Semigrupos Assintóticos e Semi-algébricos

Zhang Cunhong

Luiz A. B. San Martin
Orientador

Imecc–Unicamp
Fevereiro de 2002

Semigrupos Assintóticos e Semi-algébricos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por ZHANG CUNHONG e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de março de 2002.

Prof. Dr : Luiz A. B. San Martin
Orientador

BANCA EXAMINADORA:

1. Prof. Dr. Luiz A. B. San Martin.
2. Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros.
3. Prof. Dr. Alexander Ananin
4. Prof. Dr. Alexandre Luís Trovon de Carvalho
5. Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Titulo de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Zhang Cunhong

Z61s Semigrupos assintóticos e semi-algébricos / Zhang Cunhong -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Semigrupos. 2. Grupos algébricos. 3. Lie, Grupos de. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 28 de fevereiro de 2002 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof (a). Dr (a). ALEXANDRE ANANIN

Prof (a). Dr (a). CÁIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Prof (a). Dr (a). OSVALDO GERMANO DO RÓCIO

Alexandre Luis T. Carvalho

Prof (a). Dr (a). ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO

Semigrupos Assintóticos e Semi-algébricos

Zhang Cunhong

Índice

Resumo

Pretendemos neste trabalho desenvolver o conceito de semigrupo assintótico para subsemigrupos de grupos algébricos semi-simples. Além disso, estudamos a semi-algebricidade dos semigrupos.

Semigrupo assintótico de um grupo de Lie complexo e semi-simples foi introduzido por Vinberg [25]. Nosso primeiro passo é estender a noção de semigrupo assintótico para certos grupos algébricos semi-simples reais (o que fazemos no capítulo 2). Para isso, precisamos de um tipo de teorema de Peter-Weyl para essa classe de grupos, que é desenvolvido no capítulo 1, que tem um caráter preliminar. A seguir, através de representações caracterizamos os semigrupos assintóticos como um conjunto de operadores extremais (capítulo 3), e restringindo operadores extremais de acordo com subsemigrupo chegamos a definição de semigrupo assintótico para subsemigrupos (ver capítulo 5). Os conjuntos controláveis invariantes (discutidos no capítulo 4) desempenham um papel central no desenvolvimento acima. Exemplos são estudados no capítulo 6.

No último capítulo, consideramos a semi-algebricidade dos semigrupos. Provamos que os conjuntos controláveis dos semigrupos semi-algébricos são semi-algébricos, e que os semigrupos de compressão dos conjuntos semi-algébricos são semi-algébricos. Como aplicação, obtemos as características dos semigrupos semi-algébricos maximais, baseado no trabalho de San Martin sobre semigrupos maximais [19].

Abstract

In this work, we try to develop the concept of asymptotic semigroup for subsemigroups in semisimple algebraic groups. Besides, we study the semialgebraicity of semigroups.

Asymptotic semigroup of a semisimple complex Lie group is introduced by Vinberg [25]. Our first step is to extend the notion of asymptotic semigroup to certain real semisimple algebraic groups (which is done in chapter 2). Thus we need a type of Peter-Weyl theorem for this class of groups, which is developed in chapter 1 as preliminaries. Afterwards, we characterize the asymptotic semigroups as a set of extremal operators through representations (chapter 3), and obtain the definition of asymptotic semigroup for subsemigroups by restricting extremal operators in accordance with subsemigroups (see chapter 5). The invariant control sets (discussed in chapter 4) play a central role in the above development. Examples are studied in chapter 6.

In the last chapter, we consider the semialgebraicity of semigroups. We prove that the control sets of semialgebraic semigroups are semialgebraic, and that the compression semigroups of semialgebraic sets are semialgebraic. As an application, we obtain the characteristics of maximal semialgebraic semigroups, basing on the work of San Martin on maximal semigroups [19].

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar semigrupos em grupos semi-simples do ponto de vista da geometria algébrica real. Nossos temas serão semigrupos assintóticos e semigrupos semi-algébricos.

O conceito "assintótico" é empregado para descrever as tendências dos objetos no infinito, pensando em suas assíntotas, da mesma forma que os eixos $x = 0$ e $y = 0$ são as retas assintóticas à hipérbole $xy = 1$ no plano. Este exemplo é um caso especial de cone assintótico, um conceito central em boa parte desta tese (veja [15]).

Em [14], Popov mostrou que cada ação (algébrica) de um grupo algébrico redutível e simplesmente conexo G sobre uma variedade algébrica afim X pode ser contraída (numa família plana e unidimensional de ações) uma ação canônica de G sobre uma certa variedade afim $\mathrm{gr}X$ (um cone assintótico), que tem algumas propriedades especiais. Baseado no trabalho de Popov, Vinberg em [25], associou a cada grupo de Lie complexo, semi-simples e conexo G um semigrupo algébrico irredutível e normal $\mathrm{As}G$, chamado semigrupo assintótico de G. Como variedade, $\mathrm{As}G$ é nada mais nada menos que $\mathrm{gr}G$, na notação de Popov, considerando a ação de G sobre si mesmo. A estrutura de semigrupo foi introduzida em $\mathrm{As}G$ através da construção da estrutura de álgebra de Hopf em $\mathbb{C}[\mathrm{As}G]$, a álgebra dos polinômios sobre $\mathrm{As}G$. Seja $A = \mathbb{C}[G]$, a álgebra dos polinômios sobre G. Então, $\mathbb{C}[\mathrm{As}G] = \mathrm{gr}A$ denota a álgebra graduada de A, cujos elementos são os mesmos que de A, enquanto que a multiplicação é modificada (veja capítulo 2). A partir da co-multiplicação em A (que é uma álgebra de Hopf), deduz-se a co-multiplicação em $\mathrm{gr}A$, utilizando a filtração em A. Com efeito, a estrutura de semigrupo foi estabelecida em $G \cup \mathrm{As}G$.

Pretendemos aplicar a idéia do Vinberg para construir semigrupos assintóticos para grupos algébricos reais. Seja G um grupo algébrico afim real. Seja $A = \mathbb{R}[G]$, a álgebra dos polinômios sobre G. Observamos que uma álgebra graduada gr$A$ pode ser induzida a partir de A como no caso complexo se, e somente se, temos uma decomposição $A = \oplus_\Lambda A_\Lambda$ correspondente ao caso complexo. Em outras palavras, o teorema de Peter-Weyl deve valer para esse tipo de grupo algébricos real. Por isso, trabalhamos nos grupos algébricos reais normais (*split*), para quais os semigrupos assintóticos são naturalmente definidos.

Queremos definir também os semigrupos assintóticos para subsemigrupos dos grupos algébricos reais que acabamos de tratar. A dificuldade é que para subsemigrupos não temos, no momento, álgebras adequadas correspondentes, que substituam álgebra de Hopf dos polinômios. Isso impede a introdução de uma definição intrínseca de semigrupo assintótico para subsemigrupos. Em vez disso, achamos uma definição não intrínseca através das representações dos semigrupos assintóticos estabelecidas no trabalho de Vinberg. Os resultados sobre conjuntos controláveis de semigrupos desempenham um papel central no desenvolvimento. Dessa forma, obtemos uma definição razoável de semigrupos assintóticos para subsemigrupos de tipo parabólico trivial do grupo algébrico semi-simples, irredutível, real normal, e cujo complexificado é simplesmente conexo.

Na segunda parte do trabalho (o último capítulo), estudamos as semi-algebricidade dos semigrupos. Do ponto de vista da geometria algébrica real, a estrutura adequada estipulada para subsemigrupo de um grupo algébrico real é a de conjunto semi-algébrico ao invés de conjunto algébrico, uma vez que subsemigrupos algébricos são necessáriamente subgrupos. Não existe na literatura muitos resultados sobre os semigrupos semi-algébricos. Investigamos os conjuntos controláveis dos semigrupos semi-algébricos e semigrupos de compressão dos conjuntos semi-algébricos, obtemos que as propriedades de semi-algebricidade são bem comportadas. Como aplicação, na base do trabalho de San Martin [19] sobre os semigrupos maximais no grupo de Lie, estudamos os semigrupos semi-algébricos maximais no grupo algébrico real, cujas caracterisíticas são semelhantes.

Capítulo 1

Representações de grupos redutíveis

O objetivo deste capítulo é estabelecer os conceitos sobre representações dos grupos algébricos lineares que serão utilizados ao longo do trabalho. Além de introduzirmos a linguagem básica demonstraremos um teorema análogo ao teorema de Peter-Weyl para grupo algébricos lineares reais. Observamos que essa teoria é amplamente conhecida para o caso de grupos redutíveis sobre corpos algebricamente fechados, mas não está completamente desenvolvida na literatura para o caso de grupos reais. Estenderemos aqui a teoria complexa para grupos algébricos sobre $\mathbb{R}$, as chamadas formas reais normais dos grupos complexos. O interesse principal é a decomposição da representação regular, decomposição essa que denominamos de teorema de Peter-Weyl.

1.1 Conceitos sobre representações de grupos

Os conceitos básicos sobre grupos algébricos lineares serão utilizados em [3], [4], [11], [13], [22].

Definição 1.1.1 *Seja k um corpo de característica 0. Um grupo algébrico linear (sobre k) é um grupo G munido de uma estrutura de variedade algébrica afim, tal que as aplicações*

$$\begin{aligned} \mu &: G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto xy \\ l &: G \to G,\ x \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

são morfismos de variedades algébricas (sobre k).

Definição 1.1.2 *Um grupo algébrico linear G é chamado irredutível (ou conexo, no sentido Zariski) se ele é irredútivel como uma variedade afim.*

Examplo: Seja V um espaço vetorial de dimensão n sobre k. O grupo de todas as transformações inversíveis de V, $\mathrm{GL}(V)$, é um grupo algébrico linear. $\mathrm{GL}(V)$ também pode ser visto como $\mathrm{GL}(n, k)$, o grupo de todas $n \times n$ matrizes inversíveis sobre k. □

Observação: Qualquer grupo algébrico linear complexo (real) é um grupo de Lie complexo (real) da mesma dimensão. (Veja [13], capítulo 3.) □

Definição 1.1.3 *Um homomorfismo de grupos algébricos lineares é uma aplicação que é um homomorfismo de grupos, e ao mesmo tempo, um morfismo de varidades algébricas.*

Um isomorfismo de grupos algébricos é uma aplicação que é simultaneamente um isomorfismo de grupos e de variedades algébricas.

Sejam k um corpo de característica 0 e G um grupo algébrico linear sobre k. Seja V um espaço vetorial (de dimensão finita) sobre k.

Definição 1.1.4 *Se $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ é um homomorfismo de grupos algébricos. Então, φ é chamado uma representação de G em V, denotamos (G, V). V é chamado de espaço da representação φ.*

Observação: V também pode ser visto como um G módulo, se definimos a mutiplicação $g.v$ como $\varphi(g)v$, onde $g \in G$, $v \in V$. Freqüentemente escrevemos gv ao invés de $\varphi(g)v$, se não há ambigüidade. □

Definição 1.1.5 *Duas representações (G, V) e (G, W) são equivalentes, se existe uma transformação linear inversível $A : V \to W$, tal que $A(gx) = g(Ax)$, onde $x \in V$ e $g \in G$.*

Definição 1.1.6 *Seja (G, V) uma representação. Um subespaço $U \subset V$ é chamado de subespaço invariante por G se $GU = \{gx, g \in G, x \in U\} \subset U$.*

Definição 1.1.7 *Seja (G, V) uma representação. Se $\{0\}$ e V são os únicos subespaços invariantes por G de V, então (G, V) será denominada irredutível. Caso contrário, será denominada redutível.*

Definição 1.1.8 *Sejam (G, V) e (G, W) duas representações. Seja $V + W$ a soma direta de V e W. A soma direta das representações (G, V) e (G, W), denotada por $(G, V + W)$, é definida por $g(x, y) = (gx, gy)$, onde $x \in V$, $y \in W$, $g \in G$.*

Definição 1.1.9 *Seja (G, V) uma representação. Seja V^* o espaço dual de V. A representação dual (G, V^*) é definida por $gf(x) = f(g^{-1}x)$, ou em outra forma, $\langle gf, x\rangle = \langle f, g^{-1}x\rangle$, onde $f \in V^*$, $x \in V$, $g \in G$.*

Definição 1.1.10 *Sejam (G, V) e (G, W) duas representações. Seja $V \otimes W$ o produto tensorial de V e W. O produto tensorial das representações (G, V) e (G, W), denotado por $(G, V \otimes W)$, é definido por $g(v \otimes w) = gv \otimes gw$, onde $v \in V$, $w \in W$, $g \in G$.*

Sejam (G, V) uma representação, $\mathrm{End}(V)$ o espaço de todas as transformações lineares de V, e $V \otimes V^*$ o produto tensorial de V e sua dual V^*.

$V \otimes V^*$ tem uma estrutura de $G \times G$ módulo e uma estrutura de G módulo definidas respectivamente por

$$(g, h)(v \otimes \lambda) = gv \otimes h\lambda \tag{1.1}$$

e

$$g(v \otimes \lambda) = gv \otimes \lambda, \tag{1.2}$$

onde $g, h \in G$, $v \in V$, $\lambda \in V^*$.

$\mathrm{End}(V)$ tem uma estrutura de $G \times G$ módulo e uma estrutura de G módulo definidas respectivamente por

$$(g, h)A(x) = g(A(h^{-1}x)) \tag{1.3}$$

e

$$gA(x) = g(Ax), \tag{1.4}$$

onde $A \in \mathrm{End}(V)$, $g, h \in G$, $x \in V$.

Lema 1.1.11 *Seja $\varphi : V \otimes V^* \to \mathrm{End}(V)$ o homomorfismo definido por*

$$\varphi(v \otimes \lambda)(x) = \lambda(x)v, \tag{1.5}$$

onde $x, v \in V$, $\lambda \in V^*$. Então φ é um $G \times G$-isomorfismo e um G-isomorfismo.

Demonstração: φ é G-homomorfismo:

$$(g\varphi(v \otimes \lambda))(x) = g(\varphi(v \otimes \lambda)x) = g(\lambda(x)v) = \lambda(x)gv,$$

$$\varphi(g(v \otimes \lambda))(x) = \varphi(gv \otimes \lambda)(x) = \lambda(x)gv,$$

onde $g \in G$, $v, x \in V$, $\lambda \in V^*$.

φ é $G \times G$-homomorfismo:

$$((g,h)\varphi(v \otimes \lambda))(x) = g(\varphi(v \otimes \lambda)(h^{-1}x)) = g(\lambda(h^{-1}x)v) = \lambda(h^{-1}x)gv,$$

$$\varphi((g,h)(v \otimes \lambda))(x) = \varphi(gv \otimes h\lambda)(x) = (h\lambda)(x)gv = \lambda(h^{-1}x)gv,$$

onde $g, h \in G$, $v, x \in V$, $\lambda \in V^*$.

Como φ é bijetivo, ele é G e $G \times G$-isomorfismo. $\square$

1.2 Representações regulares de grupos algébricos

Seja G um grupo algébrico linear irredutível sobre k como na seção 1. Seja $k[G]$ a álgebra dos polinômios sobre G. Para qualquer $g \in G$, definimos duas aplicações $\lambda(g)$ e $\rho(g)$ sobre $k[G]$ respectivamente por

$$\lambda(g)f\ (x) = f(g^{-1}x) \tag{1.6}$$

e

$$\rho(g)f(x) = f(xg), \tag{1.7}$$

onde $x \in G$, $f \in k[G]$. $\lambda(g)$ e $\rho(g)$ comutam, e são chamadas translações à esquerda e à direita. λ e ρ são duas representações racionais de G em $k[G]$ no seguinte sentido: cada elemento de $k[G]$ está contido num subespaço de dimensão finita de $k[G]$ invariante por G, sobre qual a restrição da representação de G é uma representação no sentido definido anteriormente.

As representações λ e ρ são também chamadas de representações regulares (à esquerda e à direita).

A álgebra $k[G]$ tem uma estrutura de $G \times G$ módulo definida por

$$(g,h)f\ (x) = f(h^{-1}xg), \tag{1.8}$$

onde $g, h, x \in G$, $f \in k[G]$.

Trataremos $k[G]$ também com um G módulo por ρ, isto é,

$$gf\ (x) = f(xg). \tag{1.9}$$

Lema 1.2.1 *Seja (G, V) uma representação. Seja $\Phi : V \otimes V^* \to k[G]$ a aplicação linear definida por*

$$\Phi(v \otimes \lambda)(g) = \lambda(gv) = \langle \lambda, gv \rangle, \tag{1.10}$$

onde $v \in V, \lambda \in V^*$, $g \in G$.

Seja $\Psi : \mathrm{End}(V) \to k[G]$ a aplicação linear definida por

$$\Psi = \Phi\varphi^{-1}, \tag{1.11}$$

onde $\varphi : V \otimes V^* \to \mathrm{End}(V)$ é definido por (1.5). Então, Φ e Ψ são tanto $G \times G$ quanto G- homomorfismos.

Demonstração: Pelo lema 1.1.11, φ é um $G\times G$-isomorfismo e G-isomorfismo. Além do mais, como $\Psi = \Phi\varphi^{-1}$, basta verificar apenas que a aplicação Φ é homomorfismo, tanto em relação a $G \times G$, quanto em relação a G.

Em primeiro lugar, Φ é $G \times G$-homomorfismo. De fato,

$$((g, h)\Phi(v \otimes \lambda))(x) = \Phi(v \otimes \lambda)(h^{-1}xg) = \langle \lambda, h^{-1}xgv \rangle,$$

$$\Phi((g, h)(v \otimes \lambda))(x) = \Phi(gv \otimes h\lambda)(x) = \langle h\lambda, xgv \rangle = \langle \lambda, h^{-1}xgv \rangle,$$

onde $g, h, x \in G$, $v \in V$, $\lambda \in V^*$.

Agora, Φ é G-homomorfismo pois

$$(g\Phi(v \otimes \lambda))(x) = \Phi(v \otimes \lambda)(xg) = \langle \lambda, xgv \rangle,$$

$$\Phi(g(v \otimes \lambda))(x) = \Phi(gv \otimes \lambda)(x) = \langle \lambda, xgv \rangle,$$

onde $g, x \in G$, $v \in V$, $\lambda \in V^*$. □

Observação: A aplicação $V \otimes V^* \to k$, $v \otimes \lambda \mapsto \lambda(v) = \langle \lambda, v \rangle$ é chamada de contração de $v \otimes \lambda$. Então $\Phi(v \otimes \lambda)(g)$ definida por (1.10) é a contração de $(gv) \otimes \lambda$. □

Lema 1.2.2 *Seja $\varphi_{\lambda,x} \in End(V)$ tal que $\varphi_{\lambda,x}(y) = \lambda(y)x$, onde $x, y \in V$, e $\lambda \in V^*$. Então $Tr(\varphi_{\lambda,x}) = \lambda(x)$.*

Demonstração: Veja [12], capítulo XVIII. □

Observação: Neste lema $\varphi_{\lambda,x}$ é igual a $\varphi(x \otimes \lambda)$. □

Lema 1.2.3 *A aplicação* $\Psi : \mathrm{End}(V) \to k[G]$ *definida por (1.11) é da forma:*

$$\Psi(X)(g) = \mathrm{Tr}(gX), \tag{1.12}$$

onde $X \in \mathrm{End}(V)$, $g \in G$.

Demonstração: Como $\mathrm{Tr}(gX)$ é um funcional linear em X, basta verificar que $\Psi(X)(g)$ e $\mathrm{Tr}(gX)$ são iguais para os elementos em $\mathrm{End}(V)$ da forma $X = \varphi(v \otimes \lambda)$, onde $v \in V$ e $\lambda \in V^*$, já que esses elementos são geradores de $\mathrm{End}(V)$. Com efeito,

$$\Psi(\varphi(v \otimes \lambda))(g) = \Phi(v \otimes \lambda)(g) = \langle \lambda, gv \rangle,$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(g\varphi(v \otimes \lambda)) &= \mathrm{Tr}(\varphi(g(v \otimes \lambda)) = \mathrm{Tr}(\varphi(gv \otimes \lambda)) \\ &= \mathrm{Tr}(\varphi_{\lambda,gv}) = \langle \lambda, gv \rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 1.2.4 *Sejam* (G, V) *e* (G, W) *duas representações equivalentes. Então, as imagens de End*(V) *e End*(W) *em* $k[G]$ *por* Ψ *coincidem.*

Demonstração: Se $\phi_1 : G \to \mathrm{GL}(V)$ e $\phi_2 : G \to \mathrm{GL}(W)$ são duas representações equivalentes, então existe uma transformação linear inversível $A : V \to W$, tal que $\phi_2(g) = A\phi_1(g)A^{-1}$ para todo $g \in G$.

$$\mathrm{Tr}(\phi_2(g)X) = \mathrm{Tr}(A\phi_1(g)A^{-1}X) = \mathrm{Tr}(\phi_1(g)A^{-1}XA) = \mathrm{Tr}(\phi_1(g)Y),$$

onde $X \in \mathrm{End}(W)$, $Y = A^{-1}XA \in \mathrm{End}(V)$. Portanto, $g \to \mathrm{Tr}(\phi_2(g)X)$ corresponde a $g \to \mathrm{Tr}(\phi_1(g)Y)$, e as imagens são iguais. □

Observação: Tome uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V. Seja $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ a base dual de V^*, isto é, $\langle e_j^*, e_i \rangle = \delta_{ij}$. Temos então $\Psi_{ij}(g) := \Psi(e_i \otimes e_j^*)(g) = \langle e_j^*, ge_i \rangle$, onde $i, j = 1, 2, \ldots n$. Assim, G é representado como uma matriz $(\Psi_{ij}(g))$. As funções Ψ_{ij} são chamadas funções de coeficientes. Elas geram a imagem de $\mathrm{End}(V)$ em $k[G]$ por Ψ. □

1.3 Teorema de Peter-Weyl

Nesta seção estudaremos a decomposição da representação regular em componentes irredutíveis. O resultado que garante a completa redutibilidade dessa representação, em componentes de dimensão finita, é o que chamamos de teorema de Peter-Weyl, que é análogo ao teorema clássico para grupos compactos.

Definição 1.3.1 *Seja k um corpo de característica 0. Seja G um grupo algébrico linear irredutível sobre k. O radical $Rad(G)$ (resp. o radical unipotente $R_u(G)$) de G é o maior subgrupo normal, fechado, solúvel (resp. unipotente) e irredutível de G.*

Diz-se que G é semi-simples (resp. redutível) se $Rad(G)$ (resp. $R_u(G)$) é trivial.

Examplo: $\mathrm{GL}(n,k)$ é um grupo algébrico linear redutível.

$\mathrm{SL}(n,k)$ é um grupo algébrico linear semi-simples. □

1.3.1 Caso complexo

O caso complexo do teorema de Peter-Weyl é clássico e pode ser encontrado em virtualmente qualquer texto sobre grupos algébricos.

Teorema 1.3.2 *(teorema de Peter-Weyl). Seja k um corpo algebricamente fechado de característica 0. Seja G um grupo algébrico linear conexo (no sentido Zariski) e redutível sobre k. Seja $G^\vee$ o conjunto de todas as classes de representações equivalentes de G. Para cada λ em $G^\vee$, seja $\varphi_\lambda : G \to \mathrm{GL}(V_\lambda)$ um representante em $G^\vee$. Então, como $G\times G$ espaço, $k[G]$ é isomorfa a soma direta*

$$\bigoplus_{\lambda\in G^\vee} \mathrm{End}(V_\lambda).$$

Onde $G \times G$ opera em $End(V_\lambda)$ por $(g,h)f = \varphi_\lambda(g)f\varphi_\lambda(h)^{-1}$.

Demonstração: Veja [22], página 48. □

O teorema de Peter-Weyl afirma que a aplicação $\Psi : \mathrm{End}(V_\lambda) \to \Psi(\mathrm{End}(V_\lambda))$ é um $G\times G$-isomorfismo (Ψ é definida por (1.11)). Denotaremos $\Psi(\mathrm{End}(V_\lambda))$

por $k[G]_\lambda$. Note que $k[G]_\lambda$ é bem definida, independente da escolha dos representantes nas classes de representações equivalentes de G. Então podemos expressar o teorema 1.3.2 na forma

$$k[G] = \bigoplus_{\lambda \in G^\vee} k[G]_\lambda, \tag{1.13}$$

onde $k[G]_\lambda$ são os menores subespaços de $k[G]$ invariantes por $G \times G$.

Vamos denotar por:

- G um grupo algébrico linear semi-simples, irredutível sobre k.
- P o reticulado de seus pesos (com relação a algum toro maximal T).
- P_+ o subgrupo dos pesos dominantes (com relação a um subgrupo de Borel que contém T).
- R_Λ a representação irredutível de G com peso dominante $\Lambda \in P_+$.
- V_Λ o espaço da representação R_Λ.

Lema 1.3.3 *Toda representação irredutível de G possui um peso dominante em P_+ que é simples (isto é, o auto-espaço daquelo peso dominante é de dimensão um). Reciprocamente, todo peso dominante em P_+ é um peso dominante de uma única (a menos de equivalência) representação irredutível de G. Em outras palavras, as classes de representações irredutíveis equivalentes correspondem biunivocamente aos pesos dominantes.*

Demonstração: Veja[23]. □

Assim o teorema 1.3.2 pode ser expresso em seguinte forma

$$k[G] = \bigoplus_{\Lambda \in P_+} k[G]_\Lambda, \tag{1.14}$$

onde $k[G]_\Lambda \cong \mathrm{End}(V_\Lambda)$.

Em particular quando $k = \mathbb{C}$, o corpo dos números complexos, vale o teorema de Peter-Weyl.

1.3.2 Caso real

Com o objetivo de estender o teorema de Peter-Weyl para o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, denotaremos por $G(\mathbb{C})$ um grupo algébrico linear complexo definido sobre $\mathbb{R}$ – isto é, definido por polinômios com coeficientes reais – e por G o grupo algébrico linear real dos elementos racionais (reais) de $G(\mathbb{C})$. Em outras palavras, $G(\mathbb{C})$ é a extensão de G a $\mathbb{C}$, ou o complexificado de G. Veja [3] ou [13], para detalhes sobre grupos de elementos racionais definidos em subcorpos.

Definição 1.3.4 *Seja $G(\mathbb{C})$ um grupo algébrico linear complexo, redutível, conexo (no sentido Zariski) e definido sobre $\mathbb{R}$. Diz-se $G(\mathbb{C})$ é $\mathbb{R}$-normal (split na literatura) se ele contém um toro maximal T definido sobre $\mathbb{R}$, cujos caracteres são todos definidos sobre $\mathbb{R}$. Veja [3], [4], [11], [22].*

Neste caso, o grupo G correspondente a $G(\mathbb{C})$, também é chamado real normal.

Observação: Na situação acima, G é um grupo algébrico linear real redutível e conexo (no sentido Zariski). □

Examplo: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ e $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ são grupos $\mathbb{R}$-normais. □

O teorema a seguir descreve as representações dos grupos $\mathbb{R}$-normais. Essas representações serão utilizadas posteriormente na construção do semigrupo assintótico. No enunciado utilizamos as notações de [23]. A demonstração do teorema também pode ser encontrada em [23].

Teorema 1.3.5 *Suponhamos que $G(\mathbb{C})$ seja um grupo algébrico linear, redutível, conexo (no sentido zariski) e $\mathbb{R}$-normal. Então, toda $\mathbb{R}$-representação irredutível de $G(\mathbb{C})$ possui um peso dominante em P_+, que é simples (isto é, a dimensão do espaço vetorial da representação correspondente é um). Reciprocamente, cada $\Lambda \in P_+$ corresponde, a menos de $\mathbb{R}$-equivalência, uma única representação irredutível de $G(\mathbb{C})$, o que é irredutível sobre $\mathbb{C}$.*

Fixaremos as notações que serão utilizadas. Seja G é um grupo algébrico linear, redutível, conexo (no sentido Zariski) e real normal. Então, existem $T \subset B$ toro maximal e subgrupo de Borel em G tal que as extensões de T e B, $T(\mathbb{C}) \subset B(\mathbb{C})$, respectivamente, são um toro maximal e um subgrupo de Borel em $G(\mathbb{C})$. Suponhamos que P_+ é dado com respeito a $T(\mathbb{C}) \subset$

$B(\mathbb{C})$ acima. De acordo com o teorema 1.3.5, para cada $\Lambda \in P_+$, temos uma representação irredutível (G, V_Λ) com peso dominante Λ, onde V_Λ é um espaço vetorial real, tal que a representação correspondente $(G(\mathbb{C}), V_\Lambda \otimes \mathbb{C})$ é irredutível com peso dominante Λ.

Tome uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V_Λ, e a base dual de V_Λ^*, $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$. Sejam $f_{ij}^\Lambda(g) = \langle e_j^*, ge_i \rangle$, $i, j = 1, \ldots, n$. As funções de coeficientes f_{ij}^Λ formam uma base de $\mathbb{C}[G(\mathbb{C})]_\Lambda$, portanto, são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$. Como G é um conjunto denso (na topologia de Zariski) de $G(\mathbb{C})$ (veja,[4]), as funções f_{ij}^Λ são linearmente independentes em $\mathbb{R}[G]$. Denote o subespaço de $\mathbb{R}[G]$ gerado por f_{ij}^Λ por $\mathbb{R}[G]_\Lambda$. Então, $\mathbb{R}[G]_\Lambda \cong \operatorname{End}(V_\Lambda)$. Resulta que $\mathbb{R}[G]_\Lambda \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[G(\mathbb{C})]_\Lambda$. Como $\bigoplus_{\Lambda \in P_+} \mathbb{C}[G(\mathbb{C})]_\Lambda$ é uma soma direta, $\bigoplus_{\Lambda \in P_+} \mathbb{R}[G]_\Lambda$ é uma soma direta também. Visto que $\mathbb{R}[G] \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[G(\mathbb{C})]$ (veja [13], página 93), temos o seguinte

Teorema 1.3.6 *Seja G um grupo algébrico linear redutível, conexo (no sentido Zariski) e real normal. Seja P_+ o conjunto dos pesos dominantes. Para cada $\Lambda \in P_+$, seja (G, V_Λ) uma representação real irredutível com peso dominante Λ. Então,*

$$\mathbb{R}[G] = \bigoplus_{\Lambda \in P_+} \mathbb{R}[G]_\Lambda \tag{1.15}$$

onde $\mathbb{R}[G]_\Lambda$ é isomorfa a $\operatorname{End}(V_\Lambda)$ como $G \times G$ módulo.

Capítulo 2

Semigrupo assintótico complexo e real

Recordamos o trabalho do Vinberg [25] que estudou o semigrupo assintótico de um grupo de Lie complexo, conexo e semi-simples. Seguindo o mesmo processo, podemos definir o semigrupo assintótico real para um grupo algébrico linear, conexo (no sentido Zariski), redutível e real normal, como uma forma real do semigrupo assintótico complexo do grupo complexo correspondente.

2.1 Semigrupo assintótico complexo

Os símbolos $G, P, P_+, R_\Lambda, V_\Lambda, k[G], k[G]_\Lambda, f_{ij}^\Lambda$ como no capítulo 1. Para facilitar as notações, utilizaremos os mesmos símbolos para tanto complexo quanto real. Por exemplo k pode ser o corpo complexo ou o corpo real.

Definição 2.1.1 *Um semigrupo algébrico é uma variedade algébrica afim S com uma multiplicação associativa $\mu : S \times S \to S$, tal que μ é um morfismo de variedades algébricas. Ele é irredutível (resp. normal), se a variedade algébrica S é irredutível (resp. normal). Um zero é um elemento $0 \in S$ tal que $0x = x0 = 0$ para qualquer $x \in S$.*

A definição de semigrupo assintótico complexo em termos intrínsecos, para um grupo de Lie complexo, conexo e semi-simples G (então é um grupo algébrico complexo, conexo (no sentido Zariski) e semi-simples), é a seguinte: a partir da álgebra $k[G]$, modificando a multiplicação nela, obtemos uma álgebra graduada gr$k[G]$, que é finitamente gerada, sem divisor de zero, e normal. A variedade correspondente a gr$k[G]$ é definida como o semigrupo assintótico AsG, isto é, AsG = Spec(gr$k[G]$).

Usaremos A como o sinônimo de $k[G]$. Conseqüentemente, A_Λ representa $k[G]_\Lambda$. O teorema de Peter-Weyl nesse contexto afirma que:

$$A = \bigoplus_\Lambda A_\Lambda. \tag{2.1}$$

A multiplicação em A aparece da seguinte forma:

$$fg = \sum_N p_N(f,g) \ (f \in A_\Lambda, g \in A_M, p_N(f,g) \in A_N), \tag{2.2}$$

onde N percorre todos pesos dominantes de componentes irredutíveis da representação $R_\Lambda \otimes R_M$.

Vamos definir uma nova multiplicação em A por

$$f * g = p_{\Lambda+M}(f,g) \ (f \in A_\Lambda, g \in A_M). \tag{2.3}$$

Denotamos por gr$A$ a álgebra obtida de tal maneira. Ela pode ser considerada como a álgebra associada com uma filtração apropriada de A. A álgebra graduada gr$A$ é associativa e comutativa. Como

$$A_\Lambda * A_M = A_{\Lambda+M} \tag{2.4}$$

e o semigrupo dos pesos dominantes é finitamente gerado, a álgebra gr$A$ é finitamente gerada. Além do mais, temos

Teorema 2.1.2 *A álgebra* gr$A$ *não tem divisor de zero e é normal.*

Demonstração: Veja [25]. □

Colocamos

$$\mathrm{As}G = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{gr}A)\,. \tag{2.5}$$

Conforme o teorema 2.1.2, AsG é uma variedade afim irredutível e normal.

A multiplicação em G é um morfismo $G \times G \to G$. Ele corresponde a um homomorfismo de álgebras

$$\Delta : A \to A \otimes A, \tag{2.6}$$

chamado de co-multiplicação. Pela definição,

$$(\Delta f)(x,y) = f(xy). \tag{2.7}$$

A co-multiplicação pode ser descrita explicitamente da seguinte forma:

$$\Delta f_{ij}^{(\Lambda)} = \sum_k f_{ik}^{(\Lambda)} \otimes f_{kj}^{(\Lambda)}. \tag{2.8}$$

Quando substituímos a multiplicação original em A pela nova multiplicação, obtemos as aplicações

$$\Delta_1 : \mathrm{gr}A \to A \otimes \mathrm{gr}A, \tag{2.9}$$

$$\Delta_2 : \mathrm{gr}A \to \mathrm{gr}A \otimes A, \tag{2.10}$$

$$\Delta_0 : \mathrm{gr}A \to \mathrm{gr}A \otimes \mathrm{gr}A. \tag{2.11}$$

Teorema 2.1.3 *Todas as aplicações Δ_1, Δ_2, e Δ_0 são homomorfismos de álgebras e os morfismos correspondentes*

$$G \times \mathrm{As}G \to \mathrm{As}G, \tag{2.12}$$

$$\mathrm{As}G \times G \to \mathrm{As}G, \tag{2.13}$$

$$\mathrm{As}G \times \mathrm{As}G \to \mathrm{As}G, \tag{2.14}$$

junto com a multiplicação em G, definem sobre $G \cup \mathrm{As}G$ uma estrutura de semigrupo algébrico com zero.

Em particular, $\mathrm{As}G$ se torna um semigrupo algébrico (normal e irredutível) com zero. Os morfismos (2.12) e (2.13) definem uma ação de G à esquerda e à direita sobre $\mathrm{As}G$, que comutam entre si.

Demonstração: Veja [25]. □

2.2 Semigrupo assintótico real.

Analisando o processo de obter $\mathrm{As}G$ na parte sobre álgebra, vimos que o ponto central é a decomposição de $k[G]$. O fato de o corpo k (de característica 0) ser algebricamente fechado ou não, não afeta as propriedades de A e $\mathrm{gr}A$ que dão as co-multiplicações.

Quando k é o corpo real e G é um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal, os pesos dominantes e as raízes são racionais. Em outras palavras, o grupo $G(\mathbb{C})$, a extensão de G, tem todas as raízes e todos os pesos dominantes definidos sobre o corpo real (com respeito a um toro maximal e um subgrupo de Borel provenientes de G). A relação entre G e $G(\mathbb{C})$ representa em álgebras. Denote a álgebra (real) dos polinômios sobre G por $A = \mathbb{R}[G]$, e temos a decomposição de A, de acordo com o teorema 1.3.6,

$$A = \bigoplus_{\Lambda} A_{\Lambda}. \tag{2.15}$$

Denote a álgebra (complexa) dos polinômios sobre $G(\mathbb{C})$ por $\tilde{A} = \mathbb{C}[G(\mathbb{C})]$, então temos a decomposição de $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \bigoplus_{\Lambda} \tilde{A}_{\Lambda}. \tag{2.16}$$

Temos também o isomorfismo de álgebras

$$\tilde{A} = A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \tag{2.17}$$

e o isomorfismo de espaços vetoriais

$$\tilde{A}_{\Lambda} = A_{\Lambda} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \tag{2.18}$$

As álgebras $\mathrm{gr}A$ e $\mathrm{gr}\tilde{A}$ possuem os mesmos elementos como A e $\tilde{A}$ respectivamente, mas as multiplicações são diferentes em que as álgebras graduadas $\mathrm{gr}A$ e $\mathrm{gr}\tilde{A}$ só tomam as componentes de pesos dominantes maiores nos produtos das respectivas multiplicações de A e $\tilde{A}$. Analisando as regras de multiplicações, temos que

$$\mathrm{gr}\tilde{A} = \mathrm{gr}A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \tag{2.19}$$

como isomorfismo de álgebras. Aqui $\mathrm{gr}A$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra e $\mathrm{gr}\tilde{A}$ é uma $\mathbb{C}$-álgébra.

Para explicar o significado geométrico da relação acima, precisamos de algumas noções de geometria algébrica. Veja [22], capítulo 2.

Definição 2.2.1 *Sejam k um corpo algebricamente fechado e F um subcorpo de k. Seja V um espaço vetorial sobre k. Uma F-estrutura sobre V, é um subespaço de V sobre F que gera V.*

Definição 2.2.2 *Seja X uma variedade afim sobre k. Uma F-estrutura sobre X é uma subálgebra $F[X]$ de $k[X]$ que é uma F-estrutura sobre o espaço vetorial $k[X]$. Então $k[X]$ é isomorfa a $F[X] \otimes_F k$ como k-álgebras. Uma F-variedade afim é uma variedade sobre k com uma F-estrutura.*

Lema 2.2.3 *Seja A uma F-álgebra. Existe uma F-variedade afim X com $A \simeq F[X]$ se, e somente se: (a) A é de tipo finito sobre F, (b) para uma extensão algébrica qualquer E/F, $A \otimes_F E$ é reduzida (isto é, não tem elemento nilpotente diferente de zero).*

Demonstração: Veja [22]. □

Na nossa situação, $F = \mathbb{R}$ e $k = \mathbb{C}$. As únicas extensões algébricas de F são k e o próprio F. Já sabemos que Gr$\tilde{A}$ é finitamente gerada e sem divisor de zero (como $\mathbb{C}$-álgebra). Então GrA também é finitamente gerada e sem divisor de zero (como $\mathbb{R}$-álgebra). Daí concluímos que As$G(\mathbb{C})$ é uma variedade definida sobre $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.4 *Definimos AsG como a variedade real dos pontos racionais de $AsG(\mathbb{C})$.*

De forma funcional, AsG é o conjunto dos $\mathbb{R}$-homomorfismos da álgebra GrA em $\mathbb{R}$; respectivamente, As$G(\mathbb{C})$ é o conjunto dos $\mathbb{C}$-homomorfismos da álgebra Gr$\tilde{A}$ em $\mathbb{C}$. Comparando caso real e complexo, temos então,

Teorema 2.2.5 *Sejam G e AsG como acima. Então AsG é um semigrupo algébrico real, e satisfaz as mesmas propriedades que os semigrupos assintóticos complexos gozam no teorema 2.1.3.*

O semigrupo AsG será denominado o semigrupo assintótico (real) de G.

Capítulo 3

Realização do semigrupo assintótico

Apresentaremos neste capítulo a realizaçao devida a Vinberg [25] do semigrupo assintótico complexo na sua álgebra dos polinômios, e indicaremos que ela também serve para o caso real.

Conservamos as notações do capítulo anterior. Recordaremos primeiramente os conceitos e os resultados de Vinberg [25] para o caso complexo.

3.1 Caso complexo.

Seja G um grupo de Lie complexo, semi-simples e conexo (ou equivalentemente, um grupo algébirco complexo, semi-simples e irredutível).

Para $\Lambda \in P_+$ temos uma representação irredutível R_Λ de G em V_Λ, representada por uma matriz $(f_{ij}^{\Lambda}(g))$. A representação R_Λ pode ser estendida a uma representação do semigrupo $G \cup \mathrm{As}G$ em $\mathrm{End}V_\Lambda$, denotada pela mesma letra R_Λ.

Associando a cada elemento g de $G \cup \mathrm{As}G$ um conjunto

$$\mathcal{R}(g) = \{R_\Lambda(g) : \Lambda \in P_+\}, \tag{3.1}$$

obtemos um mergulho

$$\mathcal{R} : G \cup \mathrm{As}G \to \prod_\Lambda \mathrm{End}V_\Lambda. \tag{3.2}$$

A imagem $\mathcal{R}(\mathrm{As}G)$ pode ser descrita explicitamente. Por isso, precisamos das seguintes definições.

Definição 3.1.1 *Um vetor $v \in V_\Lambda$ é chamado extremal se ele é zero ou um vetor maximal, isto é, auto-vetor de um subgrupo de Borel de G.*

O conjunto de todos os vetores extremais é o fecho da órbita de um vetor maximal, isto é, a união de zero e a órbita de um vetor maximal.

Definição 3.1.2 *Um conjunto de vetores extremais $\{v_\Lambda \in V_\Lambda : \Lambda \in L\}(L \subset P_+)$ é chamado coerente, se os subespaços gerados por v_Λ, denotados por $\langle v_\Lambda \rangle$, são invariantes sob um mesmo subgrupo de Borel, para todo $\Lambda \subset P_+$.*

Definição 3.1.3 *Um operador $A \in \mathrm{End}V_\Lambda$ é chamado extremal, se o posto de A, $rkA \leq 1$ e*

1. *Im A é gerada por um vetor extremal;*
2. *Im A^T é gerada por um vetor extremal (em V_Λ^*).*

Onde $A^T : V_\Lambda^* \to V_\Lambda^*$, o operador transposto de A, é definido por $A^T f(x) = f(Ax)$, para $f \in V_\Lambda^*$ e $x \in V_\Lambda$.

Definição 3.1.4 *Um conjunto de operadores extremais $\{A_\Lambda \in \mathrm{End}V_\Lambda : \Lambda \in L\}(L \subset P_+)$ é chamado coerente, se*

1. *todos os subespaços Im $A_\Lambda \subset V_\Lambda$ são invariantes sob um mesmo subgrupo de Borel.*
2. *todos os subespaços Im $A_\Lambda^T \subset V_\Lambda^*$ são invariantes sob um mesmo subgrupo de Borel (pode ser diferente daquele menciado acima).*

Para $\Lambda, M \in P_+$, o espaço $V_{\Lambda+M}$ é mergulhado canonicamente em $V_\Lambda \otimes V_M$ como a componente irredutível maximal (isto é, corresponde ao peso dominante maior), e existe em $V_\Lambda \otimes V_M$ um único subespaço complementar, digamos, $W_{\Lambda,M}$.

Se $v_\Lambda \in V_\Lambda, v_M \in V_M$ são vetores extremais coerentes, então $v_\Lambda \otimes v_M \in V_{\Lambda+M}$. Se $A_\Lambda \in \mathrm{End}V_\Lambda$, $A_M \in \mathrm{End}V_M$ são operadores extremais coerentes, então $A_\Lambda \otimes A_M$ deixa $V_{\Lambda+M}$ invariante e anula $W_{\Lambda,M}$. Para $A \in \mathrm{End}V_{\Lambda+M}$, escreveremos $A = A_\Lambda \otimes A_M$, se A coincide com a restrição de $A_\Lambda \otimes A_M$ a $V_{\Lambda+M}$.

Definição 3.1.5 *Um conjunto de operadores extremais coerentes* $\{A_\Lambda \in \mathrm{End}V_\Lambda : \Lambda \in P_+\}$ *é denominado multiplicativo, se*

$$A_{\Lambda+M} = A_\Lambda \otimes A_M \tag{3.3}$$

para quaisquer $\Lambda, M \in P_+$.

Teorema 3.1.6 *A imagem* $\mathcal{R}(\mathrm{As}G)$ *consiste dos conjuntos dos operadores extremais coerentes e multiplicativos* $\{A_\Lambda \in \mathrm{End}V_\Lambda : \Lambda \in P_+\}$.

Demonstração: Veja [25]. □

Com efeito, podemos nos restringir a um número finito de valores de Λ. Por exemplo, seja G simplesmente conexo. Denotamos por $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ seus pesos fundamentais, por $R_1, \ldots, R_l$ suas representações fundamentais, e por $V_1, \ldots, V_l$ os espaços vetoriais correspondentes. Então cada conjunto coerente $\{A_i \in \mathrm{End}V_i : i = 1, \ldots, l\}$ se estende de forma única a um conjunto coerente e multiplicativo $\{A_\Lambda \in \mathrm{End}V_\Lambda : \Lambda \in P_+\}$. Desta maneira temos

Teorema 3.1.7 *Se G é simplesmente conexo, então a representação linear* $R_1 + \cdots + R_l$ *do semigrupo AsG o leva isomorficamente sobre o semigrupo dos conjuntos coerentes* $\{A_i \in \mathrm{End}V_i : i = 1, \ldots, l\}$ *dos operadores extremais.*

Demonstração: Veja [25]. □

3.2 Caso real

Vamos ver agora o caso real. Seja G um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal. Os pesos dominantes, as representações irredutíveis, os vetores maximais, as regras de multiplicações na álgebra dos polinômios, são todos correspondentes ao caso complexo. Então podemos herdar todo os conceitos na seção 1 para o caso real sem modificação, e os teoremas também valem.

Como os operadores extremais são peças chave nas representações de AsG, vamos analisar suas propriedades.

Lema 3.2.1 *Os operadores extremais $A \in \mathrm{End}V_\Lambda$ são da forma*

$$c(v \otimes \lambda), \tag{3.4}$$

onde $v \in V_\Lambda$ é um vetor extremal, $\lambda \in V_\Lambda^*$ é um vetor extremal, e $c \in k$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Aqui, identificamos EndV_Λ com $V_\Lambda \otimes V_\Lambda^*$ canonicamente (veja 1.1.11).

Demonstração: Se A for zero, não há nada a fazer. Então, suponha que A não é nulo. Pela definição, ImA é gerada por um vetor extremal diferente de zero, digamos $v \in V_\Lambda$; e Im A^T é gerada por um vetor extremal diferente de zero, digamos $\lambda \in V_\Lambda^*$. O operador $v \otimes \lambda$ é, por definição (veja (1.5)),

$$(v \otimes \lambda)(x) = \lambda(x)v,$$

onde $x \in V_\Lambda$. Enquanto $(v \otimes \lambda)^T$ é dado por

$$\begin{aligned} (v \otimes \lambda)^T(f)(x) &= f((v \otimes \lambda)(x)) = f(\lambda(x)v) \\ &= \lambda(x)f(v) = f(v)\lambda(x), \end{aligned}$$

onde $f \in V_\Lambda^*$, $x \in V_\Lambda$. Então, temos

$$(v \otimes \lambda)^T(f) = f(v)\lambda.$$

Podemos escrever

$$(v \otimes \lambda)^T = \lambda \otimes v,$$

se definimos

$$(\lambda \otimes v)(f) = f(v)\lambda.$$

Se $x \in V_\Lambda$, tal que $\lambda(x) = 0$, então $(v \otimes \lambda)(x) = 0$. Também temos que $Ax = 0$. De fato, para qualquer $w \in V_\Lambda^*$, temos $A^T w = c(w)\lambda$, onde $c(w) \in k$, pois Im A^T é gerada por λ. Portanto,

$$\langle w, Ax\rangle = \langle A^T w, x\rangle = \langle c(w)\lambda, x\rangle = c(w)\lambda(x) = 0.$$

Daí, $Ax = 0$.

Vamos agora o caso $x \in V_\Lambda$ com $\lambda(x) \neq 0$. Como a imagem de A é gerada por v, podemos encontrar $0 \neq c \in k$, tal que $Ax = c\lambda(x)v$. (caso contrário, $Ax = 0$ implicaria que $c(w) = 0$, para todo w, e $A^T = 0$)

Visto que

$$c(v \otimes \lambda)(x) = c\lambda(x)v,$$

temos então $A = c(v \otimes \lambda)$. Isto é, todo operador de posto um pode ser representado como $c(v \otimes \lambda)$. Por outro lado, todos os elementos da forma $c(v \otimes \lambda)$ são operadores extremais, se v e λ são vetores extremais. □

Observação: Com efeito, o lema revela um fato geral sobre operadores de posto menor do que ou igual a 1, que também são chamados operadores decomponíveis. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Seja $W = \{A \in \mathrm{End}V : \mathrm{rk}\ A \leq 1\}$. Então $W = \{c\,(v \otimes \lambda) : v \in V, \lambda \in V^*, c \in k\}$.(End$V$ é identificado com $V \otimes V^*$). É evidente que W é um semigrupo (cone) de End$V$ em relação à multiplicação das transformações, e também invariante sob as multiplicações à esquerda ou à direita por qualquer elemento em End$V$, pois o posto sempre não aumenta sob a multiplicação. Em outras palavras, W é um semigrupo cone ideal de End$V$. □

Para $\Lambda \in P_+$, fixamos um vetor maximal $v \in V_\Lambda$, e um vetor maximal $\lambda \in V_\Lambda^*$. Então os operadores extremais em EndV_Λ podem ser descritos como $c(g,h)(v \otimes \lambda) = c(gv \otimes h\lambda)$, onde $c \in k$, e $g, h \in G$. Portanto, temos o seginte

Lema 3.2.2 *Sejam v e λ como acima. O conjunto de todos os operadores extremais em EndV_Λ é a órbita de $\langle v \otimes \lambda \rangle$, a reta gerada por $v \otimes \lambda$ em EndV_Λ, pela ação de $G \times G$.*

Demonstração: Como quaisquer dois subgrupo de Borel são conjugados, um operador sempre pode ser escrito como $c(gv_\Lambda \otimes x\lambda_\Lambda)$, correspondente a um par de subgrupo de Borel gBg^{-1}, e xBx^{-1}. Portanto a órbita de $\langle v \otimes \lambda \rangle$ pela ação de $G \times G$ contém todos os operadores extremais. Por outro lado, cada elemento na órbita de $\langle v \otimes \lambda \rangle$ é um operador extremal. □

Analogamente, temos o seguinte

Lema 3.2.3 *Seja $L \subset P_+$. Fixamos um subgrupo de Borel B de G, e indicamos um vetor maximal $v_\Lambda \in V_\Lambda$ e um vetor maximal $\lambda_\Lambda \in V_\Lambda^*$ para cada $\Lambda \in L$ com respeito a B. Então o conjunto de todos os operadores extremais coerentes $\{A_\Lambda \in \mathrm{End}V_\Lambda : \Lambda \in L\}$ é o conjunto $\{W(h), h \in G\}$, onde $W(h)$ é a órbita de $\{k(hv_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \in \mathrm{End}V_\Lambda : \Lambda \in L\}$ pela ação de $G \times G$ em $\prod_{\Lambda \in L} \mathrm{End}V_\Lambda$.*

Demonstração: Observamos que a órbita de $gv_\Lambda \otimes x\lambda_\Lambda$ pela ação de $G \times G$ é igual à órbita de $gx^{-1}v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$, ou então $hv_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$, substituindo gx^{-1} por

h. Como $\{v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda : \Lambda \in L\}$ são coerentes pela definição, a ação de $G \times G$ mantém coerência. $\square$

Teorema 3.1.6 e teorema 3.1.7 são valem para as representações de semi-grupo assintótico real $\mathrm{As}(G)$ para um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal G, só que o corpo sobre qual as representações são definidas muda de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{R}$.

Capítulo 4

Conjuntos controláveis invariantes

Neste capítulo, recordamos os conceitos sobre conjuntos controláveis e as propriedades que serão utilizadas posteriormente.

4.1 Conjuntos controláveis

Definição 4.1.1 *Sejam S um subsemigrupo de um grupo de Lie G e M um G-espaço (isto é, uma variedade munida de uma ação de G). Então um conjunto controlável por S (ou pela ação de S sobre M) é um subcojunto $D \subset M$ que satisfaz:*

1. *$\text{int}D \neq \emptyset$, isto é, o interior de D não é vazio,*
2. *$D \subset \text{cl}(Sx)$ (o fecho da orbíta de x pela ação de S em M) para todo $x \in D$,*
3. *D é maximal (com respeito à inclusão dos conjuntos) com essas propriedades.*

Um conjunto controlável D é dito um conjunto controlável invariante (c.c.i.), se além do mais,

1. *$\text{cl}D = \text{cl}(Sx)$, para todo $x \in D$.*

Definição 4.1.2 *Seja D um conjunto controlável por S. Então o conjunto de transitividade de D é o subconjunto*

$$D_0 = \{x \in D : \textit{existe } g \in \mathrm{int}S \textit{ tal que } gx = x\} \tag{4.1}$$

Um conjunto controlável D é dito efetivo, se $D_0 \neq \emptyset$.

Proposição 4.1.3 *Seja D um conjunto controlável por S. Então*

1. *Para quaisquer $x, y \in D_0$, existe $g \in \mathrm{int}S$ tal que $gx = y$.*
2. *Se $D_0 \neq \emptyset$, então D_0 é denso em D.*

Demonstração: Veja [21]. □

Proposição 4.1.4 *Sejam G um grupo de Lie, S um subsemigrupo de G e M um G-espaço. Então*

1. *Se C é um conjunto controlável invariante fechado, então ele é S-invariante, isto é, $SC := \{sx : s \in S, x \in C\} \subset C$.*
2. *Se C_1 e C_2 são dois conjuntos controláveis invariantes, então eles são disjuntos ou idênticos.*
3. *Se S é acessível, isto é, $int(Sx) \neq \emptyset$ para todo $x \in M$, então os conjuntos controláveis invariantes por S são fechados. Além disso, $intC \neq \emptyset$ e $cl(\mathrm{int}C) = C$, para qualquer conjunto controlável invariante por S.*
4. *Cada subconjunto S-invariante $Y \subset M$ contém um conjunto controlável invariante. Se S é acessível, então Y contém somente um número finito de conjuntos controláveis invariantes.*
5. *Se $intS \neq \emptyset$, e C é um conjunto controlável invariante por S, então o conjunto de transitividade de C, C_0, é aberto e denso em C. Além disso, C_0 é S-invariante e satisfaz: $C_0 = (\mathrm{int}S)C = (\mathrm{int}S)c$, para todo $c \in C_0$.*

Demonstração: Veja [21], [9]. □

Observação: Consideramos no resto do texto exclusivamente conjuntos controláveis efetivos. Por abuso de linguagem, usaremos o termo conjunto controlável sem mencionar efetivo. □

Um caso importante e muito estudado é quando M é um espaço homogêneo e compacto. Sejam G um grupo de Lie conexo, semi-simples, não-compacto e com centro finito, S um subsemigrupo de G com interior não vazio. Seja M um espaço homogêneo de G, isto é, G/H, com H um subgrupo fechado de G. O espaço M é visto como um G-espaço canonicamente. Nesta situação, S é acessível em M. Se M é compacto, então existe número finito de conjuntos controláveis invariantes.

Daqui para diante neste capítulo, fixamos as hipóteses sobre G, S como no parágrafo acima.

Recordamos aqui os comportamentos de conjuntos controláveis sob fibrações equivariantes. Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de G e formamos os espaços homogêneos G/L_1 e G/L_2. Existe uma fibração equivariante natural

$$\pi : G/L_1 \to G/L_2$$

que leva a classe gL_1 na classe gL_2.

Proposição 4.1.5 *Sejam G, S e $\pi : G/L_1 \to G/L_2$ como acima. Suponhamos que $D \subset G/L_1$ seja um conjunto controlável por S sobre G/L_1 e seja D_0 o seu conjunto de transitividade. Então existe um conjunto controlável $E \subset G/L_2$ tal que $\pi(D_0) \subset E_0$.*

Mais ainda se G/L_1 for compacto, temos então que

1. *Se $C_1 \subset G/L_1$ é um conjunto controlável invariante por S. Então $C_2 = \pi(C_1)$ é um conjunto controlável invariante por S sobre G/L_2.*

2. *Se $C_2 \subset G/L_2$ é um conjunto controlável invariante, então existe um conjunto controlável invariante $C_1 \subset G/L_1$ tal que $\pi(C_1) = C_2$.*

3. *Na situação 1), suponhamos que exista $y \in C_2$ tal que $\pi^{-1}\{y\} \subset C_1$, então $C_1 = \pi^{-1}(C_2)$.*

Demonstração: Veja [21] □

4.2 Flags e tipo parabólico

Flags são espaços homogêneos de G da forma G/P, onde P é um subgroup parabólico de G. Dado um grupo G existe somente número finito de flags e todos os flags são compactos. Seja Π um sistema de raízes simples de G. Para qualquer subconjunto $\Theta \subset \Pi$, existe um único subgrupo parabólico P_Θ, e todos os subgrupos parabólicos são desta forma, a menos de conjugação. Então os flags são da forma $B_\Theta = G/P_\Theta$, dentre os quais o único flag maximal é $B_\emptyset$, que fibra sobre os demais flags, tem um papel especial na análise de conjuntos controláveis.

O seguinte resultado é fundamental.

Teorema 4.2.1 *Existe um único conjunto controlável invariante sobre um flag G/P.*

Demonstração: Veja [16]. □

Os conjuntos controláveis (arbitrários) sobre flags estão relacionados com o conjunto controlável invariante pelo grupo de Weyl de G. Veja [21]. Concentraremos nossos estudos no flag maximal, já que os outros flags podem ser analisados através de fibrações. A seguir, estaremos nos referindo ao flag maximal se não indicaremos explicitamente o contrário

Existe uma decomposição de Iwasawa

$$G = KAN^+, \tag{4.2}$$

tal que $A^+ \cap \mathrm{int}S \neq \emptyset$, onde A^+ é a câmara de Weyl de A, correspondente a N^+. O grupo de Weyl de G é definido por

$$W = N(A)/Z(A), \tag{4.3}$$

onde $N(A)$ (resp. $Z(A)$) é o normalizador (resp. centralizador) de A em G.

Para qualquer $w \in W$, existe um (único) conjunto controlável D_w, e todo conjunto controlável é desta forma. Caso $w = 1$, D_1 é o conjunto controlável invariante. Pode acontecer que $D_{w_1} = D_{w_2}$ para $w_1 \neq w_2 \in W$. Colocamos

$$W(S) = \{w \in W : D_w = D_1\}. \tag{4.4}$$

Teorema 4.2.2 *$W(S)$ é um subgrupo parabólico de W.*

Demonstração: Veja [21]. □

Lembramos que um subgrupo parabólico de um grupo de Weyl é um subgrupo gerado por reflexões com respeito a um subconjunto das raízes simples. Seja Δ o sistema de raízes simples de G correspondente a A^+. O subconjunto $\Theta \subset \Delta$ cujas reflexões geram $W(S)$ será denotado $\Theta(S)$. Então também expressamos $W(S)$ em forma $W_{\Theta(S)}$.

Definição 4.2.3 *$W(S)$ ou $\Theta(S)$ é chamado o tipo parabólico de S.*

Observação: O tipo parabólico de S é uma caraterística intrínseca de S, como o grupo de Weyl para um grupo, apesar de utilizamos na definição acima uma certa câmara de Weyl. Primeiramente, o grupo de Weyl W na forma (4.3) depende da escolha de A. A notação exata seria (W, A^+), onde A^+ é uma câmara de Weyl. Se $A' = gAg^{-1}$, então

$$W' := N(A')/Z(A') = gWg^{-1}. \tag{4.5}$$

Então o grupo de Weyl de um grupo G, pode ser visto como uma classe de equivalência $\sim$ em

$$\{W = N(A)/Z(A), A^+\}, \tag{4.6}$$

isto é, os elementos do grupo de Weyl são pares $\{w, A^+\}$ módulo a equivalência

$$\{w, A^+\} \sim \{gwg^{-1}, gA^+g^{-1}\}. \tag{4.7}$$

Observe que $gA^+g^{-1} = A^+$ se, e somente se $g \in Z(A)$, então $\{w, A^+\} \sim \{w', A^+\}$ se, e somente se $w = w'$. Agora podemos descrever $W(S)$ analogamente como uma classe de equivalência. Como referência, usamos uma câmara de Weyl A^+, tal que $A^+ \cap \operatorname{int}S \neq \emptyset$. □

Observação: O tipo parabólico $W(S)$ de um subsemigrupo S mede o grau de maior irregularidade dos elementos no interior de S. Por exemplo, $W(S) = 1$, ou $\Theta(S) = \emptyset$, significa que existem apenas elementos regulares no $\operatorname{int}S$. Neste caso, dizemos que S é de tipo trivial. □

Observação: Se o subsemigrupo S é próprio, então $W(S) \neq W$. Veja [16].

Os tipos parabólicos de subsemigrupos conjugados são iguais, isto é,

$$W(S) = W(gSg^{-1}). \tag{4.8}$$

O tipo parabólico de um subsemigrupo é igual ao da sua inversa, isto é,

$$W(S) = W(S^-). \tag{4.9}$$

Note que $A^+ \cap \mathrm{int}S \neq \emptyset$ é equivalente a $A^- \cap \mathrm{int}S^- \neq \emptyset$, onde $A^- = (A^+)^{-1}$. (4.9) vem da observação que cada elemento $\{w, A^+\}$ de $W(S)$ associa a um elemento $\{w', A^-\}$ de $W(S^-)$, que é equivalente a $\{w, A^+\}$ no sentido da observação anterior. Veja [19]. □

Examplo: Sejam $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, e $S \subset G$, o subsemigrupo das matrizes com entradas não negativas. O grupo de Weyl W de G é o grupo de permutações em $n - 1$ letras. O tipo de S, $W(S)$ é o subgrupo de W dos elementos que fixam uma letra e, portanto, isomorfo ao grupo de permutação em $n - 2$ letras. Veja [20]. □

Examplo: Seja G como no exemplo anterior. Seja S o subsemigrupo das matrizes totalmente positivas, isto é, cujos menores de todas ordens são não negativos. Neste caso, todos os elementos em $\mathrm{int}S$ são regulares, já que seus espectros são positivos e diferentes entre si, e portanto $W(S) = 1$. Veja [20].
□

Capítulo 5

Semigrupo assintótico de subsemigrupo

Neste capítulo serão estudados os semigrupos assintóticos para subsemigrupos em grupos reais. A definição de semigrupo assintótico envolve os conjuntos controláveis invariantes nas variedades "flag" e o estudo de cones invariantes nos espaços vetoriais das representações, o que será feito preliminarmente.

5.1 Requerimentos para semigrupo assintótico

Seja G um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal, cujo complexificado $G(\mathbb{C})$ é simplesmente conexo. Seja $S \subset G$ um semigrupo. Queremos definir dentro de $\mathrm{As}G$ um objeto $\mathrm{As}S$, que represente as propriedades assintóticas de S da mesma forma que $\mathrm{As}G$. As relações naturais que devem ser satisfeitas por $\mathrm{As}S$ são

$$\mathrm{As}S \subset \mathrm{As}G, \tag{5.1}$$

$$S \times \mathrm{As}S \to \mathrm{As}S, \tag{5.2}$$

$$\mathrm{As}S \times S \to \mathrm{As}S, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{As}S \times \mathrm{As}S \to \mathrm{As}S, \tag{5.4}$$

com os produtos herdados da construção de AsG. O morfismo (5.4) significa que AsS é um semigrupo, já (5.2) e (5.3) dizem que as translações à esquerda e à direita de S se estendem a AsS.

Observação: Notamos que as relações acima não são suficientes pare caracterizar AsS. Por exemplo, AsG, ou o elemento zero de AsG, poderia ficar em lugar de AsS. Para evitar essas trivialidades, AsS deve satisfaz, por exemplo, a) se int$S$ não é vazio, então int(AsS) também não é vazio em AsG. b) se S é diferente de G, então AsS é diferente de AsG. c) as relações de inclusão e conjugação são preservadas. □

Ao invés de descrever AsS diretamente, utilizaremos a descrição de AsG feita anteriormente através da sua imagem $\mathcal{R}(\mathrm{As}G)$ pela representação $\mathcal{R}$. Na imagem as relações acima devem ser substituídas por

$$\mathcal{R}(\mathrm{As}S) \subset \mathcal{R}(\mathrm{As}G), \tag{5.5}$$

$$S \times \mathcal{R}(\mathrm{As}S) \to \mathcal{R}(\mathrm{As}S), \tag{5.6}$$

$$\mathcal{R}(\mathrm{As}S) \times S \to \mathcal{R}(\mathrm{As}S), \tag{5.7}$$

$$\mathcal{R}(\mathrm{As}S) \times \mathcal{R}(\mathrm{As}S) \to \mathcal{R}(\mathrm{As}S). \tag{5.8}$$

A idéia então é construir o que seria $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$ e identificá-lo com AsS, através da representação fiel $\mathcal{R}$.

Os elementos de $\mathcal{R}(\mathrm{As}G)$ são decomponíveis, ou seja, da forma $v \otimes \lambda$, em cada componente EndV_Λ, enquanto as ações são dadas por

- $g(v \otimes \lambda) = gv \otimes \lambda$,
- $(v \otimes \lambda)h = v \otimes (\lambda \circ h) = v \otimes h^{-1}\lambda$,
- $(v \otimes \lambda)\,(w \otimes \mu) = \lambda(w)v \otimes \mu$

onde $g, h \in G, v, w \in V_\Lambda$ e $\lambda, \mu \in V_\Lambda^*$. Numa notação mais econômica as relações (5.6) e (5.7) podem ser escritas como uma única relação

$$(S \times S^{-1}) \times \mathcal{R}(\mathrm{As}S) \to \mathcal{R}(\mathrm{As}S)$$

dada por $(g, h)(v \otimes \lambda) = gv \otimes h\lambda$. (Mais precisamente, quando o elemento de identidade de G pertence a S.)

5.2 Representações projetivas e esféricas

Definição 5.2.1 *Seja (G, V) uma representação. Seja $\mathbb{P}(V)$ o espaço projetivo de V. Se $v \in V \setminus \{0\}$, denotaremos $\langle v \rangle$ a sua imagem em $\mathbb{P}(V)$, ou seja a reta gerada por v. O grupo G age em $\mathbb{P}(V)$ por*

$$g\langle v \rangle = \langle gv \rangle.$$

Em outras palavras, temos um homomorfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(V))$, o grupo de automorfismo de $\mathbb{P}(V)$, que será chamado de representação projetiva de G induzida por (G, V).

Definição 5.2.2 *Seja (G, V) uma representação sobre $\mathbb{R}$. Seja $\mathbb{S}(V)$ o conjunto das semi-retas de V. Se $v \in V \setminus \{0\}$, denotaremos por $[v]$ a semi-reta que parte da origem e passa por v. O grupo G age em $\mathbb{S}(V)$ por*

$$g[v] = [gv].$$

Em outras palavras, temos um homomorfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{S}(V))$, o grupo de automorfismo de $\mathbb{S}(V)$, que será chamado de representação esférica (ou semiprojetiva) de G induzida por (G, V).

Suponha que G seja um grupo algébrico linear complexo, semi-simples e irredutível, ou um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal.

Para $\Lambda \in P_+$, seja (G, V_Λ) a representação irredutível com peso dominante Λ. Denote por $(G, \mathbb{P}(V_\Lambda))$ a representação projetiva induzida por (G, V_Λ). Existe um vetor v_Λ em $V_\Lambda \setminus \{0\}$ tal que $\langle v_\Lambda \rangle$ é invariante pelo subgrupo de Borel $B \subset G$, que já foi especificado quando fixamos P_+. Em outras palavras, v_Λ é um auto-vetor de B. O subgrupo de G que deixa $\langle v_\Lambda \rangle$ invariante,

$$G_{\langle v_\Lambda \rangle} = \{g \in G : g\langle v_\Lambda \rangle = \langle v_\Lambda \rangle\}$$

é um subgrupo parabólico de G pois contém B. Chamaremos $G_{\langle v_\Lambda \rangle}$ de subgrupo de isotropia em $\langle v_\Lambda \rangle$.

Sejam $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ as raízes simples de G. Então, os pesos fundamentais $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\}$ são dados pela base dual das raízes simples:

$$\frac{2\langle \Lambda_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j \rangle} = \delta_{ij}. \tag{5.9}$$

Se $\Lambda \in P_+$, então

$$\Lambda = \sum n_i \Lambda_i, \tag{5.10}$$

onde

$$n_i = \frac{2\langle \Lambda, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}. \tag{5.11}$$

Denotaremos por $\Theta(\Lambda) \subset \Delta$, o conjunto das raízes simples que são ortogonais a Λ, ou seja

$$\Theta(\Lambda) = \{\alpha_i : n_i = 0\}. \tag{5.12}$$

Seja W o grupo de Weyl de G. Denotaremos por $W_\Theta \subset W$ o subgrupo gerado pelas raízes simples em $\Theta \subset \Delta$. Definimos o subgrupo parabólico $P_\Theta \subset G$ por

$$P_\Theta = BW_\Theta B.$$

Proposição 5.2.3 *O subgrupo de isotropia de $\langle v_\Lambda \rangle$ é P_Θ, onde $\Theta = \Theta(\Lambda)$. A órbita de $\langle v_\Lambda \rangle$ em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$, $G\langle v_\Lambda \rangle$, é a variedade "flag" G/P_Θ.*

Demonstração: Veja [4]. □

5.3 Dualidade dos conjuntos controláveis

Seja G um grupo de Lie real, semi-simples, conexo, não compacto e com centro finito. As variedades flag de G aparecem em dual. Veja [19]. Os conjuntos controláveis de um subsemigrupo S de G (com interior não vazio) em flags também têm dualidades. Essas dualidades serão úteis na caracterização dos semigrupos assintóticos para subsemigrupos.

Se $\mathbb{B}_\Theta = G/P_\Theta$ é um flag, o flag dual é $\mathbb{B}_{\Theta^*} = G/P_{\Theta^*}$, onde Θ^* é obtido de Θ pelo automorfismo involutivo do diagrama de Dynkin. Veja [19]. Em particular, o flag maximal $\mathbb{B}$ é auto-dual.

Seja (G, V_Λ) uma representação irredutível correspodente a Λ. A órbita de vetores maximais em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$ é o flag $\mathbb{B}_{\Theta(\Lambda)}$. A representação dual (G, V_Λ^*) é irredutível, e a órbita de vetores maximais em $\mathbb{P}(V_\Lambda^*)$ forma o flag $\mathbb{B}_{\Theta^*(\Lambda)}$.

Seja $C \subset \mathbb{B}_\Theta$ $(\Theta = \Theta(\Lambda))$ o conjunto controlável invariante de S. Denote por C_0 o conjunto de transitividade de C. Seja $v \in V_\Lambda$ um vetor maximal, tal que $\langle v \rangle \in C$. Existe um elemento split-regular $h \in \text{int}S$ (veja [17],[21]), tal que $\langle v \rangle$ é o atrator por h. Temos uma decomposição $V_\Lambda = \mathbb{R}v + M$, soma direta e da maneira única, tal que exatamente os vetores fora de M são atraídos para $\langle v \rangle$ em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$. (Veja também lema 5.5.1.) Seja $\lambda \in V_\Lambda^*$ tal que $\lambda(v) = 1$, e $\lambda(x) = 0$, para $x \in M$. Note que $\langle hv, \lambda \rangle = \langle v, h^{-1}\lambda \rangle$, temos então $\langle \lambda \rangle$ é o atrator por h^{-1} em $\mathbb{P}(V_\Lambda^*)$. Suponha que C^* seja o conjunto controlável invariante de S^{-1} em $\mathbb{B}_{\Theta^*}$. Denote por C_0^* o conjunto de transitividade de C^*. Então temos que $\langle \lambda \rangle \in C_0^*$, e portanto λ é um vetor maximal em V_Λ^*.

Analogamente, pela dualidade de V_Λ e V_Λ^* ($V_\Lambda^{**} = V_\Lambda$), a partir de um vetor maximal $\lambda \in V_\Lambda^*$, tal que $\langle \lambda \rangle \in C_0^*$, também chega um vetor maximal $v \in V_\Lambda$, tal que $\langle v \rangle \in C_0$. Portanto o conjunto controlável invariante por S em $\mathbb{B}_\Theta$ e o conjunto controlável invariante por S^{-1} em $\mathbb{B}_{\Theta^*}$ são duais.

5.4 Cones invariantes

Definição 5.4.1 *Um conjunto W de um espaço vetorial real V é chamado de cone, se satisfaz:*

(i) $W + W \subset W$,

(ii) $\mathbb{R}^+ W \subset W$,

(iii) $\overline{W} = W$.

Onde $W + W = \{x + y : x, y \in W\}$, $\mathbb{R}^+ W = \{rx : x \in W, r \geq 0\}$, e $\overline{W}$ é fecho de W em V com respeito à topologia euclidiana.

Definição 5.4.2 *Um cone $W \subset V$ é gerador, se o subespaço gerado por W é V;*

W é pontual, se $W \cap -W = 0$, onde $-W = \{-x : x \in W\}$.

O *cone dual* a W é o cone $W^* \subset V^*$ (dual de V) definido por

$$W^* = \{\lambda \in V^* : \forall v \in W, \lambda(v) \geq 0\}. \tag{5.13}$$

Sabe-se que se $\dim V < \infty$ então $W^{**} = W$ e W é pontual se, e somente se, W^* é gerador, o que acarreta que W é gerador se, e somente se, W^* é pontual (veja [8]).

Definição 5.4.3 *Dado um conjunto $M \subset V$ definimos*

$$\mathrm{Co}(M) = \{\sum r_i v_i : v_i \in M, r_i \geq 0\}, \tag{5.14}$$

onde a soma é finita. Definimos

$$\mathrm{Con}(M) = \overline{\mathrm{Co}(M)}, \tag{5.15}$$

onde o traço $^{-}$ *significa tomar fecho com respeito à topologia usual de* V.

Observação: $\mathrm{Con}(M)$ é o menor cone que contém M, chamado de cone gerado por M. □

Definição 5.4.4 *Seja* G *um grupo que age num espaço vetorial real* V. *Um cone* $W \subset V$ *é dito invariante por* G, *ou simplesmente um cone invariante se*

$$G \cdot W \subset W,$$

onde $G \cdot W = \{g \cdot v : g \in G, v \in W\}$. *De forma análoga se define um cone invariante por um semigrupo* S *que age num espaço vetorial real* V.

O seguinte resultado sobre cones invariantes é bem conhecido. Veja Vinberg [24].

Teorema 5.4.5 *Seja* V *um espaço vetorial real de dimensão finita. Seja* $G \subset \mathrm{GL}(V)$ *um grupo de Lie real, semi-simples, conexo e irredutível (isto é, a representação* (G, V) *é irredutível). Sejam* T *um subgrupo triangular conexo maximal e* P *o normalizador de* T *em* G. *Então existe um cone* W *não trivial (isto é, diferente de* $\{0\}$ *e* V*), invariante por* G *se, e somente se existe uma semi-reta em* V *invariante por* P.

Demonstração: Veja [24]. □

No mesmo artigo [24], Vinberg descreve tais cones invariantes, e afirma que se a situação ocorre sempre existem um cone invariante mínimo e um máximo.

Observação: Se a representação do grupo G no espaço vetorial V é irredutível então qualquer cone invariante $W \subset V$ é automaticamente pontual. De fato, se W é invariante, então $H = W \cap -W$ é um subespaço diferente de V invariante por G. Portanto, H é necessariamente $\{0\}$, pois (G, V) é irredutível. O lema a seguir estende esse fato a ações de semigrupos. □

Lema 5.4.6 *Sejam G um grupo algébrico linear real e irredutível, e (G, V) uma representação irredutível. Sejam $S \subset G$ um subsemigrupo com interior não vazio e W um cone não trivial invariante por S. Então W é pontual e gerador.*

Demonstração: O cone W é gerador. De fato, seja H o subespaço de V gerado por W. Então H é invariante por S. Como $\text{int}S \neq \emptyset$, o fecho algébrico de S (isto é, na topologia Zarisk) é G, pois G é irredutível. Veja corolário 5.5.3. Portanto H é invariante por G. Note que $H \neq \{0\}$ e a representação é irredutível, concluímos que $H = V$.

O cone W é pontual. Seja $H = W \cap -W$. Então, H é um subespaço invariante por S e, portanto, invariante por G. Como $H \neq V$, temos que $H = \{0\}$. □

5.5 Cones e conjuntos controláveis invariantes

Um grupo algébrico linear real é um grupo de Lie. Seja G é um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal. Como grupo de Lie, G não é necessariamente conexo.(Compare outro fato: um grupo algébrico linear complexo e irredutível (ou seja, conexo no sentido de Zariski) é conexo na topologia real. Veja [13], capítulo 3.) Mas quando $G(\mathbb{C})$ é simplesmente conexo (ou seja, de tipo simplesmente conexo), G é conexo na topologia real. Além do mais, ele é semi-simples como um grupo de Lie com centro finito. Veja [11].

Neste capítulo suponha daqui para adiante que G é um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal, tal que $G(\mathbb{C})$ é simplesmente conexo. (Portanto G é um grupo de Lie real, semi-simples, conexo e com centro finito.) Por examplo, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $n \geq 2$.

Mantendo as notações anteriores, tome $\Lambda \in P_+$ e seja (G, V_Λ) a representação irredutível com peso dominante Λ. Então, se existe um cone invariante, a representação é de classe um (ver [24]). Na situação que estamos considerando, em que o grupo G é real normal, dizer que uma representação é de classe um significa

$$\Lambda = \sum n_i \Lambda_i, n_i \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2). \tag{5.16}$$

Seja $v_\Lambda \in V_\Lambda$ um vetor maximal. Então, $P_\Theta\langle v_\Lambda\rangle = \langle v_\Lambda\rangle$, $\Theta = \Theta(\Lambda)$. Mais ainda,

$$pv_\Lambda = \Lambda(p)v_\Lambda, \; p \in P_\Theta, \tag{5.17}$$

onde Λ é estendido do toro maximal para o subgrupo parabólico, assumindo o valor 1 na parte uniponente. Se Λ é de classe um, então $\Lambda(p) \geq 0$, para qualquer $p \in P_\Theta$. Portanto, $P_\Theta v_\Lambda \subset \mathbb{R}^+ v_\Lambda$. O cone invariante mínimo é único, a menos de sinal, dado por

$$\mathrm{Con} G v_\Lambda.$$

De fato, nesta situação, $\mathrm{Co}Gv_\Lambda$ é fechado, então é igual a $\mathrm{Con}Gv_\Lambda$.

Seja $\pi : V_\Lambda \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(V_\Lambda)$ a projeção canônica. Se Λ é de classe um, então $G\langle v_\Lambda\rangle$ é a única órbita compacta de G em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$, cuja imagem inversa por π tem duas componentes conexas, que ficam em dois cones $\pm\mathrm{Con}Gv_\Lambda$. Seja $\nu : \mathbb{S}(V_\Lambda) \to \mathbb{P}(V_\Lambda)$ a projeção canônica. Então, a imagem inversa de $G\langle v_\Lambda\rangle$ por ν também tem duas componentes conexas, $\pm G[v_\Lambda]$. Se Λ não é de classe um, $G[v_\Lambda]$ é um recobrimento duplo de $G\langle v_\Lambda\rangle$. Em outras palavras, $G[v_\Lambda] = -G[v_\Lambda]$.

Denotaremos por $\mathbb{B}_\Lambda$ a variedade de flag G/P_Θ, $\Theta = \Theta(\Lambda)$, que é isomorfo a $G\langle v_\Lambda\rangle$, a órbita de G em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$. Dado um semigrupo S de G, seu c.c.i. em $\mathbb{B}_\Lambda$ é denotado por C_Λ.

Consideremos a ação de S em $\mathbb{S}(V_\Lambda)$. Caso Λ seja de classe um, o c.c.i. em $\mathbb{B}_\Lambda$ se levanta em dois c.c.i., um em cada órbita compacta (ambas iguais a $\mathbb{B}_\Lambda$). Caso Λ não seja de classe um, o c.c.i. pode se levantar em um ou dois c.c.i. no recobrimento duplo de $\mathbb{B}_\Lambda$. A notação conveniente aqui é escrever $C_\Lambda^\pm$ com C_Λ^+ igual a C_Λ^- no caso em que o levantamento dá um único c.c.i. e diferentes se dão dois c.c.i..

Lema 5.5.1 *Seja (G, V_Λ) a representação irredutível correspondente ao peso dominante $\Lambda \in P_+$. Seja $v_\Lambda \in V_\Lambda$ um vetor maximal, ou seja, um auto-vetor com peso Λ. Então existe uma única decomposição de soma direta dos subespaços*

$$V_\Lambda = \mathbb{R}v_\Lambda + M_\Lambda, \tag{5.18}$$

onde M_Λ é a soma dos auto-espaços com pesos menores do que Λ.

Demonstração: Veja, por exemplo, [11], capítulo XI. □

Lema 5.5.2 *Seja M uma variedade algébrica afim real e irredutível. Então, qualquer subconjunto aberto de M (na topologia euclidiana) que contém um ponto regular (ou seja, simples) é Zariski denso em M.*

Demonstração: Veja [1], proposição 1.6. □

Corolário 5.5.3 *Seja G um grupo algébrico linear real irredutível. Se S é um subconjunto de G, e $intS \neq \emptyset$ (na topologia euclidiana), então S é Zariski denso em G.*

Demonstração: Todo ponto em G é regular, e $\mathrm{int}S$ é aberto. Pelo lema 5.5.2, $\mathrm{int}S$ é Zariski denso em G, logo S é Zariski denso em G. □

Proposição 5.5.4 *Seja S um semigrupo de G com interior não vazio. Seja $\mathrm{Con}_\Lambda(S) \subset \mathrm{End}(V_\Lambda)$ o cone gerado por S (ou mais precisamente, a imagem de S em $\mathrm{End}(V_\Lambda)$). Então, $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é gerador e multiplicativo (fechado por produto associativo).*

Demonstração: $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é gerador. Suponhamos por absurdo que $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ não seja gerador. Então, o subespaço gerado por $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é próprio em $\mathrm{End}(V_\Lambda)$ e, portanto, existe $0 \neq X \in \mathrm{End}(V_\Lambda)$ tal que $\mathrm{Tr}(XY) = 0$ para todo $Y \in \mathrm{Con}_\Lambda(S)$. Em particular, $\mathrm{Tr}(Xg) = 0$ para todo $g \in S$. G é o fecho algébrico de S, pois G é irredutível e S tem interior não vazio, veja corolário 5.5.3. Temos então, $\mathrm{Tr}(Xg) = 0$ para todo $g \in G$. Por outro lado, pelo teorema de Peter-Weyl, temos $k[G]_\Lambda \simeq \mathrm{End}(V_\Lambda)$, o que implica que a aplicação $\Psi : \mathrm{End}(V_\Lambda) \to k[G]_\Lambda$,

$$\Psi\left(X\right)\left(g\right) = \mathrm{Tr}(gX) = \mathrm{Tr}(Xg),$$

onde $X \in \mathrm{End}(V_\Lambda), g \in G$, é isomorfismo. Uma contradição. Portanto, $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é gerador.

Como S é semigrupo, ele é multiplicativo (fechado por produto), $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é multiplicativo. De fato,

$$\mathrm{Co}_\Lambda(S) = \{\sum r_i s_i, s_i \in S, r_i \geq 0\}$$

é multiplicativo. Tomando fecho resulta que $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é multiplicativo. □

Teorema 5.5.5 *Suponha que* $C_\Lambda^+ = C_\Lambda^-$. *Então,* $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ *é todo* $\mathrm{End}\,(V_\Lambda)$.

Demonstração: Como $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é gerador, basta mostrar que este cone não está contido em nenhum semi-espaço. Isso é equivalente a mostrar que para todo $0 \neq X \in \mathrm{End}(V_\Lambda)$, $\mathrm{Tr}(gX)$ muda de sinal quando g percorre $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$, pois a forma traço da representação é uma forma bilinear não degenerada.

Se $g = v \otimes \lambda \in \mathrm{Con}_\Lambda(S)$, onde $v \in V_\Lambda$ e $\lambda \in V_\Lambda^*$, então

$$\mathrm{Tr}(gX) = \mathrm{Tr}(Xg) = \mathrm{Tr}(X(v \otimes \lambda)) = \mathrm{Tr}(Xv \otimes \lambda) = \lambda(Xv). \tag{5.19}$$

Sendo assim, tome v tal que $[v] \in \left(C_\Lambda^+\right)_0$. Pela igualdade dos c.c.i., $-[v] \in (C_\Lambda^+)_0$, portanto existe $h \in \mathrm{int}S$ tal que

$$hv = -cv$$

com $c > 0$ (veja proposição 4.1.3).

A composta $h(v \otimes \lambda)$ está em $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$, dada por

$$(hv) \otimes \lambda = -cv \otimes \lambda.$$

Então,

$$\mathrm{Tr}(h(v \otimes \lambda)X) = \mathrm{Tr}((-cv \otimes \lambda)X) = -c\lambda(Xv). \tag{5.20}$$

Portanto, para completar a demonstração basta mostrar que para todo $0 \neq X \in \mathrm{End}\,(V_\Lambda)$ existe $v \otimes \lambda \in \mathrm{Con}_\Lambda\,(S)$ tal que $\lambda\,(Xv) \neq 0$.

Tome $v \in V_\Lambda$, tal que $\langle v \rangle \in (C_\Lambda)_0$. Então v é um vetor maximal, o grupo de isotropia em $\langle v \rangle$ é um subgrupo parabólico P de G. Podemos escrever, de maneira única,

$$V_\Lambda = \mathbb{R}v + M, \tag{5.21}$$

onde M é de soma dos auto-espaços correspondentes aos pesos menores (com respeito a P), veja (5.18) no lema 5.5.1. Definimos $\lambda \in V_\Lambda^*$ por

$$\lambda(x) = k, \text{ se } x \in V_\Lambda, x \equiv kv (\mathrm{mod}\, M). \tag{5.22}$$

Afirmação:

$$v \otimes \lambda \in \mathrm{Con}_\Lambda(S). \tag{5.23}$$

Demonstração: Pela propriedade de c.c.i. (veja [21]), existe $h \in \mathrm{int}S \cap P$, tal que $\langle v \rangle$ é atrator de h. Denotamos por Λ_p o peso dominante correspondente ao auto-valor de v. Então temos (veja (5.17))

$$hv = \Lambda_p(h)v.$$

O peso dominante tem valor absoluto maior do que os demais pesos menores. Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h^{2n}(x)}{\Lambda_p^{2n}(h)} = kv,$$

onde k é definido por $x \equiv kv (\mathrm{mod}\, M)$ com respeito à decomposição (5.21). Isso significa que a seqüência $\dfrac{h^{2n}}{\Lambda_p^{2n}(h)}$ tem limite em $\mathrm{End}\,(V_\Lambda)$.

Por outro lado, $(v \otimes \lambda)(x) = \lambda(x)v = kv$, então temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h^{2n}}{\Lambda_p^{2n}(h)} = v \otimes \lambda. \tag{5.24}$$

Portanto $v \otimes \lambda$ pertence a $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$.

Por fim, podemos mostrar que se $X \in \mathrm{End}(V_\Lambda)$ é tal que $\lambda(Xv) = 0$ para todo $v \otimes \lambda \in \mathrm{Con}_\Lambda(S)$, então $X = 0$.

De fato, sejam $v, \lambda, h, P, \Lambda_p$ como antes e considere a decomposição de Iwasawa $G = KAN$ de tal forma que $h \in A^+$. Podemos escrever $P = M'AN$ (veja [26]). O conjunto

$$L := \{n \in N : nhn^{-1} \in \mathrm{int}S\},$$

tem interior não vazio em N. Se $l \in L$, então

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{(lhl^{-1})^{2n}}{\Lambda_p^{2n}(lhl^{-1})} &= \lim_{n\to\infty} \frac{lh^{2n}l^{-1}}{\Lambda_p^{2n}(h)} = l(v \otimes \lambda)l^{-1} \\ &= lv \otimes l\lambda = v \otimes l\lambda, \end{aligned}$$

portanto $v \otimes l\lambda \in \mathrm{Con}_\Lambda(S)$. Pela hipótese, para $l \in L$,

$$l\lambda(Xv) = \langle l\lambda, Xv\rangle = 0.$$

Como V_Λ^* é gerado por $G\lambda$, ele também é gerado por $N\lambda = NP^-\lambda$, onde P^- é o subgrupo parabólico oposto de P. De fato, NP^- é uma célula aberta de G. Já que L tem interior não vazio em N, o fecho algébrico de L é o grupo N. Veja corolário 5.5.3. Então $L\lambda$ também gera V_Λ^*. Logo

$$\lambda(Xv) = 0$$

para todo $\lambda \in V_\Lambda^*$ e, portanto,

$$Xv = 0.$$

Como $\langle v \rangle$ varia em $(C_\Lambda)_0$, que tem interior não vazio em $Gv \simeq G/P$, concluímos também que tais v geram V_Λ. Analogamente temos que $Xv = 0$ para todo $v \in V_\Lambda$ e, portanto,

$$X = 0.$$

□

Esse teorema implica, de imediato, que polinômios em $k[G]_\Lambda$ mudam de sinal em S caso exista um único conjunto controlável invariante na órbita compacta da representação esférica.

Corolário 5.5.6 *Suponha que $C_\Lambda^+ = C_\Lambda^-$. Então, para todo $X \in \mathrm{End}\,(V_\Lambda)$ a aplicação $p_X\,(g) = \mathrm{Tr}\,(gX)$, muda de sinal em S.*

Demonstração: Se $\mathrm{tr}(gX)$ não muda de sinal, S ficaria em um semi-espaço de V_Λ, e $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ seria diferente de $\mathrm{End}(V_\Lambda)$, o que contradiria o teorema 5.5.5. □

Teorema 5.5.7 *Suponhamos que $S \subset G$ seja um subsemigrupo com interior não vazio. Então, existe um polinômio $p \in k[G]_\Lambda$ tal que $p > 0$ em S se, e somente se, existe um cone gerador e pontual $W \subset V_\Lambda$, que é invariante por S.*

Demonstração: Suponhamos que existe um cone $W \subset V_\Lambda$ pontual e gerador que seja invariante por S. Como W é pontual, o seu dual é gerador e, portanto, existe λ no interior de W^*. Esse elemento $\lambda \in V_\Lambda^*$ satisfaz $\langle \lambda, v \rangle \geq 0$, para todo $v \in W$, e $\langle \lambda, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$ caso $v \in W$.

Tome qualquer $v \in W$ diferente de 0. Seja

$$p(g) = \langle \lambda, gv \rangle = \mathrm{Tr}(g(v \otimes \lambda)) \in k[G]_\Lambda.$$

Então, $p(g) > 0$ em S, pois W é invariante por S, e $gv \in W$ diferente de 0.

Reciprocamente, suponhamos que existe um polinômio $p \in k[G]_\Lambda$, tal que $p > 0$ em S. O polinômio p é dado por $p(g) = \mathrm{Tr}(gX)$, para algum $0 \neq X \in \mathrm{End}\,(V_\Lambda)$. Pelo corolário 5.5.6, C_Λ^+ é diferente de C_Λ^-, isto é, existem dois c.c.i. na esfera. Caso contrário, p mudaria de sinal em $\mathrm{Con}_\Lambda(S) = \mathrm{End}\,(V_\Lambda)$, e isso implicaria que p muda de sinal em S.

Tanto o cone gerado por C_Λ^+ quanto o gerado por C_Λ^- (que são opostos) são invariantes por S, já que C_Λ^+ e C_Λ^- são invariantes. Denotamos por Con$C$ o cone gerado por C_Λ^+, isto é, Con$C$ é fecho do conjunto

$$\{\sum c_i v_i, c_i \geq 0, [v_i] \in C_\Lambda^+\}$$

em V_Λ.

Em vista do lema 5.4.6, para verificar que Con$C$ é gerador e pontual basta mostrar que Con$C$ é próprio. Já que Con$C \neq \{0\}$, resta mostrar que Con$C \neq V_\Lambda$.

Con$C \neq V_\Lambda$: basta verificar que C_Λ^+ fica num semi-espaço de V_Λ. Tome $v_\Lambda \in V_\Lambda$ tal que $[v_\Lambda] \in \left(C_\Lambda^+\right)_0$. Tome h split-regular em int$S$ que tenha $[v_\Lambda]$ como atrator (veja [17],[21]). Temos a decomposição de V_Λ, de maneira única,

$$V_\Lambda = \mathbb{R}v_\Lambda + M_\Lambda, \tag{5.25}$$

onde M_Λ é o hiperplano da soma dos auto-espaços correspondentes aos pesos menores. Veja (5.18) no lema 5.5.1. Mostraremos que C_Λ^+ está contido em um dos semi-espaços determinados pelo hiperplano M_Λ.

Suponhamos por absurdo que C_Λ^+ cruze os dois lados do hiperplano M_Λ, então existe $x \in V_\Lambda$ tal que $[x] \in C_\Lambda^+$ e $x \equiv cv_\Lambda (\text{mod}\, M_\Lambda)$, onde $c < 0$. Logo

$$h^n[x] = -h^n[-x] \to -[v_\Lambda]$$

quando $n \to \infty$.

Isto implica que $-[v_\Lambda] \in \left(C_\Lambda^+\right)_0$, pois C_Λ^+ é invariante por S. Portanto $C_\Lambda^+ = C_\Lambda^-$. Uma contradição.

O cone desejado é, portanto, $W = $ Con$C$. □

Lema 5.5.8 *Existe um cone não trivial invariante por S em V_Λ se, e somente se, $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$.*

Demonstração: Se $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$, pela demonstração do teorema 5.5.7, o cone gerado por C_Λ^+ ou C_Λ^- é um cone não trivial invariante por S.

Reciprocamente, suponhamos que W é um cone não trivial invariante por S. Seja v_Λ um vetor maximal, tal que $\langle v_\Lambda \rangle$ está no $(C_\Lambda)_0$, isto é, existe um elemento split-regular $h \in$ int$S$, tal que $\langle v_\Lambda \rangle$ é o atrator de h. Temos a decomposição (5.25) de V_Λ,

$$V_\Lambda = \mathbb{R}v_\Lambda + M_\Lambda,$$

onde M_Λ é o hiperplano da soma dos auto-espaços correspondentes aos pesos menores.

O cone W não pode fica no hiperplano M_Λ, pois W é gerador pelo lema 5.4.6. Então existem elementos de W fora de M_Λ, que são atraídos por h para $\langle v_\Lambda \rangle$ em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$. Portanto exatamente um dos vetores v_Λ ou $-v_\Lambda$ pertence a W, pois W é pontual pelo lema 5.4.6. Portanto, não existe um elemento de S que leva semi-reta $[v_\Lambda]$ para $-[v_\Lambda]$, e $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$. □

O objetivo agora é caracterizar as representações Λ em que $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$. Isso será feito em função do tipo parabólico de S. Para isso precisamos de alguns conceitos introduzidos em capítulo anterior. Fixaremos uma câmara de Weyl A^+ tal que $A^+ \cap \mathrm{int}S \neq \emptyset$. Seja $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ o conjunto das raízes simples de G e $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l\}$ os pesos dominantes fundamentais correspondentes. Denote por $\mathcal{W}$ o grupo de Weyl de G. O tipo de S, $\Theta(S) \subset \Delta$, é o conjunto das raízes simples cujas reflexões geram o subgrupo $\mathcal{W}(S) \subset \mathcal{W}$ (veja (4.4)).

Lema 5.5.9 *Se Λ é de classe um, então $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$.*

Demonstração: Neste caso, existe um cone próprio W invariante por G em V_Λ. Portanto, C_Λ^+ e C_Λ^- ficam em W e $-W$ respectivamente. □

Lema 5.5.10 *Se $\Theta(S) \subset \Theta(\Lambda)$, então $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $C_\Lambda^+ = C_\Lambda^-$. Tome $h \in \mathrm{int}S$ um elemento split-regular. Seja $\langle v_\Lambda \rangle \in \mathbb{P}(V_\Lambda)$ o atrator de h. Então $[v_\Lambda]$ e $-[v_\Lambda]$ pertencem a $C_\Lambda^+ = C_\Lambda^-$. Assim existe $s \in \mathrm{int}S$, tal que $s[v_\Lambda] = -[v_\Lambda]$. Conseqüentemente $s^2[v_\Lambda] = [v_\Lambda]$. Temos a decomposição (5.25)

$$V_\Lambda = \mathbb{R}v_\Lambda + M_\Lambda,$$

onde M_Λ é a soma dos auto-espaços correspontes aos pesos menores, veja lema 5.5.1.

Defina $\lambda_\Lambda \in V_\Lambda^*$ por (5.22). Isto é,

$$\lambda_\Lambda(v) = r, \text{ se } v \equiv rv_\Lambda (\mathrm{mod}\, M_\Lambda). \tag{5.26}$$

Consideramos a função

$$p(g) := \langle \lambda_\Lambda, gv_\Lambda \rangle, g \in G.$$

Note que $p(s) < 0$ e $p(s^2) > 0$, existe um elemento $t \in S$, tal que $p(t) = 0$, ou seja $tv_\Lambda \in M_\Lambda$, pois S é conexo. Em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$, $\langle tv_\Lambda \rangle$ é atraído por h para $w\langle v_\Lambda \rangle$, para algum $w \in W(S)$, pois o atrator de $\langle tv_\Lambda \rangle$ por h está em C_Λ. Como $\Theta(S) \subset \Theta(\Lambda)$, temos que $w\langle v_\Lambda \rangle = \langle v_\Lambda \rangle$. Mas a reta correspondente a $w\langle v_\Lambda \rangle$ fica no plano M_Λ, uma contradição. Portanto, $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$. (Comparar a proposição 4.8 [21].) $\square$

Corolário 5.5.11 *Se $\Theta(S) = \emptyset$, então $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$ para qualquer Λ.*

Observação: Os lemas 5.5.9,5.5.10 oferecem condições suficientes para $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$. Não sabemos condições suficientes e necessários, que deveriam combinar a forma de Λ e $\Theta(S)$. $\square$

5.6 Semigrupo assintótico de subsemigrupo

Seja G um grupo algébrico linear, semi-simples, irredutível e real normal, cujo complexificado é simplesmente conexo. Suponhamos que $S \subset G$ seja um semigrupo conexo com interior não vazio. Suponhamos também que $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$. Vamos definir $R_\Lambda(\mathrm{As}S)$, a imagem de AsS, que será definido, atravéz da representação de $R_\Lambda : G \cup \mathrm{As}G \to \mathrm{End}(V_\Lambda)$. Tome $v_\Lambda \in V_\Lambda$ tal que $[v_\Lambda] \in (C_\Lambda^+)_0$ ou $(C_\Lambda^-)_0$, e forme $\lambda_\Lambda \in V_\Lambda^*$ por (5.26), que será denominado a dual de v_Λ (dependendo h).

Definição 5.6.1 $R_\Lambda(\mathrm{As}S) := \mathrm{Cl}\{c\,((g,h)(v_\Lambda \bigotimes \lambda_\Lambda)) : c \geq 0,\ g \in S,\ h \in S^{-1}\}$. *Onde Cl significa tomar fecho na topologia euclidana em End(V_Λ).*

Proposição 5.6.2 $R_\Lambda(\mathrm{As}S)$ *é bem definido. Isto é, ele não depende da escolha particular de $v_\Lambda \bigotimes \lambda_\Lambda$.*

Demonstração: Seja $v'_\Lambda \bigotimes \lambda'_\Lambda$ uma outra escolha. Como $\langle v_\Lambda \rangle, \langle v'_\Lambda \rangle \in (C_\Lambda)_0$, existem $s_1, s_2 \in \mathrm{int}S$, tais que $\langle v'_\Lambda \rangle = s_1 \langle v_\Lambda \rangle$ e $\langle v_\Lambda \rangle = s_2 \langle v'_\Lambda \rangle$. Veja proposição 4.1.3. Analogamente, como $\langle \lambda_\Lambda \rangle, \langle \lambda'_\Lambda \rangle \in (C_\Lambda^*)_0$, existem $t_1, t_2 \in \mathrm{int}S$, tais que $\langle \lambda'_\Lambda \rangle = t_1 \langle \lambda_\Lambda \rangle$ e $\langle \lambda_\Lambda \rangle = t_2 \langle \lambda'_\Lambda \rangle$, Portanto,

$$(v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda) = c_1(s_1, t_2^{-1})(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda), \tag{5.27}$$

e

$$(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) = c_2(s_2, t_1^{-1})(v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda) \tag{5.28}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Note que

$$\mathrm{Tr}(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) = \langle v_\Lambda, \lambda_\Lambda \rangle = 1,$$

e

$$\mathrm{Tr}(v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda) = \langle v'_\Lambda, \lambda'_\Lambda \rangle = 1.$$

Calcule

$$\mathrm{Tr}((s_1, t_2^{-1})(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)) = \mathrm{Tr}(s_1 v_\Lambda \otimes t_2^{-1}\lambda_\Lambda) = \langle s_1 v_\Lambda, t_2^{-1}\lambda_\Lambda \rangle = \langle t_2 s_1 v_\Lambda, \lambda_\Lambda \rangle.$$

Então temos

$$c_1 \langle t_2 s_1 v_\Lambda, \lambda_\Lambda \rangle = 1.$$

Analogamente,

$$c_2 \langle t_1 s_2 v'_\Lambda, \lambda'_\Lambda \rangle = 1.$$

Observamos que a função $\mathrm{Tr}(g(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)) = \langle g v_\Lambda, \lambda_\Lambda \rangle$ para $g \in G$ é não negativa em S, veja a demonstração do teorema 5.5.5. Portanto, $c_1 > 0$. Analogamente, $c_2 > 0$. Então $\mathcal{R}_\Lambda(\mathrm{As}S)$ é bem definido. □

Proposição 5.6.3 *Para $R_\Lambda(\mathrm{As}S)$ valem as seguintes propriedades (onde $\times$ indica a multiplicação em EndV_Λ)*

a) $R_\Lambda(\mathrm{As}S) \subset R_\Lambda(\mathrm{As}G)$.

b) $S \times R_\Lambda(\mathrm{As}S) \to R_\Lambda(\mathrm{As}S)$.

c) $R_\Lambda(\mathrm{As}S) \times S \to R_\Lambda(\mathrm{As}S)$.

d) $R_\Lambda(\mathrm{As}S) \times R_\Lambda(\mathrm{As}S) \to R_\Lambda(\mathrm{As}S)$.

Demonstração: O item a) resulta de que $c\,((g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)) = c(g v_\Lambda \otimes h\lambda_\Lambda)$ é operador extremal em EndV_Λ, e os limites dos operadores extremais também são operadores extremais.

Para b), c) e d) basta verificar as relações sem tomar o fecho. Observamos que

$$s(c(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)) = c(sg, h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda),$$

$$(c(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda))s = c(g, hs^{-1})(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda),$$

e

$$\begin{aligned} & (c(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda))(c_1(g_1,h_1)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)) \\ = \; & cc_1(gv_\Lambda \otimes h\lambda_\Lambda)(g_1 v_\Lambda \otimes h_1\lambda_\Lambda) \\ = \; & cc_1(h\lambda_\Lambda, g_1 v_\Lambda)(gv_\Lambda \otimes h_1\lambda_\Lambda) \\ = \; & cc_1\lambda_\Lambda(h^{-1}g_1 v_\Lambda)(g,h_1)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda), \end{aligned}$$

onde $s, g, g_1, h, h_1 \in S$, e $c, c_1 \geq 0$. Note que $sg \in S$, $hs^{-1} \in S^{-1}$, e $\lambda_\Lambda(h^{-1}g_1 v_\Lambda) \geq 0$, portanto b), c) e d) são satisfeitos. □

O semigrupo $R_\Lambda(\mathrm{As}S)$ pode ser descrito também da seguinte maneira. A partir dos duais $\lambda_\Lambda \in V_\Lambda^*$ dos elementos $v_\Lambda \in V_\Lambda$, tal que $\langle v_\Lambda \rangle \in (C_\Lambda)^0$, está formado um c.c.i. (mais precisamente, o conjunto de transitividade dele) para S^{-1} em $\mathbb{P}(V_\Lambda^*)$, $\{\langle \lambda_\Lambda \rangle : \lambda_\Lambda$ é dual de v_Λ, onde $\langle v_\Lambda \rangle \in (C_\Lambda)^0\}$, denotaremos por C_Λ^*. Então,

$$R_\Lambda(\mathrm{As}S) = \mathrm{Cl}\{v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda : \langle v_\Lambda \rangle \in (C_\Lambda)^0, \langle \lambda_\Lambda \rangle \in C_\Lambda^*, \langle \lambda_\Lambda, v_\Lambda \rangle > 0\}.$$

Proposição 5.6.4 $R_\Lambda(\mathrm{As}S) \subset \mathrm{Con}_\Lambda(S)$.

Demonstração: Observamos $v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda \in \mathrm{Con}_\Lambda(S)$, veja (5.23) no teorema 5.5.5. Note que

$$(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) = gv_\Lambda \otimes h\lambda_\Lambda = gv_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda \circ h^{-1} = g(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)h^{-1}.$$

Como $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é invariante sob a multiplicação por números positivos e as ações de S à esquerda ou à direita, mais ainda $\mathrm{Con}_\Lambda(S)$ é fechado, temos que $R_\Lambda(\mathrm{As}S) \subset \mathrm{Con}_\Lambda(S)$. □

Corolário 5.6.5 *Seja $0 \neq p \in k[G]_\Lambda$. Se $p(g) \geq 0$, para todo $g \in S$, então $p(g) \geq 0$ para todo $g \in R_\Lambda(\mathrm{As}S)$.*

Demonstração: Existe $0 \neq X \in \mathrm{End}\,(V_\Lambda)$ tal que $p(g) = \mathrm{Tr}(gX)$. Daí segue que $p(g) \geq 0$ para todo $g \in \mathrm{Con}_\Lambda(S)$. Como $R_\Lambda(\mathrm{As}S) \subset \mathrm{Con}_\Lambda(S)$, logo $p(g) \geq 0$ para todo $g \in R_\Lambda(\mathrm{As}S)$. □

Corolário 5.6.6 *Nas notações acima.* $R_\Lambda(AsS) \neq R_\Lambda(\mathrm{As}G)$.

Demonstração: Note que

$$\mathrm{Tr}(c(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)) = c\mathrm{Tr}(gv_\Lambda \otimes h\lambda_\Lambda) = c\langle h^{-1}gv_\Lambda, \lambda_\Lambda\rangle \geq 0,$$

onde as notações como na definição de $R_\Lambda(\mathrm{As}S)$. Portanto $\mathrm{Tr}(X) \geq 0$, para todo $X \in \mathrm{As}S$. Então $\mathrm{As}S \neq \mathrm{As}G$. □

Suponhamos que S é conexo, e $\Theta(S) = \emptyset$. Neste caso $C_\Lambda^+ \neq C_\Lambda^-$, para todo $\Lambda \in P_+$. Tome um elemento split-regular $h \in \mathrm{int}S$. (split-regular é usado em [17], o mesmo é chamado regular em [21].) Para cada Λ, escolhemos um par de elementos $v_\Lambda \in V_\Lambda$ e $\lambda_\Lambda \in V_\Lambda^*$ tais que $\langle v_\Lambda\rangle$ é o atrator de h em $\mathbb{P}(V_\Lambda)$, e λ_Λ é o dual de v_Λ, e forme um operador extremal $v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$. Note que v_Λ e λ_Λ são determinados a menos de um escalar diferente de 0, enquanto $v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$ é unicamente determinado por h, pois $\langle v_\Lambda, \lambda_\Lambda\rangle = 1$.

Proposição 5.6.7 *Mantendo as notações acima,* $\{v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda, \Lambda \in P_+\}$ *é coerente e multiplicativo. Ou seja, ele é um elemento de* $\mathcal{R}(\mathrm{As}G)$.

Demonstração: Coerência. Como todos os vetores $v_\Lambda \in V_\Lambda$, $\Lambda \in P_+$ são atratores pelo mesmo elemento $h \in \mathrm{int}S$ pela construção, eles são invariantes pelo mesmo subgrupo de Borel de G, determinado por h. Analogamente todos os vetores $\lambda_\Lambda \in V_\Lambda^*$, $\Lambda \in P_+$ são atratores pelo mesmo elemento $h^{-1} \in \mathrm{int}S^{-1}$, então eles são invariantes pelo mesmo subgrupo de Borel de G determinado por h^{-1}.

Multiplicativo. Como $v_\Lambda \in V_\Lambda$ e $v_M \in V_M$ são atratores por $h \in \mathrm{int}S$, $v_\Lambda \otimes v_M \in V_{\Lambda+M}$ também é atrator de h. Já que $v_{\Lambda+M} \in V_{\Lambda+M}$ é atrator por h, $v_\Lambda \otimes v_M$ e $v_{\Lambda+M}$ são proporcionais. Analogamente $\lambda_\Lambda \otimes \lambda_M$ e $\lambda_{\Lambda+M}$ são proporcionais. Portanto, $(v_\Lambda \otimes v_M) \otimes (\lambda_\Lambda \otimes \lambda_M)$ e $v_{\Lambda+M} \otimes \lambda_{\Lambda+M}$ são proporcionais. Mas

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}((v_\Lambda \otimes v_M) \otimes (\lambda_\Lambda \otimes \lambda_M)) &= \langle v_\Lambda \otimes v_M, \lambda_\Lambda \otimes \lambda_M\rangle \\ &= \langle v_\Lambda, \lambda_\Lambda\rangle\langle v_M, \lambda_M\rangle = 1\end{aligned}$$

e

$$\mathrm{Tr}(v_{\Lambda+M} \otimes \lambda_{\Lambda+M}) = \langle v_{\Lambda+M}, \lambda_{\Lambda+M}\rangle = 1,$$

então temos que

$$(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \otimes (v_M \otimes \lambda_M) = v_{\bar{\Lambda}+M} \otimes \lambda_{\Lambda+M},$$

para quaisquer $\Lambda, M \in P_+$, o que implica que $\{v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda, \Lambda \in P_+\}$ é multiplicativo.

Pela construção, $v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$, $\Lambda \in P_+$ são operadores extremais, então$\{v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda, \Lambda \in P_+\} \in \mathcal{R}(\mathrm{As}G)$. $\square$

Agora podemos definir $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$, a imagem de As$S$ (a ser definido) sob a representação

$$\mathcal{R} : G \cup \mathrm{As}G \to \prod_\Lambda \mathrm{End}(V_\Lambda).$$

Definição 5.6.8 *Mantendo as notações acima, defina*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathrm{As}S) \quad &: = \mathrm{Cl}\{c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) : g \in S, h \in S^{-1}, c_\Lambda \geq 0, \\ c_\Lambda c_M \quad &= \quad c_{\Lambda+M}, \Lambda, M \in P_+\}. \end{aligned}$$

Onde Cl *significa tomar fecho na topologia euclidiana em* $\prod_\Lambda \mathrm{End}(V_\Lambda)$.

Proposição 5.6.9 $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$ *é bem definido. Isto é, ele não depende da escolha particular de* $v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$.

Demonstração: Seja $\{v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda, \Lambda \in P_+\}$ outro conjunto dos operadores extremais associados a um outro elemento split-regular $h' \in \mathrm{int}S$. Denote por A^+ (A'^+) a câmara de Weyl definida por h (h'). Então existe $g \in G$ tal que $A'^+ = gA^+g^{-1}$. Seja $h'' = ghg^{-1}$. Então h'' pertence à mesma câmara de Weyl como h'. (h'' pode ser não estar em int$S$.) Portanto podemos usar h'' ao invés de h' na construção de $v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda$. Como $\langle gv_\Lambda \rangle$ é atrator por h'', portanto por h', temos que $\langle v'_\Lambda \rangle = \langle gv_\Lambda \rangle$. Analogamente, temos que $\langle \lambda'_\Lambda \rangle = \langle g\lambda_\Lambda \rangle$. Visto que $\langle gv_\Lambda, g\lambda_\Lambda \rangle = \langle v_\Lambda, \lambda_\Lambda \rangle = 1$, segue que $v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda = gv_\Lambda \otimes g\lambda_\Lambda = (g,g)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)$.

Fixo um $\Lambda \in P_+$, tal que $\Theta(\Lambda) = \varnothing$. Seja $v_\Lambda \in V_\Lambda$ um vetor maximal atraído por h, então o grupo de isotropia em $\langle v_\Lambda \rangle$ é um grupo parabólico minimal, $P_\emptyset$. Como na demonstração da proposição 5.6.2, existe $s \in \mathrm{int}S$, tal que $\langle v'_\Lambda \rangle = s\langle v_\Lambda \rangle$. Já que $\langle v'_\Lambda \rangle = \langle gv_\Lambda \rangle$, logo $g\langle v_\Lambda \rangle = s\langle v_\Lambda \rangle$, e $s^{-1}g\langle v_\Lambda \rangle = \langle v_\Lambda \rangle$. Portanto, $s^{-1}g \in P_\emptyset$. Analogamente, existe $t \in \mathrm{int}S^{-1}$, tal que $\langle \lambda'_\Lambda \rangle = \langle g\lambda_\Lambda \rangle = t\langle \lambda_\Lambda \rangle$ e $t^{-1}g \in P_\emptyset$.

Agora, para qualquer $\Lambda \in P_+$,

$$\begin{aligned} v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda \quad &= \quad (g,g)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) = s(s^{-1}g)v_\Lambda \otimes t(t^{-1}g)\lambda_\Lambda) \\ &= \quad c_\Lambda(sv_\Lambda \otimes t\lambda_\Lambda) = c_\Lambda(s,t)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda), \end{aligned}$$

pois $P_\emptyset$ está contido nos grupos de isotropia em $\langle v_\Lambda \rangle$ e $\langle \lambda_\Lambda \rangle$ para qualquer $\Lambda \in P_+$. Segue o mesmo raciocínio na demonstração da proposição 5.6.2, temos que $c_\Lambda > 0$. Considerando que $\mathrm{Tr}(v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda) = \mathrm{Tr}(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) = 1$, podemos verificar que $c_\Lambda c_M = c_{\Lambda+M}$, para quaisquer $\Lambda, M \in P_+$. Pela simetria, $v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$ também pode ser expresso na forma semelhante a partir de $v'_\Lambda \otimes \lambda'_\Lambda$.

Portanto, as duas escolhas não fazem diferenças, e $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$ é bem definido. $\square$

Observação: Como P_+ é finitamente gerado, as condições sobre c_Λ são determinadas por valores nos geradores. $\square$

Proposição 5.6.10 *Para $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$ como na definição acima valem as propriedades (onde $\times$ significa a multiplicação em $\Pi_\Lambda \mathrm{End} V_\Lambda$)*

a) $\mathcal{R}(\mathrm{As}S) \subset \mathcal{R}(\mathrm{As}G)$.

b) $S \times \mathcal{R}(\mathrm{As}S) \to \mathrm{As}S$.

c) $\mathcal{R}(\mathrm{As}S) \times S \to \mathrm{As}S$.

d) $\mathcal{R}(\mathrm{As}S) \times \mathcal{R}(\mathrm{As}S) \to \mathcal{R}(\mathrm{As}S)$.

Demonstração: Para (a) basta verificar que $\{c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda), \Lambda \in P_+\}$ é coerente e multiplicativo. Como

$$(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) = gv_\Lambda \otimes h\lambda_\Lambda,$$

gv_Λ é invariante por gBg^{-1} e $h\lambda_\Lambda$ é invariante por hBh^{-1} para todo Λ, segue que $\{c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda), \Lambda \in P_+\}$ é coerente. Agora,

$$\begin{aligned}
& c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \otimes c_M(g,h)(v_M \otimes \lambda_M) \\
= \; & c_\Lambda c_M(gv_\Lambda \otimes h\lambda_\Lambda) \otimes (gv_M \otimes h\lambda_M) \\
= \; & c_\Lambda c_M(gv_\Lambda \otimes gv_M) \otimes (h\lambda_\Lambda \otimes h\lambda_M) \\
= \; & c_\Lambda c_M(g(v_\Lambda \otimes v_M)) \otimes (h(\lambda_\Lambda \otimes \lambda_M)) \\
= \; & c_{\Lambda+M}(g,h)((v_\Lambda \otimes v_M) \otimes (\lambda_\Lambda \otimes \lambda_M)) \\
= \; & c_{\Lambda+M}(g,h)(v_{\Lambda+M} \otimes \lambda_{\Lambda+M}).
\end{aligned}$$

Portanto $\{c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda), \Lambda \in P_+\}$ é multiplicativo.

Como $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$ é dado como a órbita de

$$\{c_\Lambda(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) : c_\Lambda \geq 0, \text{ e } c_\Lambda c_M = c_{\Lambda+M}, \Lambda, M \in P_+\}$$

por $S \times S^{-1}$, ele é invariante pelas ações de S à esquerda e à direita, donde seguem (b) e (c).

Para (d) sejam $c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)$ e $d_\Lambda(s,t)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)$ em $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$. Então,

$$\begin{aligned}
& c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) d_\Lambda(s,t)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \\
= \; & c_\Lambda d_\Lambda (g v_\Lambda \otimes h\lambda_\Lambda)(s v_\Lambda \otimes t\lambda_\Lambda) \\
= \; & c_\Lambda d_\Lambda h\lambda_\Lambda(s v_\Lambda)(g v_\Lambda \otimes t\lambda_\Lambda) \\
= \; & c_\Lambda d_\Lambda \mathrm{Tr}(s(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)h^{-1})(g,t)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda).
\end{aligned}$$

Já vimos que $\{c_\Lambda d_\Lambda, \Lambda \in P_+\}$ é multiplicativo. Resta verificar que $\{\mathrm{Tr}(s(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)h^{-1}), \Lambda \in P_+\}$ é multipicativo. Como

$$(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \otimes (v_M \otimes \lambda_M) = v_{\Lambda+M} \otimes \lambda_{\Lambda+M},$$

logo

$$(s(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)h^{-1}) \otimes (s(v_M \otimes \lambda_M)h^{-1}) = s(v_{\Lambda+M} \otimes \lambda_{\Lambda+M})h^{-1},$$

daí

$$\mathrm{Tr}(s(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)h^{-1})\mathrm{Tr}(s(v_M \otimes \lambda_M)h^{-1}) = \mathrm{Tr}(s(v_{\Lambda+M} \otimes \lambda_{\Lambda+M})h^{-1}).$$

Portanto,

$$\{c_\Lambda(g,h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)(d_\Lambda(s,t)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)), \Lambda \in P_+\} \in \mathcal{R}(\mathrm{As}S).$$

□

Proposição 5.6.11 *Sejam S_1 e S_2 semigrupos conexos de G, tais que $S_1 \subset S_2$, e $\Theta(S_1) = \Theta(S_2) = \emptyset$. Então, $\mathcal{R}(\mathrm{As}S_1) \subset \mathcal{R}(\mathrm{As}S_2)$.*

Demonstração: Segue da definição e do fato que $S_1^{-1} \subset S_2^{-1}$. □

Proposição 5.6.12 *Seja S um semigrupo conexo de G tal que $\Theta(S) = \emptyset$. Se $g \in G$, então $g(\mathcal{R}(\mathrm{As}S))g^{-1} = \mathcal{R}(\mathrm{As}(gSg^{-1}))$.*

Demonstração: Observamos que se C_Λ é c.c.i. de S , então gC_Λ é c.c.i. de gSg^{-1}. As condições sobre $v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$:

$$\langle v_\Lambda \rangle \in (C_\Lambda)^0, \langle \lambda_\Lambda \rangle \in C_\Lambda^*, \langle \lambda_\Lambda, v_\Lambda \rangle > 0$$

é equivalente as condições sobre $g(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)g^{-1} = gv_\Lambda \otimes g\lambda_\Lambda$:

$$\langle gv_\Lambda \rangle \in (gC_\Lambda)^0, \langle g\lambda_\Lambda \rangle \in (gC_\Lambda)^*, \langle g\lambda_\Lambda, gv_\Lambda \rangle = \langle \lambda_\Lambda, v_\Lambda \rangle > 0$$

Comparando a fórmula na definição de $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$, segue a igualdade. □

Finalmente, podemos definir $\mathrm{As}S$, usando o fato de que a representação

$$\mathcal{R} : G \cup \mathrm{As}G \to \prod_\Lambda \mathrm{End}V_\Lambda$$

é fiel.

Definição 5.6.13 *$\mathrm{As}S := \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}(\mathrm{As}S))$, a imagem inversa de $\mathcal{R}(AsS)$ por $\mathcal{R}$.*

Teorema 5.6.14 *$\mathrm{As}S$ é um subsemigrupo de $\mathrm{As}G$; $S \cup \mathrm{As}S$ é um subsemigrupo de $G \cup \mathrm{As}G$. Isto é, valem as relações:*

a) $\mathrm{As}S \subset \mathrm{As}G$,

b) $S \times \mathrm{As}S \to \mathrm{As}S$,

c) $\mathrm{As}S \times S \to \mathrm{As}S$,

d) $\mathrm{As}S \times \mathrm{As}S \to \mathrm{As}S$.

Demonstração: É conseqüência das propriedades de $\mathcal{R}(\mathrm{As}S)$ e do fato que a representação $\mathcal{R}$ é fiel. □

Proposição 5.6.15 *Notações como acima. AsS satisfaz:*

1. $0 \in AsS$,

2. AsS *é fechado,*

3. AsS *é conexo,*

4. As$S \neq$ AsG,

5. $int(\text{As}S) \neq \emptyset$.

Demonstração: Os primeiros dois itens são imediatos pela definição. AsS é conexo pois todos os elementos estão ligados ao elemento zero.

As$S \neq$ AsG é conseqüência do corolário 5.6.6.

Observe que $\mathcal{R}(\text{As}S)$ contém a órbita de $\{c_\Lambda(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) : \Lambda \in P_+\}$ por $\text{int}S \times \text{int}S^{-1}$, que tem interior não vazio em $\mathcal{R}(\text{As}G)$. Portanto $\text{int}(\text{As}S) \neq \emptyset$ em AsG. □

Proposição 5.6.16 *Sejam S_1 e S_2 semigrupos conexos de G, tais que $S_1 \subset S_2$ e $\Theta(S_1) = \Theta(S_2) = \emptyset$. Então $AsS_1 \subset \text{As}S_2$.*

Demonstração: É imediato da definição e da proposição 5.6.11. □

Proposição 5.6.17 *Seja S um semigrupo conexo de G tal que $\Theta(S) = \emptyset$. Então $\text{As}(gSg^{-1}) = g(\text{As}S)g^{-1}$, onde $g \in G$.*

Demonstração: É imediato da definição e da proposição 5.6.12. □

Podemos usar uma representação de dimensão finita para determinar AsS, pois a representação de AsG tem representação finita e fiel. Como $G(\mathbb{C})$, o complexificado de G, é simplesmente conexo, a representação

$$R_1 + \cdots + R_l : G \cup \text{As}G \to \text{End}V_{\Lambda_1} \oplus \cdots \oplus \text{End}V_{\Lambda_l}$$

é fiel, onde $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ são pesos fundamentais. Portanto, podemos identificar AsS com o conjunto dos operadores extremais coerentes

$$\{c_i(g,h)v_{\Lambda_i} \otimes \lambda_{\Lambda_i}, g \in S, h \in S^{-1}, c_i \geq 0, i = 1, ..., l\}$$

já que ele gera $\mathcal{R}(\text{As}S)$.

A definição de AsS não cai em trivial, como notamos em observação na seção 1. Talvez assim definir AsS seja uma maneira melhor, já que os conjuntos controláveis invariantes são peças chave para caracterizar semigrupos. No caso em que S é maximal (veja [19]), ele é determinado pelo seu conjunto controlável invariante.

5.7 Unicidade do semigrupo assintótico

Nesta seção, mostraremos que os semigrupos assintóticos definidos acima é único em certo sentido.

Teorema 5.7.1 *Mantendo as notações como no teorema 5.6.14. $\mathrm{As}S$ é o único objeto D que satisfaz, além das propriedades no teorema 5.6.14, as seguintes condições:*

1. $0 \in D$,
2. *D é fechado (em $\mathrm{As}G$ com respeito á topologia euclidiana),*
3. *D é conexo,*
4. $\mathrm{int}D \neq \emptyset$,
5. *D é minimal (com respeito á inclusão de conjuntos) entre os conjuntos que satisfazem as propriedades acima.*

Demonstração: Como a representação

$$R_1 + \cdots + R_l : G \cup \mathrm{As}G \to \mathrm{End}V_{\Lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{End}V_{\Lambda_l}$$

onde $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ são pesos fundamentais, é fiel, basta verificar que a imagem de D sob esta representação contém

$$\{c_1 v_{\Lambda_1} \otimes \lambda_{\Lambda_1}, \ldots, c_l v_{\Lambda_l} \otimes \lambda_{\Lambda_l} : c_1, \ldots, c_l > 0\}$$

onde $v_{\Lambda_1} \otimes \lambda_{\Lambda_1}, \ldots, v_{\Lambda_l} \otimes \lambda_{\Lambda_l}$ são escolhidos por um elemento split regular $h \in \mathrm{int}S$ como na definição 5.6.8.

Dado qualquer $\Lambda \in \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l\}$. Mostraremos que $cv_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$, $c > 0$, pertence a $R_\Lambda D$. Isto implica que $\mathrm{As}S \subset D$. Já que $\mathrm{As}S$ satisfaz todas as condições estipuladas para D (menos a minimalidade), D só pode ser $\mathrm{As}S$.

Como $\mathrm{int}D \neq \emptyset$, podemos encontrar $v \otimes \lambda$, tal que $\mathrm{Tr}(v \otimes \lambda) = \langle v, \lambda \rangle = 1$, $\mathrm{Tr}(v_\Lambda \otimes \lambda) = \langle v_\Lambda, \lambda \rangle \neq 0$, $\mathrm{Tr}(v \otimes \lambda_\Lambda) = \langle v, \lambda_\Lambda \rangle \neq 0$, e

$$(a, b)(v \otimes \lambda) := \{c(v \otimes \lambda) : a < c < b\} \in \mathrm{int}(R_\Lambda D) \tag{5.29}$$

onde $0 < a < b$. (Note que $(c(v \otimes \lambda))(c(v \otimes \lambda)) = c^2(v \otimes \lambda))$

Ainda mais, podemos exigir que existe $r > 0$, tal que

$$(0, r)(v \otimes \lambda) := \{c(v \otimes \lambda) : 0 < c < r\} \in R_\Lambda D \tag{5.30}$$

Daí resulta que $\mathbb{R}^+(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \in R_\Lambda D$.

De fato,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h^{2n}}{\Lambda^{2n}(h)} = v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda$$

onde $\Lambda^2(h) > 1$. Veja (5.24) na demonstração do teorema 5.5.5. Temos, então,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{h^{2n}}{\Lambda^{2n}(h)}(v \otimes \lambda)\frac{h^{2n}}{\Lambda^{2n}(h)} &= \lim_{n\to\infty} h^{2n}\frac{v \otimes \lambda}{\Lambda^{4n}(h)}h^{2n} \\
&= (v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)(v \otimes \lambda)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \\
&= \langle v, \lambda_\Lambda \rangle \langle v_\Lambda, \lambda \rangle (v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda).
\end{aligned}$$

Denote $d = \langle v, \lambda_\Lambda \rangle \langle v_\Lambda, \lambda \rangle \neq 0$. Obtemos que $d(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \in R_\Lambda D$. Podemos supor que $d > 0$. (caso contrário, tomar quadrado de operadores). Portanto existe $t > 0$, tal que

$$(0, t)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) := \{c(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) : 0 < c < t\} \in R_\Lambda D.$$

Mas $h^{2k}(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) = \Lambda^{2k}(h)(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda)$, para qualquer inteiro positivo k. Portanto, $\mathbb{R}^+(v_\Lambda \otimes \lambda_\Lambda) \in R_\Lambda D$.

Para completar a demonstração do teorema, resta verificar (5.30).

Defina

$$T := \{t > 0, t(v \otimes \lambda) \in R_\Lambda D\}.$$

Note que T é um semigrupo, pois $(t_1(v \otimes \lambda))(t_2(v \otimes \lambda)) = t_1 t_2 \langle v, \lambda \rangle (v \otimes \lambda) = t_1 t_2 (v \otimes \lambda)$, e $R_\Lambda D$ é semigrupo. Já que $(a, b) \subset T$, para mostrar que existe $r > 0$, tal que $(0, r) \subset T$, basta encontrar um elemento $t_0 \in T \cap (0, 1)$. Então se $a < 1$, não tem nada a fazer. O próximo processo não depende do valor de a, mas só é necessário quando $a \geq 1$.

Tome $c \in (a, b)$. Como $0 \in D$, temos que $0 \in R_\Lambda D$ (o operador zero). Existe uma seqüência $0 \neq (v_n \bigotimes \lambda_n) \in R_\Lambda D$, tal que $(v_n \otimes \lambda_n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Denote $A_n = (c(v \otimes \lambda))(v_n \otimes \lambda_n)(c(v \otimes \lambda))$. Note que

$$A_n = c^2 \langle v_n, \lambda \rangle \langle v, \lambda_n \rangle (v \otimes \lambda) := c_n (v \otimes \lambda) \in R_\Lambda D,$$

e $A_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Como $c(v \otimes \lambda) \in \mathrm{int}(R_\Lambda D)$, podemos perturbar pouco $c(v \otimes \lambda)$ para evitar o caso em que $c_n \equiv 0$ antes de c_n entrar $(0,1)$. (Mais uma vez, podemos supor que os coeficientes são positivos.) Assim obtemos um elemento $t_0 = c_n \in (0,1)$ para algum n. Isto é, podemos encontrar $t_0 \in T \cap (0,1)$, para certo elemento $c(v \otimes \lambda) \in \mathrm{int}(R_\Lambda D)$ que também satisfaz $\langle v, \lambda \rangle = 1$, e $\langle v_\Lambda, \lambda \rangle \langle v, \lambda_\Lambda \rangle > 0$. A demonstração está completa. $\square$

Capítulo 6

Exemplos

Em [25], os semigrupos assintóticos são calculados para $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, especialmente $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ e $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$. Os resultados valem para os grupos reais $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

Seja $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Seja $S \subset G$, o subsemigrupo do conjunto das matrizes totalmente positivas, isto é, cujos menores de todas as ordens são ≥ 0. O subsemigrupo S é conexo e seu tipo parabólico é trivial. Veja [20]. Trataremos somente os casos em que $n = 2, 3$, pois os demais já são complicados para descrever explicitamente.

6.1 Caso $n = 2$.

O semigrupo assintótico AsG é o semigrupo das (2×2)-matrizes degeneradas, ou seja,

$$\mathrm{As}G = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2, \mathbb{R}) : \det g = 0\}$$

De fato, a representação natural de $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ em $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é a (única) representação fundamental. Os vetores extremais tanto em V quanto em V^* são arbitários, então os operadores extremais são $\{v \otimes \lambda : v \in V, \lambda \in V^*\}$, o que implica a forma de AsG em matrizes.

Para o semigrupo

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) : a, b, c, d \geq 0\},$$

o semigrupo assintótico AsS é composto dos operadores extremais tais que os vetores extremais v e λ variam em certos conjuntos determinados por c.c.i. de S em $\mathbb{S}(V)$, ou $\mathbb{P}(V)$.

Podemos identificar V^* e V por meio de produto interno canônico em V. Então, v e λ variam no primeiro octante, ou equivalentemente variam no terceiro octante, pois os c.c.i. de S em $\mathbb{S}(V)$ são o primeiro octante e o terceiro octante. Portanto,

$$\mathrm{As}S = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2, \mathbb{R}) : \det g = 0, a, b, c, d \geq 0\}.$$

6.2 Caso $n = 3$.

Seja R a representação canônica de G em $V = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Então as representações fundamentais de G são R e $\bigwedge^2 R$, onde

$$\bigwedge^2 R : G \to \mathrm{End}(\bigwedge^2 V)$$

é definida por

$$v_1 \wedge v_2 \longmapsto gv_1 \wedge gv_2,$$

para $g \in G$ e $v_1 \wedge v_2 \in \bigwedge^2 V$, o produto exterior de V.

Os vetores extremais em $\bigwedge^2 V$ são os 2-vetores decomponíveis, ou seja 2-vetores da forma $v_1 \wedge v_2$, onde $v_1, v_2 \in V$. Dois vetores extremais $v \in V$ e $w \in \bigwedge^2 V$ são coerentes se, e somente se

$$v \wedge w = 0.$$

Analogamente dois vetores extremais $\lambda \in V^*$ e $\mu \in \bigwedge^2 V^*$ são coerentes se, e somente se

$$\lambda \wedge \mu = 0.$$

Observamos que se $v \neq 0$, a condição $v \wedge w = 0$ já garante w é decomponível para $w \in \bigwedge^2 V$. O mesmo acontece para o dual.

Os operadores extremais em V e $\bigwedge^2 V$ são respectivamente da forma

$$A_1 = v \otimes \lambda, \tag{6.1}$$

$$A_2 = (v_1 \wedge v_2) \otimes (\lambda_1 \wedge \lambda_2), \tag{6.2}$$

onde $v, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in V^*$. Eles são coerentes se, e somente se

$$v \wedge (v_1 \wedge v_2) = 0 \tag{6.3}$$

e

$$\lambda \wedge (\lambda_1 \wedge \lambda_2) = 0. \tag{6.4}$$

Identificamos $\bigwedge^2 V$ com V^* da seguinte maneira. Tome a base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ em V. Dado qualquer $w \in \bigwedge^2 V$, definimos um único elemento λ em V^* pela igualdade

$$v \wedge w = \lambda(v) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

onde $v \in V$.

Identificamos também V e V^* por meio de produto interno canônico em V, então $\bigwedge^2 V$ é identificado com V pela correspondência

$$ae_1 \wedge e_2 + be_2 \wedge e_3 + ce_1 \wedge e_3 \leftrightarrow be_1 - ce_2 + ae_3. \tag{6.5}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} & (xe_1 + ye_2 + ze_3) \wedge (ae_1 \wedge e_2 + be_2 \wedge e_3 + ce_1 \wedge e_3) \\ = \; & (xb - yc + za) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \end{aligned}$$

e

$$\langle xe_1 + ye_2 + ze_3, be_1 - ce_2 + ae_3 \rangle = xb - yc + za.$$

Identificamos $\bigwedge^2 V^*$ com V da mesma maneira. Tome a base dual $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ em V^* definida por $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Verificamos que as identificações de V^* e $\bigwedge^2 V^*$ com V são dadas respectivamente por

$$ae_1^* + be_2^* + be_3^* \leftrightarrow ae_1 + be_2 + ce_3, \tag{6.6}$$

$$ae_1^* \wedge e_2^* + be_2^* \wedge e_3^* + ce_1^* \wedge e_3^* \leftrightarrow be_1 - ce_2 + ae_3. \tag{6.7}$$

Sejam

$$\begin{aligned} v &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \\ \lambda &= b_1 e_1^* + b_2 e_2^* + b_3 e_3^*, \\ v_1 \wedge v_2 &= c_1 e_1 \wedge e_2 + c_2 e_2 \wedge e_3 + c_3 e_1 \wedge e_3, \\ \lambda_1 \wedge \lambda_2 &= d_1 e_1^* \wedge e_2^* + d_2 e_2^* \wedge e_3^* + d_3 e_1^* \wedge e_3^*. \end{aligned}$$

Então as condições de coerência (6.3) e (6.4) são respectivamente

$$a_1c_2 - a_2c_3 + a_3c_1 = 0, \tag{6.8}$$

$$b_1d_2 - b_2d_3 + b_3d_1 = 0. \tag{6.9}$$

Com as identificações (6.5), (6.6) e (6.7), os operadores A_1 e A_2 dados por (6.1) e (6.2) respectivamente são (em forma matricial)

$$A_1 = (a_1, a_2, a_3)^T(b_1, b_2, b_3),$$

$$A_2 = (c_2, -c_3, c_1)^T(d_2, -d_3, d_1),$$

onde o superíndice T significa transposta de matrizes.

Sejam $A = A_1$ e $B = A_2^T$. Então

$$\begin{aligned} AB &= (a_1, a_2, a_3)^T(b_1, b_2, b_3)(d_2, -d_3, d_1)^T(c_2, -c_3, c_1) \\ &= (b_1d_2 - b_2d_3 + b_3d_1)(a_1, a_2, a_3)^T(c_2, -c_3, c_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} BA &= (d_2, -d_3, d_1)^T(c_2, -c_3, c_1)(a_1, a_2, a_3)^T(b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1c_2 - a_2c_3 + a_3c_1)(d_2, -d_3, d_1)^T(b_1, b_2, b_3). \end{aligned}$$

Portanto, as condições de coerência (6.8) e (6.9) são equivalentes a

$$AB = BA = 0. \tag{6.10}$$

Daí segue se que

$$\mathrm{As}G = \{(A, B) : A, B \in \mathrm{End}\mathbb{R}^3,\ \mathrm{rk}A,\ \mathrm{rk}B \leq 1,\ AB = BA = 0\}.$$

Observação: Desta forma, as multiplicações em AsG, e G com AsG são dadas respectivamente por

$$(A_1, B_1)(A_2, B_2) = (A_1A_2, B_2B_1)$$

e

$$g(A, B)h = (gAh, h^{-1}Bg^{-1}),$$

onde $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A, B) \in \mathrm{As}G$ e $g, h \in G$. $\square$

Para o subsemigrupo $S \subset G$, os operadores extremais relevantes com AsS estão relacionado com c.c.i. de S em $\mathbb{P}(V)$ e $\mathrm{Gr}_2(V)$. O c.c.i. em $\mathbb{P}(V)$ corresponde ao primeiro octante em V, ou seja, as coordinadas são não negativas com respeito á base $\{e_1, e_2, e_3\}$, e o c.c.i. em $\mathrm{Gr}_2(V)$ corresponde ao primeiro octante em $\bigwedge^2 V$, ou seja, as coordenadas são não negativas com respeito á base $\{e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3\}$. Veja [20]. Nas notações acima, as condições para que um elemento de AsG pertença a AsS são

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \geq 0.$$

Daí, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathrm{As}S &= \{(A, B) : A, B \in \mathrm{End}\mathbb{R}^3, \mathrm{rk}A, \mathrm{rk}B \leq 1, AB = BA = 0, \\ A &= \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

onde $+$ (respecptivamente $-$) significa que a entrada correspondente é não negativa (respectivamente não positiva).

Capítulo 7

Semigrupos semi-algébricos

Estudaremos as estruturas algébricas dos semigrupos neste capítulo.

7.1 Geometria algébrica real

Recordamos alguns fatos sobre geometria real, veja [6], [7].

Seja V uma variedade algébrica sobre $\mathbb{R}$ (ou seja, $\mathbb{R}$-variedade). Denotamos por $V(\mathbb{R})$ o conjunto dos pontos $\mathbb{R}$-racionais (ou seja, pontos reais) de V.

Definição 7.1.1 *Seja $V = \mathrm{Spec}(A)$ uma variedade afim sobre $\mathbb{R}$. Um subconjunto M de $V(\mathbb{R})$ é chamado um subconjunto semi-algébrico de V, se M é união de número finito de conjuntos*

$$\{x \in V(\mathbb{R}) : f(x) = 0, g_j(x) > 0, j = 1, \cdots, r\}$$

onde $f, g_j \in A$.

A ordem de $\mathbb{R}$ induz uma topologia sobre o conjunto $V(\mathbb{R})$ dos pontos reais de cada $\mathbb{R}$-variedade afim V, portanto sobre cada subconjunto semi-algébrico M de V. Chamamos essa topologia a topologia forte (euclidiana).

Notação: A família de todos os subconjuntos A de $X(\mathbb{R})$ que são semi-algébricos será denotada $\mathfrak{S}(X)$.

Lema 7.1.2 *Seja $\varphi : X \to Y$ um morfismo entre variedades afins X e Y sobre $\mathbb{R}$. Consideramos a aplicação induzida $\varphi_{\mathbb{R}} : X(\mathbb{R}) \to Y(\mathbb{R})$ sobre os pontos reais. Para cada $A \in \mathfrak{S}(Y)$ a imagem inversa $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(A)$ pertence a $\mathfrak{S}(X)$.*

Demonstração: Lema 6.2 em [6]. □

Definição 7.1.3 *Seja X uma variedade algébrica (arbitrária) sobre $\mathbb{R}$. Seja $(U_i \mid i \in I)$ uma cobertura finita de X pelos subconjuntos afins. Um subconjunto A de $X(\mathbb{R})$ é chamado semi-algébrico, se $A \cap U_i = A \cap U_i(\mathbb{R})$ é semi-algébrico em U_i para qualquer $i \in I$.*

A família de todos os subconjuntos semi-algébricos de X também será denotada $\mathfrak{S}(X)$.

Observação: A condição sobre A na definição não depende da escolha da cobertura $(U_i \mid i \in I)$ de X, veja [6] para detalhes. □

Proposição 7.1.4 *Seja $\varphi : X \to Y$ um morfismo entre variedades algébricas sobre $\mathbb{R}$ e seja $\varphi_{\mathbb{R}} : X(\mathbb{R}) \to Y(\mathbb{R})$ a restrição de φ aos pontos reais. Para cada $B \in \mathfrak{S}(Y)$ a imagem inversa $\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}(B) \in \mathfrak{S}(X)$.*

Demonstração: Proposição 6.6 em [6]. □

Corolário 7.1.5 *Sejam X e Y variedades algébricas sobre $\mathbb{R}$. Sejam M e N subconjuntos de $X(\mathbb{R})$ e $Y(\mathbb{R})$ que são semi-algébricos em X e Y respectivamente. Então $M \times N$ é semi-algébrico na variedade $X \times Y$.*

Demonstração: Corolário 6.7 em [6]. □

Teorema 7.1.6 *(Tarski) Sejam $\varphi : X \to Y$ um morfismo entre variedades algébricas sobre $\mathbb{R}$ e A um subconjunto de $X(\mathbb{R})$ que é semi-algébrico em X. Então o conjunto $\varphi(A) = \varphi_{\mathbb{R}}(A)$ é semi-algébrico em Y.*

Demonstração: Teorema 6.8 em [6]. □

Observação: Para nosso objetivo, as variedades mais importantes são as afins e projetivas. Os grupos algébricos lineares são variedades afins, e os flags são variedades projetivas. □

Teorema 7.1.7 *Seja A um subconjunto semi-algébrico de uma variedade algébrica M sobre $\mathbb{R}$. Então o fecho $\text{Cl}A$ e o interior $\text{int}A$ de A (com respeito á topologia euclidiana) também são subconjuntos semi-algébricos de M.*

Demonstração: Teorema 7.7 em [6]. □

7.2 Semigrupos semi-algébricos

Como trabalhamos num grupo algébrico, os subsemigrupos devem ser munidos de alguma estrutura que reflita a estrutura algébrica de G. Já sabemos que um subsemigrupo, que é ao mesmo tempo um conjunto algébrico, é necessariamente subgrupo. Veja [10]. Então, a exigência de ser conjunto algébrico não é adequada para semigrupos. A estrutura correta estipulada seria semi-algébico (ver [2]). Um semigrupo que é ao mesmo tempo um conjunto semi-algébrico será denominado semigrupo semi-algébrico.Ver [5].

Definição 7.2.1 *Seja G um grupo algébrico linear real. Um subsemigrupo $S \subset G$ é chamado subsemigrupo semi-algébrico se ele é um subconjunto semi-algébrico de G.*

Voltamos ao nosso caso em que G é um grupo algébrico linear real e irredutível. Assumindo que $S \subset G$ é um subsemigrupo semi-algébrico tal que $\text{int}S$ não é vazio na topologia euclidiana. (o que faz sentido pois cada grupo algébrico linear real tem uma estrutura canônica do grupo de Lie). Verificaremos a seguir que a condição $\text{int}S \neq \varnothing$ é equivalente à condição de que GS, o menor subgrupo algébrico de G que contém S, é o próprio G (ver Boseck [5]). O subgrupo GS é o fecho Zariski de S.

Proposição 7.2.2 *Sejam G um grupo algébrico linear real e irredutível, e S um subsemigrupo semi-algébrico de G. Seja GS o menor subgrupo algébrico de G que contém S. Então, $\text{int}S \neq \emptyset$ se, e somente se $GS = G$.*

Demonstração: Suponha que $\text{int}S \neq \emptyset$. Para mostrar que $GS = G$, basta verificar $\dim GS = \dim G$. Note que $\text{int}S$ é um conjunto semi-algébrico e aberto (na topologia euclidiana), veja [6], teorema 7.7. De acordo com teorema 8.6 [6], $\dim(\text{int}S) = \dim G$, pois $\text{int}S \neq \emptyset$ é um conjunto semi-algébrico aberto. Mas $\dim(\text{int}S) \leq \dim S \leq \dim G$, logo $\dim S = \dim G$. Lembramos que $\dim S = \dim GS$ por definição, veja [6], § 8, portanto $\dim GS = \dim G$.

Reciprocamente, suponha que $GS = G$, então $\dim GS = \dim S = \dim G$. De acordo com teorema 8.10 [6], $\text{int}S \neq \emptyset$ e tem dimensão $\dim G$. $\square$

Seja $\mathcal{P} = \mathbb{R}[G]$. Um tipo particular de semigrupo semi-algébrico é da seguinte forma

$$S = \{s \in G : r_j(s) \geq 0, r_j \in \mathcal{P},\ j = 1, ..., l\}.$$

Defina

$$\mathcal{P}_+(S) = \{p \in \mathcal{P} : (\forall s \in S)\ p(s) \geq 0\}$$

A relação entre $\mathcal{P}_+(S)$ e os r_j 's é estabelecida em [2] (ver também [5]). Em [5] encontra-se também a caracterização de $\mathcal{P}_+(S)$ para que S seja semigrupo ou grupo, utilizando linguagem de álgebra de Hopf.

7.3 Conjuntos controláveis invariantes

Sejam G um grupo de Lie conexo e $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Sejam G/P o flag maximal e G/P_Θ o flag de tipo Θ. Temos então uma fibração canônica

$$\pi : G/P \to G/P_\Theta$$

Existe um e um só conjunto controlável invariante C (resp. C_Θ) em G/P (resp. G/P_Θ) por S. Eles são relacionados por

$$C_\Theta = \pi(C).$$

Um grupo algébrico linear real tem uma estrutura canônica de grupo de Lie. Então, um grupo algébrico linear real é um grupo de Lie (real) da mesma dimensão; os subgrupos algébricos de um grupo algébrico linear real são seus subgrupos de Lie. Veja [13], capítulo 3. Os grupos algébricos lineares reais têm centros finitos. Um grupo algébrico linear real irredutível pode ser não conexo como grupo de Lie, mas tem um múmero finito de componentes conexas. Se o grupo algébrico linear real (irredutível) é do tipo semplesmente conexo, ele é conexo como grupo de Lie. A componente conexa unitária, ou seja, que contém a unidade, é um grupo de Lie conexo.

Definição 7.3.1 *Um grupo de Lie algébrico conexo G_0 é um grupo de Lie que é a componente conexa unitária (na topologia euclidiana) de um grupo algébrico linear real (irredutível) $\overline{G}$ (com a estrutura canônica de Lie). Um grupo de Lie algébrico G é um subgrupo de Lie de um grupo algébrico linear real (irredutível) que contém a componente conexa unitária G_0 (ou seja, consista de componentes conexas de $\overline{G}$).*

Definição 7.3.2 *Seja G um grupo de Lie algébrico. Um subgrupo de Lie algébrico de G é um subgrupo de Lie de G que consista de componentes conexas de um subgrupo algébrico do grupo algébrico linear $\overline{G}$ na definição 7.3.1.*

Observação: Os resultados na seção 1 sobre a semi-algebricidade são generalizados para os espaços semi-algébricos, especialmente para as componentes conexas de uma variedade algébrica sobre $\mathbb{R}$, em [6]. Então podemos tratar um grupo de Lie algébrico, ou mais geral, as componentes de uma variedade algébrica, como uma variedade algébrica (na verdade, ele é um espaço semi-algébrico) quando estudamos as semi-algébricidades. Em seguir, usaremos essa convenção. □

Seja G um grupo de Lie algébrico conexo. Denote P e P_Θ os subgrupos parabólicos minimal e de tipo Θ (que são subgrupo de Lie algébricos).

Lema 7.3.3 *Mantendo a notação acima, se C é um subconjunto semi-algébrico em G/P, então C_Θ é um subconjunto semi-algébrico em G/P_Θ.*

Demonstração: Como $\pi : G/P \to G/P_\Theta$ é um morfismo, o lema é conseqüência do teorema Tarski. □

Se S é de tipo $\Theta(S)$ então $C = \pi^{-1}(C_{\Theta(S)})$, onde $\pi : G/P \to G/P_{\Theta(S)}$ é a fibrção canônica.

Lema 7.3.4 *Mantendo a notação acima, se $C_{\Theta(S)}$ é um subconjunto semi-algébrico em $G/P_{\Theta(S)}$, então C é um subconjunto semi-algébrico em G/P, e portanto C_Θ é semi-algébrico em G/P_Θ para qualquer Θ.*

Demonstração: É uma conseqüência imediata da proposição 7.1.4 e do lema 7.3.3. □

Recordaremos agora alguns fatos sobre conjuntos controláveis invariantes (c.c.i.). Veja capítulo 4 e [16].

Sejam G um grupo de Lie conexo e L um subsemigrupo de Lie de G. Temos um espaço homogêneo $M = G/L$. Se S é um subsemigrupo de G e M é compacto, então existe um número finito de conjuntos controláveis invariantes.

Proposição 7.3.5 *Suponha que $M = G/L$ seja compacto e S seja um subsemigrupo de G com interior não vazio. Se C é um conjunto controlável invariante por S e $C_0 = (\mathrm{int}S)C$, então:*

i) $C_0 = \mathrm{int}(Sx)$ para todo $x \in C_0$.

ii) $SC_0 \subset C_0 = Sy = (\mathrm{int}S)y$ para todo $y \in C_0$.

iii) $\mathrm{Cl}\ C_0 = C$.

Demonstração: Veja proposição 2.1 em [16]. □

Consideremos os conjuntos controláveis invariantes dos subsemigrupo semi-algébrico de um grupo algébrico linear. Sejam G um grupo de Lie algébrico conexo e L um subgrupo de Lie algébrico de G. Então o espaço homogêneo $M = G/L$ é uma variedade quasi-projetiva. Veja [3]. Temos a seguinte

Proposição 7.3.6 *Suponhamos que o espaço homogêneo $M = G/L$ seja compacto. Seja S um subsemigrupo semi-algébrico de G com interior não vazio. Então os conjuntos controláveis invariantes por S são semi-algébricos.*

Demonstração: Fixando um elemento $y \in C_0$, a aplicação

$$\varphi : G \to M, g \mapsto gy$$

é um morfismo. Então Sy, a imagem de S por φ, é semi-algébrico em M. Isto é, C_0 é semi-algébrico. Logo $C = \mathrm{Cl}\ C_0$ é semi-algébrico em M. □

Teorema 7.3.7 *Seja G um grupo de Lie algébrico conexo, semi-simples e não-compacto. Seja P um subgrupo parabólico de G. Se S é um subsemigrupo semi-algébrico de G com interior não vazio, então o conjunto controlável invariante por S sobre G/P é semi-algébrico.*

Demonstração: Neste caso, $M = G/P$ é um variedade projetiva. Veja [3]. Como variedade flag, ele é compacto e tem um único conjunto controlável invariante por S. Veja [16]. Pela proposição 7.3.6, este conjunto controlável invariante é semi-algébrico. □

7.4 Conjuntos controláveis gerais.

Recordamos os conceitos introduzidos em [21], trocando condições analíticas para algébricas, a fim de que a semi-algebricidade faça sentido.

Seja G um grupo de Lie algébrico conexo. Seja M um variedade sobre $\mathbb{R}$. Suponhamos que G age em M transitivamente. Seja S um subsemigrupo de G com interior não vazio. A definição de conjuntos controláveis por S em M é como anterior no contexto de grupo de Lie.

Lema 7.4.1 *Seja D um conjunto controlável por S. Seja D_0 é o conjunto de transitividade de D. Isto é*

$$D_0 = \{x \in D : x \in (\text{int}S)x\}.$$

Suponhamos que S é semi-algébrico e $D_0 \neq \emptyset$. Então D_0 é semi-algébrico.

Demonstração: De acordo com proposição 2.2 em [21],

$$D_0 = (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$$

para qualquer $x \in D_0$.

Como S é semi-algébrico, int$S$ também o é.

Fixando $x \in D_0$, o conjunto $(\text{int}S)x$, como a imagem de int$S$ pelo morfismo

$$\varphi : G \to M, g \mapsto gx$$

é semi-algébrico.

Note que $(\text{int}S)^{-1}$ é semi-algébrico, pois ele é a imagem de int$S$ pela automorfismo inverso de G $(g \mapsto g^{-1})$. Analogamente $(\text{int}S)^{-1}x$ é semi-algébrico. Portanto D_0 é semi-algébrico. □

Corolário 7.4.2 *Se M é variedade flag de G e S é semi-algébrico com interior não vazio, então o conjunto controlável minimal (isto é, invariante por S^{-1}) é semi-algébrico.*

Demonstração: De acordo com proposição 2.2 em [21], neste caso $S^{-1}D \subset D$ implica $D = D_0$, o que é semi-algébrico pelo lema 7.4.1. □

Observação: Note que temos $D_0 \subset \mathrm{int}D \subset D \subset \mathrm{Cl}\,(D_0) = \mathrm{Cl}\,(\mathrm{int}D) = \mathrm{Cl}\,(D)$. Como sempre, Cl significa tomar fecho na topologia forte (euclidiana). Já sabemos que quando S é semi-algébrico, D_0, e portanto $\mathrm{Cl}(D_0)$ ($= \mathrm{Cl}\,(\mathrm{int}D) = \mathrm{Cl}\,(D)$), é semi-algébrico. □

Os domínios de atração de conjuntos controláveis são estudados em [17].

Definição 7.4.3 *Sejam G um grupo de Lie conexo e $S \subset G$ um semigrupo com interior não vazio. Suponhamos que G/H seja um espaço homogêneo compacto. Seja $D \subset G/H$ um conjunto controlável. O domínio de atração $\mathcal{A}(D)$ de D é*

$$\{x \in G/H : Sx \cap D \neq \emptyset\}$$

Proposição 7.4.4 *Notações como acima. O domínio de atração $\mathcal{A}(D)$ é aberto. Se $x \in \mathcal{A}(D)$, então existe $g \in \mathrm{int}S$, tal que $gx \in D_0$.*

Demonstração: Proposição 2.1 em [17]. □

Proposição 7.4.5 *Sejam G um grupo de Lie algébrico conexo e $S \subset G$ um subsemigrupo semi-algébrico com interior não vazio. Seja $H \subset G$ um subgrupo de Lie algébrico tal que o espaço homogêneo G/H é compacto. Seja $\mathcal{A}(D)$ o domínio de atração de um conjunto controlável D por S. Então $\mathcal{A}\,(D)$ é semi-algébrico.*

Demonstração: A proposição acima implica que $\mathcal{A}\,(D)$ é igual ao conjunto

$$\{x \in G/H : (\mathrm{int}S)x \cap D_0 \neq \emptyset\}$$

Já vimos que quando S é semi-algébrico, $\mathrm{int}S$ é semi-algébrico em G e D_0 é semi-algébrico em $M = G/H$. pelo lema 7.4.1.

Defina

$$\varphi : G \times M \to M \times M, (g, x) \mapsto (gx, x)$$

e

$$\pi_2 : M \times M \to M, (x, y) \mapsto y.$$

Podemos expressar $\mathcal{A}(D)$ como

$$\mathcal{A}(D) = \pi_2((D_0 \times M) \cap \varphi(\mathrm{int}S \times M)).$$

Como D_0 é semi-algébrico em M, $D_0 \times M$ é semi-algébrico em $M \times M$. Como int$S$ é semi-algébrico em G, int$S \times M$ é semi-algébrico em $G \times M$. Então $\varphi(\text{int}S \times M)$ é semi-algébrico em $M \times M$. Logo $(D_0 \times M) \cap \varphi(\text{int}S \times M)$ é semi-algébrico em $M \times M$. Portanto $\pi_2((D_0 \times M) \cap \varphi(\text{int}S \times M))$ é semi-algébrico em M, ou seja $\mathcal{A}(D)$ é semi-algébrico. $\square$

Lema 7.4.6 *Sejam D um conjunto controlável por S, e $\mathcal{A}(D)$ seu domínio de atração. Então,*

$$\text{Cl}(D) \cap \mathcal{A}(D) = D.$$

Demonstração: É óbvio que $D \subset \text{Cl}(D) \cap \mathcal{A}(D)$. Basta mostrar que $\text{Cl}(D) \cap \mathcal{A}(D) \subset D$.

Seja $x \in \text{Cl}(D) \cap \mathcal{A}(D)$. Como $x \in \mathcal{A}(D)$, existe $s \in S$, tal que $y = sx \in D$. Então $D \subset \text{Cl}(Sy) \subset \text{Cl}(Sx)$.

Defina $D_1 = D \cup \{x\}$. Se $z \in D$, então $D \subset \text{Cl}(Sz)$. Já que $D \subset \text{Cl}(Sx)$, temos que $D \subset \text{Cl}(Sz)$, para qualquer $z \in D_1$. Logo $\text{Cl}(D) \subset \text{Cl}(Sz)$. Portanto $D_1 \subset \text{Cl}(D) \subset \text{Cl}(Sz)$, para todo $z \in D_1$. Mas, pela maximalidade na definição do conjunto controlável, temos que $D_1 = D$. Então $x \in D$, o que termina a demonstração. $\square$

Teorema 7.4.7 *Mantendo as notações como acima, se S é semi-algébrico, então todos os conjuntos controláveis são semi-algébricos.*

Demonstração: É conseqüência de lema 7.4.6, proposição 7.4.5, e observação depois o corolário 7.4.2. $\square$

7.5 Semigrupo de compressão

Seja G um grupo de Lie algébrico. Seja X uma variedade algébrico sobre $\mathbb{R}$. Suponhamos que G age sobre X. Seja $C \subset X$ um subconjunto não vazio.

Definição 7.5.1 *Um subsemigrupo de compressão de G definido por C é*

$$S_C := \{g \in G : gC \subset C\}$$

Teorema 7.5.2 *Se C é semi-algébrico em X, então S_C também é semi-algébrico.*

Demonstração: Defina

$$\varphi : G \times X \to X \times X, (g, x) \mapsto (gx, x)$$

e

$$\pi : G \times X \to G, (g, x) \mapsto g.$$

Temos então

$$G \backslash S_C = \pi\{\varphi^{-1}[(X \backslash C) \times C]\}.$$

Como C é semi-algébrico em X, logo $X \backslash C$ é semi-algébrico em X, portanto $(X \backslash C) \times C$ é semi-algébrico em $X \times X$. O conjunto $\varphi^{-1}[(X \backslash C) \times C]$, a imagem inversa de $(X \backslash C) \times C$ pelo morfismo φ, é semi-algébrico em $G \times M$, portanto sua imagem pelo morfismo π é semi-algébrico em G. Isto é $G \backslash S_C$ é semi-algébrico. Então S_C também é semi-algébrico em G. □

7.6 Semigrupos semi-algébricos maximais

Uma aplicação interessante do teorema 7.5.2 é sobre semigrupos maximais. Veja [19] as notações de semigrupos maximais.

Definição 7.6.1 *Diz se que um semigrupo $S \subset G$ com $intS \neq \emptyset$ é Θ-maximal ou maximal com respeito a $\mathbb{B}_\Theta$ se ele é de tipo Θ e não está contido propriamente em nenhum subsemigrupo de tipo Θ.*

O resultado principal sobre semigrupo maximal é seguinte

Teorema 7.6.2 *Um semigrupo S é Θ-maximal se, e somente se, existe um conjunto $\mathcal{B}$-convexo C com $intC \neq \emptyset$ tal que $S = S_K$, o semigrupo de compressão de $K = \mathrm{Cl}(\mathrm{int}C)$. Neste caso K é o conjunto controlável invariante de S em $\mathbb{B}_\Theta$ e $co_{\mathcal{B}}(K) \subset C$.*

Demonstração: Teorema 5.4 em [19]. □

Observação: Podemos adaptar o teorema acima para tratar subsemigrupos de um grupo algébrico linear real, e considerar a semi-algebricidade. Mantendo os notações no teorema, se C é semi-algébrico, int$C$ também é. Como o fecho de um conjunto semi-algébrico é semi-algébrico, $K = \mathrm{Cl}(\mathrm{int}C)$ é semi-algébrico. Conforme ao teorema 7.5.2, S_K, o semiprupo de compressão de K, é semi-algébrico. □

Definição 7.6.3 *Seja G um grupo de Lie algébrico conexo. Diz se que um semigrupo $S \subset G$ com int$S \neq \emptyset$ é s.a. Θ-maximal se ele é semi-algébrico e do tipo Θ, mais ainda, ele não está contido propriamente em nenhum semigrupo semi-algébrico e do tipo Θ.*

Teorema 7.6.4 *Um semigrupo S é s.a. Θ-maximal se e somente se existe um conjunto $\mathcal{B}$-convexo e semi-algébrico C com int$C \neq \emptyset$ tal que $S = S_K$, o semigrupo de compressão de $K = \mathrm{Cl}(\mathrm{int}C)$.*

A demonstração de teorema 7.6.2 em [19] é baseada em duas proposições:

Proposição 7.6.5 *Suponhamos que S seja um semigrupo Θ-maximal e denotamos por C seu conjunto controlável invariante em $\mathbb{B}_\Theta$. Seja $K = \mathrm{Cl}(\mathrm{int}(\mathrm{co}_{\mathcal{B}}(C)))$. Então $C = K$ e*

$$S = S_C = \{g \in G : gC \subset C\}.$$

Proposição 7.6.6 *Seja $C \subset \mathbb{B}_\Theta$ um subconjunto próprio fechado $\mathcal{B}$-convexo com int$C \neq \emptyset$. Seja $K = \mathrm{Cl}(\mathrm{int}C)$. Então o semigrupo de compressão S_K é Θ-maximal.*

A idéia na demonstração da proposição 7.6.5 é seguinte: a partir de S, cria se um outro semigrupo S_K, mostra se que S_K contém S e é de tipo Θ, portanto $S = S_K$ pela maximalidade.

A demonstração do teorema 7.6.4 segue o mesmo raciocínio.

Demonstração: Suficiência. Pela observação seguida do teorema 7.6.2, $S = S_K$ é semi-algébrico. Pela proposição 7.6.6, ou pelo teorema 7.6.2, S é Θ-maximal. Note que um semigrupo semi-algébrico que não é *s.a.* Θ-maximal não pode ser Θ-maximal. Portanto S, assim como qualquer um semigrupo semi-algébrico e Θ-maximal, é *s.a.* Θ-maximal.

Necessidade. Sejam S é um subsemigrupo *s.a.* Θ-maximal e C seu conjunto controlável invariante em $\mathbb{B}_\Theta$. Como S é semi-algébrico, C é semi-algébrico. Então $\mathrm{co}_{\mathcal{B}}(C)$ é semi-algébrico pelo lema a seguir. Temos, então,

$K = \mathrm{Cl}(\mathrm{int}(\mathrm{co}_{\mathcal{B}}(C)))$ é semi-algébrico. Portanto S_K é semi-algébrico. Note que S_K é de tipo Θ, então pela maximalidade de S, temos que $S = S_K$ (paralelo á proposição 7.6.5). □

Lema 7.6.7 *Se C é semi-algébrico, então $co_{\mathcal{B}}(C)$ é semi-algébrico*

Demonstração: Veja notações em [19]. Note que $\mathrm{co}_{\mathcal{B}}(C) = C^{**}$, onde $*$ é um operador dual entre os flags duais $\mathbb{B}_\Theta$ e $\mathbb{B}_{\Theta^*}$. Então basta mostrar que o operador $*$ leva um subconjunto semi-algébrico em um flag para um subconjunto semi-algébrico no flag dual.

Afirmação: Se $C \subset \mathbb{B}_\Theta$ é semi-algébrico, então

$$C^* = \{x \in \mathbb{B}_{\Theta^*} : C \subset \sigma_x\}$$

é semi-algébrico.

Demonstração: Note que o conjunto

$$\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{B}_\Theta \times \mathbb{B}_{\Theta^*} : x \in \sigma_y\}$$

é um subconjunto semi-algébrico em $\mathbb{B}_\Theta \times \mathbb{B}_{\Theta^*}$, pois Σ é uma órbita de um ponto $(\mathfrak{b}_\Theta, \mathfrak{b}_\Theta^-)$ pela ação de G em $\mathbb{B}_\Theta \times \mathbb{B}_{\Theta^*}$. (veja o comentário logo antes da proposição 1.2 em [18])

Sejam π_1 e π_2 as projeções de $\mathbb{B}_\Theta \times \mathbb{B}_{\Theta^*}$ para os dois fatores $\mathbb{B}_\Theta$ e $\mathbb{B}_{\Theta^*}$ respectivamente. Então, podemos escrever $\mathbb{B}_{\Theta^*} \backslash C^*$ como

$$\pi_2(\Sigma' \cap \pi_1^{-1}(C))$$

onde $\Sigma' = (\mathbb{B}_\Theta \times \mathbb{B}_{\Theta^*}) \backslash \Sigma$.

Já que $\pi_1^{-1}(C)$ é a imagem inversa de C pelo morfismo π_1, ele é semi-algébrico. Como Σ é semi-algébrico, Σ' também é. Logo a interseção $\Sigma' \cap \pi_1^{-1}(C)$, é semi-algébrico em $\mathbb{B}_\Theta \times \mathbb{B}_{\Theta^*}$, e sua imagem pelo morfismo π_2 também é semi-algébrico em $\mathbb{B}_{\Theta^*}$. Isto é, $\mathbb{B}_{\Theta^*} \backslash C^*$ é semi-algébrico. Portanto C^* é semi-algébrico, o que termina a demonstração. □

Corolário 7.6.8 *Um semigrupo s.a. Θ-maximal é Θ-maximal.*

Demonstração: É imediato pela comparação das condições equivalantes em dois teoremas que characterizam os semigrupos *s.a.* Θ-maximais e Θ-maximais. □

Corolário 7.6.9 *Um semigrupo e s.a. Θ-maximal se, e somente se ele é semi-algébrico e Θ-maximal.*

Demonstração: Pelo corolário7.6.8 e note que um semigrupo semi-algébrico e Θ-maximal é necessariamente *s.a.* Θ-maximal pela definição. □

7.7 Semigrupos assintóticos

No capítulo 5, definimos o grupo assintótico AsS para um subsemigrupo conexo S com tipo parabólico trivial, de um grupo algébrico linear semi-simples, irredutível, e real normal G, cujo complexificado é simplesmente conexo. Podemos considerar a algebricidade de AsS também. Temos a seguinte

Proposição 7.7.1 *Sejam S e G como acima. Se S é semi-algébrico, então AsS também é semi-algébrico (em AsG).*

Demonstração: De fato, AsG é uma variedade algébrica, e AsS é definido como o fecho da órbita de $S \times S^{-1}$. Portanto, AsS é semi-algébrico. □

Bibliografia

[1] Becker, E. "On the real spectrum of a ring and its applications to semi-algebraic geometry", *Bull. Amer. Math. Soc.* **15** (1986), 19-60.

[2] Bochnak, J., Coste, M. and Roy, F-M. *Géométrie algébrique réelle.* Springer-Verlag, 1987.

[3] Borel, A. *Linear Algebraic Groups.* W.A. Benjamin, 1969.

[4] Borel, A. and Tits, J. "Groupes réductifs", *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **27** (1965), 55-150.

[5] Boseck, H. "On algebraic and semialgebraic groups and semigroups", *Seminar Sophus Lie* **3** (1993), 221-227.

[6] Delfs, H. and Knebusch, M. "Semialgebraic topology over a real closed field II: Basic theory of semialgebraic spaces", *Math. Z.* **178** (1981), 175-213.

[7] —, "Semialgebraic topology over a real closed field", *Contemporary Math.* **8** (1982), 61-78.

[8] Hilgert, J., Hofmann, K. H. and Lawson, J. D. *Lie Groups, Convex Cones, and Semigroups.* Oxford University Press, 1989.

[9] Hilgert, J. and Neeb, K.-H. *Lie Semgroup and their Applications.* Lecture Notes in Math. **1552**, Springer-Verlag, 1993.

[10] Hochschild, G. P. *Basic Theory of Algebraic Groups and Lie Algebras.* Graduate Texts in Math. **75**, Springer-Verlag, 1981.

[11] Humphreys, J. E. *Linear Algebraic Groups.* Graduate Texts in Math. **21**, Springer-Verlag, 1981.

[12] Lang, S. *Algebra.* Addison-Wesley, 1984.

[13] Onishchik, A. L. and Vinberg, E. B. *Lie Groups and Algebraic Groups.* Springer-Verlag, 1990.

[14] Popov, V. L. "Contraction of the actions of reductive algebraic groups", *Mat. Sbornik* **130** (1986), 310-334. English transl.: *Math. USSR Sbornik* **58** (1987), 311-335.

[15] Popov, V. L. and Vinberg, E. B. *Invariant theory.* Encyclopaedia of Math. Sci. **55**, Springer-Verlag, 1994.

[16] San Martin, L. A. B. "Invariant control sets on flag manifolds", *Math. of Control, Signals and Systems* **6** (1993), 41-61.

[17] —, "Order and domains of attraction of control sets in flag manifolds", *Journal of Lie Theory* **8** (1998), 335-350.

[18] —, "Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces", *Math. Ann.* **321** (2001), 587-600.

[19] —, "Maximal semigroups in semi-simple Lie groups", *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 5165-5184.

[20] —, "Control sets and total positivity",

[21] San Martin, L. A. B. and Tonelli, P. A. "Semigroup action on homogeneous spaces", *Semigroup Forum* **50** (1995), 59-88.

[22] Springer, T. A. *Linear Algebraic Groups.* Encyclopaedia of Math. Sci. **55**, Springer-Verlag, 1994.

[23] Tits, J. "Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque", *J. Reine Angew. Math.* **247** (1971), 196-220.

[24] Vinberg, E. B. "Invariant cones and ordering in Lie groups", *Funct. Anal. and Appl.* **14** (1980), 1-13.

[25] —, "The asymptotic semigroup of a semisimple Lie groups", *Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis.* De Gruyter Expositions in Math. **20** (1995), 293-310.

[26] Warner, G. *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups.* Springer-Verlag, 1972.