



FELIPE AUGUSTO GUEDES DA SILVA

UM ESTUDO DE MÉTODOS DE GALERKIN DESCONTÍNUO DE
ALTA ORDEM PARA PROBLEMAS HIPERBÓLICOS

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

FELIPE AUGUSTO GUEDES DA SILVA

UM ESTUDO DE MÉTODOS DE GALERKIN DESCONTÍNUO DE
ALTA ORDEM PARA PROBLEMAS HIPERBÓLICOS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática aplicada.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa

Coorientador: Eduardo Cardoso de Abreu

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO FELIPE AUGUSTO GUEDES DA SILVA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. MAICON RIBEIRO CORREA.

Assinatura do Orientador

Assinatura do Coorientador

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Si38e Silva, Felipe Augusto Guedes da, 1991-
Um estudo de métodos de Galerkin descontínuo de alta ordem para problemas hiperbólicos / Felipe Augusto Guedes da Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa.

Coorientador: Eduardo Cardoso de Abreu.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais hiperbólicas . 2. Galerkin, Métodos de. 3. Esquema semi-discreto (Equações diferenciais). 4. Runge-Kutta, Fórmulas de. 5. Esquemas centrais de alta ordem (Equações diferenciais). I. Correa, Maicon Ribeiro, 1979-. II. Abreu, Eduardo Cardoso de, 1974-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study of high order discontinuous Galerkin methods for hyperbolic problems

Palavras-chave em inglês:

Hyperbolic differential equations

Galerkin methods

Semi-discrete scheme (Differential equations)

Runge-Kutta formulas

High order central schemes (Differential equations)

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Maicon Ribeiro Correa [Orientador]

Abimael Fernando Dourado Loula

Márcio Rentes Borges

Data de defesa: 15-04-2015

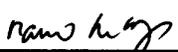
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de abril de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA



Prof.(a). Dr(a). MÁRCIO RENTES BORGES



Prof.(a). Dr(a). ABIMAEEL FERNANDO DOURADO LOULA

Abstract

The focus of this work is the computational study of some Discontinuous Galerkin methods for the numerical approximation of first order hyperbolic differential problems, focusing on explicit schemes with time discretization based on Runge-Kutta type methods, in problems with linear and nonlinear fluxes. Specifically, the good local stability properties of Runge-Kutta methods are combined with stable numerical flux functions and slope limiters in order to propose new higher-order Discontinuous Galerkin methods that achieve high resolution of abrupt gradients and of discontinuous solutions, without spurious oscillations in numerical solutions. Furthermore, a brief discussion about higher-order finite volume central schemes is presented in order to introduce some important concepts that are used in the construction of the DG methods. A representative set of numerical simulations for linear and nonlinear hyperbolic models is presented and discussed, in order to check the accuracy of the obtained Discontinuous Galerkin solutions by comparing them with the ones obtained with well-established finite volume methods and with exact solutions.

Keywords: Hyperbolic problems, Discontinuous Galerkin, Semi-discrete formulations, Runge-Kutta time discretizations, Higher-order central schemes

Resumo

O foco do presente trabalho consiste no estudo computacional de métodos de Galerkin Descontínuo para aproximação numérica de problemas diferenciais de natureza hiperbólica, com enfoque em esquemas explícitos e no uso de aproximações do tipo Runge-Kutta no tempo para aproximação de problemas lineares e não-lineares. Especificamente, serão exploradas as boas propriedades de estabilidade local, no tempo, dos métodos da classe Runge-Kutta em conjunto com funções de fluxo numérico estáveis e com o uso de limitadores de inclinação, com o objetivo de desenvolver métodos Galerkin Descontínuo de alta ordem capazes de obter boa resolução de gradientes abruptos e de soluções descontínuas, sem oscilações espúrias, em problemas hiperbólicos. Uma breve discussão sobre esquemas de volumes finitos centrais de alta ordem é apresentada, onde são introduzidos importantes conceitos a serem utilizados na construção dos métodos de Galerkin Descontínuo. Um conjunto representativo de simulações numéricas de modelos hiperbólicos lineares e não-lineares é apresentado e discutido para avaliar a qualidade das aproximações obtidas em uma comparação direta com outras aproximações precisas de volumes finitos ou com soluções exatas, sempre que possível.

Palavras-chave: Problemas hiperbólicos, Galerkin Descontínuo, Formulação semi-discreta, Runge-Kutta, Esquemas centrais de alta ordem

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
1 Introdução	1
1.1 Desenvolvimento dos Métodos	3
1.2 Organização da Dissertação	5
2 Modelos Hiperbólicos	7
2.1 Lei de Conservação Hiperbólica	7
2.2 Exemplos de Leis de Conservação Escalares	8
2.2.1 Equação de Advecção Linear	8
2.2.2 Equações de Burgers	9
2.2.3 Equação de Buckley-Leverett	11
2.2.4 Traçador-Passivo	12
2.2.5 Fluxo de Tráfego	13
2.3 O Problema de Riemann	15
3 Esquemas de Volumes Finitos Centrais	17
3.1 Nomenclatura para Problemas Discretos	18
3.2 Conceitos Fundamentais	19
3.3 Algoritmo de Godunov	22
3.4 O Esquema de Lax-Friedrichs	22
3.5 O Esquema de Lax-Friedrichs Local	25
3.6 O Esquema de Nessyahu-Tadmor	27
3.7 O Esquema de Kurganov-Tadmor	30
3.8 O Algoritmo de Runge-Kutta	31
3.9 Experimentos Numéricos para os Esquemas Centrais	32
4 Método de Galerkin Descontínuo	39
4.1 Descrição do Método de Galerkin Descontínuo	40
4.1.1 Formulação Fraca Global	40
4.1.2 Nomenclatura e Definições	41
4.1.3 A Solução Descontínua	42

4.1.4	Forma Regular do Método de Galerkin Descontínuo	44
4.2	Esquema SSP Runge-Kutta	48
4.3	Fluxos Numéricos	49
4.4	Polinômios de Legendre	50
4.5	Experimentos Numéricos para o DG	51
5	Métodos DG de Alta Ordem	57
5.1	Resultados Sobre Monotonicidade	57
5.2	O Uso de Limitadores de Inclinação	58
5.3	Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Constante	61
5.4	Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Linear	62
5.5	Resultados Numéricos	62
6	Experimentos Numéricos Comparativos	69
6.1	Equação de Advecção Linear	70
6.2	Problema de Burgers	73
6.3	Problema de Buckley-Leverett	77
7	Conclusões e Perspectivas	81
	Referências	83

Dedico esta dissertação ao meu pai Marco Antonio, a minha falecida mãe Vera Lúcia e ao meu irmão Fernando Henrique.

Agradecimentos

Gostaria inicialmente de agradecer a Deus que me guiou por esses dois anos de mestrado e que me proporcionou estar em meio de tantas pessoas bacanas e que enriqueceram minha vida em diversos aspectos, principalmente nos caminhos da vida cristã dentro da universidade, escolhas que nos dão força para viver nossos dias com fé em um futuro melhor. Como sou devoto de Nossa Senhora Aparecida não poderia deixar de agradecer a Ela que é nossa Mãe nos céus e nos protege e dá forças para enfrentar nosso dia-a-dia em meio a conquistas e derrotas. A Santo Expedito meu intercessor particular a Deus nos momentos de dificuldade e de medo diante os desafios da vida.

Agradeço ao meu Pai Marco Antonio que desde a primeira vez que disse que gostaria de fazer o curso de Matemática me apoiou e apoia com seus incentivos e palavras doces que me fazem ter certeza a cada dia que ele é a pessoa mais especial do mundo para mim e não mede esforços para que eu continue minha jornada de estudos, sempre me mostrando a sua maneira o quanto é importante estudar e sobretudo o quanto é importante concretizar os planos que um dia traçamos para nossas vidas. A minha mãe Vera Lúcia, que mesmo não estando mais presente me observa com seu olhar doce e cuida para que meus caminhos sejam os mais suaves. Agradeço também ao meu irmão Fernando que mesmo sem saber muito do mundo matemático e de todos os desafios que aqui enfrentamos sempre esteve ao meu lado também apoiando e aconselhando. Agradeço a minha avó Rosária, minha madrinha Maria Alice e a minha amiga Cleonice (Nice) que sempre me incentivaram a estudar e a buscar meus objetivos.

Aos meus amigos de Lorena que sempre estiveram comigo em minha jornada de estudos e sempre estiveram de braços abertos para me acolher as tantas vezes que voltei para casa e os

procurava para conversar, divertir, relaxar e partilhar momentos, criando assim forças para voltar para Campinas e enfrentar os desafios do mestrado. São muitos os amigos, citar nomes poderia causar alguns problemas, mas aos que lerem este trecho saberão que estou me referindo a eles. Agradeço também aos amigos de Itajubá, local onde fiz minha graduação e mesmo tendo partido mantive laços de amizade e que também sempre fizeram votos para que eu conquistasse novos horizontes. E por fim agradeço aos novos amigos que fiz em Campinas, aos colegas de Mestrado e de Doutorado que sempre foram além de amigos, apoio para os estudos, para os momentos de alegria e de dificuldades que aqui enfrentei, são muitos os amigos assim como os de Lorena então por isso não citarei nomes, mas os que lerem saberão que estou me referindo a vocês. Agradeço também aos amigos da República Hostel e a todos que por lá passaram e pelos momentos alegres nesta casa, local onde recuperávamos as energias para voltar a rotina de estudos.

Aos meus orientadores Professor Maicon Ribeiro e Professor Eduardo Abreu que gentilmente aceitaram me orientar desde o primeiro momento que iniciei o contato com eles e comigo compartilharam seus conhecimentos e assim juntos pudemos avançar nos estudos que aqui apresentamos e com quem traço novos rumos para futuros estudos em outros níveis do conhecimento matemático. Ao Professor Maicon que esteve um período distante em seu pós-doutoramento em Austin, mas esteve sempre disposto a me ajudar e ensinar, fosse via e-mail ou Skype, colaborando de forma especial em minha formação como pesquisador e ao retornar deu atenção especial e total para finalização desta dissertação. Ao Professor Eduardo que foi aquele com que mais tive contato nestes dois anos de mestrado, me preparando não somente como estudante de mestrado, mas também como um bom profissional, que com sua forma séria e compenetrada de trabalho me mostrou o quanto é satisfatório se dedicar a pesquisa e que os frutos de um trabalho sério são colhidos ao fim da jornada. Aos membros que formaram minhas bancas de qualificação, Professora Sônia Maria Gomes e Professor Philippe Remy Bernard Devloo, e a banca de defesa, Professor Abimael Fernando Dourado Loula e Professor Márcio Rentes Borges, que contribuíram positivamente para a elaboração desta dissertação de mestrado. Ao Professor Joerg Schleicher por orientar meu estágio

no Programa de Estágio Docente na disciplina de MA111 (Cálculo 1).

A todos os demais Professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do IMECC com quem tive a oportunidade de aprender mais sobre esta face da matemática e sua relação com outras áreas do conhecimento e também aprender a arte de lecionar conteúdos que muitas vezes parecem extremamente complicados, mas que com a experiência e dedicação destes professores se tornam compreensíveis e tão interessantes e motivadores para nossos estudos. Aos membros da Sub Comissão de Pós-Graduação em Matemática Aplicada ao qual fiz parte como representante discente onde pude ver a dedicação e empenho destes membros docentes para termos um Programa de Pós-Graduação de alto nível e reconhecimento no cenário atual.

Também agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), juntamente com o Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional do IMECC/UNICAMP, pelo apoio via uma bolsa institucional CAPES de Mestrado, no período de 08/2013 até 03/2015.

Agradeço também o apoio da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP - pelo suporte aos projetos No. 2014/03204-9, No. 2011/11897-6, No. 2012/19874-8 e No. 2011/23628-0, a UNICAMP/FAEPEX (Fundo de Apoio ao Ensino, à Pesquisa e Extensão) pelo suporte ao projeto 519.292-785/11, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte ao projeto 445758/2014-7, todos de responsabilidade de meu Co-orientador Professor Eduardo Cardoso de Abreu. Estes projetos viabilizaram a compra de equipamentos computacionais com os quais foi possível realizar algumas simulações numéricas, bem como sua análise, simulações estas que colaboraram para compreensão dos fenômenos estudados nesta dissertação de mestrado.

“Passei a vida tentando corrigir os erros que cometi na minha ânsia de acertar.”

Clarice Lispector

Lista de Ilustrações

2.1	Gráfico do fluxo da equação de Burgers	10
2.2	Gráfico da derivada do fluxo da equação de Burgers	10
2.3	Gráfico do fluxo da equação de Buckley-Leverett para $w = 1/2$	11
2.4	Gráfico da derivada do fluxo da equação de Buckley-Leverett para $w = 1/2$	12
2.5	Gráfico do fluxo de Tráfego para $u_{max} = 1$ e $v_{max} = 1$	14
2.6	Gráfico da derivada do fluxo de Tráfego para $u_{max} = 1$ e $v_{max} = 1$	14
2.7	Exemplo de uma condição inicial do Problema de Riemann com $u_l = 1$, $u_r = -\frac{1}{2}$ e $\bar{x} = 0$	15
3.1	Representação da malha espacial	18
3.2	Esquema ilustrativo para o esquema Lax-Friedrichs em malha deslocada.	24
3.3	Esquema ilustrativo para o Esquema NT - figura retirada de [82].	29
3.4	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 1 ^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	36
3.5	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 1 ^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	36
3.6	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 2 ^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	37
3.7	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 2 ^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	37

4.1	Exemplos de Polinômios de Legendre de Graus 0, 1, 2 e 3	51
4.2	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DG1 obtidas pelo método DG e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	54
4.3	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DG1 obtidas pelo método DG e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	54
4.4	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's	55
4.5	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's	55
4.6	Comparação entre as soluções numéricas DG1 a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's	56
4.7	Comparação entre as soluções numéricas DG1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's	56
5.1	Ilustração da variação do gradiente local para soluções não-monótonas discretizadas no tempo $t = t^n$	59
5.2	Ilustração da variação do gradiente local para soluções monótonas discretizadas no tempo $t = t^n$	60
5.3	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	65
5.4	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	65

5.5	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	66
5.6	Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	66
5.7	Comparação entre as soluções numéricas DGSL0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	67
5.8	Comparação entre as soluções numéricas DGSL0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	67
6.1	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	71
6.2	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	71
6.3	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	72
6.4	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	72
6.5	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência da Equação de Burgers, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	75
6.6	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência da Equação de Burgers, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	75

6.7	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência da Equação de Burgers, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	76
6.8	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência da Equação de Burgers, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	76
6.9	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	78
6.10	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	78
6.11	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 50 volumes e $\nu = 0.1$	79
6.12	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 100 volumes e $\nu = 0.1$	79

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho aborda o estudo e a aplicação de Esquemas Centrais de Volumes Finitos e Métodos de Galerkin Descontínuo, com suas implementações, a fim de obter alta resolução de gradientes abruptos e de soluções descontínuas, sem oscilações espúrias, em problemas hiperbólicos escalares, escritos na forma conservativa dada por:

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

com $u(x, t)$ sendo a função incógnita e $f(u)$ uma função de fluxo. Em termos de aplicações, esta lei de conservação pode modelar diferentes problemas, através da definição de diferentes funções de fluxo, tais como o escoamento de um fluido incompressível ou o escoamento simultâneo de duas fases imiscíveis em um meio poroso rígido, bem como o transporte de substâncias miscíveis nestas fases [87, 30], ou até mesmo, o fluxo de tráfego em estradas [74]. Modelos mais gerais podem ser representados para o caso de sistemas de leis de conservação, como por exemplo em acústica [40], em elasticidade [72], em eletromagnetismo [98], entre outros sistemas hiperbólicos com variação espacial dos seus coeficientes [74, 81, 38, 79, 2]. As formulações numéricas que serão apresentadas neste trabalho visam a resolução tanto de problemas escalares lineares quanto não-lineares, em uma dimensão espacial.

É bem conhecido que o esquema clássico de Lax-Friedrichs – ver e.g., [74] – é um esquema de primeira ordem que possui formulação natural no contexto de volumes finitos. Uma formulação variante semi-discreta, contínua no tempo e discreta no espaço, do esquema Lax-Friedrichs é o esquema de Lax-Friedrichs Local [74] (Local Lax Friedrichs), que visa a redução da dissipação numérica intrínseca do esquema Lax-Friedrichs. Em [82] Nessyahu e Tadmor (1990) propuseram uma forma de modificar o método Lax-Friedrichs a partir do uso de uma reconstrução linear da solução constante por partes, baseada no uso de limitadores de inclinação (*slope-limiters*). Associada ao uso de uma regra do ponto médio para a avaliação temporal do fluxo, esta estratégia conduz a um método de segunda ordem (para soluções suaves). Em um trabalho posterior [66], Kurganov e Tadmor (2000) alteraram o esquema de Nessyahu e Tadmor para construir um esquema de alta-resolução, em uma formulação semi-discreta. Em trabalhos subsequentes [78] e [77], Tadmor e colaboradores apresentaram a formulação de Galerkin Descontínuo Central (Central Discontinuous Galerkin), que é baseada na sobreposição de métodos de Galerkin Descontínuo, (DG, do inglês Discontinuous Galerkin) em uma malha original (regular) e em uma malha deslocada (dual). O ingrediente chave desta formulação é o emprego de técnicas de reconstrução das aproximações obtidas, em cada passo de tempo, nas diferentes malhas. Em resumo, a reconstrução das aproximações em cada nível de tempo, o uso de *slope-limiters* e o emprego de formulação semi-discreta, podem ser vistos como ferramentas efetivas para a construção de métodos de alta resolução para a aproximação de problemas hiperbólicos. Face aos desafios inerentes à construção de esquemas numéricos DG estáveis e motivados pelo estudo feito nos trabalhos [78] e [77], nesta dissertação propomos uma conexão entre um método DG de segunda ordem e os Esquemas Centrais de alta ordem, com o uso de *slope-limiters*, de forma a obter métodos DG de alta ordem, estáveis, baseados em formulações semi-discretas. A ideia básica é a construção de um método que use a informação das partes constantes ou lineares da solução local, calculada no método DG, juntamente com o emprego dos *slope-limiters*, para a escolha seletiva dos polinômios da base do método DG. Dessa forma se faz necessário a apresentação dos elementos básicos de Esquemas Centrais de Volumes

Finitos (Capítulo 3) e Métodos de Galerkin Descontínuo (Capítulo 4), para explicar a conexão entre essas abordagens.

1.1 Desenvolvimento dos Métodos

Métodos de Elementos Finitos (MEF ou em inglês Finite Element Methods -FEM) têm provado ser extremamente úteis na aproximação numérica de soluções de EDPs em problemas elípticos e em sistemas relacionados (como por exemplo, as equações de Darcy, sistema de Stokes, modelos de elasticidade), ou aos seus modelos parabólicos associados. Em linhas gerais, entre as possíveis razões para o sucesso do MEF estão sua aplicabilidade em geometrias computacionais gerais, de interesse em aplicações no mundo real, e da disponibilidade de ferramentas matemáticas para a análise rigorosa de erro, [20], [14], [13], [21]. No entanto, o uso de MEF (clássico) para a solução numérica de problemas hiperbólicos (ou quase hiperbólicos) é, em geral, não satisfatório. Fundamentalmente, esses problemas com predominância advectiva/convectiva, de evolução temporal, não surgem naturalmente em um contexto de minimização de funcionais em uma norma energia em espaços L^2 . Podemos observar que problemas de advecção/convecção não-lineares admitem choques (soluções descontínuas) em L^1 [42], [56], [52], [15].

É válido ainda mencionar que, o uso de MEF para tais problemas tem sido de interesse acadêmico desde década de 70 até os dias atuais. Por outro lado, métodos de volumes finitos são predominantemente usados em pacotes de software industrial para a solução numérica de sistemas de equações diferenciais hiperbólicas, especialmente na área de dinâmica dos fluidos computacional. Vários autores tentaram construir esquemas numéricos que pudessem eliminar oscilações espúrias pré-choques e pós-choques que apareciam com frequência nas soluções computacionais; veja, por exemplo, o livro [74] para uma evolução histórica até a década de 2000. O esquema de Godunov [74], [45] pode eliminar oscilações espúrias na vizinhança de ondas de choque em detrimento da baixa precisão em regiões onde o fluxo é preciso. Esquemas centrais, por outro lado, produzem

boas soluções em regiões suaves e em regiões com gradientes abruptos e com ondas de choque, mas podem ser excessivamente suprimidos pela introdução de termos dissipativos artificiais, inerentes à formulação dessa classe de métodos, que por sua vez também são localmente conservativos por construção [74],[66],[82].

Partindo da teoria matemática de leis de conservação hiperbólicas [69], Harten [54] propôs o conceito de TVD (Total Variation Diminishing, ou Variação Total Decrescente em uma livre tradução), para construção de esquemas de diferenças finitas e volumes finitos de segunda ordem, pela introdução de termos anti-difusivos (artificiais) e limitadores de inclinação para melhorar a resolução numérica de soluções envolvendo descontinuidades e choques. Muitos outros autores contribuíram para a construção de métodos com as boas propriedades TVD evitando assim oscilações espúrias na solução. Van Leer [103], por exemplo, desenvolveu limitadores de fluxo para produzir métodos de segunda ordem de precisão, mas ao mesmo tempo preservando monotonicidade para problemas hiperbólicos de valor inicial com um perfil inicial também monotônico. Contribuições importantes sobre esquemas TVD foram também feitas por Roe [95], [96], Osher [86] e Yee [108]. Além disso, muitas das ideias sobre limitadores de inclinação e de fluxo foram unificadas por Sweby [101]. Veja também a referência [74] onde são discutidas as principais ideias para a construção de esquemas centrais, associadas a outras ideias tais como formulações semi-discretas, esquemas centrais combinados com estratégia *upwind* [80], [65]. Por outro lado, mas ainda no contexto de métodos de aproximação para problemas hiperbólicos, Reed e Hill [91] publicaram um trabalho em 1973 onde propuseram uma nova classe de MEF, hoje amplamente conhecido como o método de Galerkin Descontínuo (ou simplesmente método DG) para a solução numérica do problema de transporte nuclear, que envolve uma EDP linear hiperbólica de primeira ordem. Estes métodos foram posteriormente analisados por Lesaint e Raviart, [71] e também por Johnson e Pitkranta [59]; veja também [21] para uma ampla discussão unificada de métodos DG em conexão com métodos mistos para problemas elípticos. Métodos DG exibem propriedades atraentes para a aproximação numérica de problemas do tipo hiperbólico ou quase-hiperbólico, em comparação com os métodos

MEF clássicos, como aqueles mencionados previamente neste texto. De modo amplo, ainda nos dias atuais, a aplicação de uma autêntica estratégia que seja localmente conservativa e adaptativa, incluindo técnicas de reconstrução de alta ordem, continua a ser uma tarefa computacionalmente difícil, especialmente em malhas híbridas não estruturadas. Portanto, os métodos DG surgem como uma classe atraente de métodos, teoricamente de ordem arbitrária, para a solução numérica de várias classes de EDPs, onde a formulação MEF clássica não é aplicável. Um significativo volume de métodos DG para problemas hiperbólicos tem aparecido na literatura de forma mais frequente. Aos leitores interessados sobre o assunto, sugerimos consultar os trabalhos na área [8], [22] e os trabalhos de revisão que incluem uma discussão sobre métodos DG combinados com formulações Runge-Kutta [64], [48], [28]. Veja também [49] para uma discussão sobre métodos DG com distintas formulações semi-discretas, incluindo relevantes aspectos de estabilidade, no contexto SSP (*Strong-Stability-Preserving*), que também abrange discretizações no tempo com múltiplos estágios para problemas hiperbólicos, estratégia que utilizaremos aqui para a evolução das equações diferenciais ordinárias (EDO's) decorrentes da utilização do DG.

1.2 Organização da Dissertação

O trabalho está organizado como segue. Uma breve introdução a leis de conservação, alguns modelos hiperbólicos, lineares e não-lineares e o Problema de Riemann são apresentados no Capítulo 2. No Capítulo 3 serão discutidos os aspectos chaves do problema diferencial estudado e da formulação do método dos volumes finitos e dos esquemas centrais para sua resolução numérica. O enfoque será sobre as diferentes abordagens de esquemas centrais, com o objetivo de ilustrar certas vantagens e desvantagens dessas formulações e propor melhorias das aproximações empregadas, tanto na formulação totalmente discreta como em formulações semi-discretas. Apresentaremos um conjunto simples de experimentos numéricos para um problema linear a fim de avaliar as propriedades dos esquemas que estudamos neste capítulo.

No Capítulo 4 serão discutidos conceitos fundamentais do método de Galerkin Descontínuo, também para problemas lineares e não-lineares, em particular a questão da hipótese básica de separação de variáveis, a aproximação de elementos finitos para o espaço e de Runge-Kutta no tempo. No final deste capítulo iremos apresentar alguns experimentos numéricos a fim de avaliar as soluções obtidas para o método DG utilizando como base polinômios constantes e lineares.

No Capítulo 5 discutiremos a não-monotonicidade da solução do método DG para polinômios de grau maior que zero e, após uma breve ilustração da atuação dos limitadores de fluxo, introduziremos dois algoritmos para estabilização do método DG com polinômios lineares, obtendo assim métodos de Galerkin Descontínuo de alta ordem. Além disso iremos exibir um pequeno conjunto de experimentos numéricos a fim de avaliar a eficácia de nossas propostas de estabilização, comparando-as com resultados oscilatórios exibidos no Capítulo 4.

No Capítulo 6 iremos apresentar e discutir um conjunto de experimentos numéricos para os métodos de Galerkin Descontínuo de alta ordem propostos, usando fluxos lineares e não-lineares e comparando os Esquemas Centrais de Volumes Finitos. Finalmente, Capítulo 7, apresentaremos as conclusões do trabalho.

Capítulo 2

Modelos Hiperbólicos

Neste capítulo, faremos uma breve introdução sobre as Equações Diferenciais Parciais (EDPs) hiperbólicas que serão estudadas e aproximadas por diferentes métodos numéricos nos próximos capítulos. Especificamente, vamos iniciar com a motivação física de aplicações de leis de conservação hiperbólicas, levando em conta distintas funções de fluxo. Ao final apresentaremos o problema de Riemann, que auxiliará na compreensão dos esquemas de volumes finitos e de Galerkin Descontínuo que serão apresentados nos Capítulos 3 e 4, respectivamente.

2.1 Lei de Conservação Hiperbólica

Seja $D = \Omega \times I \subset \mathbb{R}^2$, o domínio de definição do problema estudado, onde $\Omega = (a, b)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, e $I = (0, T)$ com $T > 0$ correspondendo às partes espacial e temporal de D , respectivamente. Sem perda de generalidade x denotará a variável espacial e t a variável temporal. Assim tomamos $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ a função que designa uma variável conservada e a função de fluxo $f(u)$, com imagem em \mathbb{R} . Uma lei de conservação associada a essas funções é uma equação diferencial parcial escrita na forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{2.1}$$

onde os subscritos t e x denotam as derivadas parciais com relação as variáveis t e x , respectivamente. Em geral, u representa uma função densidade, com a interpretação de que

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx$$

é a quantidade total da variável de estado relacionada, no intervalo $[x_1, x_2]$, no instante t . Neste contexto, $f(u)$ é uma função de fluxo de caráter linear ou não-linear. A equação (2.1) deverá ser acrescida de uma condição inicial e uma condição de contorno (em domínios limitados), definindo assim um problema de valor inicial e de contorno. Uma lei de conservação escrita segundo a forma diferencial (2.1), também chamada de forma forte, exige que as funções u e f possuam maior regularidade do que em sua forma fraca, como será visto adiante [102], [73]. Em geral, os problemas físicos relacionados são expressos como relações integrais. Ao considerar uma formulação integral, o espaço onde a solução é definida é consideravelmente aumentado, permitindo inclusive a busca por soluções descontínuas. Podemos considerar diferentes formas integrais ([102] e [18]). Por exemplo, considerando um volume de controle $V = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ no plano (x, t) e integrando a equação (2.1) entre x_1 e x_2 , obtemos a forma integral, também chamada de forma fraca,

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)). \quad (2.2)$$

2.2 Exemplos de Leis de Conservação Escalares

Apresentamos a seguir alguns exemplos de leis de conservação hiperbólicas escalares amplamente conhecidas na literatura, destacando as funções de fluxo que as definem.

2.2.1 Equação de Advecção Linear

Se tomarmos

$$f(u) = au, \quad (2.3)$$

para algum parâmetro $a \in \mathbb{R}$, podemos definir a equação de advecção linear como sendo:

$$u_t + au_x = 0. \quad (2.4)$$

Esta equação representa a equação da onda, ou equação do transporte advectivo, ao longo do espaço e do tempo. A solução exata desta equação diferencial parcial é a translação da condição inicial, ou seja, se para $t = 0$ temos que

$$u(x, 0) = \eta(x),$$

então

$$u(x, t) = \eta(x - at).$$

Neste problema, a variável a denota a velocidade com que a informação é propagada no domínio.

2.2.2 Equações de Burgers

A equação de Burgers é originalmente dada por

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \beta u_{xx},$$

com $\beta > 0$, enquanto sua versão não-viscosa é definida como

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad (2.5)$$

à qual vamos nos referir somente por Equação de Burgers. Esta equação pode ser diretamente obtida da lei de conservação (2.1) através do emprego do fluxo convexo

$$f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad (2.6)$$

ilustrado na Figura 2.1, cuja derivada em relação a u é apresentada na Figura 2.2.

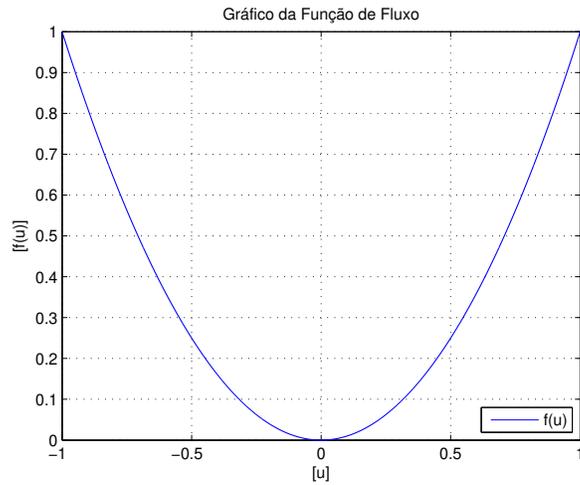


Figura 2.1: Gráfico do fluxo da equação de Burgers

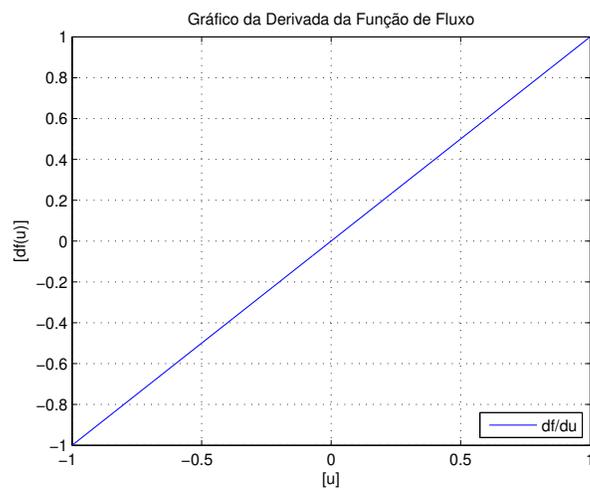


Figura 2.2: Gráfico da derivada do fluxo da equação de Burgers

2.2.3 Equação de Buckley-Leverett

A equação de Buckley-Leverett está associada ao problema de transporte bifásico e o fluxo é não-convexo. Se tomarmos

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + w(1-u)^2}, \quad (2.7)$$

onde w denota a razão de viscosidade de dois fluidos imiscíveis que escoam em um meio poroso, definimos a Equações de Buckley-Leverett como sendo:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{u^2 + w(1-u)^2} \right)_x = 0. \quad (2.8)$$

Nas Figuras 2.3 e 2.4 apresentamos os gráficos da função de fluxo da Equação de Buckley-Leverett e de sua derivada em relação a u , respectivamente, para $w = 1/2$.

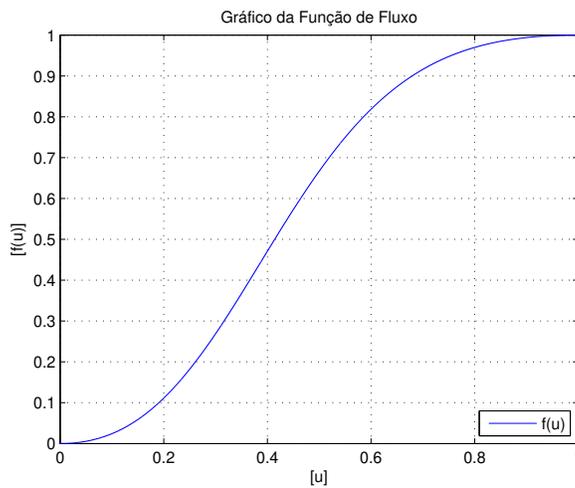


Figura 2.3: Gráfico do fluxo da equação de Buckley-Leverett para $w = 1/2$

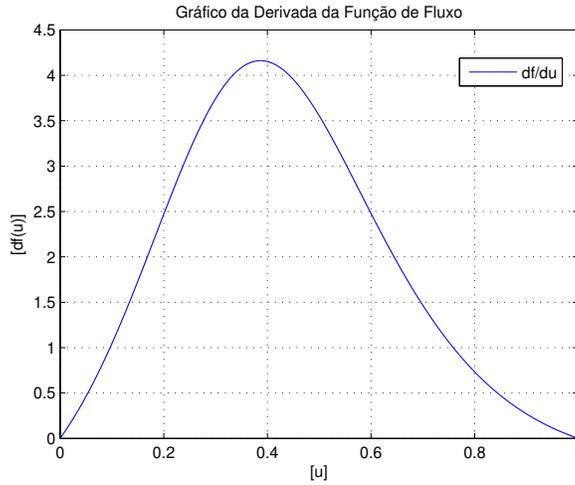


Figura 2.4: Gráfico da derivada do fluxo da equação de Buckley-Leverett para $w = 1/2$

2.2.4 Traçador-Passivo

O problema traçador passivo [11], em seu caso unidimensional, diz respeito à concentração $u(x, t)$ de uma substância miscível em uma fase que escoar, e pode ser apresentado através da equação (2.1) com o fluxo mássico dado por

$$f(u) = v(x)u - d(x)u_x, \quad (2.9)$$

onde $d(x) > 0$ é uma função que mede a difusão da substância (dada pela Lei de Fick) e $v(x)$ é a velocidade de escoamento. Sob as hipóteses de incompressibilidade do fluido

$$v_x = 0 \quad (2.10)$$

e de difusão homogênea, a equação (2.1) recai sobre a clássica equação do transporte advectivo-difusivo

$$u_t + vu_x - du_{xx} = 0. \quad (2.11)$$

Para os casos em que a difusão pode ser desprezada a equação (2.11) se torna análoga à equação da advecção linear (2.4)

$$u_t + vu_x = 0. \quad (2.12)$$

2.2.5 Fluxo de Tráfego

Seja agora $0 \leq u(x, t) \leq u_{\max}$ a densidade de carros em um dado ponto (x, t) do domínio e v a velocidade em que os veículos transitam. O problema de Fluxo de Tráfego (*Traffic Flow*) [74] modela a densidade de carros que circulam em uma estrada, podendo ser descrito pelo emprego do fluxo

$$f(u) = v_{\max} u \left(1 - \frac{u}{u_{\max}} \right), \quad (2.13)$$

onde v_{\max} é a máxima velocidade permitida para o tráfego dos veículos. Este fluxo leva em consideração a variação da velocidade como função da densidade de veículos, segundo a relação

$$v(u) = v_{\max} \left(1 - \frac{u}{u_{\max}} \right). \quad (2.14)$$

Note que pela equação (2.14), quando a densidade é máxima ($u = u_{\max}$), a velocidade se anula, indicando engarrafamento. Já quando a densidade é nula ($u = 0$), os veículos trafegam à velocidade máxima. No entanto, sob o ponto de vista da equação (2.13), o fluxo se anula para ambos os casos, já que para o último caso a rodovia se encontra vazia. Nas Figuras 2.5 e 2.6 apresentamos os gráficos da função de fluxo e de sua derivada em relação a u , respectivamente, para $u_{\max} = 1$ e $v_{\max} = 1$.

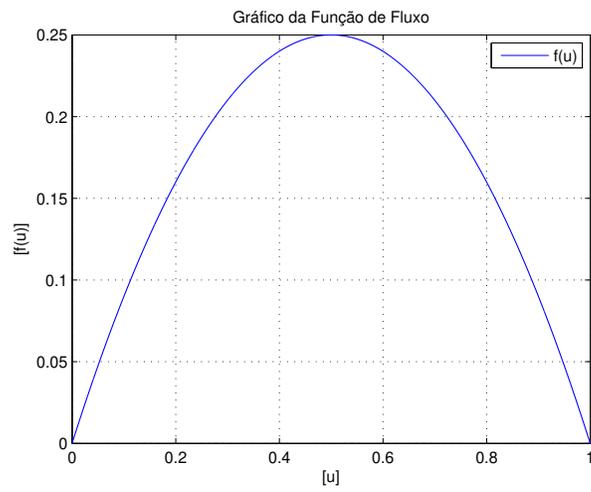


Figura 2.5: Gráfico do fluxo de Tráfego para $u_{max} = 1$ e $v_{max} = 1$.

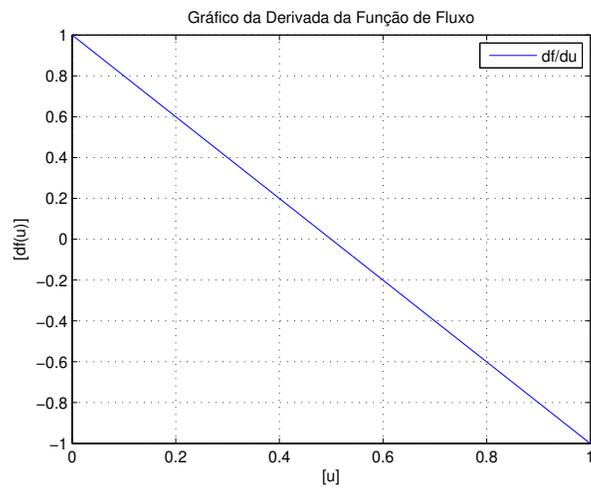


Figura 2.6: Gráfico da derivada do fluxo de Tráfego para $u_{max} = 1$ e $v_{max} = 1$.

2.3 O Problema de Riemann

A lei de conservação (2.1) junto com uma condição inicial possuindo uma descontinuidade em um ponto, constitui um problema de valor inicial conhecido como Problema de Riemann [73]. Mais especificamente, tomamos a condição inicial

$$u_0(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{se } -\infty < x < \bar{x} \\ u_r & \text{se } \bar{x} < x < \infty \end{cases}$$

onde \bar{x} é o ponto de mudança do estado à esquerda u_l para o estado à direita u_r . A solução do Problema de Riemann depende fortemente da função de fluxo $f(u)$ que está sendo utilizada, podendo gerar soluções que contenham ondas de choque, rarefação, etc [102], [73]. A solução numérica deste problema será explorada nos capítulos a seguir, a partir do emprego de métodos de volumes finitos e de métodos de Galerkin Descontínuo, utilizando funções de fluxo lineares e não-lineares. Abaixo temos um gráfico com um exemplo de condição inicial associada ao Problema de Riemann.

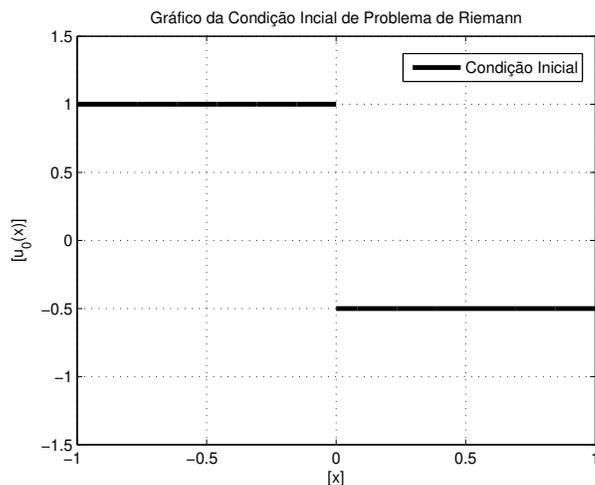


Figura 2.7: Exemplo de uma condição inicial do Problema de Riemann com $u_l = 1$, $u_r = -\frac{1}{2}$ e $\bar{x} = 0$.

Capítulo 3

Esquemas de Volumes Finitos Centrais

Neste capítulo, iremos discutir esquemas numéricos para a resolução de equações hiperbólicas unidimensionais (apresentadas no Capítulo 2), baseados em esquemas de volumes finitos centrais do tipo de Godunov [74] e [73], abordando seu processo de construção. Tais esquemas são construídos a partir da integração da lei de conservação (2.1) sobre volumes de controle contendo os leques de Riemann que surgem nas fronteiras das células. Na primeira seção vamos introduzir a nomenclatura e definições usuais, às quais utilizaremos na composição dos esquemas de volumes finitos e, também, dos métodos de Galerkin Descontínuo que serão apresentados nos Capítulos 4 e 5. Iniciaremos com o estudo dos esquemas de primeira ordem Lax-Friedrichs [74] e Lax-Friedrichs Local [74] e [18], abordando a dependência da difusão artificial com o passo de tempo utilizado. Em seguida, serão introduzidos os esquemas de alta ordem propostos por Nessyahu e Tadmor [82] e por Kurganov e Tadmor [66]. Para obter alta ordem, estes esquemas fazem uso de reconstruções lineares, que por sua vez empregam o conceito de limitadores de inclinação. Neste contexto, também será comentado o uso de diferentes limitadores, que nortearão a construção dos métodos de Galerkin Descontínuo a serem apresentados no Capítulo 5. Na referência [74] encontramos um rico conteúdo sobre volumes finitos e leis de conservação escalares, de onde retiramos as definições de convergência, estabilidade e consistência adotadas neste trabalho.

3.1 Nomenclatura para Problemas Discretos

Introduziremos aqui a definição da partição do intervalo e suas respectivas células primais e duais, conceitos com os quais lidaremos durante todo o texto. Seja $\{x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{m+1}\}$ uma partição fixa do intervalo Ω , com $j, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq m$, tal que $x_0 = a$ e $x_{m+1} = b$, onde m representa o número de nós internos x_j da malha física. Tome ainda

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{x_{j+1} + x_j}{2}.$$

Vamos considerar dois sub-intervalos:

$$C_j = \left(x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right) \tag{3.1}$$

de comprimento $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$, como sendo a célula primal (elemento primal) e

$$C_{j+\frac{1}{2}} = (x_j, x_{j+1}) \tag{3.2}$$

de comprimento $\Delta x_{j+1/2} = x_{j+1} - x_j$ como sendo a célula dual (elemento dual). Por questão de simplicidade, tomaremos uma partição regular do domínio, no sentido de que todas as células C_j ou $C_{j+1/2}$ possuem o mesmo comprimento Δx . Note que com esta construção temos que $x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{\Delta x}{2}$. Abaixo temos uma representação de nossa malha física.

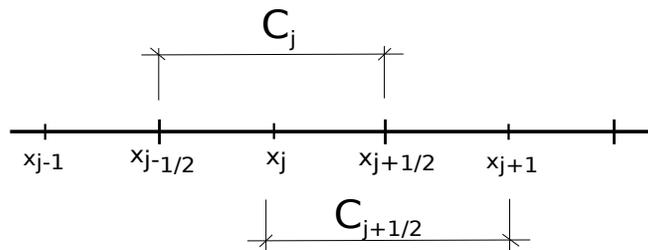


Figura 3.1: Representação da malha espacial

O objetivo dos esquemas apresentados é determinar uma aproximação para a função $u(x, t)$ em um dado tempo t^n e em alguma célula C_j , com $i \in \mathbb{N}$. Para isso definimos U_j^n como sendo uma aproximação do valor médio de $u(x, t)$ no tempo t^n sobre a célula C_j e calculado por:

$$U_j^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u(x, t^n) dx.$$

3.2 Conceitos Fundamentais

Iniciamos com a integração da lei de conservação (2.1) sobre uma célula C_j , que pode ser vista como a restrição da equação (2.2) à célula C_j :

$$\frac{d}{dt} \int_{C_j} u(x, t) dx = f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)).$$

Integrando com relação a variável t em (t^n, t^{n+1}) , temos que:

$$\int_{C_j} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{C_j} u(x, t^n) dx = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt.$$

Dividindo a equação anterior por Δx e rearrumando, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u(x, t^{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{C_j} u(x, t^n) dx \\ &- \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Definindo $h_{j+\frac{1}{2}}$ como sendo uma aproximação para o fluxo médio ao longo de $x = x_{j+\frac{1}{2}}$ temos que:

$$h_{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt.$$

onde definimos $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Sob as novas notações podemos reescrever a equação (3.3) como:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}), \quad (3.4)$$

ou ainda, para o caso particular em que $h_{j+1/2} = h(U_j^n, U_{i+1}^n)$

$$U_i^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (h(U_j^n, U_{j+1}^n) - h(U_{j-1}^n, U_j^n)). \quad (3.5)$$

O fluxo numérico h deve ser consistente com o fluxo físico [74] e [73], no sentido de que

$$h(u, u) = h(u). \quad (3.6)$$

O esquema (3.4) pode ser equivalentemente escrito na forma de diferenças

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0. \quad (3.7)$$

Estas formas são chamadas de *conservativas*, uma vez que somando em um grupo de células, por exemplo, do índice j_{\min} ao índice j_{\max} , temos

$$\Delta x \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} U_j^{n+1} = \Delta x \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} U_j^n - \Delta t \left[h_{j_{\max}+\frac{1}{2}} - h_{j_{\min}-\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.8)$$

Nesta equação, o lado esquerdo representa a quantidade total da variável conservada presente no sistema no novo instante de tempo e o primeiro termo do lado direito representa esta quantidade no instante anterior. Dentro dos colchetes estão apenas os termos de fluxo que não se anulam no somatório, representando o fluxo das variáveis conservadas através dos extremos do intervalo analisado. De fato, a equação (3.8) representa a correta descrição da lei integral (2.2), sendo válida mesmo na presença de ondas de choque, contato, etc [97].

A função de fluxo numérico define se o esquema resultante será convergente, ou seja, se a

solução numérica converge para a solução exata da equação diferencial quando Δx e Δt tendem para zero. Isto geralmente requer duas condições:

Consistência: O esquema deve ser consistente no sentido que, localmente, se aproxima da equação original.

Estabilidade: O esquema deve ser estável, ou seja, pequenos erros obtidos em um dado passo de tempo não crescem de forma descontrolada no passo de tempo seguinte.

A relação entre estas duas condições e a convergência do esquema, é ditada pelo Teorema da Equivalência de Lax [74]:

Teorema 3.2.1 (Teorema da Equivalência de Lax). Dado um esquema numérico para equações diferenciais lineares, este esquema numérico é convergente se, e somente se, for estável e consistente.

Outro aspecto importante relacionado a convergência do método é a condição CFL (devida a Courant, Friedrichs e Levy [31]) que pode ser descrita por:

Condição CFL: O método numérico é convergente quando o domínio de dependência numérico contém o domínio de dependência verdadeiro da equação diferencial parcial.

Esta é uma condição necessária para a convergência de esquemas de volumes finitos explícitos para equações hiperbólicas [74]. Finalmente, é conveniente apresentar o número de Courant que, no caso da lei de conservação hiperbólica (2.1) pode ser definido como:

$$\nu = a \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.9)$$

onde a é dado por:

$$a = \max_u |f'(u)|. \quad (3.10)$$

Como veremos, o controle do número de Courant pode prevenir o surgimento de oscilações espúrias que comprometem as informações conforme o método evolui.

3.3 Algoritmo de Godunov

O algoritmo de Godunov, proposto inicialmente por S.K. Godunov (1959) [44], é aplicado para a construção de esquemas de volumes finitos e das classes Central e *Upwind*, por exemplo. Vamos enunciar aqui a versão deste algoritmo encontrado em [74]. Este algoritmo, denominado REA (do inglês *Reconstruct, Evolve and Average*) consiste em três etapas: Reconstrução, Evolução e Projeção, que são descritos a seguir:

1. Reconstruir a função $u(x, t^n)$ através de uma função polinomial por partes $\tilde{u}^n(x, t^n)$ definida para todo x , em cada uma das células C_j a partir dos valores médios U_j^n . Neste passo escolhemos uma função polinomial por partes que vai ser localmente uma aproximação para a função $u(x, t)$ na célula C_j .
2. Evoluir a equação hiperbólica exata (ou aproximada) a partir dos dados iniciais estabelecidos no passo anterior e obter $U_{D_j}^{n+1}$, após o tempo Δt , onde D_j designa uma célula de um novo domínio.
3. De posse da solução numérica $U_{D_j}^{n+1}$ (ou sua reconstrução), a projetamos sobre cada célula da malha original para obter os novos valores médios U_i^{n+1} .

3.4 O Esquema de Lax-Friedrichs

O esquema de Lax-Friedrichs [67] é conhecido como o precursor dos esquemas centrais. No contexto do algoritmo REA, este esquema pode ser deduzido utilizando reconstrução direta, ou seja as funções constantes por partes U_j^n . O passo evolutivo se dá sobre a malha dual, ou seja,

tomamos $D_j = C_{j+1/2}$ conforme definido em (3.2), conduzindo a

$$\begin{aligned} U_{C_{j+1/2}}^{n+1} &\equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^{n+1}) dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{C_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^n) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{j+1}, t)) - f(u(x_j, t))] dt \end{aligned}$$

O primeiro termo do lado direito pode ser integrado analiticamente e fornece:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{C_{j+1/2}} \tilde{u}(x, t^n) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1/2}} U_j^n dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j+1/2}}^{x_{j+1}} U_{j+1}^n dx \\ &= \frac{1}{2} (U_j^n + U_{j+1}^n). \end{aligned}$$

Já o segundo termo do lado direito pode ser aproximado utilizando a regra

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(t) dt = \Delta t f(t^n) + O(\Delta t^2)$$

levando à aproximação

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(u(x_{j+1}, t)) - f(u(x_j, t))] dt \approx \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)]$$

onde desprezamos o termo $O(\Delta t)$. Com isso chegamos a expressão do valor médio sobre a célula dual $C_{j+1/2}$ no instante $t = t^n + \Delta t$, dado por

$$U_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (U_j^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(U_{j+1}^n) - f(U_j^n)], \quad (3.11)$$

onde omitimos a notação da célula, no subíndice.

Uma vez que estamos lidando com soluções constantes por partes, em células uniformes, a projeção, que é o passo final do algoritmo REA, pode ser dada pela simples média dos valores

obtidos nas células da malha dual, ou seja

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1/2}^{n+1} + U_{j-1/2}^{n+1}). \quad (3.12)$$

A expressão dada em (3.11) é uma versão em malha deslocada do Esquema de Lax-Friedrichs apresentada em [82] ao qual fazemos o passo de Projeção, segundo o Algoritmo REA, em (3.12). A versão clássica e amplamente difundida do Esquema de Lax-Friedrichs (LxF) [74] o qual estudaremos aqui é dada por:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)]. \quad (3.13)$$

A Figura 3.2 mostra geometricamente o procedimento descrito para a dedução do esquema LxF [82], com exceção da projeção sobre a malha original.

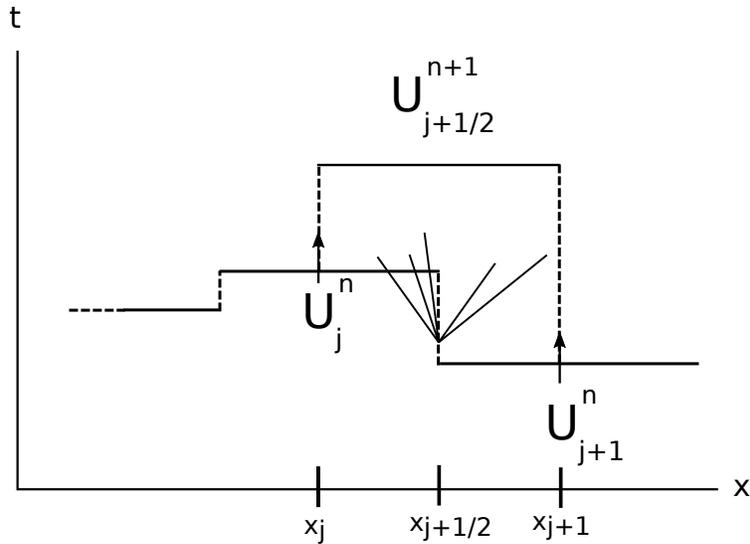


Figura 3.2: Esquema ilustrativo para o esquema Lax-Friedrichs em malha deslocada.

Rearranjando os termos de (3.13) na forma (3.5), encontramos o fluxo numérico do Esquema

LxF Clássico:

$$h_{j+1/2} \equiv h(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{2}(f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)) - \frac{\Delta x}{2\Delta t}(U_{j+1}^n - U_j^n). \quad (3.14)$$

Este fluxo pode ser interpretado como o fluxo médio, que é conhecidamente instável [74], mais um termo de correção que introduz uma difusão artificial, estabilizadora. De fato, a introdução desta difusão artificial fica clara se rearranjarmos o esquema LxF (3.13) na forma de diferenças finitas

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)}{2\Delta x} - \beta \left(\frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{\Delta x} \right) = 0, \quad (3.15)$$

onde

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t}.$$

que é o esquema obtido para a aproximação da equação de advecção-difusão

$$u_t + (f(u))_x - \beta u_{xx} = 0$$

utilizando-se diferenças centradas para o cálculo das derivadas primeira e segunda no espaço. Assim, fixando $\Delta t/\Delta x$ e refinando a malha, o coeficiente β tende a zero, garantindo a consistência do esquema. Embora seja a responsável pela estabilidade do método, esta difusão pode comprometer seriamente a qualidade do resultado numérico. Recordando a condição CFL, para casos em que a velocidade de propagação seja muito alta e seja adotada uma discretização espacial fixa, é necessário o emprego de passos de tempo muito pequenos, o que ocasiona uma difusão artificial excessiva, uma vez que β será inversamente proporcional a Δt .

3.5 O Esquema de Lax-Friedrichs Local

Uma possibilidade para superar os efeitos causados pela excessiva dissipação do esquema LxF é o emprego de uma formulação semi-discreta, contínua no tempo e discreta no espaço. Observamos

que o esquema LxF não admite tal contrapartida semi-discreta, uma vez que se tomarmos $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ na equação (3.15) temos

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{x_j} = -\frac{f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)}{2\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} (U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t}$$

que torna-se ilimitado. Este fato pode ser visto como uma consequência do fluxo numérico (3.14).

Este fluxo pode ser escrito como um caso particular do fluxo numérico

$$h_{j+1/2} = \frac{1}{2} [f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n) - a (U_{j+1}^n - U_j^n)] \quad (3.16)$$

para o caso em que a viscosidade numérica

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

é fixada em termos dos parâmetros de discretização. A ideia do esquema de Lax-Friedrichs Local (LLxF) [92, 74] é substituir essa viscosidade fixa por um valor calculado localmente

$$h_{j+1/2}^L \equiv h^L(U_j^n, U_{j+1}^n) = \frac{1}{2} [f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n) - a_{j+1/2} (U_{j+1}^n - U_j^n)] \quad (3.17)$$

onde

$$a_{j+1/2} = \max_u |f'(u)| \quad (3.18)$$

para u entre U_j^n e U_{j+1}^n . Este método pode ser escrito na seguinte forma semi-discreta

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{x_j} = -\frac{h^L(U_j^n, U_{j+1}^n) - h^L(U_{j-1}^n, U_j^n)}{\Delta x} \quad (3.19)$$

cujas equações compõem um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, na forma

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{H}^L(\mathbf{U}) \quad (3.20)$$

onde \mathbf{U} e \mathbf{H}^L são vetores cuja dimensão é igual ao número de células. As componentes de \mathbf{U} e \mathbf{H}^L são diretamente obtidas a partir da equação (3.19), e sua resolução pode se dar a partir do emprego de métodos de Runge-Kutta de alta ordem [50], como será discutido no final deste capítulo. Diferentemente do esquema LxF, onde a difusão numérica cresce com a redução do passo de tempo, a difusão numérica do esquema LLxF é $O(\Delta x)$

3.6 O Esquema de Nessyahu-Tadmor

Uma extensão natural de alta ordem do esquema LxF é apresentada por Nessyahu e Tadmor em [82] onde as aproximações (de primeira ordem) constantes por partes são substituídas por aproximações (de segunda ordem) lineares por partes do tipo MUSCL (*Monotone Upstream-Centered Schemes for Conservation Laws* [74]) reconstruídas a partir dos dados constantes por partes. No contexto do algoritmo REA, o primeiro passo (Reconstrução) é realizado a partir de aproximações lineares construídas com base nos valores médios U_j^n , dadas por

$$L_j^n(x) = U_j^n + (x - x_j) \frac{1}{\Delta x} \partial U_j^n, \quad (3.21)$$

onde ∂U_j^n é uma derivada numérica que satisfaz

$$\frac{1}{\Delta x} \partial U_j^n = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_j, t^n)} + O(\Delta x). \quad (3.22)$$

A característica não oscilatória do esquema reside na escolha apropriada desta derivada numérica que, em geral, é feita com o uso de limitadores de fluxo [74, 70]. Um exemplo de reconstrução

do tipo (3.21) que satisfaz a condição de diminuição da variação total (TVD) [66, 74], é obtida a partir do uso do limitador minmod, dado por

$$\partial U_j^n = \text{minmod} \left(U_j^n - U_{j-1}^n, U_{j+1}^n - U_j^n \right) \quad (3.23)$$

onde a função minmod é definida (para vários argumentos) como

$$\text{minmod}(x_1, x_2, \dots) = \begin{cases} \min_i \{x_i\} & \text{se } x_i > 0 \ \forall i, \\ \max_i \{x_i\} & \text{se } x_i < 0 \ \forall i, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O segundo passo do algoritmo REA, se baseia na evolução sobre uma célula da malha dual, exatamente como no caso do esquema LxF.

$$U_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} L_j^n(x) dx + \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} L_{j+1}^n(x) dx \right] - \frac{1}{\Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} [f(L(x_{j+1}, t)) - f(L(x_j, t))] dt. \quad (3.24)$$

Se as funções $f(L(x_j, t))$ e $f(L(x_{j+1}, t))$ são suficientemente suaves, elas podem ter suas integrais aproximadas com a regra do ponto médio obtendo um erro de truncamento local da ordem de $O(\Delta t)^3$. Além disso considerando $u(x_j, t^n + \Delta t/2)$ e expandindo em torno do ponto (x_j, t^n) , temos que:

$$u(x_j, t^n + \Delta t/2) = u(x_j, t^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} f'(u(x_j, t^n)) + O(\Delta t^2).$$

Com as aproximações dadas anteriormente obtemos uma aproximação de segunda ordem para $U_{j+\frac{1}{2}}(t^{n+1})$. Omitindo o cálculo das integrais, chegamos à seguinte expressão para o passo de evolução do método NT:

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{2}[U_j^n + U_{j+1}^n] + \frac{1}{8}[\partial U_j^n - \partial U_{j+1}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(U_{j+1}^{n+1/2}) - f(U_j^{n+1/2})], \quad (3.25)$$

onde calculamos o termo $U_j^{n+1/2}$ como sendo:

$$U_j^{n+1/2} = U_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} f'(U_j^n). \quad (3.26)$$

Com relação ao terceiro passo do algoritmo de Godunov, que corresponde a Projeção, podemos usar uma nova reconstrução e projetá-la sobre a malha primal, ou simplesmente tomar a média como feito no esquema LxF. A Figura 3.3 mostra geometricamente o procedimento descrito pelo método NT, com exceção da parte de projeção sobre a malha original.

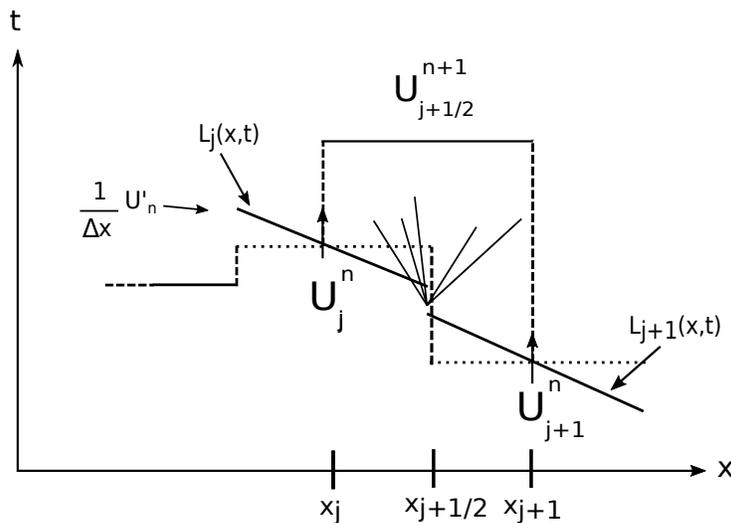


Figura 3.3: Esquema ilustrativo para o Esquema NT - figura retirada de [82].

Por utilizar reconstruções de segunda ordem, o esquema Nessyahu-Tadmor (NT) possui difusão numérica $O(\Delta x^{2r}/\Delta t)$, onde r é a ordem formal do método (no caso, $r = 2$), consideravelmente menor do que a do esquema LxF [82]. Contudo, essa redução não contorna as dificuldades quando passos de tempo pequenos são empregados. Na próxima seção apresentaremos a contrapartida de alta ordem do esquema LLxF, que também pode ser apresentado segundo uma formulação semi-discreta, evitando a dependência da difusão com o passo de tempo.

3.7 O Esquema de Kurganov-Tadmor

Seguindo a idéia do algoritmo REA, Kurganov e Tadmor apresentaram em [66] uma versão de alta ordem do esquema LLxF, também baseada em aproximações lineares por partes do tipo MUSCL. Este esquema utiliza informações locais para obter estimativas mais precisas da espessura dos leques de Riemann. A solução é então evoluída separadamente em volumes de controle definidos sobre regiões não-suaves (que contêm os leques de Riemann) e suaves.

Após a evolução, os dados distribuídos de maneira não-uniforme são projetados sobre a malha original [18, 66, 30]. A formulação semi-discreta do esquema Kurganov-Tadmor (KT) possui difusão numérica $O(\Delta x^3)$ [66], não padecendo da excessiva dissipação presente no esquema NT [1, 30] em decorrência de pequenos passos de tempo.

O esquema KT utiliza o valor absoluto das velocidades de propagação nas faces das células para calcular o passo evolutivo do algoritmo REA em novas células, de tamanho proporcional a tais velocidades (ver [66, 30]). Assim como o esquema LLxF, o esquema KT pode ser escrito através da definição do fluxo numérico

$$h_{j+1/2}^{\text{KT}} = \frac{1}{2} \left[f(U_{j+1/2}^-) + f(U_{j+1/2}^+) - a_{j+1/2} (U_{j+1/2}^+ - U_{j+1/2}^-) \right] \quad (3.27)$$

onde

$$U_{j+1/2}^+ = U_{j+1}^n - \frac{\Delta x}{2} \partial U_{j+1}^n, \quad (3.28)$$

$$U_{j+1/2}^- = U_j^n + \frac{\Delta x}{2} \partial U_j^n, \quad (3.29)$$

e

$$a_{j+1/2} = \max_u |f'(u)| \quad (3.30)$$

para $u(x, t^n)$ entre $U_{j+1/2}^-$ e $U_{j+1/2}^+$. Este método pode ser escrito na seguinte forma semi-discreta

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{x_j} = - \frac{h_{j+1/2}^{\text{KT}} - h_{j-1/2}^{\text{KT}}}{\Delta x} \quad (3.31)$$

que recai no sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{H}^{\text{KT}}(\mathbf{U}). \quad (3.32)$$

3.8 O Algoritmo de Runge-Kutta

Segundo [18], aproximações de alta ordem no tempo podem ser obtidas através do uso de esquemas de Runge-Kutta, como os apresentados em [31, 50], obtidos pela combinação convexa de métodos de Euler. Princípios do máximo para tais esquemas podem ser encontrados em [66]. De acordo com [92], é suficiente exigir a restrição

$$\frac{\Delta t_{RK}}{\Delta x} \max_w |f'(w)| < TRK \quad (3.33)$$

onde $1 \leq TRK \leq 1,5$ para garantir a estabilidade ao esquema numérico Kurganov-Tadmor. Considerando a equação semi-discreta na forma (3.32) e denotando o seu lado direito por $\mathbf{H}[\mathbf{U}]$, os esquemas modificados de Euler, usados neste trabalho, serão da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1 &= \mathbf{U}^n + \Delta t^n \mathbf{H}[\mathbf{U}^n] \\ \mathbf{U}^{l+1} &= n_l \mathbf{U}^n + (1 - n_l)(\mathbf{U}^l + \Delta t^n \mathbf{H}[\mathbf{U}^l]), l = 1, 2, \dots, r-1 \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^r \end{aligned} \quad (3.34)$$

para o esquema de segunda ordem, $r = 2$ e $n_1 = \frac{1}{2}$, para o esquema de terceira ordem, $r = 2$, $n_1 = \frac{3}{4}$ e $n_2 = \frac{1}{3}$.

3.9 Experimentos Numéricos para os Esquemas Centrais

Nesta seção apresentaremos estudos numéricos comparativos para os esquemas centrais estudados neste capítulo, para ilustrar suas características de estabilidade e a influência da difusão numérica sobre as soluções obtidas. Para facilitar a descrição de nossos experimentos descrevemos o valor do refinamento da malha por Δx e o número de volumes por nv , o número de passos no tempo por nt , o tamanho do passo de tempo por Δt , o tempo total de simulação T . A variável ν denota o número de Courant. Nos experimentos numéricos dados ν e Δx , vamos escolher

$$\Delta t_{\text{CFL}} = \left(\frac{\nu \Delta x}{a} \right), \quad (3.35)$$

onde a é calculado da seguinte forma:

$$a = \max_{u \in I} |f'(u)|,$$

onde I é a imagem de u em $\Omega = [0, L]$. O número de passos no tempo deve ser tal que:

$$nt \geq \frac{T}{\Delta t_{\text{CFL}}}, \quad (3.36)$$

logo, nos experimentos numéricos iremos tomar:

$$nt = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t_{\text{CFL}}} \right\rfloor + 1, \quad (3.37)$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função *menor inteiro*. Assim, finalmente, podemos tomar o seguinte passo de tempo

$$\Delta t = \frac{T}{nt}, \quad (3.38)$$

que atenderá o requisito de estabilidade sendo menor do que o limite superior dado pela equação (3.35). Assim em nossos experimentos numéricos não precisamos fornecer o número de passos tempo, mas apenas o número de Courant, o número de elementos e uma condição inicial e todos os outros parâmetros são calculados. Utilizaremos o Método do Runge-Kutta de 2ª Ordem para os Esquemas Centrais semi-discretos. Iremos nos referir aos esquemas centrais de volumes finitos como na lista abaixo:

- Lax-Friedrichs (LxF)
- Local Lax-Friedrichs (LLxF)
- Nessyahu-Tadmor (NT)
- Kurganov Tadmor (KT)

Lembremos que na expressão (3.25) referente ao esquema NT e nas expressões auxiliares (3.28) e (3.29) referentes ao esquema KT fazemos uso do limitador minmod, dado em (3.23), para aproximar as derivadas numéricas ∂U_i^n . Em [82], [66] e [74] encontramos um limitador mais geral, chamado *limitador MC*, que faz uso de um parâmetro adicional denotado por α . Ao particularizarmos $\alpha = 1$, o limitador MC reproduz exatamente o limitador minmod definido em (3.23). A propriedade TVD [54] dos esquemas NT e KT é dependente da escolha deste parâmetro α , como explorado em [82] e [66] respectivamente. Além disso, para cada escolha do parâmetro α temos uma condição CFL (em termos dos parâmetros discretizados Δt , Δx e a , sendo este último definido em (3.10)) da forma:

$$\nu < \gamma, \tag{3.39}$$

onde γ é uma constante que depende da escolha do parâmetro α , ou seja, $\gamma = \gamma(\alpha)$ e o número de Courant ν está definindo em (3.9). Em nosso caso escolhemos $\alpha = 1$ em ambos os esquemas, NT e KT, esta escolha garante a estabilidade dos esquemas estudados, uma vez que para tal escolha,

$\gamma < \frac{1}{2}$ no esquema NT [82] e $\gamma < \frac{1}{8\epsilon}$ no esquema KT [66], onde ϵ é uma constante que depende do número de estágios empregados na aplicação do Algoritmo de Runge-Kutta ao Método KT.

Neste conjunto de testes, estudaremos as soluções numéricas obtidas por estes esquemas na resolução da equação de advecção linear (2.4)

$$u_t + au_x = 0,$$

cuja solução exata

$$u(x, t) = u_0(x - at).$$

Iremos simular um problema de fronteira livre com a condição inicial do tipo “pulso” que é descrita por:

$$u_0(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < x_1, \\ 1 & \text{se } x_1 \leq x < x_2, \\ 0 & \text{se } x_2 \leq x < L, \end{cases}$$

Em todos os experimentos serão tomados como parâmetros:

- $L = 1.0$, $x_1 = 0.1$ e $x_2 = 0.5$
- $a = 1.0$
- $\nu = 0.1$
- $T = 0.2$

Dividimos as simulações em 2 grupos: o primeiro deles para esquemas Centrais de primeira ordem e o segundo para esquemas Centrais de alta ordem. Na Figura 3.4 apresentamos as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de primeira ordem LxF e LLxF para uma malha de 50 volumes. Estes resultados mostram uma alta difusão numérica, com destaque para a difusão introduzida pelo esquema LxF. Os resultados obtidos com uma malha mais refinada, de 100 volu-

mes, apresentados na Figura 3.5, evidenciam uma sensível melhora dos resultados para o esquema LLxF, contudo o esquema LxF continua excessivamente difusivo, como previsto na análise teórica.

Dentre os esquemas de segunda ordem o KT é o menos difusivo quando comparado ao NT, em parte ao uso de uma estratégia semi-discreta, diminuindo o fator de difusividade numérica. As Figuras 3.6 e 3.7 nos mostram que, assim como no caso dos esquemas de primeira ordem, o aumento do número de volumes nos conduz a resultados mais precisos. Claramente os esquemas de segunda ordem são menos difusivos que os esquema de primeira ordem.

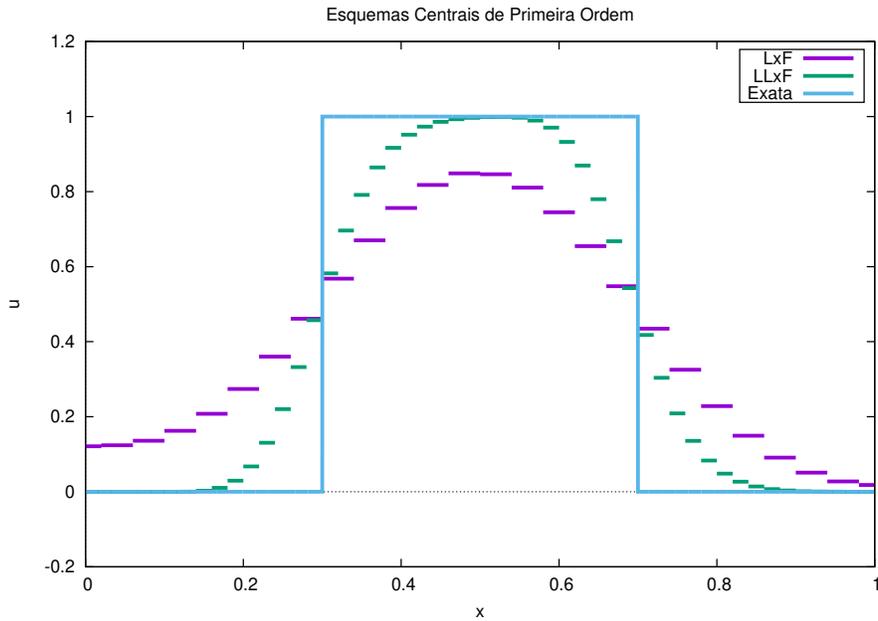


Figura 3.4: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 1^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

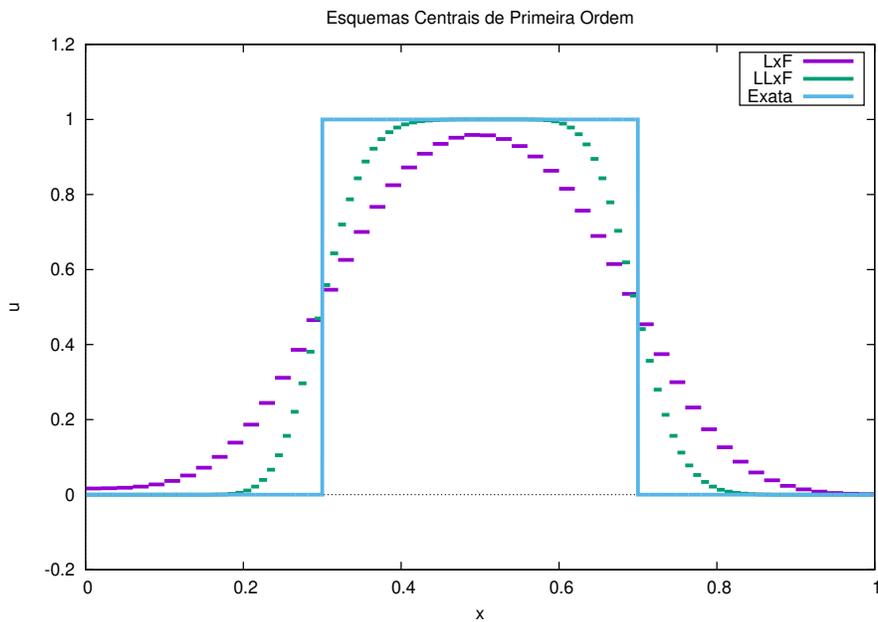


Figura 3.5: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 1^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

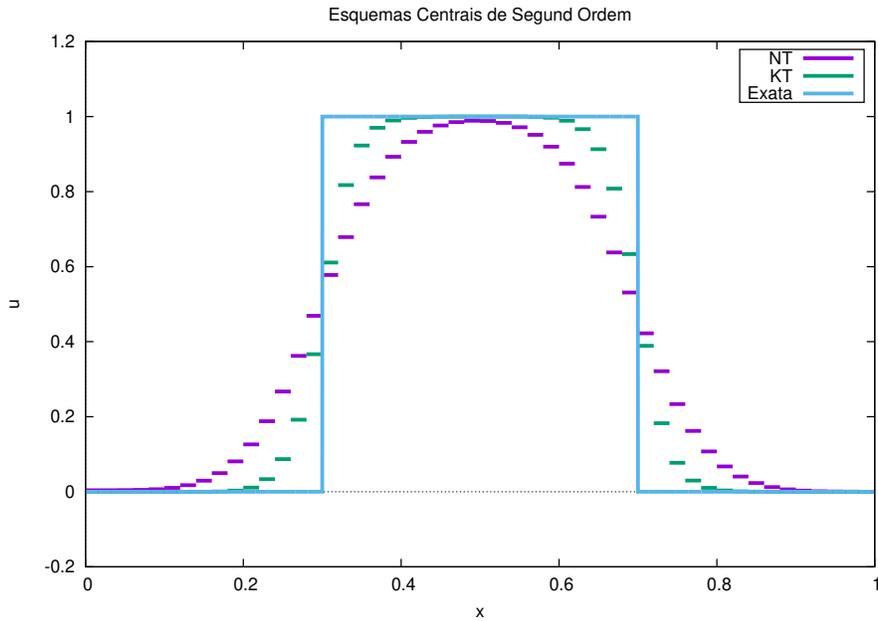


Figura 3.6: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 2^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

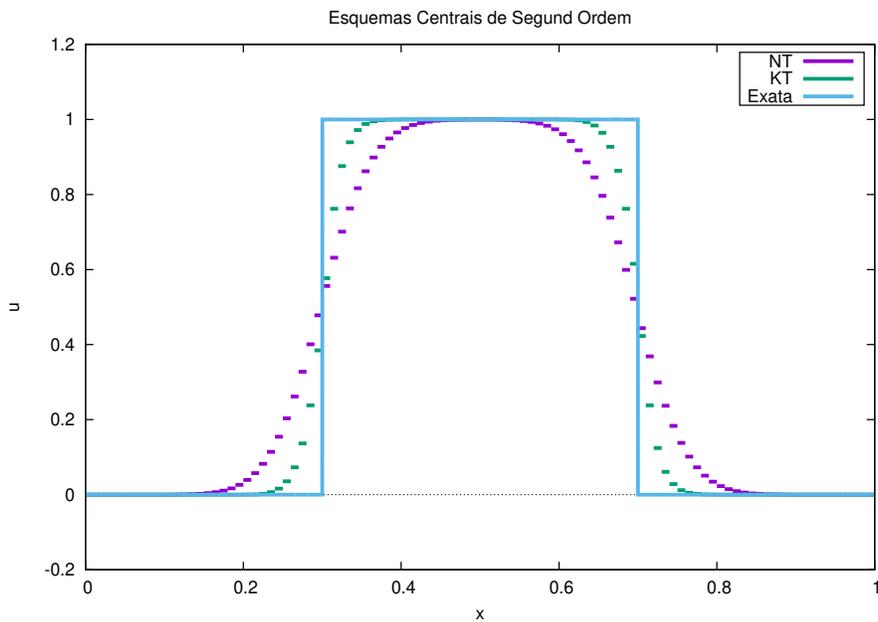


Figura 3.7: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos esquemas centrais de 2^a ordem e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

Capítulo 4

Método de Galerkin Descontínuo

O método de Galerkin Descontínuo (DG, *Discontinuous Galerkin* em inglês) é uma classe dos Métodos de Elementos Finitos que usa polinômios descontínuos por partes para compor os espaços de aproximação. O método DG combina diversas características interessantes do método de elementos finitos clássico e do método de volumes finitos, compondo uma ferramenta importante para aproximar soluções de equações diferenciais, como por exemplo, em problemas de escoamentos em meios porosos [94], de dinâmica de fluidos [89], [38] e eletrodinâmica [74]. Particularmente, o método DG fornece uma abordagem interessante para a resolução de problemas com soluções descontínuas como, por exemplo, os que surgem em leis de conservação hiperbólicas. Historicamente, o método DG foi desenvolvido por Reed e Hill em 1973 como uma técnica para resolver problemas de transporte de neutrons [91]. Em 1974, LaSaint e Raviart [71] apresentaram a primeira análise numérica deste método para a equação de advecção linear. Desde então, o método DG tem sido utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias [3], [12], [57], [71], equações diferenciais parciais hiperbólicas [8], [8], [9], [10], [23], [24], [34], [39], difusivas e convectivas-difusivas [6], [7], [107]. Para uma discussão mais detalhada do processo histórico de utilização do DG podemos recorrer à referência [22] que nos traz uma lista de informações importantes sobre o DG e suas aplicações.

4.1 Descrição do Método de Galerkin Descontínuo

Vamos enunciar aqui os conceitos fundamentais para estabelecer o método DG para uma lei de conservação hiperbólica unidimensional. Nossa abordagem consistirá em dois passos importantes: primeiramente, estudar a lei de conservação hiperbólica em todo o seu domínio físico $\Omega \subset \mathbb{R}$ para, posteriormente, fazermos uma análise destas equações em elementos de Ω que iremos construir nesta seção.

4.1.1 Formulação Fraca Global

Antes de introduzirmos o Método de Galerkin Descontínuo precisamos obter uma formulação fraca para o problema em estudo. Consideremos então a lei de conservação hiperbólica (2.1)

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

no domínio $D = \Omega \times (0, T)$, como definido no Capítulo 2. Seja V um espaço vetorial formado a princípio por funções suficientemente regulares a fim de garantir que os processos de integração e diferenciação estejam garantidos. Vamos utilizar uma formulação fraca diferente da empregada no Capítulo 3. Aqui tomamos uma função teste arbitrária $v \in V$, multiplicamos (2.1) por esta função e integramos com relação a variável espacial no domínio (a, b) de forma a obter a equação integral

$$\int_a^b \partial_t u(x, t) v(x) dx + \int_a^b \partial_x f(u(x, t)) v(x) dx = 0. \quad (4.1)$$

Onde ∂_t e ∂_x denotam as derivadas parciais com respeito as variáveis t e x , respectivamente. Integrando por partes o segundo termo e rearranjando, temos que:

$$\int_a^b \partial_t u(x, t) v(x) dx = \int_a^b f(u(x, t)) \partial_x v(x) dx - f(u(a, t)) v(a) + f(u(b, t)) v(b). \quad (4.2)$$

Note que as equações anteriores são válidas para qualquer $v \in V$. Esta formulação será de extrema importância, pois o próximo passo será analisá-la ao nível de elemento, ou seja, particionando o domínio espacial (a, b) em células de tamanho uniforme (ou não uniforme), e fazendo esta formulação em cada célula. A escolha do espaço de funções V , que aqui será tanto o espaço de busca quanto o de funções teste, genericamente chamado de espaço de aproximação, também é de grande importância para o método. As propriedades deste espaço variam de problema para problema, mas de forma geral quanto menor forem as exigências sobre o espaço V mais abrangente se torna o método.

4.1.2 Nomenclatura e Definições

Basicamente, métodos DG para a equação (2.1) podem ser apresentados na forma Regular, onde a formulação é toda definida na malha primal introduzida no Capítulo 3, ou em sua forma Central, apresentada em [77], onde as soluções em passos sucessivos são intercaladas entre as malhas primal e dual, tal como descrito no Capítulo 3 no desenvolvimento do esquema NT. Não iremos trabalhar efetivamente com a versão Central do DG; para maiores informações sugerimos a leitura das referências [78] e [77]. Neste trabalho, utilizaremos a forma Regular tal como apresentada em [78], e para isso vamos definir os termos que aparecem nesta formulação, considerando a lei de conservação hiperbólica (2.1). Dada uma partição $\{x_{j-1/2}\}$ para $j = 1, 2, \dots, m$ como no Capítulo 3, definimos os parâmetros espaciais $\Delta x_j = x_{j+1/2} - x_{j-1/2}$ e global $\Delta x = \max_j \Delta x_j$, onde a malha espacial é regular, no sentido que a razão

$$\frac{\max_j \Delta x_j}{\min_j \Delta x_j}$$

é uma cota superior fixa e constante para qualquer refinamento da malha. Utilizando o parâmetro $h \equiv \Delta x$ para reforçar a existência de uma cota superior da malha em questão definimos então V_h^k como conjunto dos polinômios por partes de grau no máximo $k \in \mathbb{N}$ sobre os intervalos $\{C_j\}$, não

exigindo continuidade destes polinômios nos pontos da fronteira de cada sub-intervalo.

$$V_h^k = \{u : u|_{C_j} \in P^k(C_j), \text{ para } x \in C_j, j = 1, 2, \dots, m\}, \quad (4.3)$$

onde $P^k(C_j)$ é o espaço de polinômios de grau $\leq k$ definidos no subdomínio C_j . Seja também

$$\widehat{f}(u^-, u^+) \quad (4.4)$$

um fluxo numérico monótono, que cresce com o primeiro argumento e decresce com o segundo argumento [78]. Este fluxo numérico é consistente com o fluxo físico no sentido da equação (3.6), ou seja

$$\widehat{f}(u, u) = f(u).$$

Além disso, suponha que \widehat{f} seja Lipschitz contínuo em ambos os argumentos. Para um dado instante de tempo t fixo, $\epsilon > 0$ e dada $u_h \in V_h^k$, arbitrária, definimos os seguintes valores:

$$u_h(x_{j\pm\frac{1}{2}}^+, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_h(x_{j\pm\frac{1}{2}} + \epsilon, t), \quad (4.5)$$

$$u_h(x_{j\pm\frac{1}{2}}^-, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_h(x_{j\pm\frac{1}{2}} - \epsilon, t), \quad (4.6)$$

$$x_{j\pm\frac{1}{2}}^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_{j\pm\frac{1}{2}} - \epsilon, \quad (4.7)$$

$$x_{j\pm\frac{1}{2}}^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_{j\pm\frac{1}{2}} + \epsilon. \quad (4.8)$$

4.1.3 A Solução Descontínua

A construção da solução global será baseada nos trabalhos [78], [77] e [63] onde é utilizada a hipótese de separação de variáveis, que também é usada nos esquemas centrais apresentados no Capítulo 3. Esta hipótese de solução nos conduz a um sistema de EDO's como veremos mais adiante. A solução numérica da lei de conservação hiperbólica é localmente construída em termos de funções polinomiais locais dependentes apenas da variável espacial e de coeficientes locais

dependentes do tempo em que estamos construindo nossa solução. Colocando em termos mais formais vamos considerar uma célula arbitrária, digamos a célula C_j para algum $j = 1, 2, \dots, m$.

1. Seja $\Pi_j^k = \{\varphi_0^j(x), \dots, \varphi_k^j(x)\}$ uma base para o espaço $V_h^k|_{C_j} = P^k(C_j)$, ou seja, para esta célula estamos fixando uma base polinomial onde o maior grau do polinômio da base é k , como definido anteriormente.
2. Agora, fixada a base Π_j^k , existem coeficientes dependentes do tempo t , aos quais vamos denotar por $c_i^j(t)$, indicando que cada coeficiente está associado a uma função de base φ_i^j da célula C_j . Assim como temos $k + 1$ elementos na base Π_j^k teremos $k + 1$ coeficientes dependentes do tempo para uma célula.

Feitas as duas considerações acima escrevemos nossa *solução local* da célula C_j da seguinte forma:

$$u_h(x, t)|_{C_j} = \sum_{i=0}^k c_i^j(t) \varphi_i^j(x), \quad x \in C_j. \quad (4.9)$$

Assim vemos que a solução local pode ser avaliada em qualquer $x \in C_j$ uma vez escolhida a base Π_j^k e calculados os coeficientes c_i^j para o tempo t . Como compomos a solução local temos condições de escrever a solução global do método DG em termos da função característica ψ_{C_j} dada por:

$$\psi_{C_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_j, \\ 0 & \text{se } x \notin C_j. \end{cases}$$

Assim nossa solução global para o tempo t é dada por:

$$u_h(x, t) = \sum_{j=1}^m u_h(x, t)|_{C_j} \psi_{C_j}(x) \text{ com } x \in (a, b). \quad (4.10)$$

4.1.4 Forma Regular do Método de Galerkin Descontínuo

A formulação Regular do método DG consiste em encontrar $u_h(x, t) \in V_h^k$ tal que, para qualquer $v_h \in V_h^k$ e para todo j , tenhamos:

$$\begin{aligned} \int_{C_j} \partial_t u_h v_h dx &= \int_{C_j} f(u_h) \partial_x v_h dx - \hat{f}(u_h(x_{j+1/2}^-, t), u_h(x_{j+1/2}^+, t)) v_h(x_{j+1/2}^-) \\ &+ \hat{f}(u_h(x_{j-1/2}^-, t), u_h(x_{j-1/2}^+, t)) v_h(x_{j-1/2}^+). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Note que para obter essa formulação utilizamos a forma fraca dada em (4.2), restrita agora a um subdomínio, ou célula, C_j e a função de fluxo numérico (4.4). Assim como discutido no Capítulo 3, a escolha deste fluxo numérico é importante para a estabilidade do método e deve ser feita de acordo com as características do fluxo físico dado.

Fixando uma célula C_j , vamos denotar $u_h(x, t)|_{C_j}$ simplesmente por u_h^j . Substituindo a expressão da solução local u_h^j no lado esquerdo da equação (4.11) temos:

$$\begin{aligned} \int_{C_j} \partial_t \left(\sum_{i=0}^k c_i^j(t) \varphi_i(x) \right) \varphi dx &= \int_{C_j} f(u_h^j) \partial_x v_h dx - \hat{f}(u_h^j(x_{j+1/2}^-, t), u_h^j(x_{j+1/2}^+, t)) v_h(x_{j+1/2}^-) \\ &+ \hat{f}(u_h^j(x_{j-1/2}^-, t), u_h^j(x_{j-1/2}^+, t)) v_h(x_{j-1/2}^+). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como a equação anterior é válida para qualquer $v_h \in V_h^k$ e sabendo que $V_h^k|_{C_j}$ tem dimensão $k+1$, então a equação (4.12) é válida para qualquer elemento da base Π_j^k . Assim vamos fixar um elemento φ_l^j para algum $l = 0, 1, \dots, k$. Portanto a equação anterior assume a forma:

$$\begin{aligned} \int_{C_j} \partial_t \left(\sum_{i=0}^k c_i^j(t) \varphi_i^j(x) \right) \varphi_l^j dx &= \int_{C_j} f(u_h^j) \partial_x \varphi_l^j dx - \hat{f}(u_h^j(x_{j+1/2}^-, t), u_h^j(x_{j+1/2}^+, t)) \varphi_l^j(x_{j+1/2}^-) \\ &+ \hat{f}(u_h^j(x_{j-1/2}^-, t), u_h^j(x_{j-1/2}^+, t)) \varphi_l^j(x_{j-1/2}^+). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Como temos um somatório finito de funções contínuas φ_i^j podemos comutar o somatório com o

operador integral no intervalo C_j , ou seja, a equação anterior assume a forma:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^k \int_{C_j} \partial_t c_i^j(t) \varphi_i^j(x) \varphi_l^j(x) dx \right) &= \int_{C_j} f(u_h^j) \partial_x \varphi_l^j dx - \widehat{f} \left(u_h^j(x_{j+1/2}^-, t), u_h^j(x_{j+1/2}^+, t) \right) \varphi_l^j(x_{j+1/2}^-) \\ &+ \widehat{f} \left((x_{j-1/2}^-, t), u_h^j(x_{j-1/2}^+, t) \right) \varphi_l^j(x_{j-1/2}^+). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como os termos $c_i^j(t)$ não dependem da variável espacial x eles são constantes com relação a integração com a variável x . Logo a parcela $\partial_t c_i^j(t)$ pode ser retirada da integral como um termo constante na integração que está sendo feita do lado esquerdo da igualdade anterior, assim temos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^k \partial_t c_i^j(t) \int_{C_j} \varphi_i^j(x) \varphi_l^j(x) dx \right) &= \int_{C_j} f(u_h^j) \partial_x \varphi_l^j dx - \widehat{f} \left(u_h^j(x_{j+1/2}^-, t), u_h^j(x_{j+1/2}^+, t) \right) \varphi_l^j(x_{j+1/2}^-) \\ &+ \widehat{f} \left(u_h^j(x_{j-1/2}^-, t), u_h^j(x_{j-1/2}^+, t) \right) \varphi_l^j(x_{j-1/2}^+). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por simplicidade, utilizaremos a notação

$$h_{j\pm 1/2} = \widehat{f} \left(u_h^j(x_{j\pm 1/2}^-, t), u_h^j(x_{j\pm 1/2}^+, t) \right), \quad (4.16)$$

Os termos $u_h^j(x_{j+1/2}^-, t)$, $u_h^j(x_{j+1/2}^+, t)$, $u_h^j(x_{j-1/2}^-, t)$ e $u_h^j(x_{j-1/2}^+, t)$ são dados respectivamente por:

$$u_{j+1/2}^- \equiv u_h^j(x_{j+1/2}^-, t) = \sum_{i=0}^k c_i^{j+1}(t) \varphi_i^{j+1}(x_{j+1/2}), \quad (4.17)$$

$$u_{j+1/2}^+ \equiv u_h^j(x_{j+1/2}^+, t) = \sum_{i=0}^k c_i^{j+1}(t) \varphi_i^{j+1}(x_{j-1/2}), \quad (4.18)$$

$$u_{j-1/2}^- \equiv u_h^j(x_{j-1/2}^-, t) = \sum_{i=0}^k c_i^j(t) \varphi_i^j(x_{j+1/2}), \quad (4.19)$$

$$u_{j-1/2}^+ \equiv u_h^j(x_{j-1/2}^+, t) = \sum_{i=0}^k c_i^j(t) \varphi_i^j(x_{j-1/2}). \quad (4.20)$$

Podemos assim reescrever a equação (4.15) em termos dos fluxos numéricos (4.16) como:

$$\left(\sum_{i=0}^k \partial_t c_i^j(t) \int_{C_j} \varphi_i^j(x) \varphi_l^j(x) dx \right) = \int_{C_j} f(u_h^j) \partial_x \varphi_l^j dx - h_{j+1/2} \varphi_l^j(x_{j+1/2}^-) + h_{j-1/2} \varphi_l^j(x_{j-1/2}^+). \quad (4.21)$$

Como $l = 0, 1, 2, \dots, k+1$, podemos reescrever (4.21) em termos de um sistema de equações diferenciais local. Sem perda de generalidade, suponha que na célula C_j o grau máximo do polinômio seja $k_j \leq k$ e defina:

$$k_{total} = \sum_{j=1}^m k_j, \quad (4.22)$$

logo definimos o seguinte vetor $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{k_{total}}$,

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^2, \dots, \mathbf{C}^m]^T. \quad (4.23)$$

cujas as componentes de \mathbf{C}^j são dadas por:

$$\mathbf{C}^j = [\mathbf{c}_0^j, \mathbf{c}_1^j, \dots, \mathbf{c}_k^j]^T. \quad (4.24)$$

Essa construção se faz necessária pois os fluxos numéricos $h_{j+1/2}$ e $h_{j-1/2}$ dependem de valores nas células C_{j-1} , C_j e C_{j+1} . Logo, o sistema local de equações diferenciais na variável temporal pode ser escrito como:

$$\mathbf{M}^j \frac{d\mathbf{C}^j}{dt} = \mathbf{H}^j(\mathbf{C}), \quad (4.25)$$

onde o vetor $\mathbf{C}^j \in \mathbb{R}^{k_j}$ e a matriz $\mathbf{M}^j \in M(\mathbb{R})_{k_j}$ é inversível por ser uma matriz cujas as entradas m_{ij} são produtos internos do espaço $L^2(P^{k_j}(C_j))$ (vide [76]). De forma mais precisa, podemos descrever os elementos de \mathbf{M}^j e $\mathbf{H}^j(\mathbf{C})$ como sendo:

$$m_{pq}^j = \int_{C_j} \varphi_p^j(x) \varphi_q^j(x) dx, \quad (4.26)$$

$$h_p^j(\mathbf{C}) = \int_{C_j} f(w_h^j) \partial_x \varphi_p^j dx - h_{j+1/2} + h_{j-1/2}, \quad (4.27)$$

para $p, q = 0, 1, 2, \dots, k_j$. Como \mathbf{M}^j é inversível, então o sistema de equações diferenciais (4.25) assume a forma:

$$\frac{d\mathbf{C}^j}{dt} = (\mathbf{M}^j)^{-1} \mathbf{H}^j(\mathbf{C}). \quad (4.28)$$

Perceba que o sistema de equações diferenciais em (4.28) é definido localmente. Podemos exibir um sistema global da seguinte forma: definimos o vetor $H(\mathbf{C}) \in \mathbb{R}^{k_{total}}$ como

$$H(\mathbf{C}) = [H^1(\mathbf{C}), H^2(\mathbf{C}), \dots, H^m(\mathbf{C})]^T. \quad (4.29)$$

Em que aplicação $H^j(\mathbf{C})$ tem as componentes definidas (4.27). Deste modo nosso sistema de EDO's global pode ser escrito como:

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = (\mathbf{M})^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{C}), \quad (4.30)$$

onde $\mathbf{M} \in M(\mathbb{R})_{k_{total}}$ é dada por:

$$\mathbf{M} = \text{diag}(M^1, M^2, \dots, M^m), \quad (4.31)$$

sendo \mathbf{M} uma matriz inversível de dimensão k_{total} , cujas componentes do bloco \mathbf{M}^j , que também é inversível, estão definidas em (4.26). Assim exibimos os sistemas de equações diferenciais local e global para evolução dos coeficientes dependentes do tempo. Vamos resolver o sistema de equações diferenciais (4.30) com dois esquemas: o esquema de Runge-Kutta de segunda ordem descrito no Capítulo 3 e com o esquema SSP Runge-Kutta que veremos na seção a seguir.

4.2 Esquema SSP Runge-Kutta

Para resolução do sistema de EDO's alguns autores sugerem o uso do RKDG (*Runge-Kutta Discontinuous Galerkin*) como em [89]. O esquema RKDG é feito de forma a ter o número de estágios igual ao maior grau do polinômio da base Π_j^k . Visando estas boas propriedades escolhemos o esquema *Strong Stability Preserving* Runge-Kutta que é sugerido em [78] e em [77]. Pensando em uma maior liberdade na escolha do grau do polinômio da base escolheremos o SSP Runge-Kutta, apresentado em [63], que nos permite usar um maior número de estágios com relação ao maior grau do polinômio da base Π_j^k . Vamos aqui simplesmente descrever este esquema sem exibir uma análise rigorosa da região de estabilidade deste método dentre outras propriedades inerentes a este. Para maiores informações sugerimos que o leitor consulte [63], [50], [64], [49] e [55]. Seja então c^0 o vetor com os coeficientes avaliados no instante de tempo t_0 . Seja $s \in \mathbb{N}$ o número de estágios do esquema SSP Runge-Kutta que vamos utilizar. O esquema SSP Runge-Kutta consiste em:

1. Primeiramente vamos tomar no estágio 0 a solução c^0 como sendo o vetor de valores que inicializa o método SSP Runge-Kutta, ou seja,

$$c^{(0)} = c^0. \tag{4.32}$$

2. Os demais s estágios serão feitos da seguinte forma:

$$c^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \left\{ \alpha_{il} c^{(l)} + \Delta t \beta_{il} L(c^{(l)}) \right\}, \tag{4.33}$$

para $i = 1, 2, \dots, s$.

3. Após os s passos dados anteriormente tomaremos a solução de nosso sistema de EDO's no

tempo t^n como sendo:

$$c^n = c^{(s)} \quad (4.34)$$

Os coeficientes α_{il} e β_{il} são obtidos de forma a manter a estabilidade da solução a cada estágio (ver, por exemplo, [66]). O tamanho do passo de tempo, Δt , deve ser escolhido de forma a satisfazer a condição CFL do método DG. As referências citadas anteriormente trazem uma análise da estabilidade do método SSP Runge-Kutta bem como a escolha do CFL adequado a fim de obtermos convergência no esquema SSP. Em [63] encontramos uma análise do método SSP Runge-Kutta quando aplicado a leis de conservação hiperbólicas com fluxos lineares (como a advecção linear) e para fluxos não-lineares (Burgers). Além disso gostaríamos de lembrar que em teoria o operador L , deve ser Lipschitz Contínuo com relação a norma L^2 , quando essa propriedade não é satisfeita estamos sujeitos a oscilações na solução numérica DG [51], [63].

Para os experimentos numéricos do método DG vamos considerar o esquema SSP Runge-Kutta de 2 estágios no qual temos que os coeficientes α_{ij} e β_{ij} para $i, j = 0, 1$ são dados respectivamente por: $\alpha_{00} = 1, \alpha_{10} = 1/2, \alpha_{01} = 0, \alpha_{11} = 1/2, \beta_{00} = 1, \beta_{10} = 0, \beta_{01} = 0$ e $\beta_{11} = 1/2$. Os coeficientes para mais estágios estão listados em [63].

4.3 Fluxos Numéricos

Dentre diversos fluxos numéricos para o método DG, estudados na literatura [16, 27] empregaremos neste trabalho o Fluxo de Lax-Friedrichs Local [27]. A versão abaixo pode ser vista como uma generalização dos Fluxos de Lax-Friedrichs apresentadas anteriormente. O Fluxo de Lax-Friedrichs Local é dado por:

$$h_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left(f(u_{j+1/2}^-) + f(u_{j+1/2}^+) + \alpha_{j+1/2} (u_{j+1/2}^- - u_{j+1/2}^+) \right), \quad (4.35)$$

onde $\alpha_{j+1/2}$ é uma avaliação da maior velocidade de propagação local, dada por

$$\alpha_{j+1/2} = \left(\max_{u \in C_j} |f'(u)| \right). \quad (4.36)$$

O fluxo listado em (4.35) é muito semelhante ao fluxo usado no método KT em (3.27), onde usamos velocidades de propagação local juntamente com avaliações do fluxo físico nas extremidades de cada célula.

4.4 Polinômios de Legendre

Em nossos experimentos numéricos iremos escolher a base de polinômios de Legendre devido a suas boas propriedades com relação a ortogonalidade, o que conduzirá a matrizes \mathbf{M}^j diagonais, o que torna o seu computo e inversões triviais. Os polinômios ortogonais de Legendre, denotados por $P_n(x)$ onde n é a ordem do polinômio, são dados recursivamente por:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

O domínio dos polinômios de Legendre é o compacto $[-1, 1]$. Além disso temos as seguintes propriedades dos polinômios de Legendre. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos:

- $\|P_n(x)\| = \left[\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$
- $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$, onde δ_{mn} é igual a 0 ou 1 se $m \neq n$ ou $m = n$, respectivamente.
- $P_m(1) = 1$
- $P_m(-1) = (-1)^{m+1}$

Uma propriedade interessante é que dado $P_m(t)$ e um polinômio $q(t)$ tal que o grau de $q(t)$ seja menor do que m então temos que:

$$\int_{-1}^1 P_m(t)q(t)dt = 0 \quad (4.37)$$

Abaixo temos um gráfico que ilustra os polinômios de Legendre para alguns graus.

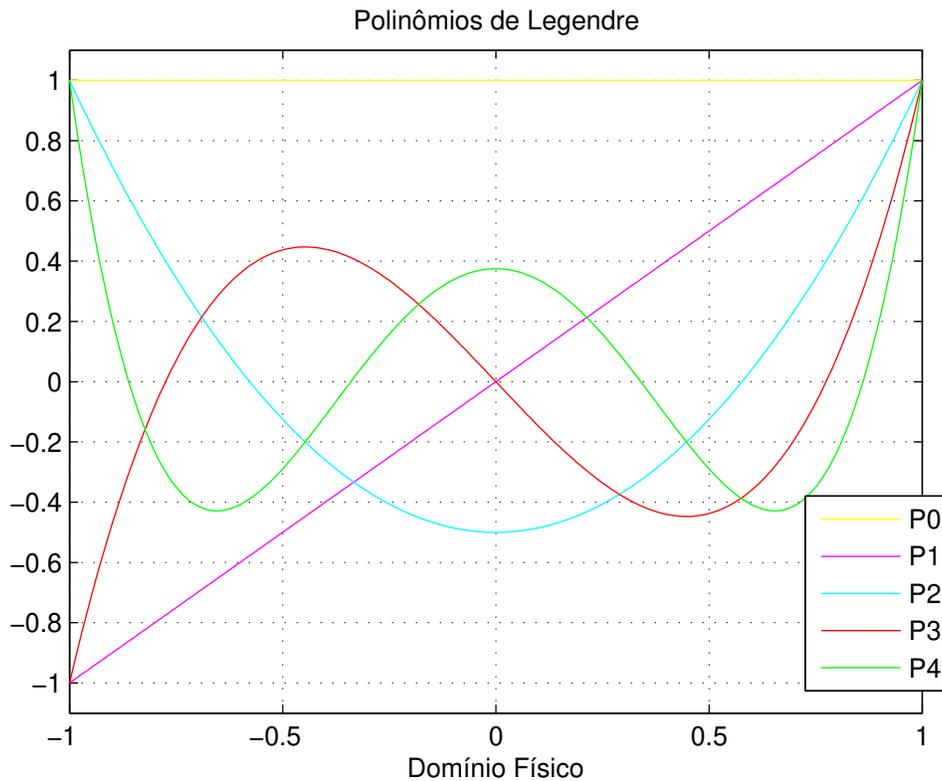


Figura 4.1: Exemplos de Polinômios de Legendre de Graus 0, 1, 2 e 3

4.5 Experimentos Numéricos para o DG

Nesta seção apresentaremos estudos numéricos comparativos para o Método de Galerkin Descontínuo estudado nesta capítulo, observando características de estabilidade e a influência da difusão numérica sobre a solução obtida. Vamos fixar nosso estudo para polinômios constantes e

lineares. Os parâmetros e as relações listadas na Seção 3.9, de experimentos numéricos, serão mantidos, bem como a condição inicial. O equipamento utilizado para realizar os teste comparativos é o mesmo também. Vamos omitir aqui as considerações sobre a solução exata, uma vez que esta já foi discutida na Seção 3.9. Em todos os experimentos serão tomados como parâmetros:

- $L = 1.0$, $x_1 = 0.1$ e $x_2 = 0.5$
- $a = 1.0$
- $\nu = 0.1$
- $T = 0.2$

Dividimos as simulações em 2 grupos: o primeiro deles para o método DG nos casos constante por partes e linear por partes e o segundo para método DG com uso de diferentes métodos numéricos para resolução do sistema de EDO's associado. Para resolução do sistemas de EDO's utilizaremos esquema SSP Runge-Kutta de 2 estágios e o esquema de Runge-Kutta de 2^a Ordem. As integrações numéricas são feitas com Quadratura Gaussiana com 5 pontos de integração. Iremos nos referir ao Método de Galerkin Descontínuo de acordo com o grau do Polinômio da base como na lista abaixo:

- Galerkin Descontínuo com Polinômios de Base Constante por Partes (DG0)
- Galerkin Descontínuo com Polinômios de Base Linear por Partes (DG1)

Percebemos nas Figuras 4.2 e 4.3 que DG1 oscila nas regiões próximas as discontinuidades, enquanto DG0 não oscila, para uma malha de 50 volumes. Quando aumentamos o número de volumes para 100, percebemos que DG0 e DG1 tem o feito de difusão reduzido, mas DG1 ainda oscila. Uma alternativa para diminuir os erros das aproximações é mudar o esquema de resolução do Sistema de EDO's associado ao método DG. Vamos utilizar agora um Método de Runge-Kutta de 2^a Ordem e comparar com os resultados obtidos com o Esquema SSP Runge-Kutta de 2 estágios.

No caso do DG0 a mudança do método de resolução do Sistema de EDO's associado não modificou a solução numérica com 50 elementos quando comparamos as Figuras 4.2 e 4.4, mantendo-se difusivo. Ao aumentarmos o número de volumes para 100 a difusão numérica diminui como vimos nas Figuras 4.3 e 4.5. Além disso não houve oscilações nos experimentos.

Considerando agora o DG1 vemos na Figura 4.6 que com 50 volumes mantivemos o mesmo perfil oscilatório nas regiões de choque como na Figura 4.2. Ao aumentarmos o número de volumes para 100, como vemos na Figura 4.7 as oscilações se mantiveram assim como em 4.3.

Como veremos com mais detalhes no próximo capítulo, as instabilidades apresentadas pelo esquema DG1 são esperadas, segundo o teorema de Godunov [46, 97], que diz que nenhum esquema numérico linear de ordem maior do que um é capaz de gerar soluções numéricas estáveis, ou seja, quando tomamos bases polinomiais com grau maior do que um juntamente com esquemas de evolução temporal com vários passos estamos sujeitos às oscilações verificadas nos experimentos numéricos apresentados nas Figuras 4.6 e 4.7.

Como pudemos ver as oscilações decorrentes do aumento do grau do polinômio da base se mantiveram mesmo quando mudamos o método de resolução do sistema de EDO's associado. As oscilações já eram previstas [83] quando aumentamos o grau do polinômio da base para o método DG. Precisamos assim introduzir uma estratégia na direção de conter estas oscilações decorrentes do aumento do grau do polinômio. Com este intuito, iremos introduzir no próximo capítulo estratégias para conter oscilações decorrentes do aumento do grau do polinômio.

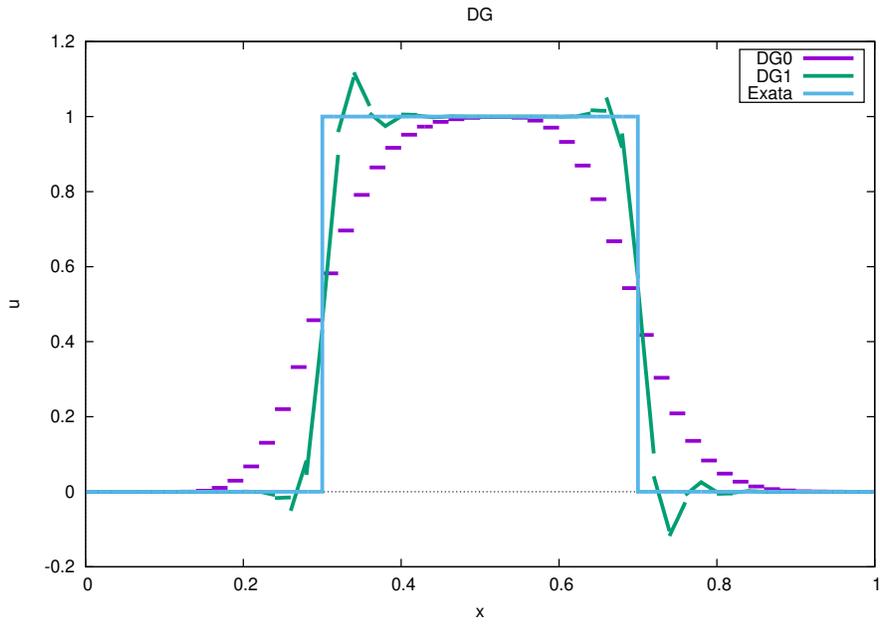


Figura 4.2: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DG1 obtidas pelo método DG e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

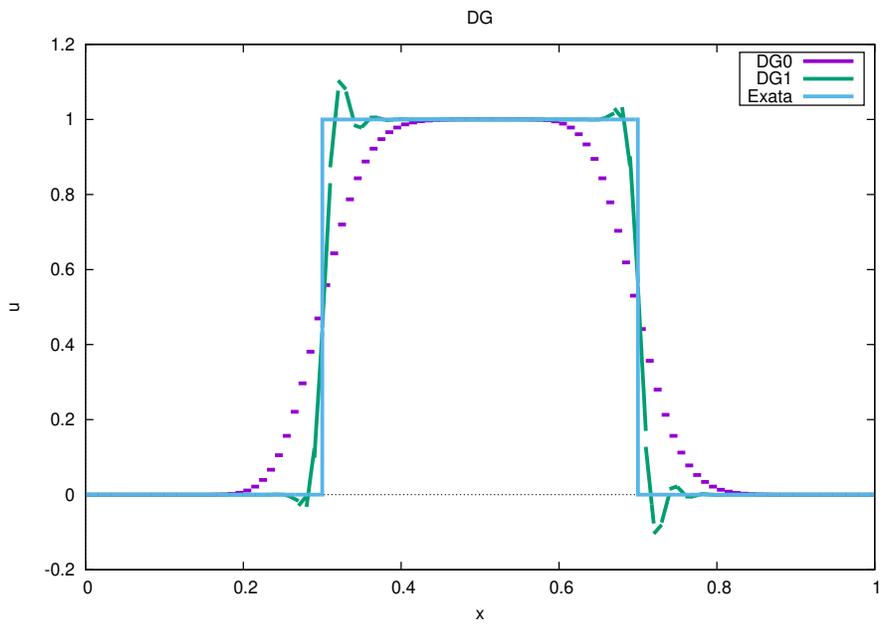


Figura 4.3: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DG1 obtidas pelo método DG e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

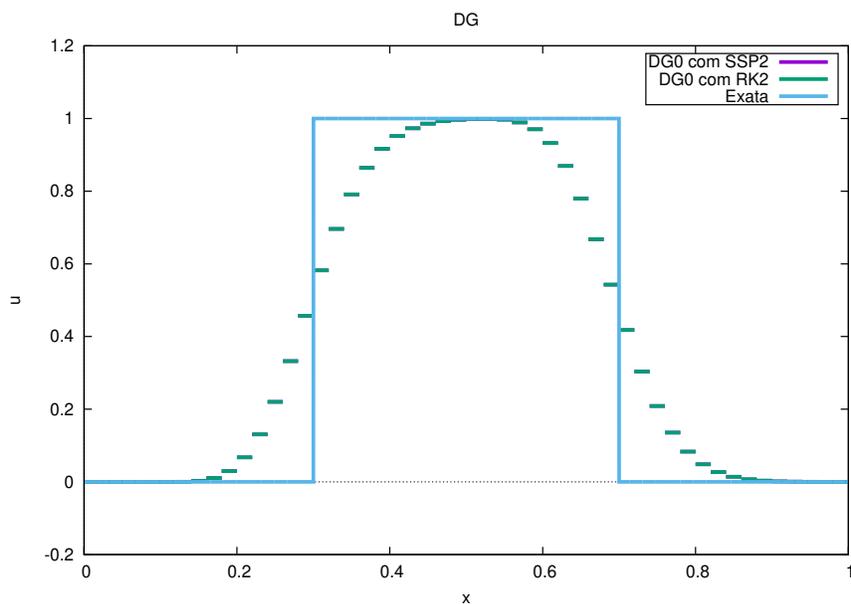


Figura 4.4: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's

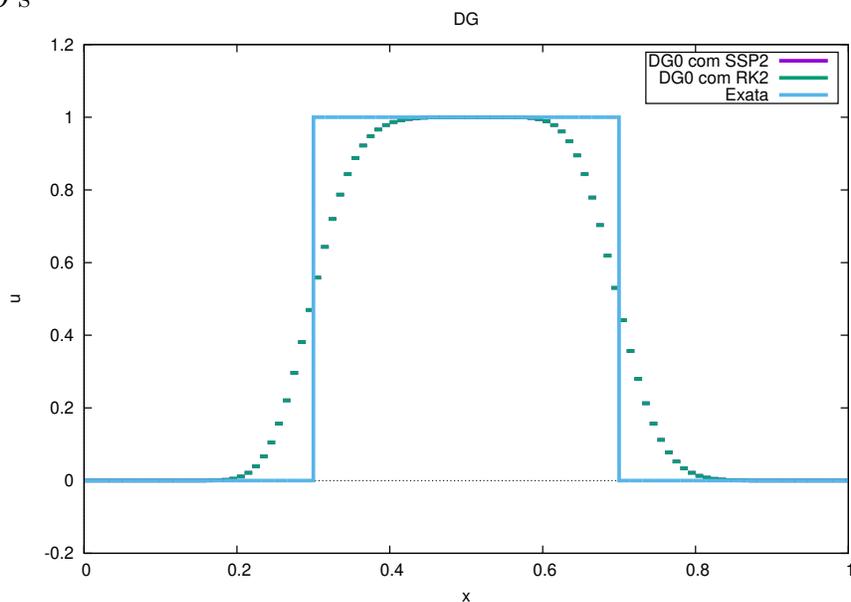


Figura 4.5: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's

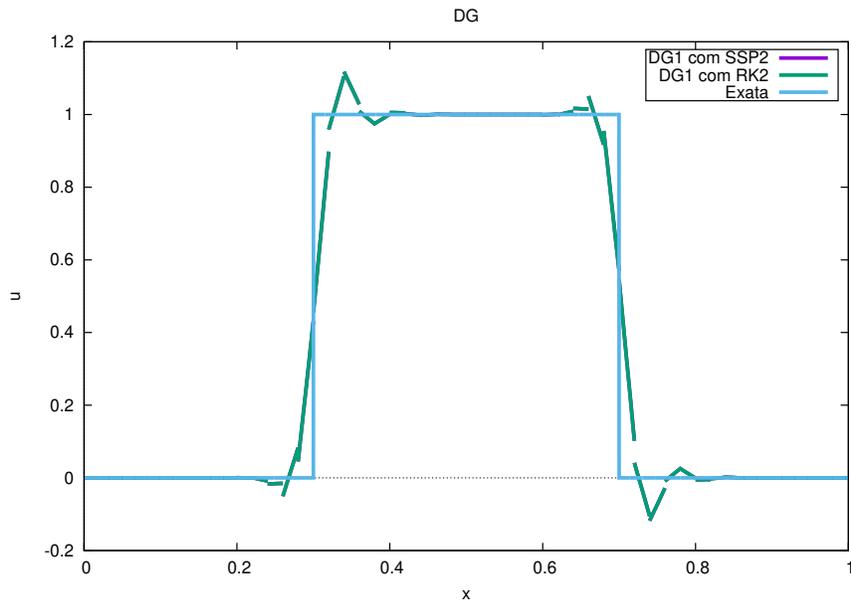


Figura 4.6: Comparação entre as soluções numéricas DG1 a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's

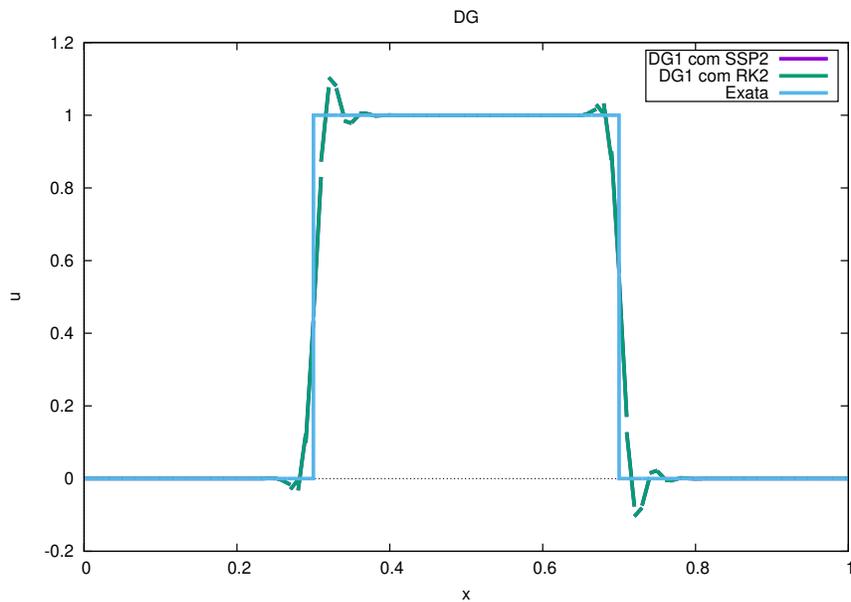


Figura 4.7: Comparação entre as soluções numéricas DG1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$ e utilizando diferentes método de resolução para o Sistema de EDO's

Capítulo 5

Métodos DG de Alta Ordem

No Capítulo 4, verificamos na seção de experimentos numéricos que o método DG apresenta oscilações quando são empregados polinômios lineares por partes, mesmo quando trocamos o método para resolução do sistema de EDO's associado. Este fato é previsto pelo Teorema de Godunov [46], como veremos adiante. Visto a presença de tais oscilações pretendemos buscar formas de controlá-las através de esquemas adaptativos sobre o método DG. Neste capítulo, vamos propor métodos de Galerkin Descontínuo de alta ordem estáveis para a solução da lei de conservação hiperbólica (2.1), com diferentes fluxos físicos. Inspirados no uso dos limitadores, exibidos no Capítulo 3, para os esquemas NT e KT e nos bons resultados que estes esquemas fornecem, vamos propor dois algoritmos que atuarão na reconstrução dos coeficientes lineares da solução em cada elemento C_j utilizando informações que já foram calculadas durante a formulação do Método DG, como parâmetros para o uso dos limitadores.

5.1 Resultados Sobre Monotonicidade

Como já dito, os resultados oscilatórios obtidos pelo método DG1 no capítulo anterior já eram esperados, em virtude do Teorema de Godunov [46], que enunciaremos após algumas definições.

Definição 5.1.1 (Função Monótona). Uma função $w(x)$ é chamada monótona se ela é não-decrescente ou não-crescente, quando x cresce [106].

Segue, pela solução exata da equação de advecção linear (2.4) que se, a condição inicial $u(x, 0)$ é monótona, então a solução $u(x, t)$ também o será. Assim, dizemos que a equação linear (2.4) preserva a monotonicidade.

Definição 5.1.2 (Esquema Monótono). Um esquema numérico é dito ser um esquema que preserva a monotonicidade, ou simplesmente um esquema monótono, se para toda condição inicial não-decrescente (não-crescente) $\{U_j^0\}$ a solução numérica nos instantes sucessivos $\{U_j^n\}$, $n = 1, 2, \dots$, é não-decrescente (não-crescente) [106].

Teorema 5.1.3 (Godunov). Esquemas numéricos de um passo e segunda ordem para a equação de advecção linear (2.4) não podem preservar a monotonicidade, a menos que $|a|\Delta t/\Delta x \in \mathbb{N}$.

Uma versão deste teorema pode ser também apresentada para esquemas de passos múltiplos. Em outras palavras, este resultado diz que esquemas numéricos para resolver a equação de advecção linear (2.4) que possuam a propriedade de não gerar novos extremos, podem ser no máximo de primeira ordem.

Para o caso dos esquemas centrais de alta ordem NT e KT apresentados no Capítulo 3, a monotonicidade é obtida pelo uso dos limitadores. Tais limitadores permitem uma escolha seletiva da ordem do esquema, mantendo a primeira ordem em regiões de mudança de concavidade ou de gradientes abruptos. Antes de propor os novos métodos DG de alta ordem, vamos apresentar na próxima seção algumas observações sobre a atuação dos limitadores na construção de soluções numéricas.

5.2 O Uso de Limitadores de Inclinação

Seja U_j a solução definida por um polinômio constante sobre a célula j e U_{j-1} e U_{j+1} as soluções nas células vizinhas, em uma malha uniforme e para um tempo fixo, digamos $t = t^n$. As

quantidades conservadas serão evoluídas por um método numérico para o tempo $t = t^{n+1}$. Assim, por simplicidade de notação o índice do tempo não será destacado. Para a avaliação de gradientes locais, utilizaremos as diferenças

$$\Delta_j^+ = U_{j+1} - U_j$$

$$\Delta_j^- = U_j - U_{j-1}$$

Consideremos dois conjuntos de possíveis configurações destes gradientes locais nas três células adjacentes, apresentados nas Figuras 5.1 e 5.2. No primeiro conjunto, ilustrado na Figura 5.1 encontramos uma situação nas quais a solução não é monotonamente decrescente ou crescente e esta configuração influencia na resposta do limitador minmod.

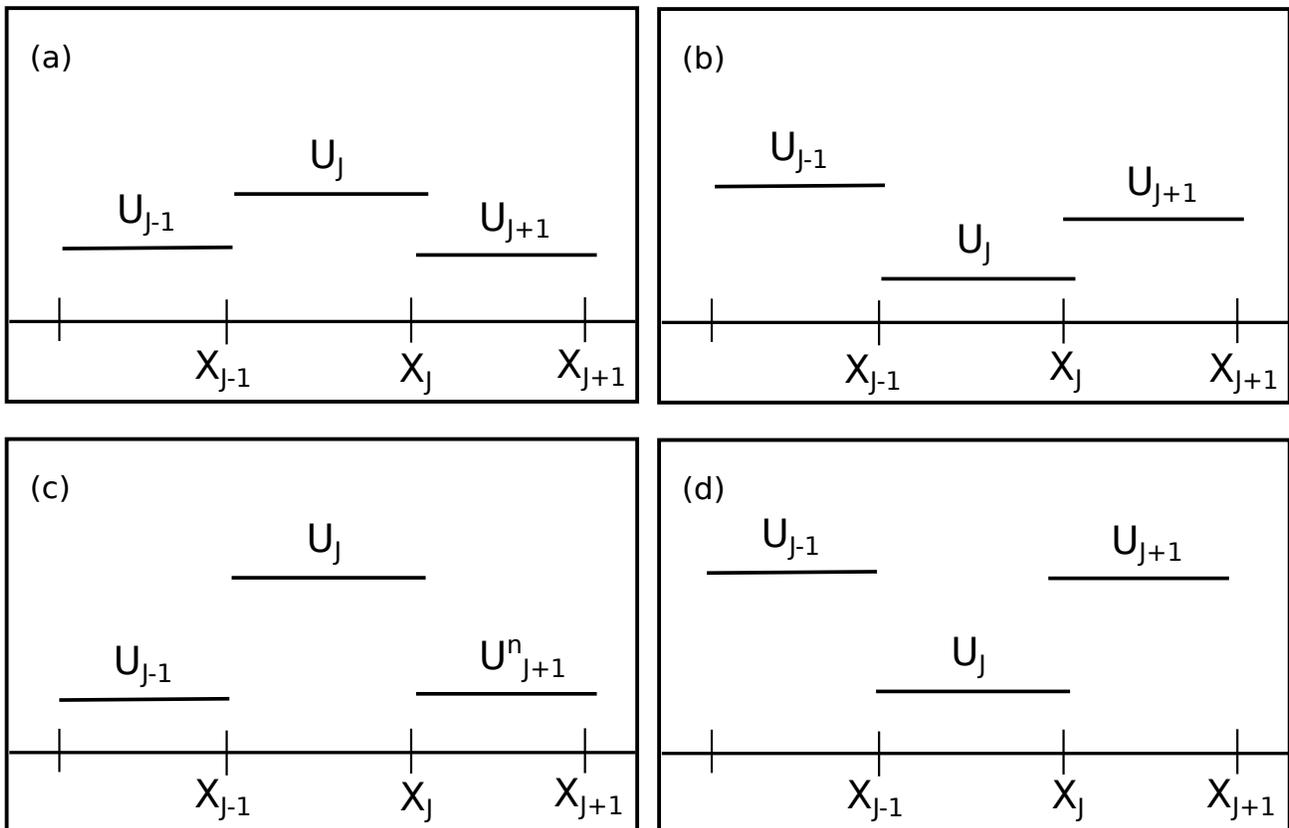


Figura 5.1: Ilustração da variação do gradiente local para soluções não-monótonas discretizadas no tempo $t = t^n$

Note que em cada um dos casos (a), (b), (c) e (d) teremos troca de sinal e, portanto, $\min\{\Delta_j^+, \Delta_j^-\} = 0$. Entretanto, pode-se observar que a troca de sinal dos casos (a) e (c) e (b) e (d) são distintas, pois temos $\Delta_j^- \neq \Delta_j^+$ e portanto a disposição das células vizinhas de U_j exibem variações diferentes, mas que pela formulação usual dos *slope limiters* nos esquemas centrais (e de vários outros métodos de volumes finitos) receberiam um tratamento (peso) igual. Na sequência da Figura 5.2 encontramos mais um estudo das possíveis configurações dos gradientes locais. Note que neste caso a solução é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

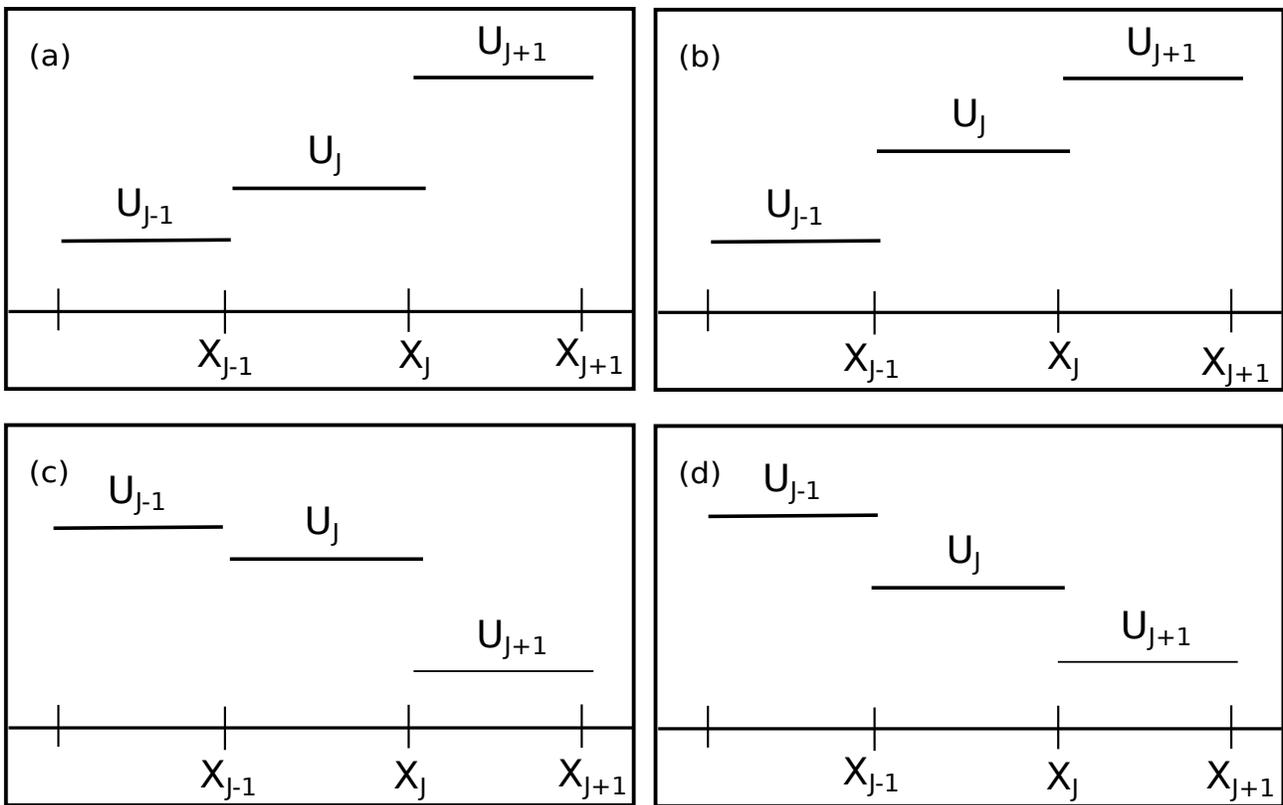


Figura 5.2: Ilustração da variação do gradiente local para soluções monótonas discretizadas no tempo $t = t^n$

Pela definição usual do limitador $\min\{\Delta_j^+, \Delta_j^-\}$, será utilizado a reconstrução da célula U_j com o menor valor do gradiente local entre Δ_j^+ e Δ_j^- em todas as situações (a), (b), (c) e (d).

5.3 Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Constante

Apresentaremos agora a primeira proposta de estabilização do método DG1, que é fortemente inspirada no uso dos limitadores exibidos no Capítulo 3 para os esquemas NT e KT, uma vez que se baseia no uso do coeficiente do polinômio constante que compõe a base da solução local em uma célula C_j , bem como nos respectivos coeficientes das células vizinhas. A solução local gerada pelo método de Galerkin Descontínuo para o caso DG1 é dada por

$$u_h(x, t)|_{C_j} = c_0^j(t)\varphi_0^j(x) + c_1^j(t)\varphi_1^j(x), \quad x \in C_j.$$

A idéia é controlar o coeficiente c_1^j que é responsável pela variação linear da solução na célula, de forma a tornar a solução constante por partes em regiões em que o método pode vir a oscilar, como nas regiões próximas a descontinuidades e em regiões de gradientes abruptos. Para tal, tomaremos o limitador minmod definido no Capítulo 3 e definimos $\delta \in \mathbb{R}$ como sendo a seguinte quantidade:

$$\delta = \text{minmod} \left(c_0^j - c_0^{j-1}, c_0^{j+1} - c_0^j \right) \quad (5.1)$$

Definimos então os seguintes critérios:

- Se $\delta = 0$ então $c_1^j = 0$, ou seja, na célula C_j teremos uma reconstrução constante por partes.
- Se $\delta \neq 0$ então $c_1^j = \frac{\delta}{2}$, ou seja, na célula C_j teremos uma reconstrução linear por partes.

A avaliação é feita a cada passo de tempo t^n . Com esse critério pretendemos diminuir as oscilações decorrentes do aumento do grau do polinômio da base no caso linear por partes. Note que estamos utilizando informações já calculadas no passo t^n o que não acarreta maior esforço computacional, mas apenas uma avaliação dos coeficientes já obtidos.

5.4 Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Linear

Nesta segunda proposta, tomamos

$$\delta = \text{minmod} \left(c_1^{j-1}, c_1^j, c_1^{j+1} \right) \quad (5.2)$$

e os seguintes critérios:

- Se $\delta = 0$ então $c_1^j = 0$, ou seja, na célula C_j teremos uma reconstrução constante por partes.
- Se $\delta \neq 0$ então $c_1^j = \delta$, ou seja, na célula C_j teremos uma reconstrução linear por partes.

A avaliação é feita a cada passo de tempo t^n assim como no algoritmo anterior. Note que aqui estamos utilizando o limitador `minmod` explorando as informações sobre os modos lineares de cada solução local. Aqui também não calculamos nenhum novo valor, apenas fazemos uma avaliação sobre valores já calculados no tempo t^n .

5.5 Resultados Numéricos

Vamos considerar experimentos numéricos para o Método DG com estabilização nesta seção, para vermos como os algoritmos listados anteriormente contribuem para a estabilização. Lembremos que os algoritmos listados anteriormente atuam nas situações em que os polinômios da base são constantes por partes ou linear por partes. Os parâmetros listados a seguir estão bem descritos nas seções 3.9 e 4.5, assim como a condição inicial que estamos utilizando. Em todos os experimentos serão tomados como parâmetros:

- $L = 1.0$, $x_1 = 0.1$ e $x_2 = 0.5$
- $a = 1.0$

- $\nu = 0.1$
- $T = 0.2$

Vamos nos referir aos casos do método DG como na lista abaixo:

- Galerkin Descontínuo com Polinômios de Base Constante por Partes (DG0)
- Galerkin Descontínuo com Polinômios de Base Linear por Partes (DG1)
- Galerkin Descontínuo com Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Constante (DGSL0)
- Galerkin Descontínuo com Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Linear (DGSL1)

Primeiramente vamos considerar o Método DG sem nenhuma estratégia de estabilização. Fixaremos os casos constante por partes e linear por partes para aplicar nossos algoritmos e estabilização e compararemos com os resultados dados por DG0 no Capítulo 4. Em DGSL0 e DGSL1 a base de polinômios é inicialmente linear por partes, mas nossas estratégias consistem em tornar o método constante por partes em regiões em que ele pode vir a oscilar, como nas regiões próximas a descontinuidades.

Percebemos que DG0 é mais difusivo que DGSL0 para um malha com 50 volumes como vemos na Figura 5.3. Ao aumentarmos o número de volumes para 100, em ambos os casos, temos diminuição da difusão, mas DGSL0 se mantém menos difusivo do que DG0, como vemos na Figura 5.4.

Uma situação análoga ocorre quando comparamos DG0 e DGSL1. Para uma malha de 50 volumes, DG0 e DGSL1 são difusivos como vemos na Figura 5.5. Ao aumentarmos o número de volumes para 100 a difusão numérica diminui, mas DG0 se mantém mais difusivo do que DGSL1, como vemos em 5.6.

Por último comparemos DGSL0 e DGSL1 diretamente. Na Figura 5.7 para 50 volumes percebemos que DGSL0 é menos difusivo que DGSL1, situação que se repete na Figura 5.8 na qual utilizamos 100 volumes. Isso nos dá indícios de que o esquema DGSL0 é um esquema adaptativo menos difusivo e que utiliza soluções constantes por partes em regiões de gradientes abruptos e lineares por partes em regiões suaves. No Capítulo 6 vamos fazer experimentos numéricos comparando agora os Esquemas Centrais de Volumes Finitos e o Método de Galerkin Descontínuo com o processo de estabilização para o caso constante e linear por partes, explorando também fluxos não-lineares a fim de verificar se o método captura corretamente a formação de ondas de choque e de rarefação.

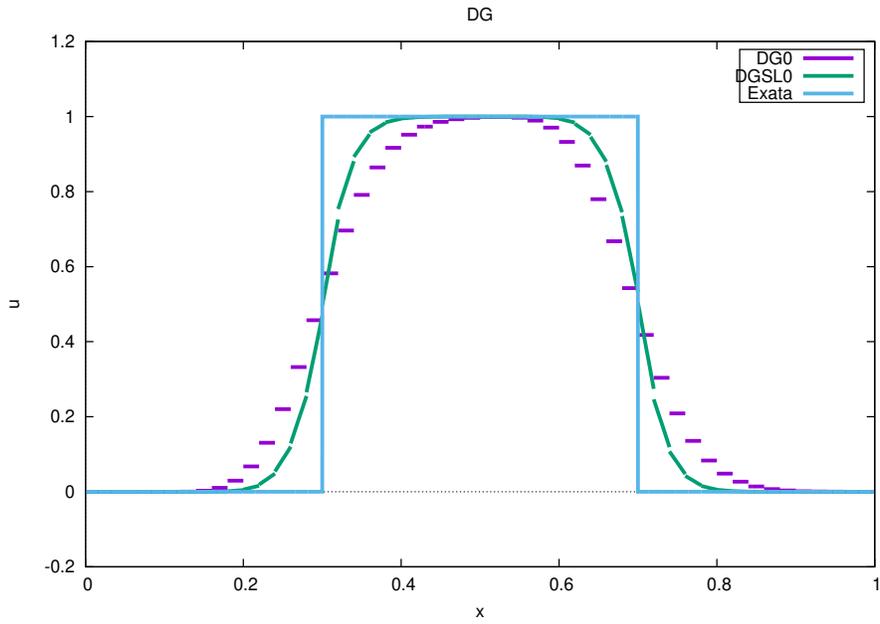


Figura 5.3: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

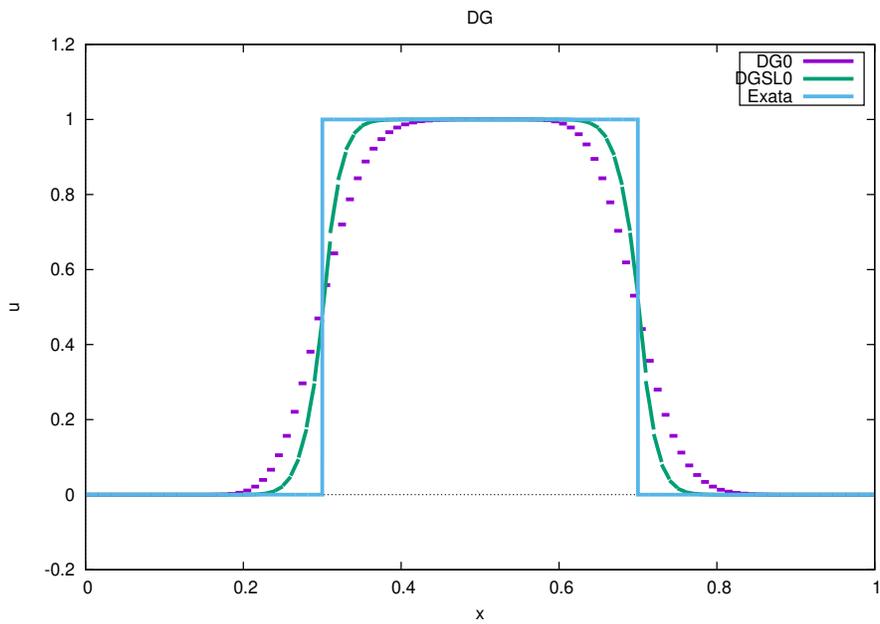


Figura 5.4: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL0 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

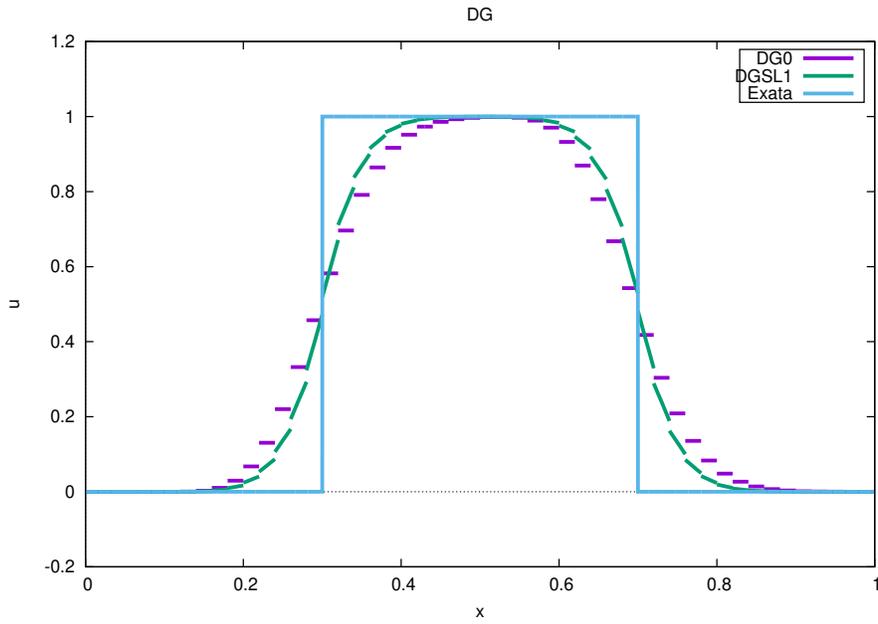


Figura 5.5: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

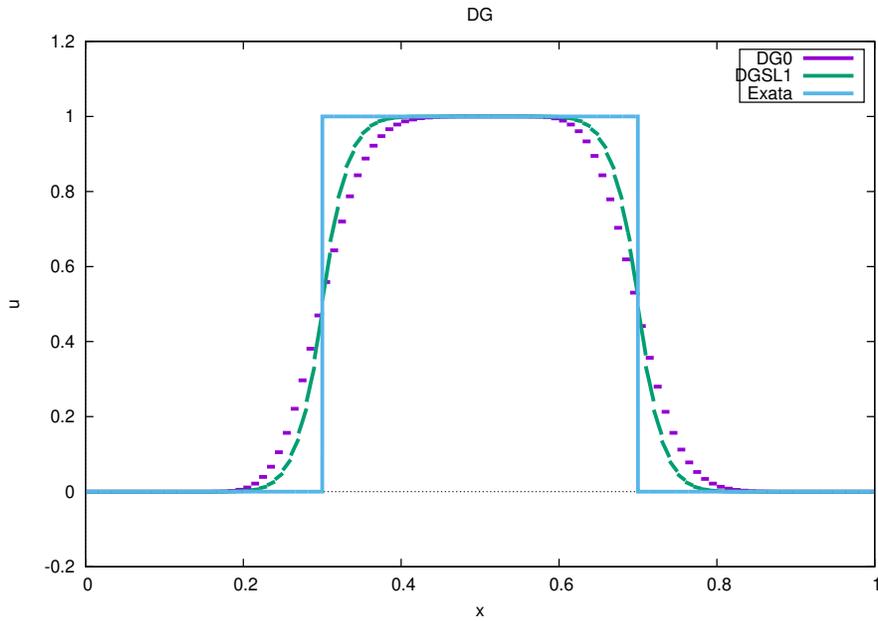


Figura 5.6: Comparação entre as soluções numéricas DG0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

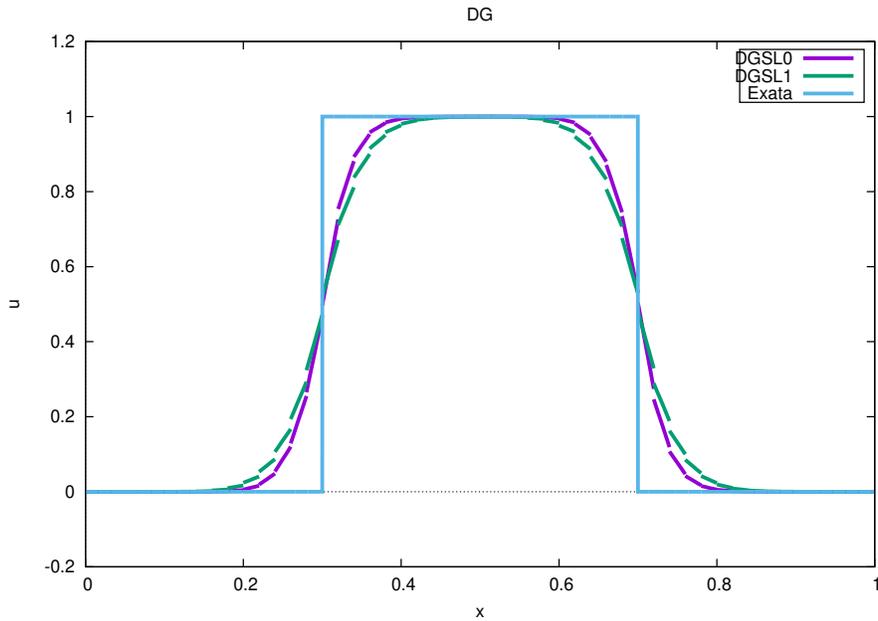


Figura 5.7: Comparação entre as soluções numéricas DGSL0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

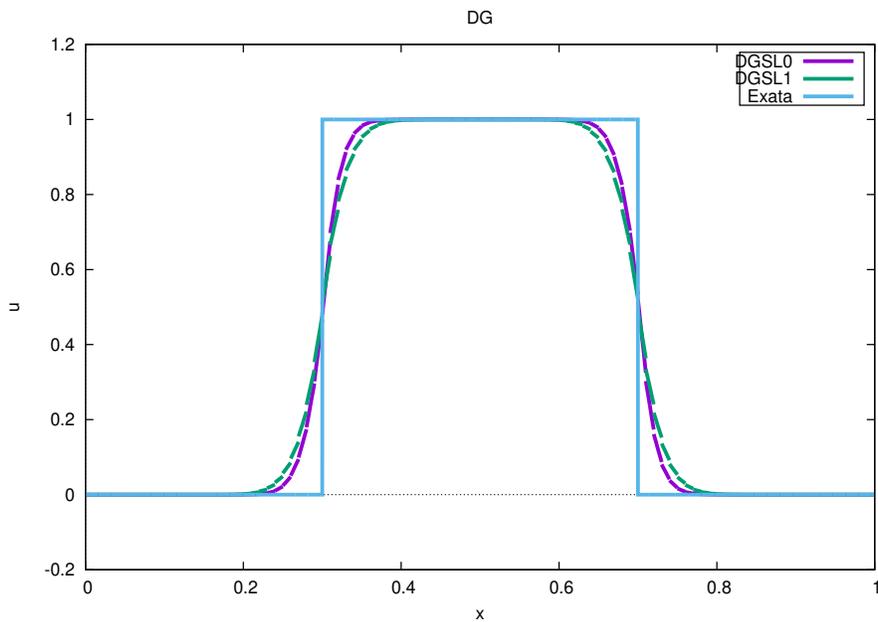


Figura 5.8: Comparação entre as soluções numéricas DGSL0 e DGSL1 e a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

Capítulo 6

Experimentos Numéricos Comparativos

Neste capítulo apresentaremos testes comparativos com os Esquemas Centrais de Volumes Finitos estudados no Capítulo 3, com o Método de Galerkin Descontínuo descrito no Capítulo 4 e com o processo de estabilização sugerido no Capítulo 5. As variáveis a serem utilizadas para os experimentos bem como suas relações, a condição inicial, métodos de integração numérica e solução de sistemas de EDO's foram descritas previamente nas Seções 3.9 e 4.5. Retomamos aqui as indicações para os esquemas numéricos que vamos estudar:

- Lax-Friedrichs (LxF)
- Local Lax-Friedrichs (LLxF)
- Nessyahu-Tadmor (NT)
- Kurganov Tadmor (KT)
- Galerkin Descontínuo com Polinômios de Base Constante por Partes (DG0)
- Galerkin Descontínuo com Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Constante (DGSL0)

- Galerkin Descontínuo com Estabilização do DG1 Baseada no Coeficiente do Polinômio Linear (DGSL1)

Devido as oscilações para DG1 preferimos utilizar somente o DG0 devido a sua boa estabilidade, mesmo este sendo difusivo, para comparar com os esquemas centrais de volumes finitos de primeira ordem. Para o caso do problema de advecção linear estamos comparando os esquemas numéricos estudados com a solução exata, já para os problemas de Burgers e de Buckley-Leverett estamos comparados os esquemas numéricos com uma solução de referência feita com o esquema DGSL0 com 2000 elementos e número de Courant $\nu = 0.1$. Dividimos as simulações em 2 grupos: o primeiro deles para Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG com polinômios constante por partes e o segundo para Esquemas Centrais de alta ordem e o método DG com polinômios lineares por partes com as estabilizações feitas no Capítulo 5.

6.1 Equação de Advecção Linear

Na Figura 6.1 onde empregamos 50 volumes percebemos que o esquema LxF é o mais difusivo quando comparado aos esquemas DG0 e LLxF, ambos semi-discretos. Já na Figura 6.2 onde usamos 100 volumes percebemos que os três esquemas tem a difusão reduzida, mas ainda sim o esquema LxF se mantém como o mais difusivo, enquanto LLxF e DG0 tem soluções semelhantes. O uso de esquemas semi-discretos reduz consideravelmente a difusão numérica.

Considerando agora os experimentos para os esquemas de segunda ordem, vemos na Figura 6.3 na qual utilizamos 50 volumes que DGSL1 é o mais difusivo entre eles e DGSL0 e KT geram soluções semelhantes. Aumentando o número de volumes para 100 vemos que a difusão é reduzida, mas ainda sim DGSL1 é o mais difusivo.

Comparando os esquemas de primeira e segunda ordem percebemos que, aumentando a ordem do método e empregando esquemas semi-discretos podemos reduzir significadamente a difusão numérica que é introduzida por estes esquemas.

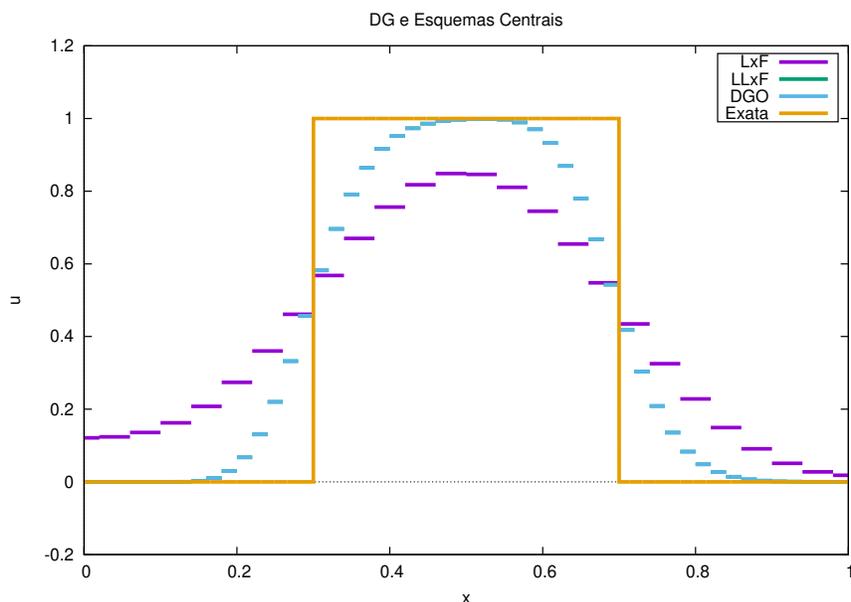


Figura 6.1: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

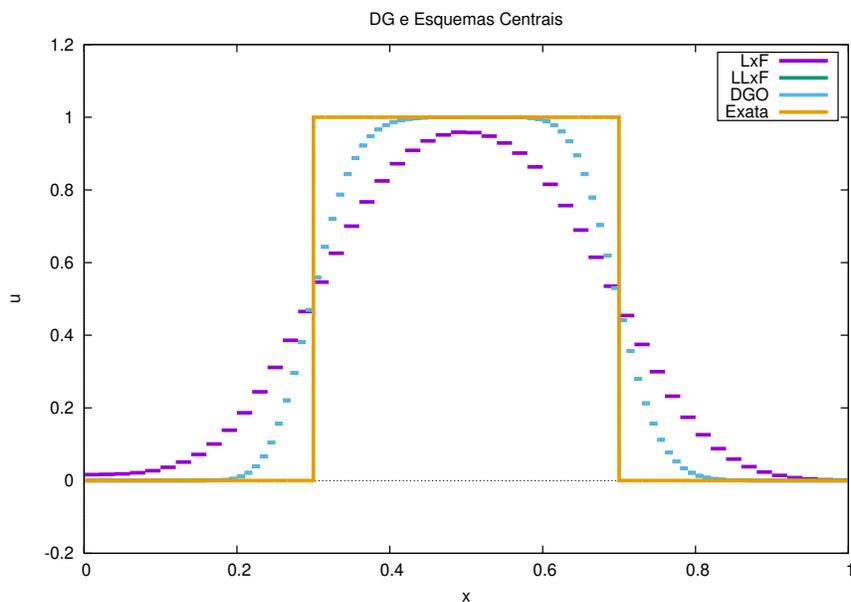


Figura 6.2: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

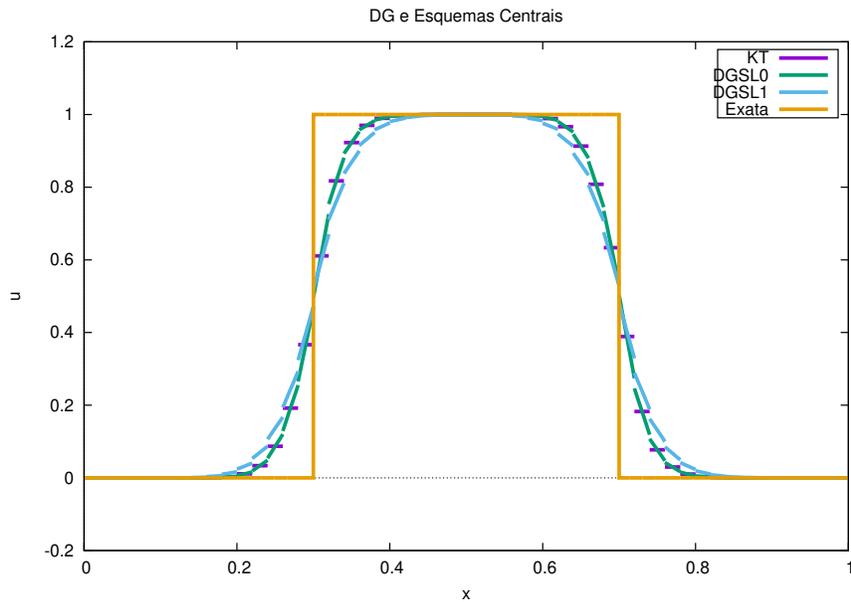


Figura 6.3: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução exata do problema de advecção linear, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

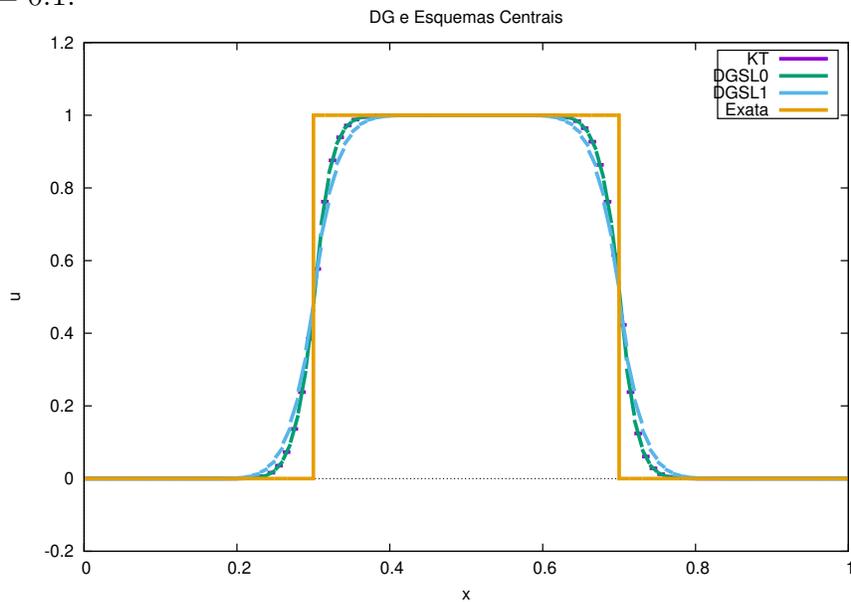


Figura 6.4: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução exata do problema de advecção linear, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

6.2 Problema de Burgers

Vamos tomar aqui a equação de Burgers Não-Viscosa cujo o fluxo é dado por $f(u) = \frac{u^2}{2}$, donde teremos a seguinte lei de conservação hiperbólica escalar que é descrita em (2.5) da seguinte forma:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0.$$

Fisicamente devemos esperar a propagação de uma onda de rarefação em $x = 0.1$ e a propagação de uma onda de choque em $x = 0.5$. Ao final da simulação fisicamente devemos ter uma onda de rarefação que começa em $x = 0.1$ e termina em $x = 0.3$ e uma onda de choque em $x = 0.6$. A velocidade máxima de propagação é tal que:

$$\max_{u \in [0,1]} |f'(u)| = \max_{u \in [0,1]} |u| = 1. \quad (6.1)$$

Como podemos observar, na Figura 6.5, para 50 volumes os três esquemas são difusivos, mas o esquema LxF é o mais difusivo ocasionando efeitos numéricos na fronteira da simulação, além disso DG0 e LLxF fornecem bons resultados mesmo na presença de difusão. Com o aumento do número de volumes para 100 vemos, na Figura 6.6 que LxF é o mais difusivo ainda e o problema na fronteira se matem. Temos que LLxF e DG0 produziram soluções menos difusivas e bem semelhantes.

Vejamos agora os resultados numéricos para esquemas de segunda ordem: Na Figura 6.7, onde usamos 50 volumes, percebemos que DGSL1 é o mais difusivo quando comparado a DGSL0 e KT, que também possuem difusão. Para um malha com 100 volumes, como na Figura 6.8, a difusão diminui nos três esquemas, mantendo-se DGSL1 como o mais difusivo e tendo DGSL0 e KT soluções muito semelhantes.

O emprego da estabilização proposta no Capítulo 5 se mostrou eficaz no caso linear e também em um caso não-linear como Burgers, sem apresentar problemas de instabilidades como pudemos ver nos experimentos numéricos do Capítulo 4. Além disso o fluxo de Burgers é um fluxo convexo [74] assim como o problema de Advecção Linear. As ondas de choque e rarefação foram capturas corretamente e representadas com poucos pontos como podemos ver nos experimentos a seguir, mesmo em casos mais difusivos como em LxF e DGSL1.

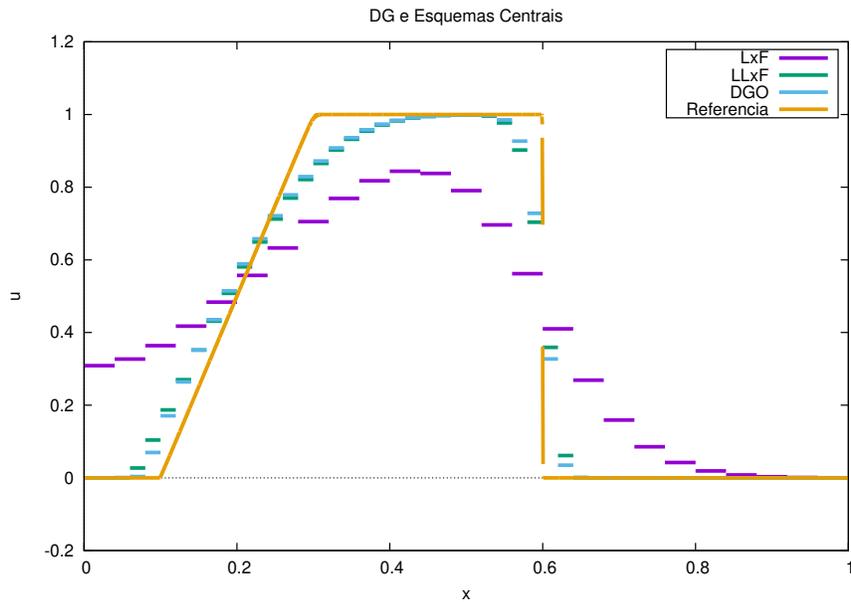


Figura 6.5: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência da Equação de Burgers, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

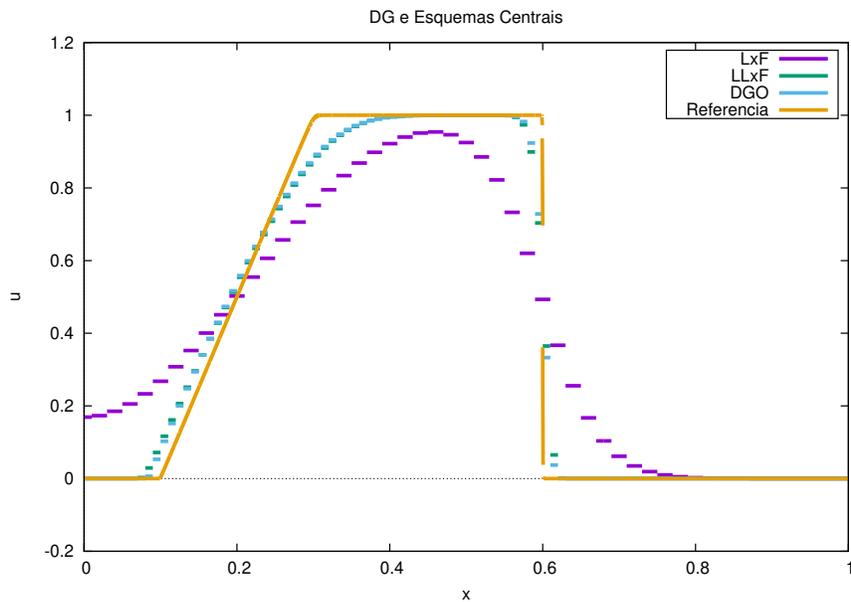


Figura 6.6: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência da Equação de Burgers, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

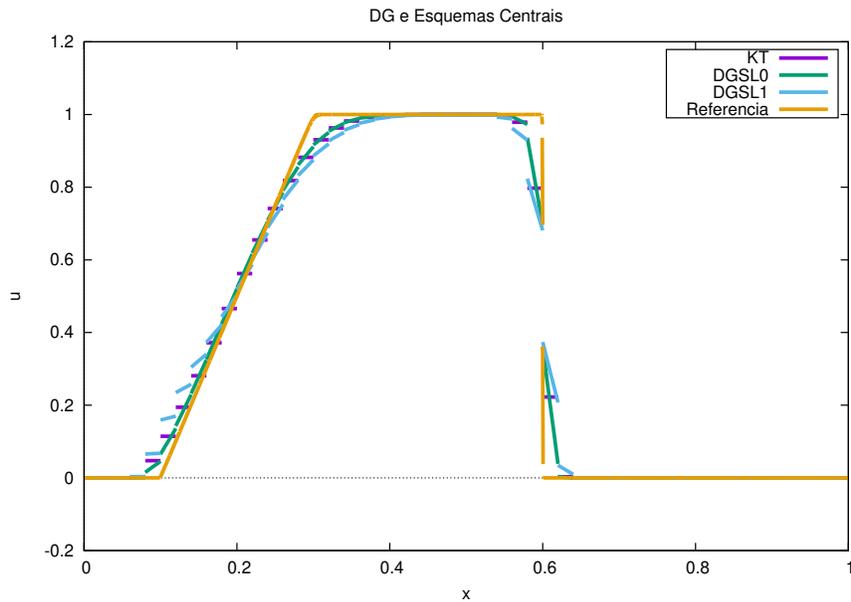


Figura 6.7: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência da Equação de Burgers, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

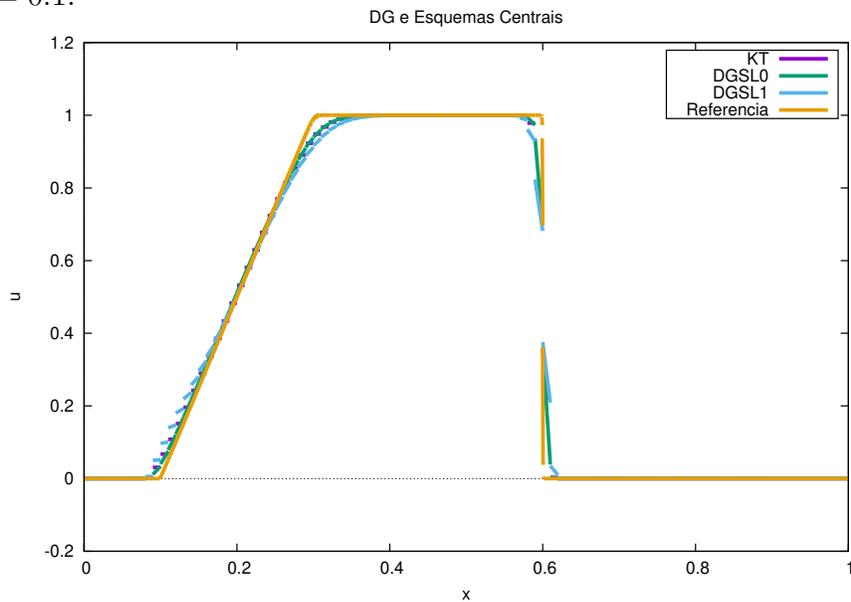


Figura 6.8: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência da Equação de Burgers, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

6.3 Problema de Buckley-Leverett

Vamos considerar aqui a equação de Buckley-Leverett descrita em (2.8) com a razão de viscosidades $w = 1/2$ que adquire a seguinte forma:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{u^2 + (1/2)(1-u)^2} \right)_x = 0 \quad (6.2)$$

Ao final da simulação esperamos que, fisicamente, teremos duas ondas de rarefação sendo que a primeira que começa em $x_{r11} = 0.3$ e termina em $x_{r12} = 0.1$ e a segunda começa em $x_{r21} = 0.5$ e termina em $x_{22} = 0.8$, além de duas ondas de choque em $x_{c1} = 0.3$ e em $x_{c2} = 0.8$. A velocidade máxima de propagação é tal que:

$$a = \max_{u \in [0,1]} |f'(u)| = 2,08 \quad (6.3)$$

Considerando o emprego de 50 volumes, como na Figura 6.9, percebemos que o esquema LxF é muito difusivo quando comprado ao DG0 e LLxF, sendo que estes dois últimos fornecem soluções semelhantes e difusivas. Com o aumento do número de volumes para 100 percebemos que a difusão é reduzida, mas ainda temos LxF sendo muito difusivo enquanto DG0 e KT fornecem boas soluções, mas ainda com difusão.

Observando agora os esquemas de alta ordem, percebemos que não temos difusão excessiva em nenhum dos casos, na Figura 6.11 onde utilizamos 50 volumes temos que DGSL1 é o mais difusivo quando comparado a DGSL0 e KT. Já para 100 volumes como na Figura 6.12 a difusão diminui para todos os esquemas, mas ainda percebemos DGSL1 sendo mais difusivo.

Note que o problema de Buckley-Leverett é um problema não-linear ainda mais complexo por se tratar de uma função de fluxo físico não-convexa [74]. Além disso fornecemos uma condição inicial de tal forma que o esquema deve capturar a presença de 2 ondas de choque e 2 ondas de rarefação. Nossos resultados indicam a correta captura destes fenômenos além de representá-los com poucos pontos.

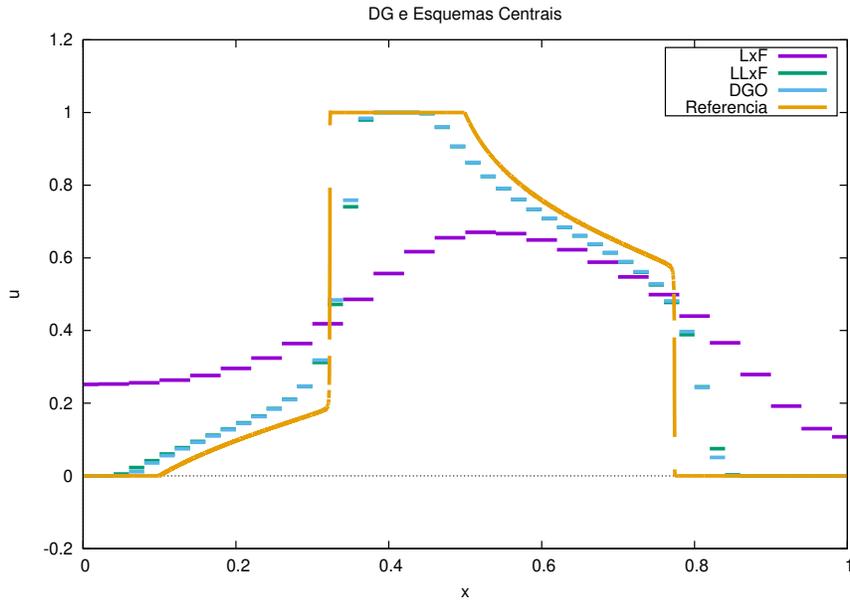


Figura 6.9: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

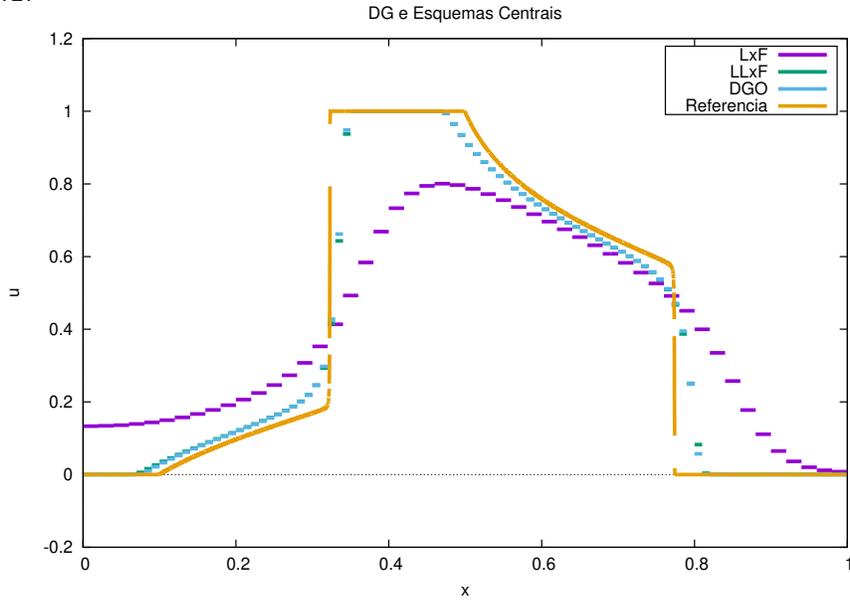


Figura 6.10: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de primeira ordem e o método DG0 com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

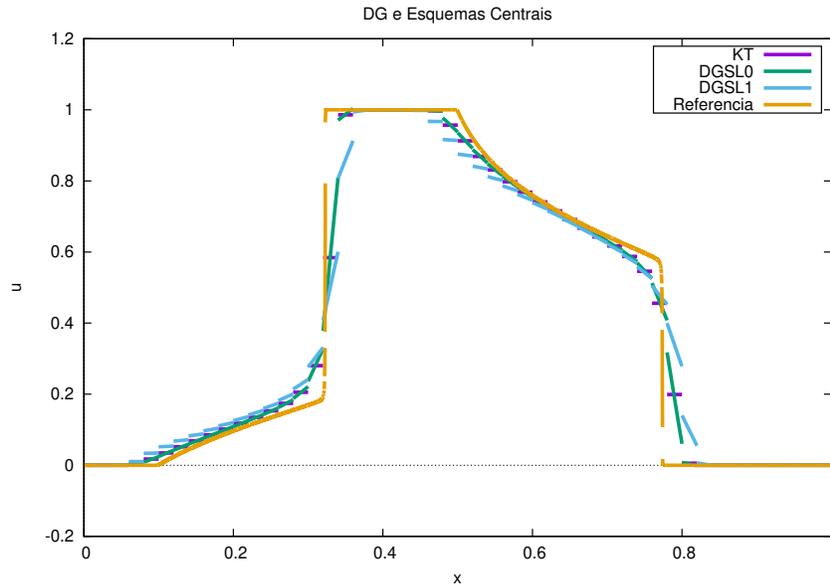


Figura 6.11: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 50 volumes e $\nu = 0.1$.

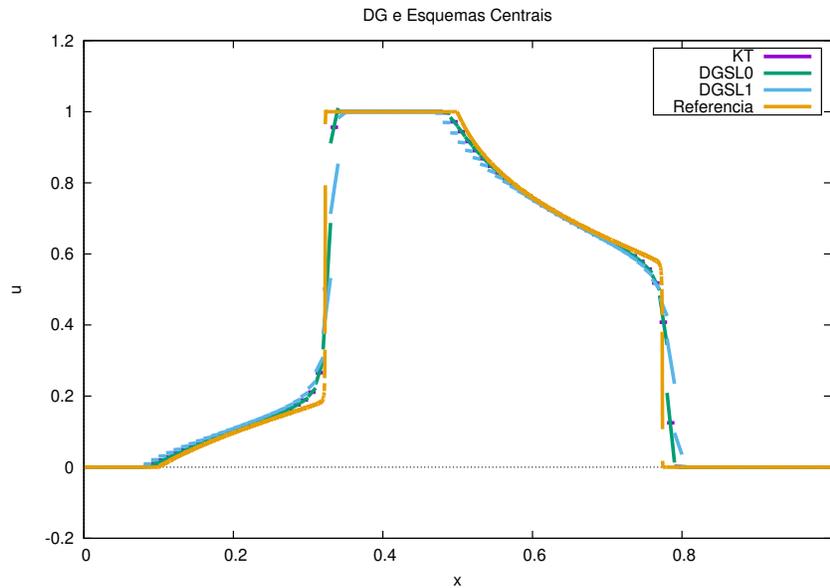


Figura 6.12: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelos Esquemas Centrais de alta ordem e os métodos DG de alta ordem com a solução de referência do problema de Buckley-Leverett, com 100 volumes e $\nu = 0.1$.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

O objetivo deste trabalho foi o estudo computacional de métodos numéricos, da classe Galerkin Descontínuo (DG), para aproximação de problemas hiperbólicos, lineares e não-lineares. Em particular, foram estudadas esquemas explícitos do tipo SSP Runge-Kutta no tempo e DG no espaço. Para tanto, foi necessário estudar a teoria de Elementos Finitos e de Volumes Finitos bem como a teoria básica de problemas de valor inicial, associados a equações diferenciais hiperbólicas, para motivar o uso dessas metodologias como ferramentas de aproximação. Além deste estudo, empregamos técnicas de estabilização para propor métodos de Galerkin Descontínuo de alta ordem, utilizando os limitadores de inclinação.

O estudo de esquemas de volumes finitos centrais de alta ordem desenvolvido no Capítulo 3, mostrou que o uso de uma formulação semi-discreta aliado a reconstruções de alta ordem, conduz a resultados menos difusivos do que os obtidos por esquemas que não admitem tal formulação. A teoria de métodos de Galerkin Descontínuo apresentada no Capítulo 4 permitiu a construção de esquemas semi-discretos baseados em espaços polinomiais locais de grau qualquer. A escolha de um método numérico para solução do sistema de EDO's resultante da formulação semi-discreta, relaciona-se diretamente com a estabilidade espaço-tempo do método DG. Para este fim, escolhemos a classe de métodos SSP Runge-Kutta. No estudo desta classe de métodos, aprendemos uma de suas grandes vantagens, que é a flexibilidade na escolha do grau dos polinômios da base, assim como o número de estágios de integração no tempo. E é justamente a liberdade de escolha dos

graus dos polinômios da base um dos grandes atrativos de métodos da classe DG. Contudo, como já esperado pelo Teorema de Godunov e verificado nos experimentos numéricos, tais esquemas de alta ordem produzem soluções que não preservam a monotonicidade. Os métodos de Galerkin Descontínuo de alta ordem apresentados no Capítulo 5, baseados em duas novas estratégias de estabilização via limitadores de inclinação, conduziram a resultados estáveis, não introduzindo novos extremos locais. A estabilidade e precisão dos novos métodos foi comprovada através de diferentes estudos numéricos, realizados ao final do Capítulo 5 e ao longo do Capítulo 6, onde fizemos diversos experimentos computacionais para problemas hiperbólicos não-lineares (Burgers e Buckley-Leverett), fazendo comparações diretas com os esquemas numéricos apresentados nos Capítulos 3 e 5.

Por fim, enfatiza-se que é um plano futuro a continuidade do estudo de métodos da classe DG, com o objetivo de buscar novas formulações para obtenção de soluções estáveis, como previsto pela teoria para problemas hiperbólicos. Neste contexto, mostramos a viabilidade do uso de limitadores como uma alternativa para a estabilização das soluções aproximadas via DG, uma vez que em regiões com descontinuidades, o método DG pode exibir oscilações espúrias para certas escolhas de polinômios da base, tipicamente aqueles de graus mais elevados, como observado nos experimentos numéricos reportados. Outra questão chave que pode ser aprofundada em trabalhos futuros, é a escolha de estágios SSP da classe Runge-Kutta. Essa classe tem como metodologia a aplicação de uma forma forte de estabilidade para preservar qualitativamente as propriedades matemáticas associadas a problemas hiperbólicos, tais como a captura da correta velocidade de propagação, bem como soluções sem oscilações espúrias. Além disso, é plano futuro a extensão da metodologia DG para a aproximação de soluções de sistemas hiperbólicos em modelos mais sofisticados para aplicações em problemas de natureza multifísica, como aqueles em dinâmica de fluidos em meios porosos, como por exemplo, em transporte de contaminantes em aquíferos e também em reservatórios de petróleo para o desenho de estratégias eficientes para o aumento da produção de hidrocarbonetos.

Referências

- [1] E Abreu, F Pereira e S Ribeiro. “Central schemes for porous media flows”. Em: *Computational & Applied Mathematics* 28.1 (2009), pp. 87–110.
- [2] E. C. Abreu. “Modelagem e Simulação Computacional de Escoamentos Trifásicos em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos,” tese de doutorado. Tese de Doutorado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2007.
- [3] S. Adjerid, K. D. Devine, J. E. Flaherty e L. Krivodonova. “A posteriori error estimation for discontinuous Galerkin solutions of hyperbolic problems”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.11 (2002), pp. 1097–1112.
- [4] R. Ahmed. “Numerical Schemes Applied to the Burgers and Buckley-Leverett Equations”. Tese de doutorado. Department of Mathematics, Submitted to the Department of Mathematics, University of Reading, 2004.
- [5] M. Baccouch. “Global convergence of a posteriori error estimates for the discontinuous Galerkin method for one-dimensional linear hyperbolic problems”. Em: *International Journal of Numerical Analysis and Modeling* 1.1 (2014), pp. 172–192.
- [6] F. Bassi e S. Rebay. “A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations”. Em: *Journal of Computational Physics* 131.2 (1997), pp. 267–279.

- [7] C. E. Baumann e J. T. Oden. “A discontinuous hp finite element method for convection—diffusion problems”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 175.3 (1999), pp. 311–341.
- [8] K. S. Bey e J. T. Oden. “hp Version discontinuous Galerkin methods for hyperbolic conservation laws”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 133.3 (1996), pp. 259–286.
- [9] K. S. Bey, J. T. Oden e A. Patra. “A parallel hp-adaptive discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws”. Em: *Applied Numerical Mathematics* 20 (1996), pp. 321–386.
- [10] R. Biswas, K. Devine e J. E. Flaherty. “Parallel adaptive finite element methods for conservation laws”. Em: *Applied Numerical Mathematics* 14 (1994), pp. 255–284.
- [11] M. R. Borges, F. Furtado, F. Pereira e Amaral H.P. “Scaling Analysis for the Tracer Flow Problem in Self-Similar Permeability Fields. Multiscale Modeling and Simulation 7”. Em: (2008), pp. 1130–1147.
- [12] K. Bottcher e R. Rannacher. “Adaptive error control in solving ordinary differential equations by the discontinuous Galerkin methode”. Em: (1996).
- [13] S. C. Brenner e L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Vol. 3rd Edition. Springer, 2008.
- [14] F. Brezzi e M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. "Springer", 1991.
- [15] F. Brezzi, D. Marini e E. Suli. “Discontinuos Galerkin methods for firts-order Hyperbolic problems”. Em: *Models Methods Appl. Sci.* 14 (2004), p. 1983.
- [16] J. L. D. Calle. “O Método de Galerkin Descontínua com Difusividade Implícita e h-Adaptabilidade Baseada em Técnicas Wavelet”. Tese de doutorado. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002.

- [17] J. LD. Calle, P. RB. Devloo e S. M. Gomes. “Stabilized discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations”. Em: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194.17 (2005), pp. 1861–1874.
- [18] D. S. de Carvalho Tristao. “Esquemas centrais para leis de conservação em meios porosos”. Tese de doutorado. "Laboratório Nacional de Computação Científica-LNCC", 2013.
- [19] G.Q. Chen. “Convergence of the Lax–Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. III. Acta”. Em: *Math. Sci.* 6 (1986), pp. 75–120.
- [20] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. 1978.
- [21] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan e R. Lazarov. “Unified Hybridization of Discontinuous Galerkin, Mixed, and Continuous Galerkin Methods for Second Order Elliptic Problems”. Em: *SIAM Journal of Numerical Analysis* 47(2) (2009), pp. 1319–1365.
- [22] B. Cockburn, G. E. Karniadakis e C.-W. Shu. “Discontinuous Galerkin Methods. Theory, computation and applications. Papers from the 1st International Symposium held in Newport, RI, May 24-26, 1999”. Em: *Spring-Verlag* (2000).
- [23] B. Cockburn, S.-Y. Lin e C.-W. Shu. “TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws III: one-dimensional systems”. Em: *Journal of Computational Physics* 84.1 (1989), pp. 90–113.
- [24] B. Cockburn e C.-W. Shu. “TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework”. Em: *Mathematics of Computation* 52.186 (1989), pp. 411–435.
- [25] B. Cockburn e C.-W. Shu. “The Runge-Kutta local projection P1-discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws”. Em: *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér* 25.3 (1991), pp. 337–361.

- [26] B. Cockburn e C.-W. Shu. “The Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V: multidimensional systems”. Em: *Journal of Computational Physics* 141.2 (1998), pp. 199–224.
- [27] B. Cockburn e C.-W. Shu. “Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems”. Em: *Journal of scientific computing* 16.3 (2001), pp. 173–261.
- [28] B. Cockburn e C.-W. Shu. “Runge-Kutta Discontinuos Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”. Em: *Journal of Scientific Computing* 16(3) (2001), pp. 173–196.
- [29] E. Conway e J. Smoller. “Global solutions of the cauchy problem for quasi-linear first-order equations in several space variables”. Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 19.1 (1966), pp. 95–105.
- [30] MR Correa e MR Borges. “A semi-discrete central scheme for scalar hyperbolic conservation laws with heterogeneous storage coefficient and its application to porous media flow”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 73.3 (2013), pp. 205–224.
- [31] Richard Courant, Kurt Friedrichs e Hans Lewy. “On the partial difference equations of mathematical physics”. Em: *IBM journal of Research and Development* 11.2 (1967), pp. 215–234.
- [32] M. C. Cunha. *Métodos Numéricos*. Vol. 2. Editora Unicamp, 2000.
- [33] A. Dedner e R. Klöforn. “A generic stabilization approach for higher order Discontinuous Galerkin methods for convection dominated problems”. Em: *Journal of Scientific Computing* 47.3 (2011), pp. 365–388.
- [34] K. D. Devine e J. E. Flaherty. “Parallel adaptive hp-refinement techniques for conservation laws”. Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 20 (1996), pp. 367–386.
- [35] X.X. Ding, G.Q. Chen e P.Z Luo. “Convergence of the Lax–Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. I.” Em: *Acta Math. Sci.* 5 (1985), pp. 415–432.

- [36] X.X. Ding, G.Q. Chen e P.Z Luo. “Convergence of the Lax–Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. II.” Em: *Acta Math. Sci.* 5 (1985), pp. 433–472.
- [37] X.X. Ding, G.Q. Chen e P.Z Luo. “A supplement to the papers: “Convergence of the Lax–Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics. II III””. Em: *Acta Math. Sci.* 9 (1989), pp. 43–44.
- [38] F.A. Dorini e M.C.C. Cunha. “Statistical moments of the random linear transport equation”. Em: *Journal of Computational Physics* 227 (2008), pp. 8541–8550.
- [39] J. E. Flaherty, R. M. Loy, M. S. Shephard, B. K. Szymanski, J. D. Teresco e L. H. Ziantz. “Adaptive local refinement with octree load balancing for the parallel solution of three-dimensional conservation laws”. Em: *Journal of Parallel and Distributed Computing* 47.2 (1997), pp. 139–152.
- [40] T. Fogarty e R. J. LeVeque. “High-resolution finite volume methods for acoustics in periodic or random media”. Em: *J. Acoust. Soc. Am.* 106 (1999), pp. 17–28.
- [41] I. M. Gelfand. “Some problems in the theory of quasilinear equations”. Em: *Am. Math. Soc. Transl.* 29 (1963), pp. 295–381.
- [42] E. H Georgoulis. *Discontinuous Galerkin methods for linear problems; an introduction*. In *E. H. Georgoulis, A. Iske, and J. Lebesley (eds), Approximation Algorithms for Complex System, Springer Proceedings in Mathematics*. Vol. 3. Springer-Verlag, 2011.
- [43] J. Glimm. “Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations”. Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 18.4 (1965), pp. 697–715.
- [44] S. K. Godunov. *A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations*. Vol. 47. Math.Sbornik, 1959, 271–306.
- [45] S. K. Godunov. “Reminiscences about Diferrence Schemes”. Em: *Journal of Computational Physics* 153(1) (1999), pp. 6–25.

- [46] Sergei Konstantinovich Godunov. “A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics”. Em: *Matematicheskii Sbornik* 89.3 (1959), pp. 271–306.
- [47] S. Gottlieb. “On high order strong stability preserving Runge–Kutta and multi step time discretizations”. Em: *Journal of Scientific Computing* 25.1 (2005), pp. 105–128.
- [48] S. Gottlieb, D.I. Ketcheson e C.-W. Shu. “High order strong stability preserving time discretizations”. Em: *Journal of Scientific Computing* 38(3) (2009), pp. 251–289.
- [49] S. Gottlieb, D.I. Ketcheson e C.-W. Shu. “Strong Stability Preserving Runge-Kutta and Multistep Time Discretization”. Em: *World Scientific* (2011).
- [50] S. Gottlieb e C.-W. Shu. “Total variation diminishing Runge-Kutta schemes”. Em: *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society* 67.221 (1998), pp. 73–85.
- [51] S. Gottlieb, C.-W. Shu e E. Tadmor. “Strong stability-preserving high-order time discretization methods”. Em: *SIAM review* 43.1 (2001), pp. 89–112.
- [52] J. L. Guermond. “A finite element technique for solving first-order PDEs in L_p ”. Em: *SIAM Journal of Numerical Analysis* 42 (2004), pp. 714–737.
- [53] B. Haasdonk, D. Kroner e C. Rohde. “Convergence of a Staggered-Lax-Friedrichs-Scheme on Unstructured Grids in 2D.” Em: *Numer. Math.* 88.3 (2001), pp. 459–484.
- [54] A. Harten. “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”. Em: *Journal of Computational Physics* 49 (1983), pp. 357–393.
- [55] I. Higuera. “Representations of Runge–Kutta Methods and Strong Stability Preserving Methods”. Em: *SIAM journal on numerical analysis* 43.3 (2005), pp. 924–948.
- [56] B. N. Jiang. “Non-oscillatory and non-diffusive solution of convection problems by the iteratively reweighted least-square finite element method”. Em: *Journal of Computational Physics* 105 (1993), pp. 108–121.

- [57] C. Johnson. “Error estimates and adaptive time-step control for a class of one-step methods for stiff ordinary differential equations”. Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 25 (1988), pp. 908–926.
- [58] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Dover Publications, 2012.
- [59] C. Johnson e J. Pitkranta. “An analysis of discontinuous Galerkin method a for a scalar hyperbolic equation”. Em: *Math. Comp.* 46 (1986), p. 126.
- [60] K. H. Karlsen e J. D. Towers. “Convergence of the Lax-Friedrichs scheme and stability for conservation laws with a discontinuous space-time dependent flux”. Em: *Preprint series. Pure mathematics* <http://urn.nb.no/URN:NBN:no-8076> (2004).
- [61] D. B. Kotlow. “Quasilinear parabolic equations and first order quasilinear conservation laws with bad Cauchy data”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 35.3 (1971), pp. 563–576.
- [62] L. Krivodonova. “Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods”. Em: *Journal of Computational Physics* 226.1 (2007), pp. 879–896.
- [63] E. J. Kubatko, J. J. Westerink e C. Dawson. “Semi discrete discontinuous Galerkin methods and stage-exceeding-order, strong-stability-preserving Runge–Kutta time discretizations.” Em: *Journal of Computational Physics* 222.2 (2007), pp. 832–848.
- [64] E.J. Kubatko, J.J. Westerink e C. Dawson. “Semidiscete discontinuous Galerkin methods and stage exceeding order, strong stability preserving Runge-Kutta time discretizations,” em: *Journal of Computational Physics* 222 (2007), pp. 832–848.
- [65] A. Kurganov e G. Petrova. “Central-upwind schemes on triangular grids for hyperbolic systems of conservation laws”. Em: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 21 (2005), pp. 536–552.

- [66] A. Kurganov e E. Tadmor. “New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations”. Em: *Journal of Computational Physics* 160.1 (2000), pp. 241–282.
- [67] P. D. Lax. “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation”. Em: *Communications on pure and applied mathematics* 7.1 (1954), pp. 159–193.
- [68] P. D. Lax. “Hyperbolic systems of conservation laws II”. Em: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 10.4 (1957), pp. 537–566.
- [69] P.D. Lax. “Hyperbolic System of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves”. Em: *SIAM Region. Ser. Appl. Math., SIAM Philadelphia, Pa* 11 (1973).
- [70] Bram van Leer. “Towards the ultimate conservative difference scheme”. Em: *Journal of Computational Physics* 135.2 (1997), pp. 229–248.
- [71] P. Lesaint e P. Raviart. “On a finite element method for solving the neutron transport equations. In: *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*”. Em: *Math. Res. Center, Univ. of Wisconsin-Madison* (1974), pp. 89–123.
- [72] R. J. LeVeque. “Finite-volume methods for non-linear elasticity in heterogeneous media”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Fluids , Special Issue: ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics* 40 (1-2 10 - 20 September 2002), pp. 93–104.
- [73] R. J. LeVeque. *Numerical methods for conservation laws*. Vol. 132. Springer, 1992.
- [74] R. J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Vol. 31. Cambridge University Press, 2002.
- [75] R. J. LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*. Vol. 98. SIAM, 2007.
- [76] Elon Lages Lima. *Álgebra linear*. IMPA, 2006.

- [77] Y. Liu, C.-W. Shu, E. Tadmor e M. Zhang. “Central discontinuous Galerkin methods on overlapping cells with a nonoscillatory hierarchical reconstruction”. Em: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 45.6 (2007), pp. 2442–2467.
- [78] Y. Liu, C.-W. Shu, E. Tadmor e M. Zhang. “ L^2 stability analysis of the central discontinuous Galerkin method and a comparison between the central and regular discontinuous Galerkin methods”. Em: *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 42.04 (2008), pp. 593–607.
- [79] K. Mattsöna e J. Nordström. “High order finite difference methods for wave propagation in discontinuous media”. Em: *Journal of Computational Physics* 220(1) (2006), pp. 249–269.
- [80] O. Mehmetoglu e B. Popov. “Maximum principle and convergence of central schemes based on slope limiters”. Em: *Mathematical of Computation* 2011 81.277 (January 2012), pp. 219–231.
- [81] K. Naugolnykh e L. Ostrovsky. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Vol. First edition. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1998, p. 312.
- [82] H. Nessyahu e Tadmor E. “Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws”. Em: *Journal of Computational Physics* 87.2 (1990), pp. 408–463.
- [83] M. S. N. Neto. “Um esquema Central em volumes finitos de alta resolução para a solução numérica de problemas hiperbólicos bidimensionais em malhas não estruturadas,” tese de doutorado. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, 2013.
- [84] O. A. Oleinik. “Discontinuous solutions of non-linear differential equations”. Em: *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 12.3 (1957), pp. 3–73.
- [85] O. A. Oleinik. “Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation”. Em: *Am. Math. Soc. Transl* 33 (1963), pp. 285–290.
- [86] S. Osher. “Riemman solvers, the entropy condition and difference approximations”. Em: *SIAM Journal of Numerical Analysis* 21 (1984), pp. 217–235.

- [87] Donald W Peaceman. *Fundamentals of numerical reservoir simulation*. Elsevier, 2000.
- [88] J. A. Perez. “A Lagrangian-Eulerian computational formulation to hyperbolic problems and balance laws,” tese de doutorado. PhD. Thesis, in preparation, Institute of Mathematics, Statistics e Scientific Computing, University of Campinas, 2015.
- [89] J. Qiu, T. Liu e B. C. Khoo. “Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for compressible two-medium flow simulations: One-dimensional case”. Em: *Journal of Computational Physics* 222.1 (2007), pp. 353–373.
- [90] J. Qiu e C.-W. Shu. “Runge–Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters”. Em: *SIAM Journal on Scientific Computing* 26.3 (2005), pp. 907–929.
- [91] W. H. Reed e T. R. Hill. “Triangular mesh methods for the neutron transport equation”. Em: *Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory* (1973).
- [92] S. S. Ribeiro. “Novos Esquemas Centrais de Diferenças Finitas para a Simulação de Escoamentos Multifásicos em Reservatórios de Petróleo,” tese de doutorado. Tese de Doutorado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2007.
- [93] W. J. Rider e R. B. Lowrie. “The use of classical Lax–Friedrichs Riemann solvers with discontinuous Galerkin methods”. Em: *International journal for numerical methods in fluids* 40 (2002), pp. 479–486.
- [94] B. Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation*. Society for Industrial e Applied Mathematics - SIAM, 2008.
- [95] P. L. Roe. “Approximate Riemman Solvers, parameter vectors and difference schemes”. Em: *Journal of Computational Physics* 43 (1981), pp. 357–372.
- [96] P. L. Roe. “Some contributions to the modeling of discontinuous flows, Lectures in Applied Mathematics”. Em: *American Mathematical Society* 22 (1985).

- [97] PL Roe. “Characteristic-based schemes for the Euler equations”. Em: *Annual review of fluid mechanics* 18.1 (1986), pp. 337–365.
- [98] J.A. Rossmannith. “A high-resolution constrained transport method with adaptive mesh refinement for magnetohydrodynamic flows”. Em: *Comp. Phys. Comm.* 164 (2004), pp. 128–133.
- [99] A. F. da Silva Junior. “Método dos volumes finitos para a equação de convecção e difusão em uma dimensão espacial”. Tese de doutorado. "Universidade Federal Fluminense-Iff", 2012.
- [100] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations*. 2nd edn. Springer, 1994.
- [101] P. K. Sweby. “High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws”. Em: *SIAM Journal of Numerical Analysis* 21 (1984), pp. 995–1011.
- [102] Eleuterio F Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [103] B. Van Leer. “Towards the ultimate conservative difference scheme V: a second order sequel to Godunov’s method”. Em: *Journal of Computational Physics* 32 (1979), pp. 101–136.
- [104] K. Voonna. “Development of Discontinuous Galerkin Method for 1-D Inviscid Burgers Equation”. Em: (2003).
- [105] S.N.D Vvedenskaya. “Solution of the Cauchy problem for a non-linear equation with discontinuous initial conditions by the method of finite differences”. Em: 111 (1956), pp. 517–520.
- [106] Pieter Wesseling. *Principles of computational fluid dynamics*. Vol. 29. Springer Science & Business Media, 2009.
- [107] M. F. Wheeler. “An elliptic collocation-finite element method with interior penalties”. Em: *SIAM: Journal on Numerical Analysis* 15.1 (1978), pp. 152–161.

- [108] H.C. Yee. “A Class of High-Resolution Explicit and Implicit Shock-Capturing Methods, NASA TM 101088, Feb. 1989. Also, Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series 1989-04”. Em: *Computational Fluid Dynamics* (6 de março de 1989).