\theta\leq\frac{r+\delta}{1+2\delta}+\delta<3\delta$$

(iii) $g(B)\subset[1-3\delta,1]$

Seja $x\in B$. Então $h(x)\geq 1-r$ e tem-se:

$$1\geq g(x)\geq\varphi(x)-\theta=\frac{h(x)+\delta}{1+2\delta}-\theta\geq\frac{1-r+\delta}{1+2\delta}-\theta.$$

Por outro lado,

$$\frac{1-r+\delta}{1+2\delta}-\theta+3\delta-1\geq\frac{1-r+\delta}{1+2\delta}+2\delta-1=\frac{4\delta^2+\delta-r}{1+2\delta}>\frac{4\delta^2}{1+2\delta}>0.$$

Portanto, $1-3\delta\leq g(x)\leq 1$.

Como $g\in E$, segue de (i), (ii) e (iii) que E S-separa A e B. □

2.11. Observação. A demonstração da Proposição 2.10 contínua válida para o caso não limitado, isto é, para qualquer subespaço vetorial E de $F(X)$ tal que $\overline{E}$ contém as funções constantes.

2.12. Lema. *Se um subespaço vetorial E de $F_b(X)$ S'-separa os conjuntos de Lebesgue de alguma $f\in F_b(X)$, então $\overline{E}$ contém as funções constantes.*

Prova: Sendo f uma função limitada, consideremos $a=\inf\{f(x);\ x\in X\}\in\mathbb{R}$. Dado $b<a$, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $h_n\in E$ tal que $h_n(L^b(f))\subset[1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}]$. Como $f(x)\geq a>b$, para todo $x\in X$, segue-se que $X=L^b(f)$. Portanto, $h_n(X)\subset[1-\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}]$, e consequentemente, $h_n\to 1$. Logo $1\in\overline{E}$. □

O próximo resultado é uma consequência imediata do Lema 2.12 e da Proposição 2.10.

2.13. Proposição. *Sejam E um subespaço vetorial de $F_b(X)$ e $f \in F_b(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E S-separa os conjuntos de Lebesgue de f.*

(b) *E S'-separa os conjuntos de Lebesgue de f.*

2.14. Teorema (Blasco-Moltó [2]). *Sejam E subespaço vetorial de $F_b(X)$ e $f \in F_b(X)$. Se E S-separa os conjuntos de Lebesgue de f então $f \in \overline{E}$.*

Prova: Suponha que E S-separa os conjuntos de Lebesgue de f. Sejam $\alpha = \inf\{f(x);\ x \in X\}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário. Considere $p \in \mathbb{N}$ tal que $f(X) \subset [\alpha, \alpha + p\varepsilon]$ e escolha $\delta > 0$ tal que $p\delta < 1$. Pela S-separação, para cada $1 \leq i \leq p$, existe $g_i \in E$, $0 \leq g_i \leq 1$ tal que

$$g_i(L_{\alpha+(i-1)\varepsilon}(f)) \subset [0, \delta]$$
$$g_i(L^{\alpha+i\varepsilon}(f)) \subset [1-\delta, 1].$$

Considere $h = \alpha + \varepsilon(g_1 + \cdots + g_p)$. Seja $x \in X$ arbitrário. Existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $\alpha + (j-1)\varepsilon \leq f(x) \leq \alpha + j\varepsilon$. De modo análogo à demonstração do Teorema 2.1, concluímos que, se $i \geq j+1$ então $x \in L_{\alpha+(i-1)\varepsilon}(f)$, e se $i \leq j-1$ então $x \in L^{\alpha+i\varepsilon}(f)$. Consequentemente, se $i \leq j-1$ então $1 - \delta \leq g_i(x) \leq 1$; e tem-se que:

$$(j-1)(1-\delta) \leq \sum_{i=1}^{j-1} g_i(x) \leq \sum_{i=1}^{p} g_i(x).$$

Segue daí que,

$$\alpha + \varepsilon(j-1)(1-\delta) \leq h(x) \tag{1}$$

Por outro lado, se $i \geq j+1$ então $0 \leq g_i(x) \leq \delta$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{p} g_i(x) = \sum_{i=1}^{j} g_i(x) + \sum_{i=j+1}^{p} g_i(x) \leq j + (p-j)\delta < j + \frac{(p-j)}{p} < j+1$$

e assim

$$h(x) \leq \alpha + \varepsilon(j+1). \tag{2}$$

De (1) e (2) temos que:

$$\alpha + \varepsilon(j-1)(1-\delta) \leq h(x) \leq \alpha + \varepsilon(j+1).$$

Como $j-1 < p$ e $p\delta < 1$, segue-se que $\delta(j-1) < 1$. Portanto, $(j-1)(1-\delta) \geq j-2$, e podemos escrever:

$$\alpha + \varepsilon(j-2) \leq h(x) \leq \alpha + \varepsilon(j+1).$$

Logo,

$$f(x) - h(x) \leq \alpha + j\varepsilon - (\alpha + \varepsilon(j-2)) = 2\varepsilon \quad \text{e}$$
$$f(x) - h(x) \geq \alpha + (j-1)\varepsilon - (\alpha + \varepsilon(j+1)) = -2\varepsilon.$$

Segue daí que $|f(x) - h(x)| < 3\varepsilon$, ou seja,

$$|f(x) - \alpha - \varepsilon(g_1(x) + \cdots + g_p(x)| < 3\varepsilon.$$

Consequentemente, $f - \alpha \in \overline{E}$. Como, pelo Lema 2.12, $\overline{E}$ contém as funções constantes, segue-se que $f \in \overline{E}$. □

A S-separação é uma condição necessária e suficiente para a densidade de um subespaço vetorial de $C_b(X)$, como mostra o seguinte resultado:

2.15. Teorema (Blasco-Moltó [2]). *Seja E um subespaço vetorial de $C_b(X)$. Então E é uniformemente denso em $C_b(X)$, se, e somente se, E S-separa todo par de conjuntos de zeros em X que são disjuntos.*

Prova: A condição suficiente é uma consequência do Teorema 2.14, pois todo conjunto de Lebesgue de $f \in C_b(X)$ é um conjunto de zeros, em X.

Reciprocamente, sejam $h, f \in C_b(X)$ tais que $Z(f) \cap Z(h) = \emptyset$, e seja $0 < \delta < 1$ arbitrário. Considere $\varphi = \dfrac{\delta}{2} + (1-\delta)\dfrac{h^2}{h^2+f^2}$. Observe que φ está bem definida pois $Z(f) \cap Z(h) = \emptyset$ e que $\varphi \in C_b(X)$. Pela densidade uniforme de E, existe $g \in E$ tal que $|g(x) - \varphi(x)| < \delta/2$, para todo $x \in X$. Afirmamos que g é a função procurada. Com efeito,

(i) $0 \leq g \leq 1$

Para $x \in X$ arbitrário, tem-se:

$$g(x) \geq \varphi(x) - \frac{\delta}{2} = (1-\delta)\frac{h^2(x)}{h^2(x) + f^2(x)} + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} \geq 0$$

e

$$g(x) \leq \varphi(x) + \frac{\delta}{2} \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + 1 - \delta = 1$$

(ii) $g(Z(h)) \subset [0, \delta]$

De fato, se $x \in Z(h)$ então $\varphi(x) = \dfrac{\delta}{2}$. Logo, $0 \leq g(x) \leq \varphi(x) + \dfrac{\delta}{2} = \delta$

(iii) $g(Z(f)) \subset [1-\delta, 1]$

Se $x \in Z(f)$ então $\varphi(x) = \dfrac{\delta}{2} + 1 - \delta$. Logo, $1 \geq g(x) \geq \varphi(x) - \frac{\delta}{2} = 1 - \delta$. □

A Propriedade S

2.16. Definição. Dizemos que um subespaço vetorial E de $F_b(X)$ tem a Propriedade S se E S-separa os conjuntos de Lebesgue de todas as suas funções.

2.17. Exemplos.

(a) Seja U o subespaço de $C(\mathbb{R})$ das funções uniformemente contínuas. Para $\alpha < \beta$ definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq \alpha \\ \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{se } \alpha < t < \beta \\ 1 & \text{se } t \geq \beta. \end{cases}$$

Então $h = g \circ f \in U$, para toda $f \in U$, $0 \leq h \leq 1$, e ainda, $h(L_\alpha(f)) = \{0\}$ e $h(L^\beta(f)) = \{1\}$. Portanto $U \cap F_b(\mathbb{R})$ tem a Propriedade S.

(b) Fixado $x_0 \in X$, considere o subespaço vetorial $E = \{f \in F_b(X);\ f(x_0) = 0\}$. Então E é uniformemente fechado e não satisfaz a condição de S-separação para os conjuntos de Lebesgue de nenhuma função $f \in F_b(X)$. Com efeito, caso contrário, concluiríamos do Lema 2.12 que $1 \in E$, o que seria impossível. Em particular, E não tem a Propriedade S.

Para os espaços vetoriais que têm a Propriedade S, a condição do Teorema 2.14 também é necessária.

2.18. Teorema. *Seja E um subespaço vetorial de $F_b(X)$ que tem a Propriedade S e seja $f \in F_b(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $f \in \overline{E}$.

(b) *E S-separa os conjuntos de Lebesgue de f.*

Prova: Pelo Teorema 2.14, basta mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b). Seja $f \in \overline{E}$. Dados $\delta > 0$ e $\alpha < \beta$ arbitrários, considere $r < \min\{\delta, (\beta - \alpha)/2\}$ e $g \in E$ tais que $|g(x) - f(x)| < r$, para todo $x \in X$. Como E tem a Propriedade S, existe $h \in E$, $0 \leq h \leq 1$ tal que $h(L_{\alpha+r}(g)) \subset [0, \delta]$ e $h(L^{\beta-r}(g)) \subset [1-\delta, 1]$. Segue da escolha de r que $L_\alpha(f) \subset L_{\alpha+r}(g)$ e $L^\beta(f) \subset L^{\beta-r}(g)$, o que completa a demonstração. $\square$

2.19. Corolário. *Para um subespaço vetorial E de $F_b(X)$, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E tem a Propriedade S.*

(b) *$\overline{E}$ tem a Propriedade S.*

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja $f \in \overline{E}$ arbitrário. Pelo Teorema 2.18, E S-separa os conjuntos de Lebesgue de f. Portanto $\overline{E}$ tem a Propriedade S.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponha que $\overline{E}$ tem a Propriedade S. Sejam $f \in E$ e $\alpha < \beta$ arbitrários. Pela hipótese, $\overline{E}$ S-separa os conjuntos $L_\alpha(f)$ e $L^\beta(f)$. Segue então da Observação 2.8 e da Proposição 2.13 que E S-separa os conjuntos $L_\alpha(f)$ e $L^\beta(f)$. Portanto, E tem a Propriedade S. $\square$

Para obter uma caracterização dos subespaços vetoriais que têm a Propriedade S, usaremos o seguinte resultado:

2.20. Lema. *Seja E um subespaço vetorial uniformemente fechado em $F_b(X)$ e que contém as funções constantes. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E é um subanel de $F_b(X)$.*

(b) *E é fechado sob composição com funções contínuas definidas em $\mathbb{R}^n$, para $n = 1, 2, \ldots$ (i.é., dadas $f_1, \ldots, f_n \in E$ e $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \circ (f_1, \ldots, f_n) \in E$ onde $\varphi \circ (f_1, \ldots, f_n)(x) = \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $\forall x \in X$.*

(c) *E é fechado sob composição com funções contínuas definidas em $\mathbb{R}^2$.*

(d) *E é um subreticulado de $F_b(X)$.*

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b) Sejam $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$ e $f_1, \ldots, f_n \in E$. Como as f_i ,$i = 1, \ldots, n$ são limitadas, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(f_1, \ldots, f_n)(X) \subset K$, onde $(f_1, \ldots, f_n))(X) = \{(f_1(x), \ldots, f_n(x));\ x \in X\}$. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass existe uma sequência de funções polinomiais $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definidas em K que converge uniformemente para $\varphi|_K$. Logo $p_m \circ (f_1, \ldots, f_n)$ converge uniformemente para $\varphi \circ (f_1, \ldots, f_n)$. Como E é um subanel que contém as funções constantes, para cada $m \in \mathbb{N}$, $p_m \circ (f_1, \ldots, f_m) \in E$. Assim, sendo E uniformemente fechado, concluímos que $\varphi \circ (f_1, \ldots, f_n) \in E$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Óbvio.

(c) $\Rightarrow$ (a) As funções φ_1 e φ_2, definidas em $\mathbb{R}^2$ por $\varphi_1(x, y) = x - y$ e $\varphi_2(x, y) = xy$ são contínuas. Logo, dadas $f, g \in E$, segue da hipótese que $f - g = \varphi_1 \circ (f, g) \in E$ e $f.g = \varphi_2 \circ (f, g) \in E$. Portanto E é um subanel de $F_b(X)$.

(a) $\Rightarrow$ (d) Consequência do Lema de Lebesgue (vide Capítulo 1).

(d) $\Rightarrow$ (a) Para provar que E é um subanel, basta mostrar que se $f \in E$ então $f^2 \in E$ pois $fg = \left(\frac{f+g}{2}\right)^2 - \left(\frac{f-g}{2}\right)^2$.

Dados $0 \leq \alpha < \beta$, definimos

$$h = \frac{[(|f| \vee \alpha) \wedge \beta] - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Como E é um subreticulado que contém as funções constantes, segue-se que $h \in E$. Mais ainda, h satisfaz as seguintes condições:

(1) $h(L_{\alpha^2}(f^2)) = \{0\}$.

Dado $x \in L_{\alpha^2}(f^2)$, temos $|f(x)| \leq \alpha$, logo $h(x) = \dfrac{(\alpha \wedge \beta) - \alpha}{\beta - \alpha} = 0$.

(2) $h(L^{\beta^2}(f^2)) = \{1\}$.

Dado $x \in L^{\beta^2}(f^2)$, temos $|f(x)| \geq \beta$, logo $h(x) = \dfrac{(|f(x)|\wedge\beta) - \alpha}{\beta - \alpha} = 1$.

(3) $h(X) \subset [0,1]$.

Seja $x \in X$ arbitrário. Como $\alpha \leq |f(x)|\vee\alpha$ e $\alpha < \beta$, segue-se que $(|f(x)|\vee\alpha)\wedge\beta \geq \alpha$. Portanto, $h(x) \geq 0$. Por outro lado, $(|f(x)|\vee\alpha)\wedge\beta \leq \beta$. Logo, $h(x) \leq 1$. Segue-se de (1), (2) e (3) que E S-separa $L_{\alpha^2}(f^2)$ e $L^{\beta^2}(f^2)$. Pelo Teorema 2.13, $f^2 \in E$. □

2.21. Teorema (Blasco-Moltó [2]). *Seja $E \neq \{0\}$ um subespaço vetorial de $F_b(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E tem a Propriedade S.*

(b) *$\overline{E}$ é um subanel de $F_b(X)$ que contém as funções constantes.*

(c) *$\overline{E}$ é um subreticulado de $F_b(X)$ que contém as funções constantes.*

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (c) Pelo Lema 2.12, $\overline{E}$ contém as funções constantes. Seja $f \in \overline{E}$. Provemos que $|f| \in \overline{E}$. Como E tem a propriedade S, pelo Corolário 2.19, $\overline{E}$ também tem a propriedade S. Observando que $|f| = f^+ + (-f)^+$, onde $f^+ = f\vee 0$ e $(-f)^+ = (-f)\vee 0$, e considerando que os conjuntos de Lebesgue de f^+ e de $(-f)^+$ são também conjuntos de Lebesgue de f, concluímos que $\overline{E}$ S-separa os conjuntos de Lebesgue de f^+ e de $(-f)^+$. Pelo Teorema 2.14, f^+ e $(-f)^+$ pertencem a $\overline{E}$. Portanto, $|f| \in \overline{E}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Imediato a partir do Lema 2.20.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sejam $f \in E$ e $\alpha < \beta$ arbitrários. Pelo Lema de Urysohn, existe $\varphi \in C(\mathbb{R})$ com $0 \leq \varphi \leq 1$, tal que $\varphi((-\infty,\alpha]) = \{0\}$ e $\varphi([\beta,+\infty)) = \{1\}$. Pelo Lema 2.20, $\varphi\circ f \in \overline{E}$. Como $(\varphi\circ f)(L_\alpha(f)) = \{0\}$ e $(\varphi\circ f)(L^\beta(f)) = \{1\}$, segue-se que $\overline{E}$ S-separa $L_\alpha(f)$ e $L^\beta(f)$. Logo, resulta da Observação 2.8 e da Proposição 2.13, que E S-separa $L_\alpha(f)$ e $L^\beta(f)$. □

2.22. Corolário. *Seja E um subespaço vetorial de $F_b(X)$.*

(a) *Se E é um subanel ou um subreticulado de $F_b(X)$, contendo as funções constantes racionais então E tem a propriedade S.*

(b) *Se E é uniformemente denso em $C_b(X)$ então E tem a propriedade S.*

Prova:

(a) Se E é um subanel (respectivamente subreticulado) de $F_b(X)$, então $\overline{E}$ também é um subanel (respectivamente subreticulado). Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, segue-se que $\overline{E}$ contém as funções constantes reais. Pelo Teorema 2.21, E tem a propriedade S.

(b) Como $\overline{E} = C_b(X)$ é um subanel e contém as funções constantes reais, o resultado segue do Teorema 2.21. □

2.23. Exemplos.

(a) Considere o subespaço vetorial E de $C([a,b])$ formado pelas funções poligonais contínuas em $[a,b]$. Então E tem a propriedade S, pois é denso em $C([a,b])$.

(b) Considere o funcional linear $\psi : C([0,2]) \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^2 f(t)dt.$$

Seja $E = \{f \in C([0,2]); \psi(f) = 0\}$. Note que E é um subespaço vetorial de $C([0,2])$, contendo as funções constantes e uniformemente fechado, pois ψ é linear e contínua. Entretanto, E não é subanel de $C([0,2])$. De fato, a função $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ \frac{2}{3}(x-1) & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

é um elemento de E, mas $h^2 \notin E$. Portanto, E não tem a propriedade S.

(c) Se X é um espaço localmente compacto de Hausdorff, mas não compacto, considere o subanel fechado $C_0(X)$ de $C_b(X)$. Como $f \equiv 0$ é a única função constante pertencente a $C_0(X)$, pelo Teorema 2.21, $C_0(X)$ não tem a propriedade S.

CAPÍTULO 3

APROXIMAÇÃO UNIFORME EM ESPAÇOS VETORIAIS DE FUNÇÕES REAIS NÃO-LIMITADAS

Com o objetivo de generalizar os resultados obtidos no Capítulo 2, para o caso não-limitado, introduzimos o conceito de Condição de Cadeia de Lebesgue. Seguindo um estudo paralelo ao Capítulo 2, obtemos uma condição necessária e suficiente para a densidade uniforme de subespaços vetoriais de $C(X)$ e a caracterização de subespaços vetoriais que satisfazem a Condição de Cadeia de Lebesgue.

Denotamos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Consideramos uma rede não-decrescente $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$, satisfazendo a seguinte condição:

$$(*) \qquad \text{existe } r \in \mathbb{R},\ r > 0 \text{ tal que } \alpha_n - \alpha_{n-1} \geq r, \text{ sempre que } \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

3.1. Exemplos.

(a) A rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ com $\alpha_n = n$ satisfaz a condição $(*)$ com $r = 1$.

(b) Considere $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por $\alpha_n = \begin{cases} e^n & \text{se } n > 0 \\ -\infty & \text{se } n \leq 0 \end{cases}$

Se $\alpha_n \in \mathbb{R}$, com $n \geq 2$ então $\alpha_n - \alpha_{n-1} = e^n - e^{n-1} = e^n\Big(1 - \dfrac{1}{e}\Big) > 1 - \dfrac{1}{e}$.

Portanto $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma rede não decrescente satisfazendo $(*)$ com $r = 1 - \dfrac{1}{e}$.

(c) Fixado $p \in \mathbb{Z}$, definamos $\alpha_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } n \leq p \\ +\infty & \text{se } n > p \end{cases}$ A rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é não decrescente e não contradiz $(*)$.

(d) Considere $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por $\alpha_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } n \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{n} & \text{se } n > 0 \end{cases}$

A rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é não decrescente, mas $\alpha_n - \alpha_{n-1} = \dfrac{1}{n(n-1)} \to 0$. Logo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ não satisfaz a condição $(*)$.

3.2. Observação.

(1) Decorre da condição $(*)$ que se $\alpha_n, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ então $\alpha_n \neq \alpha_{n-1}$ e que o conjunto $\{\alpha_n \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{Z}\}$ não pode ter pontos de acumulação, pois $\alpha_n - \alpha_{n-1} \geq r > 0$.

(2) Se $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma rede não decrescente satisfazendo a condição $(*)$ e se $\{\alpha_n; n \in \mathbb{Z}\}$ é finito então existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha_n = -\infty$, se $n \leq p$ e $\alpha_n = +\infty$, se $n \geq q$.

3.3. Lema. *Seja $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma rede não decrescente satisfazendo a condição $(*)$ tal que $\alpha_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então $\{\alpha_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ não é limitado superiormente nem inferiormente.*

Prova: Suponha que $\{\alpha_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ seja limitado superiormente, e seja $s = \sup\{\alpha_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$. Para $r > 0$ dado pela condição $(*)$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $s - r < \alpha_{n_0} \leq s$, e portanto,

$$s = s - r + r < \alpha_{n_0} + r \leq \alpha_{n_0} + \alpha_{n_0+1} - \alpha_{n_0} = \alpha_{n_0+1}$$

o que contradiz a definição de supremo. De modo análogo, demonstra-se que $\{\alpha_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ não é limitado inferiormente. □

3.4. Proposição. *Se $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma rede não decrescente em $\overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo a condição $(*)$ então a família $\{(\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1});\ n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura enumerável de $\mathbb{R}$.*

Prova:

1º Caso. Suponhamos que $\alpha_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se $\mathbb{R} \not\subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})$ então existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_0 \notin (\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então $\lambda_0 \leq \alpha_n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, ou $\lambda_0 \geq \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, contrariando o Lema 3.3.

2º Caso. Suponhamos que exista $p \in \mathbb{Z}$, tal que $\alpha_p = -\infty$ e $\alpha_n \neq -\infty$, para todo $n > p$. Afirmamos que $\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\geq p} (\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})$. Com efeito, seja $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrário. Então $\lambda < \alpha_{p+1}$ ou $\lambda \geq \alpha_{p+1}$. Se $\lambda < \alpha_{p+1}$ então $\lambda \in (-\infty, \alpha_{p+1}) = (\alpha_{p-1}, \alpha_{p+1})$. Se $\lambda \geq \alpha_{p+1}$ então usando o mesmo argumento do caso anterior, $\lambda \in (\alpha_{j-1}, \alpha_{j+1})$, para algum $j \geq p+1$.

$3^{\underline{o}}$ Caso. Suponhamos que exista $q \in \mathbb{Z}$, tal que $\alpha_q = +\infty$ e $\alpha_n \neq +\infty$, para todo $n < q$. De modo análogo ao caso anterior, $\mathbb{R} \subset \bigcup\limits_{n \leq q} (\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})$.
Portanto, $\{(\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1});\ n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura de $\overline{\mathbb{R}}$. □

3.5. Observação. Se $f \in F(X)$ e $C_n = \{x \in X; \alpha_{n-1} < f(x) < \alpha_{n+1}\}$ onde $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma rede não decrescente em $\overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo a condição $(*)$, então a família $\{C_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura de X. Com efeito, pela Proposição 3.4, $\mathbb{R} \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})$. Portanto, $X \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} f^{-1}[(\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1})] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} C_n$.

3.6. Definição. Seja $f \in F(X)$. Uma Cadeia de Lebesgue de f é qualquer cobertura enumerável $\{C_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ de X, onde

$$C_n = \{x \in X;\ \alpha_{n-1} < f(x) < \alpha_{n+1}\}$$

e $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma rede não decrescente em $\overline{\mathbb{R}}$ satisfazendo a condição $(*)$.

3.7. Observação. Se $\alpha_p = -\infty$ (respectivamente $\alpha_p = +\infty$) para algum $p \in \mathbb{Z}$ então $C_j = \emptyset$ para todo $j \leq p-1$ (respectivamente para todo $j \geq p+1$). Consequentemente, se existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que $\alpha_p = -\infty$ e $\alpha_q = +\infty$ então a Cadeia de Lebesgue de uma $f \in F(X)$, associada à essa rede, é finita.

3.8. Exemplos.

(a) Considere a função identidade $Id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a rede $(n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Então $C_n = \{x \in \mathbb{R};\ n-1 < x < n+1\} = (n-1, n+1)$, e $\{(n-1, n+1); n \in \mathbb{Z}\}$ é uma Cadeia de Lebesgue de Id.

(b) Considere a função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a$ e a rede $(n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Temos $X = C_j = \{x \in X;\ j-1 < a < j+1\}$ para algum $j \in \mathbb{Z}$ e

$$C_n = \emptyset \begin{cases} \text{para todo} \quad n \neq j, \text{ se} \quad a \in \mathbb{Z} \\ \text{para todo} \quad n \neq j-1, \text{ ou } j+1, \text{ se} \quad a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \end{cases}$$

3.9. Observação: Se $f \in C(X)$ e $\{C_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é uma Cadeia de Lebesgue de f então cada C_n é um cozero em X. De fato, considere $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ a rede associada à cadeia $\{C_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

(i) Se $\alpha_{n-1}, \alpha_{n+1} \in I\!R$ então

$$\begin{aligned} C_n &= \{x \in X; \alpha_{n-1} < f(x)\} \cap \{x \in X; f(x) < \alpha_{n+1}\} \\ &= [X \backslash \{x \in X; f(x) \leq \alpha_{n-1}\}] \cap [X \backslash \{x \in X; f(x) \geq \alpha_{n+1}\}] \\ &= [X \backslash L_{\alpha_{n-1}}(f)] \cap [X \backslash L^{\alpha_{n+1}}(f)] \\ &= [X \backslash Z((f - \alpha_{n-1}) \vee 0)] \cap [X \backslash Z((f - \alpha_{n+1}) \wedge 0)]. \end{aligned}$$

(ii) Se $\alpha_p = +\infty$ para algum $p \in Z\!\!Z$ e $\alpha_{p-1} \in I\!R$ então

$$\begin{aligned} C_p &= \{x \in X; \alpha_{p-1} < f(x) < +\infty\} = X \backslash \{x \in X; f(x) \leq \alpha_{p-1}\} \\ &= X \backslash L_{\alpha_{p-1}}(f) = X \backslash Z((f - \alpha_{p-1}) \vee 0). \end{aligned}$$

(iii) Se $\alpha_q = -\infty$ para algum $q \in Z\!\!Z$ e $\alpha_{q+1} \in I\!R$ então

$$C_q = \{x \in X; -\infty < f(x) < \alpha_{q+1}\} = X \backslash Z((f - \alpha_{q+1}) \wedge 0).$$

(iv) Se $C_n = \{x \in X; -\infty < f(x) < +\infty\} = X = X \backslash Z(g)$, onde g é uma função constante não nula.

3.10. Definição. Dizemos que $E \subset F(X)$ satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f \in F(X)$ se existe uma constante $k > 0$ tal que, para qualquer Cadeia de Lebesgue $\{C_n;\ n \in Z\!\!Z\}$ de f existe $g \in E$ tal que $|g(x) - n| < k$, para todo $x \in C_n$.

3.11. Observação. Se E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f \in F(X)$ então E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f + \lambda$, para cada $\lambda \in I\!R$. Com efeito, se $\{C_n; n \in Z\!\!Z\}$ é uma Cadeia de Lebesgue para $f + \lambda$, como

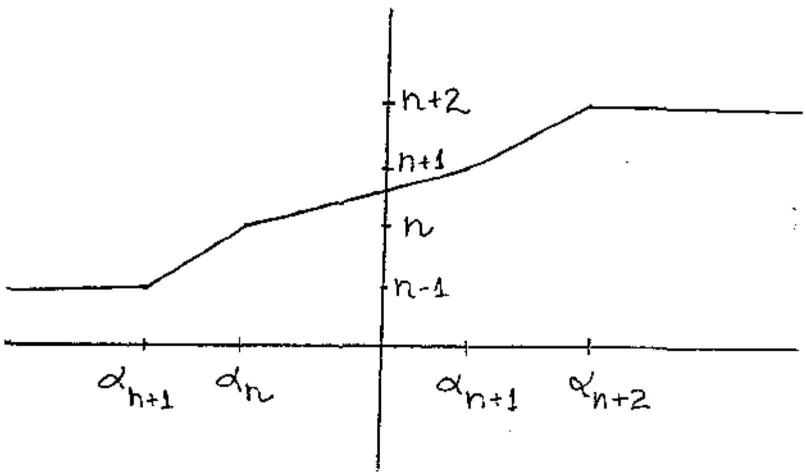
$$\begin{aligned} C_n &= \{x \in X;\ \alpha_{n-1} < f(x) + \lambda < \alpha_{n+1}\} = \\ &= \{x \in X;\ \alpha_{n-1} - \lambda < f(x) < \alpha_{n+1} - \lambda\} \end{aligned}$$

segue-se que $\{C_n; n \in Z\!\!Z\}$ é uma Cadeia de Lebesgue para f. Logo, concluímos da hipótese e da definição 3.10 que E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f + \lambda$.

3.12. Exemplos.

(a) Seja $U \subset C(I\!R)$ o subespaço das funções uniformemente contínuas. Sejam $f \in U$ e $\{C_n; n \in Z\!\!Z\}$ uma Cadeia de Lebesgue de f, associada à rede $(\alpha_n)_{n \in Z\!\!Z}$. Se $\alpha_n = \pm\infty$, para todo $n \in Z\!\!Z$, seja $p \in Z\!\!Z$ tal que $\alpha_p = -\infty$ e $\alpha_{p+1} = +\infty$. Considere $h \in U$ definida por $h(x) = p + \frac{1}{2}$, para todo $x \in I\!R$. Então, $|h(x) - n| < 1$ para todo $x \in C_n$ (note que $C_n = \emptyset$ para $n \neq p,\ p+1$). Se $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possui termos reais, definamos para $t \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t-\alpha_n}{\alpha_{n+1}-\alpha_n} + n & \text{se } \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R} \\ n+1 & \text{se } \alpha_n = -\infty \\ n & \text{se } \alpha_{n+1} = +\infty \end{cases}$$



A função φ é uma poligonal não-decrescente e uniformemente contínua. De fato, seja $\varepsilon > 0$ arbitrário e considere $r > 0$ a constante dada pela condição $(*)$ para a rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Tome $0 < \delta < \min\{r, \varepsilon r\}$ e sejam $t, s \in \mathbb{R}$ tais que $|t-s| < \delta$.

1º Caso. $\alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$.

Se $t, s \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ então $|\varphi(t) - \varphi(s)| = \dfrac{|t-s|}{|\alpha_{n+1}-\alpha_n|} < \dfrac{\delta}{r} < \varepsilon$.

Se $t \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ e $s \in (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}]$ então

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq \frac{|t-\alpha_{n+1}|}{|\alpha_{n+1}-\alpha_n|} + \frac{|s-\alpha_{n+1}|}{|\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}|} \leq \frac{|t-s|}{r} < \varepsilon.$$

Analogamente para $t \in (\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ e $s \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$.

2º Caso. Existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_p = -\infty$ e $\alpha_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{Z},\ n > p$.

Se $t, s \in (-\infty, \alpha_{p+1}]$, o resultado segue trivialmente. Se $t \in (-\infty, \alpha_{p+1}]$ e $s \in (\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}]$ então

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| = \frac{|s-\alpha_{p+1}|}{|\alpha_{p+2}-\alpha_{p+1}|} \leq \frac{|t-s|}{r} < \varepsilon.$$

3º Caso. Existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_q = +\infty$ e $\alpha_n \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n < q$.

De modo análogo ao caso anterior obtemos: $|\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$ para $t \in (\alpha_{q-2}, \alpha_{q-1}]$ e $s \in (\alpha_{q-1}, \infty]$.

Portanto, $\varphi \in U$. Consequentemente $h = \varphi \circ f \in U$. Como $\varphi((\alpha_n, \alpha_{n+1}]) \subset [n, n+1]$ segue-se que $|h(x) - n| \leq 1$ para todo $x \in C_n$. Logo U verifica a Condição de Cadeia de Lebesgue para f.

(b) O subespaço vetorial $E = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) = ax+b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ não satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f = Id$. Caso contrário, dada a rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por

$$\alpha_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } n < 0 \\ e^n & \text{se } n \geq 0 \end{cases},$$

existem $k > 0$ e $g \in E$, $g(x) = a_0x + b_0$, tais que $|g(x) - n| = |a_0x + b_0 - n| < k$ para todo $x \in C_n$. Observe que $a_0 \neq 0$, pois, caso contrário, teríamos $|b_0 - n| < k$, para todo $n \geq 0$, o que é impossível. Então para $x \in C_n$, com $n \geq 1$, temos

$$n - 1 < \ln x < n + 1 \quad \text{e} \quad n - k < a_0x + b_0 < n + k$$

e portanto $a_0x + b_0 < 1 + k + \ln x$, ou seja, $a_0x + d < \ln x$, onde $d = b_0 - (1 + k)$. Em particular, para $x > 1$, $\dfrac{a_0x + d}{\ln x} < 1$. Consequentemente $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x + d}{\ln x} \leq 1$, que é impossível pois $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_0x + d}{\ln x} = \pm\infty$. Analogamente, podemos mostrar que o espaço dos polinômios reais $P(\mathbb{R})$ e o espaço dos polinômios reais $P_n(\mathbb{R})$ que têm grau menor ou igual a n, não satisfazem a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f = Id$.

O seguinte resultado é uma generalização do Teorema 2.14 para o caso não limitado.

3.13. Teorema. *Sejam $E \subset F(X)$ um subespaço vetorial e $f \in F(X)$. Se E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f então $f \in \overline{E}$.*

Prova: Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, sejam $k > 0$ dada pela definição 3.10 e $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$. Considere a rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, com $\alpha_n = n\varepsilon'$ e $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ a Cadeia de Lebesgue de f

associada a $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Pela hipótese, existe $g \in E$ tal que $|g(x) - n| < k$, para todo $x \in C_n$. Seja $h = \varepsilon' g \in E$. Dado $x \in X$, como $\{C_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura de X, segue-se que $x \in C_n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$|h(x) - f(x)| = |\varepsilon' g(x) - f(x)| \leq |\varepsilon' g(x) - \varepsilon' n| + |\varepsilon' n - f(x)| < k\varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon.$$

Portanto, $f \in \overline{E}$. □

3.14. Corolário. *Se um subespaço vetorial $E \subset F(X)$ satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para alguma $f \in F(X)$ então $\overline{E}$ contém as funções constantes.*

Prova: Como $\overline{E}$ é um espaço vetorial, o resultado segue da Observação 3.11 e do Teorema 3.13. □

3.15. Corolário. *Seja E um subespaço vetorial de $C(X)$. Se E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para cada $f \in C(X)$ então E é uniformemente denso em $C(X)$.*

Prova: Consequência imediata do Teorema 3.13. □

3.16. Observação. A Condição de Cadeia de Lebesgue não é uma condição necessária para o Teorema 3.13, como mostra o Exemplo 3.12(b). De fato, o espaço vetorial $E = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; g(x) = ax + b;\ a, b \in \mathbb{R}\}$ não satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f = Id$.

Existem espaços vetoriais que não verificam a Condição de Cadeia de Lebesgue para nenhuma função. Considere, por exemplo, o subespaço vetorial E de $F(\mathbb{R})$ gerado pela função identidade. E é uniformemente fechado e não contém as funções constantes não nulas. Logo, pelo Corolário 3.14, E não satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para nenhuma $f \in F(\mathbb{R})$.

Mostraremos a seguir que, no caso limitado, a Condição de Cadeia de Lebesgue e a S-separação coincidem.

3.17. Proposição. *Sejam $E \subset F_b(X)$ um subespaço vetorial e $f \in F_b(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f.*

(b) *E S-separa os Conjuntos de Lebesgue de f.*

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b) Sejam $\alpha < \beta$ e $\delta > 0$ arbitrários. Considere $k > 0$ dado pela Condição de Cadeia e escolha $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{k+1}{m} < \delta$. Defina a rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ por

$$\alpha_n = -\infty \quad \text{se} \quad n \leq -1$$

$$\alpha_n = +\infty \quad \text{se} \quad n \geq m+1$$

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{m-1} < \alpha_m = \beta.$$

A Cadeia de Lebesgue $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ associada a $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é tal que:

$$C_0 = \{x \in X;\ f(x) < \alpha_1\} \supset L_\alpha(f)$$

$$C_m = \{x \in X;\ \alpha_{m-1} < f(x)\} \supset L^\beta(f)$$

$$C_n = \emptyset \quad \text{se} \quad n \notin \{-1, \ldots, m+1\}.$$

Seja $g \in E$ tal que $|g(x) - n| < k$, para todo $x \in C_n$ e considere $h = \dfrac{g}{m} \in E$. Segue da condição sobre g e da escolha de m, que, para $n \in \{-1, \ldots, m+1\}$ e $x \in C_n$, valem as desigualdades

$$-\delta < \frac{-1-k}{m} \leq \frac{n-k}{m} < h(x) < \frac{n+k}{m} \leq \frac{m+1+k}{m} < 1+\delta.$$

Consequentemente,

(i) $h(X) \subset [-\delta, 1+\delta]$

(ii) $h(L_\alpha(f)) \subset h(C_0) \subset [-\delta, \delta]$

(iii) $h(L^\beta(f)) \subset h(C_m) \subset [1-\delta, 1+\delta]$.

Portanto, E S'-separa $L_\alpha(f)$ e $L^\beta(f)$, e a S-separação segue da Proposição 2.13.

(b) $\Rightarrow$ (a) Considere uma constante $k > 1$. Seja $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ uma Cadeia de Lebesgue para f, associada a uma rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Como f é limitada existe somente

somente um número finito de conjuntos C_n que são não vazios. Sejam p e m o menor e o maior inteiro, respectivamente, tais que $C_p \neq \emptyset$ e $C_m \neq \emptyset$. Claramente $X = \bigcup_{n=p}^{m} C_n$ e $\alpha_{p-1} < f(x) < \alpha_{m+1}$ para todo $x \in X$. Para cada $n \in \{p, \ldots, m+1\}$, consideremos $L_{\alpha_{n-1}}(f)$ e $L^{\alpha_n}(f)$. Existe $g_n \in E$, $0 \leq g_n \leq 1$ tal que

$$g_n(L_{\alpha_{n-1}}(f)) \subset [0, \delta]$$
$$g_n(L^{\alpha_n}(f)) \subset [1-\delta, 1]$$

onde $0 < \delta < \dfrac{k-1}{m-p+1}$. Seja $g = \sum_{n=p}^{m+1} g_n$. Se $n \in \{p, \ldots, m\}$ e se $x \in C_n$, temos:

$$(1-\delta)(n-p) \leq g(x) \leq n - p + 2 + (m-n)\delta$$

e consequentemente

$$-1 - (m-p)\delta \leq -1 - (n-p)\delta \leq g(x) + p - 1 - n \leq 1 + (m-n)\delta \leq 1 + (m-p)\delta.$$

Portanto, se $n \in \{p, \ldots, m\}$ e $x \in C_n$ temos

$$|g(x) + p - 1 - n| \leq 1 + (m-p)\delta.$$

Pela hipótese $\overline{E}$ contém as funções constantes, e assim $g + p - 1 \in \overline{E}$. Consideremos então $h \in E$ tal que $|h(x) - (g(x) + p - 1)| < \delta$, para todo $x \in X$. Assim, se $x \in C_n$ então

$$|h(x) - n| \leq 1 + (m - p + 1)\delta < 1 + k - 1 = k.$$

Logo, E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f. □

3.18. Observação. Analisando a demonstração da Proposição 3.17, pode-se concluir que a Condição de Cadeia de Lebesgue implica na S'-separação, também no caso não-limitado, pois não foi utilizada qualquer limitação para a função considerada. Logo, pela observação 2.11 (a) $\Rightarrow$ (b) é sempre válida. No entanto, não é verdade que (b) $\Rightarrow$ (a) no caso não limitado. Veja o exemplo 3.44(b).

3.19. Definição. Dizemos que uma cobertura $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de X é 2-finita se $C_n \cap C_m = \emptyset$ sempre que $|n - m| > 1$.

3.20. Proposição. *Toda Cadeia de Lebesgue de $f \in F(X)$ é uma cobertura 2-finita de X.*

Prova: Seja $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ uma Cadeia de Lebesgue de f associada a uma rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Considere $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n - m = p$, onde $|p| \geq 2$. Suponhamos que exista $x \in C_m \cap C_{m+p}$. Então

$$\alpha_{m-1} < f(x) < \alpha_{m+1} \quad \text{e} \quad \alpha_{m+p-1} < f(x) < \alpha_{m+p+1}.$$

Se $p \geq 2$, como $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é não decrescente, temos $f(x) < \alpha_{m+1} \leq \alpha_{m+p-1} < f(x)$, que é impossível. Analogamente, se $p \leq -2$ chegamos a uma contradição. Portanto, $C_m \cap C_n = \emptyset$, o que completa a prova. □

3.21. Contra-exemplo.

Considere a rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definida por

$$\alpha_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } n \leq 0 \\ n & \text{se } 0 < n \leq p+2 \\ +\infty & \text{se } n > p+2 \end{cases}$$

com $p \in \mathbb{N}$ fixo. Seja $C_n = \{x \in \mathbb{R}; \alpha_n < x < \alpha_{n+3}\}$. Então $\{C_n; n = 0, \ldots, p\}$ é uma cobertura de $\mathbb{R}$ que não é 2-finita, pois $C_p \cap C_{p-2} = (p, p+1) \neq \emptyset$.

3.22. Teorema. *Sejam X um espaço completamente regular e E um subespaço vetorial de $C(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E é uniformemente denso em $C(X)$.*

(b) *Para cada cobertura 2-finita $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de X formada por cozeros existe $g \in E$ tal que $|g(x) - n| < 2$, sempre que $x \in C_n$.*

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ uma cobertura 2-finita de X tal que $C_n = \mathrm{Coz}(f_n)$, com $f_n \in C(X)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Como $Z(f_n) = Z(|f_n|)$ podemos supor $f_n > 0$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Dado $x \in X$ existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in C_m$, ou seja, $f_m(x) > 0$. Portanto, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x) \neq 0$. Por outro lado, como tal cobertura é 2-finita, x pertencerá, no

máximo, a C_{m-1}, C_m e C_{m+1}. Logo, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(x) = f_{m-1}(x) + f_m(x) + f_{m+1}(x) < \infty$.
Definamos então

$$g_k = f_k \;/\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n.$$

Afirmamos que $\{g_k; k \in \mathbb{Z}\}$ é uma partição da unidade. Com efeito:

(i) g_k é contínua para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Seja $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$. Como $\{C_n;\ n \in \mathbb{Z}\}$ é 2-finita, $f\Big|_{C_n} = f_{n-1} + f_n + f_{n+1}$. Logo, $f\Big|_{C_n}$ é contínua, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Portanto f é contínua. A continuidade de g_k segue do fato que $g_k = f_k \;/\; f$.

(ii) $g_k(X) \subset [0,1]$ para cada $k \in \mathbb{Z}$ e $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x) = 1$, para cada $x \in X$, seguem diretamente da definição de g_k.

Observemos ainda que, $C_n = \mathrm{Coz}(f_n) = \mathrm{Coz}(g_n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Definamos $g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n g_n$. Com os mesmos argumentos usados acima, concluímos que $g \in C(X)$. Além disso, se $x \in C_n$, então

$$\begin{aligned}
|g(x) - n| &= |(n-1)g_{n-1}(x) + n g_n(x) + (n+1)g_{n+1}(x) - n| \\
&= |n(g_{n-1}(x) + g_n(x) + g_{n+1}(x)) + g_{n+1}(x) - g_{n-1}(x) - n| \\
&= |g_{n+1}(x) - g_{n-1}(x)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x) = 1.
\end{aligned}$$

Pela hipótese, existe $h \in E$ tal que $|h(x) - g(x)| < 1$, para todo $x \in X$. Em particular, se $x \in C_n$ então

$$|h(x) - n| \leq |h(x) - g(x)| + |g(x) - n| < 2$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Sejam $f \in C(X)$ e $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ uma Cadeia de Lebesgue de f. Segue da Proposição 3.20 e da Observação 3.9 que $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ é uma cobertura 2-finita de X formada por cozeros. Pela hipótese, existe $g \in E$ tal que $|g(x) - n| < 2$, para todo $x \in C_n$. Portanto, E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f. Pelo Teorema 3.13 $f \in \overline{E}$. □

3.23. Observação. A constante 2 do enunciado do Teorema acima pode ser substituída por qualquer constante $k > 1$.

3.24. Exemplos.

(a) Considere um conjunto aberto não-vazio $X \subset \mathbb{R}^n$ e seja $C^\infty(X)$ o espaço vetorial das funções reais infinitamente diferenciáveis em X. Seja $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ uma cobertura 2-finita de X formada por cozeros. Pelo Teorema 1.15 existe uma partição da unidade $\{h_n; n \in \mathbb{Z}\}$ localmente finita, subordinada a $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ com $h_n \in C^\infty(X)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Definamos $h = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n h_n$. Como $\mathrm{Coz}(h_n) \subset C_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $|h(x) - n| \leq 1$ para todo $x \in C_n$. Portanto $|h(x) - n| < 2$, para todo $x \in C_n$. Como $h \in C^\infty(X)$, resulta do Teorema 3.22 que $C^\infty(X)$ é uniformemente denso em $C(X)$.

(b) Seja E o subespaço vetorial de $C(\mathbb{N})$ gerado pelas funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Observemos primeiramente que $E \neq C(\mathbb{N})$. De fato, considere

$$\begin{aligned} f : \ & \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ & n \to e^n. \end{aligned}$$

Se existissem $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ e $f_1, \ldots, f_k \in E$ tais que $f = a_1 f_1 + \cdots + a_k f_k$, então $e^n = a_1 f_1(n) + \cdots + a_k f_k(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando os espaços vetoriais $\langle e, e^2, \ldots, e^n, \ldots \rangle$ e $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais teríamos então $\langle e, e^2, \ldots, e^n, \ldots \rangle \subset \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, que implicaria em $\dim \langle e, e^2, \ldots, e^n, \ldots \rangle \leq k$, uma contradição. Portanto, $E \neq C(\mathbb{N})$.

Sendo $\mathbb{N}$ paracompacto, dada uma cobertura $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ 2-finita de $\mathbb{N}$, formada por cozeros, existe uma partição da unidade $\{\varphi_n; n \in \mathbb{Z}\}$, com $\varphi_n \in C(\mathbb{N})$, localmente finita, subordinada a esta cobertura (Teorema 1.16). Usando o mesmo raciocínio do item (a), concluímos que E é uniformemente denso em $C(\mathbb{N})$.

Usando o Teorema 3.22 podemos dar uma nova demonstração de um resultado de Anderson [1], para subanéis divisíveis de $C(X)$. Usaremos o fato de que o Teorema 3.22 continua válido para subespaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{Q}$.

3.25. Definição. Um subanel A de $C(X)$ é divisível se para cada $f \in A$ e cada $n \in \mathbb{Z}$ existe $g \in A$ tal que $f = ng$.

3.26. Observação. Todo subanel divisível de $C(X)$ é um subespaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Q}$.

3.27. Lema. *Sejam X um espaço topológico completamente regular e $\{C_n;\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ uma cobertura 2-finita de X formada por cozeros. Seja A um subanel de $C(X)$ que S_1-separa todo par de conjuntos de zeros em X, que são disjuntos. Então existe uma partição da unidade $\{g_n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ com $g_n \in A$ e $Coz(g_n) \subset C_n$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Prova: Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, seja $D_n = \left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right) \backslash C_{n+1}$. Então, cada D_n é um conjunto de zeros, pois $D_n = \bigcap_{k=n+1}^{\infty} (X \backslash C_k)$. Com efeito, se $x \in D_n$, então $x \in C_{k_0}$, para algum $k_0 \leq n$ e $x \in X \backslash C_{n+1}$. Como $\{C_n;\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ é 2-finita, $x \in \bigcap_{k=n+2}^{\infty} (X \backslash C_k)$. Logo, $x \in \bigcap_{k=n+1}^{\infty} (X \backslash C_k)$. Reciprocamente, seja $x \in \bigcap_{k=n+1}^{\infty} (X \backslash C_k)$. Então $x \in X \backslash \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} C_k\right)$ e, consequentemente $x \in \left(\bigcup_{k=0}^{n} C_k\right) \backslash C_{n+1}$. Portanto, $D_n = \bigcap_{k=n+1}^{\infty} (X \backslash C_k)$, e pela Proposição 1.3, D_n é um conjunto de zeros em X.

Para construir a partição da unidade, procedemos indutivamente. Como D_0 e $X \backslash C_0$ são conjuntos de zeros, disjuntos, existe $g_0 \in E$, $0 \leq g_0 \leq 1$ tal que $g_0(D_0) = \{1\}$ e $g_0(X \backslash C_0) = \{0\}$. Claramente, $\mathrm{Coz}(g_0) \subset C_0$. Procedendo analogamente, seja, $u_1 \in E$, $0 \leq u_1 \leq 1$ tal que $u_1(D_1) = \{1\}$ e $u_1(X \backslash (C_0 \cup C_1)) = \{0\}$. Defina $g_1 = u_1(1 - g_0)$. Como E é subanel, $g_1 \in E$. Note que $0 \leq g_1 \leq 1$, $\mathrm{Coz}(g_1) \subset C_1$ e $g_0(x) + g_1(x) = 1$, para todo $x \in D_0$. Assim sucessivamente, suponhamos definidas $g_0, \ldots, g_{n-1} \in E$, $0 \leq g_i \leq 1$ e $\mathrm{Coz}(g_i) \subset C_i$, $i = 0, \ldots, n-1$, e ainda $\sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) = 1$, para todo $x \in D_{n-1}$. Como D_n e $X \backslash \bigcup_{i=0}^{n} C_i$ são conjuntos de zeros, disjuntos, existe $u \in E$, $0 \leq u \leq 1$ tal que $u(D_n) = \{1\}$ e $u\left(X \backslash \bigcup_{i=0}^{n} C_i\right) = \{0\}$. Definindo $g_n = u\left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} g_i\right)$ temos que $g_n \in E$ e $\mathrm{Coz}(g_n) \subset C_n$. De fato, se $x \in \mathrm{Coz}(g_n)$ então $u(x) \neq 0$ e $\sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) \neq 1$. Logo, $x \in \bigcup_{i=0}^{n} C_i$ e $x \notin D_{n-1}$. Como $X \backslash D_{n-1} = \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$ segue-se que $x \in \left(\bigcup_{i=0}^{n} C_i\right) \cap \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} C_k\right) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left[\left(\bigcup_{i=0}^{n} C_i\right) \cap C_k\right] =$

$(C_{n-1} \cap C_n) \cup C_n \cup (C_n \cap C_{n+1}) \subset C_n$ pois $\{C_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ é 2-finita. Finalmente, se $x \in D_n$ então $\sum_{i=0}^{n} g_i(x) = g_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) = u(x) + (1 - u(x)) \sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) = 1$ pois $u(D_n) = \{1\}$.

Afirmamos que $\{g_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ é uma partição da unidade. Como $E \subset C(X)$, cada $g_n \in C(X)$, e tem-se:

(i) $0 \leq g_n \leq 1$ para todo $n \in I\!N \cup \{0\}$.

Seja $x \in X$. Se $x \in D_{n-1}$ então $\sum_{i=0}^{n-1} g_i(x) = 1$, e assim $g_n(x) = 0$. Se $x \notin D_{n-1}$ então $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k$. Como $\{C_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ é 2-finita, $x \notin C_i$, para $i = 0, \ldots, n-2$. Logo, $x \notin \mathrm{Coz}(g_i)$, $i = 0, \ldots, n-2$, e $g_n(x) = u(x)(1 - g_{n-1}(x))$. Portanto, $0 \leq g_n \leq 1$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = 1$, para todo $x \in X$.

Dado $x \in X$, existe $n \in I\!N \cup \{0\}$ tal que $x \in C_n$. Consequentemente, $g_k(x) = 0$ para todo $k \geq n+2$, pois $\mathrm{Coz}(g_k) \subset C_k$. Portanto, $\sum_{i=0}^{\infty} g_i(x) = \sum_{i=0}^{n+1} g_i(x) = 1$ pois $C_n \subset D_{n+1}$. □

3.28. Definição. Uma cobertura $\{C_\alpha; \alpha \in I\}$ de X é $*$-finita se para cada $\alpha \in I$, $\{i \in I; C_\alpha \cap C_i \neq \emptyset\}$ é finito.

3.29. Observação. Toda cobertura 2-finita de X é $*$-finita.

3.30. Teorema (Anderson [1]). *Sejam X um espaço completamente regular e E um subanel divisível de $C(X)$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *E S_1-separa todo par de conjuntos de zeros em X, que são disjuntos.*

(ii) *Para cada sequência $(f_n)_{n \in I\!N \cup \{0\}}$ de funções não negativas de E tal que $\{Coz(f_n); n \in I\!N \cup \{0\}\}$ é uma cobertura $*$-finita de X, tem-se que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in E$.*

Então E é uniformemente denso em $C(X)$.

Prova: Seja $\{C_n; n \in Z\!\!\!Z\}$ uma cobertura 2-finita de X formada por cozeros. Considere as seguintes famílias $\{C'_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ e $\{C''_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ definidas por:

$$\text{(a) } C'_0 = \bigcup_{k\leq 0} C_k \quad \text{e} \quad C'_n = C_n \ , \ n > 0$$

$$\text{(b) } C''_0 = \bigcup_{k\geq 0} C_k \quad \text{e} \quad C''_n = C_{-n} \ , \ n > 0.$$

Provemos que $\{C'_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ e $\{C''_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ são coberturas 2-finitas de X. Para $n \geq 2$,

$$C'_0 \cap C'_n = \Big(\bigcup_{k\leq 0} C_k\Big) \cap C_n = \bigcup_{k\leq 0}(C_k \cap C_n) = \emptyset$$

pois $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ é 2-finita. Por outro lado, se $m, n \in I\!N$ com $|n-m| > 1$ então $C'_n \cap C'_m = C_n \cap C_m = \emptyset$. Portanto, $\{C'_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ é 2-finita. A demonstração que $\{C''_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ é 2-finita é análoga.

Pelo Lema 3.27 existem partições da unidade $\{u_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ e $\{v_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$, com $u_n, v_n \in E$, $\text{Coz}(u_n) \subset C'_n$, $\text{Coz}(v_n) \subset C''_n$, para cada $n \in I\!N \cup \{0\}$. Resulta das condições acima que $\{\text{Coz}(u_n); n \in I\!N \cup \{0\}\}$ e $\{\text{Coz}(v_n); n \in I\!N \cup \{0\}\}$ são coberturas 2-finitas de X. Como $\text{Coz}(u_n) = \text{Coz}(nu_n)$ e $\text{Coz}(v_n) = \text{Coz}(nv_n)$ segue-se que $\{\text{Coz}(nu_n); n \in I\!N \cup \{0\}\}$ e $\{\text{Coz}(nv_n); n \in I\!N \cup \{0\}\}$ são também coberturas 2-finitas de X. Pela hipótese, $\sum_{n=0}^{\infty} nu_n \in E$ e $\sum_{n=0}^{\infty} nv_n \in E$. Consequentemente, $g_1 = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} nu_n \in E$ e $g_2 = v_0 + \sum_{n=0}^{\infty} nv_n \in E$.

Considere $h = v_0 g_1 - u_0 g_2 \in E$. Afirmamos que $|h(x) - n| \leq 1$, para todo $x \in C_n$.

Suponhamos primeiramente $n > 0$ e seja $x \in C_n$. Pela construção de $\{C'_n; n \in I\!N \cup \{0\}\}$ temos que $x \notin C'_0$. Logo, $u_0(x) = 0$, pois $\text{Coz}(u_0) \subset C'_0$. Por outro lado, $x \notin C''_m$, para todo $m > 0$, e assim $v_m(x) = 0$, para todo $m > 0$, pois $\text{Coz}(v_m)) \subset C''_m$. Portanto, $1 = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x) = v_0(x)$ e temos:

$$h(x) = g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nu_n(x).$$

Como $\text{Coz}(nu_n) \subset C_n$, para $n > 0$, e $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1$ para todo $x \in X$, segue-se que para $x \in C_n$,

$$\begin{aligned} h(x) &= (n-1)u_{n-1}(x) + nu_n(x) + (n+1)u_{n+1}(x) \\ &= n + u_{n+1}(x) - u_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Portanto, $|h(x) - n| = |u_{n+1}(x) - u_{n-1}(x)| \leq 1$, pois $0 \leq u_m \leq 1$, para todo $m \in I\!N \cup \{0\}$.

A demonstração do caso $n \leq 0$ é análoga à anterior.

Concluímos assim, que existe $h \in E$ tal que $|h(x) - n| < 2$, para todo $x \in C_n$, com $n \in I\!N \cup \{0\}$. Pelo Teorema 3.22, E é uniformemente denso em $C(X)$ □

O próximo exemplo mostra que no teorema anterior, as condições não são necessárias.

3.31. Exemplo. Seja E o subespaço vetorial de $C((0,\infty))$ das funções deriváveis exceto em um número finito de pontos de $(0,\infty)$. E é um anel divisível e uniformemente denso em $C((0,\infty))$. Entretanto, E não satisfaz a condição (ii) do Teorema de Anderson. De fato, considere a sequência $(f_n)_{n\in I\!N\cup\{0\}}$ de funções não-negativas de E, definidas por:

$$f_0 \equiv 0\ , \qquad f_1(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ -x+2 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 2n - \frac{5}{2} \ \text{ ou } \ x \geq 2n \\ \dfrac{2}{3}[x - (2n - \dfrac{5}{2})] & \text{se} \quad 2n - \frac{5}{2} < x < 2n-1 \\ -x+2n & \text{se} \quad 2n-1 \leq x < 2n\ . \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

Note que $\mathrm{Coz}(f_0) = \emptyset$, $\mathrm{Coz}(f_1) = (0,2)$ e $\mathrm{Coz}(f_n) = (2n - \frac{5}{2}, 2n)$ para $n \geq 2$. Portanto, $\{\mathrm{Coz}(f_n); n \in I\!N \cup \{0\}\}$ é uma cobertura $*$-finita de $(0,\infty)$. Entretanto, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \notin E$ porque não é derivável em uma quantidade infinita de pontos.

A Propriedade C

A seguir, daremos uma caracterização da Condição de Cadeia de Lebesgue.

Para isso precisamos do seguinte resultado preliminar.

3.32. Lema. *Sejam $U \subset C(I\!R)$ o subespaço das funções uniformemente contínuas e E o subespaço de U gerado pelas funções uniformemente contínuas e monótonas. Então $\overline{E} = U$.*

Prova: Sendo U uniformemente fechado, $\overline{E} \subset U$. Sejam $f \in U$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Existe $\delta > 0$ tal que $|t - s| \leq \delta \Rightarrow |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon/2$. Definamos $g : I\!R \to I\!R$ por

$$g(t) = (t - n\delta)\, \frac{f((n+1)\delta) - f(n\delta)}{\delta} + f(n\delta)$$

se $t \in (n\delta, (n+1)\delta]$, com $n \in \mathbb{Z}$. Assim g é a poligonal contínua que une os pontos da forma $(n\delta, f(n\delta))$ em $I\!R^2$, com $n \in \mathbb{Z}$. Afirmamos que g é uniformemente contínua. Seja $\varepsilon' > 0$ arbitrário. Considere $0 < \delta' < \min\{\delta, \varepsilon'\delta/\varepsilon\}$. Sejam $t, s \in I\!R$ tais que $|t - s| < \delta'$. Como $|t - s| < \delta$, é suficiente considerar os seguintes casos:

(i) $t, s \in (n\delta, (n+1)\delta]$

$$|g(t) - g(s)| = |t - s| \left|\frac{f((n+1)\delta) - f(n\delta)}{\delta}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2\delta}|t - s| < \varepsilon'$$

(ii) $t \in (n\delta, (n+1)\delta]$ e $s \in ((n+1)\delta, (n+2)\delta]$

Podemos supor $t \neq (n+1)\delta$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{|g(t) - g(s)|}{|t - s|} &\leq \frac{|g(t) - g((n+1)\delta)|}{|t - s|} + \frac{|g((n+1)\delta) - g(s)|}{|t - s|} \\
&\leq \frac{|g(t) - g((n+1)\delta)|}{|t - (n+1)\delta|} + \frac{|g((n+1)\delta) - g(s)|}{|s - (n+1)\delta|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2\delta} + \frac{\varepsilon}{2\delta} = \frac{\varepsilon}{\delta}.
\end{aligned}$$

Portanto, $|g(t) - g(s)| < \dfrac{\varepsilon}{\delta}|t - s| < \dfrac{\varepsilon}{\delta} . \dfrac{\varepsilon'\delta}{\varepsilon} = \varepsilon'$.

Provemos agora que $g \in E$. Observe primeiramente que, se $t \in (n\delta, (n+1)\delta]$ então $|g'(t)| = \left|\dfrac{f((n+1)\delta) - f(n\delta)}{\delta}\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2\delta}$. Considere $g_1 : I\!R \to I\!R$ e $g_2 : I\!R \to I\!R$ definidas respectivamente por $g_1(t) = g(t) + \dfrac{\varepsilon}{2\delta}t$ e $g_2(t) = -\dfrac{\varepsilon}{2\delta}t$, para todo $t \in I\!R$. A observação acima implica que g_1 é não-decrescente pois, dado $t \in I\!R$, como

$t \in (n\delta, (n+1)\delta]$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, tem-se $g_1'(t) = g'(t) + \frac{\varepsilon}{2\delta} \geq -\frac{\varepsilon}{2\delta} + \frac{\varepsilon}{2\delta} = 0$. Claramente, g_2 é monótona, e portanto $g = g_1 + g_2 \in E$. Além disso, $|f(t) - g(t)| < \varepsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, dado $t \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $t \in (n\delta, (n+1)\delta]$. Então,

$$|g(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2\delta}|t - n\delta| + |f(n\delta) - f(t)| < \varepsilon.$$

Portanto, $f \in \overline{E}$. □

3.33. Observação. Na demonstração do Lema 3.32 provamos implicitamente que toda função uniformemente contínua em $\mathbb{R}$ é aproximada por uma poligonal contínua.

3.34. Proposição. *Sejam $E \subset F(X)$ um subespaço vetorial e $f \in F(X)$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f.*

(b) *$\varphi \circ f \in \overline{E}$, para toda função uniformemente contínua e monótona $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

(c) *$\psi \circ f \in \overline{E}$, para toda função uniformemente contínua $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função uniformemente contínua e monótona. Suponhamos φ não-decrescente. Seja $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ uma Cadeia de Lebesgue de $\varphi \circ f$, associada a uma rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, escolha $\beta_n \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que:

$$\begin{array}{rlll} \varphi(\beta_n) = \alpha_n & \text{se } \alpha_n \in \varphi(\mathbb{R}) & & \\ \beta_n = -\infty & \text{se } \alpha_n \notin \varphi(\mathbb{R}) & \text{e} & \alpha_n \leq \inf\{\varphi(x); x \in \mathbb{R}\} \\ \beta_n = +\infty & \text{se } \alpha_n \notin \varphi(\mathbb{R}) & \text{e} & \alpha_n \geq \sup\{\varphi(x); x \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Como a rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e a função φ são não-decrescentes, segue-se que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é não-decrescente. Afirmamos que existe $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ tal que $\beta_n - \beta_{n-1} > s$, sempre que $\beta_n \in \mathbb{R}$. Com efeito, se $\beta_{n-1} = -\infty$, a desigualdade é trivialmente satisfeita. Se $\beta_{n-1} \in \mathbb{R}$, suponha que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta_{n_0} - \beta_{n_0-1} < \varepsilon$, quando $\beta_{n_0} \in \mathbb{R}$. Segue da continuidade uniforme de φ que $\varphi(\beta_{n_0}) - \varphi(\beta_{n_0-1}) < r$, e consequentemente, $\alpha_{n_0} - \alpha_{n_0-1} < r$, o que é impossível. Podemos definir assim, uma Cadeia de Lebesgue $\{D_n; n \in \mathbb{Z}\}$ para f, associada à rede $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Segue da definição de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que $C_n \subset D_n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Pela hipótese, existem $k > 0$ e $g \in E$ tais que $|g(x) - n| < k$, para todo $x \in D_n$. Em particular, $|g(x) - n| < k$, para todo $x \in C_n$. Portanto, E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $\varphi \circ f$. Pelo Teorema 3.13, $\varphi \circ f \in \overline{E}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sejam $k > 1$ arbitrário e $\{C_n; n \in \mathbb{Z}\}$ uma Cadeia de Lebesgue arbitrária de f, associada a uma rede $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Se $\alpha_n = \pm\infty$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, seja $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha_p = -\infty$ e $\alpha_{p+1} = +\infty$. Considere $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = p + 1/2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue da hipótese que $h = \varphi \circ f \in \overline{E}$. Observando que $C_n = \emptyset$, para todo $n \neq p, p+1$, segue que se $x \in C_p$ ou C_{p+1} então $|h(x) - p| = \frac{1}{2} < 1$. Se por outro lado, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ possui termos reais, definimos para $t \in (\alpha_n, \alpha_{n+1}]$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t - \alpha_n}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} + n & \text{se } \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R} \\ n+1 & \text{se } \alpha_n = -\infty \\ n & \text{se } \alpha_{n+1} = +\infty. \end{cases}$$

Vimos no exemplo 3.12(a) que φ é uniformemente contínua, monótona e $h = \varphi \circ f$ satisfaz $|h(x) - n| \leq 1$, para todo $x \in C_n$. Pela hipótese, $h \in \overline{E}$. Seja então $g \in E$ tal que $|h(x) - g(x)| < k - 1$, para todo $x \in X$. Logo,

$$|g(x) - n| \leq |g(x) - h(x)| + |h(x) - n| < k$$

para todo $x \in C_n$. Portanto E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f.

(b) $\Rightarrow$ (c) Considere $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Pelo Lema 3.32 existe uma sequência $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com $h_n = a_{1,n}\varphi_{1,n} + \cdots + a_{r_n,n}\varphi_{r_n,n}$ onde $a_{i,n} \in \mathbb{R}$, $\varphi_{i,n}$ uniformemente contínuas e monótonas, $i = 1, \ldots, r_n$, tal que $h_n \to \psi$. Pela hipótese, $(a_{i,n}\varphi_{i,n}) \circ f \in \overline{E}, i = 1, \ldots, r_n$. Sendo $\overline{E}$ subespaço vetorial resulta que $h_n \circ f \in \overline{E}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $h_n \circ f \to \psi \circ f$, segue-se que $\psi \circ f \in \overline{E}$.

(c) $\Rightarrow$ (b) Óbvio. □

3.35. Observação. Segue da demonstração da proposição anterior que, se E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f, com alguma constante k, então E também verifica esta Condição para qualquer constante maior do que 1.

3.36. Corolário. *Seja $E \subset C(X)$ um subespaço vetorial. Então E é uniformemente denso em $C(X)$, se, e somente se, E satisfaz a Condição de Cadeia de*

Lebesgue para cada $f \in C(X)$.

3.37. Exemplos.

(a) $C^\infty(I\!R^n)$ satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para toda $f \in C(I\!R^n)$. Com efeito, $\varphi \circ f \in C(I\!R^n) = \overline{C^\infty(I\!R^n)}$, para toda $\varphi : I\!R \to I\!R$ uniformemente contínua e o resultado segue da Proposição 3.34.

(b) Sejam U o espaço das funções uniformemente contínuas em $I\!R$ e $P_c(I\!R)$ o espaço das funções poligonais contínuas em $I\!R$. Pela Observação 3.33, $U \subset \overline{P_c(I\!R)}$. Logo, pela Proposição 3.34 $P_c(I\!R)$ satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para qualquer $f \in U$.

(c) Segue da Proposição 3.34 que se $E \subset F(I\!R)$ satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f = Id$ então $U \subset \overline{E}$. Como consequência imediata temos que $E = \{g : I\!R \to I\!R;\ g(x) = ax + b,\ a, b \in I\!R\}$ não satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f = Id$. Tal resultado foi provado diretamente no Exemplo 3.12(b).

3.38. Definição. Dizemos que um subespaço $E \subset F(X)$ tem a Propriedade C se E verifica a Condição de Cadeia de Lebesgue para todas as suas funções.

Observemos que, no caso limitado, a Propriedade C coincide com a Propriedade S, pela Proposição 3.17.

3.39. Exemplos.

(a) O espaço U das funções uniformemente contínuas em $I\!R$ tem a Propriedade C (Vide Exemplo 3.12(a)).

(b) O espaço uniformemente fechado $\mathcal{P}(I\!R)$ das funções polinomiais reais definidas em $I\!R$ não tem a Propriedade C pois não satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para $f = Id$. Caso satisfizesse, teríamos $U \subset \mathcal{P}(I\!R)$, o que é impossível.

3.40. Proposição. *Se um subespaço vetorial $E \subset C(X)$ é denso em $C(X)$ então E tem a Propriedade C.*

Prova: Seja $f \in E$ arbitrária. Se $\varphi : I\!R \to I\!R$ é uniformemente contínua então

$\varphi \circ f \in C(X) = \overline{E}$. Pela Proposição 3.34 E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f. □

Observe que a recíproca da Proposição 3.40 não é necessariamente verdadeira. Basta considerar, por exemplo, o espaço das funções uniformemente contínuas em $\mathbb{R}$.

O próximo resultado dá uma caracterização do fecho uniforme de espaços vetoriais que têm a Propriedade C.

3.41. Teorema. *Sejam $E \subset F(X)$ um subespaço vetorial com a Propriedade C e $f \in F(X)$. Então $f \in \overline{E}$ se, e somente se, E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f.*

Prova: Seja $f \in \overline{E}$. Existe $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in E$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $f_n \to f$. Pela Proposição 3.34, $\varphi \circ f_n \in \overline{E}$, para toda $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua. Como $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$, segue-se que $\varphi \circ f \in \overline{E}$. Novamente, da Proposição 3.34 segue-se que E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f. A recíproca é o Teorema 3.13. □

Note que o resultado acima se reduz ao Teorema 2.18, no caso limitado.

3.42. Teorema. *Seja $E \subset F(X)$ um subespaço vetorial. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E tem a Propriedade C.*

(b) *$\overline{E}$ é fechado sob composição com funções reais uniformemente contínuas e monótonas definidas em $\mathbb{R}$.*

(c) *$\overline{E}$ é fechado sob composição com funções reais uniformemente contínuas definidas em $\mathbb{R}$.*

(d) *$\overline{E}$ tem a Propriedade C.*

(e) *Existe $k > 0$ tal que E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue, para cada $f \in E$, com o mesmo k.*

Prova:

(a) $\Rightarrow$ (b) Sejam $f \in \overline{E}$ e $\varphi : I\!R \to I\!R$ uniformemente contínua e monótona. Como E tem a Propriedade C, pelo Teorema 3.41, E satisfaz a Condição de Cadeia de Lebesgue para f. Pela Proposição 3.34, $\varphi \circ f \in \overline{E}$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue do Lema 3.32.

(c) $\Rightarrow$ (d) Segue do fato que $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$ e da Proposição 3.34.

(d) $\Rightarrow$ (e) Imediato da Proposição 3.34 e da Observação 3.35.

(e) $\Rightarrow$ (a) Óbvio. □

Podemos estender naturalmente a Propriedade S para o caso não-limitado, dizendo que $E \subset F(X)$ tem a Propriedade S se E S-separa os conjuntos de Lebesgue de todas as suas funções.

3.43. Corolário. *Seja $E \subset F(X)$ um subespaço vetorial. Considere as seguintes afirmações:*

(a) *E tem a Propriedade C.*

(b) *E tem a Propriedade S.*

(c) *$\overline{E}$ é um subanel de $F(X)$ que contém as funções constantes.*

(d) *$\overline{E}$ é um subreticulado de $F(X)$ que contém as funções constantes.*

(e) *$\overline{E}$ é fechado sob composição com funções contínuas em $I\!R$.*

Então (a) $\Rightarrow$ (b), (a) $\Rightarrow$ (d), (d) $\Rightarrow$ (b), (e) $\Rightarrow$ (a), (e) $\Rightarrow$ (d) *e* (e) $\Rightarrow$ (c).

Prova: (a) $\Rightarrow$ (b) segue da Observação 3.18 enquanto (e) $\Rightarrow$ (a) resulta do Teorema 3.42. Para provar (a) $\Rightarrow$ (d) suponha que E tem a Propriedade C. Pelo Teorema 3.42, $\overline{E}$ é fechado sob composição com a função $\varphi(t) = |t|$, $t \in I\!R$. Logo, $\varphi \circ f = |f| \in \overline{E}$, para toda $f \in E$. Além disso, $\overline{E}$ contém as funções constantes, pelo Corolário 3.14. Usando o mesmo raciocínio, prova-se que (e) $\Rightarrow$ (d) e (e) $\Rightarrow$ (c). Finalmente, para provar que (d) $\Rightarrow$ (b), sejam $f \in E$ e $\alpha < \beta$ arbitrários. Considere $g = (f \vee \alpha) \wedge \beta$. Como $\overline{E}$ é um subreticulado que contém as funções constantes e g é limitada, segue-se que $g \in \overline{E} \cap F_b(X)$. Usando o fato que $\overline{E} \cap F_b(X) = \overline{E \cap F_b(X)}$ também é um reticulado contendo as funções constantes, pelo Teorema 2.21 $E \cap F_b(X)$ tem a Propriedade S. Observando que $L_\alpha(f) = L_\alpha(g)$ e $L^\beta(f) = L^\beta(g)$ concluímos que E

tem a Propriedade S. □

Utilizando a Proposição 3.17 e resultados do Capítulo 2, concluímos que as afirmações do Corolário 3.43 são equivalentes no caso limitado.

Os seguintes exemplos mostram que as outras implicações não são necessariamente verdadeiras, no caso não-limitado.

3.44. Exemplos.

(a) O subespaço $U \subset C(\mathbb{R})$ das funções uniformemente contínuas é uniformemente fechado e tem a Propriedade C. Entretanto, U não é um subanel. Portanto, (a) $\not\Rightarrow$ (c). Este mesmo subespaço serve de contra-exemplo para (a) $\Rightarrow$ (e).

(b) Seja E o subespaço vetorial de $C(\mathbb{R})$ gerado por $C_b(\mathbb{R})$ e pela função identidade:

$$E = \{g + \lambda Id; g \in C_b(\mathbb{R}),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

E é uniformemente fechado e S-separa cada par de conjuntos fechados disjuntos de $\mathbb{R}$ pois $E \supset C_b(\mathbb{R})$. Portanto, E tem a Propriedade S. Por outro lado, E não verifica nenhuma das condições (a), (c), (d) e (e). De fato, basta observar que as funções $g(x) = |x|$ e $h(x) = x^2$ não pertencem a E.

(c) Seja E o conjunto das funções de $C(\mathbb{R})$ que possuem assíntota à direita, isto é, $f \in E$ se existe $u(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - u(x) = 0$. Claramente, E é um subreticulado de $C(\mathbb{R})$ e contém as funções constantes. Afirmamos que E é uniformemente fechado. Observemos primeiramente que se uma função contínua é limitada e tem assíntota à direita então sua assíntota é horizontal. Consideremos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in E$ tal que $f_n \to f \in C(\mathbb{R})$ e seja $u_n(x) = a_n x + b_n$ a assíntota à direita de f_n, com $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sendo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy e u_n uma assíntota à direita de f_n, concluímos que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ e x suficientemente grande

$$\begin{aligned}|(a_n - a_{n_0})x + (b_n - b_{n_0})| \leq |a_n x + b_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f_{n_0}(x)| + \\ |a_{n_0}x + b_{n_0} - f_{n_0}(x)| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Logo, para $n \geq n_0$, a função φ_n definida por $\varphi_n(x) = (a_n - a_{n_0})x + (b_n - b_{n_0})$ é limitada e pertence a E. Consequentemente $a_n = a_{n_0}$ para cada $n \geq n_0$. Por outro lado, $|b_n - b_{n_0}| < |(a_n - a_{n_0})x| + 3\varepsilon = 3\varepsilon$ para cada $n \geq n_0$. Portanto, $a_n x + b_n \to a_{n_0}x + b_{n_0}$ e assim $u(x) = a_{n_0}x + b_{n_0}$ é assíntota à direita de f. Logo $f \in E$, o que prova que E é uniformemente fechado.

Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^{1/2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Note que g é uniformemente contínua. Como $g \notin E$ segue-se que E não é fechado sob composição com todas as funções uniformemente contínuas. Logo, E não tem a Propriedade C. Portanto, E não satisfaz (a) e (e). A condição (c) também não é verificada pois a função $h(x) = x^2$ não pertence a E.

(d) Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o espaço das funções polinomiais reais definidas em $\mathbb{R}$. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ é um subanel uniformemente fechado que contém as funções constantes mas não verifica nenhuma das outras afirmações. Note que a função $h(x) = |x|$ não pertence a $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Logo, (c) não implica as afirmações (a), (d) e (e). Para mostrar que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não tem a Propriedade S, sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos fechados e disjuntos. Dado $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, se $0 \leq p \leq 1$ então p é um polinômio constante, digamos $p(x) = c > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então existe $\delta = c/2$ tal que $p(A) \not\subset [0, \delta]$. Portanto, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não verifica a condição de S-separação de conjuntos fechados e disjuntos em $\mathbb{R}$.

Os exemplos 3.44 (c) e (d) mostram que o fato de um subespaço vetorial E uniformemente fechado, contendo as funções constantes, ser um subreticulado ou um subanel de $F(X)$ não é suficiente para concluir que E tem a Propriedade C.

O próximo resultado garante que se E for simultaneamente um subanel e um subreticulado de $F(X)$ então E tem a Propriedade C. Para isso, precisamos do seguinte lema:

3.45. Lema. *Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua e $t_0 \in \mathbb{R}$, então existem duas retas $r(t) = a_1 t + b_1$ e $\ell(t) = a_2 t + b_2$ tais que $\varphi(t) \leq r(t)$ para $t \geq t_0$ e*

$\varphi(t) \geq \ell(t)$, *para* $t \leq t_0$.

Prova: Efetuando-se uma mudança de variáveis, se necessário, podemos supor $t_0 = 0$. Pela continuidade uniforme, existe $\delta > 0$ tal que $|t - s| \leq \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(s)| \leq 1$. Se $t \geq 0$, existe $p \in I\!N \cup \{0\}$ tal que $p\delta \leq t \leq (p+1)\delta$. Logo $|\varphi(t) - \varphi(p\delta)| \leq 1$. Então

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) - \varphi(p\delta) \leq 1\\
&\varphi(p\delta) - \varphi((p-1)\delta) \leq 1\\
&\ \vdots\\
&\varphi((p-(p-1))\delta) - \varphi(0) \leq 1.
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(t) \leq \varphi(0)+p+1 \leq \varphi(0)+t/\delta+1$. Analogamente, se $t \leq 0$, existe $q \in I\!N \cup \{0\}$ tal que $-(q+1)\delta \leq t \leq -q\delta$. Portanto $|\varphi(t) - \varphi(-q\delta)| \leq 1$. Então

$$\begin{aligned}
&-1 \leq \varphi(t) - \varphi(-q\delta)\\
&-1 \leq \varphi(-q\delta) - \varphi(-(q-1)\delta)\\
&\ \vdots\\
&-1 \leq \varphi(-\delta) - \varphi(0).
\end{aligned}$$

Logo, $-(q+1) \leq \varphi(t) - \varphi(0)$. Como $-q \geq t/\delta$ segue-se que $\varphi(0) + t/\delta - 1 \leq \varphi(t)$. Portanto, as retas $r(t) = \dfrac{1}{\delta}t + \varphi(0) + 1$ e $\ell(t) = \dfrac{1}{\delta}t + \varphi(0) - 1$ satisfazem as condições do enunciado. □

3.46. Proposição. *Seja E um subespaço vetorial de $F(X)$. Se $\overline{E}$ é um subanel e um subreticulado de $F(X)$ contendo as funções constantes, então E tem a Propriedade C.*

Prova: Visto que E tem a Propriedade C, se, e somente se, $\overline{E}$ tem a Propriedade C (Teorema 3.42), podemos supor que E é uniformemente fechado. Seja $\mathcal{L} = \{\varphi \in C(I\!R); \varphi \circ f \in E$, para toda $f \in E\}$. Para provar que E tem a Propriedade C, basta mostrar que $\mathcal{L}$ contém as funções uniformemente contínuas. Note que $\mathcal{L}$ é um subanel e um subreticulado uniformemente fechado em $C(I\!R)$. Além do mais,

(1) $\mathcal{L}$ contém as funções polinomiais.

Isto decorre do fato de $\mathcal{L}$ ser um subanel que contém as funções constantes e a função identidade.

(2) $\mathcal{L}$ contém as poligonais contínuas com um número finito de vértices.

Como $\mathcal{L}$ é um subreticulado que contém as funções polinomiais, $\mathcal{L}$ contém também o supremo e o ínfimo entre duas retas. Logo, $\mathcal{L}$ contém toda poligonal com um vértice. Usando indução sobre o número de vértices, concluímos que $\mathcal{L}$ contém as poligonais com um número finito de vértices.

(3) $\mathcal{L} \supset C_0(\mathbb{R})$.

Pela Proposição 1.19, $C_0(\mathbb{R}) = \overline{C_K(\mathbb{R})}$. Sendo $\mathcal{L}$ uniformemente fechado, basta provar que $C_K(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$. Seja $\varphi \in C(\mathbb{R})$ tal que supp$\varphi \subset [a,b]$. Existem poligonais $\varphi_n \in C[a,b]$ tais que $\varphi_n \to \varphi\Big|_{[a,b]}$. Cada φ_n pode ser estendida continuamente a $\mathbb{R}$, de forma constante em $(-\infty, a]$ e $[b, +\infty)$, obtendo-se assim uma poligonal ψ_n com um número finito de vértices. Como $\psi_n \in \mathcal{L}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, e $\psi_n \to \varphi$, segue-se que $\varphi \in \mathcal{L}$, pois $\mathcal{L}$ é uniformemente fechado. Portanto, $C_K(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$.

(4) $\mathcal{L}$ contém as funções uniformemente contínuas.

Pela Proposição 3.34 basta mostrar que se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua e monótona, então $\varphi \in \mathcal{L}$. Suponhamos φ não-decrescente. Pelo Lema 3.45 dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existem $r(t) = a_1t + b_1$ e $\ell(t) = a_2t + b_2$ tais que:

$$\varphi(t_0) \leq \varphi(t) \leq a_1t + b_1 \quad \text{se} \quad t \geq t_0$$

e

$$\varphi(t_0) \geq \varphi(t) \geq a_2t + b_2 \quad \text{se} \quad t \leq t_0.$$

Então

$$\frac{\varphi(t_0)}{1+t^2} \leq \frac{\varphi(t)}{1+t^2} \leq \frac{a_1t + b_1}{1+t^2} \quad \text{se} \quad t \geq t_0$$

e

$$\frac{a_2t + b_2}{1+t^2} \leq \frac{\varphi(t)}{1+t^2} \leq \frac{\varphi(t_0)}{1+t^2} \quad \text{se} \quad t \leq t_0.$$

Consequentemente, $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2} = 0$. Portanto, a função ψ definida por $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{1+t^2}$ pertence a $C_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ é um subanel contendo as funções polinomiais, segue-se que $\varphi \in \mathcal{L}$. □

3.47. Observação. Segue da demonstração da proposição anterior que todo subespaço vetorial $E \subset F(X)$ uniformemente fechado, que é um subanel e um subreticulado, contendo as funções constantes, é fechado sob composição com uma grande classe de funções contínuas em $\mathbb{R}$. Tal classe inclue $\mathcal{P}(\mathbb{R}), U, C_K(\mathbb{R})$ e $C_0(\mathbb{R})$. Observemos também que E é fechado sob composição com funções contínuas limitadas, pois dada $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, temos $\varphi = \psi \cdot p$ onde $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{1+t^2}$ e $p(t) = 1 + t^2$. Como $\psi \in C_0(\mathbb{R})$ e $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, segue-se que $\varphi \in \mathcal{L}$.

O exemplo seguinte mostra que, entretanto, tal classe não é necessariamente $C(\mathbb{R})$.

3.48. Exemplo. Seja $E = \left\{\sum_{i=1}^{m} f_i \cdot p_i \text{ tais que } f_i \in C_0(\mathbb{R}) \text{ e } p_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\right\}$ o subanel de $C(R)$ gerado por $C_0(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Note que E é um subreticulado de $C(\mathbb{R})$, pois dada $f \in E$, $|f| = \varphi \cdot \psi$ onde $\varphi(x) = \dfrac{|f(x)|}{(1+f^2(x))(1+x^2)}$ e $\psi(x) = ((1+f^2(x))(1+x^2)$. Como E é um subanel e contém $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ e $C_0(\mathbb{R})$, segue-se que $\varphi, \psi \in E$. Logo, $|f| \in E$. Com um argumento análogo prova-se que $E \supset C_b(\mathbb{R})$. Por outro lado, E é uniformemente fechado pois dada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in E$ e $f_n \to f \in C(\mathbb{R})$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f - f_{n_0}$ é limitado. Logo, $f - f_{n_0} \in E$. Como $f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0}$ segue-se que $f \in E$. Observemos que E não é fechado sob composição com todas as funções contínuas em $\mathbb{R}$. De fato, a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = e^x$ não pertence à E, pois caso contrário, $h(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)p_i(x)$ com $f_i \in C_0(\mathbb{R})$, $p_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $p_i(x) = \sum_{k=0}^{n_i} a_{k,i}x^k$, $i = 1, \ldots, m$. Como $f_i \in C_b(\mathbb{R})$, existe $M > 0$ tal que $|f_i(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $i = 1, \ldots, m$. Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{i=1}^{m} f_i(x)p_i(x) \leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)||p_i(x)| \\ &\leq M \max_{\substack{0\leq k\leq n_i \\ 1\leq i\leq m}} |a_{k,i}| \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_i} |x|^k. \end{aligned}$$

Em particular, para todo $x > 0$, $\dfrac{e^x}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n_i} x^k} \leq M \max_{\substack{0\leq k\leq n_i \\ 1\leq i\leq m}} |a_{k,i}|$, o que é impossível.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDERSON, F. W., Approximation in systems of real-valued continuous functions. Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1921), 249–271.

[2] BLASCO, J. L. - MOLTÓ, A., On the uniform closure of a linear space of bounded real-valued functions. Annali di Matemática Pura et Applicata (IV), Vol. CXXXIV (1983), 233–239.

[3] DUGUNDJI, J., Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1965.

[4] GARRIDO, M. I., Aproximacion uniforme en espacios de funciones continuas. Publ. Dpto. Mat. Univ. de Extremadura, Vol. 24, 1990.

[5] GARRIDO, M. I. and MONTALVO, F., Uniform approximation theorems for real-valued continuous functions, to appear in Topology and its appl.

[6] GILLMAN, L. - JERISON, M., Rings of continuous functions. Springer-Verlag, 1976.

[7] HEWITT, E., Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem. Duke Math. J. 14 (1947), 419–427.

[8] JAMESON, G. J. O., Topology and normed spaces. Chapman and Hall, London, 1974.

[9] KAKUTANI, S., Concrete representation of abstract (M)-spaces. Ann. Math. 42 (1941), 994–1024.

[10] LIMA, E. L., Curso de Análise, Vol. 2. IMPA, Rio de Janeiro, 1981.

[11] MROWKA, S., On some approximation theorems, Nieuw Arch. Wisk, 16 (1968), 94–111.

[12] NARASIMHAN, R., Analysis on Real and Complex Manifolds. North-Holland, 1968.

[13] PROLLA, JOÃO B., Weierstrass-Stone, The Theorem. Verlag Peter Lang GmbH, Frankfurt, 1993.

[14] SIMMONS, GEORGE F., Topology and Modern Analysis. Mc Graw-Hill Book Company. New York, 1963.

[15] STONE, M. H., Applications of the theory of Boolean rings to general topology. Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375–481.

[16] TIETZE, H., Über functionen die auf einer abgeschlossenen menge steti sind. Journ. Math. 145 (1915), 9–14.

[17] WEIERSTRASS, K., Über die analytische Darstellbarkeit sogennater willkürlicher Functionen einer reelen Veränderlichen, Sitzungsberichte der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1885), 633–640, 789–806.