



MATEUS MOREIRA DE MELO

ESTABILIDADE DE FOLHEAÇÕES VIA TEOREMA DA FUNÇÃO
INVERSA DE NASH-MOSER

CAMPINAS
2015



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

MATEUS MOREIRA DE MELO

ESTABILIDADE DE FOLHEAÇÕES VIA TEOREMA DA FUNÇÃO
INVERSA DE NASH-MOSER

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO MATEUS MOREIRA DE MELO, E ORIENTADA PELO PROF. DR. DIEGO SEBASTIAN LEDESMA.

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in blue ink is written over a horizontal line. The signature is stylized and appears to be "Diego Sebastian Ledesma".

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

M491e Melo, Mateus Moreira de, 1991-
Estabilidade de folheações via teorema da função inversa de Nash-Moser /
Mateus Moreira de Melo. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Folheações (Matemática). 2. Teoria da deformação (Matemática). 3.
Estabilidade. 4. Fréchet, Espaços de. 5. Nash-Moser, Teorema de. I. Ledesma,
Diego Sebastian, 1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Stability of foliations by Nash-Moser inverse function theorem

Palavras-chave em inglês:

Foliations (Mathematics)

Deformation theory (Mathematics)

Stability

Fréchet spaces

Nash-Moser theorem

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Diego Sebastian Ledesma [Orientador]

Pedro José Catuogno

Cristian Andres Ortiz Gonzalez

Data de defesa: 27-03-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de março de 2015 e aprovada

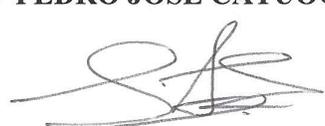
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA



Prof.(a). Dr(a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof.(a). Dr(a). CRISTIAN ANDRES ORTIZ GONZALEZ

Abstract

In this work, we study the concept of stability for foliations. With this aim we use a nonlinear complex formed by maps and manifolds in Fréchet Tame category. We apply a variation of The Nash-Moser Inverse Function Theorem to nonlinear complex obtaining a relation between the stability and the tame exactness of the linearized complex. Moreover, the linearized complex is identified with a piece of the complex de Rham of the foliation, i.e., we transformed the stability study into an analysis of tameness vanishing on the cohomology group of the foliation. Thus we describe a family of stable foliations, called infinitesimally stable foliations. This family gives a direction for the study of stability of foliations.

Keywords: foliations, deformation theory, stability, Fréchet spaces, Nash-Moser Theorem.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o conceito de estabilidade para folheações. Com este objetivo, usamos um complexo não-linear formado por mapas e variedades na categoria Fréchet Tame. Aplicamos uma variação do Teorema da Função Inversa de Nash-Moser ao complexo não-linear obtendo uma relação entre estabilidade e a exatidão tame do complexo linearizado. Além disso, o complexo linearizado é identificado com um trecho do complexo de Rham da folheação, ou seja, transforma-se o estudo de estabilidade em analisar a exatidão tame de um grupo de cohomologia da folheação. Assim descrevemos uma família de folheações estáveis, chamadas folheações infinitesimalmente estáveis. Esta família dá uma direção para o estudo de estabilidade de folheações.

Palavras-chave: folheações, teoria da deformação, estabilidade, espaços de Fréchet, Teorema de Nash-Moser.

Sumário

Introdução	1
1 Folheações	3
1.1 Folheações	3
1.2 Integrabilidade e folheações	7
1.3 Ações dos difeomorfismos	11
1.4 Projetores de posto constante e folheações	13
1.5 Conexão de Bott e complexo de de Rham de uma folheação	16
2 Espaços de Fréchet e Fréchet tame	20
2.1 Espaços de Fréchet	20
2.2 Cálculo em espaços de Fréchet	22
2.3 Variedades de Fréchet	31
2.4 Espaços de Fréchet tame	36
2.5 Aplicações tame suaves	42
2.6 Variedades de Fréchet tame	45
2.7 Teorema de Nash-Moser	51
3 Complexo de Deformação de uma Folheação	55
3.1 Complexo de Deformação e Estabilidade	55
3.2 Aplicando o Teorema de Nash-Moser ao Complexo de Deformação	59
4 Grupoides e Algebroides de Lie	65
4.1 Grupoides	65
4.2 Algebroides	67
4.3 Tame Vanishing Lema	70
A Fibrados	72
B Holonomia	74
Referências	76
Índice Remissivo	78

*Com carinho aos meus pais
Paulo e Helena e aos meus irmãos
Marcos e Mônica*

Agradecimentos

Agradeço ao povo brasileiro e paulista que por meio do CNPq e da FAPESP financiaram minha pesquisa. Agradeço também a Unicamp por todo o suporte e infra-estrutura que se fez disponível durante a minha pesquisa. Pelos dias de Unicamp, agradeço a todos os servidores e professores do Imecc que contribuíram para que esse trabalho se realizasse. Em especial meu orientador Prof.Dr.Diego Sebastian Ledesma por seus conselhos e contribuições na minha formação, fique também registrada nessas linhas a sua paciência em me ajudar quando se fez necessário.

Pela participação na banca e sugestões para a versão final deste texto, meu muito obrigado aos professores Cristian Ortiz e Pedro Catuogno.

Agradeço aos meus pais pelos valores que ensinaram-me, por todo o carinho e amor que me deram, por acreditarem e incentivarem meus sonhos e por terem corrigido-me quando se fez necessário. Junto deles agradeço meus queridos irmãos Marcos e Mônica pessoas maravilhosas, companheiros e amigos.

Agradeço os inúmeros mestres que tive ao longo desta vida, meu querido mestre de marcenaria Juventino Migliorini(Tinão), meus professores do ensino fundamental e médio que me proporcionaram os primeiros contatos com o conhecimento, meus professores da graduação na UEM que apresentaram-me a matemática e incentivaram-me a seguir a carreira acadêmica em especial o Prof.Dr.Ryuichi Fukoaka meu orientador de iniciação científica.

Meu agradecimento a todos os amigos que estiveram ao meu lado nesses dois anos. Obrigado aos meus grandes amigos de graduação que sempre se fazem presente Akemi, Emely e Juniormar. Quanto aos dias e noites de estudo no pré-dinho que foram por vezes de segunda a segunda. Agradeço a todos que ocupam esse espaço e fazem desse convívio uma grande família. Meu muito obrigado aos meus queridos amigos de estudos e que juntos superamos as dificuldades do mestrado Sr.Caraballo, Sr.Códamo, Mr.Lobo, Sr.Moitinho, Sr.Severiano e Sr.Soriani.

Por me acolher no início do mestrado na casa E-4 da moradia estudantil e ter me ajudado em tantas outras coisas meus agradecimentos ao meu amigo Luiz Fernando(Cagado). Agradeço ao grande amigo Linão que me deu bons conselhos e que me indicou a Rép Hostel, onde tive o prazer de conviver com Cláudio, Jardel Destruidor de Forninhos, Michael do Pagode, Jorge Miojo Gourmet, Pão o Felipe com grife, Luciano Bronks e Bruno.

Introdução

Neste trabalho fazemos um estudo sobre a estabilidade de folheações regulares em variedades compactas suaves. O conceito de estabilidade de folheações é uma generalização do que se conhece como estabilidade estrutural para sistemas dinâmicos. Todo conceito de estabilidade envolve uma topologia e propriedades que se preservam em um vizinhança dessa topologia. Como estamos tratando de folheações de classe C^∞ é apropriado dar ao conjunto $Fol(k, M)$ das folheações de dimensão k em M a topologia do subespaço herdada de $\Gamma(\text{Gr}_k M)$, o caso de folheações C^r necessita de uma outra abordagem como pode ser visto em [6]. A propriedade que queremos avaliar é sobre quais aspectos podemos identificar via um difeomorfismo duas folheações. No capítulo 1 introduzimos a noção de folheação e algumas de suas propriedades, definimos os principais objetos geométricos a serem utilizados na formulação do problema, nossas referências para esse estudo são os livros de Camacho e Lins [2] e Candel e Colon [3]. Definimos a conexão de Bott tal como ele em [1], apresentamos a cohomologia de uma folheação \mathcal{F} usando a conexão de Bott na construção da derivada exterior das r -formas do fibrado $T\mathcal{F}$ tangente a folheação tomando valores no fibrado $\nu_{\mathcal{F}}$ normal a \mathcal{F} . O complexo de cocadeias associado a cohomologia de uma folheação é uma ferramenta importante na linearização do nosso problema, como veremos na seção 3.2 a linearização do complexo de deformação de uma folheação é isomorfo a um trecho deste complexo. A abordagem sobre estabilidade de folheações estudada nesse trabalho se baseia na identificação das folheações com objetos infinitesimais. Por exemplo, identificamos folheações de dimensão k com os subfibrados involutivos de TM com posto igual à dimensão da folheação, por sua vez podemos identificar os subfibrados de TM de posto k com as seções do fibrado

$$\text{Gr}_k M := \bigcup_{x \in M} \text{Gr}_k T_x M$$

das grassmannianas sobre M . No contexto de seções do fibrado das grassmannianas definimos integrabilidade e apresentamos uma versão alternativa do teorema de Frobenius para esses objetos, por meio da construção de certos fibrados vetoriais descrevemos as seções integráveis do fibrado das grassmannianas como imagem inversa de uma aplicação entre espaços de seções de fibrados. Existe ainda outro objeto infinitesimal associado à folheação, são os projetores de posto constante de TM , onde repetimos o que foi feito para seções das grassmannianas. A noção de estabilidade depende de um grupo de transformações que preservem determinada propriedade, no nosso caso é o grupo dos difeomorfismos. Explanamos a ação por conjugação dos difeomorfismos sobre as seções do fibrado das grassmannianas e sobre os projetores de posto constante.

O capítulo 2 é um estudo sobre os espaços de Fréchet, que correspondem a uma generalização dos espaços de Banach e são espaços localmente convexos, completos com respeito a uma métrica

invariante por translação. Em contraste com os espaços de Banach, a métrica não necessita provir de uma norma. Embora a estrutura topológica de espaço Fréchet seja mais complicada do que a de espaço Banach devido à falta de uma norma, muitos resultados importantes da análise funcional, como o Teorema de Hahn-Banach e o Teorema da Aplicação aberta, valem ainda nesse contexto. Isso pode se visto no livro de Jarchow [12]. O espaço de funções infinitamente diferenciáveis é o exemplo mais recorrente de espaço de Fréchet. Também apresentamos algumas noções de cálculo diferencial e integral em espaços de Fréchet, destacando a noção de diferenciabilidade que no caso dos espaços de Fréchet é a derivada de Gâteaux. Esta noção de diferenciabilidade é significativamente mais fraca se comparada à de um espaço de Banach. No entanto, muitos dos teoremas familiares do cálculo ainda são válidos. A definição de variedade se generaliza de modo direto para o caso do cálculo em espaços de Fréchet. É possível definir, de modo análogo ao caso de dimensão finita a noção de funções suaves entre variedades de Fréchet. Uma das justificativas na escolha da categoria de Fréchet e não a categoria de Banach, é o fato de que o grupo dos difeomorfismos $\text{Diff}(M)$ não é um grupo de Lie-Banach. De fato, se um grupo G de Lie-Banach conexo age efetivamente e transitivamente em uma variedade compacta de dimensão finita então o grupo G é de dimensão finita, ver [19]. No nosso trabalho também utilizamos aplicações entre espaços de funções suaves que são descritas como a composição de funções. Como pode ser visto em [9], a composição no caso Banach deixa de ser uma aplicação suave. Introduzimos os espaço de Fréchet tame e a categoria Fréchet tame suave, ambiente natural do teorema da função inversa de Nash-Moser.

No capítulo 3 seguimos os passos de Hamilton em [8] construindo o complexo de deformação de uma folheação formado por variedades e aplicações na categoria Fréchet tame suave, mostramos que a exatidão local deste complexo modela a estabilidade da folheação. No estudo da deformação de estruturas geométricas Hamilton utilizou técnicas do cálculo em espaços de Fréchet, o já citado trabalho sobre folheações e [7] que trata sobre deformação de estruturas complexas são exemplos disso. Seus resultados envolvem variações do teorema da função inversa de Nash-Moser, o que nos leva a trabalhar na categoria dos espaços Fréchet tame. Identificamos o linearizado do complexo de deformação com um trecho do complexo de de Rham da uma folheação. Definimos estabilidade infinitesimal em termos do complexo de Rham e sua cohomologia e operadores de homotopia tame. Assim, obtemos o resultado central dessa dissertação que nos diz que estabilidade infinitesimal implica estabilidade.

Ao final desse texto, no capítulo 4 fazemos uma pequena exposição de alguns elementos da teoria de grupoides e algebroides de Lie, tomando como referência [4] e [18]. Nosso intuito é fornecer ao leitor uma ideia sobre a prova da versão global do Teorema de Estabilidade de Reeb-Thurston seguindo o que foi feito por Marcut em sua tese [16]. Apresentamos alguns resultados preliminares presentes na tese de Marcut e que são usados por ele para fazer uma releitura do trabalho do Hamilton, por questões técnicas iremos apenas nos referenciar a esses resultados omitindo suas demonstrações.

Capítulo 1

Folheações

Neste capítulo introduzimos a noção de folheação e algumas de suas propriedades. Estudaremos distribuições do fibrado tangente como seções do fibrado das grassmannianas e projetores de posto constante, bem como uma versão do teorema de Frobenius para essas formulações. Vamos definir os principais objetos a serem utilizados no capítulo 3 na formulação do problema sobre a estabilidade de uma folheação. Fixaremos notações e apresentaremos propriedades desses objetos que utilizaremos nos próximos capítulos.

1.1 Folheações

A ideia intuitiva de folheação corresponde à decomposição de uma variedade numa união disjunta de subvariedades conexas e imersas. No caso de folheações regulares pedimos que as subvariedades tenham a mesma dimensão e que possamos identificar uma vizinhança da variedade difeomorficamente com $\mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ de modo que restrição das subvariedades a vizinhança são imagens de seções $\{c\} \times \mathbb{R}^k$. Nossas referências para esta sessão são os livros de Camacho e Lins Neto [2] e Candel e Conlon [3].

Definição 1.1.1. Seja M uma variedade de dimensão m . Uma *folheação* \mathcal{F} de dimensão k em M é um atlas maximal com as seguintes propriedades:

- i) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, com U_1 e U_2 discos abertos de \mathbb{R}^k e \mathbb{R}^{m-k} respectivamente.
- ii) Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

As cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ serão chamadas de *cartas trivializadoras da folheação* \mathcal{F} . Denotaremos o conjunto das folheações de dimensão k em M por $Fol(k, M)$.

Seja \mathcal{F} uma folheação de dimensão k de uma variedade suave M . Considere (U, φ) uma carta local de \mathcal{F} , com U conexo e $\varphi(U) = U_1 \times U_2$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{y\})$, $y \in U_2$ são chamados *placas* de \mathcal{F} . Claramente placas são subvariedades de dimensão k mergulhadas em M . Um caminho de placas de \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$, para cada $i = 1, \dots, s$.

Dados $x, y \in M$ podemos estabelecer uma relação de equivalência pondo $x \equiv y$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ com $x \in \alpha_1$ e $y \in \alpha_s$. Chamamos as classes de equivalência dessa relação de *folhas* de \mathcal{F} . A forma como definimos as placas garantem que estas sejam conexas, assim podemos usar os caminhos de placas para construir um caminho ligando os pontos da folha, portanto as folhas são conjuntos conexos.

Teorema 1.1.2. Seja M uma variedade folheada por uma folheação \mathcal{F} de dimensão k . Toda folha F de \mathcal{F} possui uma estrutura de variedade, tal que os domínios das cartas locais de F são placas de \mathcal{F} . A aplicação inclusão $i : F \rightarrow M$ é uma imersão injetiva.

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [2]. □

Existe uma vasta gama de exemplos de folheações, daremos aqui alguns exemplos de como construir tais objetos.

Exemplo 1.1.3. Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão. Para cada ponto $p \in M$ com $q = f(p)$, a forma local das submersões nos fornece cartas locais (U, φ) em M , (V, ψ) em N tais que $p \in U$, $q \in V$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ e $\psi(V) = V_2 \supset U_2$ de forma que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$ coincide com a projeção na segunda coordenada. As cartas locais (U, φ) definem uma folheação em M cujas folhas são as componentes conexas das subvariedades de níveis $f^{-1}(c)$, $c \in N$.

Exemplo 1.1.4. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vetores sem singularidades. Temos uma folheação de M dada pelas órbitas do fluxo de X , para uma verificação mais detalhada basta observar que como X não tem singularidades podemos aplicar o teorema do fluxo tubular a todos os pontos de M o que nos dá o atlas de uma folheação em M .

Exemplo 1.1.5. Uma ação suave $\phi : G \times M \rightarrow M$ de um grupo de Lie em M produz uma folheação em M , onde as folhas são as órbitas da ação. Da teoria de ações de grupos temos que $\bar{\phi} : G/G_x \rightarrow M$, $\bar{\phi}(\bar{g}) = \phi(g, x)$ é uma imersão bijetora sobre a imagem \mathcal{O}_x . Nessa dissertação estamos interessados em folheações regulares, nos restringimos a ações nas quais as órbitas são variedades imersas de mesma dimensão. Seja $x \in M$, tome $E \subset T_e G$ tal que $T_e G = E \oplus T_e G_x$, onde G_x é o grupo de isotropia de x . Podemos tomar um mergulho $f_1 : B^k \rightarrow G$ de um disco aberto tangente a E com $f_1(0) = e$. Como $\mathcal{O}(x)$ é uma variedade imersa de dimensão k , existe uma seção transversal local dada por um mergulho $f_2 : B^{m-k} \rightarrow M$ com $f_2(0) = x$. Definindo $\Phi : B^k \times B^{m-k} \rightarrow M$, $\Phi(u, v) = \phi(f_1 u, f_2 v)$. Por construção $D\Phi|_{(0,0)}$ é sobrejetora e conseqüentemente um isomorfismo, aplicando o teorema da função inversa obtemos um carta $\psi : U \rightarrow B^k \times B^{m-k}$ e $U \cap \mathcal{O}_x = \psi^{-1}(B^k \times \{x\})$. Mostrando que $\{\mathcal{O}_x\}_{x \in M}$ define uma folheação.

Seja \mathcal{F} uma folheação em uma variedade M . Considere $p \in M$, pela forma como definimos as folhas de uma folheação existe uma única folha de \mathcal{F} contendo p . O teorema 1.1.2 nos diz que

tal folha F é uma subvariedade imersa de M , permitindo falar no espaço tangente à F no ponto p , isto é, o subespaço $T_p F \subset T_p M$. Pela unicidade da folha que passa por p , fica bem definida a notação

$$T_p \mathcal{F} := T_p F.$$

Sendo $T_p \mathcal{F}$ um subespaço de $T_p M$ podemos falar do espaço quociente

$$\nu_{\mathcal{F}p} := \frac{T_p M}{T_p \mathcal{F}}$$

chamaremos de espaço normal o quociente $\nu_{\mathcal{F}p}$, se $v \in T_p M$ denotaremos sua classe de equivalência por \bar{v} . Temos a projeção

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_{\mathcal{F}p}} : T_p M &\rightarrow \nu_{\mathcal{F}p} \\ v &\mapsto \bar{v}, \end{aligned}$$

com $\ker(\pi_{\nu_{\mathcal{F}p}}) = T_p \mathcal{F}$. Todas essas construções pontuais podem ser levadas a um nível global tomando os conjuntos

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M \quad , \quad T\mathcal{F} := \bigcup_{p \in M} T_p \mathcal{F} \quad , \quad \nu_{\mathcal{F}} := \bigcup_{p \in M} \nu_{\mathcal{F}p}$$

e uma aplicação

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_{\mathcal{F}}} : TM &\rightarrow \nu_{\mathcal{F}} \\ v_p &\mapsto \pi_{\nu_{\mathcal{F}p}}(v_p). \end{aligned}$$

O conjunto TM tem uma estrutura de variedade diferenciável que o faz também um fibrado vetorial sobre M , conhecido como fibrado tangente de M . A proposição a seguir nos diz que $T\mathcal{F}$ e $\nu_{\mathcal{F}}$ também são fibrados vetoriais sobre M , com isso os denominaremos $T\mathcal{F}$ *fibrado tangente à folheação* e $\nu_{\mathcal{F}}$ *fibrado normal à folheação*.

Proposição 1.1.6. Dada \mathcal{F} uma folheação de dimensão k em M uma variedade suave. Os conjuntos $T\mathcal{F}$ e $\nu_{\mathcal{F}}$ são fibrados vetoriais sobre M de posto k e $m - k$ respectivamente. Mais ainda, a aplicação $\pi_{\nu_{\mathcal{F}}} : TM \rightarrow \nu_{\mathcal{F}}$ é um morfismo de fibrados e $\ker(\pi_{\nu_{\mathcal{F}}}) = T\mathcal{F}$ é um subfibrado de TM .

Demonstração. Dada uma carta (U, φ) trivializadora da folheação, com $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$. Podemos definir uma carta

$$\Phi : \pi_{T\mathcal{F}}^{-1}(U) \rightarrow U_1 \times U_2 \times (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

para $T\mathcal{F}$, dada por $\Phi(v_x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), D\varphi(x)v_x)$. Esta expressão fica bem definido, pois φ_2 é constante ao longo da interseção das folhas de \mathcal{F} com U . Provemos agora que este atlas induz uma estrutura de fibrado vetorial em $T\mathcal{F}$. Dadas (U_i, φ_i) e $(U_j, \varphi_j) \in \mathcal{F}$ cartas trivializadoras da folheação, com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, temos

$$\begin{array}{ccc} & \pi_{T\mathcal{F}}^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ & \nearrow & \searrow \\ \Phi_i(U_i \cap U_j) = \varphi_i(U_i \cap U_j) \times (\mathbb{R}^k \times \{0\}) & \xrightarrow{(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}, D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}))} & \Phi_j(U_i \cap U_j) = \varphi_j(U_i \cap U_j) \times (\mathbb{R}^k \times \{0\}), \end{array}$$

onde $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(x, y) = (f_{ij}(x, y), g_{ij}(y))$, segue disto que

$$D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \Big|_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{ij}(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_{ij}(x,y)}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial g_{ij}(y)}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Pela forma de blocos de $D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \Big|_{(x,y)}$ é fácil de ver que sua restrição à $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ é invariante e um isomorfismo. Portanto $T\mathcal{F}$ é um fibrado vetorial. Considerando ainda (U, φ) uma carta trivializadora da folheação, pela observação de que $D\varphi(p)T_p\mathcal{F} = \mathbb{R}^k \times \{0\}$ o isomorfismo $D\varphi(p)$ induz um isomorfismo $\overline{D\varphi}(p)$ entre $\nu_{\mathcal{F}_p}$ e \mathbb{R}^{n-k} , cujo isomorfismo inverso é o isomorfismo $\overline{D\varphi}^{-1}(p)$ induzido por $D\varphi(p)$. Como pode ser observado no diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{D\varphi(p)} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ \pi_{\nu_{\mathcal{F}_p}} \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \frac{T_p M}{T_p \mathcal{F}} & \xrightarrow{\overline{D\varphi}(p)} & \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}. \end{array}$$

Como estamos denotando $\pi_{\mathcal{F}} : TM \rightarrow \nu_{\mathcal{F}}$, denotaremos a projeção $\pi : \nu_{\mathcal{F}} \rightarrow M$ apenas por π . Assim, $\Psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^{n-k}$ com $\Psi(\bar{v}_x) = (x, \overline{D\varphi}(p)\bar{v}_p)$. Considere duas trivializações $\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^{n-k}$ e $\Psi_j : \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{R}^{n-k}$ com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, daí

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ & \nearrow & \searrow \\ \Psi_i(U_i \cap U_j) = \varphi_i(U_i \cap U_j) \times (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) & \xrightarrow{(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}, \overline{D\varphi_j \circ D\varphi_i^{-1}})} & \Psi_j(U_i \cap U_j) = \varphi_j(U_i \cap U_j) \times (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}). \end{array}$$

Mas é válido que $\overline{D\varphi_j} \circ \overline{D\varphi_i^{-1}} = \overline{D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})}$, onde $\overline{D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})}$ denota o isomorfismo induzido por $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})} & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_2 \\ \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\overline{D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})}} & \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}, \end{array}$$

visto que $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Como se trata apenas de uma restrição ao subespaço $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$, se $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(x)$ depende diferenciavelmente de x o mesmo ocorre para $\overline{D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})}(x)$. Donde as trivializações $(\pi^{-1}(U_j), \Psi_j)$ tornam $\nu_{\mathcal{F}}$ um fibrado vetorial. Por construção $\pi_{\nu_{\mathcal{F}}}$ leva

linearmente vetores de $T_p M$ em $\nu_{\mathcal{F}_p}$ e $\ker \pi_{\nu_{\mathcal{F}}} = T\mathcal{F}$. O fato que é diferenciável segue a partir das cartas que construímos para $\nu_{\mathcal{F}}$. □

Observação 1.1.7. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathcal{F}) := \Gamma(T\mathcal{F})$ o espaço das seções de $T\mathcal{F}$ e por $\Gamma(\nu_{\mathcal{F}})$ as seções de $\nu_{\mathcal{F}}$.

1.2 Integrabilidade e folheações

O objetivo desta seção é descrever as distribuições integráveis como imagem inversa de um ponto por uma aplicação. Para capturar as condições de integrabilidade recorreremos aos fibrados que guardam essas informações. Naturalmente podemos identificar campos de k -planos em variedades como seções do fibrado

$$\text{Gr}_k M := \bigcup_{x \in M} \text{Gr}_k T_x M$$

das grassmaniannas sobre M .

Proposição 1.2.1. O conjunto $\text{Gr}_k M$ possui uma estrutura diferenciável que torna a projeção

$$\pi_{\text{Gr}_k M} : \text{Gr}_k M \rightarrow M$$

um fibrado sobre M , com fibra $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$.

Demonstração. Dado um isomorfismo $T : V \rightarrow W$ entre espaços vetoriais de dimensão finita, podemos induzir uma aplicação $\hat{T} : \text{Gr}_k(V) \rightarrow \text{Gr}_k(W)$ associando a cada subespaço $B \in \text{Gr}_k(V)$ a sua imagem por T , isto é, $\hat{T}(B) = T(B)$ e fica bem definido pois $T(B)$ é um subespaço de dimensão k de W . A diferenciabilidade de \hat{T} é facilmente verificada em coordenadas, identificando as grassmaniannas localmente como espaços de matrizes, a expressão de \hat{T} é o produto de T pela matriz que representa o subespaço. O mesmo se aplica para T^{-1} , donde $\widehat{T^{-1}}$ é diferenciável e concluímos que \hat{T} é um difeomorfismo.

Considere (U, ϕ) uma carta de M , usando a notação introduzida acima definimos

$$\Phi : \pi_{\text{Gr}_k M}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m), \quad \Phi(B_x) = (x, \widehat{D\phi}(x)(B_x)).$$

Suponhamos que (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) duas cartas de M com $U \cap V \neq \emptyset$,

$$\begin{array}{ccc} & \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & \\ & \nearrow & \searrow \\ U_i \cap U_j \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m) & \xrightarrow{\left(Id_{U_i \cap U_j}, \widehat{D\phi_j} \circ \widehat{D\phi_i^{-1}} \right)} & U_i \cap U_j \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m) \end{array} .$$

Observando que $D(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) = D\phi_j D\phi_i^{-1}$ implica $D(\widehat{\phi_j \circ \phi_i^{-1}}) = \widehat{D\phi_j} \circ \widehat{D\phi_i^{-1}}$, concluímos que $\widehat{D\phi_j} \circ \widehat{D\phi_i^{-1}}$ é um difeomorfismo. Logo, as trivializações $(\pi^{-1}(U_j), \Phi_j)$ dão uma estrutura de fibrado para $\text{Gr}_k M$. □

O espaço das seções do fibrado $\pi_{\text{Gr}_k M} : \text{Gr}_k M \rightarrow M$ é denotado por

$$\Gamma(\text{Gr}_k M) := \{\sigma \in C^\infty(M, \text{Gr}_k M) : \pi \circ \sigma = Id_M\}.$$

Definição 1.2.2. Dada $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$, uma subvariedade F de dimensão k de M é dita uma *variedade integral* de σ se $T_p F = \sigma(p)$, para cada $p \in F$. Diremos que F é uma *variedade integral maximal* se F for conexa e se $F \cap F_0 \neq \emptyset$ para uma outra variedade integral F_0 , então $F_0 \subset F$.

Definição 1.2.3. Uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ é chamada de *completamente integrável* se o conjunto das suas variedades integrais maximais coincide com o conjunto das folhas de alguma folheação em M .

Se começarmos com uma folheação \mathcal{F} de dimensão k em M , a esta temos associada uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$. Tomando em cada ponto $p \in M$ o subespaço $T_p \mathcal{F} \subset T_p M$, ou seja, $\sigma(p) = T_p \mathcal{F}$. Seja (U, ϕ) uma carta da folheação \mathcal{F} , com $p \in U$. Sabemos que $\phi : U \rightarrow U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, denotando $\phi(x) = (f(x), g(x))$ e considere $\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$ uma trivialização de $\text{Gr}_k M$ sobre U . Temos

$$\begin{aligned} \sigma|_U : U &\rightarrow \pi^{-1}(U) \\ \sigma|_U(x) &= \Phi^{-1}(x, Df(x)T_x M), \end{aligned}$$

usando as propriedades do atlas da folheação mostra-se que σ é uma seção suave de $\text{Gr}_k M$, tal seção é denominada *tangente à folheação*.

Como no caso de subfibrados involutivos de TM podemos falar sobre seções involutivas do fibrado $\text{Gr}_k M$. O interesse nas seções involutivas de $\text{Gr}_k M$ se encontra no teorema de Frobenius que nos garante a existência de uma folheação que integra a seção. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ campo de vetores, diremos que X é um campo de vetores de σ , se $X(p) \in \sigma(p)$ para cada p em M . Denotaremos os campos de vetores de σ por $\mathfrak{X}(\sigma) := \Gamma(\sigma)$, vendo σ como um subfibrado vetorial de TM .

Definição 1.2.4. Uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$, σ é dita *involutiva* se para cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(\sigma)$ tivermos $[X, Y] \in \sigma$.

Teorema 1.2.5 (Teorema de Frobenius). Uma seção em $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ é completamente integrável se e somente, se σ é involutiva.

Demonstração. Este teorema se trata de uma versão do Teorema de Frobenius convencional que pode ser encontrado na página 37 de [3]. A demonstração desta versão fica clara quando observamos a relação entre seções de $\text{Gr}_k M$ e subfibrados de TM . \square

Observação 1.2.6. A partir deste ponto quando nos referirmos a uma folheação estaremos também pensando na seção de $\text{Gr}_k M$ a ela associada, muitas vezes não fazendo distinção entre tais objetos. Dada uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ completamente integrável denotaremos a folheação correspondente à esta por \mathcal{F}_σ .

Considere $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ não necessariamente completamente integrável, de modo análogo ao feito na proposição 1.1.6 temos o fibrado normal TM/σ dado ponto a ponto por $T_p M/\sigma(p)$. Podemos expressar a integrabilidade de uma seção σ olhando para aplicação

$$Q(\sigma) : \mathfrak{X}(\sigma) \times \mathfrak{X}(\sigma) \rightarrow \Gamma(TM/\sigma)$$

$$Q(\sigma)(X, Y) = \overline{[X, Y]}.$$

Pois, o teorema acima nos diz que σ é integrável se, e somente se para qualquer par de campo de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(\sigma)$ então $[X, Y] \in \sigma$. Deste modo, a classe de equivalência $\overline{[X, Y]}$ de $[X, Y]$ no fibrado normal TM/σ é nula se σ é integrável, donde $Q(\sigma) \equiv 0$ se σ é integrável. A aplicação $Q(\sigma)$ na verdade é um tensor, isto é, $Q(\sigma) \in \Omega^2(\sigma, TM/\sigma) = \Gamma(\Lambda^2 \sigma^* \otimes TM/\sigma)$. De fato, se $X, Y \in \mathfrak{X}(\sigma)$ e $h \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} Q(\sigma)(X, hY) &= \overline{[X, hY]} \\ &= \overline{h[X, Y] + X(h)Y} \\ &= h\overline{[X, Y]} \\ &= hQ(\sigma)(X, Y). \end{aligned}$$

O tensor $Q(\sigma)$ é chamado *tensor de integrabilidade*. Iremos agora construir o formalismo necessário para descrever os tensores de integrabilidade quando variamos a seção σ , vendo os como um mapa Q entre o espaço $\Gamma(\text{Gr}_k M)$ e um outro espaço seções que iremos construir. Consideraremos o fibrado vetorial sobre $\text{Gr}_k M$ das formas bilineares anti-simétricas entre um subespaço e o seu normal. Seja $B_p \in \text{Gr}_k M$, assim B_p é um subespaço do espaço vetorial $T_p M$, pode-se tomar o espaço normal $T_p M/B_p$. Denotemos por

$$\Lambda^2(B_p)^* \otimes T_p M/B_p$$

o conjunto das formas bilineares anti-simétricas de B_p tomando valores em $T_p M/B_p$, esses objetos fazem sentido para todos os pontos $B_p \in I\text{Gr}_k M$, assim definimos o conjunto

$$I\text{Gr}_k M := \bigcup_{B_p \in \text{Gr}_k M} \Lambda^2(B_p)^* \otimes T_p M/B_p.$$

Proposição 1.2.7. O conjunto $I\text{Gr}_k M$ com a projeção $\pi_{I\text{Gr}_k M} : I\text{Gr}_k M \rightarrow \text{Gr}_k M$ é um fibrado vetorial com fibra típica $\Lambda^2(\mathbb{R}^k)^* \otimes \mathbb{R}^{m-k}$.

Demonstração. Dado $B \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$, considere a vizinhança $U_B = \{W \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m) : W \oplus B^\perp = \mathbb{R}^m\}$ de B , sabemos que existe uma carta local $\varphi : U_B \rightarrow \text{Hom}(B, B^\perp)$ de modo que $\mathbf{graf}(\varphi(W)) = W$, isto é, a imagem de W por φ corresponde a uma transformação linear que tem W como gráfico. Fixadas bases e_1, \dots, e_k de B e $\{e_{k+1}, \dots, e_m\}$ de B^\perp podemos identificar o espaço $\text{Hom}(B, B^\perp)$ com as matrizes $M_{k \times m-k}(\mathbb{R})$, o que nos dá uma carta $\varphi : U_B \rightarrow M_{k \times m-k}(\mathbb{R})$, denotaremos por $a_{ij}(W) := (\varphi(W))_{ij}$. Definimos funções suaves $b_i : U_B \rightarrow \mathbb{R}^n$ por,

$$\begin{aligned} b_i(W) &= e_i + \sum_{j=k+1}^m a_{ij}(W)e_j, \quad \text{se } 1 \leq i \leq k \quad \text{e} \\ b_i(W) &= e_i, \quad \text{se } k+1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Se aplicarmos o processo de Gram-Schmidt, obtemos funções suaves as quais denotaremos também por b_j , tais que se $W \in U_B$ então $W = \text{span}\{b_1(W), \dots, b_k(W)\}$ e $W^\perp = \text{span}\{b_{k+1}(W), \dots, b_m(W)\}$.

Seja $B_p \in \text{Gr}_k M$, existe uma trivialização de $\text{Gr}_k M$, $\Phi : U_{B_p} \rightarrow U \times U_B$ onde U_B é tomado suficientemente pequeno de modo que existam as funções acima mencionadas, assim obtemos morfismos de fibrados $\tilde{b}_j : U_{B_p} \rightarrow TU$ de modo que se $V_x \in U_{B_p}$, então $V_x = \text{span}\{\tilde{b}_1(V_x), \dots, \tilde{b}_k(V_x)\}$ e $V_x \oplus W_x = T_x M$ com $W_x = \text{span}\{\tilde{b}_{n-k+1}(V_x), \dots, \tilde{b}_n(V_x)\}$. Podemos assim construir trivializações locais $\tilde{\Phi} : \pi^{-1}(U_{B_p}) \rightarrow U \times U_B \times \Lambda(\mathbb{R}^{k^*}, \mathbb{R}^{n-k})$, onde

$$\tilde{\Phi}\left(\sum_{i,j,l} \alpha_{ijl}(\tilde{b}_i(V_x) \wedge \tilde{b}_j(V_x)) \otimes \tilde{b}_l(V_x)\right) = (x, \pi_2 \circ \Phi(V_x), \sum_{i,j,l} \alpha_{ijl}(e_i \wedge e_j) \otimes e_l).$$

□

Seja E um espaço vetorial e A um subconjunto $A \subset E$, o $\text{span}(A)$ ou *subespaço gerado* por A é o menor subespaço de E que contém A .

Observação 1.2.8. A aplicação $\pi_{\text{Gr}_k M} \circ \pi_{I\text{Gr}_k M} : I\text{Gr}_k M \rightarrow M$ é uma submersão, segue da regra da cadeia e do fato que as projeções são submersões. Por um abuso de linguagem chamaremos a submersão $I\text{Gr}_k M \rightarrow M$ de fibrado. Abusando da notação, sempre que citarmos o conjunto $\Gamma(I\text{Gr}_k M)$ estaremos nos referindo ao conjunto

$$\Gamma(I\text{Gr}_k M) := \{g \in C^\infty(M, I\text{Gr}_k M) : \pi_{\text{Gr}_k M} \circ \pi_{I\text{Gr}_k M} \circ g = Id_M\}.$$

Considere $B_p \in \text{Gr}_k M$, tomemos $X_p, Y_p \in B_p$ e campos de vetores \tilde{X}, \tilde{Y} em M tais que $\tilde{X}(p) = X_p$ e $\tilde{Y}(p) = Y_p$. Podemos associar a esse par de campos um terceiro campo de vetores dado pelo colchete de Lie entre eles $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, olhando para o ponto p podemos tomar a projeção $\overline{[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p}$ ao espaço normal. Se provarmos que esse valor independe dos campos de vetores que tomamos como extensão teremos uma aplicação bilinear e anti-simétrica

$$\begin{aligned} q(B_p) : B_p \times B_p &\rightarrow T_p M / B_p \\ (X_p, Y_p) &\mapsto \overline{[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p}, \end{aligned}$$

esse é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 1.2.9. A aplicação $q : \text{Gr}_k M \rightarrow I\text{Gr}_k M$ dada por

$$q(B_p) = \{(X_p, Y_p) \mapsto \overline{[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p}\}$$

está bem definida e é uma seção do fibrado vetorial $I\text{Gr}_k M$.

Demonstração. Sejam $u, v \in B_p$, podemos tomar campos $U, V \in \mathfrak{X}(M)$ de modo que $U(p) = u$ e $V(p) = v$. Em coordenadas locais podemos escrever $U = \sum u_i X_i$ e $V = \sum v_i X_i$, onde X_i são campos de vetores linearmente independentes em uma vizinhança de p e $\{X_1(p), \dots, X_k(p)\}$ é base para B_p , com isso $u_i(p) = v_i(p) = 0$ se $i > k$. Assim obtemos

$$\begin{aligned} [U, V] &= \left[\sum_i u_i X_i, \sum_j v_j X_j \right] \\ &= \sum_{i,j} u_i v_j [X_i, X_j] + (u_i X_i)(v_j) X_j - (v_j X_j)(u_i) X_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{[U, V]}_p &= \overline{\sum_{i,j} u_i(p)v_j(p)[X_i, X_j]_p + u_i(p)X_i(v_j(p))X_j(p) - v_j(p)X_j(u_i(p))X_i(p)} \\ &= \sum_{i,j} u_i(p)v_j(p)\overline{[X_i, X_j]_p}.\end{aligned}$$

Como os termos $u_i(p)v_j(p)\overline{[X_i, X_j]_p}$ dependem apenas dos valores de U e V no ponto p , a q função fica bem definida e é uma seção de $I\text{Gr}_k M$ como fibrado vetorial sobre $\text{Gr}_k M$. \square

Dada uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$, definimos

$$Q(\sigma) = q \circ \sigma \in \Gamma(I\text{Gr}_k M),$$

fica claro a partir da proposição acima que $Q(\sigma)$ está bem definida. Assim temos uma aplicação

$$\begin{aligned}Q : \Gamma(\text{Gr}_k M) &\rightarrow \Gamma(I\text{Gr}_k M) \\ \sigma &\mapsto q \circ \sigma\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

Segue imediatamente da definição de $q : \text{Gr}_k M \rightarrow I\text{Gr}_k M$ que $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ é integrável se, e somente se $Q(\sigma) = 0$. Comumente ao longo do texto chamaremos a aplicação Q de operador, mas isso não significa linearidade. Mais adiante veremos que Q é a seção de um fibrado vetorial de dimensão infinita, o que justifica podermos falar de $Q(\sigma) = 0$. Concluímos essa seção cumprindo nosso intuito de dar uma descrição para o conjunto das folheações como imagem inversa de um ponto por uma aplicação

$$\text{Fol}(k, M) = Q^{-1}(0).\tag{1.2.2}$$

Essa descrição das folheações permite aplicar métodos da análise no estudo de propriedades das folheações. Pois, mais adiante veremos que $\Gamma(\text{Gr}_k M)$ e $\Gamma(I\text{Gr}_k M)$ são variedades de dimensão infinita e Q um operador diferenciável entre elas. Assim, embora $\text{Fol}(k, M)$ não seja a priori uma subvariedade de $\Gamma(\text{Gr}_k M)$ a descrição como imagem inversa de uma aplicação diferenciável será suficiente para a nossa abordagem.

1.3 Ações dos difeomorfismos

A proposta desta seção é descrever de forma clara como os difeomorfismos da base agem sobre as seções dos fibrados que estamos trabalhando.

Proposição 1.3.1. Seja M uma variedade suave compacta. Dado $\varphi \in \text{Diff}(M)$, existem difeomorfismos $\hat{\varphi} \in \text{Diff}(\text{Gr}_k M)$ e $\hat{\hat{\varphi}} \in \text{Diff}(I\text{Gr}_k M)$ tais que o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{array}{ccc}I\text{Gr}_k M & \xrightarrow{\hat{\hat{\varphi}}} & I\text{Gr}_k M \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \text{Gr}_k M & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \text{Gr}_k M \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M.\end{array}$$

Mais ainda os mapas $\hat{\varphi}: \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(\text{Gr}_k M)$ e $\hat{\psi}: \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(I\text{Gr}_k M)$ são homomorfismos de grupos.

Demonstração. Dado $B_p \in I\text{Gr}_k M$ definimos $\hat{\varphi}(B_p) = d\varphi(p)B_p$, pela definição $\hat{\varphi}$ comuta o diagrama. Em coordenadas locais escrevendo $f = \psi \circ \varphi \circ \xi^{-1}$ temos,

$$\begin{aligned} U \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m) &\longrightarrow f(U) \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m) \\ (x, B) &\longmapsto (f(x), df(x)B) \end{aligned}$$

como a ação de $Gl(\mathbb{R}, m)$ em $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$ é suave, temos que aplicação acima é suave.

Considere $\omega_{B_p} \in \Lambda^2(B_p)^* \otimes T_p M/B_p$ e $u, v \in B_p$, definimos

$$\hat{\varphi}(\omega_{B_p})(u, v) = d\varphi(p)\omega_{B_p}(d\varphi^{-1}(\varphi(p))u, d\varphi^{-1}(\varphi(p))v).$$

Novamente o fato de $\hat{\varphi}$ fazer com que os dois diagramas comutem segue de sua definição. Em coordenadas locais a aplicação é da forma

$$\begin{aligned} U \times W \times \Lambda^2(\mathbb{R}^{k^*}, \mathbb{R}^{m-k}) &\longrightarrow f(U) \times \hat{f}(W) \times \Lambda^2(\mathbb{R}^{k^*}, \mathbb{R}^{m-k}) \\ (x, B, \sum c_{ijs} e^i \wedge e^j \otimes e_s) &\longmapsto (f(x), df(x)B, \sum c_{ijs} \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial x_\beta} \frac{\partial f_\eta}{\partial x_s} e^\alpha \wedge e^\beta \otimes e^\eta) \end{aligned}$$

o que mostra que $\hat{\varphi}$ é suave. Mostremos que o mapa $\hat{\varphi}$ é um homomorfismo de grupos,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi \circ \psi}(B_p) &= d(\varphi \circ \psi)(p)B_p \\ &= d\varphi(\psi(p))d\psi(p)B_p \\ &= \hat{\varphi} \circ \hat{\psi}(B_p). \end{aligned}$$

Logo $\hat{\varphi}: \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(\text{Gr}_k M)$ é um homomorfismo de grupo. Analogamente fazendo as contas ponto a ponto, se mostra que $\hat{\psi}: \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(I\text{Gr}_k M)$ também é um homomorfismo de grupos. □

Dada $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ definimos

$$\varphi_* \sigma = \hat{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}, \tag{1.3.1}$$

assim temos que

$$*: \text{Diff}(M) \times \Gamma(\text{Gr}_k M) \rightarrow \Gamma(\text{Gr}_k M)$$

é uma ação. Temos uma ação também denotada por $*$ em $\Gamma(I\text{Gr}_k M)$,

$$*: \text{Diff}(M) \times \Gamma(I\text{Gr}_k M) \rightarrow \Gamma(I\text{Gr}_k M),$$

e definida como:

$$\varphi_* \omega = \hat{\varphi} \circ \omega \circ \varphi^{-1}. \tag{1.3.2}$$

Proposição 1.3.2. O mapa $Q : \Gamma(\text{Gr}_k M) \rightarrow \Gamma(I\text{Gr}_k M)$ definido em (1.2.1) é $\text{Diff}(M)$ -equivariante. Isto é, $Q(\varphi_*\sigma) = \varphi_*Q(\sigma)$ para todo $\varphi \in \text{Diff}(M)$.

Demonstração. Escrevendo

$$\begin{aligned} Q(\varphi_*\sigma) &= q \circ \varphi_*\sigma \\ &= q \circ \hat{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \\ \varphi_*Q(\sigma) &= \hat{\varphi} \circ Q(\sigma) \circ \varphi^{-1} \\ &= \hat{\varphi} \circ q \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \end{aligned}$$

vemos que o resultado fica provado se tivermos a seguinte igualdade $\hat{\varphi} \circ q = q \circ \hat{\varphi}$. De fato, sejam u e $v \in \hat{\varphi}(B_p)$, vamos checar a igualdade avaliando as formas no par (u, v) . Assim,

$$\begin{aligned} q \circ \hat{\varphi}(B_p)(u, v) &= q(\hat{\varphi}(B_p))(u, v) \\ &= \overline{[u, v]} \\ \hat{\varphi} \circ q(B_p)(u, v) &= \hat{\varphi}(q(B_p))(u, v) \\ &= d\varphi(p)q(B_p)(d\varphi^{-1}(\varphi(p))u, d\varphi^{-1}(\varphi(p))v) \\ &= \varphi_*q(B_p)(\varphi_*^{-1}u, \varphi_*^{-1}v) \\ &= \varphi_*\left(\overline{[\varphi_*^{-1}u, \varphi_*^{-1}v]}\right) \\ &= \overline{[u, v]} \end{aligned}$$

Como desejado $\hat{\varphi} \circ q = q \circ \hat{\varphi}$. □

Corolário 1.3.3. O conjunto $Fol(M, k) \subset \Gamma(\text{Gr}_k M)$ é invariante pela ação de $\text{Diff}(M)$ em $\Gamma(\text{Gr}_k M)$.

Demonstração. Pela igualdade $Fol(M, k) = Q^{-1}(0)$ vista em (1.2.2) junto com a proposição acima implicam que $Fol(M, k)$ é invariante. □

1.4 Projetores de posto constante e folheações

A cada folheação de dimensão k podem ser associados objetos de caráter infinitesimal que permitem o emprego de outras técnicas no estudo das folheações, abordaremos aqui três desses objetos:

- Subfibrados vetoriais de TM de posto k . Veja a Proposição 1.1.6.
- Projetores de TM com posto k .
- Seções $\sigma : M \rightarrow \text{Gr}_k M$. Teorema 1.2.5

Definição 1.4.1. Um homomorfismo $f \in \text{End}(TM) \approx \Gamma(T^*M \otimes TM)$ é dito um *projedor* se, $f^2 = f$. Diremos que f é de posto constante k se $\text{posto}(f_x) = k$, para cada $x \in M$.

O conjunto dos projetores de posto k de um espaço vetorial V será denotado por $Pr_k(V)$. Pode-se mostrar que se V tem dimensão finita, então $Pr_k(V)$ é uma subvariedade de $V^* \otimes V$. Passando-se a $T^*M \otimes TM$ por functorialidade obtemos um fibrado $\text{Pr}_k M \rightarrow M$, cujas fibras são $\text{Pr}_k(T_x M)$. Uma maneira de ver isto é considerar BM o fibrado principal das bases de TM junto com ação de $GL(\mathbb{R}^m)$ em $\text{Pr}_k(\mathbb{R}^m)$ por conjugação $T \circ f \circ T^{-1}$, $f \in \text{Pr}_k(\mathbb{R}^m)$ e $T \in GL(\mathbb{R}^m)$. Assim, $\text{Pr}_k M$ é o fibrado associado ao fibrado principal BM e a ação de $GL(\mathbb{R}^m)$ em $\text{Pr}_k(\mathbb{R}^m)$. Devido à identificação $\text{End}(TM) \approx \Gamma(T^*M \otimes TM)$, concluímos que o conjunto dos projetores de posto k de TM se identifica com $\Gamma(\text{Pr}_k M)$.

Proposição 1.4.2. Seja M uma variedade. Então

- i) Dado um projetor $f \in \Gamma(\text{Pr}_k M)$, existe um subfibrado E de TM de posto k , tal que $\text{Im} f = E$.
- ii) Dada uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$, existe um único subfibrado E de TM de posto k , tal que

$$E = \bigcup_{x \in M} \sigma(x).$$

- iii) Dado um subfibrado E de TM de posto k , existem uma seção $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ e um projetor $f \in \Gamma(\text{Pr}_k M)$, tais que

$$E = \bigcup_{x \in M} \sigma(x) \quad \text{e} \quad E = \text{Im} f.$$

Demonstração. i) Um projetor p de posto k é um homomorfismo de fibrados com posto constante, assim pela proposição 6.28 página 272 em [14] o conjunto Imp é um subfibrado de posto k de TM .

- ii) Seja σ uma seção de $\text{Gr}_k M$, temos o subconjunto $E = \bigcup_{x \in M} \sigma(x)$ de TM . Considere (U, φ) uma carta de M e a trivialização local

$$\Phi : \pi_{\text{Gr}_k M}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m).$$

Tomando $A \subset \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$ suficientemente pequeno é possível construir funções suaves $b_j : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ $j = 1, \dots, m$ tais que se $W \in A$ então $W = \text{span}\{b_1(W), \dots, b_k(W)\}$ e $W^\perp = \text{span}\{b_{k+1}(W), \dots, b_m(W)\}$, como na demonstração da Proposição 1.2.7. Podemos tomar U suficientemente pequeno de modo que $\pi_2 \circ \Phi \circ \sigma(U)$ esteja contido em algum aberto de $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$ no qual existem as funções b_j , π_2 é a projeção na segunda coordenada de $U \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$. Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{b}_j &: U \rightarrow TM \\ \tilde{b}_j(x) &= D\varphi(x)b_j(\pi_2 \circ \Phi \circ \sigma(x)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Psi &: U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi_E^{-1}(U) \\ \Psi(x, (v_1, \dots, v_k)) &= \sum_{j=1}^k v_j \tilde{b}_j(x),\end{aligned}$$

temos que Ψ é uma trivialização local para E , o fato que as funções de transição entre duas trivializações satisfazem as propriedades para um subfibrado vetorial segue da construção.

iii) Seja um subfibrado E de TM de posto k . Definamos $\sigma : M \rightarrow \text{Gr}_k M$, por $\sigma(x) = E_x$. Chequemos que σ é suave. De fato, considere $U \subset M$ admitindo uma trivialização

$$\begin{array}{ccc}\pi_E^{-1}(U) & \xrightarrow{i} & \pi_{TM}^{-1}(U) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ U \times \mathbb{R}^k & \longrightarrow & U \times \mathbb{R}^m,\end{array}$$

onde i é a inclusão linear nas fibras de E em TM . Podemos também considerar uma trivialização

$$\hat{\Phi} : \pi_{\text{Gr}_k M}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m),$$

onde $\hat{\Phi}(B_p) = \pi_2 \circ \Phi(B_p)$, com isto, $\hat{\Phi} \circ \sigma(x) = (x, \pi_2 \circ \Phi \circ i \circ \phi^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^k))$. Fixado x , a aplicação $\pi_2 \circ \Phi \circ i \circ \phi^{-1}(x, \cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear e injetiva, como depende suavemente de x a aplicação $\pi_2 \circ \Phi \circ i \circ \phi^{-1}$ que a cada $x \in U$ associa o subespaço $\pi_2 \circ \Phi \circ i \circ \phi^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^k) \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$ é suave. Consequentemente σ é suave.

Se munirmos M de uma métrica riemanniana, temos de maneira natural o projetor ortogonal f associado à E , donde se conclui $E = \text{Im} f$. □

Definição 1.4.3. Dado $f \in \Gamma(\text{Pr}_k M)$, uma subvariedade F de dimensão k de M é dita uma *variedade integral* de f se $T_p F = \text{Im} f_p$, para cada $p \in F$. Diremos que F é uma *variedade integral maximal* se F for conexa e se $F \cap F_0 \neq \emptyset$ para uma outra variedade integral F_0 , então $F_0 \subset F$.

Definição 1.4.4. Dizemos que $f \in \Gamma(\text{Pr}_k M)$ é *completamente integrável* se o conjunto das suas variedades integrais maximais coincide com o conjunto das folhas de alguma folheação em M .

Do mesmo modo que fora feito para seções do fibrado das grassmannianas é possível reformular o teorema de Frobenius para os outros dois casos, desde que se defina a involutividade de tais objetos. Nosso interesse é em algumas situações trocar as seções do fibrado das grassmannianas por projetores de posto constante, os projetores permitem fazer contas com os operadores do nosso problema principal, isso ficará evidente na demonstração do Lema 3.2.3.

Definição 1.4.5. Um projetor $f \in \Gamma(\text{Pr}_k M)$ é dito *involutivo* se, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ com $f(X) = X$ e $f(Y) = Y$, tivermos $f([X, Y]) = [X, Y]$.

Teorema 1.4.6. Um projetor é completamente integrável se, e somente se é involutivo.

Demonstração. Seja f um projetor de posto k , como visto acima $\text{Im}f$ é um subfibrado de TM de posto k . O fato de f ser involutivo implica que $\text{Im}f$ é um subfibrado involutivo, daí pelo teorema de Frobenius completamente integrável. Assim existe uma folheação \mathcal{F} de M tal que $\text{Im}f$ é tangente a \mathcal{F} . Logo, se $F \in \mathcal{F}$ temos $T_x F = \text{Im}f_x = f(T_x M)$ mostrando que f é completamente integrável. \square

Seja $f \in \Gamma(\text{Pr}_k)$. Definamos $Q : \Gamma(\text{Im}f) \times \Gamma(\text{Im}f) \rightarrow \Gamma(\ker f)$ por

$$Q(f)(X, Y) = [X, Y] - f([X, Y]).$$

Observamos que f é integrável se, e somente se $Q(f) \equiv 0$. Assim, se desejarmos obter informações sobre a integrabilidade dos projetores devemos olhar para o fibrado vetorial $I\text{Pr}_k M$ sobre $\text{Pr}_k M$, cuja fibra sobre f_p é $\Lambda^2 \text{Im}(f_p)^* \otimes \ker(f_p)$. Considere $f_p \in \text{Pr}_k M$, $X_p, Y_p \in \text{Im}(f_p)$ e campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ com $X(p) = X_p$ e $Y(p) = Y_p$. Definimos

$$q(f_p)(X_p, Y_p) := [X, Y]_p - f_p([X, Y]_p),$$

mostremos que $q(f_p)$ é bilinear. De fato, se X, Y, Z são campos em $\mathfrak{X}(M)$ e $h \in C^\infty(M)$ tais, que $X(p) = X_p, Y(p) = Y_p$ e $Z(p) = Z_p$ com $X_p, Y_p, Z_p \in \text{Im}f_p$, temos

$$\begin{aligned} q(f_p)(X_p + h(p)Z_p, Y_p) &= [X + hZ, Y]_p - f_p([X + hZ, Y]_p) \\ &= [X, Y]_p + h(p)[Z, Y]_p - Y(h)(p)Z_p - f_p([X, Y]_p + h(p)[Z, Y]_p - Y(h)(p)Z_p) \\ &= [X, Y]_p - f_p([X, Y]_p) + h(p)([Z, Y]_p - f_p([Z, Y]_p) + Y(h)(p)(f_p(Z_p) - Z_p)) \\ &= q(f_p)(X_p, Y_p) + h(p)q(f_p)(Z_p, Y_p). \end{aligned}$$

As contas acima também provam que $q(f_p)$ não depende das extensões que tomamos para os campos. Assim definimos $Q : \Gamma(\text{Pr}_k M) \rightarrow \Gamma(I\text{Pr}_k M)$, como $Q(f) = f \circ q$. Pela forma como foi construído Q capta exatamente quando o projetor f é integrável.

Seguindo o que foi feito para seções do fibrado das grassmaniannas, existem também ações do grupo de difeomorfismos $\text{Diff}(M)$ sobre os conjuntos $\Gamma(\text{Pr}_k M)$ e $\Gamma(I\text{Pr}_k M)$ que são equivalentes as ações sobre seções das grassmaniannas, no sentido de que se f e σ representam o mesmo subfibrado o mesmo acontecerá com $\varphi_* f$ e $\varphi_* \sigma$. Dados $\varphi \in \text{Diff}(M)$, $f \in \Gamma(\text{Pr}_k M)$ e $\omega \in \Gamma(I\text{Pr}_k M)$ temos

$$\begin{aligned} \varphi_* f(X) &= \varphi_* f(\varphi^{-1} X) \\ \varphi_* \omega(X, Y) &= \varphi_* \omega(\varphi^{-1} X, \varphi^{-1} Y). \end{aligned}$$

1.5 Conexão de Bott e complexo de de Rham de uma folheação

Para esta seção podemos tomar como referência o artigo de Bott [1], nesse artigo define-se uma conexão como ferramenta de estudo das classes características do fibrado normal $\nu_{\mathcal{F}}$ e o artigo de Heitsch [11] sobre cohomologia de variedades folheadas. Apresentaremos a cohomologia de uma folheação usando a conexão de Bott na construção da derivada exterior. O complexo de

cocadeias formado pelas formas diferenciais em $T\mathcal{F}$ tomando valores em $\nu_{\mathcal{F}}$ é uma das peças para estudar a linearização do nosso problema, como veremos na seção 3.2 a linearização do complexo de deformação de uma folheação é isomorfo a um trecho do complexo das formas diferenciais em $T\mathcal{F}$ tomando valores em $\nu_{\mathcal{F}}$.

Definição 1.5.1. Seja E um subfibrado involutivo de TM e F um fibrado vetorial sobre M . Uma *conexão parcial* segundo E é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(E) \times \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(F)$ satisfazendo:

- $\nabla_{X+fY}\eta = \nabla_X\eta + f\nabla_Y\eta, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(E), f \in C^\infty(M)$ e $\eta \in \Gamma(F)$
- $\nabla_X\eta + f\gamma = \nabla_X\eta + X(f)\gamma + f\nabla_X\gamma, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(E), f \in C^\infty(M)$ e $\eta, \gamma \in \Gamma(F)$.

Se $Z \in \Gamma(\nu_{\mathcal{F}})$, então $\bar{Z} = \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}(Z)$ para algum $Z \in \mathfrak{X}(M)$, onde $\pi_{\nu_{\mathcal{F}}} : TM \rightarrow \nu_{\mathcal{F}}$ é a projeção natural sobre o fibrado normal. O campo Z fica bem definido módulo elementos de $T\mathcal{F}$, deste modo para $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ e $\bar{Z} \in \Gamma(\nu_{\mathcal{F}})$, fica bem definido

$$\nabla_X^{\mathcal{F}}\bar{Z} := \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, Z]).$$

Desde que $T\mathcal{F}$ é involutivo dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ temos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$.

Proposição 1.5.2. A função

$$\nabla^{\mathcal{F}} : \mathfrak{X}(\mathcal{F}) \times \Gamma(\nu_{\mathcal{F}}) \rightarrow \Gamma(\nu_{\mathcal{F}}),$$

dada por $\nabla_X^{\mathcal{F}}\bar{Y} = \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, Y])$ é uma conexão parcial com tensor de curvatura zero. Denominaremos $\nabla^{\mathcal{F}}$ como a *conexão de Bott* da folheação \mathcal{F} .

Demonstração. A conexão está bem definida, no sentido que não depende da escolha do representante da classe \bar{Y} . Com efeito, tome $X_0 \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$

$$\begin{aligned} \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, Y + X_0]) &= \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, Y]) + \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, X_0]) \\ &= \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, Y]). \end{aligned}$$

Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, $\bar{Z} \in \Gamma(\nu_{\mathcal{F}})$ e $f \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} \nabla_{X+fY}^{\mathcal{F}}\bar{Z} &= \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X + fY, Z]) \\ &= \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, Z] + f[Y, Z] - Z(f)Y) \\ &= \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X, Z]) + f\pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([Y, Z]) \\ &= \nabla_X^{\mathcal{F}}\bar{Z} + f\nabla_Y^{\mathcal{F}}\bar{Z}. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $\nabla^{\mathcal{F}}$ é plana, isto é, que o tensor de curvatura $R^{\nabla^{\mathcal{F}}}$ é identicamente nulo. Tomemos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$, $\bar{Z} \in \Gamma(\nu_{\mathcal{F}})$

$$\begin{aligned}
R^{\nabla^{\mathcal{F}}}(X, Y)Z &= \nabla_X^{\mathcal{F}}\nabla_Y^{\mathcal{F}}\bar{Z} - \nabla_Y^{\mathcal{F}}\nabla_X^{\mathcal{F}}\bar{Z} - \nabla_{[X, Y]}^{\mathcal{F}}\bar{Z} \\
&= \nabla_X^{\mathcal{F}}[\bar{Y}, \bar{Z}] - \nabla_Y^{\mathcal{F}}[\bar{X}, \bar{Z}] - [[X, Y], \bar{Z}] \\
&= \overline{[X, [Y, Z]]} - \overline{[Y, [X, Z]]} - \overline{[[X, Y], Z]} \\
&= \overline{[X, [Y, Z]]} + \overline{[Y, [Z, X]]} + \overline{[Z, [X, Y]]} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade seque da identidade de Jacobi para o colchete de campos de vetores. \square

Sobre a variedade M temos um fibrado graduado

$$\Lambda^\bullet T^* \mathcal{F} \otimes \nu_{\mathcal{F}} := \bigoplus_{r=0}^k \Lambda^r T^* \mathcal{F} \otimes \nu_{\mathcal{F}},$$

cujas seções são

$$\Omega^\bullet(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}}) := \Gamma(\Lambda^\bullet T^* \mathcal{F} \otimes \nu_{\mathcal{F}}).$$

Teorema 1.5.3. O operador $d_{\mathcal{F}}^\bullet : \Omega^\bullet(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}}) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}})$ linear dado por

$$\begin{aligned}
d_{\mathcal{F}}\omega(X_1, \dots, X_{r+1}) &= \sum_i (-1)^i \nabla_{X_i}^{\mathcal{F}} \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \cdot, X_{r+1}) \\
&+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{r+1}),
\end{aligned}$$

satisfaz $d_{\mathcal{F}}^2 \equiv 0$.

Demonstração. A linearidade segue a partir da definição de $d_{\mathcal{F}}$, já o fato que $d_{\mathcal{F}}^2 = 0$ vem de que a conexão de Bott tem curvatura zero.

Tomando uma vizinhança aberta $W \subset M$ e h uma função que seja constante igual à 1 em um aberto $V \subset \bar{V} \subset W$ e que se anula fora de W , vemos que $d_{\mathcal{F}}\omega|_V = d_{\mathcal{F}}(h\omega)|_V$. Logo o operador $d_{\mathcal{F}}$ é local, isto é, só depende dos valores de ω em uma vizinhança aberta. Seja (U, φ) uma carta folheada de \mathcal{F} . Assim temos os campos coordenados $\{X_1, \dots, X_k, Y_1, \dots, Y_{m-k}\}$, onde $\{X_i\}$ são um referencial local para $T\mathcal{F}$ e $\{\bar{Y}_j\}$ para $\nu_{\mathcal{F}}$. Como a curvatura da conexão de Bott é nula temos a existência de referenciais paralelos locais, em particular os campos coordenados de uma carta folheada satisfazem essa propriedade. Com efeito,

$$\nabla_{X_i}^{\mathcal{F}} \bar{Y}_j = \pi_{\nu_{\mathcal{F}}}([X_i, Y_j]) = 0.$$

Pois o colchete dos campos de coordenados é nulo. Podemos escrever

$$\omega|_U = \sum_{j, I} \omega_I^j dx_I \otimes \bar{Y}_j,$$

onde a soma é sobre todos os j, I , com $1 \leq j \leq m - k$ e $I = (i_1, \dots, i_r)$ $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k$ e ω_I^j funções suaves em U . Um cálculo simples usando o fato que $[X_i, X_l] = 0$ e que $\nabla_{X_i}^{\mathcal{F}} \bar{Y}_j = 0$, mostra que

$$d_{\mathcal{F}}\omega|_U = \sum_{j, I} d\omega_I^j \wedge dx_I \otimes \bar{Y}_j,$$

consequentemente

$$d_{\mathcal{F}}(d_{\mathcal{F}}\omega|_U) = \sum_{j,I} d(dw_I^j \wedge dx_I) \otimes \bar{Y}_j = 0,$$

pois $d(dw_I^j \wedge dx_I) = 0$. Portanto $d_{\mathcal{F}}^2 = 0$. □

De posse do operador $d_{\mathcal{F}}$ temos definido o *complexo de de Rham* da folheação \mathcal{F} ,

$$0 \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^0(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^1(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \dots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} \Omega^k(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}}) \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}} 0,$$

podemos assim falar dos grupos de cohomologia associados a este complexo.

Definição 1.5.4. Seja M uma variedade suave e \mathcal{F} uma folheação suave de dimensão k em M , definimos os *grupos de cohomologia da folheação*

$$H^r(\mathcal{F}) = \frac{\ker d_{\mathcal{F}}^r}{\text{Im} d_{\mathcal{F}}^{r-1}}.$$

Capítulo 2

Espaços de Fréchet e Fréchet tame

Hamilton utilizou técnicas do cálculo em espaços de Fréchet, para obter condições para a exatidão do complexo de deformação de uma folheação, sendo a principal ferramenta o Teorema da Função Inversa de Nash-Moser. Como referência para tal abordagem temos [7] que trata sobre deformação de estruturas complexas e o préprint [8] sobre deformação de folheações. Para tais resultados devemos trabalhar na categoria dos espaços Fréchet tame, que são espaços de Fréchet com estruturas adicionais de regularização. Porém iremos contornar essas estruturas estudando os espaços de Fréchet tame que são somando direto de espaços que possuam tais estruturas adicionais. O presente capítulo é baseado no roteiro proposto em [9] para utilização do Teorema de Nash-Moser. Uma justificativa na escolha da categoria de Fréchet e não categoria Banach, vem do fato que o grupo dos difeomorfismos $\text{Diff}(M)$ não é um grupo de Lie-Banach. De fato, por [19] se um grupo G de Lie-Banach conexo age efetivamente e transitivamente em uma variedade de dimensão finita então o grupo G é de dimensão finita. No nosso trabalho também utilizamos operadores que são descritos por composições de funções, como pode ser visto em [9] a composição no caso Banach deixa de ser uma aplicação suave.

2.1 Espaços de Fréchet

Os espaços de Fréchet são uma generalização dos espaços de Banach, são espaços localmente convexos e completos com respeito a uma métrica invariante por translação. Em contraste com os espaços de Banach, a métrica não necessariamente provém de uma norma. Embora a estrutura topológica de espaço Fréchet seja mais complicada do que a de espaço Banach devido à falta de uma norma, muitos resultados importantes da análise funcional, como o Teorema Hahn-Banach e o Teorema Aplicação Aberta, ainda se mantêm, isso pode ser visto em [12]. O espaço de funções infinitamente diferenciáveis são o exemplo mais recorrente de espaço de Fréchet.

Definição 2.1.1. Uma *seminorma* em um espaço vetorial F é uma função real $\|\cdot\| : F \rightarrow \mathbb{R}$ tal que;

i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in F$

ii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \quad \forall f \in F, \lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in F$

A diferença crucial entre seminormas e normas é o fato de que podem existir vetores não nulos onde a seminorma se anula, isto é, $\|x\| = 0$ com $x \neq 0$.

Sejam $T_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha$ uma família de aplicações entre o conjunto X e os espaços topológicos Y_α . A *topologia fraca* gerada pela família $\{T_\alpha\}$ é a topologia gerada pela imagem inversa de abertos de Y_α por meio das aplicações T_α , ou e equivalentemente a menor topologia que torna todas às aplicações T_α contínuas. Podemos considerar por exemplo uma família de seminormas em um espaço vetorial, como na definição abaixo.

Definição 2.1.2. Um espaço vetorial topológico é chamado de *localmente convexo* se sua topologia coincide com a topologia fraca gerada por uma família de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Definição 2.1.3. Um *espaço de Fréchet* é um espaço localmente convexo, metrizável e completo.

Exemplo 2.1.4. Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com fecho \bar{V} compacto. Tomemos $C^\infty(\bar{V})$, onde a diferenciabilidade na fronteira se define tomando uma extensão diferenciável da função a um aberto U contendo \bar{V} . Definimos as seminormas

$$\|f\|_{C^n(V)} = \max_{j \leq n} \sup_{x \in V} \|D^j f(x)\|.$$

Em verdade o espaço $C^n(V)$ com $\|\cdot\|_{C^n(V)}$ é um espaço de Banach para cada n fixado. Assim a métrica

$$d(f, g) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - g\|_{C^j(V)}}{1 + \|f - g\|_{C^j(V)}}$$

define em $C^\infty(V)$ uma estrutura de espaço métrico completo, onde a topologia da métrica é a mesma topologia que a gerada pelas seminormas $\{\|\cdot\|_{C^n(V)}\}_{n \in \mathbb{N}}$. O que torna $C^\infty(V)$ um espaço de Fréchet.

Observação 2.1.5. Seja V um aberto de \mathbb{R}^n com fecho compacto, ao longo do texto quando nos referirmos ao espaço $C^\infty(V)$ estaremos pensando nas funções suaves em V que se estendem ao fecho.

Exemplo 2.1.6. Vamos agora introduzir uma estrutura de espaço de Fréchet para $C^\infty(M)$ quando M for uma variedade compacta. Tomemos duas coberturas finitas $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$ de M com U_i, V_i abertos coordenados e \bar{V}_i compacto. Definindo

$$\|f\|_{C^n(M)} = \max_i \|f \circ \psi_i^{-1}\|_{C^n(V_i)},$$

como no exemplo anterior as seminormas nos fornecem uma métrica completa

$$d(f, g) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f - g\|_{C^j(M)}}{1 + \|f - g\|_{C^j(M)}}$$

Desta forma $C^\infty(M)$ é um espaço de Fréchet, outra abordagem para a construção de uma estrutura de espaço de Fréchet para o espaço $C^\infty(M)$ pode ser encontrada na seção 6 do capítulo 1 de [13].

Exemplo 2.1.7. Seja M uma variedade compacta e E um fibrado vetorial sobre M . O espaço das seções $\Gamma(E)$ possui uma estrutura de espaço vetorial natural dada ponto a ponto, ou seja, se $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$ então

$$\begin{aligned} (\sigma + \tau)(x) &:= \sigma(x) + \tau(x) \\ (\lambda\sigma)(x) &:= \lambda\sigma(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ &\quad \forall x \in M. \end{aligned}$$

Considere uma cobertura aberta finita de domínios coordenados $\{(U_i, \phi_i)\}$ relativamente compactos que admitem uma trivialização local ψ . Assim definimos as semi-normas

$$\|\sigma\|_{\Gamma^n(E)} = \max_i \|\psi_i \circ \sigma \circ \phi_i^{-1}\|_{C^n(\phi_i(U_i), \mathbb{R}^l)},$$

onde a métrica é análoga aos exemplos anteriores. Com isto, $\Gamma(E)$ é um espaço de Fréchet.

2.2 Cálculo em espaços de Fréchet

Nesta seção iremos expor algumas noções de cálculo diferencial e integral em espaços de Fréchet. Devemos olhar em destaque para a noção de diferenciabilidade que no caso dos espaços de Fréchet é a derivada de Gâteaux. Isto devido ao fato que o espaço das transformações lineares contínuas de um espaço de Fréchet não é naturalmente um espaço de Fréchet. Esta noção de diferenciabilidade é significativamente mais fraca se comparada à de um espaço de Banach. No entanto, muitos dos teoremas familiares do cálculo ainda são válidos. Em particular, a regra da cadeia é verdade. Com essa nova classe de diferenciabilidade definida, terminamos a seção com a diferenciabilidade de um operador importante no desenvolvimento da teoria das variedades de Fréchet.

Definição 2.2.1. Sejam F e E espaços de Fréchet, $U \subset F$ aberto e $P : U \subset F \rightarrow E$ uma aplicação contínua. A derivada direcional de P em $x \in U$ na direção $h \in F$ é definida por

$$DP(x)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t},$$

quando tal limite existe. Dizemos que P é continuamente diferenciável ou de classe C^1 em U se $DP(x)h$ existe para todo $x \in U$ e $h \in F$ e se $DP : U \times F \rightarrow E$ é contínua. A aplicação P será dita de classe C^2 se for de classe C^1 , o limite

$$D^2P(x)(h, k) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{DP(x + tk)h - DP(x)h}{t}$$

existir e a aplicação $D^2P : U \times F \times \rightarrow E$ for contínua. De maneira análoga podemos tratar das classes de diferenciabilidade de grau r e C^∞ em espaços de Fréchet. Diremos que uma aplicação entre espaços de Fréchet é suave se for de classe C^∞ .

Exemplo 2.2.2. Toda aplicação linear contínua entre espaços de Fréchet é uma aplicação de classe C^∞ , segue diretamente da definição.

Trataremos a seguir da integração de caminhos contínuos em espaços de Fréchet, ferramenta muito útil na obtenção de resultados para aplicações de classe C^1 . Como por exemplo a linearidade da derivada e uma versão da regra da cadeia. Definindo a integração sobre caminhos lineares por partes e depois estendendo para os caminhos contínuos.

Um caminho γ é dito linear por partes se existir uma partição $a = t_0 < \dots < t_k = b$, tal que em cada intervalo $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ é da forma $\gamma(t) = (1+t)\gamma(t_i) + t\gamma(t_{i+1})$. Denotaremos por $LP([a, b], F)$ o subespaço vetorial dos caminhos lineares por partes, tal subespaço é denso em $C^0([a, b], F)$. Definimos para os caminhos lineares por partes uma integral baseada na regra dos trapézios,

$$\int_a^b dt : LP([a, b], F) \rightarrow F$$

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [\gamma(t_{i-1}) + \gamma(t_i)] (t_i - t_{i-1}).$$

O funcional acima definido satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\int_a^c \gamma(t) dt + \int_c^b \gamma(t) dt = \int_a^b \gamma(t) dt$, para todo $c \in [a, b]$,
- ii) para todo funcional linear contínuo ℓ de F , temos $\ell(\int_a^b \gamma(t) dt) = \int_a^b \ell(\gamma(t)) dt$,
- iii) para toda seminorma contínua $\|\cdot\| : F \rightarrow \mathbb{R}$, $\left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$.

Os itens *i*) e *ii*) seguem diretamente da definição, provaremos o item *iii*). Observemos que a função $\|\gamma(t)\|$ é convexa em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, pois γ é linear em cada um desses intervalos e a seminorma satisfaz a desigualdade triangular. Para funções convexas vale a seguinte desigualdade de Hermite-Hadamard

$$\left\| \gamma\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \right\| (t_i - t_{i-1}) \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma(t)\| dt.$$

O trabalho de Dragomir e Pearce [5] contém uma exposição sobre tais desigualdades. Usando a desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b \gamma(t) dt \right\| &\leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \|\gamma(t_{i-1}) + \gamma(t_i)\| (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \left\| \gamma\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \right\| (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\gamma(t)\| dt. \end{aligned}$$

Uma vez definida a integração para caminhos lineares por partes chegamos ao seguinte teorema:

Teorema 2.2.3. Seja F um espaço de Fréchet. O funcional linear contínuo

$$\int_a^b dt : LP([a, b], F) \rightarrow \mathbb{R}$$

se estende a um funcional linear contínuo

$$\int_a^b dt : C^0([a, b], F) \rightarrow \mathbb{R},$$

para o qual ainda são válidas as propriedades *i*), *ii*) e *iii*). Mais ainda, se γ é um caminho C^1 em F então

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) dt.$$

Demonstração. Pela densidade do subespaço $LP([a, b], F)$ em $C^0([a, b], F)$, podemos estender o funcional $\int_a^b dt$ a um funcional linear contínuo em $C^0([a, b], F)$ satisfazendo as propriedades *i*), *ii*), *iii*). Provemos agora a última afirmação sobre uma versão do teorema fundamental do cálculo para o nosso funcional integral. Seja $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo, então $f \circ \gamma$ é de classe C^1 e $(f \circ \gamma)' = f' \circ \gamma'$. Pelo teorema fundamental do cálculo para \mathbb{R} temos

$$\begin{aligned} f \left(\int_a^b \gamma'(t) dt \right) &= \int_a^b f'(\gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt \\ &= f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a) \\ &= f(\gamma(b) - \gamma(a)). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Pode ser visto em [21] página 60 que se F é localmente convexo então o espaço dual $F^* = \{f : F \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é linear e contínuo}\}$ separa pontos de F . Logo, se

$$\int_a^b \gamma'(t) dt \neq \gamma(b) - \gamma(a)$$

existe $f \in F^*$ tal que

$$f \left(\int_a^b \gamma'(t) dt \right) \neq f(\gamma(b) - \gamma(a)).$$

Isto contradiz 2.2.1. Portanto,

$$\int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

□

Proposição 2.2.4. Seja $U \subset F$ aberto e $P : U \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^1 , então $DP(x)h$ é linear na variável h , $\forall x \in U$.

Demonstração. Vamos verificar a multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} DP(x)ch &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x + cth) - P(x)}{t} \\ &= c \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x + cth) - P(x)}{ct} \\ &= c \lim_{u \rightarrow 0} \frac{P(x + uh) - P(x)}{u} \\ &= cDP(x)h. \end{aligned}$$

Tome $h \in F$, $x \in U$ e $\gamma(t) = P(x + th)$. Claramente γ é um caminho de classe C^1 com

$$\begin{aligned} \gamma(t)' &= P(x + th)' \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{P(x + th + sh) - P(x + th)}{s} \\ &= DP(x + th)h. \end{aligned}$$

Aplicando-se o Teorema 2.2.3 chegamos à igualdade

$$\begin{aligned} \int_0^1 DP(x + th)h dt &= \int_0^1 \gamma'(t) dt \\ &= \gamma(1) - \gamma(0) \\ &= P(x + h) - P(x) \end{aligned}$$

que junto com a já mostrada multiplicação por escalar, nos fornece a seguinte igualdade

$$\frac{P(x + th) - P(x)}{t} = \int_0^1 DP(x + sth)th ds.$$

Iremos agora mostrar que

$$DP(x)(h_1 + h_2) = DP(x)h_1 + DP(x)h_2.$$

Com efeito, escrevendo

$$P(x + t(h_1 + h_2)) - P(x) = [P(x + t(h_1 + h_2)) - P(x + th_1)] + [P(x + th_1) - P(x)]$$

e observando que

$$\begin{aligned} \frac{P(x + th_1) - P(x)}{t} &= \int_0^1 DP(x + sth_1)th_1 ds \\ \frac{P(x + t(h_1 + h_2)) - P(x + th_1)}{t} &= \int_0^1 DP(x + st(h_1 + h_2))h_2 th ds. \end{aligned}$$

Obtemos,

$$\begin{aligned}
DP(x)(h_1 + h_2) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x + t(h_1 + h_2)) - P(x)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 DP(x + sth_1)th_1 ds + \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 DP(x + st(h_1 + h_2))h_2 th ds \\
&= DP(x)h_1 + DP(x)h_2.
\end{aligned}$$

A passagem do limite para dentro da integral é garantida pelo lema abaixo. □

Lema 2.2.5. Sejam X um espaço topológico, F um espaço de Fréchet e $f : X \times [a, b] \rightarrow F$ uma função contínua. Então a aplicação $g : X \rightarrow F$ definida por

$$g(x) = \int_a^b f(x, t) dt,$$

é contínua.

Demonstração. Seja $x_0 \in X$. Afirmamos que, para todo $\epsilon > 0$ e toda seminorma de F , existe U vizinhança de x_0 tal que

$$\|f(x, t) - f(x_0, t)\| \leq \epsilon, \quad \forall x \in U, t \in [a, b].$$

Supondo o contrário, existiriam $\epsilon > 0$, um sistema de vizinhanças $\{U_\lambda\}_\lambda$ de x_0 e redes $x_\lambda \in U_\lambda$ e $t_\lambda \in [a, b]$ com $x_\lambda \rightarrow x_0$, de modo que $\|f(x_\lambda, t_\lambda) - f(x_0, t_\lambda)\| > \epsilon$. Como $x_\lambda \rightarrow x_0$ e $[a, b]$ é compacto podemos assumir que $t_\lambda \rightarrow t_0$, se necessário passando se a uma subrede. Portanto,

$$\epsilon \leq \lim_{\lambda} \|f(x_\lambda, t_\lambda) - f(x_0, t_\lambda)\| = \|f(x_0, t_0) - f(x_0, t_0)\| = 0,$$

absurdo.

Assim,

$$\begin{aligned}
\|g(x) - g(x_0)\| &= \left\| \int_a^b f(x, t) dt - \int_a^b f(x_0, t) dt \right\| \\
&= \left\| \int_a^b f(x, t) - f(x_0, t) dt \right\| \\
&\leq \int_a^b \|f(x, t) - f(x_0, t)\| dt \\
&\leq \epsilon(b - a),
\end{aligned}$$

para todo $x \in U$. Portanto, g é contínua. □

O cálculo direto de que uma aplicação é de classe C^1 , pode se mostrar um tanto quanto custoso. Para facilitar esse trabalho apresentamos uma caracterização para aplicações de classe C^1 . Utilizaremos tal caracterização em duas ocasiões, para provar a regra da cadeia e para demonstrar que um operador de fibrados é suave.

Lema 2.2.6. Seja $P : U \subset F \rightarrow G$ uma aplicação contínua e U convexo. Então P é de classe C^1 se, e somente se, existe uma aplicação contínua

$$L : U \times U \times F \rightarrow G$$

$$(x_0, x_1, h) \mapsto L(x_0, x_1)h$$

linear na última variável, tal que $P(x_1) - P(x_0) = L(x_0, x_1)(x_1 - x_0)$. Além disso, vale que $DP(x)h = L(x, x)h$.

Demonstração. Dados $x_0, x_1 \in U$, tomemos o segmento $x_t = x_0 + t(x_1 - x_0) \in U$, pois U é convexo. Pelo Teorema 2.2.4 a aplicação

$$L(x_0, x_1)h = \int_0^1 DP(x_t)h dt$$

é linear em h . A continuidade de L segue da Proposição 2.2.5, pois $DP(x_t)h$ é contínua com respeito a x_0, x_1 e h . Como

$$\frac{d}{dt}P(x_t) = DP(x_t)(x_1 - x_0),$$

aplicando o Teorema 2.2.3 temos

$$P(x_1) - P(x_0) = L(x_0, x_1)(x_1 - x_0).$$

A recíproca segue da igualdade abaixo e da continuidade de L ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(x + th) - P(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} L(x, x + th)h \\ &= L(x, x)h. \end{aligned}$$

□

Como no cálculo clássico sobre espaços de Banach, o cálculo nos espaços de Fréchet também possui uma versão do Teorema da regra da cadeia para aplicações de classe C^1 que garante que a composição é ainda uma aplicação de classe C^1 . Mais ainda, nos fornece uma expressão para a derivada da composição em termos das derivadas das aplicações originais. Este é o conteúdo do teorema abaixo:

Teorema 2.2.7 (Regra da Cadeia). Sejam $P : U \rightarrow F$ e $Q : V \rightarrow E$ mapas de classe C^1 entre espaços de Fréchet cuja a composição $P \circ Q$ está bem definida. Então $P \circ Q$ é de classe C^1 e,

$$D(P \circ Q)(y)h = DP(Q(y))DQ(y)h, \quad \forall y \in U, h \in F.$$

Demonstração. Como F e E são espaços localmente convexos podemos tomar vizinhas convexas de y e $Q(y)$, de modo que pelo Lema 2.2.6 existam L e M tais que

$$P(x_1) - P(x_0) = L(x_0, x_1)(x_1 - x_0), \quad Q(y_1) - Q(y_0) = M(y_0, y_1)(y_1 - y_0).$$

Definindo a função

$$N(y_0, y_1)h = L(Q(y_0), Q(y_1))M(y_0, y_1)h.$$

Por construção, N é contínua e linear na variável h . Fazendo $x_0 = Q(y_0)$ e $x_1 = Q(y_1)$, temos

$$P(Q(y_1)) - P(Q(y_0)) = N(y_0, y_1)(y_1 - y_0).$$

Pela recíproca do Lema 2.2.6, $P \circ Q$ é C^1 . Além disso, temos

$$\begin{aligned} D(P \circ Q)(y)h &= N(y, y)h \\ &= L(Q(y), Q(y))M(y, y)h \\ &= DP(Q(y))DQ(y)h. \end{aligned}$$

□

Nosso intuito na próxima seção é o estudo de variedades de Fréchet. Como principal exemplo de variedade de Fréchet temos o conjunto $\Gamma(B)$ das seções de um fibrado B sobre uma variedade M compacta. Usando a aplicação exponencial de uma métrica Riemanniana e vizinhanças tubulares, é possível construir um atlas para $\Gamma(B)$. Porém fica a questão de "como mostrar que as mudanças de coordenadas são suaves?" Obteremos uma resposta para essa pergunta no Teorema 2.3.4 usando fortemente o resultado abaixo que permite construir operadores suaves entre espaços de seções de fibrados vetoriais a partir de aplicações entre os fibrados.

Definição 2.2.8. Sejam E e F fibrados vetoriais sobre M uma variedade suave. Uma *mapa de fibrados* é uma aplicação suave entre $p : U \rightarrow F$ de um aberto $U \subset E$ em F , tal que $\pi_E = \pi_F \circ p$. A aplicação p não é necessariamente linear nas fibras.

Observação 2.2.9. Sempre que estivermos trabalhando com espaços de seções ou funções $f : M \rightarrow N$, dado um aberto $U \subset N$ denotaremos por

$$\tilde{U} := \{g \in C^\infty(M, N) : g(M) \subset U\}.$$

Definição 2.2.10. Dado um mapa de fibrados $p : U \subset E \rightarrow F$ entre fibrados, temos naturalmente uma aplicação

$$P : \tilde{U} \subset \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$$

dada por $P(\sigma) = p \circ \sigma$. Denominaremos tal aplicação como *operador de fibrado*.

Teorema 2.2.11. Sejam E e F dois fibrados vetoriais sobre M . Considere $U \subset E$ aberto e $p : U \rightarrow F$ um mapa de fibrados. Então o operador de fibrados

$$P : \tilde{U} \subset \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F),$$

é uma aplicação suave entre espaços de Fréchet.

Demonstração. Iremos mostrar que P é de classe C^1 , fazendo uso do Lema 2.2.6. Para tanto iremos construir uma aplicação contínua $L : \tilde{U} \times \tilde{U} \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ que satisfaça $P(\gamma) - P(\sigma) = L(\sigma, \gamma)(\gamma - \sigma)$, tal construção é feita primeiro localmente em M e depois utilizamos um argumento de partição da unidade para defini-la globalmente.

Seja $y_0 \in M$, existe uma vizinhança V_{y_0} de y_0 e trivializações $\Phi : \pi_E^{-1}(V_{y_0}) \cap U \rightarrow V_{y_0} \times A_{y_0}$ e $\Psi : \pi_F^{-1}(V_{y_0}) \rightarrow V_{y_0} \times \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(V_{y_0}) \cap U & \xrightarrow{p} & \pi_F^{-1}(V_{y_0}) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ V_{y_0} \times A_{y_0} & \xrightarrow{\tilde{p}} & V_{y_0} \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

Assim existe uma aplicação suave $\tilde{p} : V_{y_0} \times A_{y_0} \rightarrow V_{y_0} \times \mathbb{R}^n$ que faz o diagrama acima comutar, onde $(x, \Psi^2 \circ p \circ \Phi^{-1}(x, v)) = \Psi \circ p \circ \Phi^{-1}(x, v) = \tilde{p}(x, v) = (x, f(x, v))$. A notação Ψ^2 e Φ^2 significa que estamos tomando a segunda coordenada das funções Ψ e Φ respectivamente. Podemos supor A_{y_0} convexo, se necessário basta tomar V_{y_0} uma vizinhança menor. Deste modo, aplicando o Lema 2.2.6 para a função $f_{y_0}(x, \cdot) : A_{y_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos que existe $\tilde{l}_{y_0} : V_{y_0} \times A_{y_0} \times A_{y_0} \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua, tal que

$$f_{y_0}(x, v_1) - f_{y_0}(x, v_0) = \tilde{l}_{y_0}(x, v_0, v_1)(v_1 - v_0).$$

Definimos $l_{y_0} : \pi_E^{-1}(V_{y_0}) \cap U \times \pi_E^{-1}(V_{y_0}) \cap U \times E \rightarrow F$, dada por

$$l_{y_0}(v_x, w_x)h_x = \Psi^{-1}(x, \tilde{l}_{y_0}(x, \Phi^2 w_x, \Phi^2 v_x)\Phi^2 h_x).$$

Repetindo o processo acima para cada $y \in M$, obtemos uma cobertura aberta de $M \subset \bigcup_{y \in M} V_y$ e também aplicações l_y associadas a esses abertos. Podemos extrair desta cobertura uma subcobertura enumerável $\{V_j\}$. Existe também uma partição da unidade $\{\lambda_j\}$ subordinada a cobertura $\{V_j\}$. Com isso, dadas seções $\sigma, \gamma \in \tilde{U}$ e $\eta \in \Gamma(F)$ definimos

$$[L(\sigma, \gamma)\eta](x) = \sum_j \lambda_j(x)l_j(\sigma(x), \gamma(x))\eta(x).$$

O que nos dá um operador contínuo $L : \tilde{U} \times \tilde{U} \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$. Dadas seções $\sigma, \gamma \in \tilde{U}$ iremos checar que $P(\gamma) - P(\sigma) = L(\sigma, \gamma)(\gamma - \sigma)$,

$$\begin{aligned}
[L(\sigma, \gamma)(\gamma - \sigma)](x) &= \sum_j \lambda_j(x) l_j(\sigma(x), \gamma(x))(\gamma(x) - \sigma(x)) \\
&= \sum_j \lambda_j(x) \Psi_j^{-1}[x, \tilde{l}_j(x, \Phi_j^2 \sigma(x), \Phi_j^2 \gamma(x))(\Phi_j^2 \gamma(x) - \Phi_j^2 \sigma(x))] \\
&= \sum_j \lambda_j(x) \Psi_j^{-1}[x, f_j(x, \Phi_j^2 \gamma(x)) - f_j(x, \Phi_j^2 \sigma(x))] \\
&= \sum_j \lambda_j(x) [\Psi_j^{-1}(x, f_j(x, \Phi_j^2 \gamma(x))) - \Psi_j^{-1}(x, f_j(x, \Phi_j^2 \sigma(x)))] \\
&= \sum_j \lambda_j(x) [\Psi^{-1} \circ \tilde{p}_j \circ \Phi_j \circ \gamma(x) - \Psi^{-1} \circ \tilde{p}_j \circ \Phi_j \circ \sigma(x)] \\
&= \sum_j \lambda_j(x) [p \circ \gamma(x) - p \circ \sigma(x)] = p \circ \gamma(x) - p \circ \sigma(x) \\
&= P(\gamma)x - P(\sigma)x
\end{aligned}$$

Como desejado $P(\gamma) - P(\sigma) = L(\sigma, \gamma)(\gamma - \sigma)$, segue do Lema 2.2.6 que P é uma aplicação de classe C^1 . O fato de P ser suave, se deve a uma identificação de DP como um operador de fibrados. Com isso, aplicando a demonstração acima concluímos que DP é C^1 e consequentemente que P é de classe C^2 . Repetindo o argumento sucessivamente se conclui que P é suave.

Iremos dar uma ideia da caracterização de DP como operador de fibrados, fazendo as contas para fibrados triviais sobre um aberto $V \subset \mathbb{R}^m$. Sejam $V \times \mathbb{R}^l$ e $V \times \mathbb{R}^n$ fibrados triviais, e $p : V \times \mathbb{R}^l \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ tal que $p(x, y) = (x, f(x, y))$. Repetindo as ideias acima temos $p(x, y_1) - p(x, y_0) = l(x, y_0, y_1)(y_1 - y_0)$, e consequentemente uma aplicação

$$L : \Gamma(V \times \mathbb{R}^l) \times \Gamma(V \times \mathbb{R}^l) \times \Gamma(V \times \mathbb{R}^l) \rightarrow \Gamma(V \times \mathbb{R}^n),$$

dada por $[L(\sigma, \gamma)\eta](x) = l(x, \sigma(x), \gamma(x))\eta(x)$. Com isso,

$$DP : \Gamma(V \times \mathbb{R}^l) \times \Gamma(V \times \mathbb{R}^l) \rightarrow \Gamma(V \times \mathbb{R}^n)$$

$$\begin{aligned}
[DP(\sigma, \eta)](x) &= [L(\sigma, \sigma)\eta](x) \\
&= l(x, \sigma(x), \sigma(x))\eta(x) \\
&= D_y p(x, \sigma(x))\eta(x),
\end{aligned}$$

onde

$$D_y p : V \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \rightarrow V \times \mathbb{R}^n, \quad D_y p(x, w)v = (x, \frac{\partial p(x, w)}{\partial y} v)$$

é um mapa de fibrados. Observando que $\Gamma(V \times \mathbb{R}^l) \times \Gamma(V \times \mathbb{R}^l) \simeq \Gamma(V \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l)$, segue que DP é da forma

$$DP : \Gamma(V \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l) \rightarrow \Gamma(V \times \mathbb{R}^n)$$

com $DP(\sigma \times \eta)(x) = D_y p \circ (\sigma \times \eta)(x) = D_y p(x, \sigma(x))\eta(x)$, ou seja, DP é um operador de fibrados. O caso geral envolve transpor as contas que fizemos para expressão

$$\begin{aligned}
[DP(\sigma, \eta)](x) &= [L(\sigma, \sigma)\eta](x) \\
&= \sum_j \lambda_j(x) l_j(\sigma(x), \sigma(x)) \eta(x) \\
&= \sum_j D_y p_j(x, \sigma(x)) \eta(x) \\
&= D_y p(x, \sigma(x)) \eta(x).
\end{aligned}$$

□

2.3 Variedades de Fréchet

A definição usual de variedade se generaliza de modo direto para o caso do cálculo em espaços de Fréchet. Em analogia às variedades suaves modeladas em um espaço Euclidiano, uma variedade de Fréchet é modelada sobre um espaço de Fréchet. É possível definir, de modo análogo ao caso de dimensão finita a noção de funções suaves entre variedades de Fréchet. Portanto, a definição usual de uma variedade é transportada palavra por palavra.

Definição 2.3.1. Uma *variedade de Fréchet* é um espaço topológico Hausdorff \mathcal{M} , com um atlas de cartas tomando valores em espaços de Fréchet, tais que as mudanças de coordenada são mapas suaves entre espaços de Fréchet.

Como no caso clássico, o espaço modelo é naturalmente uma variedade. Do mesmo modo, os espaços de Fréchet são naturalmente variedades de Fréchet, bem como seus abertos. Com os resultados a seguir iremos dar uma estrutura de Fréchet para o conjunto das seções de uma submersão. Isto é, dada uma submersão $\pi : B \rightarrow M$, mostraremos que o espaço das seções

$$\Gamma(B) = \{f \in C^\infty(M, B) : \pi \circ f = Id_M\}$$

é uma variedade de Fréchet.

Observação 2.3.2. Seja $\pi : B \rightarrow M$ uma submersão com posto constante. Então $D\pi : TB \rightarrow TM$ é um morfismo de fibrados com posto constante, donde $\ker D\pi$ é um subfibrado vetorial de TB . Denotaremos por $VTB := \ker D\pi$ e o denominaremos fibrado vertical de B .

Dado um aberto $U \subset N$, relembremos a notação \tilde{U} ,

$$\tilde{U} = \{g \in C^\infty(M, N) : g(M) \subset U\}.$$

Lema 2.3.3. Sejam B e M variedades de dimensão finita com M compacta, $\pi : B \rightarrow M$ uma submersão com posto constante e $f : M \rightarrow B$ uma aplicação suave com $\pi \circ f = id_M$. Então f é um mergulho e existem U vizinhança aberta de $f(M)$, uma vizinhança W_0 da seção nula do fibrado f^*VTB e um difeomorfismo $\psi : W_0 \subset f^*VTB \rightarrow U \subset B$, tais que se $\sigma \in \tilde{W}_0$ então $\psi \circ \sigma \in \Gamma(B)$. Mais ainda $\psi \circ \sigma_0 = f$, onde σ_0 é a seção nula de f^*VTB .

Demonstração. Observamos que $\pi \circ f = Id_M$ e $D\pi(f) \circ Df = Id$ implicam que f é uma imersão injetiva de uma variedade compacta, logo f é um mergulho.

A equação $D\pi(f) \circ Df = Id$ implica que $T_{f(x)}B = VT_{f(x)}B \oplus T_{f(x)}f(M)$, ou seja, VTB é transversal a $f(M)$. Logo, pelo teorema da vizinhança tubular existe uma vizinhança U de $f(M)$ e um difeomorfismo $\psi : W_0 \subset VTB \rightarrow U \subset B$, onde W_0 é uma vizinhança da seção nula σ_0 , $\psi \circ \sigma_0 = f(M)$ e $\psi(v_x) \in \pi^{-1}(x)$ para todo $v_x \in W_0$. Seja $\sigma \in \widetilde{W_0}$, como o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} W_0 \subset f^*VTB & \xrightarrow{\psi} & B \\ & \searrow & \swarrow \pi \\ & & M \\ & \nearrow \sigma & \end{array}$$

segue que $\psi \circ \sigma$ é uma seção de B . □

Teorema 2.3.4. Seja M uma variedade compacta e $\pi : B \rightarrow M$ uma submersão de posto constante. Então

$$\Gamma(B) = \{f \in C^\infty(M, B) : \pi \circ f = Id_M\}$$

é uma variedade de Fréchet.

Demonstração. Dada uma seção $\sigma \in \Gamma(B)$, pelo Lema 2.3.3 podemos encontrar uma vizinhança U_σ de $\sigma(M)$ e um difeomorfismo $\psi : U \rightarrow V_0$ onde V_0 é uma vizinhança da seção nula de σ^*VTB . Tomamos $\widetilde{U}_\sigma = \{\eta \in \Gamma(B) : \eta(M) \subset U_\sigma\}$, deste modo temos uma aplicação $\Psi : \widetilde{U}_\sigma \rightarrow \widetilde{V_0}$ definida por $\Psi_\sigma(\eta) = \psi \circ \eta$. Afirmamos que $\{\widetilde{U}_\sigma, \Psi_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma(B)}$ é um atlas C^∞ para $\Gamma(B)$. Claramente é uma cobertura para $\Gamma(B)$, nos falta checar que as funções de transição são difeomorfismos. Com efeito, suponha que $\widetilde{U}_\eta \cap \widetilde{U}_\nu \neq \emptyset$, sendo assim temos $\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1} : \Psi_\eta(\widetilde{U}_\eta \cap \widetilde{U}_\nu) \rightarrow \Psi_\nu(\widetilde{U}_\eta \cap \widetilde{U}_\nu)$ onde $\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1}(f) = \psi_\nu \circ \psi_\eta^{-1} \circ f$, se observarmos que $(\psi_\nu \circ \psi_\eta^{-1})$ é um morfismo de fibrados vetoriais. Pela proposição 2.2.11 temos que $\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1}$ é diferenciável, o mesmo se aplica a $(\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1})^{-1} = \Psi_\eta \circ \Psi_\nu^{-1}$ concluindo que as funções de transição são difeomorfismos. □

Exemplo 2.3.5. Segue do teorema acima que os espaços $\Gamma(\text{Gr}_k M)$ e

$$\Gamma(I\text{Gr}_k M) = \{g \in C^\infty(M, I\text{Gr}_k M) : \pi_{\text{Gr}_k M} \circ \pi_{I\text{Gr}_k M} \circ g = Id_M\}$$

vistos na seção 1.2 são variedades de Fréchet.

Iremos expor agora uma construção para o espaço tangente em um ponto $p \in \mathcal{M}$. Dizemos que duas curvas $\alpha, \beta : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ que passam por p em $t = 0$ têm o mesmo vetor tangente em p , se para alguma carta $\phi : U \rightarrow U_1$ em torno de p vale

$$(\phi \circ \beta)'(0) = (\phi \circ \alpha)'(0).$$

A independência da escolha da carta é garantida pelas propriedades das mudanças de coordenadas. Nesse caso, duas tais curvas são ditas equivalentes. Esta relação define uma relação de equivalência no conjunto das curvas diferenciáveis que passam por p e a classe de equivalência de α , denotada

por $[\alpha]$, é chamada o vetor tangente a α em p , também denotado por $\alpha'(0)$. O espaço tangente a \mathcal{M} no ponto p , denotado por $T_p\mathcal{M}$, é o conjunto de tais vetores tangentes. Dada uma carta local $\phi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow U_1 \subset F$, estabelece uma bijeção entre $T_p\mathcal{M}$ e F . Essa bijeção associa a cada classe de equivalência $[\alpha]$ o vetor $(\phi \circ \alpha)'(0) \in F$. Pela definição da relação de equivalência a aplicação é bem definida e injetiva. Para verificar que a aplicação é sobrejetora basta observar que se $v \in F$, então $\alpha(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + tv)$ é uma curva diferenciável passando por p e a imagem de $[\alpha]$ é v . Denotamos essa bijeção por $D\phi(p) : T_p\mathcal{M} \rightarrow F$. Observamos que se $\psi : V \rightarrow V_1$ é outra carta local com $p \in V$, então

$$D\psi(p) = D(\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p))D\phi(p).$$

Logo, definindo a estrutura de espaço vetorial em $T_p\mathcal{M}$ de modo que $D\phi(p)$ seja um isomorfismo, concluímos que tal estrutura independe da carta observando que todas as setas no diagrama abaixo são isomorfismos. A notação $(T_p\mathcal{M}, D\phi)$ expressa a estrutura de espaço vetorial dada ao conjunto $T_p\mathcal{M}$ por meio de $D\phi$.

$$\begin{array}{ccc} (T_p\mathcal{M}, D\phi) & \text{-----} > & (T_p\mathcal{M}, D\psi) \\ D\phi \downarrow & & \downarrow D\psi \\ F & \xrightarrow{D(\psi \circ \phi^{-1})} & F \end{array}$$

Considere $\sigma \in \Gamma(B)$, onde $\Gamma(B)$ são as seções de uma submersão $\pi : B \rightarrow M$ de posto constante entre variedades de dimensão finita. Pelo Teorema 2.3.4 $\Gamma(B)$ é uma variedade de Fréchet e existe uma carta $\Psi : \tilde{U} \subset \Gamma(B) \rightarrow \Gamma(\sigma^*VTB)$ em torno de σ , pela construção do espaço tangente temos a identificação entre os espaços

$$T_\sigma\Gamma(B) \simeq \Gamma(\sigma^*VTB). \quad (2.3.1)$$

Uma maneira de exemplificar essa identificação é considerar α uma curva suave em $\Gamma(B)$ com $\alpha(0) = \sigma$, donde $\alpha'(0) \in T_\sigma\Gamma(B)$. Assim, para cada $x \in M$, $\alpha(t)x$ é uma curva em F_x , daí $\alpha'(0)x \in T_{\sigma(x)}F_x = VT_{\sigma(x)}F = \sigma^*VTF_x$. Logo $\alpha'(0)$ determina uma seção de $\Gamma(\sigma^*VTB)$.

As funções suaves entre variedades de Fréchet são definidas do mesmo modo que o caso de dimensão finita, também é análoga a partir das propriedades do atlas a verificação de que tal definição é consistente.

Definição 2.3.6. Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} variedades de Fréchet suaves. Uma aplicação $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é suave, se para todo $p \in \mathcal{M}$ existem cartas locais $\psi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow U_1 \subset F$ e $\phi : V \subset \mathcal{N} \rightarrow V_1 \subset E$ tais que

- $p \in U$, $f(p) \in V$;
- $f(U) \subset V$;
- $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U_1 \subset F \rightarrow V_1 \subset E$ é suave.

Com a noção de diferenciabilidade para aplicações entre variedades de Fréchet podemos definir fibrados vetoriais de Fréchet e grupos de Lie Fréchet.

Definição 2.3.7. Um *fibrado vetorial de Fréchet* é um par \mathcal{V} e \mathcal{M} de variedades de Fréchet mais uma aplicação suave $\pi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ sobrejetora tal que,

- $\pi^{-1}(x)$ tem uma estrutura de espaço de Fréchet, para todo $x \in \mathcal{M}$;
- para todo $x \in \mathcal{M}$ existe um vizinhança aberta U tal que existe um difeomorfismo

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E,$$

onde E é um espaço de Fréchet, a projeção de π coincide com a projeção na primeira coordenada e $\Phi : \pi^{-1}(x) \rightarrow x \times E$ é um isomorfismo linear contínuo, para todo $x \in U$.

Note que, para duas trivializações em \mathcal{V} as funções de transição

$$\Phi_1 \circ \Phi_0^{-1} : U_0 \times E_0 \rightarrow U_1 \times E_1$$

são sempre lineares na segunda coordenada. Reciprocamente se tivermos um atlas em \mathcal{V} de trivializações cuja as transições têm a forma $(x, v) \rightarrow (f(x), T(x)v)$, onde $T(x)$ é um isomorfismo linear, então \mathcal{V} é um fibrado vetorial.

Exemplo 2.3.8. Seja \mathcal{M} uma variedade de Fréchet, considere o conjunto

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M},$$

com a projeção natural $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é um fibrado vetorial de Fréchet, denominado fibrado tangente de \mathcal{M} . Dado uma atlas $\{\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathcal{M} \rightarrow W_\alpha \subset E_\alpha\}$ de \mathcal{M} , W_α aberto do espaço de Fréchet E_α . Definimos um atlas para $T\mathcal{M}$ pondo

$$\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times E_\alpha$$

$$\Phi_\alpha(v_x) = (x, D\phi_\alpha(x)v_x).$$

As funções de transição são como no caso de dimensão finita as derivadas das mudanças de coordenada.

Antes de avançar à definição de grupo de Lie-Fréchet iremos enunciar o teorema que garante a suavidade do operador composição sobe certas hipóteses, depois faremos uma exposição sobre a expressão de sua derivada.

Teorema 2.3.9. Seja M uma variedade de dimensão finita compacta, F um fibrado sobre M com fibra compacta e B um fibrado sobre F , $B \rightarrow F \rightarrow M$. Então o operador $C : \Gamma(F, B) \times \Gamma(M, F) \rightarrow \Gamma(M, B)$ dado por $C(f, g) = f \circ g$ é de classe C^∞ .

Demonstração. Ver teorema 11.4 página 110 em [17]. □

Corolário 2.3.10. Sejam M, N e P variedades compactas. Considere $C : C^\infty(N, P) \times C^\infty(M, N) \rightarrow C^\infty(M, P)$, onde $C(f, g) = f \circ g$. Se M e N são compactas então C é C^∞ .

Iremos agora explorar um pouco sobre a expressão da derivada do operador composição. Sejam $U \subset \mathbb{R}^l$, $V \subset \mathbb{R}^m$ e $W \subset \mathbb{R}^n$ abertos com fecho compacto. Consideremos os espaços $C^\infty(U, V)$, $C^\infty(V, W)$ e $C^\infty(U, W)$ munidos das seminormas

$$\begin{aligned}\|g\|_{C^n(U,V)} &= \max_{i \leq n} \sup_{x \in U} |D^i g(x)| \\ \|f\|_{C^n(V,W)} &= \max_{i \leq n} \sup_{x \in V} |D^i f(x)| \\ \|h\|_{C^n(U,W)} &= \max_{i \leq n} \sup_{x \in U} |D^i h(x)|\end{aligned}$$

O operador composição $C : C^\infty(U, V) \times C^\infty(V, W) \rightarrow C^\infty(U, W)$ pelo teorema acima é suave. Mostraremos agora que

$$DC(f, g)(h, k) = h \circ g + Df|_g k.$$

De fato,

$$\begin{aligned}& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|(f + th) \circ (g + tk) - f \circ g - h \circ g - Df|_g k\|_n}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f \circ (g + tk) + f \circ tk + th \circ (g + tk) - f \circ g - h \circ g + Df|_g k\|_n}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f \circ (g + tk) - f \circ g - Df|_g k + th \circ (g + tk) - h \circ g - Df|_g k\|_n}{t} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f \circ (g + tk) - f \circ g - Df|_g k\|_n}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|th \circ (g + tk) - h \circ g\|_n}{t} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Como as contas acima valem para toda seminorma com $n \geq 0$, então

$$\begin{aligned}DC(f, g)(h, k) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f + th) \circ (g + tk) - f \circ g}{t} \\ &= h \circ g + Df|_g k.\end{aligned}$$

Esta fórmula se estende para variedades fazendo uso de coordenadas locais. A seguir faremos apenas uma exposição sobre a expressão no caso de variedades. Considere

$$C : C^\infty(N, P) \times C^\infty(M, N) \rightarrow C^\infty(M, P)$$

como no corolário anterior. Se

$$h \in T_f C^\infty(N, P) = \Gamma(N, f^* TP)$$

então

$$h \circ g \in T_{f \circ g} C^\infty(M, P) = \Gamma(M, g^* f^* TP),$$

e se

$$k \in T_g C^\infty(M, N) = \Gamma(M, g^* TN),$$

lembrando que $Df : TN \rightarrow TP$ temos

$$Df|_g k \in T_{f \circ g} C^\infty(M, P) = \Gamma(M, g^* f^* TP).$$

Assim fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} DC : TC^\infty(M, N) \times TC^\infty(N, P) &\rightarrow TC^\infty(M, P) \\ DC(h_f, k_g) &= Df(g)k + h \circ g. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

A observação importante do que foi feito acima é que a derivada do operador composição se decompõe como operadores de composição. Feitas essas considerações passemos agora aos grupos de Lie-Fréchet.

Definição 2.3.11. Um *grupo de Lie-Fréchet* é um grupo \mathcal{G} munido de uma estrutura de variedade de Fréchet de modo que o produto e a inversão do grupo são aplicações suaves.

Como exemplo fundamental de um grupo de Lie-Fréchet temos o conjunto dos difeomorfismos de uma variedade compacta.

Teorema 2.3.12. Se M é uma variedade de dimensão finita compacta. Então $\text{Diff}(M)$ é um grupo de Lie-Fréchet.

Demonstração. Uma prova deste resultado pode ser encontrada no artigo de Leslie [15]. □

Faremos uma observação quanto à derivada da aplicação inversão $V : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(M)$. Fazendo as contas no espaço euclidiano como no caso da composição e depois levando para a variedade, temos

$$DV(\varphi)h = -[D\varphi(\varphi^{-1})]^{-1}h(\varphi^{-1}). \tag{2.3.3}$$

Essa expressão nos diz que a derivada da inversão se escreve como composição e inversão de aplicações.

2.4 Espaços de Fréchet tame

Um espaço de Fréchet tame é a grosso modo quase um espaço de Banach, na verdade espaços de Fréchet tame são em algum sentido (definido em 2.4.9) subespaços do espaço das sequências de decrescimento exponencial de um espaço de Banach. Em espaços tame é possível definir uma nova classe de aplicações, conhecida como aplicações tame. Nesse contexto é possível obter ainda mais resultados do cálculo clássico. Em particular, versões do teorema da função inversa e do teorema da função implícita.

Definição 2.4.1. Um *grading* em um espaço de Fréchet F é uma família de seminormas $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazendo $\|\cdot\|_n \leq \|\cdot\|_{n+1}$ e que gera a topologia de F . Diremos que F é um *espaço de Fréchet graduado* se admitir uma grading.

Exemplo 2.4.2. Seja B um espaço de Banach, denotemos por

$$\Sigma(B) := \{f : \mathbb{N} \rightarrow B : \sum_{k=0}^{\infty} e^{nk} \|f_k\|_B < \infty, \forall n\}.$$

Damos a $\Sigma(B)$ um grading $\|\{f_k\}\|_n = \sum_{k=0}^{\infty} e^{nk} \|f_k\|_B$. Com estas seminormas $\Sigma(B)$ é um espaço de Fréchet graduado.

Exemplo 2.4.3. Seja (X, μ) um espaço de medida e uma função mensurável $\omega \geq 0$, temos que o conjunto $L_1^\infty(X, \mu, \omega) = \{f \in L^1(X, \mu) : \int_X e^{n\omega} |f| d\mu < \infty \quad \forall n\}$ munido das seminormas

$$\|f\|_n = \int_X e^{n\omega} |f| d\mu$$

é um espaço de Fréchet graduado.

Exemplo 2.4.4. Os exemplos 2.1.6 $C^\infty(M)$ e 2.1.7 $\Gamma(E)$ com as seminormas $\{\|\cdot\|_{C^\infty(M)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\|\cdot\|_{\Gamma(E)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ são espaços graduados.

Definição 2.4.5. Dizemos que dois gradings $\{\|\cdot\|_n\}$ e $\{\|\cdot\|'_n\}$ em um espaço de Fréchet F são tamely equivalentes de grau r e base b se

- $\|x\|_n \leq C_n^1 \|x\|'_{n+r}$
 - $\|x\|'_n \leq C_n^2 \|x\|_{n+r}$
- $\forall n \geq b$ e $x \in F$.

No que seguirá nesta dissertação não faremos distinção entre gradings tamely equivalentes, bem como todas as definições e teoremas apresentados daqui em diante independem do grating escolhido. Os gradings em $C^\infty(M)$ e $\Gamma(E)$ definidos por meio de cartas como fizemos são todos tamely equivalentes entre si.

Definição 2.4.6. Dizemos que uma aplicação linear $L : F \rightarrow E$ entre dois espaços graduados satisfaz uma estimativa tame de grau r e base b se $\|Lx\|_n \leq C_n \|x\|_{n+r}$ para todo $n \geq b$. A aplicação é dita *tame linear* se satisfaz a estimativa para algum par r, b .

Fica claro que se L é uma aplicação linear tame, então L é contínua.

Lema 2.4.7. A composta de aplicações lineares tame $L : E \rightarrow F$ e $K : F \rightarrow G$ é linear tame.

Demonstração. Suponhamos que L satisfaz uma estimativa tame de grau r_1 e base b_1 , e que K satisfaça uma estimativa tame de grau r_2 e base b_2 . Tome $b = \max\{b_1, b_2\}$ $r = r_1 + r_2$, donde

$$\|K(L(f))\|_n \leq C \|L(f)\|_{n+r_2} \leq C \|f\|_{n+r_1+r_2}, \quad \forall n \geq b$$

ou seja, $K \circ L$ satisfaz uma estimativa de grau r e base b . Como não temos restrições sobre a constante, usamos uma de mesmo nome. \square

No início dessa seção comentamos que um espaço de Fréchet tame é em algum sentido quase um espaço de Banach, as próximas duas definições tratam de formalizar esse sentido.

Definição 2.4.8. Sejam F e E espaços graduados. Dizemos que F é *somando direto tame* de E se pudermos encontrar aplicações $L : F \rightarrow E$ e $M : E \rightarrow F$ tais que $M \circ L = Id_F$.

Definição 2.4.9. Um espaço graduado F é tame se este for somando direto de $\Sigma(B)$ para algum espaço de Banach B .

Cabe aqui observar que em algumas referências os espaços de Fréchet tame são espaços de Fréchet graduados mais uma família à um parâmetro de operadores $S_t : F \rightarrow F$ satisfazendo:

- $S_t = 0$ se, $t \leq 0$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t = Id_F$
- Se $m \leq n$, $\|S_t(x)\|_n \leq Ce^{(n-m)t} \|x\|_m$ e $\|Id_F - S_t(x)\|_m \leq Ce^{(m-n)t} \|x\|_n$,

tais operadores são chamados de smoothing operators, ou em tradução livre operadores de suavização. Os espaços $\Sigma(B)$ possuem naturalmente tais operadores. Considere $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave tal que $0 \leq s(u) \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, $s(u) = 0$ se $u \leq 0$ e $s(u) = 1$ se $u \geq 1$. Seja $\{x_k\} \in \Sigma(B)$, definimos os operadores $S_t : \Sigma(B) \rightarrow \Sigma(B)$ por

$$S_t(\{x_k\}) = \{s(t - k)x_k\}.$$

Os espaços de Fréchet tame como definimos são somandos diretos de $\Sigma(B)$, usando esse fato e que $\Sigma(B)$ possuem smoothing operators, pode se mostrar que os espaços de Fréchet tame de possuem smoothing operators.

Fora os próprios espaços $\Sigma(B)$, apresentaremos mais dois exemplos de espaços de Fréchet tame, a saber $C^\infty(M)$ espaço das funções suaves de uma variedade compacta e $\Gamma(E)$ o espaço das seções suaves de um fibrado vetorial. As demonstrações destes resultados serão feitas após a apresentação de uma série de lemas técnicos que permitem algumas simplificações dos problemas.

Lema 2.4.10. Se um espaço F é somando direto tame de algum espaço tame E , então ele é tame.

Demonstração. Pelo lema 2.4.7 basta compor as setas.

$$F \longrightarrow E \longrightarrow \Sigma(B) \longrightarrow E \longrightarrow F$$

□

Lema 2.4.11. Seja (X, μ) um espaço de medida e $\omega \geq 0$ uma função mensurável deste espaço. Então o espaço de Fréchet graduado $L_1^\infty(X, \mu, \omega)$ é tame.

Demonstração. Defina $X_k = \omega^{-1}([k, k + 1))$, denote por χ_k a função característica de X_k . As aplicações

$$L : L_1^\infty(X, \mu, \omega) \rightarrow \sum(L^1(X, \mu)), \quad (Lf)_k = \chi_k f$$

e

$$K : \sum(L^1(X, \mu)) \rightarrow L_1^\infty(X, \mu, \omega), \quad K\{f_k\} = \sum \chi_k f_k,$$

são aplicações lineares tame satisfazendo $K \circ L = Id_{L_1^\infty(X, \mu, \omega)}$. Mostraremos que L é tame, mostrar que K é tame é análogo.

$$\begin{aligned} \|\{Lf_k\}_n\| &= \sum_k^{+\infty} e^{nk} \|\chi_k f_k\|_{L^1(X, \mu)} \\ &= \sum_k^{+\infty} \int_{X_k} e^{nk} |f| d\mu \\ &\leq \sum_k^{+\infty} \int_{X_k} e^{n\omega} |f| d\mu \\ &= \sum_k^{+\infty} \int_X e^{n\omega} |\chi_k f| d\mu \\ &= \int_X \sum_k^{+\infty} e^{n\omega} |\chi_k f| d\mu \\ &= \int_X e^{n\omega} |f| d\mu \\ &= \|f\|_n \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.12. Se M é uma variedade de dimensão finita compacta, então $C^\infty(M)$ é tame.

Demonstração. Seja $L_1^\infty(\mathbb{R}^d, \mu, w)$, onde μ é a medida de Lebesgue e $w(x) = \log(1 + |x|)$. Pelo lema 2.4.11 $L_1^\infty(\mathbb{R}^d, \mu, w)$ é tame. Se mostrarmos que $C^\infty(M)$ é somando direto tame de $L_1^\infty(\mathbb{R}^d, \mu, w)$ do Lema 2.4.10 seguirá que $C^\infty(M)$ é tame.

Pelo Teorema de Whitney, existe um mergulho $i : M \rightarrow \mathbb{R}^d$. Tome $\psi : M \times U \rightarrow B(0, r)$ uma vizinhança tubular da variedade M contida alguma bola B^d , isso é possível pois M é compacta. Denotemos por

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} D^n f(x) = 0, \forall n\}$$

com o grading

$$\|f\|_{C^n} = \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha f(x)|,$$

e por

$$C_0^\infty(B^d) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \text{supp}(f) \subset B^d\}$$

o subespaço fechado de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ das funções que se anulam fora da bola B^d , com o grading induzido pelo grading de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Existe $\varphi : B^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que $\varphi \equiv 1$ em uma vizinhança V de M com $\bar{V} \subset \psi(M \times U)$ e $\varphi \equiv 0$ em $B^d \setminus \psi(\bar{U})$. Podemos assim definir $L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(B(0, r))$ por

$$(Lf)(x) = \begin{cases} 0 & x \in B(0, r) \setminus \bar{U} \\ \varphi(x)f(\psi_1^{-1}(x)) & x \in \bar{U} \end{cases}$$

De modo semelhante temos $P : C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow C^\infty(M)$, dado por $(Pf)(x) = f \circ i(x)$. Ambos os casos são operadores de composição, a ideia por trás do fato que são tame linear é que podemos controlar as seminormas uma vez que as funções i, ω e ψ estão fixas usando a estimativa abaixo

$$\|D^n(h \circ g)\|_0 \leq C \sum_{k=1}^n \sum_{j_1+\dots+j_k} \|h\|_k \|g\|_{j_1} \cdots \|g\|_{j_k} \quad (2.4.1)$$

Também temos $I : C_0^\infty(B^d) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a inclusão natural, assim chegamos ao diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C^\infty(M) & \xrightarrow{L} & C_0^\infty(B^d) & \xrightarrow{I} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \xrightarrow{P} & C^\infty(M) \\ & & \searrow \mathfrak{F} & & \nearrow \mathfrak{F}^{-1} & & \\ & & & & L_1^\infty(\mathbb{R}^d, \mu, w) & & \end{array}$$

onde \mathfrak{F} e \mathfrak{F}^{-1} denotam a transformada de Fourier e sua inversa. Nosso objetivo agora é mostrar que \mathfrak{F} e \mathfrak{F}^{-1} são tame linear, feito isso e observando o diagrama acima concluímos que $C^\infty(M)$ somando direto tame de $L_1^\infty(\mathbb{R}^d, \mu, w)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_n &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^n |f(x)| dx \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^j |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Fazendo as contas para \mathfrak{F}^{-1} ,

$$\begin{aligned} |D^j \mathfrak{F}^{-1}[f](x)| &= \left| D^j \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \xi^j f(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^j |f(\xi)| d\xi \\ &\leq \|f\|_n \end{aligned}$$

implica

$$\|\mathfrak{F}^{-1}(f)\|_{C^n} \leq \|f\|_n.$$

No caso da transformada \mathfrak{F} temos,

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{F}[g]\|_n &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^n |\mathfrak{F}[g](x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^{n+r} |\mathfrak{F}[g](x)| \frac{dx}{(1 + |x|)^r} \\
&= \sum_{j=0}^{n+r} \binom{n+r}{j} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^j |\mathfrak{F}[g](x)| \frac{dx}{(1 + |x|)^r} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n+r} \binom{n+r}{j} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathfrak{F}[D^j g](x)| \frac{dx}{(1 + |x|)^r} \\
&\leq \sum_{j=0}^{n+r} \binom{n+r}{j} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\mathfrak{F}[D^j g](x)| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1 + |x|)^r} \\
&\leq C \|g\|_{C^{n+r}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1 + |x|)^r}.
\end{aligned}$$

Agora analisemos a convergência da integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1 + |x|)^r} &= \text{área}(S^{d-1}) \int_0^\infty \frac{\rho^{d-1}}{(1 + \rho)^r} d\rho \\
&\leq \text{área}(S^{d-1}) \int_0^\infty \frac{(1 + \rho)^{d-1}}{(1 + \rho)^r} d\rho \\
&\leq \text{área}(S^{d-1}) \int_1^\infty \frac{1}{(\rho)^{r+1-d}} d\rho
\end{aligned}$$

onde a integral é convergente se $r + 1 - d > 1$, donde $r > d$. Logo,

$$\|\mathfrak{F}[g]\|_n \leq \|g\|_{C^{n+r}}, \quad \text{se } r > d$$

□

Lema 2.4.13. O produto cartesiano finito de espaços tame é tame.

Demonstração. Provemos o caso para $n = 2$ os restantes seguem por indução. Suponha que tenhamos F_i somando direto tame de $\Sigma(B_i)$, $i = 1, 2$

$$F_i \xrightarrow{L_i} \Sigma(B) \xrightarrow{K_i} F_i.$$

Deste modo, tomando as aplicações produto $L_1 \times L_2$ e $K_1 \times K_2$ temos que $F_1 \times F_2$ é somando direto de $\Sigma(B_1) \times \Sigma(B_2)$. Existe um isomorfismo tame entre $\Sigma(B_1) \times \Sigma(B_2)$ e $\Sigma(B_1 \times B_2)$, definido por $L(\{f_k\}, \{g_k\}) = \{(f_k, g_k)\}$. A linearidade é imediata e o fato de ser tame da construção das gradações no produto. Pelo Lema 2.4.7, basta tomar as aplicações que fazem o diagrama a baixo comutar.

$$\begin{array}{ccccc}
F_1 \times F_2 & \rightarrow & \Sigma(B_1) \times \Sigma(B_2) & \rightarrow & F_1 \times F_2 \\
& & \downarrow & & \\
& & \Sigma(B_1 \times B_2) & &
\end{array}$$

□

Teorema 2.4.14. Se M é uma variedade de dimensão finita compacta e E um fibrado vetorial sobre M , então $\Gamma(E)$ é tame.

Demonstração. Denotemos por $I = M \times \mathbb{R}$ o fibrado de linhas trivial sobre M . Do mesmo modo $I^d = M \times \mathbb{R}^d$. Como $\Gamma(I) = C^\infty(M)$ e $\Gamma(I^d) = (\Gamma(I))^d$, segue do Lema 2.4.13 e do Teorema 2.4.12 $\Gamma(I^d)$ é tame. Como M é compacta, existem d tal que e uma sequência morfismos de fibrados

$$E \xrightarrow{f} I^d \xrightarrow{h} E$$

com $h \circ f = I_E$. Essa propriedade pode ser encontrada na página 13 das notas de [10]. Definindo $F(\sigma) = f \circ \sigma$ e $H(\eta) = h \circ \eta$,

$$\Gamma(E) \xrightarrow{F} \Gamma(I^d) \xrightarrow{H} \Gamma(E),$$

$$H \circ F = \text{Id}_E$$

segue da estimativa (2.4.1) que F e H são tame. Portanto $\Gamma(E)$ é somando direto tame de $\Gamma(I^d)$, donde concluímos o desejado. □

2.5 Aplicações tame suaves

Aplicações tame e tame suaves são duas classes de aplicações com interseções entre si, porém sem continência. Neste texto estaremos apenas interessados nas aplicações tame suaves, sendo assim diremos apenas aplicação tame em referência às tame suaves, caso contrário destacaremos a categoria da aplicação.

Definição 2.5.1. Sejam F e E espaços de Fréchet graduados, $V \subset F$ aberto e $P : V \subset F \rightarrow E$ uma aplicação contínua. Dizemos que P satisfaz uma estimativa tame de grau r e base f se

$$\|P(x)\|_n \leq C_n(1 + \|x\|_n)$$

para todo $x \in V$ e para todo $n \geq b$.

Definição 2.5.2. Diremos que uma aplicação contínua $P : U \subset F \rightarrow E$ é tame se, para todo ponto $x \in U$ existir uma vinhança $V \subset U$ de x tal que P satisfaz uma estimativa tame em V . Se P for suave diremos que P é *tame suave* se P for tame e todas as suas derivadas $D^k P$ são tame.

Teorema 2.5.3. A composição de aplicações tame suaves resulta em uma aplicação tame suave.

Demonstração. Sejam F, G e H espaços graduados e U, V, W abertos de F, G e H respectivamente. Sejam P e Q duas aplicações tais que a composição

$$U \subset F \xrightarrow{P} V \subset G \xrightarrow{Q} W \subset H$$

está bem definida. Dado $x_0 \in U$, como P é tame existem $b, r \in \mathbb{N}$ e uma vizinhança $U_0 \subset U$ onde P satisfaz

$$\|P(x)\|_m \leq C(1 + \|x\|_{m+r}) \quad \forall m \geq b$$

Por outro lado, Q é tame, donde existem $s, c \in \mathbb{N}$ e uma vizinhança V_0 de $y_0 = P(x_0)$ onde Q satisfaz

$$\|Q(y)\|_n \leq C(1 + \|y\|_{n+s}) \quad \forall n \geq c.$$

Tomando b ou c suficiente mente grande de modo que $b = c + r$. Como uma aplicação tame é contínua, $P^{-1}(V_0)$ é uma vizinhança de x_0 . Tomando a interseção com U_0 se necessário, podemos assumir $P(U_0) \subset V_0$. Então para todo $x_0 \in U_0$ e para todo $n \geq c$ temos

$$\|Q(P(f))\|_n \leq C(1 + \|P(x)\|_{n+s}) \leq C(1 + \|x\|_{n+r+s})$$

o que mostra que $Q \circ P$ satisfaz uma estimativa tame de grau $r + s$ e base c em U_0 .

Pela regra da cadeia 2.2.7, sabemos que a derivada $D(Q \circ P)$ é tame, pois pode ser escrita como composta das aplicações tame P, DP e DQ . Aplicando esse mesmo argumento sucessivamente mostra-se que todas as derivadas de $D(Q \circ P)$ são tame. \square

Os mapas tame envolvidos no resultado principal deste trabalho são basicamente mapas entre espaços de funções suaves de uma variedade ou espaços de seções de um fibrado. Para mostrar que estes mapas são tame realizamos uma técnica comum a todos eles, de reduzir o problema via cartas locais a fazer estimativas tame nos espaços das funções suaves de uma bola no espaço euclideano. Nesse processo será recorrente o uso da seguinte interpolação.

Lema 2.5.4. Seja M uma variedade de dimensão finita compacta e $l \leq m \leq n$. Então para toda função $f \in C^\infty(M)$ vale a interpolação

$$\|f\|_{C^m(M)}^{n-l} \leq C \|f\|_{C^n(M)}^{m-l} \|f\|_{C^l(M)}^{n-m}.$$

Demonstração. A prova desta proposição pode ser encontrada junto com outras interpolações e desigualdades na seção 2 do capítulo 2 de [9]. \square

Denotando a seminorma $\|\cdot\|_{C^n(M)}$ de $C^\infty(M)$ apenas por $\|\cdot\|_n$, observamos que a partir do lema vale a seguinte desigualdade:

$$\|f\|_m \leq C \|f\|_n^{\frac{m-l}{n-l}} \|f\|_l^{\frac{n-m}{n-l}} \quad (2.5.1)$$

Outro resultado auxiliar importante se trata da fórmula para derivadas n -ésimas da composta de funções, conhecida como fórmula de Faà di Bruno

$$D^n(f \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j_1+\dots+j_k=n} C_{k,j_1,\dots,j_k} D^k f(g(x)) [D^{j_1} g(x), \dots, D^{j_k} g(x)]$$

onde C_{k,j_1,\dots,j_k} é um número inteiro que envolve a contagem das partições de n . Nossas aplicações serão independentes da expressões explicitas dos inteiros C_{k,j_1,\dots,j_k} . Para uma prova dessa fórmula e uma expressão para os inteiros C_{k,j_1,\dots,j_k} indicamos ao leitor o texto [20].

Lema 2.5.5. Seja $p : V \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave e \bar{V} compacto. Então para cada $f_0 \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$ existe uma vizinhança U_{f_0} e uma constante positiva C_{f_0} , tal que o operador

$$P : C^\infty(V, \mathbb{R}^l) \rightarrow C^\infty(V, \mathbb{R}^m), \quad P(f) = p(x, f(x))$$

satisfaz

$$\|P(f)\|_{C^n(V, \mathbb{R}^m)} \leq (C_{f_0} + 1) \|f\|_{C^n(V, \mathbb{R}^l)}, \quad \forall f \in U_{f_0}.$$

Demonstração. Seja $f_0 \in C^\infty(V, \mathbb{R}^l)$, tome $U \subset V \times \mathbb{R}^l$ uma vizinhança do gráfico de f_0 com fecho compacto. Então p e todas suas derivadas são limitadas em U . Observamos que se $f \in \tilde{U}$, $\|f\|_0 \leq C$ e $\|D^n p(x, f(x))\|_0 \leq C$.

Utilizaremos a seguir a fórmula de Faà di Bruno para derivadas n -ésimas de compostas,

$$\begin{aligned} \|D^n P(f)\|_0 &= \sup_{x \in V} \left| \sum_{k=1}^n \sum_{j_1 + \dots + j_k} C_{k, j_1, \dots, j_k} D^k p(x, f(x)) [D^{j_1}(x, f(x)), \dots, D^{j_k}(x, f(x))] \right| \\ &\leq C \sum_{k=1}^n \sum_{j_1 + \dots + j_k} \sup_{x \in V} \left| D^k p(x, f(x)) [D^{j_1}(x, f(x)), \dots, D^{j_k}(x, f(x))] \right| \\ &\leq C \sum_{k=1}^n \sum_{j_1 + \dots + j_k} \sup_{x \in V} \left| D^k p(x, f(x)) \right| \left| D^{j_1}(x, f(x)) \right| \cdots \left| D^{j_k}(x, f(x)) \right| \\ &\leq C \sum_{j_1 + \dots + j_k \leq n} \sup_{x \in V} \left| D^{j_1}(x, f(x)) \right| \cdots \left| D^{j_k}(x, f(x)) \right| \\ &\leq C \sum_{j_1 + \dots + j_k \leq n} \|D^{j_1} f\|_0 \cdots \|D^{j_k} f\|_0 \\ &\leq C \sum_{j_1 + \dots + j_k \leq n} \|f\|_{j_1} \cdots \|f\|_{j_k} \end{aligned}$$

Pela desigualdade 2.5.1, podemos limitar $\|f\|_i \leq C \|f\|_n^{\frac{i}{n}}$, desde que $\|f\|_0 \leq C$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|P(f)\|_n &= \max_{i \leq n} \|D^i P(f)\|_0 \\ &\leq \max_{i \leq n} C_i \sum_{j_1 + \dots + j_k \leq i} \|f\|_{j_1} \cdots \|f\|_{j_k} \\ &\leq C_n \sum_{j_1 + \dots + j_k \leq n} \|f\|_{j_1} \cdots \|f\|_{j_k} \\ &\leq C_n + C_n \sum_{0 < j_1 + \dots + j_k \leq n} \|f\|_n^{\frac{j_1}{n}} \cdots \|f\|_n^{\frac{j_k}{n}} \\ &\leq C_n + n C_n \|f\|_n \\ &\leq C'_n (1 + \|f\|_n). \end{aligned}$$

□

Dado um aberto $U \subset N$, relembremos a notação \tilde{U} ,

$$\tilde{U} = \{g \in C^\infty(M, N) : g(M) \subset U\}.$$

Teorema 2.5.6. Sejam E e F dois fibrados vetoriais sobre M . Considere $U \subset E$ aberto e $p : U \rightarrow F$ um mapa de fibrados. Então o operador de fibrados $P : \tilde{U} \subset \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ dado por $P(\sigma) = p \circ \sigma$ é tame suave.

Demonstração. Seja $\{V_i\}$ uma cobertura finita de M por abertos tais que $\pi_E^{-1}(V_i)$ e $\pi_F^{-1}(V_i)$ admitem trivializações locais, e fazendo intersecções se necessário de modo que tenhamos $p(\pi_E^{-1}(V_i)) \subset \pi_F^{-1}(V_i)$. Tomamos em $\Gamma(E)$ e $\Gamma(F)$ os gradings gerados pela cobertura $\{V_i\}$. Fixado i temos

$$\begin{array}{ccccc} V_i \subset M & \xrightarrow{\sigma} & \pi_E^{-1}(V_i) \subset U & \xrightarrow{p} & \pi_F^{-1}(V_i) \subset F \\ \downarrow \varphi_i & & \downarrow \psi_i & & \downarrow \xi_i \\ V_i' & \longrightarrow & V_i' \times \mathbb{R}^l & \longrightarrow & V_i' \times \mathbb{R}^s \end{array}$$

e

$$\begin{aligned} \|\sigma\|_{\Gamma^n(E)} &= \max_i \left\| \psi_i \circ \sigma \circ \varphi_i^{-1} \right\|_{C^n(V_i', \mathbb{R}^l)} \\ \|\eta\|_{\Gamma^n(F)} &= \max_i \left\| \xi_i \circ \eta \circ \varphi_i^{-1} \right\|_{C^n(V_i', \mathbb{R}^s)} \end{aligned}$$

Partimos agora para a demonstração,

$$\begin{aligned} \|P(\sigma)\|_{\Gamma^n(F)} &= \max_i \left\| \xi_i \circ (p \circ \sigma) \circ \varphi_i^{-1} \right\|_{C^n(V_i', \mathbb{R}^s)} \\ &= \max_i \left\| (\xi_i \circ p \circ \psi_i^{-1}) \circ (\psi_i \circ \sigma \circ \varphi_i^{-1}) \right\|_{C^n(V_i', \mathbb{R}^s)} \\ &\leq \max_i (C_i + 1) \left\| \psi_i \circ \sigma \circ \varphi_i^{-1} \right\|_{C^n(V_i', \mathbb{R}^l)} \\ &\leq (C + 1) \max_i \left\| \psi_i \circ \sigma \circ \varphi_i^{-1} \right\|_{C^n(V_i', \mathbb{R}^l)} = (C + 1) \|\sigma\|_{\Gamma^n(E)} \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

onde na linha 2.5.2 fizemos uso do lema 2.5.5.

Isso mostra que P satisfaz uma estimativa tame na vizinhança de cada ponto, mas como foi observado no teorema 2.2.11 as derivadas de P também são operadores não-lineares de fibrados. Assim aplicando o argumento acima as derivadas obtém-se que estas também satisfazem uma estimativa tame na vizinhança de cada ponto, donde P é uma aplicação tame. \square

2.6 Variedades de Fréchet tame

As variedades de Fréchet tame suave são objetos de interesse no nosso estudo, pois para essa categoria podemos contar com o Teorema da Função Inversa de Nash-Moser. Iremos nesta seção

provar a existência de estrutura tame suave para o espaço das seções de uma submersão sobre uma variedade compacta, assim como foi feito para estrutura Fréchet suave. Provamos que a aplicação composição é tame suave e encerramos a seção mostrando que $\text{Diff}(M)$ é um grupo de Lie-Fréchet tame.

Definição 2.6.1. Uma *variedade de Fréchet tame* é um espaço topológico Hausdorff com um atlas de cartas tomando valores em espaços de Fréchet tame, tais que as mudanças de coordenada são aplicações tame entre espaços de Fréchet tame.

Teorema 2.6.2. Seja M uma variedade compacta e $\pi : B \rightarrow M$ uma submersão. Então

$$\Gamma(B) = \{f \in C^\infty(M, B) : \pi \circ f = Id_M\}$$

é uma variedade Fréchet tame.

Demonstração. Dada uma seção $\sigma \in \Gamma(B)$, pelo Lema 2.3.3 podemos encontrar uma vizinhança U_σ de $\sigma(M)$ e um difeomorfismo $\psi : U \rightarrow V_0$ onde V_0 é uma vizinhança da seção nula de σ^*VTB . Tomamos

$$\widetilde{U}_\sigma = \{\eta \in \Gamma(B) : \eta(M) \subset U_\sigma\},$$

deste modo temos uma aplicação $\Psi : \widetilde{U}_\sigma \rightarrow \widetilde{V}_0$ definida por $\Psi_\sigma(\eta) = \psi \circ \eta$. Na demonstração teorema 2.3.4 mostramos que $\{\widetilde{U}_\sigma, \Psi_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma(B)}$ é um atlas C^∞ para $\Gamma(B)$. Nos falta checar que as funções de transição são tame. Com efeito, suponha que $\widetilde{U}_\eta \cap \widetilde{U}_\nu \neq \emptyset$, sendo assim temos $\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1} : \Psi_\eta(\widetilde{U}_\eta \cap \widetilde{U}_\nu) \rightarrow \Psi_\nu(\widetilde{U}_\eta \cap \widetilde{U}_\nu)$ onde $\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1}(f) = \psi_\nu \circ \psi_\eta^{-1} \circ f$, se observarmos que $(\psi_\nu \circ \psi_\eta^{-1})$ é um morfismo de fibrados vetoriais. Pela Proposição 2.5.6 temos que $\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1}$ é tame, o mesmo se aplica a $(\Psi_\nu \circ \Psi_\eta^{-1})^{-1} = \Psi_\eta \circ \Psi_\nu^{-1}$ concluindo que as funções de transição são tame. \square

Corolário 2.6.3. Se M é uma variedade compacta e N uma outra variedade, então $C^\infty(M, N)$ é variedade tame.

As funções tame suaves entre variedades de Fréchet são definidas do mesmo modo que no caso suave. A partir das propriedades do atlas é possível se checar a consistência de tal definição.

Definição 2.6.4. Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} variedades de Fréchet tame suaves. Uma aplicação $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é tame suave, se para todo $p \in \mathcal{M}$ existem cartas locais $\psi : U \subset \mathcal{M} \rightarrow U_1 \subset F$ e $\phi : V \subset \mathcal{N} \rightarrow V_1 \subset E$ tais que

- $p \in U, f(p) \in V$;
- $f(U) \subset V$;
- $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U_1 \subset F \rightarrow V_1 \subset E$ é tame suave.

Lema 2.6.5. Seja $f : B^m \rightarrow B^k$ e $g : B^l \rightarrow B^m$ aplicações suaves (B^l denota a bola unitária de \mathbb{R}^l). Se $\|f\|_1 \leq K$ e $\|g\|_1 \leq K$. Então podemos encontrar constantes C_n dependendo de K tais que para $n \geq 1$

$$\|f \circ g\|_n \leq C_n(\|f\|_n + \|g\|_n + 1).$$

Demonstração. Da fórmula de Faà di Bruno sabemos que

$$D^n(f \circ g)(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{j_1+\dots+j_k=n} C_{k,j_1,\dots,j_k} D^k f(g(x)) [D^{j_1} g(x), \dots, D^{j_k} g(x)],$$

assim chegamos a estimativa

$$\|D^n(f \circ g)\|_0 \leq C \sum_{k=1}^n \sum_{j_1+\dots+j_k=n} \|f\|_k \|g\|_{j_1} \cdots \|g\|_{j_k}$$

Pela desigualdade 2.5.1 temos

$$\|f\|_k \leq C \|f\|_1^{\frac{n-k}{n-1}} \|f\|_n^{\frac{k-1}{n-1}} \|g\|_j \leq C \|g\|_1^{\frac{n-j}{n-1}} \|g\|_n^{\frac{j-1}{n-1}}$$

donde

$$\|D^n(f \circ g)\|_0 \leq C \|g\|_1^{k-1} (\|g\|_1 \|f\|_n + \|f\|_1 \|g\|_n).$$

Tomando a hipótese de que $\|f\|_1 \leq K$ e $\|g\|_1 \leq K$,

$$\|D^n(f \circ g)\|_0 \leq C(\|f\|_n + \|g\|_n)$$

com C dependendo de K e para $n \geq 1$. Quando $n = 0$, $\|f \circ g\|_0 \leq C$. Desde que

$$\|f \circ g\|_n = \max_{k \leq n} \|D^k(f \circ g)\|_0$$

o lema está demonstrado. □

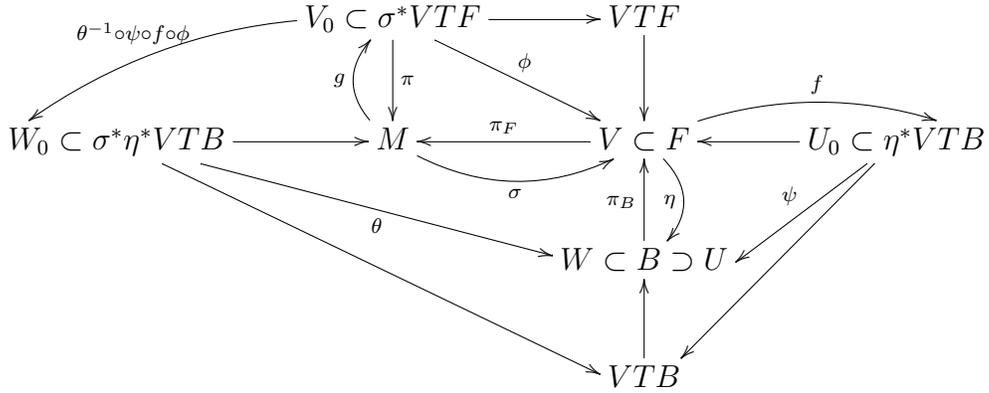
Teorema 2.6.6. Seja M uma variedade de dimensão finita compacta, F um fibrado sobre M com fibra compacta e B um fibrado sobre F , $B \rightarrow F \rightarrow M$. Então o operador $C : \Gamma(F, B) \times \Gamma(M, F) \rightarrow \Gamma(M, B)$ dado por $C(\eta, \sigma) = \eta \circ \sigma$ é smooth tame.

Demonstração. Mostremos primeiro que C é tame. Dadas duas seções $\sigma_0 \in \Gamma(M, F)$ e $\eta_0 \in \Gamma(F, B)$, como F e M são variedades compactas, pelo lema 2.3.3 existem vizinhanças U, V e W de $\eta_0(F), \sigma_0(M)$ e $\eta_0 \circ \sigma_0(M)$ mais difeomorfismos $\psi : U_0 \subset \eta_0^*VTB \rightarrow U$, $\phi : V_0 \subset \sigma_0^*VTF \rightarrow V$ e $\theta : W_0 \subset (\eta_0 \circ \sigma_0)^*VTB \rightarrow W$ que são mapas de fibrados. Em cartas locais temos

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} \times \tilde{V} & \xrightarrow{C} & \tilde{W} \\ \Psi \times \Phi \downarrow & & \downarrow \Theta \\ \tilde{U}_0 \times \tilde{V}_0 & \longrightarrow & \tilde{W}_0 \end{array}$$

com $\Psi \times \Phi(\eta, \sigma) = (\psi^{-1} \circ \eta, \phi^{-1} \circ \sigma)$ e $\Theta(\xi) = \theta^{-1} \circ \xi$, onde $\widetilde{U}_0 \times \widetilde{V}_0 \subset \Gamma(\eta^*VTB) \times \Gamma(\sigma^*VTF)$. Assim se $(f, g) \in \widetilde{U}_0 \times \widetilde{V}_0$, temos uma expressão local para o operador C

$$\widetilde{C}(f, g) = \Theta \circ C \circ (\Psi \times \Phi)^{-1}(f, g) = \theta^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi \circ g.$$



Para verificar que $\Theta \circ C \circ (\Psi \times \Phi)^{-1}$ é tame, iremos decompor $\theta^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi \circ g$ em duas partes $\theta^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi$ e g . Olhando para o diagrama acima podemos observar que

$$\theta^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi : V_0 \subset \sigma^*VTF \rightarrow \sigma^*\eta^*VTB$$

é uma mapa de fibrados, onde g é uma seção de σ^*VTF com $g(M) \subset V_0$. Por conta da notação carregada reescreveremos e apresentaremos uma prova.

Seja M uma variedade compacta e E e F fibrados vetoriais sobre M e W_0 uma vizinhança de fecho compacto da seção nula em E , denotemos por

$$B(W_0, F) := \{p \in C^\infty(W_0, F) : \pi_F \circ p = \pi_E\}.$$

Notemos que $B(W_0, F)$ é um espaço vetorial, fazendo se a soma e produto por escalar ponto a ponto nas fibras em F . Dada $\{U_i\}$ uma cobertura aberta finita de M por abertos coordenados (U_i, ξ_i) , tal que podemos encontrar trivializações locais

$$\psi_i : \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^k$$

e

$$\phi_i : \pi_F^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^l$$

assim definimos o grading

$$\|p\|_{B^n(W_0, F)} = \max_i \left\| \phi_i \circ p \circ \psi_i^{-1} \right\|_{C^\infty(U_i \times \mathbb{R}^l, U_i \times \mathbb{R}^k)},$$

tomando em $\Gamma(E)$ e $\Gamma(F)$ os gradings

$$\begin{aligned}\|\sigma\|_{\Gamma^n(E)} &= \max_i \left\| \psi_i \circ \sigma \circ \xi_i^{-1} \right\|_{C^n(U'_i, \mathbb{R}^k)} \\ \|\eta\|_{\Gamma^n(F)} &= \max_i \left\| \phi_i \circ \eta \circ \xi_i^{-1} \right\|_{C^n(U'_i, \mathbb{R}^l)}.\end{aligned}$$

Considere $\widetilde{W}_0 = \{\sigma\Gamma(E) : \sigma(M) \subset W_0\}$. Assim o operador composição

$$C : B(E, F) \times \widetilde{W}_0 \rightarrow \Gamma(F)$$

satisfaz

$$\begin{aligned}\|C(p, \sigma)\|_n &= \|p \circ \sigma\|_n \\ &= \max_i \left\| \psi_i \circ p \circ \sigma \circ \xi_i^{-1} \right\|_{C^n(U'_i, \mathbb{R}^k)} \\ &= \max_i \left\| \psi_i \circ p \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i \circ \sigma \circ \xi_i^{-1} \right\|_{C^n(U'_i, \mathbb{R}^k)} \\ &= \max_i \left\| (\psi_i \circ p \circ \phi_i^{-1}) \circ (\phi_i \circ \sigma \circ \xi_i^{-1}) \right\|_{C^n(U'_i, \mathbb{R}^k)} \\ &\leq \max_i C_{n,i} \left(1 + \left\| \psi_i \circ p \circ \phi_i^{-1} \right\|_{C^\infty(U_i \times \mathbb{R}^l, U_i \times \mathbb{R}^k)} + \left\| \phi_i \circ \sigma \circ \xi_i^{-1} \right\|_{C^n(U'_i, \mathbb{R}^l)} \right) \\ &= C_n(1 + \|p\|_n + \|\sigma\|_n).\end{aligned}$$

Como foi observado após o teorema 2.3.9 as derivadas do operador composição C são compostas e somas de operadores de composição, daí aplicando se o argumento feito para C para cada termo das derivadas se mostra que as derivadas são tame. Portanto o operador C é tame suave. \square

Corolário 2.6.7. Sejam L, M e N variedades de dimensão finita com L e M compactas. Então $C(f, g) = f \circ g$ é uma aplicação suave e tame.

Os grupos de Lie-Fréchet tame e os fibrados vetoriais de Fréchet são naturalmente uma extensão dos conceitos de grupo de Lie-Fréchet e fibrado vetorial de Fréchet para a categoria Fréchet tame, assim como foi feito para variedades Fréchet tame.

Teorema 2.6.8. Seja M uma variedade suave de dimensão finita e compacta. Então o grupo $\text{Diff}(M)$ é um grupo de Lie-Fréchet tame.

Demonstração. O grupo $\text{Diff}(M)$ é um aberto de $C^\infty(M, M)$ e portanto é uma variedade Fréchet tame. O produto, no caso a composição é tame como foi visto nos resultados acima. A prova de que a inversão é tame é análoga ao que foi feito para a composição 2.6.6 e para os operadores de fibrado 2.5.6, mostra-se a estimativa para aplicações entre bolas no espaço euclidiano e depois se transporta essas estimativas usando via cartas locais. As estimativas locais para o caso da inversão são dadas pelo lema a seguir. \square

Lema 2.6.9. Seja $f : B_1 \rightarrow B_2$ uma aplicação suave entre B_1 e B_2 bolas abertas de \mathbb{R}^n . Se f possui uma inversa $f^{-1} : B_2 \rightarrow B_1$, $\|f^{-1}\|_1 \leq C$ e $\|f\|_1 \leq C$ então

$$\|f^{-1}\|_n \leq C_n(1 + \|f\|_n)$$

para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Denotemos $g = f^{-1}$. Deste modo $f \circ g = Id$, donde $D^n(f \circ g) = 0$ se $n \geq 2$. Pela fórmula de Faà di Bruno temos

$$Df(g(x))D^n g(x) + \sum_{k=2}^n \sum_{j_1+\dots+j_k=n} C_{k,j_1,\dots,j_k} D^k f(g(x)) [D^{j_1} g(x), \dots, D^{j_k} g(x)] = 0$$

observando que $Df(g(x))^{-1} = Dg(x)$,

$$D^n g(x) = -Dg(x) \sum_{k=2}^n \sum_{j_1+\dots+j_k=n} C_{k,j_1,\dots,j_k} D^k f(g(x)) [D^{j_1} g(x), \dots, D^{j_k} g(x)],$$

chegamos a estimativa

$$\|D^n g\|_0 \leq C \sum_{k=2}^n \sum_{j_1+\dots+j_k=n} \|f\|_k \|g\|_{j_1} \cdots \|g\|_{j_k}.$$

A partir da desigualdade 2.5.1 temos

$$\begin{aligned} \|f\|_k &\leq C \|f\|_1^{\frac{n-k}{n-1}} \|f\|_n^{\frac{k-1}{n-1}}, \\ \|g\|_j &\leq C \|g\|_1^{\frac{n-j-1}{n-2}} \|g\|_n^{\frac{j-1}{n-1}} \end{aligned}$$

juntamente com $\|f\|_1 \leq C$ e $\|g\|_1 \leq C$, nos fornece

$$\|D^n g\|_0 \leq \sum_{k=2}^n \|f\|_n^{\frac{k-1}{n-1}} \|g\|_n^{\frac{n-k}{n-1}}.$$

Agora por indução o lema é verdadeiro para $n = 1$, suponhamos

$$\|g\|_{n-1} \leq C(1 + \|f\|_{n-1}).$$

Pela desigualdade 2.5.1

$$\|f\|_{n-1} \leq C \|f\|_n^{\frac{n-2}{n-1}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|D^n g\|_0 &\leq C \sum_{k=2}^n \|f\|_n^{\frac{k-1}{n-1}} (1 + \|f\|_n)^{\frac{n-k}{n-1}} \\ &\leq C \sum_{k=2}^n (1 + \|f\|_n) \\ &\leq C_n(1 + \|f\|_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f^{-1}\|_n = \|g\|_n \leq C_n(1 + \|f\|_n).$$

□

2.7 Teorema de Nash-Moser

O teorema da função inversa clássico para espaços de Banach nos diz que uma aplicação não-linear de classe C^1 é localmente invertível na vizinhança de um ponto x_0 se a sua derivada for invertível em x_0 . Tal teorema é comumente usado para resolver problemas de equações não-lineares resolvendo equações lineares que são tecnicamente mais simples. Porém muitos problemas em geometria e em equações diferenciais envolvem espaços de funções C^∞ que são espaços de Fréchet. Uma tentativa de extensão do teorema da função inversa para espaços de Fréchet é falha em vários pontos e alguns contra-exemplos podem ser encontrados no trabalho de Hamilton [9]. Essas obstruções fizeram com que toda a teoria de espaços tame fosse desenvolvida, as hipóteses tame são exatamente condições para que o esquema de Nash-Moser para o método de Newton funcione. A seguir enunciamos tal teorema, uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [9].

Teorema 2.7.1 (Teorema da Função Inversa de Nash-Moser). Sejam E e F espaços de Fréchet tame, $U \subset E$ aberto e uma aplicação tame suave

$$P : U \subset E \rightarrow F.$$

Suponha que a equação $DP(x)v = w$ possua uma única solução $v = VP(x)w$ para todo $x \in U$ e $w \in F$ e que a família de inversas

$$VP : U \times F \rightarrow E$$

é uma aplicação tame suave. Então P é localmente inversível e cada inversa local é uma aplicação tame suave.

No contexto da geometria diferencial temos a teoria da deformação de estruturas, as deformações podem ser modeladas pela ação de um grupo sobre a estrutura. Muitas estruturas geométricas têm a elas associadas o conceito de integrabilidade que pode ser formulado por equações não-lineares ou operadores não-lineares, com isso é de interesse do ponto de vista da estabilidade de tais estruturas que possamos fazer deformações dessas estruturas e que estas continuem sendo soluções da equação de integrabilidade. Exemplo disso são os trabalhos de Hamilton sobre deformação de estruturas complexas [7] e deformação de folheações [8]. Em seu estudo sobre estruturas complexas Hamilton usou o teorema da função inversa de Nash-Moser para provar uma versão do teorema da função implícita.

Teorema 2.7.2. Sejam E, F e G espaços de Fréchet e aplicações tame suaves P e Q entre os abertos U, V e W ,

$$U \subset E \xrightarrow{P} V \subset F \xrightarrow{Q} W \subset G$$

tais que $Q \circ P = 0$. Suponha que existam mapas tame suaves

$$HP : U \times F \rightarrow E, HQ : U \times G \rightarrow F$$

com $HP(x)v$ e $HQ(x)w$ linear em v e w , tais que

$$DP(x)HP(x)v + HQ(x)DQ(P(x))v = v$$

para todo $x \in U$ e $v \in F$. Então para todo $x_0 \in U$ existem uma vizinhança A de x_0 e uma vizinhança B de $P(x_0)$ tais que $P(A) = B \cap Q^{-1}(0)$, isto é, se $y \in B$ e $Q(y) = 0$ então existe $x \in A$ tal que $P(x) = y$. Mais ainda podemos encontrar uma mapa tame suave

$$S : A \rightarrow B$$

tal que $P \circ S(y) = y$ para todo $y \in B \cap Q^{-1}(0)$.

Nosso interesse no decorrer dessa seção é estender o teorema acima para aplicações entre variedades de Fréchet. Neste contexto podemos nos restringir ao caso especial em que temos \mathcal{G} um grupo de Lie-Fréchet agindo em um fibrado vetorial de Fréchet $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ e $Q : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}$ uma seção invariante pela ação do grupo.

Definição 2.7.3. Sejam \mathcal{M}, \mathcal{N} variedades tame Fréchet e \mathcal{V} um fibrado vetorial de Fréchet sobre \mathcal{M} . Um *complexo não-linear* é um diagrama da forma

$$\mathcal{N} \xrightarrow{P} \mathcal{M} \begin{array}{c} \xrightarrow{Q} \\ \xrightarrow{Z} \end{array} \mathcal{V},$$

tal que as aplicações P, Q e Z são tame suaves, Q, Z são seções do fibrado \mathcal{V} e Z a seção nula, valendo ainda $Q \circ P = Z \circ P$.

Definição 2.7.4. Sejam \mathcal{M}, \mathcal{N} e \mathcal{V} variedades tame Fréchet, considere um complexo não-linear

$$\mathcal{N} \xrightarrow{P} \mathcal{M} \begin{array}{c} \xrightarrow{Q} \\ \xrightarrow{Z} \end{array} \mathcal{V}.$$

O *complexo é localmente exato em $x \in \mathcal{M}$* , se existir uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de $y = P(x)$ tais que $Q^{-1}(0) \cap V = P(U)$. O *complexo é dito localmente exato* quando for localmente exato em todo ponto de \mathcal{M} .

Identificando \mathcal{M} com a seção nula $Z(\mathcal{M})$, $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{V}$, assim temos o isomorfismo canônico

$$T_x \mathcal{V} = T_x \mathcal{M} \oplus \mathcal{V}_x, \quad x \in \mathcal{M}.$$

Se x é um zero de Q , então a diferencial de Q assume a forma

$$\begin{aligned} DQ_x : T_x \mathcal{M} &\rightarrow T_x \mathcal{M} \oplus \mathcal{V}_x, \\ DQ_x v &= (v, VQ_x v). \end{aligned}$$

Iremos nos referir à aplicação

$$VQ_x : T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{V}_x$$

como derivada vertical de Q em x .

Teorema 2.7.5. Sejam \mathcal{N} , \mathcal{M} , \mathcal{P} variedades de Fréchet tame configurando um complexo não-linear

$$\mathcal{N} \xrightarrow{P} \mathcal{M} \begin{array}{c} \xrightarrow{Q} \\ \xrightarrow{Z} \end{array} \mathcal{V}. \quad (2.7.1)$$

Seja $T\mathcal{N}$ o fibrado tangente de \mathcal{N} , $P^*T\mathcal{M}$ o pullback para \mathcal{N} do fibrado tangente pela aplicação P , $P^*\mathcal{V}$ o pullback para \mathcal{N} pela aplicação P . Suponha que existam dois morfismos tame suaves de fibrados vetoriais

$$HP : P^*T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N} \quad \text{e} \quad HQ : P^*\mathcal{V} \rightarrow T\mathcal{M}$$

tais que

$$T\mathcal{N} \begin{array}{c} \xrightarrow{DP} \\ \xleftarrow{HP} \end{array} P^*T\mathcal{M} \begin{array}{c} \xrightarrow{VQ} \\ \xleftarrow{HQ} \end{array} P^*\mathcal{V}$$

$$DP \circ HP + HQ \circ VQ = I.$$

Então o complexo (2.7.1) é localmente exato. Além disso, para todo $x_0 \in \mathcal{N}$ existe uma vizinhança U de x e uma vizinhança V de $P(x_0)$ tais que $P(U) = V \cap Q^{-1}(0)$. Mais ainda podemos encontrar uma mapa tame suave

$$S : V \rightarrow U$$

tal que $P \circ S(y) = y$ para todo $y \in V \cap Q^{-1}(0)$.

Demonstração. Fazendo uso das cartas locais podemos reduzir o problema a um complexo não-linear entre espaços de Fréchet, daí aplicamos o Teorema 2.7.2. Sejam (U, Ψ) e (W, Φ) cartas locais de \mathcal{N} e \mathcal{M} respectivamente e $(\pi^{-1}(W), \Theta)$ uma trivialização local do fibrado \mathcal{V} , deste modo

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{P} & W & \xrightarrow{Q} & \pi^{-1}(W) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Theta \\ U_0 \subset E & \longrightarrow & W_0 \subset F & \longrightarrow & W_0 \times V \end{array}$$

temos assim uma sequência de aplicações entre abertos de espaços de Fréchet E, F e V

$$U_0 \xrightarrow{\tilde{P}} W_0 \xrightarrow{\tilde{Q}} V \quad (2.7.2)$$

com $\tilde{Q} \circ \tilde{P} = 0$. Olhando agora para as trivializações

$$\begin{array}{ccccc} T\mathcal{N} & \begin{array}{c} \xrightarrow{DP} \\ \xleftarrow{HP} \end{array} & P^*T\mathcal{M} & \begin{array}{c} \xrightarrow{VQ} \\ \xleftarrow{HQ} \end{array} & P^*\mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U_0 \times E & \longrightarrow & U_0 \times F & \longrightarrow & U_0 \times V \end{array}$$

obtemos aplicações

$$H\tilde{P} : U \times F \rightarrow E, \quad H\tilde{Q} : U \times V \rightarrow F$$

satisfazendo

$$D\tilde{P}(x)H\tilde{P}(x)v + H\tilde{Q}(x)D\tilde{Q}(\tilde{P}(x))v = v.$$

Logo pelo Teorema 2.7.2 o complexo (2.7.2) é localmente exato. Portanto o complexo (2.7.1) é localmente exato. \square

Definição 2.7.6. Dados um grupo de Lie-Fréchet \mathcal{G} e um complexo não-linear $\mathcal{N} \xrightarrow{P} \mathcal{M} \begin{matrix} \xrightarrow{Q} \\ \xrightarrow{Z} \end{matrix} \mathcal{V}$.

O complexo é dito \mathcal{G} -invariante, se o fibrado \mathcal{V} , a base \mathcal{M} e \mathcal{N} possuem ações tame de \mathcal{G} , tais que a seção Q e a aplicação P são \mathcal{G} -invariantes.

Corolário 2.7.7. Seja $\mathcal{G} \xrightarrow{P} \mathcal{M} \begin{matrix} \xrightarrow{Q} \\ \xrightarrow{Z} \end{matrix} \mathcal{V}$ um complexo não-linear \mathcal{G} -invariante, onde a ação de \mathcal{G} em \mathcal{G} é a translação a esquerda. Denotemos $x_0 = P(e)$. Suponha que existam operadores lineares tame $HP_e : T_{x_0}\mathcal{M} \rightarrow T_e\mathcal{G}$ e $HQ_e : \mathcal{V}_{x_0} \rightarrow T_{x_0}\mathcal{M}$

$$T_e\mathcal{G} \begin{matrix} \xrightarrow{DP_e} \\ \xleftarrow{HP_e} \end{matrix} T_{x_0}\mathcal{M} \begin{matrix} \xrightarrow{VQ_e} \\ \xleftarrow{HQ_e} \end{matrix} \mathcal{V}_{x_0}$$

tais que $DP_e \circ HP_e + HQ_e \circ VQ_e = Id_{T_{x_0}\mathcal{M}}$. Então o complexo é localmente exato. Em especial temos que existe uma aplicação tame $R : V \rightarrow U$ tal que $P \circ R(y) = y$, se $y \in Q^{-1}(0) \cap V$, onde U e V são vizinhanças de e e $P(e)$ respectivamente.

Demonstração. Denotemos por l_g a translação à esquerda de \mathcal{G} por g e ϕ_g a ação de \mathcal{G} em \mathcal{M} e \mathcal{V} . Desde que P e Q são \mathcal{G} -invariantes, temos que

$$DP_g = D(\phi_g)_{x_0} \circ DP_e \circ D(l_{g^{-1}})_e, \quad VQ_{gx_0} = D(\phi_g)_{x_0} \circ VQ_{x_0} \circ D(\phi_{g^{-1}}).$$

Definimos

$$\begin{aligned} HP_g &:= D(l_g)_e \circ HP_e \circ D(\phi_{g^{-1}})_{x_0} \\ HQ_g &:= D(\phi_g)_{x_0} \circ HQ_e \circ D(\phi_{g^{-1}})_{x_0}. \end{aligned}$$

$$T\mathcal{G} \begin{matrix} \xrightarrow{VP} \\ \xleftarrow{HP} \end{matrix} P^*T\mathcal{M} \begin{matrix} \xrightarrow{VQ} \\ \xleftarrow{HQ} \end{matrix} P^*\mathcal{V}$$

A construção de HP e HQ e as observações sobre a invariância de P e Q implicam que

$$DP_g \circ HP_g v + HQ_g \circ VQ_g v = v, \quad \forall g \in \mathcal{G} \quad \text{e} \quad \forall v \in T_{g \cdot x_0}\mathcal{M}.$$

Como a composição de aplicações tame suave é tame suave, segue que HP e HQ são tame. Portanto HP e HQ são mapas de fibrado tame suave nas hipóteses do teorema. Portanto o complexo é localmente exato. \square

Capítulo 3

Complexo de Deformação de uma Folheação

Neste capítulo seguiremos as ideias do pré-print de Hamilton [8] sobre deformação de folheações. Iremos construir o complexo de deformação de uma folheação e mostrar a equivalência entre a exatidão do complexo e a estabilidade. Mostraremos que o complexo linearizado coincide com um trecho do complexo de Rham da folheação. Definiremos estabilidade infinitesimal em termos do complexo de Rham da folheação, sua cohomologia e operadores de homotopia tame. Terminamos o capítulo mostrando que estabilidade infinitesimal implica estabilidade.

3.1 Complexo de Deformação e Estabilidade

O conceito de estabilidade de folheações é uma generalização do que se conhece como estabilidade estrutural para sistemas dinâmicos. Todo conceito de estabilidade envolve uma topologia e propriedades que se preservam em um vizinhança dessa topologia. Como estamos tratando de folheações de classe C^∞ é apropriado dar ao conjunto $\text{Fol}(k, M)$ a topologia do subespaço herdada de $\Gamma(\text{Gr}_k M)$. O caso de folheações C^k necessita de uma outra abordagem como pode ser visto em [6]. A propriedade que queremos avaliar é sobre quais aspectos podemos identificar via um difeomorfismo duas folheações, no que segue definimos o que trataremos por estabilidade.

Como visto na seção 1.3 o grupo de Lie-Fréchet $\text{Diff}(M)$ dos difeomorfismos de M age sobre $\Gamma(\text{Gr}_k M)$, para $\varphi \in \text{Diff}(M)$ e $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ a ação é dada por $\varphi_*\sigma = \hat{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$. Fixada σ uma k -folheação em M . Definimos o mapa

$$P_\sigma : \text{Diff}(M) \rightarrow \Gamma(\text{Gr}_k M), \quad P(\varphi) = \varphi_*\sigma. \quad (3.1.1)$$

Pela proposição 1.3.3 sabemos que $P_\sigma(\varphi)$ define uma folheação em M . O operador P parametriza a órbita de σ pela ação de $\text{Diff}(M)$ em $\Gamma(\text{Gr}_k M)$.

Definição 3.1.1. Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações em M , dizemos que \mathcal{F}_1 é *conjugada* à \mathcal{F}_2 se existir $\varphi \in \text{Diff}(M)$ tal que $\mathcal{F}_1 = \varphi(\mathcal{F}_2)$, onde $\varphi(\mathcal{F}_2)$ é a folheação de M dada pela composição do atlas de \mathcal{F}_2 com φ .

Se tivermos $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ integráveis, a folheação \mathcal{F}_{σ_1} é conjugada à \mathcal{F}_{σ_2} se, e só se $\sigma_1 = \varphi_* \sigma_2$ para algum difeomorfismo φ . Assim podemos fazer uso do mapa (3.1.1) para definir a estabilidade de uma folheação.

Definição 3.1.2. Dizemos que uma folheação $\sigma \in \text{Fol}(k, M)$ é C^∞ -estável se existir uma vizinhança aberta V de σ em $\text{Fol}(k, M)$ e uma vizinhança aberta U da identidade em $\text{Diff}(M)$ tal que toda folheação em V é conjugada a σ por um elemento de U , isto é, $V = P_\sigma(U)$.

O conjunto $\text{Fol}(k, M)$ visto apenas como um subespaço de $\Gamma(\text{Gr}_k M)$, para fins de aplicação da teoria do cálculo de Fréchet torna-se um pouco obscura. Porém, temos uma outra representação para tal conjunto como

$$Q^{-1}(0) = \text{Fol}(k, M),$$

onde

$$\begin{aligned} Q : \Gamma(\text{Gr}_k M) &\rightarrow \Gamma(I\text{Gr}_k M) \\ Q(\sigma) &= q \circ \sigma \end{aligned}$$

e a aplicação q é dada pela Proposição 1.2.9. Nosso intuito é usar essa expressão para descrever a estabilidade de uma folheação, passando pela construção do complexo de deformação de uma folheação.

Definição 3.1.3. Seja \mathcal{F}_σ uma folheação em M uma variedade suave. Com os mapas P_σ, Q descritos acima definimos como *complexo de deformação da folheação \mathcal{F}_σ* o seguinte complexo

$$\text{Diff}(M) \xrightarrow{P_\sigma} \Gamma(\text{Gr}_k M) \xrightarrow{Q} \Gamma(I\text{Gr}_k M). \quad (3.1.2)$$

A estabilidade de uma folheação pode ser tratada estudando a exatidão local do complexo de deformação na identidade. De fato, se o complexo é localmente exato entorno da identidade significa que existem vizinhanças U de Id_M e V de σ tais que $P(U) = V \cap Q^{-1}(0) = V \cap \text{Fol}(k, M)$, ou seja, σ é C^∞ -estável. A vantagem dessa descrição, como veremos na seção 3.2, é a possibilidade de aplicar o Teorema de Nash-Moser ao estudo da exatidão do complexo, baseando-se no que foi desenvolvido na seção 2.7 sobre complexos não-lineares. Para tanto devemos mostrar que o complexo de deformação de uma folheação é um complexo não-linear $\text{Diff}(M)$ -invariante. Este será o nosso objetivo no restante da seção.

Relembremos a nossa definição de $\Gamma(I\text{Gr}_k M)$. Quando apresentamos o fibrado $I\text{Gr}_k M \rightarrow \text{Gr}_k M$ comentamos sobre o abuso de notação, pois para nós ao longo do texto $\Gamma(I\text{Gr}_k M)$ denota as seções da submersão $I\text{Gr}_k M \rightarrow M$ dada pela composta das projeções $I\text{Gr}_k M \rightarrow \text{Gr}_k M \rightarrow M$. Isto é,

$$\Gamma(I\text{Gr}_k M) = \{g \in C^\infty(M, I\text{Gr}_k M) : \pi_{\text{Gr}_k M} \circ \pi_{I\text{Gr}_k M} \circ g = Id_M\}.$$

Teorema 3.1.4. $\pi : \Gamma(I\text{Gr}_k M) \rightarrow \Gamma(\text{Gr}_k M)$ é um fibrado vetorial de Fréchet.

Demonstração. Dado um aberto $U \subset N$, denotaremos por

$$\tilde{U} := \{g \in C^\infty(M, N) : g(M) \subset U\}.$$

Seja $\omega \in \Gamma(I\text{Gr}_k M)$, então

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\omega} & I\text{Gr}_k M \\ & \searrow \sigma & \downarrow \pi_{I\text{Gr}_k M} \\ & & \text{Gr}_k M \end{array}$$

Tomando $\sigma = \pi_{I\text{Gr}_k M} \circ \omega$, vemos que $\sigma \in \Omega^2(\sigma, \sigma^\perp) = \{\eta \in C^\infty(M, \Lambda^2 \sigma^* \otimes \sigma^\perp) : \pi \circ \eta = Id_M\}$. Desse modo, é claro que

$$\Gamma(I\text{Gr}_k M) = \bigcup_{\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)} \Omega^2(\sigma, \sigma^\perp).$$

Considere a variedade grassmanniana $\text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$ e $B \in \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$, existe uma vizinhança $B \in U_B \subset \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m)$ tal que se $A \in U_B$ temos $A \oplus B^\perp = \mathbb{R}^m$ e uma carta local $\phi : U_B \rightarrow \text{Hom}(B, B^\perp)$, com inversa $\phi^{-1}(T) = \{v + Tv : v \in B\}$. Passemos essa construção para $\Gamma(\text{Gr}_k M)$, usando o atlas de $\Gamma(\text{Gr}_k M)$ construído no Teorema 2.3.4, para $\sigma \in \Gamma(\text{Gr}_k M)$ existe uma carta local

$$\Phi : \widetilde{U}_\sigma \rightarrow \widetilde{W}_0 \subset \Gamma(\sigma^* VT\text{Gr}_k M),$$

onde \widetilde{W}_0 é uma vizinhança da seção nula, se necessário podemos reduzir a vizinhança \widetilde{U}_σ de modo que se preserve a transversalidade com σ^\perp , isto é, se $\eta \in \widetilde{U}_\sigma$ então $\eta \oplus \sigma^\perp = TM$. Como veremos no Lema 3.2.2 vale a identificação $\Gamma(\sigma^* VT\text{Gr}_k M) \simeq \text{Hom}(\sigma, \sigma^\perp)$. Assim, podemos considerar a carta

$$\Phi : \widetilde{U}_\sigma \rightarrow \widetilde{W}_0 \subset \text{Hom}(\sigma, \sigma^\perp),$$

onde $\Phi^{-1}(f) = \{X + f(X) : X \in \mathfrak{X}(\sigma)\}$. Denotemos $f_\eta := \Phi(\eta)$ e definamos

$$\rho : \widetilde{U}_\sigma \rightarrow \text{GL}(TM)$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \rho(\eta) : TM = \sigma \oplus \sigma^\perp &\rightarrow TM = \eta \oplus \sigma^\perp \\ \rho(\eta)(X + Y) &= X + f_\eta X + Y. \end{aligned}$$

Com isto, obtemos uma trivialização local

$$\begin{aligned} \Psi : \widetilde{U}_\sigma \times \Omega^2(\sigma, \sigma^\perp) &\rightarrow \pi^{-1}(\widetilde{U}_\sigma), \\ \Psi(\eta, \omega)(X, Y) &= \rho(\eta)\omega(\rho(\eta)^{-1}X, \rho^{-1}(\eta)Y). \end{aligned}$$

□

Relembremos que $\text{Diff}(M)$ age sobre si mesmo por translação à esquerda. Denotaremos essa ação por $\varphi_* \psi$. Como o descrito em (1.3.1) e (1.3.2), $\text{Diff}(M)$ age em $\Gamma(\text{Gr}_k M)$ e em $\Gamma(I\text{Gr}_k M)$, denotamos ambas as ações por $*$.

Teorema 3.1.5. O complexo de deformação é um complexo não-linear $\text{Diff}(M)$ -invariante.

Demonstração. Sobre o complexo de deformação temos as seguintes ações:

$$\begin{aligned}
* : \text{Diff}(M) \times \text{Diff}(M) &\rightarrow \text{Diff}(M) \\
\varphi_*\psi &= \varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1}, \\
* : \text{Diff}(M) \times \Gamma(\text{Gr}_k M) &\rightarrow \Gamma(\text{Gr}_k M) \\
\varphi_*\sigma &= \widehat{\varphi} \circ \sigma \circ \varphi^{-1}, \\
* : \text{Diff}(M) \times \Gamma(I\text{Gr}_k M) &\rightarrow \Gamma(I\text{Gr}_k M) \\
\varphi_*\omega &= \widehat{\widehat{\varphi}} \circ \omega \circ \varphi^{-1}.
\end{aligned}$$

As aplicações $\widehat{\varphi}$ e $\widehat{\widehat{\varphi}}$ são levantamentos de φ aos fibrados $\text{Gr}_k M$ e $I\text{Gr}_k M$ respectivamente, a construção destas aplicações pode ser encontrada na Proposição 1.3.1.

A primeira ação é uma ação tame suave, pois $\text{Diff}(M)$ é um grupo de Lie-Fréchet tame. Observemos que

$$\begin{aligned}
P(\varphi_*\psi) &= (\varphi_*\psi)_*\sigma \\
&= \widehat{\varphi \circ \psi \circ \sigma \circ (\varphi \circ \psi)^{-1}} \\
&= \widehat{\varphi} \circ [\widehat{\psi} \circ \sigma \circ \psi^{-1}] \circ \varphi^{-1} \\
&= \widehat{\varphi} \circ P(\psi) \circ \varphi^{-1} \\
&= \varphi_*P(\psi),
\end{aligned}$$

donde P é $\text{Diff}(M)$ -invariante. Pelo Teorema 2.6.6 o operador composição $C : \Gamma(\text{Gr}_k M, I\text{Gr}_k M) \times \Gamma(\text{Gr}_k M) \rightarrow \Gamma(I\text{Gr}_k M)$ é tame suave. Em particular $Q(\sigma) = C(q, \sigma)$ é tame suave.

As outras duas ações se descrevem como

$$\varphi_*\sigma = C(\widehat{\varphi}, C(\sigma, \varphi^{-1}))$$

e

$$\varphi_*\omega = C(\widehat{\widehat{\varphi}}, C(\omega, \varphi^{-1}))$$

e como o operador composição é tame suave as ações são aplicações tame suave. O fato que Q é $\text{Diff}(M)$ -invariante foi mostrado na proposição 1.3.2. □

Lema 3.1.6. Os operadores $\widehat{\varphi} : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(\text{Gr}_k M)$ e $\widehat{\widehat{\varphi}} : \text{Diff}(M) \rightarrow \text{Diff}(I\text{Gr}_k M)$ são homomorfismos tame entre os grupos de Lie-Fréchet .

Demonstração. Sejam (U_0, ξ) e (U_1, ψ) cartas locais de M , fazendo $f = \psi \circ \varphi \circ \xi^{-1}$ recordemos as expressões locais dos operadores

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi} : U \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m) &\longrightarrow f(U) \times \text{Gr}_k(\mathbb{R}^m) \\
(x, B) &\longmapsto (f(x), df(x)B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{\varphi}} : U \times W \times \Lambda^2(\mathbb{R}^{k^*}, \mathbb{R}^{m-k}) &\longrightarrow f(U) \times \widehat{f}(W) \times \Lambda^2(\mathbb{R}^{k^*}, \mathbb{R}^{m-k}) \\
(x, B, \sum c_{ijs} e^i \wedge e^j \otimes e_s) &\longmapsto (f(x), df(x)B, \sum c_{ijs} \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial x_\beta} \frac{\partial f_\eta}{\partial x_s} e^\alpha \wedge e^\beta \otimes e^\eta)
\end{aligned}$$

Seja U um aberto de \mathbb{R}^m com fecho compacto. Daremos uma ideia calculando as estimativas para o caso local, ou seja, $\text{Diff}(U, U) \subset C^\infty(U, U)$ lembrando que $C^\infty(U, U)$ denota o conjunto das funções suaves de U que se estendem ao fecho, o mesmo para

$$\text{Diff}(U \times V \times W) \subset C^\infty(U \times V \times W, U \times V \times W)$$

onde $V \subset M(\mathbb{R}_{m \times k})$ e $W \subset \Lambda^2(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^{m-k})$ são abertos de fecho compacto. Munindo $C^\infty(U, U)$ com o grading

$$\|f\|_{C^n(U, U)} = \max_{j \leq n} \sup_{x \in U} \|D^j f(x)\|$$

e em $C^\infty(U)$

$$\|h\|_{C^n(U)} = \max_{j \leq n} \sup_{x \in U} \|D^j h(x)\|,$$

observamos que

$$\partial_{ij} : C^\infty(U, U) \rightarrow C^\infty(U)$$

$$\partial_{ij}(f) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

é linear e satisfaz

$$\|\partial_{ij}(f)\|_{C^n(U)} \leq \|f\|_{C^{n+1}(U, U)}.$$

Logo ∂_{ij} é tame suave. Por outro lado,

$$\begin{aligned} C^\infty(U, U) &\longrightarrow C^\infty(U \times V \times W, U \times V \times W) \\ f &\mapsto \widehat{f} \\ \widehat{f}(x, B, \sum c_s^{ij} e^i \wedge e^j \otimes e_s) &= (f(x), df(x)B, \sum c_s^{ij} \frac{\partial f_i^{-1}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial f_j^{-1}}{\partial x_\beta} \frac{\partial f_\eta}{\partial x_s} e^\alpha \wedge e^\beta \otimes e^\eta) \end{aligned}$$

Como \widehat{f} é linear nas duas últimas entradas, suas derivadas de ordem $n \geq 2$ dependem apenas de derivadas de f e de sua inversa. Como observamos antes as derivadas variam de maneira tame suave com a função. Logo o operador \widehat{f} é tame suave. □

3.2 Aplicando o Teorema de Nash-Moser ao Complexo de Deformação

Nesta seção aplicaremos o resultado de exatidão local de complexos não-lineares apresentado anteriormente em 2.7, para obter condições que impliquem a estabilidade C^∞ de uma folheação. Para simplificar a exposição do resultado, condensamos as hipóteses na definição de uma folheação infinitesimalmente estável. Assim teremos a primeira parte do trabalho de Hamilton [8], que mostra que as folheações infinitesimalmente estáveis formam uma família de folheações C^∞ -estáveis.

Definição 3.2.1. Dizemos que uma folheação σ é *infinitesimalmente estável*, se existem mapas $h_{\mathcal{F}_\sigma}$ e $k_{\mathcal{F}_\sigma}$ tame lineares

$$\Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_\sigma}} \\ \xleftarrow{h_{\mathcal{F}_\sigma}^1} \end{array} \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_\sigma}} \\ \xleftarrow{h_{\mathcal{F}_\sigma}^2} \end{array} \Omega^2(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}),$$

tais que

$$d_{\mathcal{F}_\sigma} h_{\mathcal{F}_\sigma}^1 + h_{\mathcal{F}_\sigma}^2 d_{\mathcal{F}_\sigma} = I.$$

Considere $\omega \in \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})$ com $d_{\mathcal{F}_\sigma} \omega = 0$. Se σ for infinitesimalmente estável temos $d_{\mathcal{F}_\sigma}(h_{\mathcal{F}_\sigma} \omega) = \omega$, ou seja $\text{Ker} d_{\mathcal{F}_\sigma}^2 = \text{Im} d_{\mathcal{F}_\sigma}^1$, donde $H^1(\mathcal{F}_\sigma) = 0$. Assim estabilidade infinitesimal tem relação com a forma com que o primeiro grupo de cohomologia da folheação se anula.

Lema 3.2.2. Valem as seguintes identificações entre espaço de Fréchet: $T_{Id_M} \text{Diff}(M) \simeq \mathfrak{X}(M)$, $T_\sigma \Gamma(\text{Gr}_k M) \simeq \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})$ e $VT_{Q(\sigma)} \Gamma(I\text{Gr}_k M) \simeq \Omega^2(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})$.

Demonstração. Para realizar tais identificações relembremos a identificação (2.3.1) que nos descreve o espaço tangente $T_\sigma \Gamma(B)$ como $\Gamma(\sigma^* VT B)$.

Como $\text{Diff}(M) \subset C^\infty(M, M)$ é um aberto, dado $\varphi \in \text{Diff}(M)$ se tem $T_\varphi \text{Diff}(M) = T_\varphi C^\infty(M, M)$. Por sua vez $C^\infty(M, M) = \Gamma(M \times M)$ espaço das seções do fibrado trivial $M \times M$, observando que $VT(M \times M) = TM$, temos que

$$T_{Id_M} \text{Diff}(M) = \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M).$$

A outra identificação é feita de maneira functorial passando para os fibrados propriedades das fibras. Seja V um espaço vetorial, tome $B \in \text{Gr}_k V$ então $T_B \text{Gr}_k V \simeq \text{Hom}(B, V/B)$.

Para cada $x \in M$, $\sigma(x)$ é um k -plano em $T_x M$, assim

$$\sigma^* VT \text{Gr}_k M_x = T_{\sigma(x)} \text{Gr}_k T_x M \simeq \text{Hom}(T_x \mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma x}).$$

Donde $\sigma^* VT \text{Gr}_k M \simeq \text{Hom}(T \mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})$, segue que

$$T_\sigma \Gamma(\text{Gr}_k M) \simeq \Gamma(\sigma^* VT \text{Gr}_k M) \simeq \text{Hom}(T \mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \simeq \Gamma(\Lambda^1(T^* \mathcal{F}_\sigma) \otimes \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) = \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}).$$

Para um fibrado vetorial o espaço tangente vertical em um ponto da seção nula é naturalmente identificado com a fibra do fibrado. Assim,

$$VT_{Q(\sigma)} \Gamma(I\text{Gr}_k M) \simeq \Gamma(I\text{Gr}_k M)_\sigma = \Omega^2(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}).$$

□

A seguir apresentaremos uma linearização na qual tomamos $DQ_\sigma - DZ_\sigma$ a componente vertical da diferencial DQ_σ , outra notação importante é a aplicação $\text{mod} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(\nu_{\mathcal{F}_\sigma})$ dada por $\text{mod}(X) = \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}} \circ X$.

Lema 3.2.3. Para o complexo de deformação de uma folheação \mathcal{F}_σ vale a seguinte linearização em Id_M :

$$\begin{array}{ccccc}
T_{Id_M} \text{Diff}(M) & \xrightarrow{DP_{Id_M}} & T_\sigma \Gamma(\text{Gr}_k M) & \xrightarrow{DQ_\sigma - DZ_\sigma} & \Gamma(I\text{Gr}_k M)_\sigma \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\mathfrak{X}(M) & \xrightarrow{\text{mod } \mathcal{F}_\sigma} & \Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_\sigma}} & \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) & \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_\sigma}} & \Omega^2(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})
\end{array}$$

Demonstração. Para calcular a linearização do complexo usaremos a representação do problema em termos de projetores conforme as equivalências trabalhadas na seção 1.4.

Consideremos M mergulhada isometricamente em \mathbb{R}^N , para algum N suficientemente grande, tomar este mergulho isométrico é o que permite poder fazer contas com os projetores. Tomando os campos canônicos em \mathbb{R}^N , projetando-os perpendicularmente sobre TM e depois sobre σ , obtemos X_1, \dots, X_N campos de vetores em σ . Como as projeções são aplicações sobrejetoras $\sigma = \text{span}\{X_1, \dots, X_N\}$. Assim o projetor π_σ associado a folheação σ pode ser escrito como

$$\pi_\sigma(Z) = \sum_{j=1}^N \langle X_j, Z \rangle X_j.$$

Passemos agora às contas da linearização. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, o fluxo φ_t^X de X define uma curva suave $\alpha : (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow \text{Diff}(M)$ com $\alpha(t) = \varphi_t^X$, $\alpha(0) = Id_M$ e $\alpha'(0) = X$. Sabemos que $DP_{Id_M}(X) \in \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})$. Tomando $Y \in \sigma$, segue que:

$$\begin{aligned}
DP_\epsilon(X)Y &= \pi_{\mathcal{F}_\sigma} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 (P \circ \alpha(t))Y \right) \\
&= \pi_{\mathcal{F}_\sigma} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \sum_{j=1}^N \langle X_j, \alpha(t)_*^{-1} Y \rangle \alpha(t)_* X_j \right) \\
&= \pi_{\mathcal{F}_\sigma} \left(\sum_{j=1}^N \left\langle X_j, \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_{-t}^X)_* Y \right\rangle X_j + \langle X_j, Y \rangle \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\varphi_t^X)_* X_j \right) \\
&= \pi_{\mathcal{F}_\sigma} \left(\sum_{j=1}^N \langle X_j, L_X Y \rangle X_j + \langle X_j, Y \rangle L_{-X} X_j \right) \\
&= \pi_{\mathcal{F}_\sigma} \left(\sum_{j=1}^N \langle X_j, [X, Y] \rangle X_j - \langle X_j, Y \rangle [X, X_j] \right) \\
&= \pi_{\mathcal{F}_\sigma} \left(\sum_{j=1}^N \langle X_j, [X, Y] \rangle X_j + X(\langle X_j, Y \rangle) X_j - [X, \langle X_j, Y \rangle X_j] \right) \\
&= \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}} \left(-[X, Y] + \sum_{j=1}^N (\langle X_j, [X, Y] \rangle + X \langle X_j, Y \rangle) X_j \right) \\
&= \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}}([Y, X]) = \nabla_Y^{\mathcal{F}_\sigma} \bar{X} = d_{\mathcal{F}_\sigma} \bar{X}(Y)
\end{aligned}$$

onde $\nabla^{\mathcal{F}_\sigma}$ é a conexão de Bott de \mathcal{F}_σ .

Tomemos $\eta \in \text{Hom}(T\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) = T_\sigma\Gamma(\text{Gr}_k M)$, definamos $X_i(t) = X_i + t\eta(X_i)$. Existe $\epsilon > 0$ de modo que $\sigma(t) = \text{span}\{X_1(t), \dots, X_N(t)\} \in \Gamma(\text{Gr}_k M) \quad \forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Para realizarmos os cálculos olhemos para a curva de projetores

$$\begin{aligned} \pi(t) : TM &\rightarrow TM, & \pi(t)Z &= \sum_{j=1}^N \langle X_j(t), \cdot \rangle X_j(t) \\ \pi(0) &= \pi_{\mathcal{F}_\sigma}. \end{aligned}$$

Mostremos que a curva $\pi(t)$ é tangente à η ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \pi(t)Z &= \sum_{j=1}^N \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle X_j(t), Z \rangle X_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^N \langle \eta(X_j), Z \rangle X_j + \langle X_j, Z \rangle \eta(X_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \langle X_j, Z \rangle \eta(X_j) = \eta(Z) \\ \pi'(0) &= \eta. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular $\left. \frac{d}{dt} \right|_0 Q \circ \pi(t)$,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 [X_i(t), X_j(t)] &= [\eta(X_i), X_j] + [X_i, \eta(X_j)] \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \pi(t)[X_i(t), X_j(t)] &= \sum_{k=1}^N \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle X_k(t), [X_i(t), X_j(t)] \rangle X_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^N (\langle \eta(X_k), [X_i, X_j] \rangle + \langle X_k, [\eta(X_i), X_j] + [X_i, \eta(X_j)] \rangle) X_k + \langle X_k, [X_i, X_j] \rangle \eta(X_k) \\ &= \eta([X_i, X_j]) + \sum_{k=1}^N \langle X_k, [\eta(X_i), X_j] + [X_i, \eta(X_j)] \rangle X_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \right|_0 Q \circ \pi(t)(X_i(t), X_j(t)) &= \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 ([X_i(t), X_j(t)] - \pi(t)[X_i(t), X_j(t)]) \right) \\
= \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}}([\eta(X_i), X_j] + [X_i, \eta(X_j)] - \eta([X_i, X_j])) &- \sum_{k=1}^N \langle X_k, [\eta(X_i), X_j] + [X_i, \eta(X_j)] \rangle X_k \\
&= \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}}([\eta(X_i), X_j]) + \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}}([X_i, \eta(X_j)]) - \eta([X_i, X_j]) \\
&= -\nabla_{X_j} \eta(X_i) + \nabla_{X_i} \eta(X_j) - \eta([X_i, X_j]) \\
&= d_{\mathcal{F}_\sigma} \eta(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

□

Com o emprego da modelagem desenvolvida no capítulo 1 e na primeira seção desse capítulo, podemos aplicar toda a teoria dos espaços de Fréchet tame do capítulo 2 incluindo o teorema para a exatidão de complexos não-lineares oriundo do teorema de Nash-Moser. Obtemos o principal teorema deste trabalho:

Teorema 3.2.4 (Hamilton,1978). Se M é uma variedade suave compacta e \mathcal{F}_σ uma folhação em M infinitesimalmente estável, então \mathcal{F}_σ é C^∞ -estável.

Demonstração. Munindo M de uma métrica riemanniana, podemos identificar $\nu_{\mathcal{F}_\sigma}$ com $(T\mathcal{F}_\sigma)^\perp$ por meio de um isomorfismo de fibrados $\rho : \nu_{\mathcal{F}_\sigma} \rightarrow (T\mathcal{F}_\sigma)^\perp \subset TM$. Deste modo, existe uma aplicação

$$\text{perp} : \Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) = \Gamma(\nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

dada por $\text{perp}(\eta) = \rho \circ \eta$. Denotando por $\text{mod}(X) := \pi_{\nu_{\mathcal{F}_\sigma}} \circ X$, temos

$$\text{mod} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Gamma(\nu_{\mathcal{F}_\sigma}) = \Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}),$$

com $\text{mod} \circ \text{perp} = Id_{\Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})}$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}(M) &\xrightleftharpoons[\text{perp}]{\text{mod}} \Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \xrightleftharpoons[h^1_{\mathcal{F}_\sigma}]{d_{\mathcal{F}_\sigma}} \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \xrightleftharpoons[h^2_{\mathcal{F}_\sigma}]{d_{\mathcal{F}_\sigma}} \Omega^2(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \\
&\quad (d_{\mathcal{F}_\sigma} \circ \text{mod})(\text{perp} \circ h^1_{\mathcal{F}_\sigma}) + h^2_{\mathcal{F}_\sigma} d_{\mathcal{F}_\sigma} = I.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2.3 podemos levantar os operadores aos espaços tangentes,

$$\begin{array}{ccccc}
T_e \text{Diff}(M) & \xrightleftharpoons[HP_e]{DP_e} & T_\sigma \Gamma(\text{Gr}_k M) & \xrightleftharpoons[HQ_e]{VQ} & \Gamma(\text{IGr}_k M)_\sigma \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\mathfrak{X}(M) & \xrightleftharpoons[\text{perp}]{\text{mod}} & \Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) & \xrightleftharpoons[h^2_{\mathcal{F}_\sigma}]{d_{\mathcal{F}_\sigma}} & \Omega^2(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \\
& & \xrightleftharpoons[h^1_{\mathcal{F}_\sigma}]{d_{\mathcal{F}_\sigma}} & & \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})
\end{array}$$

onde HP_e e HQ_e são operadores lineares tame satisfazendo $DP_eHP_e + HQ_eVQ_e = Id$.

O complexo de deformação é $\text{Diff}(M)$ -invariante e os operadores HP_e e VQ_e satisfazem as hipóteses do Corolário 2.7.7. Logo, o complexo de deformação é localmente exato em uma vizinhança da identidade. Mas fora observado no começo deste capítulo, logo após a definição de complexo de deformação que a estabilidade C^∞ de uma folheação é equivalente ao fato de o seu complexo de deformação ser localmente exato. Portanto \mathcal{F}_σ é C^∞ -estável. \square

Faremos a seguir alguns comentários sobre as consequências do teorema acima, pois este fornece uma direção para o estudo da estabilidade de uma folheação. Seguindo nessa direção Hamilton em [8] mostra que a existência de métricas invariantes por holonomia juntamente com certas estimativas tame implicam na estabilidade infinitesimal da folheação.

Definição 3.2.5. Uma folheação \mathcal{F} em uma variedade M é *Hausdorff* se, o espaço quociente M/\mathcal{F} é Hausdorff.

Supondo que a folheação \mathcal{F} é Hausdorff, que as folhas de \mathcal{F} sejam compactas e que para uma folha genérica L tenhamos $H^1(L) = 0$, então \mathcal{F} é infinitesimalmente estável. Este é exatamente o conteúdo do Teorema 4.3.4, no próximo capítulo daremos uma ideia da prova deste teorema. Usando este resultado podemos construir um exemplo da folheação infinitesimalmente estável.

Exemplo 3.2.6. Considere um grupo de Lie G compacto e um subgrupo K fechado com $H^1(K) = 0$, como G/K é uma variedade Hausdorff a folheação de G pelas classes laterais de K é Hausdorff. Logo, pelo que foi comentado acima as classes laterais de K em G formam uma folheação infinitesimalmente estável.

Exemplo 3.2.7. A fibração de Hopf $S^3 \hookrightarrow S^7 \rightarrow S^4$, fornece uma folheação Hausdorff em S^7 com folhas S^3 . Daí como $H^1(S^3) = 0$, temos que esta folheação é infinitesimalmente estável.

Capítulo 4

Grupoides e Algebroides de Lie

Dedicamos este capítulo a uma pequena exposição de alguns elementos da teoria de grupoides e algebroides de Lie, tomando como referência as notas de Crainic e Fernandes [4] e o livro de Moerdijk e Mrcun [18]. Na sequência apresentamos alguns resultados preliminares presentes na tese de Marcu [16] e que são usados por ele para fazer uma releitura do trabalho de Hamilton. Por questões técnicas iremos apenas nos referenciar a esses objetos omitindo sua prova. O objetivo principal deste capítulo é fornecer ao leitor uma ideia sobre a prova da versão global do teorema de Reeb-Thurston. Mostrando que se uma folheação \mathcal{F} é Hausdorff e possui uma folha genérica tal que $H^1(L) = 0$ então \mathcal{F} é infinitesimalmente estável.

4.1 Grupoides

Definição 4.1.1. Um *grupoide* é um par de conjuntos \mathcal{G} e M , mais aplicações:

- $s, t : \mathcal{G} \rightarrow M$ chamadas de source e target,
- $u : M \rightarrow \mathcal{G}$ chamada de aplicação unidade e denotada por $u(x) = 1_x$,
- $i : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, denotada por $i(g) = g^{-1}$ e chamada de inversão
- $m : \mathcal{G} \times_M \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, denotada por $m(g, h) = gh$ é chamada de multiplicação, onde $\mathcal{G} \times_M \mathcal{G} := \{(g, h) : s(g) = t(h)\}$.

Satisfazendo os seguintes axiomas

- $s(1_x) = t(1_x) = x$,
- $t(g^{-1}) = s(g), s(g^{-1}) = t(g)$,
- $1_{t(g)}g = g1_{s(g)} = g$
- $gg^{-1} = 1_{t(g)}, g^{-1}g = 1_{s(g)}$,
- $s(gh) = s(h), t(gh) = g$, sempre que $s(g) = t(h)$,

- $g(hk) = (gh)k$, sempre que $s(g) = t(h)$ e $s(h) = t(k)$,

para todo $x \in M$ e $g, h, k \in \mathcal{G}$. Denominamos \mathcal{G} o conjunto de setas e M o conjunto dos objetos e usualmente denotamos um grupoide por $\mathcal{G} \rightrightarrows M$.

Algumas terminologias e propriedades de grupoides:

- $\mathcal{G}(x, y) := s^{-1}(x) \cap t^{-1}(y)$ o conjunto das setas partindo de x para y .
- $\mathcal{G}(x, x) := \mathcal{G}_x$ chamado de grupo de isotropia em x é um grupo.
- $\mathcal{G}x := t(s^{-1}(x))$ chamado de órbita passando por x .
- $\mathcal{G}(x, -) := s^{-1}(x)$ e $\mathcal{G}(-, x) := t^{-1}(x)$ são chamadas de s -fibra e t -fibra respectivamente.

Dado $g \in \mathcal{G}$, com $s(g) = x$ e $t(g) = y$, podemos definir uma bijeção $R_g : \mathcal{G}(y, -) \rightarrow \mathcal{G}(x, -)$ dada por $h \rightarrow hg$, visto que $s(h) = t(g)$. Onde R_g é uma tentativa de se reproduzir a translação a direita.

Definição 4.1.2. Um subconjunto $X \subset M$ é dito invariante, se este é união de órbitas, isto é, $X = \bigcup \mathcal{G}x$.

Neste trabalho estaremos interessados em uma categoria de grupoides onde possamos falar de diferenciabilidade. Tal classe é a dos grupoides de Lie.

Definição 4.1.3. Um *grupoide de Lie* é um grupoide cujo conjunto de setas \mathcal{G} e o conjunto dos objetos M são variedades suave, e as aplicações de estrutura s, t, u, i e m são aplicações suaves e s, t submersões sobrejetivas.

Existem exemplos naturais de grupoides para os quais o espaço de setas não é uma variedade Hausdorff. Porém a menos que se faça menção do contrário, assumiremos que M é uma variedade suave Hausdorff e que \mathcal{G} é uma variedade suave, mas não necessariamente Hausdorff. Assumiremos também que as s -fibras e as t -fibras são Hausdorff.

Exemplo 4.1.4. Seja \mathcal{F} uma folheação em M . Existe um grupoide de Lie que guarda as informações sobre a holonomia de \mathcal{F} , denotaremos tal grupoide por $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$. O grupoide de holonomia $\text{Hol}(M, \mathcal{F}) \rightrightarrows M$ tem como objetos os pontos de M e as setas como definiremos a seguir:

- se x, y encontram-se numa mesma folha L de \mathcal{F} , então as setas em $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$ partindo de x para y são as classes de holonomia de x para y .
- se x, y não estão na mesma folha, então não existe seta entre eles.

Uma prova de que esse grupoide é um grupoide de Lie pode ser encontrada no livro de Moerdijk e Mrcun [18].

Listaremos aqui algumas propriedades de grupoides de Lie das quais omitiremos as demonstrações, mas que decorrem da diferenciabilidade das aplicações e do fato de s e t serem submersões.

- \mathcal{G}_x é um grupo de Lie, para cada $x \in M$.
- $\mathcal{G}x$ é uma variedade imersa de M .
- $t : \mathcal{G}(x, -) \rightarrow \mathcal{G}x$ é um \mathcal{G}_x -fibrado principal.

Definição 4.1.5. Um grupoide de Lie \mathcal{G} é dito *próprio* se é Hausdorff e a aplicação

$$(s, t) : \mathcal{G} \rightarrow M \times M$$

$$g \mapsto (s(g), t(g))$$

é própria.

Definição 4.1.6. Dizemos que \mathcal{G} é *transitivo* se a aplicação

$$(s, t) : \mathcal{G} \rightarrow M \times M$$

é uma submersão sobrejetora.

Se um grupoide for transitivo teremos uma única órbita $\mathcal{G}x$. Pois dado $y \in M$ podemos encontrar $g \in \mathcal{G}$ tal que $s(g) = x$ e $t(g) = y$, daí $y \in t(s^{-1}(x)) = \mathcal{G}x$ e conseqüentemente $\mathcal{G}x = M$.

Definição 4.1.7. Uma representação de um grupoide de Lie $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ é um fibrado vetorial $p : V \rightarrow M$ com uma ação linear de \mathcal{G} em V , isto é, um aplicação

$$\mu : \mathcal{G} \times_M V \rightarrow V, \quad \mu(g, v) := g \cdot v \in V_{t(g)},$$

para g, v tais que $s(g) = p(v)$, linear em v e satisfaz os axiomas

$$1_{p(v)} \cdot v = v, \quad (gh) \cdot v = g \cdot (h \cdot v).$$

4.2 Algebroides

Motivados pela teoria de álgebras de Lie como a versão infinitesimal de um grupo de Lie, da generalização dessa ideia de objeto infinitesimal surgem os algebroides de Lie. No caso clássico a álgebra de Lie de um grupo G , se trata de uma identificação entre os campos invariantes à direita e o espaço tangente na identidade $T_e G$. Isto produz naturalmente uma estrutura de álgebra de Lie em $T_e G$. Como em grupoides temos um elemento identidade para cada objeto, deste modo nossa noção de algebroides deve ser de algum modo um fibrado vetorial sobre o espaço dos objetos.

Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie. Denotemos

$$T^s \mathcal{G} := \ker(ds) \subset T\mathcal{G}$$

e os campos invariantes à direita por

$$\mathfrak{X}^R(\mathcal{G}) := \{X \in \Gamma(T^s \mathcal{G}) : X_{hg} = DR_g(h)X_h, \quad \forall (h, g) \in \mathcal{G} \times_M \mathcal{G}\}$$

Considere $A := u^*T^s\mathcal{G}$ fibrado vetorial sobre M , onde u é aplicação unidade.

$$\begin{array}{ccc} u^*T^s\mathcal{G} & \xrightarrow{\tilde{u}} & T^s\mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{u} & \mathcal{G}. \end{array}$$

Daremos a seguir uma ideia da relação de $\Gamma(A)$ com $\mathfrak{X}^R(\mathcal{G})$. Começando com uma seção $\alpha \in \Gamma(A)$, o campo $\tilde{\alpha}_g = DR_g(t(g))\alpha_{t(g)}$ é um campo invariante a direita. Tomando por outro lado $X \in \mathfrak{X}^R(\mathcal{G})$, definimos $\alpha = X \circ u$ que claramente é uma seção de A . Como visto, $\tilde{\alpha}$ define um campo invariante à esquerda, resta observar que

$$\tilde{\alpha}_g = DR_g(t(g))\alpha_{t(g)} = DR_g(t(g))X_{1_{t(g)}} = X_{1_{t(g)}g} = X_g.$$

Com isso obtemos um isomorfismo $\Gamma(A) \rightarrow \mathfrak{X}^R(\mathcal{G})$, com $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$. O conjunto dos campos $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$ tem naturalmente uma estrutura de álgebra de Lie, observando que $\mathfrak{X}^R(\mathcal{G})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$, usamos o isomorfismo acima explorado para introduzir uma estrutura de álgebra de Lie em $\Gamma(A)$, denotando o colchete em $\Gamma(A)$ por $[\cdot, \cdot]_A$. Assim fica sendo válida a seguinte identidade

$$[\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}]_A = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}].$$

Considere $\rho : A \rightarrow TM$ o morfismo de fibrados, definido como $\rho := dt \circ \tilde{u}$. Com todos esses elementos temos a primeira proposição que mostra que ρ nos ajuda a corrigir o colchete em $\Gamma(A)$, de modo que seja válida a regra de Leibniz.

Proposição 4.2.1. Para qualquer $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$ e $f \in C^\infty(M)$

$$[\alpha, f\beta] = f[\alpha, \beta] + (\mathcal{L}_{\rho(\alpha)}f)\beta.$$

Demonstração. Notemos que $\widetilde{f\beta} = (f \circ t)\tilde{\beta}$. Logo,

$$\begin{aligned} [\widetilde{\alpha}, \widetilde{f\beta}] &= [\tilde{\alpha}, \widetilde{f\beta}] \\ &= [\tilde{\alpha}, (f \circ t)\tilde{\beta}] \\ &= (f \circ t)[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] + (\mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}(f \circ t))\tilde{\beta}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $g \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}(f \circ t)(g) &= d(f \circ t)(g)\tilde{\alpha}(g) \\ &= df(t(g))dt(g)\tilde{\alpha}(g). \end{aligned}$$

Se $g = 1_x = u(x)$ com $x \in M$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}(f \circ t)(1_x) &= d(f \circ t)(1_x)dt(1_x)\tilde{\alpha}(1_x) \\ &= d(f \circ t)(1_x)\rho(\alpha)(x) \\ &= \mathcal{L}_{\rho(\alpha)}(f \circ t)(1_x), \end{aligned}$$

donde

$$\widetilde{\mathcal{L}_{\rho(\alpha)}(f)}\beta = \widetilde{\mathcal{L}_{\tilde{\alpha}}(f \circ t)}\tilde{\beta}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \widetilde{[\alpha, f\beta]} &= \widetilde{f[\alpha, \beta]} + \widetilde{\mathcal{L}_{\rho(\alpha)}(f)}\beta \\ &= \widetilde{f[\alpha, \beta]} + \widetilde{\mathcal{L}_{\rho(\alpha)}(f)}\beta \end{aligned}$$

e concluimos $[\alpha, f\beta] = f[\alpha, \beta] + \mathcal{L}_{\rho(\alpha)}(f)\beta$. □

Definição 4.2.2. Um *algebroides de Lie* é um fibrado vetorial $\pi : A \rightarrow M$ com um colchete de Lie $[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ e um morfismo de fibrados $\rho : A \rightarrow TM$ tais, que vale a regra de Leibniz

$$[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y, \quad X, Y \in \Gamma(A), f \in C^\infty(M).$$

Assim, pela Proposição 4.2.1 $A = u^*T^s\mathcal{G}$ é um algebroides de Lie, chamado o algebroides do grupoide de Lie de \mathcal{G} e o denotaremos por $Lie(\mathcal{G})$.

Exemplo 4.2.3. O fibrado tangente $T\mathcal{F}$ a uma folheação, tem a propriedade de ser involutivo, isto é, se $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ então $[X, Y] \in \Gamma(T\mathcal{F})$, ou seja, $\Gamma(T\mathcal{F})$ é uma subálgebra de Lie da álgebra $\mathfrak{X}(M)$. Assim $T\mathcal{F}$ munido do colchete de campos junto com a inclusão $i : T\mathcal{F} \rightarrow TM$ fazem de $T\mathcal{F}$ um algebroides de Lie. Como pode ser visto em Moerdijk e Mrcun [18] $T\mathcal{F} = Lie(\text{Hol}(M, \mathcal{F}))$

Representações

Definição 4.2.4. Seja $(A, [\cdot, \cdot], \rho)$ um algebroides de Lie sobre uma variedade M . Uma *A-conexão* em um fibrado vetorial $V \rightarrow M$ é uma aplicação bilinear

$$\nabla : \Gamma(A) \times \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(V),$$

satisfazendo

$$\nabla_{fX}\eta = f\nabla_X\eta, \quad \nabla_X(f\eta) = f\nabla_X\eta + (L_{\rho(X)}f)\eta \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad \text{e} \quad \forall \eta \in \Gamma(V).$$

Uma *representação* de A é uma A -conexão plana, isto é,

$$\nabla_{[X, Y]} = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X, \quad \text{para cada} \quad X, Y \in \Gamma(A).$$

Dado uma algebroides $(A, [\cdot, \cdot], \rho)$ com uma representação (V, ∇) de A . Temos o complexo

$$\Omega^\bullet(A, V) := \Gamma(\Lambda^\bullet A^* \otimes V),$$

munindo com a diferencial exterior dada pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}
d_{\nabla}\omega(X_0, \dots, X_p) &= \sum_i (-1)^i \nabla_{X_i}(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\
&+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p).
\end{aligned}$$

O operador d_{∇} é linear e quando ∇ tem curvatura zero vale que $d_{\nabla} \circ d_{\nabla} = 0$. Tomando referenciais locais totalmente paralelos ($\nabla_{X_i} \eta_j = 0$) que existem pelo fato de a curvatura ser nula, mostra-se que $d_{\nabla} \circ d_{\nabla} = 0$ analogamente a demonstração do Teorema 1.5.3 para a conexão de Bott. Assim temos um complexo $(\Omega^{\bullet}(A, V), d_{\nabla})$, que nos fornece os grupos de cohomologia de A com coeficientes em V :

$$H^r(A, V) \frac{\ker d_{\nabla}^r}{\text{Im} d_{\nabla}^{r-1}}.$$

Exemplo 4.2.5. A conexão de Bott apresentada na proposição 1.5.2 é uma $T\mathcal{F}$ -conexão no fibrado normal $\nu_{\mathcal{F}}$. Ainda como vimos que a conexão de Bott é plana temos uma $T\mathcal{F}$ -representação. Do mesmo modo, a cohomologia de uma folheação como foi definida, nada mais é do que a cohomologia de $T\mathcal{F}$ com coeficientes em $\nu_{\mathcal{F}}$.

4.3 Tame Vanishing Lema

No capítulo 3 provamos que estabilidade infinitesimal implica estabilidade de uma folheação. Lembremos que estabilidade infinitesimal é a grosso modo o anulamento de modo tame de $H^1(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}})$, porém não investigamos contextos onde isso acontece. Mas o Tame Vanishing Lema nos fornece um caminho para provar o anulamento tame de $H^1(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}})$. Impondo as hipóteses de que a folheação seja Hausdorff e que $H^1(L) = 0$ para uma folha genérica L mostra-se que $\text{Hol}(M, \mathcal{F})$, $T\mathcal{F}$ e $\nu_{\mathcal{F}}$ satisfazem as hipóteses do Tame Vanishing Lema. Concluimos a seção com o Teorema de estabilidade global de Reeb-Thurston. Todos os resultados desta seção podem ser encontrados na tese de Marcut [16].

Teorema 4.3.1 (Tame Vanishing Lema). Seja $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ um grupoide de Lie Hausdorff com álgebra de Lie A e V uma representação de \mathcal{G} . Se as s -fibras de \mathcal{G} são compactas e sua cohomologia de de Rham zero em grau p , então

$$H^p(A, V) = 0.$$

Mais que isso, existem operadores tame lineares de homotopia h, k

$$\Omega^{p-1}(A, V) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{\nabla}} \\ \xleftarrow{h} \end{array} \Omega^p(A, V) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{\nabla}} \\ \xleftarrow{k} \end{array} \Omega^{p+1}(A, V),$$

$$d_{\nabla}h + kd_{\nabla} = Id.$$

Lema 4.3.2. Uma folheação \mathcal{F} em uma variedade compacta e conexa M , é Hausdorff se, e somente se o grupoide de holonomia

$$H(\mathcal{F}) \rightrightarrows M,$$

é Hausdorff e próprio. Neste caso, a folha genérica de \mathcal{F} é difeomorfa a qualquer s -fibra de $Hol(\mathcal{F})$.

Proposição 4.3.3. O transporte paralelo da conexão de Bott define uma representação de $Hol(\mathcal{F})$ no fibrado normal $\nu_{\mathcal{F}}$ que integra a representação de Bott de $T\mathcal{F}$.

Teorema 4.3.4. Seja M uma variedade compacta e \mathcal{F} uma folheação Hausdorff em M . Se existe uma folha genérica L satisfazendo $H^1(L) = 0$, então a folheação \mathcal{F} é infinitesimalmente estável.

Demonstração. Como \mathcal{F} é Hausdorff e M compacta podemos aplicar o Lema 4.3.2 que implica $Hol(\mathcal{F})$ Hausdorff, próprio e que todas suas s -fibras são compactas e difeomorfas à folha genérica L . Por hipótese $H^1(L) = 0$, e conseqüentemente H^1 de toda s -fibra se anula. O transporte paralelo da conexão de Bott define uma representação de $Hol(\mathcal{F})$ no fibrado normal $\nu_{\mathcal{F}}$, que integra a representação de Bott de $T\mathcal{F}$.

Assim temos um grupoide de Lie Hausdorff $Hol(\mathcal{F})$, uma representação de $Hol(\mathcal{F})$ em $\nu_{\mathcal{F}}$ que integra a representação de Bott, as s -fibras de $Hol(\mathcal{F})$ são as folhas de \mathcal{F} que são compactas e sua cohomologia de de Rham em grau 1 se anula, então aplicamos o teorema 4.3.1 para concluir que $H^1(\mathcal{F}, \nu_{\mathcal{F}}) = 0$ e mais ainda, existem operadores h e k tame lineares satisfazendo

$$\Omega^0(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_\sigma}} \\ \xleftarrow{h} \end{array} \Omega^1(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma}) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}_\sigma}} \\ \xleftarrow{k} \end{array} \Omega^2(\mathcal{F}_\sigma, \nu_{\mathcal{F}_\sigma})$$

$$d_{\mathcal{F}_\sigma} h + k d_{\mathcal{F}_\sigma} = I.$$

Logo, \mathcal{F} é infinitesimalmente estável. □

Chegamos a uma versão global do Teorema de Estabilidade de Reeb-Thurston.

Teorema 4.3.5 (Reeb-Thurston-Hamilton). Sejam M uma variedade compacta e \mathcal{F} uma folheação Hausdorff em M . Se existe uma folha genérica L satisfazendo $H^1(L) = 0$, então a folheação \mathcal{F} é C^∞ estável.

A prova deste teorema é apenas lembrar que pelo Teorema 3.2.4 estabilidade infinitesimal implica estabilidade C^∞ e observar que \mathcal{F} é infinitesimalmente estável, pois satisfaz exatamente as mesmas hipóteses que o teorema anterior.

Apêndice A

Fibrados

Definição A.0.1. Sejam G um grupo de Lie, M uma variedade e $\{U_i\}$ um cobertura aberta de M . Denominaremos por *cociclo* de M a valores em G uma família de funções $\delta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ suaves satisfazendo a condição

$$\delta_{ik}(x) = \delta_{jk}(x) \cdot \delta_{ij}(x) \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Exemplo A.0.2. Considere um atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ de M . Então $\delta_{ij}(x) = D(\phi_j^{-1} \circ \phi_i)(\phi_i(x))$ define um cociclo em M a valores em $GL(\mathbb{R}^m)$.

Definição A.0.3. Uma submersão $\pi : E \rightarrow M$ é uma *fibração localmente trivial* com fibra F se existir uma cobertura $\{U_i\}$ de M e uma família de difeomorfismos $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ chamadas trivializações locais, tais que $\pi_1 \circ \Phi_i = \pi$, onde π_1 é a projeção na primeira coordenada de $U_i \times F$.

Denotando $\Psi_i = \Phi_i^{-1}$, da condição $\pi_1 \circ \Phi_i = \pi$ fica bem definida para $x \in U_i$ uma aplicação

$$\psi_{i,x} : F \rightarrow \pi^{-1}(x),$$

onde $\psi_{i,x}(y) = \Psi_i(x, y)$, que é um difeomorfismo entre F e $\pi^{-1}(x)$. Assim para cada $x \in U_i \cap U_j$ temos que $\psi_{j,x}^{-1} \circ \psi_{i,x} \in \text{Diff}(F)$.

Definição A.0.4. Uma fibração localmente trivial $\pi : E \rightarrow M$ com fibra F , $\{U_i\}$ uma cobertura trivializante, G um grupo de Lie e $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(F)$ uma ação efetiva suave de G sobre a fibra F . Dizemos que (E, M, F, π, ρ) é um fibrado com grupo estrutural G se, para cada par i, j com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe uma aplicação $\delta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ suave tal que $\rho(\delta_{ij}(x)) = \psi_{j,x}^{-1} \circ \psi_{i,x}$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. As funções δ_{ij} são chamadas funções de transição.

Nesse caso as mudanças de coordenada ficam $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}(x, y) = (x, \rho(\delta_{ij}(x))y)$. Como ρ é um homomorfismo injetivo, segue que

$$(x, \rho(\delta_{ik}(x))y) = \Psi_k \circ \Psi_i^{-1}(x, y) = (\Psi_k \circ \Psi_j^{-1}) \circ (\Psi_j \circ \Psi_i^{-1})(x, y) = (x, \rho(\delta_{jk}(x)\delta_{ij}(x))y)$$

implica

$$\delta_{ik}(x) = \delta_{jk}(x)\delta_{ij}(x)$$

para todo $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ e $y \in F$.

Um fibrado com grupo estrutural é essencialmente determinado por suas funções de transição, esse é o conteúdo do teorema a seguir.

Teorema A.0.5. Sejam G um grupo de Lie, F uma variedade, ρ uma ação efetiva e suave de G em F e $\{\delta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}_{i,j}$ um cociclo sobre uma variedade M . Então existe um fibrado $\pi : E \rightarrow M$ com fibra F , grupo estrutural G .

No caso em que a fibra possua algum tipo de estrutura adicional podemos nos restringir há um subgrupo dos difeomorfismos da fibra que preservam essa estrutura, este é o caso dos fibrados principais e dos fibrados vetoriais.

Definição A.0.6. Seja M uma variedade suave e G um grupo de Lie. Um fibrado $\pi : P \rightarrow M$ com grupo estrutural G é um G -fibrado principal se a sua fibra é G e as funções de transição são isomorfismos suaves de G .

Seja $\pi : P \rightarrow M$ um G -fibrado principal com cociclo $\delta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ e uma ação $\rho : G \rightarrow \text{Diff}(F)$. Assim temos um fibrado $\pi : B \rightarrow M$ dado pela ação ρ e pelo cociclo $\delta_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, tal fibrado é chamado de *fibrado associado* ao fibrado principal e à ação ρ .

Para *fibrados vetoriais* basta pedirmos que a ação sobre as fibras seja por meio de isomorfismos lineares. Equivalentemente a esta definição é pedir que uma fibração localmente trivial no qual a fibra é um espaço vetorial as funções de transição sejam isomorfismos de espaços vetoriais.

Definição A.0.7. Um fibrado vetorial E é um fibrado cujas as fibras são um espaço vetorial de dimensão finita V , com grupo estrutural $GL(V)$ e a ação linear de $GL(V)$ em V .

Apêndice B

Holonomia

Consideremos M uma variedade suave com uma folheação \mathcal{F} de dimensão k . Sejam $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo e F uma folha de \mathcal{F} , Σ_0 e Σ_1 seções transversais a \mathcal{F} homeomorfas a um disco aberto, passando por $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(1) = p_1$ respectivamente. Definiremos uma transformação local entre Σ_0 e Σ_1 ao longo das folhas de \mathcal{F} , sobre o caminho γ levando p_0 em p_1 .

Dada uma partição $0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$ de $[0, 1]$, podemos encontrar uma sequência $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ de cartas locais satisfazendo

- Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cap U_j$ está contido numa carta local de \mathcal{F}
- $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para todo $i = 1, \dots, k$.

Dizemos que $\{(U_i, \varphi_i)\}_i$ é uma cadeia subordinada a γ .

Para cada $0 < i < k + 1$ fixemos uma seção transversal à \mathcal{F} , $D_{t_i} \subset U_{i-1} \cap U_i$ homeomorfa a um disco aberto e passando por $\gamma(t_i)$, denotemos também $D_0 = \Sigma_0$ e $D_1 = \Sigma_1$. Então para cada $x \in D_{t_i}$ suficientemente próximo de $\gamma(t_i)$ a placa de U_i que passa por x intercepta $D_{t_{i+1}}$ num único ponto $f_i(x)$. O domínio da aplicação f_i contém um disco $D'_i \subset D_{t_i}$ contendo $\gamma(t_i)$. Assim fica bem definida a aplicação

$$f_\gamma = f_k \circ \dots \circ f_0$$

em uma vizinhança de $p_0 \in \Sigma_0$. Chamaremos f_γ de aplicação de holonomia associada a γ . As aplicações de holonomia dependem sobre o ponto de vista de germes apenas da classe de homotopia do caminho γ . Definimos a seguir germes e a posterior enunciamos o teorema.

Definição B.0.1. Sejam X, Y espaços topológicos e $x \in X$ e $V \subset Y$ uma vizinhança de x . Introduzimos uma relação de equivalência em $C^0(V, Y)$: $f \sim g$ se existe uma vizinhança de $W \subset V$ de x tal que $f|_W = g|_W$. A classe de equivalência é denominada germe de f em x , denotaremos por $\text{germ}_x(f)$ o germe de f em x .

No caso em que $X = Y$, o conjunto $G(X, x)$ dos germes que deixam fixo x é um grupo com a multiplicação germe a germe, isto é, $\text{germ}_x(f) \cdot \text{germ}_x(g) = \text{germ}_x(f \circ g)$.

Teorema B.0.2. Sejam f_γ e f_α duas aplicações de holonomia, onde γ e α são caminhos tais que $\gamma(0) = \alpha_0 = p_0$ e $\gamma(1) = \alpha(1) = p_1$. Se existe uma homotopia entre γ e α que fixa os extremos, então $\text{germ}_{p_0}(f_\gamma) = \text{germ}_{p_0}(f_\alpha)$.

Demonstração. Ver página 60 em [3]. □

Seja um $[\gamma] \in \pi_1(F, p_0)$, temos um único germe $\text{germ}_{p_0}(f_\gamma)$ tal que f_γ é uma aplicação de holonomia de γ . Assim temos bem definida uma aplicação

$$\begin{aligned} \text{hol} : \pi_1(F, p_0) &\rightarrow G(\Sigma_0, p_0) \\ \text{hol}([\gamma]) &= \text{germ}_{p_0}(f_\gamma) \end{aligned}$$

A aplicação hol é um homomorfismo de grupos, fato este que não demonstraremos aqui.

Definição B.0.3. O subgrupo $\text{Hol}(F, p_0) := \text{hol}(\pi_1(F, p_0))$ de $G(F, p_0)$ é chamado grupo de holonomia de F em p_0 .

Dados $p_0, p_1 \in F$, qualquer caminho $\alpha : [0, 1] \rightarrow F$ com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$ induz um isomorfismo

$$\begin{aligned} \alpha^* : \text{Hol}(F, p_0) &\rightarrow \text{Hol}(F, p_1) \\ \alpha^*(\text{germ}_{p_0}(h)) &= \text{germ}_{p_1}(f_\alpha \circ h \circ f_{\alpha^{-1}}). \end{aligned}$$

Desta maneira podemos falar do grupo e holonomia de F e independente do ponto. Como as seções transversais são discos abertos, fica sendo equivalente $G(\Sigma, x) \approx G(\mathbb{R}^{m-k}, 0)$, basta compor com um homeomorfismo que leve Σ em um disco aberto na origem.

Referências Bibliográficas

- [1] BOTT, R. *Lectures on characteristic classes and foliations*, vol. 279 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 1972.
- [2] CAMACHO, C., AND NETO, A. L. *Teoria geométrica das folheações*, vol. 9. Instituto de matematica pura e aplicada, 1979.
- [3] CANDEL, A., AND CONLON, L. *Foliations. I, Volume 23 of Graduate Studies in Mathematics*. 2000.
- [4] CRAINIC, M., AND FERNANDES, R. L. Lectures on integrability of Lie brackets. *Geometry & Topology Monographs 17* (2011), 1–107.
- [5] DRAGOMIR, S. S., AND PEARCE, C. E. Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, 2000.
- [6] EPSTEIN, D. A topology for the space of foliations. In *Geometry and Topology*. Springer, 1977, pp. 132–150.
- [7] HAMILTON, R. S. Deformation of complex structures on manifolds with boundary. I. The stable case. *J. Differential Geom.* 12, 1 (1977), 1–45.
- [8] HAMILTON, R. S. Deformation theory of foliations. *preprint ArXiv* (1978).
- [9] HAMILTON, R. S. The inverse function theorem of nash and moser. *American Mathematical Society* 7, 1 (1982).
- [10] HATCHER, A. Vector bundles and K-theory. *Im Internet unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>* (2003).
- [11] HEITSCH, J. L. A cohomology for foliated manifolds. *Commentarii Mathematici Helvetici* 50, 1 (1975), 197–218.
- [12] JARCHOW, H. *Locolly convex spaces*. Teubner, 1981.
- [13] KRIEGL, A., AND MICHOR, P. W. *The convenient setting of global analysis*. Amer Mathematical Society, 1997.
- [14] LEE, J. M. *Manifolds and differential geometry*, vol. 107. American Mathematical Soc., 2009.

- [15] LESLIE, J. On a differential structure for the group of diffeomorphisms. *Topology* 6, 2 (1967), 263–271.
- [16] MARCUT, I. *Normal forms in Poisson geometry*. PhD Thesis, Utrecht University, 2013.
- [17] MICHOR, P. W. *Manifolds of differentiable mappings*. Shiva Pub., 1980.
- [18] MOERDIJK, I., AND MRCUN, J. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, vol. 91. Cambridge University Press Cambridge, 2003.
- [19] OMORI, H. On Banach-Lie groups acting on finite dimensional manifolds. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* 30, 2 (1978), 223–250.
- [20] ROMAN, S. The formula of faa di bruno. *American Mathematical Monthly* (1980), 805–809.
- [21] RUDIN, W. *Functional analysis. International series in pure and applied mathematics*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

Índice Remissivo

- Aplicação
 - tame linear, 40
 - tame suave, 45, 49
- Carta
 - trivializadora da folheação, 4
- Complexo de
 - deformação da folheação, 59
 - de Rham da folheação, 21
- Complexo não-linear, 55
 - \mathcal{G} -invariante, 57
 - localmente exato, 55
- Conexão
 - de Bott, 19
 - parcial, 18
- Espaço
 - de Fréchet, 23
 - de Fréchet graduado, 39
 - vetorial localmente convexo, 23
- Fibrado
 - normal à folheação, 6
 - das grassmannianas $\text{Gr}_k M$, 8
 - tangente à folheação, 6
 - vetorial de Fréchet, 36
 - vetorial de Fréchet tame, 52
- Folhas de uma folheação, 5
- Folheação, 4
 - C^∞ -estável, 59
 - Hausdorff, 67
 - infinitesimalmente estável, 63
- Folheações conjugadas, 58
- Grading, 39
- Grupo
 - de Lie-Fréchet tame, 52
 - de cohomologia da folheação, 21
 - de Lie-Fréchet, 38
- Grupoide, 69
 - de Lie, 70
- Mapa de fibrados, 30
- Operador de fibrados, 31
- Placas de uma folheação, 5
- Projeter, 15
 - de posto constante, 15
 - involutivo, 17
- Seção involutiva de $\text{Gr}_k M$, 9
- Seminorma, 23
- Somando direto tame, 40
- Span, 11
- Teorema
 - de Nash-Moser, 54
 - de Frobenius, 9
- Teorema da Regra da Cadeia, 28
- Topologia fraca, 23
- Variedade
 - integral maximal, 9, 17
 - de Fréchet, 33
 - de Fréchet tame, 48
 - integral, 9, 17