Blas Melendez Caraballo

Subespaços complementados de espaços de Banach clássicos

CAMPINAS
2015

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

BLAS MELENDEZ CARABALLO

SUBESPAÇOS COMPLEMENTADOS DE ESPAÇOS DE BANACH CLÁSSICOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO BLAS MELENDEZ CARABALLO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. JORGE TULIO MUJICA ASCUI.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M483s Melendez Caraballo, Blas, 1988-
Subespaços complementados de espaços de Banach clássicos / Blas Melendez Caraballo. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Subespaço complementado (Análise funcional). 2. Banach, Espaços clássicos de. 3. Schauder, Bases de. 4. Rademacher, Funções de. I. Mujica Ascui, Jorge Tulio,1946-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Complemented subspaces of classical Banach spaces
Palavras-chave em inglês:
Complemented subspace (Functional analysis)
Banach classics spaces
Schauder bases
Rademacher functions
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Jorge Tulio Mujica Ascui [Orientador]
Sergio Antonio Tozoni
Sonia Sarita Berrios Yana
Data de defesa: 25-02-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de fevereiro de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof.(a). Dr(a). SERGIO ANTONIO TOZONI

Prof.(a). Dr(a). SONIA SARITA BERRIOS YANA

Abstract

In 1960, Pelczynski [15] showed that if X is one of the spaces c_0 or ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Then each infinite dimensional subspace complemented in X is isomorphic to X. Another classical result of Pelczynski [15] states that if $1 < p < \infty$, then the space $L_p[0,1]$ contains a complemented subspace isomorphic to ℓ_2. Our aim is to study results of this kind, and to introduce some open problems.

Keywords: classical Banach spaces, complemented subspace, Schauder bases, ℓ_p-sum, c_0-sum, Rademacher functions.

Resumo

Em 1960, Pelczynski [15] provou que, se X é um dos espaços c_0 ou ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Então todo subespaço complementado de dimensão infinita de X é isomorfo a X. Outro resultado clássico de Pelczynski [15] afirma que se $1 < p < \infty$, então o espaço $L_p[0,1]$ contém um subespaço complementado isomorfo a ℓ_2. Nosso objetivo é estudar os resultados deste tipo, e introduzir alguns problemas abertos.

Palavras-chave: espaços de Banach clássicos, subespaço complementado, bases de Schauder, ℓ_p-somas, c_0-somas, funções de Rademacher.

Sumário

A minha Filha Isabella...
Aos meus pais Blas e Delfina...
A minha Esposa Dargin ...

Agradecimentos

Sou imensamente grato a Jeová Deus por me permitir terminar este projeto. Agradeço a minha Esposa, aos meus irmãos e ao meu professor Abraham, pela motivação para continuar meus estudos de nível superior.

- Ao professor Jorge Tulio Mujica Ascui, por orientar esta dissertação, pelas valiosas contribuições e sugestões, por todo o apoio que me forneceu e pelo interesse prestado à mesma.

- Aos membros da banca examinadora, ao professor Sergio Antonio Tozoni ea professora Sonia Sarita Berrios Yana, por suas boas sugestões e críticas construtivas.

- Aos meus colegas de estudos e companheiros, Valter, Osmar, Leonardo, Mateus, Miquéias, Ramon, Jean, Arnoldo, Mercaluz, John, Monica, Adrian, Millerlandy, Abel e Juan Gabriel, pela amizade valiosa que depositaram em mim, e por seu apoio incondicional durante este tempo.

- Para terminar, agradeço à coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior - CAPES pelo apoio financeiro durante a realização deste projeto.

Lista de símbolos

Neste trabalho utilizaremos com frequência as notações seguintes:

$\mathbb{N}$ conjunto dos números naturais.

$\mathbb{R}$ conjunto dos números reais.

$\mathbb{C}$ conjunto dos números complexos.

$\mathbb{K}$ conjunto dos números reais ou complexos.

X um espaço de Banach não trivial (ou seja, $\neq \{0\}$) sobre $\mathbb{K}$.

X' o espaço dual topológico de X.

$\|\cdot\|_X$ a norma considerada em X.

$\sigma(X, X')$ a topologia fraca em X.

$\mathcal{L}(X;Y)$ o espaço de Banach dos operadores limitados de X em Y, onde X e Y são espaços de Banach.

$KerT$ o núcleo do operador linear $T : X \to Y$, $KerT = \{x \in X : \ Tx = 0\}$.

ImT a imagem do operador linear $T : X \to Y$, $ImT = \{y \in Y : \ y = Tx$ para algum $x \in X\}$.

$\sim$ isomorfismo topológico.

$\sim^1$ isomorfismo isométrico.

$\mathbb{K}^n$ o espaço vetorial das n-tuplas $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de elementos em $\mathbb{K}$.

$\mathbb{K}_p^n (1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach $\mathbb{K}^n$ com a norma

$$\|(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p \right)^{1/p}.$$

$\ell_p(1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach das sequências $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ tais que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty$, sob a norma

$$\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty\right)^{1/p}.$$

ℓ_∞ o espaço de Banach das sequências limitadas em $\mathbb{K}$, sob a norma

$$\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_n |\lambda_n|.$$

c_0 o subespaço fechado de ℓ_∞ formado pelas sequências que convergem a zero, sob a norma $\|\cdot\|_\infty$.

c_{00} o subespaço de c_0 formado pelas sequências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \text{ existe} n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que} \lambda_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\}.$$

e_n o n-ésimo vetor unitário canônico de ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$.

$L_p[0,1](1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach das classes de equivalência $[\![f]\!]$ de funções Lebesgue mensuráveis de $[0,1]$ em $\mathbb{K}$ tais que $\int\limits_0^1 |f(t)|^p dt < \infty$, sob a norma

$$\|[\![f]\!]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

$C([a,b])$ o espaço de Banach das funções contínuas f definidas no intervalo $[a,b]$ com valores em $\mathbb{K}$, sob a norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

(x_n) a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

$span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ o subespaço vetorial gerado pela sequência (x_n).

$[x_n : n \in \mathbb{N}]$ o subespaço fechado gerado pela sequência (x_n), ou seja, o fecho do subespaço gerado pela sequência (x_n).

$x_n \to x$ a sequência $(x_n) \subset X$ converge a x em norma, também denotaremos por $\lim\limits_n x_n = x$, ou $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

id_X o operador identidade $id : X \to X$, $id(x) = x$ para todo $x \in X$.

$\hookrightarrow$ se M é um subespaço de X então $\imath$ é a imersão canônica $\imath : M \hookrightarrow X$, $\imath(x) = x$ para todo $x \in M$.

Introdução

Sejam X e Y espaços normados e M um subespaço de X. É importante saber quando um operador linear limitado de M em Y pode ser estendido (mantendo acontinuidade) ao espaço todo. Quando isto for possível, também é importante saber se isso pode ser feito sem aumentar a norma do operador. Este problema tem soluções parciais, a saber:

1. Quando Y é um espaço de Banach e M é um subespaço denso de X (veja o Teorema 1.1).

2. Quando Y é o corpo dos escalares o resultado é bem conhecido (Teorema de Hahn-Banach em espaços normados).

3. Quando X é um espaço de Banach e M é um subespaço complementado de X (veja o Teorema 2.4).

Em qualquer desses casos o problema anterior tem solucão, ou seja é possível fazer essa extensão sem aumentar a norma. Motivado pelo último caso, o problema relacionado com subespaços complementados está no coração da teoria dos espaços de Banach.

Em geral, quais subespaços fechados M de um espaço de Banach X são complementados? Este é um problema central da teoria de espaços de Banach e desempenha um papel chave no desenvolvimento da teoria de espaços de Banach. É um fato bem conhecido que todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é um subespaço complementado. Em geral, esta propriedade de subespaços de dimensão finita não permanece válida para subespaços de dimensão infinita. Por exemplo, em 1937 Murray [14] provou, pela primeira vez, que o espaço ℓ_p, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ admite subespaço não-complementado e Phillips [16] provou que o espaço c_0 não é complementado no espaço ℓ_∞. Em muitos casos, o fato de que um subespaço M não seja complementado num espaço de Banach X depende apenas das propriedades isomórficas de X e M. Por exemplo; nenhum subespaço reflexivo de dimensão infinita de $C[0,1]$ é complementado em $C[0,1]$ (veja [8]). Em quanto aos espaços L_p, um dos problemas centrais é classificar seus subespaços complementados a menos de isomorfismo. Para $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, há cinco exemplos “simples ”de subespaços complementados de $L_p[0,1]$, a saber; ℓ_p, ℓ_2, $\ell_p \oplus \ell_2$, $(\ell_2 \oplus \ell_2 \oplus \cdots)_p$ e o próprio $L_p[0,1]$ (veja [3]). Exibir um subespaço fechado não-complementado de um espaço de Banach, ou mesmo provar sua existencia, nunca é uma tarefa fácil.

Em 1960, Pelczynski [15] provou que todo subespaço complementado de dimensão infinita de um dos espaços c_0 ou ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$ é isomorfo a c_0 ou ℓ_p, respectivamente. Nesse mesmo artigo ele considerou o problema recíproco, provando que, se M é um subespaço de um dos espaços c_0, ou ℓ_2, ou ℓ_p, $(1 \leq p < \infty,\ p \neq 2)$ e M é isomorfo a um dos espaços c_0, ℓ_2, ou isometricamente isomorfo a ℓ_p, então M admite um complemento topológico. Ainda mais, ele também provou a existência de um subespaço complementado de $L_p[0,1]$ $1 < p < \infty$, que é isomorfo a ℓ_2. Sete anos mais tarde, Lindenstrauss [10] provou que, todo subespaço complementado de dimensão infinita de ℓ_∞ é isomorfo a ℓ_∞.

Durante muito tempo, um dos principais problemas abertos na teoria de espaços de Banach, o *problema de aproximação*, preguntava se cada espaço de Banach tem a propriedade de aproximação. Este foi finalmente resolvido pela negativa em 1973 por Per Enflo [7], que numa construção artificial encontrou um espaço de Banach reflexivo separável de dimensão infinita, que não tem a propriedade de aproximação. Havia uma crença generalizada de que quase todos os espaços de Banach, sem a propriedade de aproximação são construídos artificialmente. O primeiro espaço de Banach naturalmente definido sem a propriedade de aproximação foi dado por Szankowski [17], que provou que o espaço $\mathcal{L}(\ell_2; \ell_2)$ de operadores lineares contínuos em ℓ_2, não tem a propriedade de aproximação. A teoria de subespaços complementados também é útil para caracterizar espaços de Banach sem a propriedade de aproximação em uma maneira natural.

Nosso objetivo é fazer uma revisão do primeiro e terceiro resultado de Pelczynski [15] comentados acima, citar alguns problemas abertos relacionados com subespaços complementados e apresentar um exemplo natural de espaços de Banach sem a propriedade de aproximação devido a Dineen-Mujica [6]. Para isto foi necessário estudar os seguintes temas: subespaços complementados, base de Schauder, sequências básicas, existência de sequências básicas, o misterioso e elegante método de decomposição de Pelczynski, as funções de Rademacher e a desigualdade de Khintchine (dentre outros temas). Nesta dissertação foram usados alguns livros clássicos tais como: Carothers [4], Diestel [5], Lacey [9], Megginson [11], Botelho et al. [2] e as notas de espaços de Banach, Mujica [13].

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos alguns resultados fundamentais como pré-requisitos para uma melhor compreensão desta dissertação.

Resultados básicos sobre espaços de Banach

Teorema 1.1. Sejam X um espaço normado, Y um espaço de Banach e M um subespaço denso de X. Se $T \in \mathcal{L}(M; Y)$. Então existe uma única extensão linear contínua de T a X. Ainda mais, a norma da extensão coincide com a norma de T.

Demonstração. Veja [11], pág. 70. $\square$

Teorema 1.2. (Teorema de Hahn-Banach, forma analítica) Sejam X um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $p : X \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz

$$p(ax) = |a|p(x) \text{ para todo } a \in \mathbb{K} \text{ e todo } x \in X, \text{ e}$$
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ para quaisquer } x, y \in X.$$

Se $M \subset X$ é um subespaço vetorial e $\varphi : M \to \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$, então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{K}$ que estende φ a X e que satisfaz $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Veja [2], pág. 58. $\square$

Corolário 1.3. (Teorema de Hahn-Banach, em espaços normados) Seja M um subespaço de um espaço normado X sobre $\mathbb{K}$ e seja $\varphi : M \to \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : X \to \mathbb{K}$ cuja restrição a M coincide com φ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Demonstração. Veja [2], pág. 60. $\square$

Corolário 1.4. Sejam X um espaço normado e $0 \neq x_0 \in X$. Então existe $\varphi \in X'$ tal que $\varphi(x_0) = 1$ e $\|\varphi\| = \frac{1}{\|x_0\|}$.

Demonstração. Seja $M = span\{x_0\}$, defina $\phi : M \to \mathbb{K}$ por $\phi(\lambda x_0) = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $\phi \in M'$, $\phi(x_0) = 1$ e $\|\phi\| = \frac{1}{\|x_0\|}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\varphi \in X'$ tal que $\|\varphi\| = \|\phi\|$ e $\varphi(x) = \phi(x)$ para todo $x \in M$. Segue que $\|\varphi\| = \frac{1}{\|x_0\|}$ e $\varphi(x_0) = 1$. $\square$

Corolário 1.5. Seja X um espaço normado. Então X' separa pontos de X, isto é, se $x, y \in X$ e $x \neq y$, então existe $\varphi \in X'$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Demonstração. Sejam $x, y \in X$ e $x \neq y$ fixados. Então, pelo corolário anterior existe $\varphi \in X'$ tal que $\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y) = 1 \neq 0$. Portanto X' separa pontos de X. $\square$

Teorema 1.6. (Teorema da Aplicação aberta) Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo topológico.

Demonstração. Veja [2], pág. 42. $\square$

Corolário 1.7. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um espaço vetorial X tais que $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ são de Banach. Se existe $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ para todo $x \in X$, então as duas normas são equivalentes. Isto é, existe $a > 0$ tal que $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Veja [11], pág. 45. $\square$

Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. O gráfico de T é o conjunto

$$G(T) = \{(x, Tx) : \ x \in X\} \subset X \times Y$$

$G(T)$ é um subespaço vetorial de $X \times Y$.

Teorema 1.8. (Teorema do Gráfico Fechado) Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $X \times Y$.

Demonstração. Veja [2], pág. 45. $\square$

Definição 1.9. A topologia fraca no espaço normado X, denotada por $\sigma(X, X')$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in X'$.

A *topologia gerada por uma família de funções* é a menor topologia (respeito à inclusão $\subseteq$) que torna cada uma dessas funções contínuas. O leitor pouco acostumado com o conceito de topologia gerada por uma família de funções deve consultar qualquer livro de topologia geral.

Teorema 1.10. (Teorema de Mazur) Seja X um espaço normado e K um subconjunto convexo de X. Então o fecho de K na topologia da norma coincide com o fecho de K na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.

Demonstração. Veja [2], pág. 149. $\square$

Resultados básicos sobre espaços de Hilbert

Definição 1.11. Sejam X um espaço com produto interno e N um subconjunto de X. Denominamos o subconjunto

$$N^{\perp} = \{y \in X : \ \langle x, y\rangle = 0 \text{ para todo} x \in N\}$$

de complemento ortogonal de N.

Definição 1.12. Seja X um espaço com produto interno. Um conjunto $N \subset X$ é dito ortonormal se para todos $x, y \in N$,

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \neq y, \\ 1, & \text{se} \quad x = y. \end{cases}$$

Um conjunto ortonormal N tal que $N^{\perp} = \{0\}$ é chamado de sistema ortonormal completo.

Teorema 1.13. Seja $N = \{x_i : \ i \in I\}$ um conjunto ortonormal completo no espaço de Hilbert H. Então, para cada $x \in H$, $x = \sum\limits_{i \in I} \langle x, x_i\rangle x_i$.

Demonstração. Veja [2], pág. 119. □

Teorema 1.14. (Desigualdade de Bessel) Seja $N = \{x_i : \ i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert H. Então, para todo $x \in H$,

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

onde $J = \{i \in I : \ \langle x, x_i\rangle \neq 0\}$.

Demonstração. Veja [2], pág. 116. □

Teorema 1.15. Sejam H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado de H. Então cada $x \in H$ admite uma única representação na forma $x = p + q$ com $p \in M$ e $q \in M^{\perp}$. O vetor p é chamado de projeção ortogonal de x sobre M.

Demonstração. Veja [2], pág. 111. □

Teorema 1.16. (Teorema de Riesz-Fischer) Todo espaço de Hilbert separável de dimensão infinita é isometricamente isomorfo a ℓ_2.

Demonstração. Veja [2], pág. 124. □

Capítulo 2

Subespaços complementados

Aqui vamos trabalhar com espaços de Banach, embora muitos resultados sejam verdadeiros para espaços normados em geral.

Definição 2.1. Seja X um espaço de Banach. Um operador linear contínuo $P : X \to X$ é uma projeção se $P^2 := P \circ P = P$. É claro que se $P \neq 0$ é uma projeção, então $\|P\| \geq 1$.

Definição 2.2. Um subespaço Y de um espaço de Banach X é dito complementado em X se existe uma projeção P de X sobre Y.

Exemplo 2.3. (a) Se X é um espaço de Banach, por meio da projeção identidade e a projeção nula temos que X e $\{0\}$ são subespaços complementados de X.

(b) Todo subespaço de dimensão finita de um espaço de Banach é complementado (veja [2]. Exemplo 3.2.4, pág. 62).

(c) Todo subespaço fechado de um espaço de Hilbert é complementado, pois sempre é possível definir a projeção ortogonal sobre o subespaço fechado (veja o Teorema 1.15).

(d) Sejam X e Y espaços de Banach. Por meio da projeção $(x, y) \in X \times Y \to (x, 0) \in X \times Y$, vemos que $X \sim^1 X \times \{0\}$ é complementado em $X \times Y$.

Teorema 2.4. Seja Y um espaço vetorial normado, M um subespaço complementado do espaço de Banach X e $T \in \mathcal{L}(M; Y)$. Então existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X; Y)$ extensão de T a X.

Demonstração. Se P é uma projeção de X sobre M então $\tilde{T} := T \circ P \in \mathcal{L}(X; Y)$ e $\tilde{T}(x) = T(P(x)) = Tx$ para todo $x \in M$, pois $P(x) = x$ para todo $x \in M$. □

Proposição 2.5. Um subespaço M de um espaço de Banach X é complementado em X se e somente se, M é fechado e existe um subespaço fechado L de X tal que $X = M + L$ e $M \cap L = \{0\}$. Neste caso L é chamado de complemento topológico de M em X, e dizemos ainda que M e L são subespaços complementares de X.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja P a projeção de X sobre M. Para provar que M é fechado primeiro provaremos a seguinte igualdade $M = \{x \in X|\ Px = x\} = Ker(P - id)$. É claro que $\{x \in X|\ Px = x\} \subset ImP = M$. Seja $x \in M$. Tomando $y \in X$ tal que $Py = x$ resulta que $x = Py = P(Py) = Px$. Isto prova a igualdade. Como o operador $P - id$ é contínuo, segue-se que M é fechado.

Tome agora $L = KerP$. É claro que L é subespaço fechado de X. Para todo $x \in X$ vale que $(x - Px) \in L$ e $x = Px + (x - Px) \in M + L$. Se $x \in M \cap L$, temos $x = Px$ e $Px = 0$, resulta que $x = 0$. Isto prova o desejado.

($\Leftarrow$) Para cada $x \in X$ existem únicos $y \in M$ e $l \in L$ tais que $x = y + l$. É imediato que o operador $P : X \to X$ dado por $Px = y$ está bem definido, é linear, $P^2 = P$, $ImP = M$, $KerP = L$ e $M = Ker(P - id)$. Resta provar que P é contínuo. Para isto provaremos que seu gráfico é fechado. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que $x_n \to x$ e $P(x_n) \to z$. Para cada n, escreva $x_n = y_n + z_n$ com $y_n \in M$ e $z_n \in L$. Então $z_n = x_n - y_n = x_n - P(x_n) \to x - z$. Como L é fechado, $x - z \in L$, e portanto $Px = Pz$. Por outro lado, $y_n = P(x_n) \to z$. Como M é fechado, $z \in M$. Assim $z = Pz = Px$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado resulta que o operador linear P é contínuo, portanto M é subespaço complementado de X. $\square$

O recíproco da proposição anterior sugere a seguinte questão: Se M e N são subespaços fechados de um espaço normado X tal que $X = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$. Então a aplicação linear $P : X \to X$ tal que $P^2 = P$, $P(X) = M$ e $kerP = N$ deve ser contínua? Não necessariamente. Para isto vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.6. Considere $X = c_{00}$, $M = \{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00} :\ \lambda_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ e $N = \{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00} :\ \lambda_{2n-1} + n\lambda_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$. Provaremos que $c_{00} = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$. É claro que $M \cap N = \{0\}$. Para $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n = 0$ para todo $n > k$. Logo

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots) &= (\lambda_1 + \lambda_2, 0, \lambda_3 + 2\lambda_4, 0, \lambda_5 + 3\lambda_6, 0, \dots, \lambda_{k-1} + \frac{k}{2}\lambda_k, 0, \dots) \\ &\quad + (-\lambda_2, \lambda_2, -2\lambda_4, \lambda_4, -3\lambda_6, \lambda_6, \dots, -\frac{k}{2}\lambda_k, \lambda_k, 0, \dots)\end{aligned}$$

para k par e

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, 0, \dots) &= (\lambda_1 + \lambda_2, 0, \lambda_3 + 2\lambda_4, 0, \dots, \lambda_{k-2} + \frac{k-1}{2}\lambda_{k-1}, 0, \lambda_k, 0, \dots) \\ &\quad + (-\lambda_2, \lambda_2, -2\lambda_4, \lambda_4, \dots, -\frac{k-1}{2}\lambda_{k-1}, \lambda_{k-1}, 0, \dots)\end{aligned}$$

para k ímpar. Portanto $c_{00} = M + N$.
Como $T : (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00} \to (0, \lambda_2, 0, \lambda_4, \dots) \in c_{00}$ é contínuo, pois $\|T(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_{2n}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|\lambda_n| = \|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}$. Então $M = kerT$ é fechado. Para provar que N é fechado, seja $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \overline{N}$ então existe $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset N$ tal que $\lambda_n \to (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$, $n \to \infty$ em $\|\cdot\|_{\infty}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escrevamos $\lambda_n = (\lambda_j^n)_{j=1}^{\infty}$. Segue que $\lim_n \lambda_j^n = \alpha_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Como $\lambda_{2j-1}^n + j\lambda_{2j}^n = 0$ para todo $n, j \in \mathbb{N}$ então, fazendo $n \to \infty$ obtemos $\alpha_{2j-1} + j\alpha_{2j} = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Portanto $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in N$ e assim

N é fechado.
Vamos provar que não existe projeção de c_{00} sobre M com núcleo N. De fato, o operador

$$P : (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00} \to (\lambda_1 + \lambda_2, 0, \lambda_3 + 2\lambda_4, 0, \dots) \in c_{00}$$

verifica $P^2 = P$, $ImP = M$, $KerP = N$ e $Pe_{2n} = ne_{2n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, onde e_n $(n \in \mathbb{N})$ são os vetores unitarios canônicos em ℓ_∞. Logo P não é contínuo e portanto não é uma projeção.

Por outro lado, afirmamos que qualquer projeção de c_{00} sobre M com núcleo N deve coincidir com P. De fato, sejam Q uma projeção de c_{00} sobre M com núcleo N e $x \in c_{00}$. Então existem únicos $m \in M$ e $z \in N$ tais que $x = m + z$. Segue que

$$Qx = Q(m+z) = m = P(m+z) = Px.$$

Isto prova a afirmação. Mas, como P não é contínuo não pode existir tal projeção.

Segue da proposição anterior que todo subespaço complementado de um espaço de Banach é fechado. Não é sempre verdade que um subespaço fechado M de um espaço de Banach X possui complemento. Em outras palavras, o espaço M não precisa ter uma projeção bem definida nele mesmo. Em 1940, Phillips [16] provou que c_0 não é complementado em ℓ_∞.

O papel do Teorema do Gráfico Fechado na demonstração da Proposição 2.5 é essencial, e o fato de M e L serem fechados é necessário para sua utilização. A seguir apresentamos mais exemplos de subespaços complementados.

Exemplo 2.7. (a) Sejam $X = C([-a,a])$, $a > 0$, M e N os subespaços de X consistindo das funções pares e ímpares, respectivamente. É claro que $C([-a,a]) = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$ pois, para cada $f \in C([-a,a])$ tem-se

$$f(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)) \quad \text{para todo } \ t \in [-a,a]$$

onde a primeira expressão da parte direta é uma função par e a segunda expressão é uma função ímpar. Provaremos que M e N são fechados, primeiro vejamos que M é fechado. De fato, seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em M tal que $f_n \to f$ em norma. Então

$$f(-t) = \lim_n f_n(-t) = \lim_n f_n(t) = f(t) \quad \text{para todo } \ t \in [-a,a].$$

Segue que $f \in M$. De maneira análoga, prova-se que N é fechado. Portanto, a Proposição 2.5 garante que M e N são subespaços complementados de $C([-a,a])$.

(b) Sejam $X = \ell_\infty$, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, $M = \{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty : \ \lambda_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ e $N = \{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty : \lambda_{2n-1} + \alpha_n \lambda_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$. É claro que M, N são subespaços fechados de ℓ_∞ e $M \cap N = \{0\}$. Também, para cada $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ temos

$$(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2, 0, \lambda_3 + \alpha_2\lambda_4, 0, \lambda_5 + \alpha_3\lambda_6, 0, \dots) + (-\alpha_1\lambda_2, \lambda_2, -\alpha_2\lambda_4, \lambda_4, -\alpha_3\lambda_6, \lambda_6, \dots).$$

Portanto M e N são subespaços complementares de ℓ_∞.

Já sabemos que um subespaço não-fechado de um espaço de Banach não é complementado. Por exemplo, c_{00} não é complementado em c_0.

Proposição 2.8. Sejam X, Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ um isomorfismo topológico. Seja M um subespaço complementado de X. Então $T(M)$ é um subespaço complementado de Y. Ou seja, a noção de complementado é invariante sob isomorfismo topológico.

Demonstração. Seja M subespaço fechado de X e L seu complemento, então para cada $x \in X$ existem únicos $m \in M$ e $l \in L$ tais que $x = m + l$. Como T é um isomorfismo topológico, então $T(M)$ é um subespaço fechado de Y. Provaremos que $Y = T(M) + T(L)$ e $T(M) \cap T(L) = \{0\}$. De fato, vejamos a inclusão não trivial. Seja $y \in Y$ então existem $m \in M$ e $l \in L$ tais que $y = T(m + l) = Tm + Tl$, segue que $Y = T(M) + T(L)$. Por outro lado, se $y \in T(M) \cap T(L)$ então existe $m \in M$ e $l \in L$ tais que $Tm = y = Tl$, assim $m = l \in M \cap L$ e logo $m = l = 0$, pois $M \cap L = \{0\}$. Portanto $y = 0$. Isto prova que $T(M) \cap T(L) = \{0\}$. $\square$

Definição 2.9. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espaços de Banach com suas respectivas normas $\|\cdot\|_{X_1}, \|\cdot\|_{X_2}, \ldots, \|\cdot\|_{X_n}$. A soma $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ dos espaços $X_1, X_2, \ldots, X_n$, é o espaço de Banach $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ cuja norma é dada pela fórmula

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{X_j}^2 \right)^{1/2}.$$

É fácil verificar que esta função é de fato uma norma.

Os subindices que aparecem nas normas de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ na definição anterior, incluíram-se apenas por motivos de clareza, e serão normalmente omitidos quando não há nenhuma possibilidade de confusão.

Proposição 2.10. Seja X um espaço de Banach, suponha que existem $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ subespaços fechados de X tais que $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ e $Y_j \cap \sum\limits_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} Y_i = \{0\}$. Então $X \sim Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_n$.

Demonstração. Defina a aplicação $T : Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_n \to X$ por $T(y_1, y_2, \cdots, y_n) = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ para todo $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_n$. É claro que T está bem definido, é linear e sobrejetivo. Como as normas $\mathbb{K}_1^n$ e $\mathbb{K}_2^n$ são equivalentes então existe uma constante positiva c tal que

$$\|T(y_1, y_2, \cdots, y_n)\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|y_j\| \leq c \left(\sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^2 \right)^{1/2} = c\|(y_1, y_2, \cdots, y_n)\|$$

para todo $(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_n$. Assim, o operador T é limitado. Se $T(y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0$ então $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$, de modo que $-y_j = y_1 + y_2 + \cdots + y_{j-1} + y_{j+1} + \cdots + y_n \in Y_j \cap \sum\limits_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} Y_i$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Segue da hipótese que $y_j = 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, logo T é injetivo. Portanto, pelo Teorema da Aplicação Aberta (veja o Apêndice) T é um isomorfismo topológico. $\square$

Observação 2.11. (a) A Proposição 2.10 em geral não vale para espaços normados incompletos (veja [11], pág. 58, Ex. 1.84).

(b) Segue das Proposições 2.5 e 2.10 que, se M é um subespaço complementado de um espaço de Banach X, então M é fechado e existe L subespaço fechado de X tal que $X \sim M \oplus L$.

Observação 2.12. A menos de isomorfismo, não importa muito que norma assumimos em $X \oplus Y$. Por exemplo, se nós escrevemos $(X \oplus Y)_p$, $1 \leq p < \infty$, para denotar $X \oplus Y$ sob a norma $\|(x,y)\|_{\ell_p} = (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{1/p}$ ou $\|(x,y)\|_{\ell_\infty} = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$ no caso de $(X \oplus Y)_\infty$, então

$$X \oplus Y = (X \oplus Y)_2 \sim (X \oplus Y)_p \sim (X \oplus Y)_\infty.$$

Isto é uma consequência simples do fato que todas as normas sobre $\mathbb{R}^2$ são equivalentes. Como um exemplo particular, note que sob qualquer norma

$$\ell_p \oplus \ell_p \sim (\ell_p \oplus \ell_p)_p \sim^1 \ell_p.$$

Para provar a parte não trivial, isto é $(\ell_p \oplus \ell_p)_p \sim^1 \ell_p$ considere as aplicações

$$T : ((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty) \in (\ell_p \oplus \ell_p)_p \to (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots) \in \ell_p$$

e

$$A : (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p \to ((x_{2i-1})_{i=1}^\infty, (x_{2i})_{i=1}^\infty) \in (\ell_p \oplus \ell_p)_p.$$

É fácil verificar que $\|T((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty)\| = \|((x_i)_{i=1}^\infty, (y_i)_{i=1}^\infty)\|$ e $TA = id_{\ell_p}$. Portanto T é um isomorfismo isométrico.

Capítulo 3

Sequências básicas em espaços de Banach

Na Análise Funcional, as bases algébricas ou bases de Hamel dos espaços de Banach de dimensão infinita têm pouca utilidade pois, entre outros motivos, elas nunca são enumeráveis. O objetivo deste capítulo é estudar as sequências em espaços de Banach de tal forma que todos os elementos do espaço possam ser escritos exatamente como uma combinação linear infinita dos termos da sequência. Por isso nós desenvolvemos brevemente a noção de base de Schauder e estudamos essas bases em espaços clássicos de sequências.

Definição 3.1. Diremos que uma sequência $(x_j) \subset X$ é uma base de Schauder de X se cada x admite uma única representação como uma série

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \quad \text{com} \quad (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}.$$

A unicidade da representação também garante que os vetores de uma base de Schauder são linearmente independentes.

Exemplo 3.2. (a) Em dimensão finita as bases de Schauder coincidem com as bases algébricas.

(b) Cada sequência ortonormal completa em um espaço de Hilbert separável é uma base de Schauder (veja o Teorema 1.13).

(c) Os vetores unitários canônicos $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ $(n \in \mathbb{N})$ formam uma base de Schauder para c_0 e para ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.

Exemplo 3.3. Os vetores unitários canônicos e_n não formam uma base de Schauder para o espaço ℓ_∞, pois não existe uma sequência (λ_n) de escalares tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ converge na norma de ℓ_∞ para $(1, 1, 1, \dots)$.

Os funcionais coordenados

$$\phi_j : x \in X \to \lambda_j \in \mathbb{K}$$

e as aplicações

$$T_n : x \in X \to \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in X$$

são claramente lineares. A sequência (ϕ_j) também é chamada de sequência biortogonal associada à base $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ de X.

Teorema 3.4. Seja X um espaço de Banach com uma base de Schauder $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. Então existe $c \geq 1$ tal que

$$\|T_n x\| \leq c\|x\| \quad \text{e} \quad \|\phi_j x\| \|x_j\| \leq 2c\|x\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$.

Demonstração. Para cada $x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j \in X$ temos $\rho(x) = \sup_n \|T_n x\| < \infty$. Ainda mais, ρ é uma norma sobre X e

$$\rho(x) = \sup_n \|T_n x\| = \sup_n \|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\| \geq \|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j\| \quad \text{para todo} \;\; m \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \to \infty$ obtemos $\rho(x) \geq \|x\|$ para todo $x \in X$. Provaremos que ρ é uma norma equivalente a $\|\cdot\|$ em X. Pela desigualdade anterior e o Corolário 1.7 é suficiente provar que (X, ρ) é um espaço de Banach. De fato, seja (y_m) uma sequência de Cauchy em (X, ρ), $y_m = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(y_m) x_j$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Logo para cada $p, m, n \in \mathbb{N}$ e $p \geq 2$ tem-se

$$|\phi_p(y_m) - \phi_p(y_n)| \|x_p\| = \|\sum_{j=1}^{p} \phi_j(y_m - y_n) x_j - \sum_{j=1}^{p-1} \phi_j(y_m - y_n) x_j\| = \|(T_p - T_{p-1})(y_m - y_n)\| \leq 2\rho(y_m - y_n),$$

e

$$|\phi_1(y_m) - \phi_1(y_n)| \|x_1\| \leq \rho(y_m - y_n).$$

Portanto, para cada p, a sequência $(\phi_p(y_m))_{m=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$. Seja então, para cada $p \in \mathbb{N}$ $\lambda_p = \lim_{m \to \infty} \phi_p(y_m)$.

Agora bem, dado $\epsilon > 0$ existe m_0 tal que se $n > m \geq m_0$, tem-se $\rho(y_m - y_n) < \epsilon$. Segue que

$$\|T_k(y_m) - T_k(y_n)\| \leq \rho(y_m - y_n) < \epsilon \tag{3.1}$$

e para $p > k$

$$\|(T_p - T_k) y_m - \sum_{j=k+1}^{p} \phi_j(y_n) x_j\| = \|(T_p - T_k) y_m - (T_p - T_k) y_n\| \leq 2\rho(y_m - y_n) < 2\epsilon \tag{3.2}$$

sempre que $n > m \geq m_0$. Fazendo $n \to \infty$ em (3.1) obtemos

$$\|T_k(y_m) - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j\| \leq \epsilon \quad \text{para} \;\; m \geq m_0. \tag{3.3}$$

e fazendo $n \to \infty$ em (3.2) obtemos

$$\|(T_p - T_k)y_m - \sum_{j=k+1}^{p} \lambda_j x_j\| \leq 2\epsilon \quad \text{para} \quad m \geq m_0. \tag{3.4}$$

Ainda mais, como para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} \|T_k(y_m) - y_m\| = \lim_{k\to\infty} \|\sum_{j=k+1}^{\infty} \phi_j(y_m)x_j\| = 0$$

então existe k_0 tal que se $p > k \geq k_0$, tem-se $\|(T_p - T_k)y_m\| < \epsilon$. Disto e por (3.4) obtemos

$$\|\sum_{j=k+1}^{p} \lambda_j x_j\| < 3\epsilon \quad \text{sempre que} \quad p > k \geq k_0.$$

Como $(X, \|\cdot\|)$ é de Banach então a série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$ converge em $\|\cdot\|$ a um ponto $y \in X$. Pela unicidade da representação de y, $\lambda_j = \phi_j(y)$ e $T_k y = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$. Segue de (3.3) que

$$\rho(y_m - y) = \sup_k \|T_k(y_m) - T_k(y)\| \leq \epsilon \quad \text{para todo} \quad m \geq m_0.$$

Portanto $y_m \to y$ na norma ρ. Isto prova que (X, ρ) é completo. Assim, pelo Corolário 1.7 existe $c \geq 1$ tal que $\|x\| \leq \rho(x) \leq c\|x\|$ para todo $x \in X$. Segue-se que

$$\|T_n x\| \leq c\|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in X \quad \text{e } n \in \mathbb{N},$$

e

$$\|\phi_n(x)x_n\| = \|T_n x - T_{n-1}x\| \leq 2c\|x\| \quad \text{para todo} \quad x \in X \quad \text{e } n \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Uma consequência imediata deste teorema é que os funcionais coordenados ϕ_j são contínuos e as aplicações T_n são uniformemente limitadas. As aplicações T_n são chamadas de projeções canônicas. A constante

$$c = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \geq 1$$

é chamada de constante da base (x_j).

Exemplo 3.5. Seja $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base de Schauder canônica de um dos espaços c_0 ou ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$. Então a constante desta base é um. De fato, sejam $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$\|T_n(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|_p = \|T_n(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k)\|_p = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\|_p = (\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^p)^{1/p} \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^p)^{1/p} = \|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|_p.$$

Logo, $\|T_n\| \leq 1$. Como $T_n \neq 0$ é uma projeção então $\|T_n\| \geq 1$. Portanto $\|T_n\| = 1$.
Seja $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0$ então

$$\|T_n(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|_\infty = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\|_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} |\lambda_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k| = \|(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}\|_\infty.$$

Logo, $\|T_n\| = 1$. Em conclusão, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = 1$.

Definição 3.6. Seja X um espaço de Banach. Uma sequência (x_n) em X é dita sequência básica se (x_n) é uma base de Schauder do subespaço fechado $[x_n : n \in \mathbb{N}]$ gerado pela sequência (x_n).

Alguns livros chamam o teorema seguinte, como Teorema de Nikolskii (veja [9], pág. 103).

Teorema 3.7. (Nikolskii) Seja (x_i) uma sequência de vetores não nulos em um espaço de Banach X. Então (x_i) é uma sequência básica se, e somente se, existe $c \geq 1$ tal que

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \leq c \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \tag{3.5}$$

para toda sequência $(a_i) \subset \mathbb{K}$, $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \leq n$.

Demonstração. Sejam $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ as projeções canônicas da base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Dada uma sequência $(a_i) \subset \mathbb{K}$, se $n \geq m$, então

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| = \|T_m \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) \| \leq \|T_m\| \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq \sup_m \|T_m\| \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|.$$

Reciprocamente, suponha a validade de (3.5) com $c \geq 1$. Vejamos que os vetores $\{x_1, x_2, \dots\}$ são linearmente independentes. De fato, seja $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$, então

$$\|a_1 x_1\| \leq c \|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n\| = 0,$$

de onde resulta que $a_1 = 0$, pois $x_1 \neq 0$. Logo

$$\|a_2 x_2\| = \|a_1 x_1 + a_2 x_2\| \leq c \|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n\| = 0,$$

de onde resulta, da mesma forma, que $a_2 = 0$. Repetindo esse processo, concluímos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

Considere o subespaço $F = span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e, para cada n, o funcional linear

$$\varphi_n : F \to \mathbb{K}, \quad \varphi_n \left(\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \right) = a_n,$$

bem como o operador linear

$$T_n : F \to [x_n : n \in \mathbb{N}], \quad T_n \left(\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

admitindo tacitamente que $k \geq n$, pois caso contrário definimos $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 0$. Segue de (3.5) que $\|T_n x\| \leq c\|x\|$ e $|\varphi_n(x)| \|x_n\| \leq 2c\|x\|$ para todo $x \in F$ e $n \in \mathbb{N}$. Disso resulta a continuidade de T_n e φ_n. Como $\mathbb{K}$ e $[x_n : n \in \mathbb{N}]$ são espaços de Banach e F é denso em $[x_n : n \in \mathbb{N}]$. Então, pelo Teorema 1.1 existem únicas extensões lineares e contínuas de T_n e φ_n ao espaço $[x_n : n \in \mathbb{N}]$, denotadas por R_n e Φ_n, respectivamente. Além disso, $\|T_n\| = \|R_n\|$ e

$\|\varphi_n\|= \|\Phi_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Note ainda que, como $T_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x)x_j$ para todo $x \in F$, então

$$R_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x)x_j \quad \text{para todo} \quad x \in [x_n:\ n \in \mathbb{N}]. \tag{3.6}$$

Dados $x \in [x_n:\ n \in \mathbb{N}]$ e $\epsilon > 0$, podemos tomar $y = \sum_{j=1}^{m} a_jx_j \in F$ tal que $\|x - y\|< \epsilon$. Isto é posível pois F é denso em $[x_n:\ n \in \mathbb{N}]$. Dessa forma, para todo $n > m$ temos

$$\begin{aligned} \|x - R_n(x)\| &\leq \|x - y\|+\|y - R_n(y)\|+\|R_n(y) - R_n(x)\| \\ &\leq \|x - y\|+\|y - y\|+\|R_n\|\|x - y\|< (1 + c)\epsilon. \end{aligned}$$

Disso e de (3.6) concluímos que

$$x = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x)x_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(x)x_j.$$

Resta mostrar a unicidade da representação acima. É suficiente mostrar que se $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_jx_j = 0$ então $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha então $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_jx_j = 0$, e seja $\epsilon > 0$ dado. Escolhendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\|< \epsilon \leq c\epsilon \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_0,$$

de (3.5) segue que,

$$\|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\|\leq c\|\sum_{j=1}^{n_0} a_jx_j\|< c\epsilon \quad \text{sempre que} \quad n \leq n_0.$$

para cada n fixado,

$$|a_n|\|x_n\|= \|\sum_{j=1}^{n} a_jx_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_jx_j\|\leq 2c\epsilon.$$

Como $x_n \neq 0$, fazendo $\epsilon \to 0^+$ segue que $a_n = 0$. □

Exemplo 3.8. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X, então cada subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica.

Definição 3.9. Sejam X e Y espaços de Banach e suponha que (x_n) e (y_n) são bases de Schauder de X e Y, respectivamente. Diremos que (x_n) e (y_n) são bases equivalentes se existe um isomorfismo topológico $T : X \to Y$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.10. (Bessaga and Pelczynski [1]) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica em X e (x'_n) a sequência de funcionais coordenados associada à base (x_n) de $[x_n:\ n \in \mathbb{N}]$. Seja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x'_n\|\|x_n - y_n\|< 1. \tag{3.7}$$

Então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica equivalente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração. Se $F = [x_n : \ n \in \mathbb{N}]$, então $(x'_n) \subset F'$, mas pelo Teorema de Hahn-Banach podemos supor que $(x'_n) \subset X'$. Seja $T : X \to X$ definido por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)(x_n - y_n).$$

É claro que T é linear e pela equação (3.7) temos que

$$\|T\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \|x_n - y_n\| < 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Segue que T é contínuo. Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = (1 - \|T\|)^{-1},$$

então a série $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge em $\mathcal{L}(X;X)$. Como

$$(I - T)\left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I - T) = I - T^{n+1},$$

segue que

$$(I - T)\left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k\right)(I - T) = I.$$

Logo $I - T$ é invertível em $\mathcal{L}(X;X)$ e $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$ é contínuo. Além disso

$$(I - T)x_n = x_n - \sum_{k=1}^{\infty} x'_k(x_n)(x_k - y_k) = x_n - (x_n - y_n) = y_n.$$

Assim, $I - T : X \to X$ é um isomorfismo topológico e $(I - T)x_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, se $N = [y_n : \ n \in \mathbb{N}]$, então a restrição $(I - T)|_F$ é um isomorfismo topológico entre F e N. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de F, segue que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de N equivalente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. $\square$

O teorema seguinte é do mesmo tipo que o Teorema 3.10.

Teorema 3.11. (Bessaga and Pelczynski [1]) Seja (x_n) uma sequências básica no espaço de Banach X, seja (x'_n) a sequência de funcionais coordenados associada à base (x_n) de $[x_n : \ n \in \mathbb{N}]$. Suponha que exista uma projeção P de X sobre $[x_n : \ n \in \mathbb{N}]$. Se (y_n) é qualquer sequência em X tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|P\| \|x'_n\| \|x_n - y_n\| < 1, \tag{3.8}$$

então (y_n) é uma sequência básica equivalente a (x_n) e $[y_n : \ n \in \mathbb{N}]$ é complementado em X.

Demonstração. Escrevamos $F = [x_n : n \in \mathbb{N}]$ e $N = [y_n : n \in \mathbb{N}]$. Como $P(X) = F \neq \{0\}$ então $P \neq 0$ e $\|P\| \geq 1$. Segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x'_n\| \|x_n - y_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|P\| \|x'_n\| \|x_n - y_n\| < 1.$$

Pelo Teorema 3.10 (y_n) é uma sequência básica equivalente a (x_n). Provaremos que N é um subespaço complementado de X. De fato, como $Px \in F$ para todo $x \in X$, então $Px = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x'_n(Px)x_n$ para todo $x \in X$. Definamos o operador $T : X \to X$ por

$$Tx = x - Px + \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(Px)y_n \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

É claro que T é linear. Note ainda que $Tx = x + \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(Px)(y_n - x_n)$ para todo $x \in X$. Segue de (3.8) que

$$\|I - T\| = \|T - I\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|P\| \|x'_n\| \|x_n - y_n\| < 1.$$

Logo, procedendo como na demonstração do Teorema 3.10 podemos concluir que $T = I - (I - T)$ é invertível em $\mathcal{L}(X; X)$ e $T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - T)^n$ é contínuo. Assim, $T : X \to X$ é um isomorfismo topológico. Além disso

$$Tx_n = x_n - Px_n + \sum_{k=1}^{\infty} x'_k(Px_n)y_k = x_n - x_n + y_n = y_n \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Provaremos que $T(F) = N$. De fato, seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in F$. Então

$$T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \in N.$$

Assim, $T(F) \subset N$. Por outro lado, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \in N$ segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^{-1} y_n = T^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n) \in X.$$

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in F$ e $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Portanto $T(F) = N$. Finalmente, o operador $Q = TPT^{-1}$ é a projeção procurada, pois $Q : X \to X$ é contínuo, $Q(X) = N$ e verifica $Q^2 = TPT^{-1}TPT^{-1} = TP^2T^{-1} = TPT^{-1} = Q$. $\square$

Definição 3.12. Sejam $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência básica em X, $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ e $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathbb{N}$ com $p_i < p_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. A sequência com termo n-ésimo

$$y_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} a_i x_i \neq 0$$

é chamada uma sequência de blocos básicos de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$.

Proposição 3.13. Se $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X, então cada sequência de blocos de $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência básica.

Demonstração. Pelo Teorema 3.7 basta achar $c \geq 1$ tal que

$$\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k\| \leq c\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y_k\|,$$

ou seja

$$\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_i x_i\| \leq c\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_i x_i\|$$

para cada $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$, $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$. Como $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ é base de Schauder de X, esta desigualdade vale se c é a constante da base $(x_i)_{i=1}^{\infty}$. $\square$

O teorema seguinte também deve-se a Bessaga e Pelczynski.

Teorema 3.14. (Bessaga and Pelczynski [1]) Seja X um espaço de Banach, (x_n) uma base de Schauder para X, e (x'_n) a sequência de funcionais coordenados associada à base (x_n). Se (y_n) é uma sequência tal que $\inf\|y_n\| = \epsilon > 0$ e $\lim_{n\to\infty} x'_i(y_n) = 0$ para todo i, então existe uma subsequência de (y_n) equivalente a uma sequência de blocos de (x_n).

Demonstração. Seja c a constante da base (x_n), e seja $n_1 = 1$. Como $y_{n_1} = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(y_{n_1})x_i$, existe $q_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\sum_{i=q_1+1}^{\infty} x'_i(y_{n_1})x_i\| < \frac{\epsilon}{4c2^3}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x'_i(y_n) = 0$ para cada i, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > 1$ tal que

$$\|\sum_{i=1}^{q_1} x'_i(y_{n_2})x_i\| < \frac{\epsilon}{4c2^4}.$$

Como $y_{n_2} = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(y_{n_2})x_i$, existe $q_2 \in \mathbb{N}$, $q_2 > q_1$ tal que

$$\|\sum_{i=q_2+1}^{\infty} x'_i(y_{n_2})x_i\| < \frac{\epsilon}{4c2^4}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} x'_i(y_n) = 0$ para cada i, existe $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 > n_2$ tal que

$$\|\sum_{i=1}^{q_2} x'_i(y_{n_3})x_i\| < \frac{\epsilon}{4c2^5}.$$

Procedendo por indução obtemos sequências estritamente crescentes $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\mathbb{N}$ tais que

$$\|\sum_{i=q_k+1}^{\infty} x'_i(y_{n_k})x_i\| < \frac{\epsilon}{4c2^{k+2}}$$

e

$$\|\sum_{i=1}^{q_k} x_i'(y_{n_{k+1}})x_i\| < \frac{\epsilon}{4c2^{k+3}}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Seja $q_0 = 0$ e seja (z_k) a sequência definida por

$$z_k = \sum_{i=q_{k-1}+1}^{q_k} x_i'(y_{n_k})x_i$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim (z_k) é uma sequência de blocos de (x_i). Pela Proposição 3.13 (z_k) é uma sequência básica em X e

$$\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\| \leq c\|\sum_{k=1}^{m} \lambda_k z_k\|$$

para cada $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ e $n < m$ em $\mathbb{N}$. Seja (φ_k) a sequência de funcionais coordenados associado a (z_k). Como

$$\begin{aligned}\epsilon \leq \|y_{n_k}\| &= \|\sum_{i=1}^{q_{k-1}} x_i'(y_{n_k})x_i + \sum_{i=q_{k-1}+1}^{q_k} x_i'(y_{n_k})x_i + \sum_{i=q_k+1}^{\infty} x_i'(y_{n_k})x_i\| \\ &< \frac{\epsilon}{4c2^{k+2}} + \|z_k\| + \frac{\epsilon}{4c2^{k+2}} < \|z_k\| + \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

para cada $k > 1$. E também

$$\begin{aligned}\epsilon \leq \|y_{n_1}\| &= \|\sum_{i=1}^{q_1} x_i'(y_{n_1})x_i + \sum_{i=q_1+1}^{\infty} x_i'(y_{n_1})x_i\| \\ &< \|z_1\| + \frac{\epsilon}{4c2^3} < \|z_1\| + \frac{\epsilon}{2},\end{aligned}$$

vemos que $\|z_k\| > \frac{\epsilon}{2}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, e daí segue que $\|\varphi_k\| \leq \frac{4c}{\epsilon}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, pois pelo Teorema 3.4 $\frac{\epsilon}{2}|\varphi_k(x)| < |\varphi_k(x)|\|z_k\| \leq 2c\|x\|$. Logo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\|\varphi_k\|\|y_{n_k} - z_k\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4c}{\epsilon}\|\sum_{i=1}^{q_{k-1}} x_i'(y_{n_k})x_i + \sum_{i=q_k+1}^{\infty} x_i'(y_{n_k})x_i\| \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4c}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon}{4c2^{k+2}} + \frac{\epsilon}{4c2^{k+2}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.10 (y_{n_k}) é uma sequência básica em X equivalente a (z_k). $\square$

Capítulo 4

Método de decomposição de Pelczynski

Descreveremos um elegante e misterioso método de decomposição que será util para a demonstração da caracterização de Pelczynski dos subespaços complementados de ℓ_p e c_0. Antes que possamos descrever o método, vamos precisar de alguns fatos preliminares.

ℓ_p-somas e c_0-somas

Definição 4.1. Dada uma sequência de espaços de Banach $X_1, X_2, \dots$, com suas respectivas normas $\|\cdot\|_{X_1}, \|\cdot\|_{X_2}, \dots$, definimos a ℓ_p-soma de $X_1, X_2, \dots$, denotada por $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p$, como o espaço normado

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} :\ x_n \in X_n \text{ e } (\|x_n\|_{X_n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_p\},$$

cuja função norma está dada pela fórmula

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup\limits_n \|x_n\|_{X_n}, & p = \infty. \end{cases}$$

De forma análoga definimos a c_0-soma de $X_1, X_2, \dots$. Neste caso

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} :\ x_n \in X_n \text{ e } (\|x_n\|_{X_n})_{n=1}^{\infty} \in c_0\},$$

com a norma

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_0 = \sup_n \|x_n\|_{X_n}.$$

Não é dificíl verificar que de fato $\|\cdot\|_{\ell_p}$ e $\|\cdot\|_0$ são normas.

Observação 4.2. Deve ser observado que a ordem dos factores em uma ℓ_p-soma ou c_0-soma não importa, isto é, se $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é qualquer permutação e $1 \leq p \leq \infty$ ou $p = 0$. Então

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p \sim^1 (X_{\sigma(1)} \oplus X_{\sigma(2)} \oplus \cdots)_p.$$

Não é difícil verificar que a aplicação

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p \to (x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty} \in (X_{\sigma(1)} \oplus X_{\sigma(2)} \oplus \cdots)_p$$

é um isomorfismo isométrico.

Proposição 4.3. Os espaços $((X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_0, \|\cdot\|_0)$ e $\Big((X_1 \oplus X_2 \oplus \dots)_p, \|\cdot\|_{\ell_p}\Big)$, $1 \leq p \leq \infty$, são espaços de Banach.

Demonstração. A demonstração é muito parecida com a prova de que ℓ_p e c_0 são espaços de Banach. Provaremos que $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p$ é de Banach para $1 \leq p < \infty$. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p$, para cada $n \in \mathbb{N}$ escrevamos $x_n = (x_{nj})_{j=1}^{\infty} \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\|_{\ell_p} < \epsilon$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq n_0$. Ou seja

$$\begin{aligned} \epsilon > \|x_n - x_m\|_{\ell_p} = \|(x_{nj} - x_{mj})_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{nj} - x_{mj}\|_{X_j}^p \right)^{1/p} \\ &\geq \|x_{nj} - x_{mj}\|_{X_j}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ e $n, m \geq n_0$. Então a sequência $(x_{nj})_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em X_j para cada $j \in \mathbb{N}$. Portanto, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in X_j$ tal que $x_{nj} \to x_j$ em X_j. Seja $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$. Provaremos que $x \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p$ e $x_n \to x$ em $\|\cdot\|_{\ell_p}$. De fato, segue de (4.1) que $\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_{nj} - x_{mj}\|_{X_j}^p\right)^{1/p} < \epsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então fazendo $m \to \infty$ e depois $k \to \infty$ obtemos $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{nj} - x_j\|_{X_j}^p\right)^{1/p} \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Ou seja, para $n \geq n_0$ temos,

$$\|x_n - x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_{nj} - x_j\|_{X_j}^p \right)^{1/p} \leq \epsilon.$$

Segue que, para $n \geq n_0$, $x_n - x \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p$. Então $x = x - x_n + x_n \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_p$ e $x_n \to x$ em $\|\cdot\|_{\ell_p}$. ☐

A seguinte proposição exibe algumas propriedades que tem as ℓ_p-somas e c_0-somas. Para sua demonstração vamos precisar dos seguintes lemas.

Lema 4.4. Existe uma sequência $(N_j)_{j=1}^{\infty}$ de subconjuntos infinitos de números naturais estritamente crescente e disjuntos tais que

$$\mathbb{N} = \cup_{j=1}^{\infty} N_j.$$

Demonstração. Como motivação escrevamos

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 3, 5, \dots\} \cup \{2, 4, 6, \dots\} = \{1, 3, 5, \dots\} \cup 2\{1, 2, 3, 4, \dots\} \\ &= \{1, 3, 5, \dots\} \cup 2\{1, 3, 5, \dots\} \cup 2\{2, 4, 6, \dots\} \\ &= \{1, 3, 5, \dots\} \cup 2\{1, 3, 5, \dots\} \cup 2^2\{1, 2, 3, 4, \dots\} = \cdots \end{aligned}$$

Sendo assim, para cada $j \in \mathbb{N}$ tomemos $N_j = 2^{j-1}\{1,3,5,\dots\} = \{2^{j-1}q : \ q \text{ ímpar}\}$. Primeiro provaremos que $\mathbb{N} = \cup_{j=1}^{\infty} N_j$. De fato, para provar a inclusão não trivial, seja $n \in \mathbb{N}$. Então ou $n = 2k-1$ ou $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $n = 2k-1$ então $n \in N_1$, caso contrário

$$n = 2k = 2^i q \quad \text{para alguns } \ i \in \mathbb{N} \text{ e } q \text{ ímpar.}$$

Segue que $n \in N_{i+1}$. Agora provaremos que $N_i \cap N_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$. De fato, suponha que existem i, j com $i > j$ tal que $N_i \cap N_j \neq \emptyset$. Seja $m \in N_i \cap N_j$ então existem q_1, q_2 ímpares tais que $2^{j-1}q_1 = m = 2^{i-1}q_2$, segue-se que $q_1 = 2^{i-j}q_2$ é par. Absurdo! Portanto $N_i \cap N_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$. $\square$

Note que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\pi_j : n \in \mathbb{N} \to 2^{j-1}(2n-1) \in N_j$ é uma bijeção crescente e $\mathbb{N} = \cup_{j=1}^{\infty} \pi_j(\mathbb{N})$. Ainda mais, para $n \in \mathbb{N}$ fixo $\pi_j(n) < \pi_{j+1}(n)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Note também que, para $n \in \mathbb{N}$ fixado existe um único $j \in \mathbb{N}$ tal que $n \in \pi_j(\mathbb{N})$, como π_j é injetiva existe um único $i \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_j(i) = n$.

Lema 4.5. Sejam a, b números reais não negativos. Se $p \geq 1$ então $a^p + b^p \leq (a+b)^p$.

Demonstração. Escreva $(a,b) = (a,0) + (0,b)$ em $\mathbb{R}^2$. Usando a desigualdade de Minkowski obtemos $\|(a,b)\|_p \leq \|(a,0)\|_p + \|(0,b)\|_p$, ou seja, $(a^p + b^p)^{1/p} \leq a + b$. Segue $(a^p + b^p) \leq (a+b)^p$. $\square$

Proposição 4.6. Sejam X e Y espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então

1. (a) $(\ell_p \oplus \ell_p \oplus \cdots)_p \sim^1 \ell_p$.
   (b) $(c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0 \sim^1 c_0$.
2. (a) $((X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y) \oplus \cdots)_p \sim (X \oplus X \oplus \cdots)_p \oplus (Y \oplus Y \oplus \cdots)_p$.
   (b) $((X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y) \oplus \cdots)_0 \sim (X \oplus X \oplus \cdots)_0 \oplus (Y \oplus Y \oplus \cdots)_0$.
3. Se $X \sim Y$ então
   (a) $(X \oplus X \oplus \cdots)_p \sim (Y \oplus Y \oplus \cdots)_p$.
   (b) $(X \oplus X \oplus \cdots)_0 \sim (Y \oplus Y \oplus \cdots)_0$.
4. (a) $(X \oplus X \oplus \cdots)_p \oplus X \sim (X \oplus X \oplus \cdots)_p$.
   (b) $(X \oplus X \oplus \cdots)_0 \oplus X \sim (X \oplus X \oplus \cdots)_0$.

Demonstração.

- (1a) Defina a aplicação

$$T : (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p \to ((x_{\pi_1(i)})_{i=1}^{\infty}, (x_{\pi_2(i)})_{i=1}^{\infty}, \dots) \in (\ell_p \oplus \ell_p \oplus \cdots)_p.$$

É imediato que T está bem definida e é linear, provaremos que T é um isomorfismo isométrico. Seja $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$, então

$$
\begin{aligned}
\|T(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\ell_p} &= \|((x_{\pi_1(i)})_{i=1}^{\infty}, (x_{\pi_2(i)})_{i=1}^{\infty}, \dots)\|_{\ell_p} \\
&= \left(\|(x_{\pi_1(i)})_{i=1}^{\infty}\|_p^p + \|(x_{\pi_2(i)})_{i=1}^{\infty}\|_p^p + \dots\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_{\pi_1(i)}|^p + \sum_{i=1}^{\infty}|x_{\pi_2(i)}|^p + \dots\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{1/p} = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_p.
\end{aligned}
$$

Agora vejamos que T é sobrejetiva. De fato, seja $((x_{i1})_{i=1}^{\infty}, (x_{i2})_{i=1}^{\infty}, \dots) \in (\ell_p \oplus \ell_p \oplus \cdots)_p$. Então $(\|(x_{i1})_{i=1}^{\infty}\|_p, \|(x_{i2})_{i=1}^{\infty}\|_p, \dots) \in \ell_p$ e por sua vez

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|x_{ij}|^p = \sum_{j=1}^{\infty}\|(x_{ij})_{i=1}^{\infty}\|_p^p < \infty.$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem únicos $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $\pi_j(i) = n$. Então definamos a sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ por $y_n = x_{ij}$ onde $\pi_j(i) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|x_{ij}|^p < \infty$$

e portanto $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$. Por outro lado, notemos que $y_{\pi_k(n)} = x_{ij}$ onde $\pi_j(i) = \pi_k(n)$. É consequência imediata que $j = k$ pois, em caso contrario teríamos $\pi_j(i) \neq \pi_k(n)$. Assim, segue da injetividade que $i = n$. Em resumo, para cada $k, n \in \mathbb{N}$ temos $y_{\pi_k(n)} = x_{nk}$. Logo

$$T(y_i)_{i=1}^{\infty} = ((y_{\pi_1(i)})_{i=1}^{\infty}, (y_{\pi_2(i)})_{i=1}^{\infty}, \dots) = ((x_{i1})_{i=1}^{\infty}, (x_{i2})_{i=1}^{\infty}, \dots).$$

Portanto $(\ell_p \oplus \ell_p \oplus \cdots)_p \sim^1 \ell_p$.

- (1b) Defina a aplicação

$$T : (x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0 \to ((x_{\pi_1(i)})_{i=1}^{\infty}, (x_{\pi_2(i)})_{i=1}^{\infty}, \dots) \in (c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$$

e vejamos que está bem definida. É claro que, para cada $j \in \mathbb{N}$ $(x_{\pi_j(i)})_{i=1}^{\infty} \in c_0$. Resta provar que $\lim_{j\to\infty}\|(x_{\pi_j(i)})_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} = 0$. De fato, dado $\epsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_i| < \epsilon$ para todo $i \geq i_0$, seja $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j_0-1} \geq i_0$. Se $j \geq j_0$ então $2^{j-1} > i_0$. Segue que $\pi_j(i) > \pi_j(1) = 2^{j-1} > i_0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $j \geq j_0$. Assim $|x_{\pi_j(i)}| < \epsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $j \geq j_0$. Portanto

$$\lim_{j\to\infty}\|(x_{\pi_j(i)})_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} = \lim_{j\to\infty}\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_{\pi_j(i)}| = 0.$$

É imediato que T é linear, provaremos que T é um isomorfismo isométrico. Seja $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0$, então

$$\begin{aligned}
\|T(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_0 &= \|((x_{\pi_1(i)})_{i=1}^{\infty}, (x_{\pi_2(i)})_{i=1}^{\infty}, \dots)\|_0 \\
&= \sup\{\|(x_{\pi_1(i)})_{i=1}^{\infty}\|_{\infty}, \|(x_{\pi_2(i)})_{i=1}^{\infty}\|_{\infty}, \dots\} \\
&= \sup\left\{\sup_{i\in\mathbb{N}}|x_{\pi_1(i)}|, \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_{\pi_2(i)}|, \dots\right\} = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i| = \|(x_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Vejamos que T é uma aplicação sobrejetiva. De fato, se $((x_{i1})_{i=1}^{\infty}, (x_{i2})_{i=1}^{\infty}, \dots) \in (c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0$, então para cada $j \in \mathbb{N}$ tem-se que $\lim_{i\to\infty} x_{ij} = 0$ e

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_{ij}| = \lim_{j\to\infty}\|(x_{ij})_{i=1}^{\infty}\|_{\infty} = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{ij}| < \epsilon \ \text{ para todo } \ j \geq j_0 \text{ e todo } \ i \in \mathbb{N}.$$

Em particular $|x_{ij}| < \epsilon$ para todo $i, j \geq j_0$. Portanto $\lim_{i,j\to\infty} x_{ij} = 0$. Por outro lado, definamos a sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ por $y_n = x_{ij}$ onde $\pi_j(i) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $y_n \to 0$ quando $n \to \infty$. De fato, note que

$$y_{2n-1} = y_{\pi_1(n)} = x_{n1} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

e

$$y_{2n} = y_{2^{j_n-1}(2i_n-1)} = y_{\pi_{j_n}(i_n)} = x_{i_n j_n} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Portanto $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ e $T(y_i)_{i=1}^{\infty} = ((x_{i1})_{i=1}^{\infty}, (x_{i2})_{i=1}^{\infty}, \dots)$. Assim $(c_0 \oplus c_0 \oplus \cdots)_0 \sim^1 c_0$.

- (2a) Considere os operadores lineares
$T : \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty} \in ((X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y) \oplus \cdots)_p \to (\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{y_i\}_{i=1}^{\infty}) \in (X \oplus X \oplus \cdots)_p \oplus (Y \oplus Y \oplus \cdots)_p$
e
$A : (\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{y_i\}_{i=1}^{\infty}) \in (X \oplus X \oplus \cdots)_p \oplus (Y \oplus Y \oplus \cdots)_p \to \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty} \in ((X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y) \oplus \cdots)_p$

onde $x_i \in X, y_i \in Y$ para todo $i \in \mathbb{N}$. É claro que $TA = id_{(X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus(Y\oplus Y\oplus\cdots)_p}$ e $AT = id_{((X\oplus Y)\oplus(X\oplus Y)\oplus\cdots)_p}$. Vejamos que ambos operadores são contínuos, para isto lembremos que as normas $\|\cdot\|_p$ são equivalentes em $\mathbb{K}^2$. Usando o Lema 4.5 temos que

$$
\begin{aligned}
&\|T\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty\| = \|(\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty)\| = (\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^2 + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^2)^{1/2}\\
&\leq c_p(\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^p + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^p)^{1/p} = c_p\left(\sum_{i=1}^\infty(\|x_i\|^p + \|y_i\|^p)\right)^{1/p}\\
&\leq c_p\left(\sum_{i=1}^\infty(\|x_i\| + \|y_i\|)^p\right)^{1/p} \leq c_p\left(\sum_{i=1}^\infty(k(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2)^{1/2})^p\right)^{1/p}\\
&= c_pk\left(\sum_{i=1}^\infty(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2)^{p/2}\right)^{1/p} = c_pk\left(\sum_{i=1}^\infty\|(x_i,y_i)\|_{X\oplus Y}^p\right)^{1/p}\\
&= C_p\|\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}, \quad C_p = c_pk
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\|A(\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty)\|_{\ell_p} = \|\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty\|_{\ell_p} = \left(\sum_{i=1}^\infty\|(x_i,y_i)\|_{X\oplus Y}^p\right)^{1/p}\\
&= \left(\sum_{i=1}^\infty(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2)^{p/2}\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty(c_p(\|x_i\|^p + \|y_i\|^p)^{1/p})^p\right)^{1/p}\\
&= c_p\left(\sum_{i=1}^\infty(\|x_i\|^p + \|y_i\|^p)\right)^{1/p} = c_p\left(\sum_{i=1}^\infty\|x_i\|^p + \sum_{i=1}^\infty\|y_i\|^p\right)^{1/p}\\
&= c_p\left(\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^p + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^p\right)^{1/p} \leq c_p(\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p} + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p})\\
&\leq c_p(k(\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^2 + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}^2)^{1/2})\\
&= C_p\|(\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty)\|_{(X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus(Y\oplus Y\oplus\cdots)_p}, \quad C_p = c_pk.
\end{aligned}
$$

Portanto, $((X\oplus Y)\oplus(X\oplus Y)\oplus\cdots)_p \sim (X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus(Y\oplus Y\oplus\cdots)_p$.

- (2b) Considere os operadores lineares
  $T:\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty \in ((X\oplus Y)\oplus(X\oplus Y)\oplus\cdots)_0 \to (\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty) \in (X\oplus X\oplus\cdots)_0\oplus(Y\oplus Y\oplus\cdots)_0$
  e
  $A:(\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty) \in (X\oplus X\oplus\cdots)_0\oplus(Y\oplus Y\oplus\cdots)_0 \to \{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty \in ((X\oplus Y)\oplus(X\oplus Y)\oplus\cdots)_0$
  onde $x_i\in X, y_i\in Y$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Logo

$$
\begin{aligned}
&\|T\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty\| = (\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_0^2 + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_0^2)^{1/2}\\
&\leq \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_0 + \|(y_i)_{i=1}^\infty\|_0 = \sup_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\| + \sup_{i\in\mathbb{N}}\|y_i\| \leq 2\sup_{i\in\mathbb{N}}(\|x_i\| + \|y_i\|)\\
&\leq 2c\sup_{i\in\mathbb{N}}(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2)^{1/2} = 2c\sup_{i\in\mathbb{N}}\|(x_i,y_i)\|_{X\oplus Y}\\
&= 2c\|\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^\infty\|_0
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}\|A(\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty)\|_0 &= \sup_{i\in\mathbb{N}}\|(x_i,y_i)\|_{X\oplus Y} = \sup_{i\in\mathbb{N}}(\|x_i\|^2+\|y_i\|^2)^{1/2}\\ &\leq \sup_{i\in\mathbb{N}}(\|x_i\|+\|y_i\|) \leq \sup_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\|+\sup_{i\in\mathbb{N}}\|y_i\|\\ &= \|(x_i)_{i=1}^\infty\|_0+\|(y_i)_{i=1}^\infty\|_0 \leq c(\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_0^2+\|(y_i)_{i=1}^\infty\|_0^2)^{1/2}\\ &= c\|(\{x_i\}_{i=1}^\infty,\{y_i\}_{i=1}^\infty)\|.\end{aligned}$$

Portanto, $((X\oplus Y)\oplus(X\oplus Y)\oplus\cdots)_0 \sim (X\oplus X\oplus\cdots)_0\oplus(Y\oplus Y\oplus\cdots)_o$.

- Seja $T_0 : X \to Y$ um isomorfismo topológico. Então existem constantes positivas c_1, c_2 tais que $c_1\|x\|\leq \|T_0x\|\leq c_2\|x\|$ para todo $x\in X$.

  (3a) Defina
  $$T:(X\oplus X\oplus\cdots)_p \to (Y\oplus Y\oplus\cdots)_p,\quad T(x_i)_{i=1}^\infty = (T_0x_i)_{i=1}^\infty$$
  para todo $(x_i)_{i=1}^\infty \in (X\oplus X\oplus\cdots)_p$. Como $c_1\|x_i\|\leq \|T_0x_i\|\leq c_2\|x_i\|$ para todo $i\in\mathbb{N}$, então $c_1^p\sum_{i=1}^\infty\|x_i\|^p\leq \sum_{i=1}^\infty\|T_0x_i\|^p\leq c_2^p\sum_{i=1}^\infty\|x_i\|^p$. Segue-se que
  $$c_1\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}\leq \|(T_0x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}\leq c_2\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_{\ell_p}\ \text{ para todo }\ (x_i)_{i=1}^\infty.$$
  É claro que T é sobrejetiva, pois T_0 é sobrejetivo. Portanto T é um isomorfismo topológico.

- (3b) Defina
  $$T:(X\oplus X\oplus\cdots)_0 \to (Y\oplus Y\oplus\cdots)_0,\quad T(x_i)_{i=1}^\infty = (T_0x_i)_{i=1}^\infty$$
  para todo $(x_i)_{i=1}^\infty \in (X\oplus X\oplus\cdots)_0$. Como $c_1\|x_i\|\leq \|T_0x_i\|\leq c_2\|x_i\|$ para todo $i\in\mathbb{N}$, então $c_1\sup_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\|\leq \sup_{i\in\mathbb{N}}\|T_0x_i\|\leq c_2\sup_{i\in\mathbb{N}}\|x_i\|$. Segue-se que
  $$c_1\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_0\leq \|(T_0x_i)_{i=1}^\infty\|_0\leq c_2\|(x_i)_{i=1}^\infty\|_0\ \text{ para todo }\ (x_i)_{i=1}^\infty.$$
  É claro que T é sobrejetiva, pois T_0 é sobrejetivo. Portanto T é um isomorfismo topológico.

- Para a demonstração de (4a) e (4b), considere $1\leq p<\infty$ e $p=0$, respectivamente, e as aplicaçoes
  $$T:((x_i)_{i=1}^\infty,x)\in(X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus X \to (x,x_1,x_2,\dots)\in(X\oplus X\oplus\cdots)_p,$$
  $$A:(x_i)_{i=1}^\infty\in(X\oplus X\oplus\cdots)_p \to ((x_{i+1})_{i=1}^\infty,x_1)\in(X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus X.$$
  É imediato que T e A são contínuas e
  $$TA = id_{(X\oplus X\oplus\cdots)_p},\quad AT = id_{(X\oplus X\oplus\cdots)_p\oplus X}.$$

□

Já temos a ferramenta para descrever nosso método.

Teorema 4.7. Seja X um dos espaços c_0 ou ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Seja M um subespaço complementado de X tal que existe W subespaço complementado de M e isomorfo a X. Então M é isomorfo a X.

Demonstração. Segue da hipóteses e da Observação 2.11(b) que existem N e L espaços de Banach tais que
i) $X \sim N \oplus M$ *ii)* $M \sim W \oplus L$ *iii)* $X \sim W$.
É imediato que $M \sim X \oplus L$. Para simplificar a notação vamos considerar $X = \ell_p$, a prova para $X = c_0$ é identica. Sendo assim, temos

$$\ell_p \oplus M \sim \ell_p \oplus (\ell_p \oplus L) \sim (\ell_p \oplus \ell_p) \oplus L \sim \ell_p \oplus L \sim M.$$

Fazendo uso da Proposição 4.6 obtemos,

$$\begin{aligned}
\ell_p \oplus M &\sim (\ell_p \oplus \ell_p \oplus \cdots)_p \oplus M && \text{por (1a)}\\
&\sim ((N \oplus M) \oplus (N \oplus M) \oplus \cdots)_p \oplus M && \text{por } (i) \text{ e (3a)}\\
&\sim (N \oplus N \oplus \cdots)_p \oplus (M \oplus M \oplus \cdots)_p \oplus M && \text{por (2a)}\\
&\sim (N \oplus N \oplus \cdots)_p \oplus (M \oplus M \oplus \cdots)_p && \text{por (4a)}\\
&\sim ((N \oplus M) \oplus (N \oplus M) \oplus \cdots)_p && \text{por (2a)}\\
&\sim (\ell_p \oplus \ell_p \oplus \cdots)_p && \text{por } (i) \text{ e (3a)}\\
&\sim \ell_p.
\end{aligned}$$

Segue que $M \sim \ell_p \oplus M \sim \ell_p$. Isto prova o desejado. □

O método da demonstração do Teorema 4.7 é conhecido como *Método de decomposição de Pelczynski.*

Capítulo 5

Subespaços complementados dos espaços ℓ_p e c_0

Neste capítulo, apresentamos a caracterização de Pelczynski [15] dos subespaços complementados de ℓ_p e c_0.

Teorema 5.1. (Pelczynski [15], 1960) Seja $1 \leq p < \infty$, e seja (e_i) a base de Schauder canônica de ℓ_p. Seja (z_m) uma sequência de blocos de (e_i). Então

(a) O subespaço fechado $N = [z_m : \ m \in \mathbb{N}]$ é isometricamente isomorfo a ℓ_p.

(b) N é complementado em ℓ_p.

Demonstração. Por hipótese cada z_m pode ser escrito na forma

$$z_m = \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} a_i e_i$$

onde $(a_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ e $0 = p_0 < p_1 < \dots$ Pela Proposição 3.13 (z_m) é uma sequência básica em ℓ_p. É claro que

$$\|z_m\| = \|\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} a_i e_i\| = \left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} |a_i|^p \right)^{1/p},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\sum_{m=1}^{k} \lambda_m z_m\|_p = \|\sum_{m=1}^{k} \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} \lambda_m a_i e_i\|_p &= \left(\sum_{m=1}^{k} \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} |\lambda_m a_i|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{m=1}^{k} |\lambda_m|^p \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} |a_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{m=1}^{k} |\lambda_m|^p \|z_m\|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

para todo $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Em resumo, se $(t_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$. Então

$$\sum_{m=1}^{\infty} t_m \frac{z_m}{\|z_m\|} \text{ converge em } \ell_p \iff \left(\sum_{m=1}^{\infty} |t_m|^p \right)^{1/p} < \infty. \tag{5.1}$$

Agora bem,

(a) Defina $T : \ell_p \to N$ por $T\left(\sum_{m=1}^{\infty} t_m e_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} t_m \frac{z_m}{\|z_m\|}$. Segue de (5.1) que T está bem definido, e é claro que T é linear. Provaremos que T é um isomorfismo isométrico. De fato, como $\| \sum_{m=1}^{k} t_m \frac{z_m}{\|z_m\|} \|_p = (\sum_{m=1}^{k} |t_m|^p)^{1/p}$. Então fazendo $k \to \infty$ obtemos que $\|T(\sum_{m=1}^{\infty} t_m e_m)\|_p = \| \sum_{m=1}^{\infty} t_m e_m\|_p$. Para provar que T é sobrejetivo, seja $x = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m z_m \in N$. Segue de (5.1) que $\sum_{m=1}^{\infty} \|\lambda_m z_m\|^p < \infty$, assim $(\lambda_m \|z_m\|)_{m=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $T(\lambda_m \|z_m\|)_{m=1}^{\infty} = x$. Portanto T é um isomorfismo isométrico.

(b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $E_m = span\{e_{p_{m-1}+1}, e_{p_{m-1}+2}, \ldots, e_{p_m}\}$, então $z_m \in E_m$. Como $z_m \neq 0$, segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $z'_m \in E'_m$ tal que $z'_m(z_m) = 1$ e $\|z'_m\| = \frac{1}{\|z_m\|}$. Defina $P : \ell_p \to N$ por

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i\right) = \sum_{m=1}^{\infty} z'_m \left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} t_i e_i\right) z_m.$$

Como

$$\begin{aligned}
\|P\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i\right)\|_p = \|\sum_{m=1}^{\infty} z'_m \left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} t_i e_i\right) z_m\|_p &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| z'_m \left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} t_i e_i\right)\right|^p \|z_m\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} \|z'_m\|^p \| \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} t_i e_i\|^p \|z_m\|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \| \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} t_i e_i\|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} |t_i|^p\right)^{1/p} = \|\sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i\|_p,
\end{aligned}$$

vemos que P é contínuo e $\|P\| \leq 1$. Por outro lado, sendo

$$z_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i e_i = (0, \ldots, 0, a_{p_{n-1}+1}, \ldots, a_{p_n}, 0, \ldots),$$

escrevamos

$$t_i^n = \begin{cases} a_i & \text{se } \ i = p_{n-1}+1, \ldots, p_n, \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

Então $z_n = (t_i^n)_{i=1}^{\infty}$ para cada n. Logo

$$Pz_n = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i^n e_i\right) = \sum_{m=1}^{\infty} z'_m \left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} t_i^n e_i\right) z_m = z'_n \left(\sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i e_i\right) z_n = z'_n(z_n) z_n = z_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, $ImP = N$ e $P|_N = id_N$, portanto $P^2 = P$ e $\|P\| = 1$. □

À seguir vejamos o resultado análogo para o espaço c_0.

Teorema 5.2. (Pelczynski [15], 1960) Seja (e_i) a base de Schauder canônica de c_0. Seja (z_m) uma sequência de blocos de (e_i). Então

(a) O subespaço fechado $N = [z_m : \ m \in \mathbb{N}]$ é isometricamente isomorfo a c_0.

(b) N é complementado em c_0.

Demonstração. Por hipótese cada z_m pode ser escrito na forma

$$z_m = \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} a_i e_i$$

onde $(a_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ e $0 = p_0 < p_1 < \ldots$ Pela Proposição 3.13 (z_m) é uma sequência básica em c_0. É claro que

$$\|z_m\| = \|\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} a_i e_i\| = \sup_{p_{m-1}+1 \leq i \leq p_m} |a_i|,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\sum_{m=1}^{k} \lambda_m z_m\|_\infty &= \|\sum_{m=1}^{k} \sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} \lambda_m a_i e_i\|_\infty \\ &= \sup_{1\leq m\leq k} \sup_{p_{m-1}+1\leq i\leq p_m} |\lambda_m||a_i| = \sup_{1\leq m\leq k} |\lambda_m| \|z_m\|_\infty \end{aligned}$$

para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ e todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\|\sum_{m=n+1}^{k} \lambda_m \frac{z_m}{\|z_m\|}\|_\infty = \sup_{n+1\leq m\leq k} |\lambda_m| \text{ para todo } k > n.$$

Em resumo, se $(t_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$. Então

$$\sum_{m=1}^{\infty} t_m \frac{z_m}{\|z_m\|} \text{ converge em } c_0 \iff t_m \to 0. \tag{5.2}$$

Agora bem,
(a) Seja $T : \sum_{m=1}^{\infty} t_m e_m \in c_0 \to \sum_{m=1}^{\infty} t_m \frac{z_m}{\|z_m\|} \in N$, de forma análoga como no teorema anterior se prova que T é um isomorfismo isométrico.

(b) Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $E_m = span\{e_{p_{m-1}+1}, e_{p_{m-1}+2}, \ldots, e_{p_m}\}$, então $z_m \in E_m$. Como $z_m \neq 0$ segue do Teorema de Hahn-Banach que existe $z'_m \in E'_m$ talque $z'_m(z_m) = 1$ e $\|z'_m\| = \frac{1}{\|z_m\|}$. Defina $P : c_0 \to N$ por

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i\right) = \sum_{m=1}^{\infty} z'_m \left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m} t_i e_i\right) z_m.$$

Como

$$\|P\left(\sum_{i=1}^{\infty}t_ie_i\right)\|_\infty=\|\sum_{m=1}^{\infty}z'_m\left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m}t_ie_i\right)z_m\|_\infty=\sup_{m\in\mathbb{N}}\left|z'_m\left(\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m}t_ie_i\right)\right|\|z_m\|$$
$$\leq\sup_{m\in\mathbb{N}}\|z'_m\|\|\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m}t_ie_i\|\|z_m\|=\sup_{m\in\mathbb{N}}\|\sum_{i=p_{m-1}+1}^{p_m}t_ie_i\|_\infty$$
$$=\sup_{m\in\mathbb{N}}\sup_{p_{m-1}+1\leq i\leq p_m}|t_i|=\sup_{i\in\mathbb{N}}|t_i|=\|\sum_{i=1}^{\infty}t_ie_i\|_\infty,$$

vemos que P é contínuo e $\|P\|\leq 1$. Segue que P é uma projeção sobre N com norma um. □

Teorema 5.3. Seja M um subespaço fechado de dimensão infinita de ℓ_p $(1\leq p<\infty)$. Então M contém um subespaço complementado em ℓ_p e isomorfo a ℓ_p.

Demonstração. Seja $y_1\in M$ com $\|y_1\|=1$, escrevamos $y_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}t_i^1e_i$. Então existe $p_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|\sum_{i=p_1+1}^{\infty}t_i^1e_i\|\leq\frac{1}{2^{1+1}}.$$

Como a aplicação $\sum_{i=1}^{\infty}t_ie_i\in M\to(t_1,\ldots,t_{p_1})\in\mathbb{K}^{p_1}$ é injetiva, existe $0\neq y_2=\sum_{i=p_1+1}^{\infty}t_i^2e_i\in M$, $\|y_2\|=1$. Logo existe $p_2\in\mathbb{N},\ p_2>p_1$ tal que

$$\|\sum_{i=p_2+1}^{\infty}t_i^2e_i\|\leq\frac{1}{2^{2+1}}.$$

De novo, como a aplicação $\sum_{i=1}^{\infty}t_ie_i\in X\to(t_1,\ldots,t_{p_2})\in\mathbb{K}^{p_2}$ é injetiva, existe $0\neq y_3=\sum_{i=p_2+1}^{\infty}t_i^3e_i\in M$, $\|y_3\|=1$. Então existe $p_3\in\mathbb{N},\ p_3>p_2$ tal que

$$\|\sum_{i=p_3+1}^{\infty}t_i^3e_i\|\leq\frac{1}{2^{3+1}}.$$

Continuando assim obtemos uma sequência (y_m) em M e uma sequência de números naturais $0=p_0<p_1<\ldots$ tais que

$$y_m=\sum_{i=p_{m-1}+1}^{\infty}t_i^me_i,\qquad\|y_m\|=1\ \ (m=1,2,\ldots)\qquad\text{e}\quad\|\sum_{i=p_m+1}^{\infty}t_i^me_i\|\leq\frac{1}{2^{m+1}}.$$

Considere a sequência (z_m) em ℓ_p dada por $z_m=\sum\limits_{i=p_{m-1}+1}^{p_m}t_i^me_i$. Logo,

$$1=\|y_m\|=\|z_m+\sum_{i=p_m+1}^{\infty}t_i^me_i\|\leq\|\sum_{i=p_m+1}^{\infty}t_i^me_i\|+\|z_m\|$$

implica,

$$\|z_m\| \geq 1 - \|\sum_{i=p_m+1}^{\infty} t_i^m e_i\| \geq 1 - \frac{1}{2^{m+1}} > 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

de modo que $z_m \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue que (z_m) é uma sequência de blocos e portanto uma sequência básica em ℓ_p, ainda mais

$$\|y_m - z_m\| = \|\sum_{i=p_m+1}^{\infty} t_i^m e_i\| \leq \frac{1}{2^{m+1}}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Seja (z'_m) a sequência de funcionais coordenados associada à base (z_m) de $[z_m : \ m \in \mathbb{N}]$. Então, para cada $x \in [z_m : \ m \in \mathbb{N}]$ temos

$$\|x\| = \|\sum_{m=1}^{\infty} z'_m(x) z_m\| = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |z'_m(x)|^p \|z_m\|^p\right)^{1/p} \geq |z'_n(x)| \|z_n\| \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Segue que $\|z'_m\| \leq \frac{1}{\|z_m\|_p}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Em consequência

$$\|z'_m\| \leq \frac{1}{\|z_m\|} \leq \frac{1}{\|y_m\| - \|z_m - y_m\|} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{m+1}}}, \qquad m \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Considere a projeção $P : \ell_p \to \ell_p$ sobre $[z_m : \ m \in \mathbb{N}]$ do Teorema 5.1. Usando (5.3) e (5.4) obtemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|P\| \|z'_m\| \|y_m - z_m\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2^{m+1}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1} - 1} \leq \frac{1}{3} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{2^{t+1} - 1} < 1.$$

Segue do Teorema 3.11 que (y_m) é uma sequência básica equivalente a (z_m) e $[y_m : \ m \in \mathbb{N}]$ é um subespaço complementado de ℓ_p. Pelo Teorema 5.1

$$[y_m : \ m \in \mathbb{N}] \sim [z_m : \ m \in \mathbb{N}] \sim^1 \ell_p.$$

Como M é um subespaço fechado, então $[y_m : \ m \in \mathbb{N}] \subset M$. De modo que $[y_m : \ m \in \mathbb{N}]$ é nosso espaço procurado. $\square$

Note que nesta demonstração só precisamos da norma ℓ_p para provar que $\|z'_m\| \leq \frac{1}{\|z_m\|_p}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De modo que tudo o resto vale com o espaço c_0 em vez do espaço ℓ_p. Mas, para cada $x \in [z_m : \ m \in \mathbb{N}]$ temos

$$\|x\|_\infty = \|\sum_{m=1}^{\infty} z'_m(x) z_m\|_\infty = \sup_{m \in \mathbb{N}} |z'_m(x)| \|z_m\| \geq |z'_n(x)| \|z_n\|_\infty \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

segue que $\|z'_m\| \leq \frac{1}{\|z_m\|_\infty}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Portanto a demonstração do teorema análogo para o espaço c_0 é identica à demonstração do Teorema 5.3.

Observação 5.4. Dados os espaços de Banach Z, Y, X com Z subespaço de Y e Y subespaço de X. Se Z é um subespaço complementado de X, então Z é um subespaço complementado de Y. De fato, considere a projeção P de X sobre Z. Então $P|_Y : Y \to Z$ é contínuo e $(P|_Y)(z) = Pz = z$ para todo $z \in Z$, segue que $P|_Y$ é uma projeção de Y sobre Z.

Caracterização de Pelczynski [15] dos subespaços complementados de ℓ_p e c_0.

Teorema 5.5. (Pelczynski [15]) Seja X um dos espaços c_0 ou ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Então todo subespaço complementado de X ou é isomorfo a X ou tem dimensão finita.

Para simplificar a notação vamos provar o caso ℓ_p. A demonstração do caso c_0 é muito parecida.

Demonstração. Seja M um subespaço complementado de ℓ_p de dimensão infinita. Pelo Teorema 5.3 existe W subespaço de M tal que W é isomorfo a ℓ_p e complementado em ℓ_p. Segue da Observação 5.4 que W é um subespaço complementado de M. Portanto, o Teorema 4.7 garante que M é isomorfo a ℓ_p. $\square$

Em 1967, Lindenstrauss [10] provou que todo subespaço complementado de dimensão infinita do espaço ℓ_∞ é isomorfo a ℓ_∞. Como consequência imediata do teorema anterior temos o corolário seguinte.

Corolário 5.6. Todo subespaço fechado de dimensão infinita de ℓ_2 é isomorfo a ℓ_2.

Corolário 5.7. Todo subespaço fechado de dimensão infinita de um espaço de Hilbert separável é isomorfo ao espaço todo.

Demonstração. Seja M um subespaço fechado de dimensão infinta de um espaço de Hilbert separável H. Como H é de Hilbert e separável existe $T : H \to \ell_2$ isomorfismo topológico, segue que $T(M)$ é um subespaço fechado de dimensão infinita em ℓ_2. Logo

$$M \sim T(M) \sim \ell_2 \sim H.$$

$\square$

Capítulo 6

Subespaços complementados dos espaços $L_p[0,1]$

Subespaços complementados classicamente conhecidos de $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ são ℓ_p, ℓ_2, $\ell_p \oplus \ell_2$ e o próprio $L_p[0,1]$. Em 1981, Bourgain [3] provou que a menos de isomorfismo, existe uma quantidade não-enumerável de subespaços complementados de $L_p[0,1]$, $1 < p < \infty$. Nós vamos trabalhar com um tipo de espaço isometricamente isomorfo a ℓ_2, que é, o subespaço fechado gerado pelas funções de Rademacher.

Funções de Rademacher

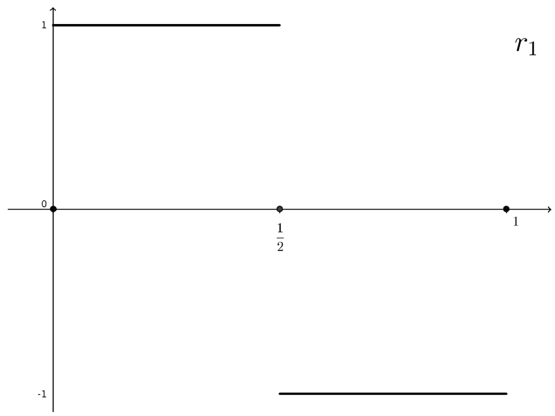
Definição 6.1. (Funções de Rademacher) A função sinal $sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

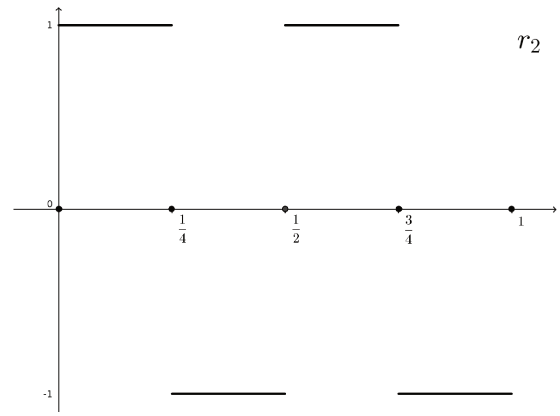
$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

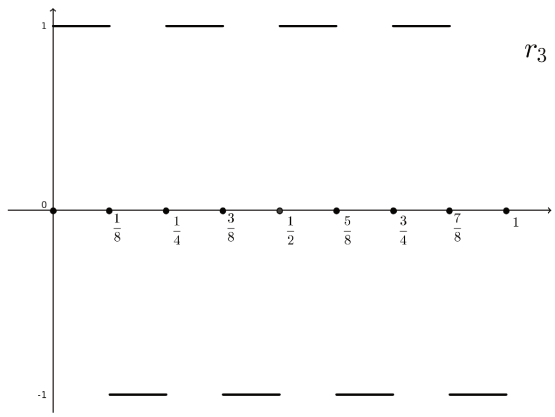
Para cada $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima função de Rademacher é a função

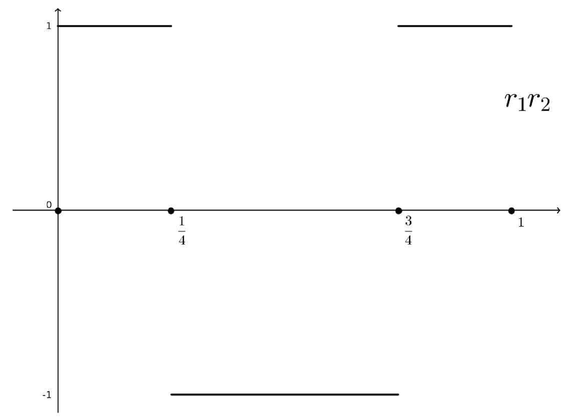
$$r_n(t) = sgn(sen(2^n \pi t)) \quad \text{para todo} \quad t \in [0,1].$$

Para obter uma melhor compreensão das funções de Rademacher, recomendamos desenhar seus gráficos em vez de procurar entender as fórmulas. Por exemplo









Também para cada $n \in \mathbb{N}$ note que:

$$r_n(t) = \begin{cases} \ \ 1 & \text{se} \ \ t \in (0, 1/2^n) \cup (2/2^n, 3/2^n) \cup (4/2^n, 5/2^n) \cup \cdots \cup (\frac{2^n-2}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}), \\ -1 & \text{se} \ \ t \in (1/2^n, 2/2^n) \cup (3/2^n, 4/2^n) \cup \cdots \cup (\frac{2^n-1}{2^n}, 1), \\ \ \ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

Levando isto em conta vamos provar a Proposição seguinte.

Proposição 6.2. Dados inteiros positivos $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e $m_1, m_2, \ldots, m_k$, tem-se que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{m_1}(t) \cdots r_{n_k}^{m_k}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{se cada } m_j \text{ é par,} \\ 0 & \text{se algum } m_j \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração. É claro que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{m_1}(t) \cdots r_{n_k}^{m_k}(t) dt = 1 \quad \text{se cada } m_j \text{ é par.}$$

Se $k = 1$ e m_1 é ímpar, então $r_{n_1}^{m_1} = r_{n_1}$ e exceto por um número finito de pontos o intervalo $[0, 1]$ é uma união finita de intervalos I_j tais que cada I_j é união de dois intervalos I_j^+ e I_j^- de comprimento $\frac{1}{2^{n_1}}$, tal que $r_{n_1} = 1$ em I_j^+ e $r_{n_1} = -1$ em I_j^- (exceto por um número finito de pontos). Segue que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{m_1}(t) dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{I_j} r_{n_1}(t) dt = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_{I_j^+} r_{n_1}(t) dt + \int_{I_j^-} r_{n_1}(t) dt \right) = \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2^{n_1}} - \frac{1}{2^{n_1}}) = 0.$$

Se $k > 1$ seja i o maior indice tal que m_i é ímpar. Então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{m_1}(t)\cdots r_{n_i}^{m_i}(t)\cdots r_{n_k}^{m_k}(t)dt = \int_0^1 r_{n_1}^{m_1}(t)\cdots r_{n_i}^{m_i}(t)dt$$

Assim, exceto por um número finito de pontos o intervalo $[0,1]$ é uma união finita de intervalos I_j tais que cada I_j é união de dois intervalos I_j^+ e I_j^- do mesmo comprimento, o produto $r_{n_1}^{m_1}\cdots r_{n_{i-1}}^{m_{i-1}} = c_j$ é constante em I_j, $r_{n_i}^{m_i} = 1$ em I_j^+ e $r_{n_i}^{m_i} = -1$ em I_j^-. Segue-se que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{m_1}(t)\cdots r_{n_k}^{m_k}(t)dt = \int_0^1 r_{n_1}^{m_1}(t)\cdots r_{n_i}^{m_i}(t)dt = \sum_{j=1}^{n}\int_{I_j} r_{n_1}^{m_1}(t)\cdots r_{n_i}^{m_i}(t)dt = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{I_j} r_{n_i}^{m_i}(t)dt = 0.$$

Isto completa a demonstração. $\square$

Proposição 6.3. (a) O conjunto $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é ortonormal em $L_2[0,1]$.

(b) O conjunto $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ não é um sistema ortonormal completo em $L_2[0,1]$.

Demonstração. (a) É consequência imediata da proposição anterior.
(a) Para provar que $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ não é um sistema completo basta achar uma função em $L_2[0,1]$ que seja ortogonal ao conjunto $(r_n)_{n=1}^{\infty}$. Segue da proposição anterior que

$$\int_0^1 r_1(t)r_2(t)r_n(t) = 0 \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}.$$

Então tomando $r_1 r_2 \in L_2[0,1]$ obtemos o desejado. $\square$

O principal resultado sobre as funções de Rademacher é a poderosa desigualdade de Khintchine, a saber:

Teorema 6.4. (Desigualdade de Khintchine) Para cada $1 \leq p < \infty$ existem constantes positivas A_p e B_p tais que

$$A_p\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |\sum_{j=1}^{n}\lambda_j r_j(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq B_p\left(\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2\right)^{1/2}$$

para todo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja Mujica [13], pág. 127, ou Diestel [5], pág. 11. $\square$

Notação 6.5. Para cada $1 \leq p < \infty$, denotaremos por Rad_p o subespaço fechado de $L_p[0,1]$ gerado pelas funções de Rademacher.

Uma consequência poderosa da desigualdade de Khintchine é a existência de subespaços de Hilbert complementados em $L_p[0,1]$. Para simplificar a notação as vezes escreveremos L_p em vez de $L_p[0,1]$.

Teorema 6.6. (Pelczynski [15]) Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $r_n(t) = sgn(sen(2^n \pi t))$ a n-ésima função de Rademacher, e seja $1 < p < \infty$. Então $Rad_p = [r_n : \ n \in \mathbb{N}]$ é um subespaço complementado de $L_p[0,1]$ e isomorfo a ℓ_2.

Demonstração. Pela desigualdade de Khintchine existem constantes positivas A_p e B_p ($1 < p < \infty$) tais que

$$A_p \left(\sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 \right)^{1/2} \leq \| \sum_{j=1}^{n} t_j r_j \|_p \leq B_p \left(\sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 \right)^{1/2} \tag{6.1}$$

para todos $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Provaremos que

$$A_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} |t_j|^2 \right)^{1/2} \leq \| \sum_{j=1}^{\infty} t_j r_j \|_p \leq B_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} |t_j|^2 \right)^{1/2}$$

para toda $(t_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$. De fato, segue de (6.1) que

$$A_p \left(\sum_{j=m+1}^{n} |t_j|^2 \right)^{1/2} \leq \| \sum_{j=m+1}^{n} t_j r_j \|_p \leq B_p \left(\sum_{j=m+1}^{n} |t_j|^2 \right)^{1/2} \tag{6.2}$$

para toda $(t_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$ e todo $m < n$ em $\mathbb{N}$. Em particular segue de (6.2) que a série $\sum_{j=1}^{\infty} t_j r_j$ converge em $L_p[0,1]$. Fazendo $n \to \infty$ em (6.1) obtemos o desejado.

Segue que o operador $T : \ell_2 \to L_p[0,1]$ definido por

$$T \left(\sum_{j=1}^{\infty} t_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j r_j \quad \text{para todo} \ \ (t_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

é um mergulho topológico. Como $Te_n = r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica equivalente à base de Schauder canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de ℓ_2. Portanto $Rad_p \sim \ell_2$.

Por outro lado, a prova de que Rad_p é um subespço complementado de $L_p[0,1]$ será feita em três casos, a saber: $p = 2$, $2 < p < \infty$ e $1 < p < 2$.

Se $p = 2$, seja P_2 a projeção ortogonal de $L_2[0,1]$ sobre Rad_2, ou seja

$$P_2 f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, r_j \rangle r_j \quad \text{para todo} \ \ f \in L_2[0,1],$$

onde

$$\langle f, r_j \rangle = \int_0^1 f(t) r_j(t) dt.$$

Se $2 < p < \infty$, então $L_p \subset L_2$ e podemos definir $P_p : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$ por

$$P_p f = P_2 f = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, r_j \rangle r_j \quad \text{para todo} \ \ f \in L_p[0,1].$$

Como $\|f\|_2 \leq \|f\|_p$ para toda $f \in L_p[0,1]$ e o conjunto $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ é ortonormal no espaço de Hilbert $L_2[0,1]$, a desigualdade de Bessel implica que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, r_j\rangle|^2\right)^{1/2} \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_p \quad \text{para todo} \quad f \in L_p[0,1].$$

Pelas desigualdades de Khintchine, para cada $f \in L_p[0,1]$ temos que

$$\|P_p f\|_p = \|\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, r_j\rangle r_j\|_p \leq B_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f, r_j\rangle|^2\right)^{1/2} \leq B_p \|f\|_p.$$

Assim, P_p é contínua. Note que $ImP_p \subset Rad_p$. Como $P_p r_n = r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $ImP_p = Rad_p$, logo $P_p|_{ImP_p} = id$ implica $P_p^2 = P_p$.

Finalmente seja $1 < p < 2$. Se $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ então $2 < q < \infty$ e portanto P_q é um operador projeção sobre Rad_q. Por sua vez, seu operador adjunto $(P_q)' : (L_q)' \to (L_q)'$ também é un operador projeção. Considere a identificação canônica

$$T : f \in L_p \to \hat{f} \in (L_q)', \quad \hat{f}(g) = \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \quad \text{para todo} \quad f \in L_p \text{ e } g \in L_q.$$

Então $T^{-1} \circ (P_q)' \circ T : L_p \to L_p$ é a projeção procurada. De fato, é claro que $T^{-1} \circ (P_q)' \circ T$ é uma projeção, só resta provar que sua imagem é Rad_p. Para provar isto, basta provar que $Im(P_q)' = T(Rad_p) = [Tr_n : \ n \in \mathbb{N}]$. Primeiro provaremos que $T(Rad_p) \subset Im(P_q)'$ e depois que $T(Rad_p)$ é fracamente denso em $Im(P_q)'$. Com efeito, notemos que

$$((P_q)'\hat{r}_n)(g) = \hat{r}_n(P_q g) = \hat{r}_n(\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, r_j\rangle r_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle g, r_j\rangle \hat{r}_n(r_j) = \langle g, r_n\rangle = \hat{r}_n(g)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ e $g \in L_q$. Como L_q separa os pontos de L_p (veja o Corolário 1.5), segue que $(P_q)'\hat{r}_n = \hat{r}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto prova que $T(Rad_p) \subset Im(P_q)'$. Por outro lado, sejam $f \in L_p$ e $g \in L_q$ então

$$\begin{aligned}((P_q)'\hat{f})(g) &= \hat{f}(P_q g) = \hat{f}(\sum_{j=1}^{\infty} \langle g, r_j\rangle r_j) = \hat{f}(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle g, r_j\rangle r_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \hat{f}(\sum_{j=1}^{n} \langle g, r_j\rangle r_j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle g, r_j\rangle \langle f, r_j\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle f, r_j\rangle \hat{r}_j(g).\end{aligned}$$

Segue que a série $\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, r_j\rangle \hat{r}_j$ converge fracamente a $(P_q)'\hat{f} \in Im(P_q)'$, ou seja $T(Rad_p)$ é fracamente denso em $Im(P_q)'$. Portanto

$$T(Rad_p) = \overline{T(Rad_p)}^{\|\cdot\|} = \overline{T(Rad_p)}^{\sigma((L_q)', L_q)} = Im(P_q)'.$$

Assim $T^{-1} \circ (P_q)' \circ T(L_p) = Rad_p$. Em tais casos foi provado que Rad_p é um subespaço complementado de $L_p[0,1]$.

$\square$

Observação 6.7. O Teorema 6.6 mostra que o Teorema 5.3 não vale para o espaço $L_p[0,1]$ com $1 < p < \infty,\ p \neq 2$.

Enfatizamos que Rad_1 não é complementado em $L_1[0,1]$. Mas para provar esta afirmação precisamos de mais ferramentas.

Capítulo 7

Espaços de Banach sem a propriedade de aproximação

Como aplicação do Teorema 6.6 de Pelczynski apresentamos exemplos de espaços de Banach sem a propriedade de aproximação. Aqui X e Y sempre seram espaços de Banach.

Definição 7.1. Seja $T \in \mathcal{L}(X;Y)$, diremos que T tem posto finito se o subespaço $T(X)$ tem dimensão finita.

Exemplo 7.2. Em um espaço de Banach X com uma base de Schauder $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, as projeções canônicas $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, $T_n x = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) x_j$ têm posto finito.

Proposição 7.3. Um operador $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ tem posto finito se e só se existem $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in X'$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ tais que

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) y_j \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $T(X)$ tem dimensão n, sejam $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ uma base de $T(X)$ e $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \in T(X)'$ os funcionais associados à base $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de $T(X)$. Então

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(Tx) y_j \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Para cada $j = 1, \ldots, n$ escolha $\phi_j = \psi_j \circ T \in X'$. Assim obtemos o desejado.
($\Leftarrow$) É imediato. $\square$

Por esta razão o subespaço de todos os operadores de posto finito de X em Y é denotado por $X' \otimes Y$. Neste caso os elementos de $X' \otimes Y$ são denotados por $\sum_{j=1}^{n} \phi_j \otimes y_j$, $(\sum_{j=1}^{n} \phi_j \otimes y_j)(x) := \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) y_j$ para todo $x \in X$.

Definição 7.4. Diremos que X tem a propriedade de aproximação se dados um compacto $K \subset X$ e $\epsilon > 0$, existe um operador $T \in X' \otimes X$ tal que $\|Tx - x\| \leq \epsilon$ para todo $x \in K$.

Exemplo 7.5. 1. Todo espaço de Banach com uma base de Schauder tem a propriedade de aproximação. De fato, suponha que X é um espaço de Banach com uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de projecões canônicas de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e c a constante da base. Sejam K um subconjunto compacto de X e $\epsilon > 0$ dados. Então K é totalmente limitado e portanto existem $y_1, y_2, \ldots, y_m \in K$ tais que

$$K \subset \cup_{j=1}^{m} B(y_j; \tfrac{\epsilon}{c+2}).$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n y_j - y_j\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \phi_k(y_j) x_k\| = 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_{n_0} y_j - y_j\| < \frac{\epsilon}{c+2}$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Esse n_0 é possível pois só temos um número finito de pontos y_j. Logo, se $x \in K$ então existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\|x - y_k\| < \frac{\epsilon}{c+2}$. Segue que

$$\begin{aligned} \|T_{n_0} x - x\| &\leq \|T_{n_0} x - T_{n_0} y_k\| + \|T_{n_0} y_k - y_k\| + \|y_k - x\| < \|T_{n_0}\| \|x - y_k\| + \frac{\epsilon}{c+2} + \frac{\epsilon}{c+2} \\ &< c\frac{\epsilon}{c+2} + \frac{2\epsilon}{c+2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto X tem a propriedade de aproximação.

2. Szankowski [17] provou que o espaço $\mathcal{L}(\ell_2; \ell_2)$ não tem a propriedade de aproximação.

Proposição 7.6. Se X tem a propriedade de aproximação, então cada subespaço complementado de X também tem a propriedade de aproximação.

Demonstração. Sejam M um subespaço complementado de X e P a projeção sobre M. Sejam K um subconjunto compacto de M e $\epsilon > 0$ dados. Como X tem a propriedade de aproximação então existe $T \in X' \otimes X$ tal que $\|Tx - x\| \leq \frac{\epsilon}{\|P\|+1}$ para todo $x \in K$. Considere a inclusão canônica $\imath : M \hookrightarrow X$. Então $P \circ T \circ \imath \in M' \otimes M$. Logo, se $x \in K \subset M$ então $Px = x$ e

$$\|P \circ T \circ \imath(x) - x\| = \|P \circ T \circ \imath(x) - Px\| = \|P \circ T(x) - Px\| \leq \|P\| \|Tx - x\| < \epsilon.$$

Portanto M tem a propriedade de aproximação. □

Proposição 7.7. Um espaço de Banach M é topológicamente isomorfo a um subespaço complementado de X se, e somente se, existem $S \in \mathcal{L}(M; X)$ e $T \in \mathcal{L}(X; M)$ tais que $T \circ S = id_M$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que N é um subespaço complementado de X e que $\phi : M \to N$ é um isomorfismo topológico. Seja P uma projeção sobre N. Então $\phi^{-1} \circ P \in \mathcal{L}(X; M)$ e $P \circ \phi \in \mathcal{L}(M; X)$ e satisfazem $\phi^{-1} \circ P \circ P \circ \phi(m) = \phi^{-1} \circ P \circ \phi(m) = \phi^{-1} \circ \phi(m) = m$ para todo $m \in M$.

($\Leftarrow$) Sejam $S \in \mathcal{L}(M; X)$ e $T \in \mathcal{L}(X; M)$ tais que $T \circ S = id_M$. Segue que $(S \circ T)^2 = S \circ T \circ S \circ T = S \circ T$ e portanto $S \circ T \in \mathcal{L}(X; X)$ é uma projeção sobre $S \circ T(X)$. Também $T \circ S = id$ implica que S é injetiva e $T(X) = M$, segue que $S(M) = S \circ T(X)$ é fechado em X. Assim, S é um mergulho topológico. Portanto M é isomorfo ao subespaço complementado $S(M)$ de X. □

Além do espaço $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ existem outros espaços de Banach não-artificiais sem a propriedade de aproximação. Para provar o teorema seguinte vamos precisar da proposição anterior.

Teorema 7.8. (Dineen-Mujica [6]) Se $1 < p, q < \infty$, então $\mathcal{L}(L_p[0,1]; L_q[0,1])$ contém um subespaço complementado isomorfo a $\mathcal{L}(\ell_2; \ell_2)$. Em particular $\mathcal{L}(L_p[0,1]; L_q[0,1])$ não tem a propriedade de aproximação.

Demonstração. Pelo Teorema 6.6 Rad_p, $1 < p < \infty$ é um subespaço complementado de $L_p[0,1]$ topologicamente isomorfo a ℓ_2. Pela Proposição 7.7 existem operadores $A_p \in \mathcal{L}(\ell_2; L_p[0,1])$ e $B_p \in \mathcal{L}(L_p[0,1]; \ell_2)$ tais que $B_p \circ A_p = id_{\ell_2}$. Dados $1 < p, q < \infty$, definamos os operadores

$$C_{pq} : S \in \mathcal{L}(\ell_2; \ell_2) \to A_q \circ S \circ B_p \in \mathcal{L}(L_p[0,1]; L_q[0,1])$$

e

$$D_{pq} : T \in \mathcal{L}(L_p[0,1]; L_q[0,1]) \to B_q \circ T \circ A_p \in \mathcal{L}(\ell_2; \ell_2).$$

Vejamos que $D_{pq} \circ C_{pq} = id$. De fato, seja $S \in \mathcal{L}(\ell_2; \ell_2)$ então

$$D_{pq} \circ C_{pq}(S) = D_{pq} \circ (A_q \circ S \circ B_p) = B_q \circ (A_q \circ S \circ B_p) \circ A_p = S.$$

Segue da Proposição 7.7 que $\mathcal{L}(L_p[0,1]; L_q[0,1])$ contém um subespaço complementado isomorfo a $\mathcal{L}(\ell_2; \ell_2)$. Finalmente a Proposição 7.6 junto com o resultado de Szankowski [17] garantem que $\mathcal{L}(L_p[0,1]; L_q[0,1])$ não tem a propriedade de aproximação. $\square$

Alguns Problemas Interessantes

Os seguintes problemas surgem de maneira natural nesta área:

1. Dado um espaço de Banach X, caracterizar os tipos de isomorfismo de seus subespaços complementados.

2. Dado um espaço de Banach X, caracterizar os tipos de isomorfismo de aqueles espaços de Banach Y tal que todo subespaço de Y isomorfo a X é complementado em Y.

3. É cada subespaço complementado de $C(S)$ isomorfo a algum $C(S_1)$[1]?

Definição 7.9. Uma base de Schauder (x_n) para um espaço de Banach X é incondicional se, para cada permutação σ de $\mathbb{N}$, $(x_{\sigma(n)})$ é uma base de Schauder para X.

A base canônica de c_0 ou ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ é uma base incondicional.

Definição 7.10. Uma espaço de Banach X é chamado de primo se cada subespaço complementado de dimensão infinita de X é isomorfo a X.

Por enquanto sabemos então que os espaços c_0 e ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, são primos.

Finalizamos esta parte com um problema aberto, veja [12].

c_0 e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, são os únicos espaços primos de Banach com uma base incondicional?

[1] S e S_1 espaços topológicos Haudorff compactos.

Referências Bibliográficas

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Mathematica, 17 (1958), pp. 151–164.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino, and E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, 2012.

[3] J. Bourgain, H. Rosenthal, and G. Schechtman, *An ordinal Lp-index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of Lp*, Annals of Mathematics, (1981), pp. 193–228.

[4] N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, vol. 64, Cambridge University Press, 2005.

[5] J. Diestel, *Absolutely Summing Operators*, vol. 43, Cambridge University Press, 1995.

[6] S. Dineen and J. Mujica, *Banach spaces of homogeneous polynomials without the approximation property*, Czechoslovak Math. J., por aparecer.

[7] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Mathematica, 130 (1973), pp. 309–317.

[8] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K)*, Canad. J. Math, 5 (1953), pp. 129–173.

[9] H. E. Lacey, *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, vol. 208, Springer Verlag, 1974.

[10] J. Lindenstrauss, *On complemented subspaces of m*, Israel Journal of Mathematics, 5 (1967), pp. 153–156.

[11] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, vol. 183, Springer, 1998.

[12] M. S. Moslehian, *A survey on the complemented subspace problem*, Trends in Math., 9 (2006), pp. 91–98.

[13] J. Mujica, *Notas de Espaços de Banach*, IMECC–UNICAMP, 2014.

[14] F. Murray, *On complementary manifolds and projections in spaces Lp and lp*, Transactions of the American Mathematical Society, 41 (1937), pp. 138–152.

[15] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Mathematica, 19 (1960), pp. 209–228.

[16] R. Phillips, *On linear transformations*, Transactions of the American Mathematical Society, 48 (1940), pp. 516–541.

[17] A. Szankowski, *B(H) does not have the approximation property*, Acta Mathematica, 147 (1981), pp. 89–108.