A TRANSFORMADA DE HILBERT E OS ESPAÇOS U.M.D.

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. FILIDOR EDILFONSO VILCA LABRA e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de dezembro de 1991.

Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni

Sérgio Antonio Tozoni

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em MATEMÁTICA.

A TRANSFORMADA DE HILBERT

E

OS ESPAÇOS U.M.D.

Filidor E. Vilca Labra

Prof. Dr. SÉRGIO ANTONIO TOZONI
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matematica, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Dezembro - 1991

AGRADECIMENTO

Ao Prof. Dr. Sérgio Antonio Tozoni, Pela orientação amiga e incentivo constante durante toda realização deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Benjamin Bordin, pelo incentivo e boa disposição e à Sr. Fátima Espindola por sua ajuda na impresão desta tese.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico - CNPq, pelo apoio financiero.

A meus amigos da maricolândia que me incentivaram, em especial a meu amigo Tomas E. Barros.

Agradeço finalmente a Deus, por ter possibilitado todos os agradecimentos acima.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a caracterização dos espaços de Banach **E** para os quais a transformada de Hilbert está bem definida e é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$, $1 < p < \infty$. Primeiramente estudamos as relações entre a transformada de Hilbert e o operador de conjugação no caso vetorial e em seguida estudamos a caracterização dos espaços de Banach para os quais o operador de conjugação está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$.

Dizemos que um espaço de Banach **E** tem a propriedade **U.M.D.** se, para todo espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e para todo $1 < p < \infty$, existe uma constante C_p, dependendo somente de p e **E**, tal que

$$\|\varepsilon_1 d_1 + \ldots + \varepsilon_n d_n\|_{L^p_E} \leq C_p \|d_1 + \ldots + d_n\|_{L^p_E},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, toda sequência $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}$ com $\varepsilon_k \in \{-1,1\}$ e para todo martingal $f = (f_k)_{k\geq 0}$ sobre $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e com valores em **E** satisfazendo $f_0 = 0$, onde $d_k = f_k - f_{k-1}$. D. L. Burkholder [4] caracterizou geometricamente os espaços com a propriedade **U.M.D.**, isto é, mostrou que **E** tem a propriedade **U.M.D.** se e somente se, existe uma função simétrica e biconvexa $\xi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\xi(0,0) > 0$ e $\xi(x,y) \leq |x + y|$ se $|x| \leq 1 \leq |y|$. Depois D. L. Burkholder [5] mostra que se **E** tem a propriedade **U.M.D.**, então o operador de conjugação é limitado sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$, e J. Bourgain [1] mostra que se o operador de conjugação é limitado sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$, então **E** tem a propriedade **U.M.D.**. Em [6], D. L. Burkholder dá uma outra demonstração de que a propriedade **U.M.D.** implica na limitação do operador de conjugação sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$, utilizando integração estocástica e nesse trabalho dá uma nova demonstração da caracterização geométrica dos espaços **U.M.D.**. Em [12], D. J. H. Garling caracteriza os espaços **U.M.D.** em termos de movimentos Browniano.

O Capítulo I tem como objetivo principal estudar as relações entre o operador de conjugação e a transformada de Hilbert no caso vetorial. Primeiramente mostramos que a transformada de Hilbert é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$ se e somente se a transformada de Hilbert maximal é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$, $1 < p < \infty$. A demonstração é feita seguindo as linhas do caso real que é encontrado em [21]. Em seguida mostramos que para $1 < p < \infty$ são equivalentes: o operador de conjugação é limitado sobre $L^p(T,E)$, o projetor de Riesz é limitado sobre $L^p(T,E)$, a série de Fourier de qualquer $f \in L^p(T,E)$ converge para f na norma de $L^p(T,E)$. Finalmente, nos baseamos em [8] e [17] para mostrar que o operador de conjugação está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$ se e somente se a transformada de Hilbert está bem definida e é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$. Observamos que em [8] e [17] não está claro que se um dos operadores acima está bem definido, então o outro também está bem definido.

No Capítulo II enunciamos algumas propriedades da esperança condicional e dos martingais que serão usadas no Capítulo III. Estudamos propriedades das funções de Rademacher e das séries de Walsh-Fourier no caso vetorial. Mostramos que se $R_m f$, são as somas parciais da série de Walsh-Fourier de $f \in L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$, então $(R_{2^n} f)_{n \geq 1}$ é um martingal que converge q.s. e na norma de $L^p(T,E)$ para f. O objetivo principal deste capítulo é servir de referência para o Capítulo III.

No Capítulo III, nos baseamos em D. L. Burkholder [5] e J. Bourgain [1] para mostrar que um espaço Banach de E tem a propriedade U.M.D. se e somente se o operador de conjugação está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$. Neste capítulo estão os resultados principais deste trabalho. Procuramos detalhar e explicar com cuidado os resultados encontrados em [5] e [1].

CAPÍTULO I

A TRANSFORMADA DE HILBERT E O OPERADOR DE CONJUGAÇÃO

O objetivo principal deste capítulo é comparar a transformada de Hilbert com o operador de conjugação no caso vetorial.

Na primeira seção enunciamos algumas propriedades da integral de Bochner e definimos os espaços $L^p(\Omega,\mathbf{E})$ e $\ell^p(\mathbf{E})$ para um espaço de Banach $\mathbf{E}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

Na segunda seção definimos a transformada de Hilbert vetorial e a transformada de Hilbert maximal no caso vetorial. Demonstramos algumas propriedades desses operadores equivalentes a resultados do caso real encontrados em [21].

Na terceira seção estudamos as séries de Fourier sobre o toro, o operador de conjugação e o projetor de Riesz, tudo no caso vetorial. Vários resultados encontrados em [13] e [22] são estendidos para caso vetorial. No teorema 3.17 caracterizamos a limitação do operador de conjugação sobre $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$ via convergência das séries de Fourier em $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e via limitação do projetor de Riesz sobre $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$.

Finalmente na quarta seção mostramos que a transformada de Hilbert está bem definida e é limitada sobre $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$, $1 < p < \infty$, se e somente se o operador de conjugação está bem definido e é limitado sobre $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$.

1. A INTEGRAL DE BOCHNER

Uma referência para os resultados desta seção é o Capítulo III de [9].

Nesta seção $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ será um espaço de medida σ-finito e $\mathbf{E}$ será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$.

1.1. DEFINIÇÃO: Uma função $f:\Omega \longrightarrow E$ é chamada simples se assume apenas um número finito $f(\Omega) = \{a_k: 1 \le k \le n\}$ de valores em E e $A_k = f^{-1}(a_k) \in \mathcal{F}$ para todo $1 \le k \le n$. Dizemos que

(1) $$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

é a representação padrão de f.

1.2. DEFINIÇÃO: Uma função $f:\Omega \longrightarrow E$ é $\mathcal{F}$-mensurável, se existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples definidas em Ω a valores em E, tais que

(1) $$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\| = 0 \quad \text{q.s.}$$

1.3. TEOREMA: (a) Se f, g são funções $\mathcal{F}$-mensuráveis e $\alpha \in \mathbb{R}$, então f+g e αf são $\mathcal{F}$-mensuráveis.

(b) Se f é limite q.s. de uma sequência de funções $\mathcal{F}$-mensuráveis, então f é $\mathcal{F}$-mensurável.

1.4. OBSERVAÇÃO: Se E for separável, então uma função $f:\Omega \longrightarrow E$ é $\mathcal{F}$-mensurável se e somente se $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ para todo boreliano B de E.

1.5. DEFINIÇÃO: Dizemos que uma função simples $f:\Omega \longrightarrow E$ é Bochner-integrável se a função $x \longrightarrow \|f(x)\|$ é μ-integrável. Se

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

é uma representação padrão de f e $B \in \mathcal{F}$, definimos a integral de Bochner de f sobre B por

(1) $$\int_B f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap B).$$

1.6. OBSERVACÃO: Como

$$\sum_{k=1}^{n} \|a_k\| \ \mu(A_k \cap B) = \int_B \|f\| d\mu < \infty$$

então a integral 1.5(1) está bem definida, para todo $B \in \mathcal{F}$, e também temos

$$\text{(1)} \qquad \left\| \int_B f d\mu \right\| \leq \int_B \|f\| d\mu.$$

1.7. DEFINIÇÃO: Uma função $f: \Omega \longrightarrow E$ é Bochner-integrável se existe uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções simples Bochner-integráveis, tal que

$$\text{(1)} \qquad f_n \longrightarrow f \quad \text{q.s.} \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

Definimos a integral de Bochner de f sobre $B \in \mathcal{F}$ por

$$\text{(2)} \qquad \int_B f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_B f_n d\mu.$$

1.8. OBSERVAÇÃO: O limite de $\int_B f_n d\mu$, quando $n \longrightarrow \infty$, existe e independe da sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considerada. Com efeito, se $B \in \mathcal{F}$

$$\left\| \int_B f_n d\mu - \int_B f_m d\mu \right\| \leq \int_B \|f_n - f_m\| d\mu \leq \int_B \|f_n - f\| d\mu + \int_B \|f_m - f\| d\mu$$

e como

$$\lim_{n \to \infty} \int_B \|f_n - f\| d\mu = 0$$

temos que $\left(\int_B f_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em E. Portanto essa sequência converge em E.

Para provar a independência da sequência, consideremos duas sequências de funções simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Bochner-integráveis convergindo para f q.s., tais que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|g_n - f\| d\mu = 0.$$

Como

$$\left\|\int_B f_n d\mu - \int_B g_n d\mu\right\| \leq \int_B \|f_n - f\| d\mu + \int_B \|g_n - f\| d\mu,$$

então fazendo $n\to\infty$ em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_B f_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_B g_n d\mu.$$

1.9. TEOREMA: Uma função $f:\Omega\to E$ $\mathcal{F}$-mensurável é Bochner-integrável se e somente se a função real $x \longrightarrow \|f(x)\|$ é μ-integrável, isto é, se e somente se

(1) $$\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty.$$

1.10. TEOREMA: Se f é Bochner-integrável, então

(1) $$\left\|\int_\Omega f d\mu\right\| \leq \int_\Omega \|f\| d\mu.$$

1.11. TEOREMA: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Bochner-integráveis, tal que

(1) $$\lim_{n,m\to\infty}\int_\Omega \|f_n-f_m\|d\mu = 0.$$

Então existe uma função Bochner-integrável f tal que

(2) $$\lim_{n\to\infty}\int \|f_n-f\|\, d\mu = 0$$

e

(3) $$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

1.12.TEOREMA(Teorema da Convergência Dominada para Integral de Bochner): Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções Bochner-integráveis convergindo q.s. para f e seja g uma função real μ-integrável tal que $\|f_n(x)\| \le g(x)$ para q.t. $x \in \Omega$. Então f é Bochner-integrável e

(1) $$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f_n-f\|d\mu = 0.$$

Em particular, para todo $B\in\mathcal{F}$,

(2) $$\int_B f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_B f_n d\mu.$$

1.13. DEFINIÇÃO: O espaço $L^p_{\mathbf{E}} = L^p(\Omega,\mathbf{E}) = L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu;\mathbf{E})$, $0 < p < \infty$, é definido como o conjunto das funções $\mathcal{F}$-mensuráveis $f:\Omega\longrightarrow\mathbf{E}$, tais que

(1) $$\|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}} = \left(\int_\Omega \|f(x)\|^p d\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

Quando $1 \le p < \infty$, $\|\cdot\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$ é uma norma sobre $L^p(\Omega,\mathbf{E})$ e $\left(L^p(\Omega,\mathbf{E}),\|\cdot\|_{L^p_{\mathbf{E}}}\right)$ é um espaço de Banach. Quando $\Omega = \mathbf{E} = \mathbb{R}$ escrevemos $L^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p}$.

1.14. DEFINIÇÃO: O espaço $L^{\infty}(\Omega,E)$ é definido como o conjunto das funções $f:\Omega \longrightarrow E$ que são $\mathcal{F}$-mensuráveis tais que

$$(1) \qquad \|f\|_{L_E^{\infty}} = \inf\{\ k:\ \|f(x)\| \le k \text{ q.t. } x\in\Omega\ \} < \infty.$$

Temos que $\|\cdot\|_{L_E^{\infty}}$ é uma norma sobre $L^{\infty}(\Omega,E)$ e que $\left(L^{\infty}(\Omega,E), \|\cdot\|_{L_E^{\infty}}\right)$ é um espaço de Banach.

1.15. TEOREMA: Seja $1 \le p < \infty$. Então o conjunto formado por todas as funções simples $f\in L^{p}(\Omega,E)$ é denso em $L^{p}(\Omega,E)$.

1.16. DEFINIÇÃO: Definimos o espaço $\ell^{p}(E)$, $1 \le p < \infty$, como sendo o conjunto de todas as sequências $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n\in E$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e

$$\|x\|_{\ell^{p}(E)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^{p}\right)^{1/p} < \infty.$$

Para $1 \le p < \infty$, $\|\cdot\|_{\ell^{p}(E)}$ é uma norma sobre $\ell^{p}(E)$ e $(\ell^{p}(E), \|\cdot\|_{\ell^{p}(E)})$ é um espaço de Banach.

2. A TRANSFORMADA DE HILBERT SOBRE A RETA

O Capítulo III de [14] e [21] são referências para os resultados apresentados nesta seção.

Nesta seção E será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$. A medida de Lebesgue de um conjunto Lebesgue-mensurável $A \subset \mathbb{R}$ será denotada por $|A|$ ou por $m(A)$.

2.1. DEFINIÇÃO: Seja $f\in L^{p}(\mathbb{R},E)$, $1 \le p< \infty$. Para cada $\varepsilon>0$, definimos a transformada de Hilbert truncada por

$$(1) \qquad H_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}dt.$$

Quando o limite

$$(2) \qquad Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} H_\varepsilon f(x)$$

existe para quase todo $x\in\mathbb{R}$, dizemos que Hf é a transformada de Hilbert de f. A existência de $H_\varepsilon f$ é garantida pela desigualdade de Hölder.

2.2. TEOREMA: Sejam $f\in L^2(\mathbb{R})$, $0 < \varepsilon < \omega < \infty$, e seja

$$(1) \qquad H_{\varepsilon,\omega} f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|x-t|<\omega} \frac{f(t)}{x-t}\, dt.$$

Então, existe uma constante positiva A, independente de f, ε e ω, tal que

$$(2) \qquad \|H_{\varepsilon,\omega} f\|_2 \leq A\|f\|_2.$$

Mais ainda, existe $Hf\in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$(3) \qquad \|H_{\varepsilon,\omega} f - Hf\|_2 \longrightarrow 0$$

quando $\varepsilon\to 0+$ e $\omega\to\infty$, simultaneamente ou sucessivamente, e

$$(4) \qquad \|Hf\|_2 = \|f\|_2,$$

$$(5) \qquad H(Hf) = -f,$$

$$(6) \qquad Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} H_\varepsilon f(x) \quad \text{q.t. } x.$$

2.3. DEFINIÇÃO: Seja $f \in L^1(\mathbb{R},E)$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$. A convolução $h = f*g$ é definida por

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt.$$

2.4. DEFINIÇÃO: Para $y>0$ e $x \in \mathbb{R}$ definimos

(1) $$P(x,y) = P_y(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

e

(2) $$Q(x,y) = Q_y(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Chamamos a função $P(x,y)$ de núcleo de Poisson e $Q(x,y)$ de núcleo conjugado de Poisson. Se $f \in L^p(\mathbb{R},E)$, $1 \le p < \infty$, chamamos $U(x,y) = f*P_y(x)$ de integral de Poisson de f e $V(x,y) = f*Q_y(x)$ de integral conjugada de Poisson de f.

2.5. OBSERVAÇÃO: Para todo $y>0$, temos

(1) $$HP_y(x) = Q_y(x)$$

e

(2) $$\int_{\mathbb{R}} P_y(x)dx = 1.$$

2.6. TEOREMA: Seja $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$ tal que $1/q + 1/p = 1$. Então

(1) $$H(Hf) = -f,$$

(2) $$\int_{\mathbb{R}} fg\,dx = \int_{\mathbb{R}} Hf\,Hg\,dx,$$

(3) $$\int_{\mathbb{R}} (Hf)g\,dx = -\int_{\mathbb{R}} fHg\,dx$$

(4) $$Hf*P_y = f*Q_y, \quad y>0.$$

2.7. **TEOREMA:** Seja $f\in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Então existe uma constante A_p, dependendo somente de p, tal que para todo $\varepsilon>0$,

(1) $$\|H_\varepsilon f\|_p \leq A_p\|f\|_p.$$

Mais ainda, existe $Hf\in L^p(\mathbb{R})$ tal que

(2) $$\lim_{\varepsilon\to 0+}\|H_\varepsilon f - Hf\|_p = 0,$$

(3) $$\|Hf\|_p \leq A_p\|f\|_p,$$

(4) $$Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} H_\varepsilon f(x) \quad \text{q.t. } x.$$

2.8. **TEOREMA:** Suponhamos que a transformada de Hilbert existe e seja limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$, $1 < p < \infty$. Seja $f\in L^p(\mathbb{R},E)$ e $g\in L^q(\mathbb{R},E)$ tal que $q = p/p-1$. Então

(1) $$H(Hf) = -f,$$

(2) $$\int_{\mathbb{R}} fg\,dx = \int_{\mathbb{R}} HfHg\,dx,$$

(3) $$\int_{\mathbb{R}} (Hf)g\,dx = -\int_{\mathbb{R}} fHg\,dx,$$

(4) $$Hf*P_y = f*Q_y, \quad y>0.$$

Demonstração: De 2.6(1) e pelo fato que **H** é linear temos que (1) é verdadeiro para funcões simples. Seja $f\in L^p(\mathbb{R},E)$. Então por 1.15 existe uma sequência de funcões simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^p(\mathbb{R},E)$. Assim

$$\|H(Hf) + f\|_{L^p_E} = \|H(Hf) - H(Hf_n) - f_n + f\|_{L^p_E}$$

$$\leq \|H(H(f-f_n))\|_{L^p_E} + \|f_n - f\|_{L^p_E}$$

$$\leq C_p^2 \|f_n - f\|_{L^p_E} + \|f_n - f\|_{L^p_E}.$$

Logo fazendo $n \longrightarrow \infty$ em ambos os membros da desigualdade acima obtemos (1).

Fixemos agora $g\in L^q(\mathbb{R})$. Por 2.6(2) e pela linearidade de $\mathbf{H}$ temos que (2) é verdadeiro para funcões simples em $L^p(\mathbb{R},E)$. Seja $f\in L^p(\mathbb{R},E)$. Então existe uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcões simples tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^p(\mathbb{R},E)$. Assim, pela desigualdade de Hölder e pela continuidade de $\mathbf{H}$ obtemos

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} (f-f_n) g dx \right\| \leq \int_{\mathbb{R}} \|f-f_n\| \, |g| dx \leq \|f-f_n\|_{L^p_E} \, \|g\|_q$$

e

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{H}f - \mathbf{H}f_n) \mathbf{H}g dx \right\| \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{H}(f-f_n)\| \, |\mathbf{H}g| dx \leq \|\mathbf{H}(f-f_n)\|_{L^p_E} \, \|\mathbf{H}g\|_q$$

$$\leq C_p \|f-f_n\|_{L^p_E} \, \|\mathbf{H}g\|_q.$$

Portanto

$$(5) \qquad \left\| \int_{\mathbb{R}} f g dx - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}f \mathbf{H}g dx \right\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} f g dx - \int_{\mathbb{R}} f_n g dx + \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}f_n \mathbf{H}g dx - \int_{\mathbb{R}} \mathbf{H}f \mathbf{H}g dx \right\|$$

$$\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} (f-f_n) g dx \right\| + \left\| \int_{\mathbb{R}} H(f-f_n) H g dx \right\|$$

$$\leq \|f-f_n\|_{L^p_E} \|g\|_q + C_p \|f-f_n\|_{L^p_E} \|Hg\|_q.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ em ambos os membros de (5), temos (2). Obtemos (3) imediatamente de (1) e (2).

Finalmente passemos à demonstração de (4). Por 2.6(4) e pela linearidade de H, (4) é verdadeiro para funções simples em $L^p(\mathbb{R},E)$. Seja agora $f \in L^p(\mathbb{R},E)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^p(\mathbb{R},E)$. Então pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\|(f_n-f)*Q_y(x)\| \leq \|f_n-f\|*|Q_y|(x) \leq \|f-f_n\|_{L^p_E} \|Q_y\|_q$$

e

$$\|(Hf_n - Hf)*P_y(x)\| \leq \|H(f_n-f)*P_y(x)\| \leq \|H(f-f_n)\|_{L^p_E} \|P_y\|_q$$

$$\leq C_p \|f-f_n\|_{L^p_E} \|P_y\|_q.$$

Portanto

$$(6) \quad \|Hf*P_y(x) - f*Q_y(x)\| = \|Hf*P_y(x) - Hf_n*P_y(x) + f_n*Q_y(x) - f*Q_y(x)\|$$

$$= \|H(f-f_n)*P_y(x) + (f_n-f)*Q_y(x)\|$$

$$\leq \|H(f-f_n)*P_y(x)\| + \|(f_n-f)*Q_y(x)\|$$

$$\leq C_p \|f-f_n\|_{L^p_E} \|P_y\|_q + \|f-f_n\|_{L^p_E} \|Q_y\|_q.$$

Logo fazendo $n \longrightarrow \infty$ em ambos os membros de (6) obtemos (4).

2.9. DEFINIÇÃO: Seja $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R},E)$. Definimos a função maximal de Hardy -Littlewood por

(1) $$Mf(x) = \sup \frac{1}{|I|}\int_I \|f(t)\|dt,$$

onde o supremo é tomado sobre todos os intervalos I que contém o ponto x.

2.10. BSERVAÇÃO: O operador $M:f \longrightarrow Mf$ é chamado de operador maximal de Hardy-Littlewood. Da definição temos que M é um operador sub-linear, isto é, para $f,g\in L^1_{loc}(\mathbb{R},E)$ e $\alpha\in\mathbb{R}$ temos

(1) $$M(f+g)(x) \le Mf(x) + Mg(x),$$

(2) $$M(\alpha f)(x) = |\alpha| Mf(x).$$

2.11. TEOREMA: Seja $1 < p \le \infty$. Então existe uma constante C_p, que depende somente de p, tal que para toda $f\in L^p(\mathbb{R},E)$,

(1) $$\|Mf\|_p \le C_p\|f\|_{L^p_E}.$$

2.12. LEMA: Seja $\psi\in L^1(\mathbb{R})$, $\psi \ge 0$ e decrescente sobre $[0,\infty)$, seja $\varphi(t) = \psi(|t|)$ e $\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(t/\varepsilon)$ para todo $\varepsilon>0$. Então para toda $f\in L^p(\mathbb{R},E)$, $1 \le p \le \infty$, temos

(1) $$\sup_{\varepsilon>0}\|f\|*\varphi_\varepsilon(x) \le Mf(x)\|\varphi\|_1.$$

2.13. TEOREMA: Seja $U(x,y) = f*P_y(x)$ a integral de Poisson de $f\in L^p(\mathbb{R},E)$, $1 \le p \le \infty$. Então para todo $y>0$ e $x\in\mathbb{R}$ temos

(1) $$\|U(x,y)\| \le Mf(x).$$

Demonstração: Como $\|P_y\|_1 = 1$, para todo $y>0$, então pelo lema 2.12

$$\|U(x,y)\| = \left\| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)P_y(t)dt \right\| \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(x-t)\| P_y(t)dt$$

$$\leq \sup_{y>0} \|f\| * P_y(x)$$

$$\leq Mf(x).$$

2.14. OBSERVAÇÃO: Seja $f \in L^p(\mathbb{R},E)$, $1 \leq p < \infty$. Então

(1) $$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}dt - \int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt,$$

para todo $\varepsilon>0$, onde $\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\, \varphi(t/\varepsilon)$ e

(2) $$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t^2+1} - \dfrac{1}{t} & \text{se } |t| \geq 1 \\[2ex] \dfrac{t}{t^2+1} & \text{se } |t| < 1. \end{cases}$$

Definimos ψ a partir de φ por,

(3) $$\psi(x) = \sup_{|t|\geq|x|} |\varphi(t)| = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|(1+x^2)} & \text{se } |x| \geq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{se } |x| < 1. \end{cases}$$

2.15. DEFINIÇÃO: Seja $f \in L^p(\mathbb{R},E)$, $1 < p < \infty$. Definimos a transformada de Hilbert maximal de f por

(1) $$H^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \|H_\varepsilon f(x)\|.$$

2.16. TEOREMA: Seja $f \in L^p(\mathbb{R},E)$, $1 < p < \infty$. Então

$$\text{(1)} \qquad H^*f(x) \leq \frac{1}{\pi}\|\psi\|_1 Mf(x) + M(Hf)(x),$$

onde ψ é a função definida em 2.14(3). Em particular, se a transformada de Hilbert existe e é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$, existe uma constante positiva B_p, dependendo somente de p, tal que

$$\text{(2)} \qquad \|H^*f\|_p \leq B_p\|f\|_{L^p_E}.$$

Demonstração: Pela observação 2.14, temos que

$$\text{(3)} \qquad \int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}dt - \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt,$$

e como ψ satisfaz as condições do lema 2.12, segue que

$$\text{(4)} \qquad \sup_{\varepsilon>0}\left\|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt\right\| \leq \sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}} \|f(x-t)\|\,|\varphi_\varepsilon(t)|dt$$

$$\leq \sup_{\varepsilon>0}\int_{\mathbb{R}} \|f(x-t)\|\psi_\varepsilon(t)dt$$

$$= \sup_{\varepsilon>0}\|f\|*\psi_\varepsilon(x)$$

$$\leq \|\psi\|_1 Mf(x).$$

Por outro lado, por 2.8(4) e por 2.13(1) temos que

$$\text{(5)} \qquad \sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\pi}\left\|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\frac{t}{t^2+\varepsilon^2}dt\right\| = \sup_{\varepsilon>0}\|f*Q_\varepsilon(x)\|$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \| \mathbf{H}f * P_\varepsilon(x) \|$$

$$\leq \mathbf{M}(\mathbf{H}f)(x).$$

Portanto por (3),(4) e (5),

$$H^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \| \mathbf{H}_\varepsilon f(x) \|$$

$$\leq \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\pi} \left\| \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \frac{t}{t^2+\varepsilon^2} dt \right\| + \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{\pi} \left\| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt \right\|$$

$$\leq \mathbf{M}(\mathbf{H}f)(x) + \frac{1}{\pi} \|\psi\|_1 \mathbf{M}(f)(x)$$

e assim obtemos (1). Agora , por (1), 2.11(1) e pela continuidade de $\mathbf{H}$,

$$\|H^* f\|_p \leq \frac{1}{\pi} \|\psi\|_1 \|\mathbf{M}f\|_{L^p_{\mathbf{E}}} + \|\mathbf{M}\mathbf{H}f\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$$

$$\leq \frac{1}{\pi} C_p \|\psi\|_1 \|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}} + C_p \|\mathbf{H}f\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$$

$$\leq \frac{1}{\pi} C_p \|\psi\|_1 \|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}} + C_p A_p \|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$$

$$= B_p \|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}},$$

onde $B_p = \frac{1}{\pi} C_p \|\psi\|_1 + C_p A_p$.

2.17. OBSERVAÇÃO: Suponhamos que a transformada de Hilbert existe e é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},\mathbf{E})$, $1 < p < \infty$. Para $0 < \varepsilon < 1$ e $f \in L^p(\mathbb{R},\mathbf{E})$ definimos

(1) $$\bar{\mathbf{H}}_\varepsilon f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon<|x-t|<1/\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

Então, para toda $f \in L^p(\mathbb{R},E)$ e para quase todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(2) \qquad Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \bar{H}_\varepsilon f(x)$$

e existe uma constante C_p, dependendo somente de p, tal que, para toda $f \in L^p(\mathbb{R},E)$ e todo $0 < \varepsilon < 1$,

$$(3) \qquad \|H_\varepsilon f\|_{L^p_E} \le C_p \|f\|_{L^p_E}$$

e

$$(4) \qquad \|\bar{H}_\varepsilon f\|_{L^p_E} \le C_p \|f\|_{L^p_E}.$$

Com efeito, (3) segue imediatamente de 2.16(2). Como

$$\|\bar{H}_\varepsilon f(x)\| \le \frac{1}{\pi}\left\|\int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}dt\right\| + \frac{1}{\pi}\left\|\int_{|t|>1/\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}dt\right\|,$$

temos que

$$\bar{H}^* f(x) = \sup_{0<\varepsilon<1}\|\bar{H}_\varepsilon f(x)\| \le \sup_{\varepsilon>0}\|H_\varepsilon f(x)\| + \sup_{\varepsilon>0}\|H_{1/\varepsilon} f(x)\|$$

$$= 2H^* f(x).$$

Logo por 2.16(2) segue que

$$\|\bar{H}^* f\|_p \le 2B_p \|f\|_{L^p_E}$$

e consequentemente temos (4) para todo $0 < \varepsilon < 1$.

3. SÉRIES DE FOURIER E O OPERADOR DE CONJUGAÇÃO

Uma referência para os resultados apresentados nesta seção são os Capítulos I, II, III e V de [22]. Outra boa referência são os Capítulos I, II e III de [13]. A demonstração do teorema 3.17 foi baseada em [11].

Nesta seção **E** será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$.

3.1. NOTAÇÕES: Denotaremos por **T** o grupo quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, onde $\mathbb{R}$ é o grupo aditivo dos números reais e $2\pi\mathbb{Z}$ é o grupo aditivo dos múltiplos inteiros de 2π. O grupo **T** será sempre identificado com o intervalo $[0,2\pi)$, a menos que se faça alguma menção em contrário. Existe uma identificação natural das funções sobre **T** com as funções periódicas de período 2π sobre $\mathbb{R}$.

Seja dt a restrição da medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ sobre o intervalo $[0,2\pi)$. Consideremos **T** munido da medida $(1/2\pi)dt$. Dessa forma, **T** é um espaço de probabilidade e $(1/2\pi)dt$ é a medida de Haar normalizada sobre **T**. A medida de um boreliano A de **T** com respeito à medida de Haar normalizada $(1/2\pi)dt$ será denotada por $|A|$. Escrevemos $L^p(\mathbf{T})$ ao invés de $L^p(\mathbf{T},\mathbb{R})$ e $\|\cdot\|_p$ ao invés de $\|\cdot\|_{L^p_{\mathbb{R}}}$, $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $C(\mathbf{T},\mathbf{E})$ o conjunto das funções contínuas sobre **T** a valores no espaço de Banach **E**.

Se $f\in L^1(\mathbf{T},\mathbf{E})$, podemos expressar a integral de f sobre **T** por

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)dt \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

Como a medida de Lebesgue é invariante por translações, então para toda $f\in L^1(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e todo $x\in\mathbf{T}$,

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t+x)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} f(t)dt.$$

3.2. DEFINIÇÃO: Seja $f \in L^1(T,E)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos o coeficiente de Fourier $\hat{f}(k)$ por

(1) $$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)e^{-ikt}dt.$$

A série de Fourier de f é definida como sendo a série de funções trigonométricas

(2) $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikt}, \quad 0 \le t < 2\pi.$$

Definimos as somas parciais da série de Fourier de f, para todo $n \in \mathbb{N}$, por

(3) $$S_n(f)(t) = \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k)e^{ikt}, \quad 0 \le t < 2\pi.$$

A função conjugada de $S_n(f)$ será denotada por $\tilde{S}_n(f)$.

3.3. OBSERVAÇÃO: Seja $f \in L^1(T,E)$ e consideremos as sequências de elementos de **E**, $(a_k)_{k\ge 0}$ e $(b_k)_{k\ge 1}$, definidas por

(1) $$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\,dt.$$

Como $e^{iy} = \cos y + i\operatorname{sen} y$ segue que $a_k = \hat{f}(k)+\hat{f}(-k)$, $b_k = i(\hat{f}(k)-\hat{f}(-k))$ para $k\ge 1$ e $a_0 = 2\hat{f}(0)$. Logo

(2) $$S_n(f)(t) = \hat{f}(0)+ \sum_{k=1}^{n} (\hat{f}(k)+\hat{f}(-k))\cos kt + \sum_{k=1}^{n} i(\hat{f}(k)-\hat{f}(-k))\operatorname{sen} kt$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \operatorname{sen} kt).$$

3.4. OBSERVAÇÃO: Seja $f \in L^p(T,E)$. Então

(1) $$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(t)D_n(x-t)dt,$$

onde

(2) $$D_n(t) = \sum_{|k|\leq n} e^{ikt} = \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)t}{\operatorname{sen}(t/2)}, \qquad n \geq 0,$$

é chamado de núcleo de Dirichlet de orden **n** e satisfaz

(3) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t)dt = 1.$$

3.5. TEOREMA(Fejér): Seja $f \in L^1(T,E)$ e seja

(1) $$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) = \sum_{|k|\leq n} (1-|k|/(n+1))\hat{f}(k)e^{ikx}, \qquad n \geq 0.$$

Se o limite à direita $f(x+0)$ e o limite à esquerda $f(x-0)$ de f em x existem, então

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

Em particular, se f é contínua em todo ponto de um intervalo fechado $I \subset T$, então $\sigma_n(f)(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ sobre I.

Demonstração: Seja $D_k(t)$, $k \geq 0$, o núcleo de Dirichlet definido em 3.4(2). Então

(3) $$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)K_n(t)dt$$

onde

(4) $$K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\operatorname{sen}(n+1)t/2}{\operatorname{sen}(t/2)}\right\}^2, \qquad n \geq 0.$$

O núcleo $K_n(t)$ é uma função positiva e par. Portanto por 3.4(3) temos que

(5) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(t)dt = 1$$

e por (4)

(6) $$K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)t^2}, \qquad 0 < t < \pi.$$

Como $K_n(t)$ é par, segue por (3) que

(7) $$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t))K_n(t)dt.$$

Seja

$$\check{f}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}(f(x+t)+f(x-t)).$$

O limite $\check{f}(x)$ existe pois $f(x+o)$ e $f(x-o)$ existem. Segue por (5) e (7) que

$$\sigma_n(f)(x)-\check{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \check{f}(x))K_n(t)dt.$$

Portanto, para $0 < \eta < \pi$,

(8) $$\begin{aligned}\|\sigma_n(f)(x)-\check{f}(x)\| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta}\|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \check{f}(x)\|K_n(t)dt \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi}\|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \check{f}(x)\|K_n(t)dt \\ &= I_1 + I_{2.}\end{aligned}$$

Pela definição de $\check{f}(x)$, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que se $0 \leq t < \delta$,

(9) $$\|\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \check{f}(x))\| < \varepsilon.$$

Fazendo $\eta = \delta$ em (8) nós obtemos, para todo $n \geq 0$,

$$(10) \qquad I_1 \leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^{\delta} K_n(t)dt < \varepsilon.$$

Seja $M_n(\delta) = \sup\{K_n(t): \delta < t < \pi\}$. Então por (6), $M_n(\delta) < \pi^2/((n+1)\delta^2)$. Assim $\lim_{n\to\infty} M_n(\delta) = 0$, para cada $\delta>0$ e

$$(11) \qquad I_2 \leq \frac{1}{2\pi}M_n(\delta)\int_0^{\pi}(\|f(x+t)\|+\|f(x-t)\|+2\|\tilde{f}(x)\|)dt.$$

Como $f\in L^1(T,E)$, a integral acima é finita e portanto existe $n_0 \geq 0$ tal que, se $n \geq n_0$ então $I_2 < \varepsilon$. Assim $I_1+I_2 < 2\varepsilon$ se $n \geq n_0$ e assim obtemos (2).

Por outro lado, se f é contínua sobre I, f é uniformemente contínua e $\tilde{f}(x)=f(x)$ para todo $x\in I$. Podemos então escolher $\delta>0$ tal que a desigualdade (9) seja verdadeira para todo $x\in I$ e assim (10) será verdadeira para todo $x\in I$. Como (11) independe de x, temos que $I_1+I_2< 2\varepsilon$ para todo $x\in I$, isto é,

$$\|\sigma_n(f)(x)-f(x)\| < 2\varepsilon,$$

para todo $x\in I$ e todo $n \geq n_0$.

3.6. COROLÁRIO(Weierstrass): Seja $f\in C(T,E)$. Então dado $\varepsilon>0$, existe um polinômio trigonométrico $p(x)$ tal que $\|f(x)-p(x)\| \leq \varepsilon$, para todo $x\in T$.

Demonstração: Basta escolher $p(x) = \sigma_n(f)(x)$, com n suficientemente grande.

3.7. LEMA: Seja $1 \leq p < \infty$ e seja φ uma função simples em $L^p(\mathbb{R},E)$. Então para qualquer $\varepsilon>0$, existe uma função $g:\mathbb{R}\longrightarrow E$ contínua e com suporte compacto tal que $\|\varphi-g\|_{L^p_E} \leq \varepsilon$.

Demonstração: Denotaremos por m a medida de Lebesgue e suponhamos primeiramente $\varphi = \lambda\chi_{(a,b)}$, $\lambda\in E$. Definimos a função real contínua f_n por

$f_n(x) = 0$ se $x \in [a,b]^c$, $f_n(x) = 1$ se $x \in [a+1/n, b-1/n]$ e linear sobre os intervalos $[a,a+1/n]$ e $[b-1/n,b]$. Tomamos $g_n = \lambda f_n$ e temos que

$$\|\varphi - g_n\|_{L^p_E} = \|\lambda\| \, \|\chi_{(a,b)} - f_n\|_p = \|\lambda\| \left(\int_a^{a+1/n} |f_n|^p dx + \int_{b-1/n}^{b} |f_n|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\leq \|\lambda\| (2/n)^{1/p}.$$

Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi - g_n\|_{L^p_E} < \varepsilon$ para $n \geq n_0$.

Suponhamos agora $\varphi = \lambda \chi_A$ onde A é Lebesgue mensurável e $m(A) < \infty$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. É um fato bem conhecido que, existe uma sequência finita de intervalos abertos disjuntos $\{(a_j, b_j)\}_{j=1}^n$ tal que $m(A \Delta U) < \varepsilon / 2\|\lambda\|$ onde $U = \bigcup_{j=1}^n (a_j, b_j)$. Pela primeira parte, para cada $1 \leq j \leq n$, existe g_j contínua tal que

$$\|\lambda \chi_{(a_j, b_j)} - g_j\|_{L^p_E} < \varepsilon / 2n, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Tomamos $g = \sum_{j=1}^n g_j$ e temos que

$$\|\varphi - g\|_{L^p_E} \leq \|\varphi - \lambda \chi_U\|_{L^p_E} + \|\lambda \chi_U - g\|_{L^p_E}$$

$$\leq \|\lambda\| m(A \Delta U) + \sum_{j=1}^n \|\lambda \chi_{(a_j, b_j)} - g_j\|_{L^p_E}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Suponhamos finalmente $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{A_j}$ onde $a_j \in \mathbf{E}$, $a_j \neq 0$, A_j é Lebesgue mensurável, $m(A_j) < \infty$ para todo $1 \leq j \leq n$ e $A_j \cap A_i = \emptyset$ para $j \neq i$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Pela parte anterior, para cada $1 \leq j \leq n$, existe uma função contínua com suporte compacto h_j tal que

$$\|a_j\chi_{A_j}-h_j\|_{L^p_E} < \varepsilon/n, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Tomamos $g=\sum_{j=1}^{n} h_j$ e temos que

$$\|\varphi-g\|_{L^p_E} \leq \sum_{j=1}^{n} \|a_j\chi_{A_j}-h_j\|_{L^p_E} < \varepsilon,$$

o que demonstra o lema.

3.8. TEOREMA: Seja $f \in L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$, $1 \leq p < \infty$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe $g \in C(T,E)$, tal que

(1) $$\|f-g\|_{L^p_E} < \varepsilon$$

Demonstração: Por 1.15 existe uma função simples φ tal que

(2) $$\|f-\varphi\|_{L^p_E} < \varepsilon/2.$$

Pelo lema 3.7, existe $g \in \mathbf{C}(\mathbf{T},\mathbf{E})$ tal que

(3) $$\|\varphi-g\|_{L^p_E} < \varepsilon/2.$$

Portanto de (2) e (3),temos (1).

3.9. COROLÁRIO: Seja $f \in L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$, $1 \leq p < \infty$,. Então dado $\varepsilon > 0$, existe um polinômio trigonométrico $p(x)$ tal que

(1) $$\|f-p\|_{L^p_E} < \varepsilon.$$

Demonstracão: Segue imediatamente pelo teorema 3.8 e pelo corolário 3.6.

3.10. COROLÁRIO: Seja $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$. Então

(1) $$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} \|f(t+h)-f(t)\|^p dt = 0.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon>0$ dado . Por 3.8, existe uma função contínua $g\in C(T,E)$ tal que $\|f-g\|_{L_E^p} < \varepsilon/4$. Para $h\in T$ tomamos $f_h(t) = f(t+h)$, $g_h(t) = g(t+h)$. Como a medida $(1/2\pi)dt$ é invariante por traslação, temos que

$$\text{(2)} \qquad \|f_h-f\|_{L_E^p} \le \|f_h-g_h\|_{L_E^p} + \|g_h-g\|_{L_E^p} + \|g-f\|_{L_E^p}$$

$$= 2\|f-g\|_{L_E^p} + \|g_h-g\|_{L_E^p}$$

$$< \varepsilon/2 + \|g_h-g\|_{L_E^p}.$$

Mas g é contínua e portanto uniformemente contínua. Logo existe $\delta>0$ tal que, se $|h| < \delta$,

$$\|g_h(t)-g(t)\| = \|g(t+h)-g(t)\| < \varepsilon/2.$$

Portanto

$$\|g_h-g\|_{L_E^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \|g(t+h)-g(t)\|^p dt\right)^{1/p} < \varepsilon/2$$

e por (2) temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_T \|f(t+h)-f(t)\|^p dt = \|f_h-f\|_{L_E^p}^p < (\varepsilon/2 + \varepsilon/2)^p = \varepsilon^p$$

e portanto demonstramos (1).

3.11. LEMA(Desigualdade integral de Minkowski): Seja $1 \le p < \infty$ e $f:T\times T \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável. Então

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{1}{2\pi}\int_T |f(x,t)|\,dx\right)^p dt\right)^{1/p} \le \frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{1}{2\pi}\int_T |f(x,t)|^p dt\right)^{1/p} dx.$$

3.12. TEOREMA: Seja $1 \leq p < \infty$. Então para toda $f \in L^p(T,E)$,

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f)-f\|_{L^p_E} = 0.$$

Demonstração: Para cada $t \in T$ seja $f_t(x) = f(x+t)$ e seja

$$F(t) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \|f(x+t)-f(x)\|^p dx\right)^{1/p} = \|f_t - f\|_{L^p_E}.$$

Como $F(t) \leq \|f_t\|_{L^p_E} + \|f\|_{L^p_E} = 2\|f\|_{L^p_E}$ então $F(t)$ é limitada e assim $F \in L^1(T)$. Por 3.10(1), $F(t)$ é contínua em $t=0$ e portanto pelo teorema de Fejér segue que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(F)(0) = F(0) = 0.$$

Seja $K_n(t)$ o núcleo definido em 3.5(4). Usando 3.5(3) e 3.5(5) temos que

$$\sigma_n(f)(x)-f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_T (f(x+t)-f(x))K_n(t)dt.$$

Então pela desigualdade integral de Minkowski segue que

$$\|\sigma_n(f)-f\|_{L^p_E} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \|\sigma_n(f)(x)-f(x)\|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \left\|\frac{1}{2\pi}\int_T (f(x+t)-f(x))K_n(t)dt\right\|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \|f(x+t)-f(x)\| K_n(t)dt\right)^p dx\right)^{1/p}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_T \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \|f(x+t)-f(x)\|^p dx\right)^{1/p} K_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{T}} F(t)K_n(t)dt$$

$$= \sigma_n(F)(0)$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_{L^p_{\mathbf{E}}} \le \lim_{n\to\infty}\sigma_n(F)(0) = F(0) = 0.$$

3.13. COROLÁRIO: Seja $f\in L^1(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e suponhamos que $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n\in\mathbb{Z}$. Então $f = 0$ q.s..

Demonstração: Pela definição de $\sigma_n(f)$ temos que $\sigma_n(f) = 0$ para todo $n\ge 0$. Portanto segue por 3.12(1) que

$$\|f\|_{L^1_{\mathbf{E}}} = \lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(f)-f\|_{L^1_{\mathbf{E}}} = 0$$

e assim $f = 0$ q.s..

3.14. DEFINICÃO: Seja $f\in L^1(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e considere a série trigonométrica

(1) $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-i)\mathrm{sgn}(k)\hat{f}(k)e^{ikt}$$

onde $\mathrm{sgn}(k) = 1$ se $k>0$, -1 se $k<0$ e 0 se $k=0$. Se existir uma função integrável de forma que (1) seja a sua série de Fourier, nós chamamos essa função de conjugada de f e denotamos ela por $\tilde{f}$.

3.15. DEFINICÃO: Seja $f\in L^1(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e considere a série

(1) $$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}.$$

Se existir uma função integrável de forma que (1) seja a sua série de Fourier, nós chamamos essa função de projeção de Riesz de f e denotamos ela por f^b. Definimos as somas parciais $S_n^b(f)$ por

(2) $$S_n^b(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}(k)e^{ikt}.$$

3.16. TEOREMA(Banach-Steinhaus): Seja F um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_F$, G um espaço vetorial normado com norma $\|\cdot\|_G$ e seja $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de operadores lineares limitados de F em G. Suponha que para cada $x\in F$, existe uma constante positiva e finita $C(x)$, dependendo somente de x, tal que

(1) $$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha(x)\|_G \le C(x).$$

Então a família de operadores $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é uniformemente limitada, isto é,

(2) $$\sup_{\alpha\in A} \|T_\alpha\| = \sup_{\alpha\in A} \{ \|T_\alpha(x)\|_G: x\in F, \|x\|_F \le 1 \} < \infty.$$

3.17. TEOREMA: Seja $1 < p < \infty$ e $f\in L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $$\lim_{n\to\infty} \|S_n(f)-f\|_{L^p_{\mathbf{E}}} = 0,$$

(2) $$\|S_n(f)\|_{L^p_{\mathbf{E}}} \le C_p\|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}}, \quad n\ge 0,$$

(3) $$\|S_n^b(f)\|_{L^p_{\mathbf{E}}} \le C_p\|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}}, \quad n\ge 0.$$

Mais ainda, qualquer uma das condições acima é equivalente à existência da projeção de Riesz f^b de f satisfazendo

(4) $$\|f^b\|_{L^p_{\mathbf{E}}} \le C_p\|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}},$$

ou à existência da função conjugada $\tilde{f}$ de f satisfazendo

(5) $$\|\tilde{f}\|_{L^p_{\mathbf{E}}} \le C_p\|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}}.$$

A constante C_p que aparece nas condições acima depende somente de p e não é necessariamente a mesma em cada uma das desigualdades acima.

Demonstração:(1)$\Longrightarrow$(2): Seja $\varepsilon = \|f\|_{L^p_E}$. Por (1) existe $N = N(f) \in \mathbb{N}$ tal que $\|f - S_n(f)\|_{L^p_E} < \|f\|_{L^p_E}$ se $n \geq N+1$. Assim se $n \geq N+1$ temos que

$$\|S_n(f)\|_{L^p_E} \leq \|f\|_{L^p_E} + \|S_n(f)-f\|_{L^p_E} \leq 2\|f\|_{L^p_E}.$$

Por outro lado, se $1 \leq n \leq N$

$$\|S_n(f)\|_{L^p_E} \leq \sum_{|k| \leq n} \|\hat{f}(k)\| \leq (2n+1)\|f\|_{L^1_E} \leq (2N(f)+1)\|f\|_{L^p_E}.$$

Tomamos então $C(f) = \max\{\ (2N(f)+1)\|f\|_{L^p_E},\ 2\|f\|_{L^p_E}\ \}$ e temos que

$$\|S_n(f)\|_{L^p_E} \leq C(f)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como para toda $f \in L^p(T,E)$ existe uma constante $C(f)$ de forma que a desigualdade acima vale para todo $n \in \mathbb{N}$, segue pelo teorema de Banach-Steinhaus a existência de uma constante C_p, dependendo somente de p, tal que (2) é verdadeiro para essa constante, para todo $n \geq 0$ e toda $f \in L^p(T,E)$.

(2)$\Longrightarrow$(1): Seja $\varepsilon > 0$ dado. Por 3.9, existe um polinômio trigonométrico $p_N(t)$ de grau N tal que

$$\|f - p_N\|_{L^p_E} < \varepsilon/(C_p+1),$$

onde C_p é a constante em (2).Como $S_n(p_N) = p_N$ se $n \geq N$, então para todo $n \geq N$ temos

$$\begin{aligned}\|S_n(f)-f\|_{L^p_E} &= \|S_n(f) - S_n(p_N) + p_N - f\|_{L^p_E}\\ &\leq \|S_n(f-p_N)\|_{L^p_E} + \|f-p_N\|_{L^p_E}\\ &< (C_p+1)\|f-p_N\|_{L^p_E} < \varepsilon\end{aligned}$$

e portanto (1) é verdadeiro.

$(2)\Longleftrightarrow(3)$: Segue como consequência da identidade

$$S_n^b(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}(k)e^{ikt} = e^{int}S_n(e^{-inx}f)(t).$$

$(3)\Longrightarrow(4)$: Seja $f\in L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e $\varepsilon>0$. Por 3.9, existe um polinômio trigonometrico p_N de grau N tal que

$$\|f-p_N\|_{L^p_{\mathbf{E}}} < \varepsilon/2C_p$$

onde C_p é a constante em (3). Então por (3)

$$\|S_n^b(f)-S_n^b(p_N)\|_{L^p_{\mathbf{E}}} = \|S_n^b(f-p_N)\|_{L^p_{\mathbf{E}}} \le C_p\|f-p_N\|_{L^p_{\mathbf{E}}} < \varepsilon/2.$$

Por outro lado, como $S_j^b(p_N) = p_N$ para $j \ge N$, segue que para $n,m \ge N$ temos

$$\|S_n^b(f)-S_m^b(f)\|_{L^p_{\mathbf{E}}} = \|S_n^b(f)-p_N+p_N-S_m^b(f)\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$$

$$= \|S_n^b(f-p_N)-S_m^b(f-p_N)\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$$

$$\le 2C_p\|f-p_N\|_{L^p_{\mathbf{E}}} < \varepsilon.$$

Consequentemente, $(S_n^b(f))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e portanto existe $f^b\in L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$ tal que $S_n^b(f)\longrightarrow f^b$ na norma de $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$. Logo

$$\|f^b\|_{L^p_{\mathbf{E}}} \le \|f^b-S_n^b(f)\|_{L^p_{\mathbf{E}}} + \|S_n^b(f)\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$$

$$\le \|f^b-S_n^b(f)\|_{L^p_{\mathbf{E}}} + C_p\|f\|_{L^p_{\mathbf{E}}}$$

e fazendo $n\to\infty$, obtemos (4). Como $S_n^b(f)e^{-ikt}\longrightarrow f^be^{-ikt}$ na norma de

$L^1(\mathbf{T},E)$, segue que $(f^b)\hat{}(k) = \hat{f}(k)$ se $k \geq 0$ e $(f^b)\hat{}(k) = 0$ se $k<0$ e assim a série 3.15(1) é a série de Fourier de f^b.

$(4) \Longrightarrow (3)$: Segue como consequência da identidade

$$S_n^b(f)(t) = f^b(t) - e^{i(2n+1)t}(e^{-i(2n+1)x}f)^b(t),$$

pois o operador $f \longmapsto f^b$ está bem definido.

$(4) \Longrightarrow (5)$: Tomamos

$$g = i(\hat{f}(0)+f-2f^b)$$

e temos que g está bem definida pois o operador $f \longmapsto f^b$ está bem definido. Então

$$\hat{g}(k) = i(\hat{f}(0)\delta_{k0} + \hat{f}(k) - 2y(k)\hat{f}(k)) = (-i)\operatorname{sgn}(k)\hat{f}(k),$$

onde $\delta_{k0} = 1$ se $k=0$, $\delta_{k0} = 0$ se $k \neq 0$ e $y(k) = 0$ se $k< 0$, $y(k) = 1$ se $k \geq 0$. Assim $g = \tilde{f}$ e por (4)

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_{L^p_E} &= \|\hat{f}(0) + f - 2f^b\|_{L^p_E} \\
&\leq \|\hat{f}(0)\| + \|f\|_{L^p_E} + 2\|f^b\|_{L^p_E} \\
&\leq \|f\|_{L^1_E} + \|f\|_{L^p_E} + 2C_p\|f\|_{L^p_E} \\
&\leq (2C_p+2)\|f\|_{L^p_E}.
\end{aligned}$$

$(5) \Longrightarrow (4)$: Tomamos

$$h = \frac{1}{2}(\hat{f}(0)+f+i\tilde{f})$$

e temos que h está bem definida pois o operador $f \longmapsto \tilde{f}$ está bem definido. Então

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{2}(\hat{f}(0)\delta_{k0} + \hat{f}(k) + \operatorname{sgn}(k)\hat{f}(k))$$

e assim $\hat{h}(k) = 0$ se $k < 0$, $\hat{h}(k) = \hat{f}(k)$ se $k \geq 0$. Portanto f^b existe $h = f^b$ e por (5)

$$\begin{aligned}\|f^b\|_{L^p_E} &= \frac{1}{2}\|\hat{f}(0) + f + i\tilde{f}\|_{L^p_E} \\ &\leq \frac{1}{2}(\|\hat{f}(0)\| + \|f\|_{L^p_E} + \|\tilde{f}\|_{L^p_E}) \\ &\leq \frac{1}{2}(\|f\|_{L^1_E} + \|f\|_{L^p_E} + C_p\|f\|_{L^p_E}) \\ &\leq (1+\frac{1}{2}C_p)\|f\|_{L^p_E}.\end{aligned}$$

3.18. DEFINIÇÃO: Seja $f \in L^p(T,E)$, $1 \leq p < \infty$. Para cada $\varepsilon > 0$, definimos a transformada de Hilbert truncada sobre o toro por

(1) $$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} f(x-s)\cot(s/2)ds.$$

Quando o limite

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \tilde{f}_\varepsilon(x)$$

existe para quase todo $x \in T$, dizemos que Hf é a transformada de Hilbert sobre o toro de f.

3.19. TEOREMA: Seja $f \in L^p(T)$, $1 < p < \infty$. Então existe uma constante A_p, dependendo somente de p, tal que, para todo $\varepsilon > 0$,

(1) $$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_p\|f\|_p.$$

Mais ainda, existe $Hf \in L^p(T)$ tal que

(2) $$\lim_{\varepsilon\to 0+}\|\tilde{f}_\varepsilon - Hf\|_p = 0,$$

(3) $$\|Hf\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

(4) $$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \tilde{f}_\varepsilon(x), \quad \text{q.t. } x.$$

3.20. OBSERVAÇÃO: Se f é um polinômio trigonométrico com valores em E, então $Hf = \tilde{f}$. Com efeito, seja

(1) $$f(t) = \sum_{|k| \leq n} \alpha_k e^{ikt}, \quad t \in T,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_k \in E$ para $|k| \leq n$. Para $x \in T$ temos que

(2) $$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} f(x-t) \cot(t/2)dt$$

$$= \sum_{|k| \leq n} \alpha_k \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} e^{ik(x-t)} \cot(t/2)dt$$

$$= \sum_{|k| \leq n} \alpha_k \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} (\cos k(x-t) + i \operatorname{sen} k(x-t)) \cot(t/2)dt$$

$$= \alpha_0 \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \cot(t/2)dt + \sum_{K=1}^{n} \alpha_{-k} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} e^{-ik(x-t)} \cot(t/2)dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} e^{ik(x-t)} \cot(t/2)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{-k} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \Big[(\cos(kx)\cos(kt) + \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(kt))\cot(t/2) -$$

$$i(\operatorname{sen}(kx)\cos(kt) - \cos(kx)\operatorname{sen}(kt))\cot(t/2) \Big] dt + \sum_{K=1}^{n} \alpha_k \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \Big[$$

$$(\cos(kx)\cos(kt) + \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(kt))\cot(t/2) \quad + \quad i(\operatorname{sen}(kx)\cos(kt) -$$

$$\cos(kx)\operatorname{sen}(kt))\cot(t/2) \Big] dt.$$

Como para todo $m \in \mathbb{N}$

(3) $$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \cos(mt)\cot(t/2)dt = 0 \text{ e } \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \operatorname{sen}(mt)\cot(t/2)dt = 1,$$

o que se demonstra facilmente por indução sobre m, então segue por (2) e (3) que

$$\begin{aligned}
Hf(x) &= \sum_{K=1}^{n} \alpha_{-k}(\operatorname{sen}(kx) + i\cos(kx)) + \sum_{K=1}^{n} \alpha_k(\operatorname{sen}(kx) - i\cos(kx)) \\
&= -\sum_{K=1}^{n} (-i)\alpha_{-k}(\cos(kx) - i\operatorname{sen}(kx)) + \sum_{K=1}^{n} (-i)\alpha_k(\cos(kx) + i\operatorname{sen}(kx)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-i)\operatorname{sgn}(-k)\alpha_{-k} e^{-ikx} + \sum_{k=1}^{n} (-i)\operatorname{sgn}(k)\alpha_k e^{ikx} \\
&= \sum_{|k| \le n} (-i)\operatorname{sgn}(k)\alpha_k e^{ikx} \\
&= \tilde{f}(x).
\end{aligned}$$

3.21. TEOREMA: Sejam **F** e **G** dois espaços de Banach com norma $\|\cdot\|_F$ e $\|\cdot\|_G$ respectivamente, seja **H** um subespaço vetorial de **F** que é denso en **F** e seja $T:H \longrightarrow G$ um operador linear limitado de **H** em **G**. Então T admite uma única extensão $\tilde{T}$ sobre **F** que é linear e limitada de **F** em **G** e

(1) $$\|\tilde{T}\| = \sup\left\{\|\tilde{T}(x)\|_G : x \in F,\ \|x\|_F \le 1\right\}$$
$$= \|T\| = \sup\left\{\|T(x)\|_G : x \in H,\ \|x\|_F \le 1\right\}.$$

Em particular, se **S** e T são dois operadores lineares limitados de **F** em **G** e **S** = T sobre **H**, então **S** = T sobre **F**.

Demonstração: Seja $C > 0$ tal que

(2) $$\|T(x)\|_G \le C\|x\|_F,\ x \in H.$$

Dado $x \in F$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de H tal que $x_n \longrightarrow x$ em F. Temos por (2) que

$$\|T(x_n)-T(x_m)\|_G = \|T(x_n-x_m)\|_G \leq C\|x_n-x_m\|_F,$$

e como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em F, então $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em G. Mas G é Banach e assim existe um único $\tilde{T}(x) \in G$ tal que $T(x_n) \longrightarrow \tilde{T}(x)$ em G.

Seja agora $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ outra sequência de elementos de H tal que $y_n \longrightarrow x$ em F. Então por (2)

$$\|T(y_n)-T(x_n)\|_G \leq c\|y_n-x_n\|_F$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e como $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow x$ segue que $T(y_n) \longrightarrow \tilde{T}(x)$. Como T independe da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhida, definimos

$$\tilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n). \tag{3}$$

Sejam $x, y \in F$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de elementos de H tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$ em F e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo $x_n+\lambda y_n \longrightarrow x+\lambda y$ em F. Então

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x+\lambda y) &= \lim_{n\to\infty} T(x_n+\lambda y_n) = \lim_{n\to\infty} [T(x_n)+\lambda T(y_n)] \\ &= \tilde{T}(x)+\lambda\tilde{T}(y), \end{aligned} \tag{4}$$

portanto $\tilde{T}$ é linear. Segue por (2) e (3) que

$$\|\tilde{T}(x)\|_G = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_G \leq C\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_F = C\|x\|_F \tag{5}$$

e assim $\tilde{T}$ é um operador linear e limitado de F em G.

Temos que

$$\|\tilde{T}\| = \sup\left\{ \|\tilde{T}(x)\|_G : x \in F,\ \|x\|_F \leq 1\right\} \geq \sup\left\{\|\tilde{T}(x)\|_G : x \in H,\ \|x\|_F \leq 1\right\} \tag{6}$$

$$= \sup\left\{\|T(x)\|_G:\ x\in H,\ \|x\|_F \le 1\right\} = \|T\|.$$

Por outro lado

$$\|\tilde{T}(x)\|_G = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_G = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_F \quad \|T(x_n/\|x_n\|_F)\|_G$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_F \ \sup\left\{\|T(y)\|_G:\ y\in H,\ \|y\|_F \le 1\right\}$$

$$= \|T\|\,\|x\|_F,$$

e assim

$$\|\tilde{T}(x)\|_G/\|x\|_F \le \|T\|.$$

Portanto, tomando o supremo sobre $x\in F$, temos

(7) $$\|\tilde{T}\| \le \|T\|.$$

Assim, por (6) e (7) temos $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Suponhamos agora que S seja outro operador linear e limitado de F em G tal que $S = \tilde{T} = T$ sobre H. Se $x\in F$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de H tal que $x_n \xrightarrow[n]{} x$ em F, então

$$\|\tilde{T}(x) - S(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} \tilde{T}(x_n) - \lim_{n\to\infty} S(x_n)\|_G$$

$$= \|\lim_{n\to\infty} T(x_n) - \lim_{n\to\infty} T(x_n)\|_G$$

$$= \|0\|_G = 0$$

e assim $\tilde{T}(x) = S(x)$.

3.22. **OBSERVAÇÃO:** Seja $1 < p < \infty$. Suponhamos que o operador transformada de Hilbert seja limitado sobre $L^p(T,E)$, isto é, existe uma constante positiva A_p, dependendo somente de p, tal que, para toda $f\in L^p(T,E)$,

(1) $$\|Hf\|_{L^p_E} \le A_p\|f\|_{L^p_E}.$$

Então o operador de conjugação $f \longrightarrow \tilde{f}$ está bem definido sobre $L^p(T,E)$ e $Hf = \tilde{f}$ q.s., para toda $f \in L^p(T,E)$. Com efeito, seja $\sigma_n(f)$ como em 3.5(1). Então por 3.20 temos

$$(2) \qquad H(\sigma_n(f))(t) = (\sigma_n(f))\tilde{}(t)$$

$$= \sum_{|k| \le n} (1 - |k|/(n+1))(-i)\mathrm{sgn}(k)\hat{f}(k)e^{ikt}.$$

Assim de (1) e da desigualdade de Hölder temos que

$$\|Hf - (\sigma_n(f))\tilde{}\|_{L^1_E} = \|H(f - \sigma_n(f))\|_{L^1_E}$$

$$\le \|H(f - \sigma_n(f))\|_{L^p_E}$$

$$\le A_p \|f - \sigma_n(f)\|_{L^p_E}.$$

Portanto por 3.12 segue que

$$\lim_{n \to \infty} \|Hf - (\sigma_n(f))\tilde{}\|_{L^1_E} = 0$$

e consequentemente temos para todo $k \in \mathbb{N}$

$$(Hf)\hat{}(k) = \lim_{n \to \infty} [(\sigma_n(f))\tilde{}]\hat{}(k).$$

De (2) temos

$$[(\sigma_n(f))\tilde{}]\hat{}(k) = (1 - |k|/(n+1))(-i)\mathrm{sgn}(k)\hat{f}(k), \quad |k| \le n$$

e zero para $|k| > n$. Então para todo $k \in \mathbb{N}$

$$(Hf)\hat{}(k) = \lim_{n \to \infty} [(\sigma_n(f))\tilde{}]\hat{}(k)$$

$$= (-i)\mathrm{sgn}(k)\hat{f}(k)$$

$$= (\hat{\tilde{f}})(k),$$

portanto pelo corolário 3.13 $Hf = \tilde{f}$ q.s.. De forma análoga podemos mostrar que se o operador de conjugação $f \longmapsto \tilde{f}$ está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$, então a tansformada de Hilbert sobre o toro está bem definida sobre $L^p(T,E)$ e $Hf = \tilde{f}$ para toda $f \in L^p(T,E)$.

3.23.OBSERVAÇÃO: Se $E = \mathbb{R}$, então por 3.19, existe uma constante positiva A_p, dependendo somente de p, tal que

$$\|Hf\|_p \le A_p \|f\|_p$$

para toda $f \in L^p(T)$. Então pela observação anterior $Hf = \tilde{f}$ q.s., para toda $f \in L^p(T)$, $1 < p < \infty$.

Mostramos assim que o operador de conjugação $f \longmapsto \tilde{f}$ está bem definido, é limitado sobre $L^p(T)$, $1 < p < \infty$ e coincide com a transformada de Hilbert sobre o toro. De agora em diante a transformada de Hilbert sobre o toro de f será denotada por $\tilde{f}$, tanto no caso real como no caso vetorial.

4. RELAÇÃO ENTRE A TRANSFORMADA DE HILBERT E O OPERADOR DE CONJUGAÇÃO

As demonstrações dos resultados desta seção foram baseadas em [8] e [17].

4.1. LEMA: Seja E um espaço de Banach, $1 < p < \infty$ e suponha que a transformada de Hilbert seja limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$. Se $\bar{H}_\varepsilon$ é a transformada de Hilbert truncada definida em 2.17(1), então para toda função $f \in L^p(T,E)$ periódica de período 2π, $\bar{H}_\varepsilon f$ é periódica de período 2π, e existe uma constante C_p, dependendo somente de p e E, tal que,

(1) $$\|\bar{H}_{1/2\pi N} f\|_{L^p(T,E)} \le C_p \|f\|_{L^p(T,E)},$$

para todo $N\in\mathbb{N}$ e toda $f\in L^p(T,E)$.

Demonstração: Seja $f\in L^p(T,E)$ periódica de período 2π e seja $0 < \varepsilon < 1$. Fazendo a mudança de variável $s = t-2k\pi$, obtemos

$$\bar{H}_\varepsilon f(x + 2k\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|x+2k\pi-t|<1/\varepsilon} \frac{f(t)\, dt}{x+2k\pi-t}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|x-s|<1/\varepsilon} \frac{f(s)}{x-s}ds = \bar{H}_\varepsilon f(x)$$

para todo inteiro k e assim $\bar{H}_\varepsilon f$ é periódica de período 2π. Como a transformada de Hilbert é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$, segue pela observação 2.17 que existe uma constante C_p, dependendo somente de p e E, tal que, para toda $h\in L^p(\mathbb{R},E)$ e todo $\varepsilon>0$,

$$\text{(2)} \qquad \|\bar{H}_\varepsilon h\|_{L^p(\mathbb{R},E)} \le C_p\|h\|_{L^p(\mathbb{R},E)}.$$

Fixamos $f\in L^p(T,E)$ periódica de período 2π, $N\in\mathbb{N}$, e tomamos $E_N= \{t\in\mathbb{R}:\ 1/2\pi N < |t| \le 2\pi N\}$, $g = \bar{H}_{1/2\pi N}f$. Então para todo $M > 0$,

$$\int_0^{2\pi}\|g(x)\|^p dx = \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M}\left\{\int_0^{2\pi}\|g(x)\|^p dx\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M}\left\{\int_0^{2\pi}\|g(x+s)\|^p dx\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M}\left\{\int_0^{2\pi}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{E_N}\frac{f(x+s-t)dt}{t}\right\|^p dx\right\}ds.$$

Seja $\mathcal{X} = \chi_{[-M-2\pi N,M+2\pi N]}$. Então $\mathcal{X}(s-t) = 1$ quando $t\in E_N$ e $|s| \le M$. Assim pelo teorema de Tonelli temos que

$$\int_0^{2\pi}\|g(x)\|^p dx = \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M}\left\{\int_0^{2\pi}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{E_N}\frac{\mathcal{X}(s-t)f(x+s-t)dt}{t}\right\|^p dx\right\}ds$$

$$= \frac{1}{2M}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{-M}^{M}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{E_N}\frac{\mathcal{X}(s-t)f(x+s-t)dt}{t}\right\|^p ds\right\}dx.$$

Mas a função $u \longmapsto \mathcal{X}(u)f(x+u)$ está em $L^p(\mathbb{R},E)$ pois $u \longmapsto \|f(u)\|^p$ é localmente integrável. Logo segue por (2) que

$$\int_0^{2\pi}\|g(x)\|^p dx \le \frac{1}{2M}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{E_N}\frac{\mathcal{X}(s-t)f(x+s-t)dt}{t}\right\|^p ds\right\}dx$$

$$\le \frac{1}{2M}\int_0^{2\pi}\left\{C_p^p\int_{-\infty}^{\infty}\|\mathcal{X}(s)f(x+s)\|^p ds\right\}dx$$

$$= \frac{1}{2M}C_p^p\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(s)\int_0^{2\pi}\|f(x+s)\|^p dxds$$

$$= \frac{2\pi}{2M}C_p^p\|f\|^p_{L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{X}(s)ds$$

$$= 2\pi C_p^p\left(\frac{M+2\pi N}{M}\right)\|f\|^p_{L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})}$$

e portanto

$$\|g\|_{L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})} \le C_p\left(\frac{M+2\pi N}{M}\right)^{1/p}\|f\|_{L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})}.$$

Fazendo $M \longrightarrow \infty$ em ambos os membros da desigualdade acima abtemos (1).

4.2. OBSERVAÇÃO: Para todo compacto $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$ a identidade

(1) $$\cot(s/2) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{2}{s+2\pi n} = \frac{2}{s} + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{4s}{s^2-4\pi^2 n^2}, \quad s\in K$$

é verdadeiro no sentido da convergência uniforme sobre o compacto K (Ver [19], página 340).

Fixemos agora um inteiro M, $M \geq 1$. Se $s\in[-2\pi M,2\pi M]$ e $n \geq M+1$ temos que

$$\left|\frac{2s}{s^2-4\pi^2 n^2}\right| \leq \frac{M}{\pi(n-M)^2}.$$

Logo, tomando

(2) $$S_N(s) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2s}{s^2-4\pi^2 n^2}$$

para $N \geq M$ e $s\in[-2\pi M,2\pi M]$, obtemos que $S_N \longrightarrow 0$, uniformemente sobre $[-2\pi M,2\pi M]$, quando $N\longrightarrow\infty$. Então segue por (1) e (2) que a sequência

(3) $$\frac{1}{2}\cot(s/2) - \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{s+2\pi n} = S_N(s)$$

converge uniformemente para zero sobre $[-2\pi M,2\pi M]$, quando $N\longrightarrow\infty$.

4.3. LEMA: Seja E um espaço de Banach, $1 < p < \infty$ e suponhamos que a transformada de Hilbert existe q.s. sobre $L^p(\mathbb{R},E)$. Então para toda $f\in L^p(T,E)$ a conjugada $\tilde{f}$ existe q.s..

Demonstração: Seja $x\in[0,2\pi)$, $0 < \varepsilon < \pi$ e $f\in L^p(T,E)$. Então

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} f(x-t)\cot(t/2)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi} [f(x-t) - f(x+t)]\cot(t/2)dt.$$

Consideremos a função $\varphi(t) = \frac{1}{2}\cot(t/2) - \frac{1}{t}$. Como $\varphi(t)\longrightarrow 0$, quando

$t \longrightarrow 0$, então existe $0 < \delta < \pi/2$ tal que φ é limitada sobre $(-\delta,\delta)$. Mas φ é contínua sobre $[\delta,\pi]$, portanto limitada sobre $[\delta,\pi]$ e assim existe $M > 0$ tal que $|\varphi(t)| < M$, para todo $t\in[0,\pi]$. Sejam

$$h_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\,[f(x-t) - f(x+t)]\varphi(t)\chi_{(\varepsilon,\pi]}(t),$$

$$\upsilon(t) = \frac{M}{\pi}\,\|f(x-t) - f(x+t)\|\chi_{(0,\pi]}(t),$$

para $0 \le \varepsilon < \pi$. Então $h_\varepsilon(t) \longrightarrow h_0(t)$, quando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ e $\|h_\varepsilon(t)\| \le \upsilon(t)$, para todo $0 < \varepsilon < \pi$ e todo $t\in[0,2\pi)$. Como $\upsilon\in L^1(T)$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$\text{(1)} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi [f(x-t) - f(x+t)]\left(\frac{1}{2}\cot(t/2) - \frac{1}{t}\right)dt = \int_0^{2\pi} h_0(t)dt$$

existe para todo $x\in[0,2\pi)$.

Seja agora $g = f\chi_{[-\pi,3\pi)}$, onde consideramos f como sendo uma função periódica definida sobre $\mathbb{R}$ de período 2π. Assim $g\in L^p(\mathbb{R},E)$ e portanto Hg existe q.s.. Além disso

$$\text{(2)} \qquad \left\|\frac{1}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{g(x-t)-g(x+t)}{t}dt\right\| \le \frac{1}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{\|g(x-t)-g(x+t)\|}{t}dt$$

$$\le \frac{1}{\pi}\left(\int_\pi^\infty \|g(x-t) - g(x+t)\|^p dt\right)^{1/p}\left(\int_\pi^\infty \frac{1}{t^q}dt\right)^{1/q}$$

$$\le \frac{2}{\pi}\|g\|_{L^p(\mathbb{R},E)}\left(\int_\pi^\infty \frac{1}{t^q}dt\right)^{1/q} < \infty.$$

Seja $B\subset\mathbb{R}$ mensurável com $|B^c| = 0$, tal que $Hg(x)$ existe para todo $x\in B$. Seja $x\in[0,2\pi)\cap B$ e $t\in(0,\pi]$. Então $x+t$, $x-t \in[-\pi,3\pi)$ e assim $g(x-t) = f(x-t)$ e $g(x+t) = f(x+t)$. Por (2) e como $Hg(x)$ existe, temos que

$$(3)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{g(x-t)-g(x+t)}{t}dt = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}dt$$

existe. Portanto por (1) e (3), segue que $\tilde{f}(x)$ existe.

4.4. **TEOREMA:** Seja **E** um espaço de Banach, $1 < p < \infty$ e suponha que a transformada de Hilbert seja limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$. Então o operador de conjugação $f \longrightarrow \tilde{f}$ está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$.

Demonstração: Como consequência da observação 3.22, podemos considerar nesta demonstração o operador de conjugação como sendo o operador, chamado de transformada de Hilbert sobre o toro, definido em 3.18

Seja $f\in L^p(T,E)$ periódica de período 2π sobre $\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{N}$ e $E_N = \{t\in\mathbb{R}: 1/2\pi N < |t| \le 2\pi N\}$. Tomamos

$$Z_1(x) = \sum_{k=0}^{N}\int_{2\pi k+1/2\pi N}^{2\pi(k+1)-1/2\pi N}\frac{f(x-t)dt}{t},$$

$$Z_2(x) = \sum_{k=1}^{N}\int_{-2\pi k+1/2\pi N}^{-2\pi(k-1)-1/2\pi N}\frac{f(x-t)dt}{t},$$

$$Z_3(x) = \sum_{k=1}^{N-1}\int_{2\pi k-1/2\pi N}^{2\pi k+1/2\pi N}\frac{f(x-t)dt}{t} + \left(\int_{2\pi N-1/2\pi N}^{2\pi N}\frac{f(x-t)dt}{t}\right.$$

$$\left. - \int_{2\pi N+1/2\pi N}^{2\pi(N+1)-1/2\pi N}\frac{f(x-t)dt}{t}\right),$$

$$Z_4(x) = \sum_{k=1}^{N-1}\int_{-2\pi k-1/2\pi N}^{-2\pi k+1/2\pi N}\frac{f(x-t)dt}{t} + \int_{-2\pi N}^{-2\pi N+1/2\pi N}\frac{f(x-t)dt}{t}$$

e temos então que

$$\text{(1)} \qquad \int_{E_N} \frac{f(x-t)dt}{t} = Z_1(x) + Z_2(x) + Z_3(x) + Z_4(x).$$

Fazendo a mudança de variável $t = s+2\pi k$ no k-ésimo termo de Z_1 e Z_3 e a mudança de variável $t = s-2\pi k$ no k-ésimo termo de Z_2 e Z_4 obtemos,

$$\text{(2)} \qquad Z_1(x) + Z_2(x) = \int_{1/2\pi N}^{2\pi-1/2\pi N} f(x-s)\left(\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{s+2\pi n}\right)ds$$

e

$$\text{(3)} \qquad \varepsilon_N(x) = Z_3(x) + Z_4(x)$$

$$= \int_{-1/2\pi N}^{1/2\pi N} f(x-s)\left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{2s}{s^2-4\pi^2 n^2}\right)ds + \int_0^{1/2\pi N} \frac{f(x-s)ds}{s-2\pi N}$$

$$+ \int_{-1/2\pi N}^{0} \frac{f(x-s)ds}{s+2\pi N} - \int_{1/2\pi N}^{2\pi-1/2\pi N} \frac{f(x-s)ds.}{s+2\pi N}$$

Se $N > 1$ e $|s| \le 1/2\pi N$, então $|s| < \pi n$ e $0 < \dfrac{1}{4\pi^2-s^2/n^2} < \dfrac{1}{3\pi^2}$ para todo $n \ge 1$ e assim

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left|\frac{2s}{s^2-4\pi^2 n^2}\right| \le \sum_{n=1}^{N-1} \frac{2\pi}{n^2(4\pi^2-s^2/n^2)}$$

$$\le \frac{2}{3\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = A < \infty.$$

Então

$$\text{(4)} \quad \|\varepsilon_N(x)\| \le \int_0^{1/2\pi N} \left\|\frac{f(x-s)}{s-2\pi N}\right\| ds + \int_{-1/2\pi N}^{1/2\pi N} \|f(x-s)\| \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left|\frac{2s}{s^2-4\pi^2 n^2}\right|\right) ds$$

$$+ \int_0^{1/2\pi N} \left\| \frac{f(x+s)}{-s+2\pi N} \right\| ds + \int_{1/2\pi N}^{2\pi - 1/2\pi N} \left\| \frac{f(x+s)}{s+2\pi N} \right\| ds$$

$$\le \frac{1}{2\pi N - 1/2\pi N} \int_0^{2\pi} \| f(x-s) \| ds + A \int_{-1/2\pi N}^{1/2\pi N} \| f(x-s) \| ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi N - 1/2\pi N} \int_0^{2\pi} \| f(x+s) \| ds + \frac{1}{2\pi N + 1/2\pi N} \int_0^{2\pi} \| f(x-s) \| ds$$

$$\le \frac{4\pi}{2\pi N - 1/2\pi N} \| f \|_{L^p(T,E)} + \frac{4\pi A}{N^{1/q}} \| f \|_{L^p(T,E)} + \frac{2\pi}{2\pi N + 1/2\pi N} \| f \|_{L^p(T,E)}$$

Da desigualdade (4) segue que $\varepsilon_N \longrightarrow 0$ uniformemente sobre $[0,2\pi]$. Por outro lado, segue por 4.2(3) que

$$S_N(s) = \frac{1}{2}\cot(s/2) - \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{s+2\pi n}$$

também converge uniformemente para zero sobre $[0,2\pi]$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $N \ge N_0$ e $s \in [0,2\pi]$, então

$$|S_N(s)| < \varepsilon (4 \| f \|_{L^p(T,E)})^{-1} \quad \text{e} \quad \| \varepsilon_N(s) \| < \varepsilon\pi/2.$$

Assim se $N \ge N_0$ temos que

$$\| \vec{H}_{1/2\pi N} f(x) - \tilde{f}_{1/2\pi N}(x) \| = \left\| \frac{1}{\pi} \int_{E_N} \frac{f(x-s) ds}{s} - \frac{1}{2\pi} \int_{1/2\pi N}^{2\pi - 1/2\pi N} f(x-s) \cot(s/2) ds \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{1/2\pi N}^{2\pi - 1/2\pi N} f(x-s) \left(\sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{s+2\pi n} - \frac{1}{2}\cot(s/2) \right) ds + \frac{1}{\pi} \varepsilon_N(x) \right\|$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int_{1/2\pi N}^{2\pi - 1/2\pi N} \| f(x-s) \| \, |S_N(s)| \, ds + \frac{1}{\pi} \| \varepsilon_N(x) \|$$

$$\le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \| f(x-s) \| \, |S_N(s)| \, ds + \frac{1}{\pi} \| \varepsilon_N(x) \|$$

$$< \varepsilon(4\|f\|_{L^p(T,E)})^{-1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\|f(x-s)\|ds + \varepsilon/2$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Portanto $H_{1/2\pi N}f - \tilde{f}_{1/2\pi N} \longrightarrow 0$ uniformemente sobre $[0,2\pi]$ e pelo lema 4.3 temos que $\tilde{f}_{1/2\pi N} \longrightarrow \tilde{f}$ q.s.; assim $\overline{H}_{1/2\pi N}f \longrightarrow \tilde{f}$ q.s.. Por 4.1(1) e pelo lema de Fatou obtemos que

$$\|\tilde{f}\|^p_{L^p(T,E)} \leq \liminf_{N\to\infty}\|\overline{H}_{1/2\pi N}f\|^p_{L^p(T,E)}$$

$$\leq C_p^p\|f\|^p_{L^p(T,E)},$$

o que demonstra o teorema.

4.5. LEMA: Seja **E** um espaço de Banach, $1 < p < \infty$ e suponha que para qualquer $g \in L^p(T,E)$ a conjugada $\tilde{g}$ existe q.s.. Então para qualquer $f \in L^p(\mathbb{R},E)$ a transformada de Hilbert Hf existe q.s..

Demonstração: Fixemos $f \in L^p(\mathbb{R},E)$, $1 < p < \infty$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja $g_k : \mathbb{R} \longrightarrow E$ definida por $g_k(t+2n\pi) = f(k\pi+t)$, para todo $t \in [-\pi,\pi)$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. Temos que g_k é periódica de período 2π e $g_k \in L^p(T,E)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ seja A_k o conjunto formado pelos $x \in [-\pi,\pi)$ para os quais

(1) $$(g_k)\tilde{}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\pi [g_k(x-t) - g_k(x+t)]\cot(t/2)dt$$

existe e seja

$$B = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi + A_k).$$

Como $(g_k)\tilde{}(x)$ existe q.s., então $|A_k| = |[-\pi,\pi)| = 2\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e assim $|B^c| = 0$. Temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\|g_k(x-t)-g_k(x+t)\|\cot(t/2)dt \le \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\|g_k(x-t)\|+\|g_k(x+t)\|)\cot(t/2)dt$$

$$\le 2\|g_k\|_{L^1(\mathbf{T},\mathbf{E})}$$

$$\le 2\|g_k\|_{L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})} < \infty$$

e portanto $(g_k)^{\sim}(x)$ existe se e somente se o limite

(2) $$b_k(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi/2}[g_k(x-t) - g_k(x+t)]\cot(t/2)dt$$

existe. Logo A_k é o conjunto formado pelos $x\in[-\pi,\pi)$ para os quais o limite $b_k(x)$ existe.

Seja $x\in B$ e $k\in\mathbb{Z}$ tal que $x\in k\pi+A_k$ e $|x-k\pi| \le \pi/2$. Portanto por (1) e (2) existe o limite $b_k(x-k\pi)$. Se $|t| \le \pi/2$ temos $|x-k\pi-t| \le \pi$ e $|x-k\pi+t| \le \pi$, assim $g_k(x-k\pi-t) = f(x-t)$ e $g_k(x-k\pi+t) = f(x+t)$. Logo

(3) $$\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi/2}[f(x-t) - f(x+t)]\cot(t/2)dt = b_k(x-k\pi) .$$

Consideremos agora a função $\varphi(t) = \frac{1}{2}\cot(t/2) - \frac{1}{t}$. Como $\varphi(t)\longrightarrow 0$, quando $t\longrightarrow 0$, então existe $0 < \delta < \pi/2$ tal que φ é limitada sobre $(-\delta,\delta)$. Mas φ é contínua sobre $[\delta,\pi/2]$, portanto limitada sobre $[\delta,\pi/2)$ e assim existe $M>0$ tal que $|\varphi(t)| < M$, para todo $t\in[0,\pi/2]$. Sejam

$$h_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}[f(x-t) - f(x+t)]\varphi(t)\chi_{(\varepsilon,\pi/2]}(t),$$

$$\upsilon(t) = \frac{M}{\pi}\|f(x-t) - f(x+t)\|\chi_{[0,\pi/2]}(t),$$

para $0 \le \varepsilon < \pi/2$. Então $h_\varepsilon(t)\longrightarrow h_0(t)$, quando $\varepsilon\longrightarrow 0^+$ e $\|h_\varepsilon(t)\| \le$

$v(t)$, para todo $0 \le \varepsilon < \pi/2$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Como $v \in L^1(\mathbb{R})$, segue pelo Teorema da Convergência Dominada que

$$(4) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi/2} [f(x-t) - f(x+t)]\left(\frac{1}{2}\cot(t/2) - \frac{1}{t}\right)dt = \int_{\mathbb{R}} h_o(t)dt.$$

Consequentemente segue por (3) e (4) que existe o limite

$$(5) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}dt.$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\infty} \left\|\frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}\right\|dt \le \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\infty} \left\|\frac{f(x-t)}{t}\right\|dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\infty} \left\|\frac{f(x+t)}{t}\right\|dt$$

$$\le \frac{2}{\pi}\left(\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{1}{t^q}dt\right)^{1/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)} < \infty,$$

onde $1/p + 1/q = 1$, e portanto a integral

$$(6) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\infty} \frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}dt$$

existe. Logo segue por (5) e (6) que existe $Hf(x)$.

4.6. TEOREMA: Seja E um espaço de Banach, $1 < p < \infty$ e suponha que o operador de conjugação esteja bem definido e seja limitado sobre $L^p(\mathbb{T},E)$. Então a transformada de Hilbert está bem definida e é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$.

Demonstração: Seja $f \in L^p(\mathbb{R},E)$. Para $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < \pi$ e $x \in \mathbb{R}$ definimos

(1) $$f_{n,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{\varepsilon<|s|\leq n\pi} f(x-s)\cot(s/2n)ds.$$

Para $s \neq 2nk\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos por 4.2(1) que

(2) $$\frac{1}{2n}\cot(s/2n) - \frac{1}{s} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2s}{s^2-4\pi^2n^2m^2}\ .$$

Para $|s| \leq n\pi$ temos

$$\left|\frac{2s}{s^2-4\pi^2n^2m^2}\right| \leq \frac{2n\pi}{n^2m^2(4\pi^2-s^2/n^2m^2)} \leq \frac{2}{3\pi nm^2}$$

e portanto existe uma constante positiva A tal que

(3) $$\sum_{m=1}^{\infty} \left|\frac{2s}{s^2-4\pi^2n^2m^2}\right| \leq \frac{A}{n}.$$

Por (2) e (3) segue que, para $|s| \leq n\pi$, $s \neq 0$ temos

(4) $$\left|\frac{1}{2n}\cot(s/2n) - \frac{1}{s}\right| \leq \frac{A}{n}\ .$$

Logo para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < \pi$ e $x \in \mathbb{R}$ obtemos

$$\|f_{n,\varepsilon}(x) - H_\varepsilon f(x)\| = \left\| \frac{1}{2\pi n}\int_{\varepsilon<|s|\leq n\pi} f(x-s)\cot(s/2n)ds - \frac{1}{\pi}\int_{|s|>\varepsilon} \frac{f(x-s)ds}{s}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon<|s|\leq n\pi} f(x-s)\left(\frac{1}{2n}\cot(s/2n)-1/s\right)ds - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-n\pi} \frac{f(x-s)ds}{s} - \frac{1}{\pi}\int_{n\pi}^{\infty} \frac{f(x-s)ds}{s}\right\|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} \|f(x-s)\| \left|\frac{1}{2n}\cot(s/2n)-1/s\right|ds + \frac{1}{\pi}\int_{n\pi}^{\infty} \frac{\|f(x+s)\|}{s}ds + \frac{1}{\pi}\int_{n\pi}^{\infty} \frac{\|f(x-s)\|}{s}ds$$

$$\leq \frac{A}{n\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi}\|f(x-s)\|ds + \frac{2}{\pi}\left(\int_{n\pi}^{\infty}\frac{1}{s^q}ds\right)^{1/q}\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}$$

$$\leq \frac{2A}{(2\pi)^{1/p}n^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)} + \frac{2}{\pi(q-1)^{1/q}(\pi n)^{1/p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}$$

$$= B_p\,\frac{1}{n^{1/p}}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)},$$

isto é,

$$(5)\qquad \|f_{n,\varepsilon}(x) - H_\varepsilon f(x)\| \leq B_p\,\frac{1}{n^{1/p}}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}$$

onde $1/p + 1/q = 1$. Agora, para cada $n\in\mathbb{N}$, definimos $g_n\colon \mathbb{R}\longrightarrow E$ por $g_n(x+2\pi k) = f(nx)$ para todo $x\in[-\pi,\pi)$ e todo $k\in\mathbb{Z}$. Temos então que g_n está bem definido e é periódica de período 2π. Como

$$\|g_n\|^p_{L^p(\mathbf{T},E)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f(nx)\|^p dx = \frac{1}{2\pi n}\int_{-n\pi}^{n\pi}\|f(y)\|^p dy < \infty,$$

segue que $g_n\in L^p(\mathbf{T},E)$. Identificamos o toro $\mathbf{T}$ com o intervalo $[-\pi,\pi)$ e tomamos $F_{\varepsilon,n} = \{\, t\in[-\pi,\pi)\colon \varepsilon/n < |t| \leq \pi \,\}$ como um subconjunto de $\mathbf{T}$. Para $x,t\in\mathbf{T}$, $t\in F_{\varepsilon,n}$ temos que $x-t\in\mathbf{T} = [-\pi,\pi)$, assim $g_n(x-t) = f(n(x-t))$ e portanto

$$(6)\qquad (\tilde{g}_n)_{\varepsilon/n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{F_{\varepsilon,n}} g_n(x-t)\cot(t/2)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{F_{\varepsilon,n}} f(n(x-t))\cot(t/2)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{\varepsilon<|t|\leq n\pi} f(nx-t)\cot(t/2n)dt$$

$$= f_{n,\varepsilon}(nx).$$

Logo, como a conjugada $(g_n\tilde{)}(x)$ existe q.s.,

$$(g_n\tilde{)}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+}(g_n\tilde{)}_{\varepsilon/n}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f_{n,\varepsilon}(nx)$$

para quase todo $x \in [-\pi,\pi)$. Consequentemente, para quase todo $y \in [-n\pi,n\pi)$ existe o limite

$$f^{(n)}(y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f_{n,\varepsilon}(y) = (g_n\tilde{)}(y/n) \tag{7}$$

Por outro lado, pelo lema 4.5 a transformada de Hilbert existe q.s., isto é, o limite

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0+} H_\varepsilon f(x)$$

existe para quase todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ em (5) obtemos

$$\|f^{(n)}(x) - Hf(x)\| \leq B_p \frac{1}{n^{1/p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R};E)} \tag{8}$$

para quase todo $x \in [-n\pi,n\pi)$. Segue imediatamente de (8) que $f^{(n)} \longrightarrow Hf$ q.s.. De (7) e pelo fato que o operador de conjugação é limitado sobre $L^p(T,E)$, segue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} \|f^{(n)}(x)\|^p dx = \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f^{(n)}(nx)\|^p dx = \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|(g_n\tilde{)}(x)\|^p dx$$

$$\leq nA_p^p \|g_n\|_{L^p(T,E)}^p = nA_p^p \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|f(nx)\|^p dx$$

$$= A_p^p \frac{1}{2\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} \|f(x)\|^p dx$$

$$\leq A_p^p \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}.$$

Assim

$$(9) \qquad \int_{-n\pi}^{n\pi} \|f^{(n)}(x)\|^p dx \le A_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}^p.$$

Então para $n,m\in\mathbb{N}$ com $m \le n$ temos

$$(10) \qquad \int_{-m\pi}^{m\pi} \|f^{(n)}(x)\|^p dx \le A_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}^p.$$

Fixemos $m\in\mathbb{N}$. Como $f^{(n)} \longrightarrow Hf$ q.s., segue pelo lema de Fatou e por (10) que

$$\int_{-m\pi}^{m\pi} \|Hf(x)\|^p dx \le \lim_{n\to\infty} \inf \int_{-m\pi}^{m\pi} \|f^{(n)}(x)\|^p dx \le A_p^p \|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}^p.$$

Finalmente, fazendo $m\longrightarrow\infty$ em ambos os membros da desigualdade acima, obtemos

$$\|Hf\|_{L^p(\mathbb{R},E)} \le A_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R},E)}$$

e portanto o teorema está demonstrado.

CAPÍTULO II

MARTINGAIS, FUNÇÕES DE RADEMACHER E SÉRIES DE WALSH-FOURIER

Nas Seções 1, 2, 3 e 4 deste capítulo enunciamos propriedades básicas da esperança condicional e dos martingais. O objetivo dessas seções é ter uma referência explícita de definições e resultados que serão utilizados na última seção deste capítulo e nas duas seções do capítulo seguinte.

Na Seção 4 definimos a propriedade **U.M.D.** para um espaço de Banach E e damos exemplos de espaços de Banach com essas propriedades.

Na Seção 5 demonstramos algumas propriedades das funções de Rademacher que serão aplicadas nas duas seções do Capítulo III.

Na Seção 6 estudamos as séries de Walsh-Fourier no caso vetorial. Mostramos que se $f \in L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$, $1 < p < \infty$, E um espaço de Banach qualquer e se $\mathbf{R}_m f$, $m \in \mathbb{N}$, são as somas parciais da série de Walsh-Fourier de f, então $(\mathbf{R}_{2^n} f)_{n \geq 1}$ é um martingal vetorial que converge em $L^p(\mathbf{T},\mathbf{E})$ e q.s. para f. O resultado 6.25 será aplicado na segunda seção do Capítulo III.

1. A ESPERANÇA CONDICIONAL REAL

Uma referência para os resultados desta seção é [15].

Nesta seção $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ será um espaço de probabilidade e $\mathcal{B}$ será uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.

1.1. OBSERVAÇÃO: Seja $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$. Segue como consequência do teorema de Radon-Nikodym que existe uma única $g \in \mathbf{L}^1(\Omega,\mathcal{B},\mathbf{P})$ tal que, para todo $A \in \mathcal{B}$,

$$(1) \qquad \int_A g\,d\mathbf{P} = \int_A f\,d\mathbf{P}.$$

1.2. DEFINIÇÃO: Seja $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. Definimos a esperança condicional de f com respeito a $\mathcal{B}$, como sendo a única função $g \in L^1(\Omega,\mathcal{B},P)$ que satifaz 1.1(1). Denotaremos $g = E[f/\mathcal{B}]$.

1.3. PROPRIEDADES: Sejam $f,g \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$.

(a) Se $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, então

$$E[\alpha f+\beta g/\mathcal{B}] = \alpha E[f/\mathcal{B}] + \beta E[g/\mathcal{B}] \quad \text{q.s..}$$

(b) Se $f \le g$ q.s., então $E[f/\mathcal{B}] \le E[g/\mathcal{B}]$ q.s..

(c) Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente em $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, tal que $f_n \longrightarrow f$ q.s.. Então $(E[f_n/\mathcal{B}])_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e

$$E[f_n/\mathcal{B}] \longrightarrow E[f/\mathcal{B}] \quad \text{q.s..}$$

(d) Seja h uma função $\mathcal{B}$-mensurável tal que $hf \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. Então

$$E[hf/\mathcal{B}] = hE[f/\mathcal{B}] \quad \text{q.s..}$$

(e) Seja $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$, $g \in L^q(\Omega,\mathcal{F},P)$, $1 < p,q < \infty$ $1/p + 1/q = 1$. Então

$$|E[fg/\mathcal{B}]| \le \left(E[|f|^p/\mathcal{B}]\right)^{1/p}\left(E[|g|^q/\mathcal{B}]\right)^{1/q} \quad \text{q.s..}$$

(f) Seja $1 \le p \le \infty$. Então para toda $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$,

$$\|E[f/\mathcal{B}]\|_p \le \|f\|_p.$$

(g) Seja $\mathcal{B}'$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Então para toda $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$,

$$E[E[f/\mathcal{B}]/\mathcal{B}'] = E[f/\mathcal{B}'] \quad \text{q.s..}$$

2. ESPERANÇA CONDICIONAL VETORIAL

Uma referência para os resultados desta seção é [20].

Nesta seção $(\Omega,\mathcal{F},P)$ será um espaço de probabilidade, E um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e $\mathcal{B}$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$.

2.1. DEFINIÇÃO: Seja $g\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ uma função simples com representação padrão

$$g = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}, \qquad a_k\in E, \quad A_k\in\mathcal{F}.$$

Definimos a esperança condicional de g com respeito a $\mathcal{B}$ por

(1) $$E[g/\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^{n} a_k E[\chi_{A_k}/\mathcal{B}].$$

2.2. OBSERVAÇÃO: Da definição acima segue que

(1) $$\|E[g/\mathcal{B}]\| \le E[\|g\|/\mathcal{B}].$$

Com efeito, por 1.3(a),

$$\|E[g/\mathcal{B}]\| \le \sum_{k=1}^{n} \|a_k E[\chi_{A_k}/\mathcal{B}]\| = \sum_{k=1}^{n} \|a_k\| E[\chi_{A_k}/\mathcal{B}]$$

$$= E[\sum_{k=1}^{n} \|a_k\| \chi_{A_k}/\mathcal{B}]$$

$$= E[\|g\|/\mathcal{B}].$$

2.3. LEMA: Sejam $f,g\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ funções simples e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Então

(1) $$E[\alpha f+\beta g/\mathcal{B}] = \alpha E[f/\mathcal{B}] + \beta E[g/\mathcal{B}] \quad \text{q.s.}.$$

Demonstracão: Sejam

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} \qquad \text{e} \qquad g = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$$

as representações padrão de f e g respectivamente.

Sejam c_i: $i = 1,\ldots,p$, os valores distintos do conjunto $\left\{\alpha a_j + \beta b_k:\ j = 1,\ldots,n\ ,\ \ k = 1,\ldots,m\right\}$ e G_i, $i = 1,\ldots,p$, a união de todos os conjuntos $A_j \cap B_k$ tais que $\alpha a_j + \beta b_k = c_i$. Assim

$$(2) \qquad E[\chi_{G_i}/\mathcal{B}] = \sum_{(j,k)\in D_i} E[\chi_{A_j \cap B_k}/\mathcal{B}],$$

onde $D_i = \left\{(j,k):\ 1 \leq j \leq n;\ 1 \leq k \leq m \quad \text{e} \quad \alpha a_j + \beta b_k = c_i\right\}$. Temos também que

$$(3) \qquad \alpha f + \beta g = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{G_i}.$$

Portanto, desde que $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{k=1}^{m} B_k$, segue por (2) e (3) que

$$\begin{aligned}
E[\alpha f+\beta g/\mathcal{B}] &= \sum_{i=1}^{p} c_i E[\chi_{G_i}/\mathcal{B}] \\
&= \sum_{i=1}^{p} \sum_{(j,k)\in D_i} (\alpha a_j + \beta b_j) E[\chi_{A_j \cap B_k}/\mathcal{B}] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\alpha a_j + \beta b_k) E[\chi_{A_j \cap B_k}/\mathcal{B}] \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j E[\chi_{A_j \cap B_k}/\mathcal{B}] + \beta \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} b_k E[\chi_{A_j \cap B_k}/\mathcal{B}] \\
&= \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j E[\chi_{A_j}/\mathcal{B}] + \beta \sum_{k=1}^{m} b_k E[\chi_{B_k}/\mathcal{B}]
\end{aligned}$$

$$= \alpha E[f/\mathcal{B}] + \beta E[g/\mathcal{B}].$$

2.4. OBSERVAÇÃO: Seja $\mathcal{E}_E$ o conjunto formado por todas as funções simples $f:\Omega \longrightarrow E$ e seja $1 \leq p < \infty$. Definimos o operador T de $\mathcal{E}_E$ em $L^p(\Omega,\mathcal{B},P;E)$ por $T(f) = E[f/\mathcal{B}]$. Temos pelo lema 2.3 que T é linear e sabemos pelo teorema I.1.15 que $\mathcal{E}_E$ é denso em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$. Considerando $\mathcal{E}_E$ com a norma de $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ temos que T é um operador contínuo. De fato, seja $f \in \mathcal{E}_E$ com representação padrão

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}, \quad a_k \in E, \quad A_k \in \mathcal{F}.$$

Então pela observação 2.2 e pela propriedade 1.3(f) temos,

$$\|E[f/\mathcal{B}]\|^p_{L^p_E} = \int_\Omega \|E[f/\mathcal{B}]\|^p dP \leq \int_\Omega E[\|f\|/\mathcal{B}]^p dP$$

$$\leq \int_\Omega \|f\|^p dP = \|f\|^p_{L^p_E}.$$

Portanto temos que T é um operador linear e contínuo de $\mathcal{E}_E$ em $L^p(\Omega,\mathcal{B},P;E)$. Como $\mathcal{E}_E$ é denso em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$, então pelo teorema I.3.21, podemos estender T a um operador linear e contínuo de $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ em $L^p(\Omega,\mathcal{B},P;E)$. Denotaremos a extensão de T por $E[\cdot/\mathcal{B}]$. Temos que $E[\cdot/\mathcal{B}]$ é linear e para toda $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$, $1 \leq p < \infty$, $E[f/\mathcal{B}]$ é $\mathcal{B}$-mensurável e

(1) $$E[f/\mathcal{B}]_{L^p_E} \leq \|f\|_{L^p_E}.$$

2.5. DEFINIÇÃO: Seja $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ e seja $E[\cdot/\mathcal{B}]$ o operador sobre $L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ definido em 2.4. Diremos que $E[f/\mathcal{B}]$ é a esperança condicional de f com respeito a $\mathcal{B}$.

2.6. **OBSERVAÇÃO:** Para todo $A\in\mathcal{B}$ e $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$

(1) $$\int_A E[f/\mathcal{B}]dP = \int_A f dP.$$

Com efeito, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Então $E[f_n/\mathcal{B}] \longrightarrow E[f/\mathcal{B}]$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Seja

$$f_n = \sum_{j=1}^{k_n} a_{n_j}\chi_{A_{n_j}}, \quad a_{n_j}\in E, \quad A_{n_j}\in\mathcal{F},$$

a representação padrão de f_n. Então, da observação 1.1 e da linearidade, da esperança condicional vetorial segue que

$$\begin{aligned}
\int_A E[f/\mathcal{B}]dP &= \lim_{n\to\infty}\int_A E\left[\sum_{j=1}^{k_n} a_{n_j}\chi_{A_{n_j}}/\mathcal{B}\right]dP \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_A \sum_{j=1}^{k_n} E[a_{n_j}\chi_{A_{n_j}}/\mathcal{B}]dP \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n} a_{n_j}\int_A E[\chi_{A_{n_j}}/\mathcal{B}]dP \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{k_n} a_{n_j}\int_A \chi_{A_{n_j}} dP = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n dP \\
&= \int_A f dP.
\end{aligned}$$

2.7. **PROPRIEDADES:**

(a) Se $f,g\in L^1(\Omega,\mathcal{F}.P;E)$ e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, então

$$E[\alpha f+\beta g/\mathcal{B}] = \alpha E[f/\mathcal{B}] + \beta E[g/\mathcal{B}] \quad \text{q.s.}$$

(b) Se $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$, então $\|E[f/\mathcal{B}]\| \leq E[\|f\|/\mathcal{B}]$ q.s..

(c) Seja $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^p(\Omega,E)$. Então $E[f_n/\mathcal{B}] \longrightarrow E[f/\mathcal{B}]$ na norma de $L^p(\Omega,E)$.

(d) Seja $\mathcal{B}'$ uma sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ e $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$. Então

$$E[E[f/\mathcal{B}]/\mathcal{B}'] = E[f/\mathcal{B}'] \quad \text{q.s..}$$

(e) Suponha que $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ e h seja uma função real $\mathcal{B}$-mensurável ou que $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ e $h \in L^1(\Omega,\mathcal{B},P;E)$. Se $hf \in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$, então

$$E[hf/\mathcal{B}] = hE[f/\mathcal{B}] \quad \text{q.s..}$$

Demonstração: Temos que (a) segue pela linearidade do operador $E[\cdot/\mathcal{B}]$ definido em 2.4 e (c) segue por (a) e 2.4(1).

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Então por 2.2(1) e 2.6(1), temos para todo $A \in \mathcal{B}$

$$(1) \qquad \int_A \|E[f_n/\mathcal{B}]\|dP \leq \int_A E[\|f_n\|/\mathcal{B}]dP = \int_A \|f_n\|dP$$

e

$$(2) \qquad \left|\int_A (\|E[f_n/\mathcal{B}]\| - \|E[f/\mathcal{B}]\|)dP\right| \leq \int_A \big|\|E[f_n/\mathcal{B}]\| - \|E[f/\mathcal{B}]\|\big|dP$$

$$\leq \int_A \|E[f_n/\mathcal{B}] - E[f/\mathcal{B}]\|dP.$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, na desigualdade (2), segue por (c) que

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_A \|E[f_n/\mathcal{B}]\| dP = \int_A \|E[f/\mathcal{B}]\| dP.$$

Portanto fazendo $n \longrightarrow \infty$ na desigualdade (1), segue pela definição de esperança condicional real e por (3) que

$$\int_A \|E[f/\mathcal{B}]\| dP \leq \int_A \|f\| dP = \int_A E[\|f\|/\mathcal{B}] dP,$$

para todo $A \in \mathcal{B}$ e assim

$$\|E[f/\mathcal{B}]\| \leq E[\|f\|/\mathcal{B}] \quad \text{q.s.}.$$

Seja agora h uma função simples com representação padrão

$$h = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}, \quad a_k \in E, \quad A_k \in \mathcal{F}.$$

Então por 1.3(g) temos

$$\begin{aligned} E[E[h/\mathcal{B}]/\mathcal{B}'] &= \sum_{k=1}^{n} a_k E[E[\chi_{A_k}/\mathcal{B}]/\mathcal{B}'] \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k E[\chi_{A_k}/\mathcal{B}'] \\ &= E[h/\mathcal{B}']. \end{aligned}$$

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Então por definição de esperança condicional vetorial $E[f_n/\mathcal{B}] \longrightarrow E[f/\mathcal{B}]$ e $E[f_n/\mathcal{B}'] \longrightarrow E[f/\mathcal{B}']$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Assim por (1) e (c), temos que , $E[E[f_n/\mathcal{B}]/\mathcal{B}'] = E[f_n/\mathcal{B}] \longrightarrow E[E[f/\mathcal{B}]/\mathcal{B}']$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Portanto pela unicidade do limite, segue que

$$E[E[f/\mathcal{B}]/\mathcal{B}'] = E[f/\mathcal{B}'].$$

Finalmente por 1.3(d) segue que (e) é verdadeiro quando h e f são funções simples. Seja h uma função real simples e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tal que $f_n \longrightarrow f$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Como h é limitada $hf_n \longrightarrow hf$ na norma de $L^1(\Omega,E)$ e assim segue por (c) que $E[hf_n/\mathcal{B}] \longrightarrow E[hf/\mathcal{B}]$ e $E[f_n/\mathcal{B}] \longrightarrow E[f/\mathcal{B}]$ na norma de $L^1(\Omega,E)$ e como h é limitada segue que $hE[f_n/\mathcal{B}] \longrightarrow hE[f/\mathcal{B}]$ na norma de $L^1(\Omega,E)$. Mas $E[hf_n/\mathcal{B}] = hE[f_n/\mathcal{B}]$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e assim pela unicidade do limite temos que $E[hf/\mathcal{B}] = hE[f/\mathcal{B}]$ q.s.. Suponhamos agora que $h>0$ e seja $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência não-decrescente de funções simples não negativas tal que $h_n \longrightarrow h$ q.s.. Então

$$\|h_n f\| = h_n\|f\| \le h\|f\| \quad \text{e} \quad h_n f \longrightarrow hf \quad \text{q.s.},$$

portanto pelo Teorema da Convergência Dominada para integral de Bochner, $h_n f \longrightarrow hf$ na norma de $L^1(\Omega,E)$ e assim por (c),

$$E[h_n f/\mathcal{B}] \longrightarrow E[hf/\mathcal{B}], \tag{4}$$

na norma e $L^1(\Omega,E)$. Além disso, por 1.3(d) e (b) temos

$$\|h_n E[f/\mathcal{B}]\| \le h_n E[\|f\|/\mathcal{B}] \le hE[\|f\|/\mathcal{B}]$$

$$\le E[h\|f\|/\mathcal{B}]$$

e

$$\|E[h\|f\|/\mathcal{B}]\|_1 \le \|h\|f\|\|_1 < \infty.$$

Como $h_n E[f/\mathcal{B}] \longrightarrow hE[f/\mathcal{B}]$ q.s., então pelo Teorema da Convergência Dominada para integral de Bochner,

(5) $$h_n E[f/\mathcal{B}] \longrightarrow hE[f/\mathcal{B}]$$

na norma de $L^1(\Omega,E)$. Pelo caso anterior $E[h_n f/\mathcal{B}] = h_n E[f/\mathcal{B}]$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e assim por (4) e (5) e pela unicidade do limite temos $E[hf/\mathcal{B}] = hE[f/\mathcal{B}]$ q.s..

Para demonstrar o caso geral, basta aplicar o caso anterior à h^+ e h^- onde $h = h^+ - h^-$, $h^+ = \sup\{0,h\}$ e $h^- = \sup\{0,-h\}$.

2.8. EXEMPLO: Seja $\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ uma partição de Ω tal que $B_k\in\mathcal{F}$ e $P(B_k) > 0$, para todo $1 \le k \le n$. Se $\mathcal{B}$ é a σ-álgebra gerada pelos conjuntos B_k, $1 \le k \le n$ e $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F}.P;E)$, então

(1) $$E[f/\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{P(B_k)}\int_{B_k} f dP\right)\chi_{B_k}.$$

De fato, como $E[f/\mathcal{B}]$ é $\mathcal{B}$-mensurável, então existem $a_1, a_2,\ldots,a_n \in E$ tais que

$$E[f/\mathcal{B}] = \sum_{k=1}^{n} a_k\chi_{B_k}.$$

Logo por 2.6(1), para todo $1 \le k \le n$,

$$\int_{B_k} f dP = \int_{B_k} E[f/\mathcal{B}]dP = \int_{B_k} a_k dP = a_k P(B_k)$$

e assim

$$a_k = \frac{1}{P(B_k)}\int_{B_k} f dP.$$

Em particular, consideremos o intervalo $[0,2\pi)$ munido da σ-álgebra de de Borel $\mathcal{B}([0,2\pi))$ e da medida de probabilidade $(1/2\pi)dt$, onde dt é a medida de Lebesgue restrita ao intervalo $[0,2\pi)$. Seja $\mathcal{A}$ a σ-álgebra gerada pelos intervalos diádicos

$$I_k^n = [(k-1)\pi 2^{-n+1}, k\pi 2^{-n+1}), \qquad 1 \le k \le 2^n.$$

Então

$$\text{(2)} \qquad E[f/\mathcal{A}] = \sum_{k=1}^{2^n} \left(\frac{2^n}{2\pi} \int_{I_k^n} f(t)dt \right) \chi_{I_k^n}.$$

Neste exemplo a σ-álgebra $\mathcal{B}$ é atômica e seus átomos são $B_1,\dots,B_k$. Como consequência, a esperança condicional $E[f/\mathcal{B}]$, para qualquer $f \in L^1(\Omega,\mathcal{F}.P;E)$, é caracterizada por 2.6(1).

3. MARTINGAIS REAIS

As referências para os resultados apresentados nesta seção são [15] e [3].

Nesta seção $(\Omega,\mathcal{F},P)$ será um espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ será uma sequência não-decrescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}$ é gerada pala união das σ-álgebras $\mathcal{F}_n$, $n\ge 0$

3.1. DEFINIÇÃO: Seja $f = (f_n)_{n\ge 0}$ uma sequência de funções $f_n:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Se f_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável para todo $n\ge 0$, dizemos que f é adaptada à $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ ou simplesmente adaptada. Se f_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável para todo $n\ge 1$, dizemos que $(f_n)_{n\ge 1}$ é previsível com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ ou simplesmente previsível.

3.2. DEFINIÇÃO: Seja $f = (f_n)_{n\ge 0}$ uma sequência adaptada à $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ de funções de $L^1(\Omega,\mathbb{R})$.

(a) Se $E[f_{n+1}/\mathcal{F}_n] = f_n$, para todo $n \geq 0$, dizemos que f é um martingal com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq o}$.

(b) Se $E[f_{n+1}/\mathcal{F}_n] \geq f_n$, para todo $n \geq 0$, dizemos que f é um submartingal com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq o}$.

(c) Se $E[f_{n+1}/\mathcal{F}_n] \leq f_n$, para todo $n \geq 0$, dizemos que f é um supermartingal com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq o}$.

3.3. **OBSERVAÇÃO**: Alternativamente podemos definir martingal como sendo uma sequência $f = (f_n)_{n\geq o}$ adaptada de funções de $L^1(\Omega,\mathbb{R})$ tal que

$$(1) \qquad E[f_m/\mathcal{F}_n] = f_n,$$

para todo $m > n$. Se a igualdade em (1) é substituida por $\leq$ ou $\geq$ temos também uma definição alternativa para supermartingal e submartingal respectivamente.

Quando dizermos que uma sequência $(f_n)_{n\geq o}$, $f_n \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$ é um martingal, ou submartingal ou supermartingal sem fazermos menção à sequência de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ com respeito a qual isso se verifica, significará que é com respeito à sequência $(\mathcal{B}_n)_{n\geq o}$, onde $\mathcal{B}_n$ é a σ-álgebra gerada pelas funções $f_o, f_1, \dots f_n$.

3.4. **EXEMPLO**. Seja $f \in L^1(\Omega,\mathbb{R})$. Então a sequência $(f_n)_{n\geq o}$ definida por $f_n = E[f/\mathcal{F}_n]$ é um martigal. De fato, por 1.3(g), temos

$$E[f_{n+1}/\mathcal{F}_n] = E[E[f/\mathcal{F}_{n+1}]/\mathcal{F}_n] = E[f/\mathcal{F}_n] = f_n.$$

3.5. **EXEMPLO**: Seja $f = (f_n)_{n\geq o}$ um martingal e $v = (v_n)_{n\geq 1}$ uma sequência previsivel limitada. Então $(|f_n|)_{n\geq o}$ é um submartingal e $g = (g_n)_{n\geq o}$ definida por $g_o = 0$ e

$$g_n = \sum_{j=1}^{n} v_j(f_j - f_{j-1}),$$

é um martingal , chamado de transformado de f por v.

3.6. **DEFINIÇÃO:** Seja $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um martingal e $1 \leq p < \infty$. Se $f_n \in L^p(\Omega,\mathbb{R})$ para todo $n\geq 0$ dizemos que f é um L^p- martingal. Se existe $h\in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ tal que $f_n = E[h/\mathcal{F}_n]$ para todo $n\geq 0$, dizemos que f é um martingal fechado em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ pela função h . Se

(1) $$\|f\|_p = \sup_{n\geq 0}\|f_n\|_p < \infty,$$

dizemos que f é um martingal limitado em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$.

3.7. **DEFINIÇÃO:** Seja $\mathcal{H}$ um subconjunto de $L^1(\Omega,\mathbb{R})$. Se

(1) $$\lim_{a\to+\infty} \sup_{f\in\mathcal{H}} \int_{\{|f|\geq a\}} |f|dP = 0$$

dizemos que $\mathcal{H}$ é uniformemente integrável.

3.8. **OBSERVAÇÃO:** Seja $\mathcal{H}$ um subconjunto de $L^1(\Omega,\mathbb{R})$. Então $\mathcal{H}$ é uniformemente integrável se e somente se

(1) $$\sup_{f\in\mathcal{H}} \|f\|_1 < \infty,$$

e para todo $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que, se $A\in\mathcal{F}$ e $P(A) < \delta$, então

(2) $$\sup_{f\in\mathcal{H}} \int_A |f|dP < \varepsilon.$$

3.9. **TEOREMA:** Seja $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um L^1- martingal. Então são equivalentes:

(a) $\{f_n\}_{n\geq 0}$ é uniformemente integrável,

(b) f converge na norma de $L^1(\Omega,\mathbb{R})$,

(c) f é fechado em $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Além disso, se uma das condições acima é satisfeita, então f converge q.s..

3.10. **TEOREMA:** Seja $1 < p < \infty$ e $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um L^p- martingal. Então são equivalentes:

(a) f é limitado em $L^p(\Omega,\mathbb{R})$,

(b) f converge na norma de $L^p(\Omega,\mathbb{R})$,

(c) f é fechado em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Além disso, se uma das condições acima é satisfeita, então f converge q.s..

3.11. **DEFINIÇÃO:** Um tempo de parada é uma função $\tau:\Omega \longrightarrow \{0,1,\dots,\infty\}$ tal que $\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n$ para todo $n\geq 0$. Se τ é um tempo de parada, a σ-álgebra $\mathcal{F}_\tau$ é definida como sendo o conjunto formado por todos os $A\in\mathcal{F}$ que satisfazem $A\cap\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n$ para todo $n\geq 0$.

3.12. **OBSERVAÇÃO:** Seja $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um martingal e τ um tempo de parada. Então $f^\tau = (f_n^\tau)_{n\geq 0}$ definido por $f_n^\tau(x) = f_{\tau(x)\wedge n}(x)$ é um martingal e é chamado de martingal parado em τ. Se f é fechado em $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ por f_∞, isto é, $f_n = E[f_\infty/\mathcal{F}_n]$ para todo $n\geq 0$, então definimos a função f_τ por $f_\tau(x) = f_{\tau(x)}(x)$. Temos que f_τ é $\mathcal{F}_\tau$-mensurável e o martingal f^τ é fechado por f_τ, isto é, $f_n^\tau = E[f_\tau/\mathcal{F}_n]$ para todo $n\geq 0$.

3.13. **TEOREMA:** Seja $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um martingal fechado em $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ por f_∞ e sejam τ e υ dois tempos de parada tais que $\tau \leq \upsilon$. Então

$$f_\tau = E[f_\upsilon/\mathcal{F}_\tau] = E[f_\infty/\mathcal{F}_\tau]. \tag{1}$$

3.14. **DEFINIÇÃO:** Seja $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um martingal com $f_0 = 0$. A sequência $d = (d_n)_{n\geq 1}$ definida por $d_n = f_n - f_{n-1}$ para $n\geq 1$, é chamada a sequência de difereças de martingal associada a f.

3.15. DEFINIÇÃO: Seja $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um martingal com $f_0 = 0$ e seja $d = (d_n)_{n\geq 1}$ a sequência de diferenças associada a f. Definimos

(1) $$f_n^* = \sup_{k\leq n}|f_k| \quad , \qquad f^* = \sup_{n\geq 0}|f_n|.$$

(2) $$S_n(f) = \left(\sum_{k=1}^{n}|d_k|^2\right)^{1/2} \qquad S(f) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|d_k|^2\right)^{1/2}.$$

3.16. TEOREMA(Desigualdade de Doob): Seja $1 < p < \infty$ e $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um L^p- martingal ou um L^p- submartingal positivo. Então

(1) $$\|f^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\,\|f\|_p.$$

3.17. TEOREMA: Seja $1 < p < \infty$. Então existe uma constante positiva C_p, dependendo somente de p, tal que

(1) $$C_p^{-1}\|f_n\|_p \leq \|S_n(f)\|_p \leq C_p\|f_n\|_p,$$

para todo martingal $f = (f_n)_{n\geq 0}$ com $f_0 = 0$ e para todo $n\geq 0$.

3.18. OBSERVAÇÃO: Seja $1 < p < \infty$ e $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um martingal com $f_0 = 0$. Então segue de 3.17(1) que

(1) $$C_p^{-1}\|f\|_p \leq \|S(f)\|_p \leq C_p\|f\|_p,$$

onde $\|f\|_p$ está definido em 3.6(1). Se f for fechado por $f_\infty \in L^p(\Omega,\mathcal{F},P)$ então segue por 3.10 que $\|f\|_p = \|f_\infty\|_p$.

3.19. OBSERVAÇÃO: Seja $1 < p < \infty$, $f = (f_n)_{n\geq 0}$ um martingal com $f_0 = 0$ e $v = (v_n)_{n\geq 1}$ uma sequência previsível tal que $\|v_n\|_\infty \leq M$ para todo $n\geq 1$. Seja $g = (g_n)_{n\geq 0}$ o martingal transformado de f por v, isto é, $g_0 = 0$ e

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} v_k d_k.$$

Então por 3.17(1) existe uma constante positiva C_p tal que

(1) $$\|g_n\|_p \le C_p \|S_n(g)\|_p = C_p \Big\| \Big(\sum_{k=1}^{n} |v_k d_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p$$

$$\le MC_p \|S_n(f)\|_p$$

$$\le MC_p^2 \|f_n\|_p.$$

Em particular para $v = \varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\ge 1}$, onde $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$, obtemos

(2) $$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k\Big\|_p \le C_p^2 \Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k\Big\|_p,$$

para todo $n\ge 1$ e toda sequência de diferenças de martingal $d = (d_n)_{n\ge 1}$.

4. MARTINGAIS VETORIAIS

As referências para as propriedades de martingais vetoriais são [15], [20], [7], e as referências para os espaços U.M.D. são [5] e [4].

Nesta seção $(\Omega,\mathcal{F},P)$ será um espaço de probabilidade, $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ será uma sequência não-decrescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}$ é gerada pela união das σ-álgebras $\mathcal{F}_n$, $n \ge 0$ e E será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$.

4.1. DEFINIÇÃO: Seja $f = (f_n)_{n\ge 0}$ uma sequência de funções $f_n:\Omega \longrightarrow E$. Se f_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável para todo $n\ge 0$, dizemos que f é adaptada à $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ ou simplesmente adaptada. Se f_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável para todo $n\ge 1$, dizemos que $(f_n)_{n\ge 1}$ é previsível com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$ ou simplesmente previsível.

4.2. **DEFINIÇÃO:** Uma sequência $f = (f_n)_{n\geq o}$ adaptada à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq o}$ de funções de $L^1(\Omega,E)$ é chamada de martingal vetorial com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq o}$ se, para todo $n\geq 0$,

(1) $$E[f_{n+1}/\mathcal{F}_n] = f_n.$$

4.3. **EXEMPLO.** Seja $f\in L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$. Então a sequência $(f_n)_{n\geq o}$ definida por $f_n = E[f/\mathcal{F}_n]$ é um martigal vetorial. Se $g = (g_n)_{n\geq o}$ é um martingal vetorial arbitrário , então $(\|g_n\|)_{n\geq o}$ é um submartingal real.

4.4. **EXEMPLO:** Seja $f = (f_n)_{n\geq o}$ um martingal vetorial e $v = (v_n)_{n\geq 1}$ uma sequência previsível real, tal que $\|v_n\|_\infty \leq M$ para alguma constante positiva M e para todo $n\geq 1$. Então $g = (g_n)_{n\geq o}$ definida por $g_o = 0$ e

$$g_n = \sum_{k=1}^{n} v_k(f_k - f_{k-1}),$$

é um martingal vetorial, chamado como no caso real,de transformado de f por v. Analogamente, se f é um martingal real e v uma sequência previsível vetorial, então g é um martingal

4.5. **DEFINIÇÃO:** Seja $f = (f_n)_{n\geq o}$ um martingal vetorial e $1 \leq p < \infty$. Se $f_n\in L^p(\Omega,E)$ para todo $n\geq 0$, dizemos que f é um L^p_E- martingal. Se existe $h\in L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ tal que $f_n = E[h/\mathcal{F}_n]$ para todo $n\geq 0$, dizemos que f é um martingal fechado em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ pela função h. Se

(1) $$\|f\|_{L^p_E} = \sup_{n\geq o}\|f_n\|_{L^p_E} < \infty,$$

dizemos que f é um martingal limitado em $L^p(\Omega,E)$.

4.6. **TEOREMA:** Seja $1 \leq p < \infty$ e $f = (f_n)_{n\geq o}$ um L^p_E- martingal fechado em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ por f_∞. Então $f_n \longrightarrow f_\infty$ q.s. e na norma de $L^p(\Omega,E)$.

4.7. TEOREMA: Seja $f = (f_n)_{n\geq o}$ um L^1_E- martingal e E um espaço de Banach reflexivo. Então são equivalentes:

(a) $\{\|f_n\|\}_{n\geq o}$ é uniformemente integrável,

(b) f converge na norma de $L^1(\Omega,E)$,

(c) f é fechado em $L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$.

Além disso, se uma das condições acima é satisfeita, então f converge q.s..

4.8. TEOREMA: Seja $1 < p < \infty$, $f = (f_n)_{n\geq o}$ um L^p_E- martingal e E um espaço de Banach reflexivo. Então são equivalentes:

(a) f é limitado em $L^p(\Omega,E)$,

(b) f converge na norma de $L^p(\Omega,E)$,

(c) f é fechado em $L^p(\Omega,\mathcal{F},P;E)$.

Além disso, se uma das condições acima é satisfeita, então f converge q.s..

4.9. OBSERVAÇÃO: Seja $f = (f_n)_{n\geq o}$ um martingal vetorial, τ um tempo de parada e sejam $f^\tau = (f^\tau_n)_{n\geq o}$ e f_τ como em 3.12. Então f^τ é um martingal vetorial e f_τ é $\mathcal{F}_\tau$-mensurável. Se υ é outro tempo de parada tal que $\tau \leq \upsilon$ e f é fechado em $L^1(\Omega,\mathcal{F},P;E)$ por f_∞, então

(1) $$f_\tau = E[f_\upsilon/\mathcal{F}_\tau] = E[f_\infty/\mathcal{F}_\tau].$$

Seja $1 < p < \infty$ e suponha que f seja um L^p_E- martingal. Então $(\|f_n\|)_{n\geq o}$ é um submartingal positivo e assim pelo teorema 3.16 segue que

(2) $$\|f^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\, \|f\|_{L^p_E},$$

onde

(3) $$f_n^* = \sup_{k\le n}\|f_k\| \quad , \qquad f^* = \sup_{n\ge o}\|f_n\|,$$

(4) $$\|f\|_{L^p_E} = \sup_{n\ge o}\|f_n\|_{L^p_E}.$$

Se $f_o = 0$, a sequência $d = (d_n)_{n\ge 1}$ definida por $d_n = f_n - f_{n-1}$, $n\ge 1$, é chamada de sequência de diferenças associada a f.

4.10. OBSERVAÇÃO: Seja Y um conjunto e $\mathcal{E}$ uma família de subconjuntos de Y. Denotaremos por $\sigma(\mathcal{E})$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{E}$, isto é, a menor σ-álgebra sobre Y que contém $\mathcal{E}$. Se $\mathcal{H}$ é uma família de funções $f:Y\longrightarrow\mathbb{R}$, denotaremos por $\sigma(\mathcal{H})$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{H}$, isto é, a menor σ-álgebra sobre Y sob a qual as funções de $\mathcal{H}$ são mensuráveis. A σ-álgebra $\sigma(\mathcal{H})$ é a σ-álgebra $\sigma(\mathcal{E})$, onde $\mathcal{E}$ é a família formada por todos os conjuntos da forma $f^{-1}(A)$, $f\in\mathcal{H}$ e $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Para n,k inteiros, $n\ge 0$ e $1 \le k \le 2^n$, escrevemos

(1) $$I_k^n = [(k-1)\pi 2^{-n+1}, k\pi 2^{-n+1}).$$

Denotaremos por $\mathcal{A}_n$, $n\ge 0$, a σ-álgebra sobre $[0\ ,2\pi)$ gerada pelos intervalos diádicos I_k^n, $1 \le k \le 2^n$. Temos que $\mathcal{A}_o = \{\ \emptyset,\ [0,2\pi)\}$.

Denotaremos por $\{-1,1\}^n$, $n\ge 1$, o conjunto formado por todas as sequências finitas de n elementos $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)$ tais que $\varepsilon_j\in\{-1,1\}$ para todo $1 \le j \le n$.

4.11. DEFINIÇÃO: Um martingal $f = (f_n)_{n\ge o}$, $f_n:[0,2\pi)\longrightarrow E$, sobre o espaço de probabilidade $\left([0.2\pi),\ \mathcal{B}([0,2\pi)),\ dt/2\pi\right)$ e com respeito a sequência $(\mathcal{A}_n)_{n\ge o}$ definida em 4.10 será chamado de martingal diádico.

4.12. DEFINIÇÃO: Dizemos que um espaço de Banacha E tem a propriedade U.M.D. (propriedade de incondicionalidade para sequências de diferenças de martingais), se para algum $1 < p < \infty$, existe uma constante C_p, dependendo somente de p e E, tal que

(1) $$\|\varepsilon_1 d_1+ \varepsilon_2 d_2+\ldots+ \varepsilon_n d_n\|_{L^p_E} \le C_p \|d_1+ d_2+\ldots+ d_n\|_{L^p_E},$$

para todo $n\ge1$, todo $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ e toda sequência de diferenças $d = (d_k)_{k\ge1}$, associada a um L^p_E- martingal diádico $f = (f_k)_{k\ge0}$ com $f_0= 0$.

4.13. **OBSERVAÇÃO:** Segue como consequência da caracterização geométrica dos espaços **U.M.D.** dada por D. L. Burkholder em [4], que a condição 4.12(1) na definição de espaço **U.M.D.**, independe do espaço de probabilidade e da sequência de sub-σ-álgebras, isto é, se o espaço de Banach **E** tem a propriedade **U.M.D.**, então para qualquer espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e qualquer sequência crescente $(\mathcal{F}_k)_{k\ge0}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, temos que 4.12(1) é verdadeira para todo $n\ge1$, todo $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ e toda sequência de diferenças $d = (d_k)_{k\ge1}$, associada a um L^p_E- martingal $f = (f_k)_{k\ge1}$ com $f_0= 0$, sobre o espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e com respeito à sequência $(\mathcal{F}_k)_{k\ge0}$. Observamos também que a constante C_p em 4.12(1) independe do espaço de probabilidade e da sequência de sub-σ-álgebras considerada.

4.14. **EXEMPLO:** Temos por 3.19(2) que $\mathbb{R}$ é um espaço **U.M.D.**. Isto mostra que a classe **U.M.D.** não é vazia.

4.15. **OBSERVAÇÃO:** A definição de espaço **U.M.D.**, independe de $1 < p < \infty$, isto é, se a desigualdade 4.12(1) vale para um $1 < p_0 < \infty$, então ela também é verdadeira para todo $1 < p < \infty$. Esse fato segue da caracterização dos espaços **U.M.D.** via limitação do operador de conjugação sobre $L^p(T,E)$, para algum $1 < p < \infty$, que será dada no capítulo III e do fato que, se o operador de conjugação é limitado sobre $L^q(T.E)$, $q = p_0$, para algum $1 < p_0 < \infty$, então é limitado sobre $L^p(T,E)$ para todo $1 < p < \infty$ (ver [23], pag. 104 ou [18], pag. 202). Outra forma de ver que a definição de espaço **U.M.D.** independe da escolha de $1 < p < \infty$, é através da caracterização geométrica dos espaços **U.M.D.**, dado por D. L. Burkholder em [4].

4.16. **EXEMPLO:** Se E é um espaço U.M.D. e $1 < r < \infty$, então $G = \ell^r(E)$ também é um espaço U.M.D.. Com efeito, pela observação 4.15, existe uma constante C_r, dependendo somente de r e E, tal que a desigualdade 4.12(1) é verdadeira para $p = r$, para todo $n \geq 1$, para todo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$ e para toda sequência de diferenças $d = (d_k)_{k\geq 1}$, associada a um L^r_E- martingal diádico $f = (f_k)_{k\geq o}$ com $f_o = 0$. Seja então $F = (F_k)_{k\geq o}$ um L^r_G- martingal diádico com $F_o = 0$. Para $k,m \geq 1$ escrevemos $d_k^m = F_k^m - F_{k-1}^m$ e assim

$$d = (d_k)_{k\geq 1} = \left((F_k^m)_{m\geq 1} - (F_{k-1}^m)_{m\geq 1}\right)_{k\geq 1}$$

$$= \left((d_k^m)_{k\geq 1}\right)_{m\geq 1}.$$

Temos então que

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k\Big\|^r_{L^r_G} = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k(t)\Big\|^r_G dt = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty}\Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k^m(t)\Big\|^r dt$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k d_k^m(t)\Big\|^r dt$$

$$\leq C_r^r\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k^m(t)\Big\|^r dt$$

$$= C_r^r\frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k(t)\Big\|^r_G dt$$

$$= C_r^r\Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k\Big\|^r_{L^r_G}.$$

4.17. EXEMPLO: Se E é um espaço U.M.D., $1 < r < \infty$ e $(X,\mathcal{A},d\mu)$ é um espaço de medida σ-finito, então $F = L^r(X,\mathcal{A},\mu;E)$ também é U.M.D.. Com efeito, pela observação 4.15, existe uma constante C_r, dependendo somente de r e E, tal que a desigualdade 4.12(1) é verdadeira para

$p = r$, para todo $n\geq 1$, para todo $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ e para toda sequência de diferenças $d = (d_k)_{k\geq 1}$, associada a um L^r_E- martingal diádico $f = (f_k)_{k\geq 0}$ com $f_0 = 0$. Seja então $G = (G_k)_{k\geq 0}$ um L^r_F-martingal diádico tal que $G_0 = 0$. Para $k\geq 0$ e $t\in[0,2\pi)$ escrevemos $d^t_k = G_k(t)-G_{k-1}(t)$. Portanto segue pelo teorema de Tonelli que

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k d_k\Big\|^r_{L^r_F} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k d^t_k\Big\|^r_F dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_X\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k d^t_k(x)\Big\|^r d\mu(x)dt \\
&= \int_X\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k d^t_k(x)\Big\|^r dtd\mu(x) \\
&\leq C^r_r\int_X\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n} d^t_k(x)\Big\|^r dtd\mu(x) \\
&= C^r_r\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_X\Big\|\sum_{k=1}^{n} d^t_k(x)\Big\|^r d\mu(x)dt = C^r_r\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k\Big\|^r_F dt \\
&= C^r_r\Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k\Big\|^r_{L^r_F}.
\end{aligned}$$

4.18. **EXEMPLO:** Se H é um espaço de Hilbert e $f\in L^2(T,E)$, então

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|f(t)\|^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\|\hat{f}(n)\|^2.$$

Assim

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|\tilde{f}(t)\|^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\|-i\operatorname{sgn}(n)\hat{f}(n)\|^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\hat{f}(n)\|^2 - \|\hat{f}(0)\|^2$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(t)\|^2 dt.$$

Portanto segue pelo teorema 2.7 do Capítulo III que H tem a propriedade U.M.D..

5. AS FUNÇÕES DE RADEMACHER

Não conhecemos uma referência para as propriedades das funções de Rademacher que serão apresentadas nesta seção. O teorema 5.9 pode ser encontrado em [2].

Nesta seção E será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e o toro T será identificado com o intervalo $[0,2\pi)$ que estará munido da medida de probabilidade $(1/2\pi)dt$. A medida de um conjunto mensurável $A \subset [0,2\pi)$ com respeito a essa medida de probabilidade será denotada por $|A|$.

5.1. DEFINIÇÃO: Seja $s:[0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$s(t) = \mathrm{sgn}(\mathrm{sen}\, t).$$

Para cada inteiro $n \geq 0$ definimos a função de Rademacher $r_n:[0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $r_n(t) = \mathrm{sgn}(\mathrm{sen}\, 2^{n-1}t) = s(2^{n-1}t)$.

5.2. OBSERVAÇÃO: Nesta seção, I_k^n, para $n \geq 0$ e $1 \leq k \leq 2^n$, serão os intervalos diádicos definidos em 4.10 e $\mathcal{A}_n$, para $n \geq 0$, será a σ-álgebra gerada pelos intervalos diádicos I_k^n, $1 \leq k \leq 2^n$ também definida em 4.10. Vimos que $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, [0,2\pi)\}$ e temos também que a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}([0,2\pi))$ é gerada pela união das σ-álgebras $\mathcal{A}_n$, $n \geq 0$. Como a imagem de r_n é $\{-1,1\}$ e r_n é constante em I_k^n, para $1 \leq k \leq 2^n$, então

$$r_n^{-1}(1) = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{2k-1}^n \quad , \qquad r_n^{-1}(-1) = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{2k}^n$$

e assim

(1) $$r_n(t) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \chi_{I_{2k-1}^n}(t) - \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \chi_{I_{2k}^n}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^{k-1} \chi_{I_k^n}(t).$$

Segue como consequência de (1) que r_n é $\mathcal{A}_n$-mensurável. Observamos que, se $n,s \geq 1$ e $1 \leq j \leq 2^n$, então

(2) $$I_j^n = \bigcup_{k=2^s(j-1)+1}^{2^s j} I_k^{n+s}.$$

5.3. TEOREMA: Se $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ é uma sequência crescente de n números inteiros e $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, então existe uma sequência crescente de números inteiros $1 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_{2^{k_n - n}} \leq 2^{k_n}$, com $2^{k_n - n}$ elementos, tal que

(1) $$\bigcap_{j=1}^{n} r_{k_j}^{-1}(\varepsilon_j) = \bigcup_{l=1}^{2^{k_n-n}} I_{s_l}^{k_n}.$$

Em particular temos que

(2) $$\left| \bigcap_{j=1}^{n} r_{k_j}^{-1}(\varepsilon_j) \right| = 2^{-n}.$$

Demonstração: Temos que (2) segue imediatamente de (1). Faremos a demonstração de (1) por indução sobre n. Para $n = 1$, (1) é simples consequência de 5.2(1). Suponhamos que (1) seja verdade para toda sequência crescente $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ com n números inteiros e para todo $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$. Seja $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_{n+1}$ uma sequência crescente com n+1 números inteiros e seja $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1,1\}^{n+1}$. Pela hipóteses de indução

$$(3) \qquad \bigcap_{j=1}^{n+1} r_{k_j}^{-1}(\varepsilon_j) = \left\{ \bigcup_{i=1}^{2^{k_n-n}} I_{s_i}^{k_n} \right\} \cap r_{k_{n+1}}^{-1}(\varepsilon_{n+1})$$

e tomando $u = k_{n+1} - k_n$ segue por 5.2(2) que

$$(4) \qquad I_{s_i}^{k_n} = \bigcup_{l=2^u(s_i-1)+1}^{2^u s_i} I_l^{k_{n+1}}$$

para todo $1 \leq i \leq 2^{k_n-n}$. Portanto tomando $\varepsilon_{n+1} = 1$, segue por (3), (4) e pela observação 5.2 que

$$(5) \qquad \bigcap_{j=1}^{n+1} r_{k_j}^{-1}(\varepsilon_j) = \bigcup_{i=1}^{2^{k_n-n}} \left\{ \bigcup_{\substack{l=2^u(s_i-1)+1 \\ l \text{ impar}}}^{2^u s_i} I_l^{k_{n+1}} \right\}.$$

Segue por (5) que $\bigcap_{j=1}^{n+1} r_{k_j}^{-1}(\varepsilon_j)$ é reunião de $2^{k_n-n} \cdot 2^{u-1} = 2^{k_{n+1}-(n+1)}$ intervalos diádicos $I_l^{k_{n+1}}$ e portanto temos (1). Tomando $\varepsilon_{n+1} = -1$, obtemos (5) com l par ao invés de l impar e assim também temos (1).

5.4. COROLÁRIO: Seja $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ uma sequência crescente de n números inteiros, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, σ uma permutação do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ e σ^{-1} a inversa de σ. Então

$$(1) \qquad \bigcap_{i=1}^{n} r_{k_{\sigma(i)}}^{-1}(\varepsilon_i) = \bigcap_{i=1}^{n} r_{k_i}^{-1}(\varepsilon_{\sigma^{-1}(i)})$$

e

(2) $$\left|\bigcap_{i=1}^{n} r_{k_{\sigma(i)}}^{-1}(\varepsilon_i)\right| = 2^{-n}.$$

Demonstração: Para cada $1 \le i \le n$, existe um único $1 \le j \le n$ tal que $\sigma(i) = j$, isto é, $i = \sigma^{-1}(j)$. Então

$$r_{k_{\sigma(i)}}^{-1}(\varepsilon_i) = r_{k_j}^{-1}(\varepsilon_{\sigma^{-1}(j)})$$

e portanto (1) é demonstrado. Por outro lado, como $\varepsilon = (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)},\varepsilon_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,\varepsilon_{\sigma^{-1}(n)})\in\{-1,1\}^n$, então (2) segue por 5.3(2).

5.5. COROLÁRIO: Seja $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ uma sequência crescente de n números inteiros e sejam $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ dois elementos de $\{-1,1\}^n$. Para cada $1 \le i \le n$ seja s_i a função dada por

(1) $$s_i(t) = \alpha_i r_{k_i}(t), \quad t\in[0,2\pi).$$

Então

(2) $$\left|\bigcap_{i=1}^{n} s_i^{-1}(\varepsilon_i)\right| = 2^{-n}.$$

Demonstração: Para cada $1 \le i \le n$, $t\in s_i^{-1}(\varepsilon_i)$ se e somente se $t\in r_{k_i}^{-1}(\alpha_i\varepsilon_i)$, isto é, $s_i^{-1}(\varepsilon_i) = r_{k_i}^{-1}(\alpha_i\varepsilon_i)$. Logo (2) segue por 5.3(2).

5.6. DEFINIÇÃO: Sejam $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ dois espaços de probabilidade, $n\in\mathbb{N}$ e considere $\mathbb{R}^n$ munido da σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Seja $F:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}$-mensurável e $G:\Omega'\longrightarrow\mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}'$-mensurável. Se as medidas imagem PF^{-1} e $P'G^{-1}$ coincidem sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, isto é, se

(1) $$P(F^{-1}(A)) = P'(G^{-1}(A)),$$

para todo boreliano $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, dizemos que F e G têm a mesma distribuição.

5.7. **OBSERVAÇÃO:** Sejam $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ e $F = (f_1,\dots,f_n)$, $G = (g_1,\dots,g_n)$ como na definição 5.6. Então F e G têm a mesma distribuição se e somente se

(1) $$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} f_k^{-1}([a_k,b_k])\right) = P'\left(\bigcap_{k=1}^{n} g_k^{-1}([a_k,b_k])\right),$$

para todos a_k, $b_k\in\mathbb{R}$, $a_k < b_k$, $1 \le k \le n$. Com efeito, (1) segue como consequência do fato que as probabilidades PF^{-1} e $P'G^{-1}$ coincidem sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se e somente se coincidem sobre todos os retângulos do tipo $\prod_{k=1}^{n}[a_k,b_k]$.

5.8. **EXEMPLO:** Sejam $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_n$ e $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_n$ duas sequências de n números inteiros, seja $t\in[0,2\pi)$ e sejam F, $G:[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^n$ definidas por

(1) $$F(x) = (r_{k_1}(x), r_{k_2}(x), \dots, r_{k_n}(x)),$$

(2) $$G(x) = (r_{j_1}(t)r_{j_1}(x),\ r_{j_2}(t)r_{j_2}(x), \dots, r_{j_n}(t)r_{j_n}(x)).$$

Considere $\Omega = [0,2\pi)^n$ munido da σ-álgebra de Borel e da medida de probabilidade produto $P = \prod_{k=1}^{n} P_k$ onde P_k é igual a $(1/2\pi)dt$ para todo $1 \le k \le n$. Seja $H:[0,2\pi)^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ definida por

(3) $$H(x_1,x_2,\dots,x_n) = (u(x_1),u(x_2),\dots,u(x_n)),$$

onde $u(y) = \mathrm{sgn}(\cos y)$ para $y\in[0,2\pi)$. Temos que $H([0,2\pi)^n) = \{-1,1\}^n$ e para todo $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$,

(4) $$P(H^{-1}(\varepsilon)) = \prod_{k=1}^{n} \left|u^{-1}(\varepsilon_k)\right| = 2^{-n}.$$

Segue então por 5.3(2), 5.5(2) e (4) que as funções F, G e H têm a mesma distribuição.

5.9. **TEOREMA:** Sejam $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ dois espaços de probabilidade, $F:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}$-mensurável e $G:\Omega' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}'$-mensurável. Se F e G têm a mesma distribuição, então para toda $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ temos

(1) $$\int_\Omega \varphi(F(t))dP(t) = \int_{\Omega'} \varphi(G(x))dP'(x).$$

Demonstração: Seja $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi = \chi_A$. Então como F e G têm a mesma distribuição,

$$\int_\Omega \varphi(F(t))dP(t) = P(F^{-1}(A))$$

$$= P'(G^{-1}(A))$$

$$= \int_{\Omega'} \varphi(G(x))dP'(x).$$

Portanto (1) é verdade para funções características e por linearidade da integral, também é verdade para funções simples. Suponha agora $\varphi \geq 0$. Então existe uma sequência crescente $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções simples tal que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ q.s.. Logo pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$\int_\Omega \varphi(F(t))dP(t) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi_k(F(t))dP(t)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega'} \varphi_k(G(x))dP'(x)$$

$$= \int_{\Omega'} \varphi(G(x))dP'(x).$$

Para demonstrar o caso geral, basta decompor $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ e aplicar o caso anterior.

5.10. COROLÁRIO: Sejam $(\Omega,\mathcal{F},P)$ e $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ dois espaços de probabilidade, $F:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}$-mensurável e $G:\Omega' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}'$-mensurável. Se F e G têm a mesma distribuição, então para toda $\psi \in L^p(\mathbb{R}^n,E)$ $1 \le p < \infty$, temos

$$\text{(1)} \qquad \int_{\Omega} \|\psi(F(t))\|^p dP(t) = \int_{\Omega'} \|\psi(G(x))\|^p dP'(x).$$

Demonstração: Basta tomar $\varphi(y) = \|\psi(y)\|^p$ e aplicar o teorema 5.9.

5.11. OBSERVAÇÃO: Sejam F, G e H as funções definidas no exemplo 5.8. Sejam $a_1,\dots,a_n \in E$ e $\psi \in L^p(\mathbb{R}^n,E)$, $1 \le p < \infty$, definida por

$$\psi(t_1,\dots,t_n) = (t_1a_1 + \dots + t_na_n)\chi_{\{-1,1\}^n}(t_1,\dots,t_n).$$

Em 5.8 vimos que F, G e H têm a mesma distribuição e assim segue por 5.10(1) que, para todo $1 \le p < \infty$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\psi(F(t))\|^p dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\psi(G(t))\|^p dt = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi)^n} \|\psi(H(x))\|^p dx,$$

isto é,

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\sum_{j=1}^n r_{k_j}(x)a_j\|^p dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\sum_{k=1}^n r_{j_k}(t)r_{j_k}(x)a_k\|^p dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{[0,2\pi)^n} \|\sum_{j=1}^n u(x_j)a_j\|^p dx_1\dots x_n.$$

5.12. **OBSERVAÇÃO:** Seja $n\geq 1$ e $\mathcal{A}_n$ a σ-álgebra gerada pelos intervalos diádicos I_k^n, $1 \leq k \leq 2^n$. Seja $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ e seja $k_j = j$ para $1 \leq j \leq n$. Pelo teorema 5.3 temos que existe um único $1 \leq s \leq 2^n$ tal que

$$\bigcap_{j=1}^{n} r_j^{-1}(\varepsilon_j) = I_s^n.$$

Como, para $\varepsilon,\varepsilon'\in\{-1,1\}^n$, $\varepsilon \neq \varepsilon'$ temos que

$$\left\{\bigcap_{j=1}^{n} r_j^{-1}(\varepsilon_j)\right\} \cap \left\{\bigcap_{j=1}^{n} r_j^{-1}(\varepsilon'_j)\right\} = \emptyset$$

e $\{-1,1\}^n$ tem 2^n elementos, então para cada $1 \leq s \leq 2^n$, existe um único $\varepsilon\in\{-1,1\}^n$ tal que $I_s^n = \bigcap_{j=1}^{n} r_j^{-1}(\varepsilon_j)$. Consequentemente temos que

(1) $$\mathcal{A}_n = \sigma(r_1,r_2,\dots,r_n) = \sigma(r_o,r_1,r_2,\dots,r_n).$$

6. SÉRIES DE WALSH-FOURIER

Para esta seção, citamos como referência o apêndice C de [10] e o capítulo VI de [16].

Nesta seção **E** será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ e o toro T será identificado com o intervalo $[\,0,2\pi)$ munido da medida $(1/2\pi)dt$ e a medida de um boreliano $A \subset T$ com respeito à medida $(1/2\pi)dt$ será denotada por $|A|$. As funções r_j, $j\geq 0$, serão as funções de Rademacher definidas em 5.1 e $\mathcal{A}_n$, $n\geq 0$ será a σ-álgebra gerada pelos intervalos diádicos I_k^n, $1 \leq k \leq 2^n$, que, por 5.12(1), também é a σ-álgebra gerada pelas funções de Rademacher $r_1,r_2,\dots,r_n$.

6.1. DEFINIÇÃO: Seja $(G,\circ)$ um grupo munido de uma topologia. Se as aplicações $m: G\times G \longrightarrow G$ e $r: G \longrightarrow G$ definidas por $m(x,y) = x\circ y$ e $r(x) = x^{-1}$ são contínuas, dizemos que G é um grupo topológico.

6.2. DEFINIÇÃO: Seja G um grupo topológico de Hausdorff localmente compacto e seja μ uma medida sobre $(G,\mathcal{B}(G))$. Dizemos que μ é uma medida de Radon se,

(a) $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset G$

e

(b) para todo $A\in\mathcal{B}(G)$,

(1) $$\mu(A) = \sup \left\{\mu(K): \ K \subset A, \ K \text{ compacto}\right\}.$$

6.3. DEFINIÇÃO: Seja $(G,+)$ um grupo topológico de Hausdorff comutativo e localmente compacto e seja μ uma medida sobre $(G,\mathcal{B}(G))$. Se μ é de Radon e é invariante por translações, isto é, $\mu(x+A) = \mu(A)$ para todo $x\in G$ e $A\in\mathcal{B}(G)$, dizemos que μ é uma medida de Haar.

6.4. DEFINIÇÃO: Seja G um grupo topológico de Hausdorff comutativo e localmente compacto. Um caracter de G é uma aplicação $\psi: G \longrightarrow T$ que é homomorfismo de grupos contínuo. Denotaremos por $\hat{G}$ o conjunto de todos os caracteres de G.

6.5. OBSERVAÇÃO: Seja G um grupo topológico de Hausdorff comutativo e localmente compacto. Então existe uma medida de Haar sobre G e se μ e υ são duas medidas de Haar sobre G, existe uma constante $\lambda>0$ tal que $\mu = \lambda\upsilon$. Se G é compacto, qualquer medida de Haar sobre G é finita. Quando G for compacto vamos sempre trabalhar com a medida de Haar normalizada, isto é, com a medida de Haar μ tal que $\mu(G) = 1$.

O conjunto $\hat{G}$ dos carcteres de G é um grupo comutativo com respeito ao produto de caracteres. Quando G for compacto, $\hat{G}$ será discreto, isto é, enumerável (ver [16], pag.237).

6.6. EXEMPLO: Se $G = \mathbb{R}$, Todo os caracteres de $\mathbb{R}$ são da forma $\psi_y(x) = e^{iyx}$, $y\in\mathbb{R}$ e se $G = \mathbb{T}$ os caracteres de $\mathbb{T}$ têm a forma $\psi_n(x) = e^{inx}$, $n\in\mathbb{Z}$.

6.7. DEFINIÇÃO: Sejam $f\in L^1(G)$, $g\in L^1(G,E)$ e μ uma medida de Haar sobre G. Definimos o produto de convolução $f*g$ por

(1) $$f*g(x) = \int_G f(x-t)g(t)d\mu(t).$$

6.8. DEFINIÇÃO: Seja G um grupo topológico de Hausdorff comutativo e localmente compacto e seja μ uma medida de Haar sobre G. Se $f\in L^1(G,E)$, definimos a transformada de Fourier de f como sendo a função $\hat{f}:\hat{G}\longrightarrow E$ dada por

(1) $$\hat{f}(\varphi) = \int_G f(x)\overline{\varphi}(x)d\mu(x).$$

Se G é compacto, μ é a medida de Haar normalizada, $\hat{G} = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $f\in L^1(G,E)$, a série de Fourier de f é a série

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(\varphi_n)\varphi_n(x)$$

onde

$$\hat{f}(\varphi_n) = \int_G f(x)\overline{\varphi}_n(x)d\mu(x).$$

6.9. DEFINIÇÃO: Consideremos o grupo aditivo $\mathbb{Z}(2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{o,1\}$. Definimos o grupo de Walsh-Paley $\mathbb{D}$ por

(1) $$\mathbb{D} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}(2) = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ x_n\in\mathbb{Z}(2)\right\}.$$

Para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$ definimos

$$|x| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{n} = \frac{1}{\min\{n\in\mathbb{N}: x_n \neq 0\}} .$$

Denotaremos por $\dot{+}$ a soma em $\mathbb{D}$ e consideraremos $\mathbb{D}$ sempre munido da métrica $d(x,y) = |x\dot{+}y|$.

6.10. OBSERVAÇÃO: Seja $B(x,\delta)$ a bola aberta de centro em $x\in\mathbb{D}$ e raio $\delta>0$. Então para qualquer $0 < \delta \leq 1$, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $B(x,\delta) = B(x,1/k)$, pois $\{|x|: x\in\mathbb{D}\} = \{1/k: k\in\mathbb{N}\}$. Assim $d(x,y) \leq 1$ para todo $x,y\in\mathbb{D}$ e portanto é suficiente considerar bolas de raio $0 < r \leq 1$. Denotemos $[s] = \max\{n\in\mathbb{Z}: n \leq s\}$, $s\in\mathbb{R}$.

6.11. TEOREMA: A topologia em $\mathbb{D}$ induzida pela métrica d coincide com a topologia produto.

Demonstração: Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$ e $0 < r \leq 1$. Então $d(x,y) < r$ implica que $x_n = y_n$ para todo $n \leq 1/r$. Reciprocamente, se $x_n = y_n$ para todo $n \leq 1/r$, então

$$d(x,y) = \frac{1}{\min\{n\in\mathbb{N}: x_n \neq y_n\}} \leq \frac{1}{[1/r]+1} < \frac{1}{1/r} = r.$$

Logo

(1) $$B(x,r) = \left\{ y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}: \ x_n = y_n, \text{ para } n \leq 1/r \right\}.$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$, seja $p_n: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{Z}(2)$ a projeção definida por $p_n(x) = x_n$. Então

(2) $$B(x,r) = \bigcap_{1\leq n\leq [1/r]} p_n^{-1}(\{x_n\}).$$

Portanto $B(x,r)$ é aberto em $\mathbb{D}$ com respeito à topologia produto. Logo a topologia produto é mais fina que a topologia determinada por d.

Sejam agora $z_1, z_2, \ldots, z_k$ em $\mathbb{Z}(2)$ e $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ uma sequência crescente de números inteiros positivos. Tomemos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$ definido por $x_{n_i} = z_i$ para $1 \le i \le k$ e $x_n = 0$ para $n \notin \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Se $r = \max\{n_i : 1 \le i \le K\}$, então $d(x,y) < 1/r$ implica que $x_n = y_n$ para todo $1 \le n \le r$. Como $1 \le n_i \le r$ para $1 \le i \le k$, segue por (2) que

$$B(x,r) = \bigcap_{1\le n\le r} p_n^{-1}(\{x_n\}) \subset \bigcap_{1\le i\le k} p_{n_i}^{-1}(\{x_{n_i}\}) = \bigcap_{1\le i\le k} p_{n_i}^{-1}(\{z_i\}).$$

Portanto a topologia produto é menos fina que a topologia determinada por d. Assim a topologia produto coincide com a topologia determinada por d.

6.12. TEOREMA: $\mathbb{D}$ é um grupo topológico compacto.

Demonstração: É claro que $\mathbb{D}$ é compacto. Sejam $m:\mathbb{D}\times\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ e $r:\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ dados por $m(x,y) = x \dot{+} y$ e $r(x) = -x$.

Sejam $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$ e sejam $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ duas sequências de elementos de $\mathbb{D}$ tais que $x^k \longrightarrow x$ e $y^k \longrightarrow y$ em $\mathbb{D}$. Se $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, $y^k = (y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ então $x_n^k \longrightarrow x_n$ e $y_n^k \longrightarrow y_n$ quando $k \longrightarrow \infty$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Logo $x_n^k \dot{+} y_n^k \longrightarrow x_n \dot{+} y_n$ quando $k \longrightarrow \infty$ para todo $n\in\mathbb{N}$, então $x^k \dot{+} y^k \longrightarrow x \dot{+} y$ e portanto m é contínua em (x,y). Como $r(x) = x$ para todo $x\in\mathbb{D}$, então r é contínua. Portanto $\mathbb{D}$ é um grupo topológico compacto.

6.13. OBSERVAÇÃO: A função $x \longrightarrow |x|$ definida sobre $\mathbb{D}$ em 6.9(2) satisfaz

(1) $$|x \dot{+} y| \le \max\{|x|, |y|\},$$

(2) $$|x \dot{+} y| = \max\{|x|, |y|\}, \quad |x| \ne |y|.$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$, sejam

(3) $$S_k = B(0,1/k) = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{D}:\ x_n = 0,\ \text{para}\ n \le k\right\},$$

(4) $$U_k = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{D}:\ x_n = 0,\ \text{para}\ n > k\right\}, \qquad U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k.$$

Temos que S_k e U_k são subgrupos de $\mathbb{D}$ e $\left\{S_k:\ k\in\mathbb{N}\right\}$ é um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de 0 formado por bolas abertas e compactas. Para $x\in\mathbb{D}$ e $k\in\mathbb{N}$ denotemos $x^k = (x^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o elemento de U_k dado por $x^k_n = x_n$ se $1 \le n \le k$ e $x^k_n = 0$ para $n>k$. Se $x\in\mathbb{D}$ e $k\in\mathbb{N}$ então

(5) $$x \dot{+} S_k = x^k \dot{+} S_k.$$

Portanto

(6) $$\left\{u \dot{+} S_k:\ k\in\mathbb{N},\ u\in U_k\right\}$$

é uma base enumerável para a topologia de $\mathbb{D}$.

Sejam $B(x,\delta)$ e $B(y,\varepsilon)$ duas bolas abertas de $\mathbb{D}$ e suponha que $\delta \le \varepsilon$. Segue por (1) e (2) que, se $z\in B(x,\delta)$ então $B(x,\delta) = B(z,\delta)$ e se $B(x,\delta)\cap B(y,\varepsilon) \ne \emptyset$ então $B(x,\delta) \subset B(y,\varepsilon)$. Logo se $B(x,\delta)$ é um subgrupo de $\mathbb{D}$, $0\in B(x,\delta)$ e assim $B(x,\delta) = B(0,\delta)$.

Para cada $k\in\mathbb{N}$ denotaremos por $e^k = (e^k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o elemento de $\mathbb{D}$ dado por $e^k_n = \delta_{kn} = 0$ se $n \ne k$ e 1 se $n = k$. Então U_k é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Z}(2)$ com 2^k elementos, com dimensão k e que tem $\{e^1,e^2,\dots,e^k\}$ como base.

6.14. TEOREMA: Para cada $i\in\mathbb{N}$ seja $\theta_i\in\hat{\mathbb{D}}$ definido por

(1) $$\theta_i(x) = (-1)^{x_i}, \quad x\in\mathbb{D}.$$

Então o grupo de caracteres $\hat{\mathbb{D}}$ de $\mathbb{D}$ é dado por

(2) $$\hat{\mathbb{D}} = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} (\theta_i)^{a_i} : \quad a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in U \right\}.$$

Demonstração: Seja ρ um caracter de $\mathbb{D}$. Então $\rho(\mathbb{D}) \subset \{-1,1\}$, $\rho(0) = 1$ e $\rho(x) = (-1)^{h(x)}$, onde $h:\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{Z}(2)$ é um homomorfismo de grupos. De fato, como ρ é um homomorfismo ,

$$(-1)^{h(x\dot{+}y)} = \rho(x\dot{+}y) = \rho(x)\rho(y) = (-1)^{h(x)\dot{+}h(y)}$$

e assim $h(x\dot{+}y) = h(x)\dot{+}h(y)$ para qualquer $x,y\in\mathbb{D}$. Além disso, se x^n, $x\in\mathbb{D}$ e $x^n \longrightarrow x$, como ρ é contínuo segue que

$$\rho(x) = (-1)^{h(x)} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{h(x^n)} = (-1)^{\lim_{n\to\infty} h(x^n)},$$

ou seja $\lim_{n\to\infty} h(x^n) = h(x)$. Portanto h é contínuo. Reciprocamente, de forma análoga podemos mostrar que se $h:\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{Z}(2)$ é um homomorfismo de grupos contínuo, então $\rho:\mathbb{D} \longrightarrow T$ definido por $\rho(x) = (-1)^{h(x)}$, $x\in\mathbb{D}$ é um caracter de $\mathbb{D}$. Seja

$$H = \left\{ h:\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{Z}(2), \quad h \text{ homomorfismo contínuo} \right\}.$$

Então

(3) $$\hat{\mathbb{D}} = \left\{ (-1)^h : \quad h\in H \right\}.$$

Seja agora $h\in H$. Como h é contínuo, então $\ker(h) = h^{-1}(\{0\})$ é aberto pois $\{0\}$ é aberto de $\mathbb{Z}(2)$. Por outro lado $0\in \mathrm{Ker}(h)$ pois h é um homomorfismo e assim existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $S_k \subset \ker(h)$.
Sejam e^i e U_k como na observação 6.13. Então para $x\in\mathbb{D}$,

$$x = \sum_{l=1}^{k} x_l e^l + \sum_{l=k+1}^{\infty} x_l e^l$$

$$= \sum_{l=1}^{k} x_l e^l + u, \qquad u \in S_k,$$

e logo

$$h(x) = \sum_{l=1}^{k} x_l h(e^l) + h(u) = \sum_{l=1}^{k} x_l h(e^l).$$

Tomemos $a_l = h(e^l)$, $l \in \mathbb{N}$. Temos que $a = (a_l)_{l\in\mathbb{N}} \in U_k \subset U$ e $h(x) = \sum_{l=1}^{k} x_l a_l$. Portanto se $\rho \in \hat{\mathbb{D}}$ e $\rho = (-1)^h$ então

$$\rho(x) = (-1)^{h(x)} = (-1)^{\sum_{l=1}^{\infty} x_l a_l} = \prod_{l=1}^{\infty} (-1)^{x_l a_l}$$

$$= \prod_{l=1}^{\infty} (\theta_l(x))^{a_l}.$$

6.15. **OBSERVAÇÃO:** Considere a função $\varphi : U \longrightarrow \{0,1,2,\dots\}$ definida por

(1) $$\varphi(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 2^{j-1}.$$

Temos que φ é bijetora. Para cada $n \in \{0,1,2,\dots\}$ escrevemos $a^n = (a^n_j)_{j\in\mathbb{N}} = \varphi^{-1}(n)$. Denotamos por ρ_n o elemento de $\hat{\mathbb{D}}$, definido por

(2) $$\rho_n(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (\theta_j(x))^{a^n_j}$$

e assim temos que $\hat{\mathbb{D}} = \{ \rho_n : n \geq 0 \}$. Em particular temos que para $n = 2^{k-1}$, $a^n_j = 0$ se $j \neq k$ e $a^n_j = 1$ se $j = k$, portanto $\rho_{2^{k-1}} = \theta_k$.

6.16. **TEOREMA:** Considere a função $\psi:\mathbb{D}\longrightarrow[0,2\pi]$ definida por

(1) $$\psi(x) = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}, \quad x\in\mathbb{D}$$

e seja

(2) $$S = \left\{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{D}:\ \text{existe}\ n_0\in\mathbb{N}\ \text{tal que}\ x_n = 1,\ \text{para}\ n \geq n_0\right\}.$$

Então a função ψ é contínua, $\Psi = \psi/_{\mathbb{D}\setminus S}:\mathbb{D}\setminus S\longrightarrow[0,2\pi)$ é bijetora, $\Psi^{-1}:[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{D}\setminus S$ é $\mathcal{B}([0,2\pi))$-mensurável e

(3) $$\left\{\psi^{-1}(I_j^k):\ 1 \leq j \leq 2^k\right\} = \left\{u^k \dotplus S_k:\ u^k\in U_k\right\}.$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $k\in\mathbb{N}$ tal que $2\pi/2^k < \varepsilon$. Então, se $d(x,y) < 1/k$ temos que $x_n = y_n$, para $1 \leq n \leq k$ e assim

$$\begin{aligned}|\psi(x) - \psi(y)| &= 2\pi\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}\right| \\ &\leq 2\pi\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n} \\ &< 2\pi\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2\pi/2^k \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Logo ψ é contínua. ψ é claramente sobrejetora, embora não seja injetora. De fato, seja $k\in\mathbb{N}$ e $x,y\in\mathbb{D}$, definidos por $x_n = 0$ se $n \neq k$ e $x_n = 1$ se $n = k$, $y_n = 0$ se $1 \leq n \leq k$ e $y_n = 1$ para $n\geq k+1$. Então $\psi(x) = \psi(y) = 2\pi/2^k$ e assim ψ não é injetora (observe que $y\in S$ e $x\in U$). Mais ainda, se $\psi(x) = \psi(y)\in[0,2\pi)$ e $x \neq y$, então $x\in U$ e $y\in S$ ou $x\in S$ e $y\in U$. Consequentemente $\Psi = \psi/_{\mathbb{D}\setminus S}$ é injetora e $\Psi(\mathbb{D}\setminus S) = [0,2\pi)$.

Seja agora $t\in\psi(S_k\setminus S)$ e seja $x\in S_k\setminus S$ tal que $t = \psi(x)$. Como $x\in S_k\setminus S$ temos que

$$t = \psi(x) = 2\pi \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} < 2\pi/2^k$$

e logo $t\in[0,2\pi/2^k)$. Reciprocamente, se $t\in[0,2\pi/2^k)$ existe um $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{D}\setminus S$ tal que $x_n = 0$ para $n\le k$ e $t = \psi(x)$. Assim $t\in\psi(S_k\setminus S)$ e logo $\psi(S_k\setminus S) = [0,2\pi/2^k)$. Como $\left\{u^k \dot{+} S_k:\ k\in\mathbb{N} \text{ e } u^k\in U_k\right\}$ é uma base enumerável de abertos da topologia de $\mathbb{D}$, então para mostrar que Ψ^{-1} é $\mathcal{B}([0,2\pi))$- mensurável, basta mostrar que $\psi(u^k\dot{+}S_k\setminus S)\in\mathcal{B}([0,2\pi))$ para todo $k\in\mathbb{N}$ e $u^k\in U_k$. Se $k\in\mathbb{N}$ e $u^k\in U_k$,

$$\psi(u^k\dot{+}S_k\setminus S) = \psi(u^k) + [0,2\pi/2^k).$$

Mas

$$\psi(U_k) = \left\{ (j-1)\pi 2^{-k+1}:\ 1 \le j \le 2^k \right\}$$

e portanto

(4) $$\psi(u^k\dot{+}S_k\setminus S) = [(j-1)\pi 2^{-k+1}, j\pi 2^{-k+1})$$

para algum $1 \le j \le 2^k$. Assim Ψ^{-1} é $\mathcal{B}([0,2\pi))$- mensurável e (3) segue de (4).

6.17. **TEOREMA:** Seja $\mathbb{P}:\mathcal{B}(\mathbb{D})\longrightarrow[0,1]$ definida por $\mathbb{P}(A) = |\psi(A)|$ para todo $A\in\mathcal{B}(\mathbb{D})$. Então $\mathbb{P}$ é uma medida de Haar sobre $\mathbb{D}$, $\mathbb{P}(\mathbb{D}) = 1$ e

(1) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_{\mathbb{D}} f(\psi(x))d\mathbb{P}(x),$$

para qualquer $f\in L^1(\mathbf{T},E)$. Além disso $L^1(\mathbb{D}\setminus S,E) = L^1(\mathbb{D},E)$.

Demonstração: Temos que S é enumerável, portanto $\psi(S)$ é enumerável e assim $|\psi(S)| = 0$. Temos também que a aplicação que a cada $A\in\mathcal{B}(\mathbb{D}\setminus S)$ associa o número $|\Psi(A)|$ é uma medida pois é a medida imagem de $(1/2\pi)dt$ por Ψ^{-1}. Logo segue que $\mathbb{P}$ também é uma medida pois $\mathbb{P}(A) = |\Psi(A\setminus S)|$, e temos que $\mathbb{P}(\mathbb{D}) = |\Psi(\mathbb{D}\setminus S)| = |[0,2\pi)| = 1$. Como $\mathbb{P}(S) = 0$ temos que $L^1(\mathbb{D}\setminus S,E) = L^1(\mathbb{D},E)$ e por propriedade da medida imagem obtemos (1).

Como $\left\{u^k \dot{+} S_k: \ k\in\mathbb{N}\ , \ u^k\in U_k\right\}$ é uma base enumerável de abertos de $\mathbb{D}$ formada por abertos que também são compactos, então todo aberto de $\mathbb{D}$ é σ-compacto. Logo como $\mathbb{P}$ é finita, temos que $\mathbb{P}$ é de Radon (Ver [19], pag. 50). Para $x\in\mathbb{D}$ e $k\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x\dot{+}S_k) &= \mathbb{P}(x^k\dot{+}S_k) = |\psi(x^k\dot{+}S_k)| \\ &= |\psi(x^k) + \psi(S_k)| \\ &= |\psi(S_k)| = \mathbb{P}(S_k).\end{aligned}$$

Seja A um aberto de $\mathbb{D}$ e seja $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\left\{u^k \dot{+} S_k: \ k\in\mathbb{N}\ , \ u^k\in U_k\right\}$ tal que $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$. Se $x\in\mathbb{D}$, então $\mathbb{P}(x\dot{+}A_j) = \mathbb{P}(A_j)$ para todo $j\in\mathbb{N}$ e assim

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x\dot{+}A) &= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(x\dot{+}A_j)\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(x\dot{+}A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\Big) = \mathbb{P}(A).\end{aligned}$$

Agora, se $A\in\mathcal{B}(\mathbb{D})$, como $\mathbb{P}$ é de Radon obtemos que $\mathbb{P}(x\dot{+}A) = \mathbb{P}(A)$ para todo $x\in\mathbb{D}$.

6.18. DEFINIÇÃO: Para cada $n\geq 0$ definimos a função de Walsh $W_n:[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}$ por

(1) $$W_n(t) = \prod_{j=1}^{\infty}(r_j(t))^{a_j^n},$$

onde r_j, $j\in\mathbb{N}$, são as funções de Rademacher e $a^n = (a_j^n)_{j\in\mathbb{N}} = \varphi^{-1}(n)\in U$ está definido em 6.15. Para $n\geq 1$ e $f\in L^1(T,E)$, definimos

(2) $$R_n f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)W_k(t), \qquad \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)W_k(t)dt.$$

6.19. OBSERVAÇÃO: Sempre existe $j_o\in\mathbb{N}$ tal que $a_j^n = 0$ para $j > j_o$. De fato $a_j^n = 0$ para $j\geq n$. Dessa forma, W_n é no máximo o produto de n funções de Rademacher. Além disso

$$W_0 = 1, \qquad W_1 = r_1, \qquad W_2 = r_2,$$

$$W_3 = r_1r_2 \qquad W_4 = r_3, \qquad W_5 = r_1r_3$$

$$W_6 = r_2r_3, \qquad W_7 = r_1r_2r_3, \quad \ldots,$$

e em geral, para $n\geq 1$, $W_{2^{n-1}} = r_n$.

6.20. LEMA: (a) Para $k\geq 1$, $n\geq 0$ e $x\in\mathbb{D}\setminus S$

(1) $$\rho_{2^{k-1}}(x) = \theta_k(x) = r_k(\psi(x)), \qquad \rho_n(x) = W_n(\psi(x)).$$

(b) Para $n\geq 1$ seja $D_n:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

(2) $$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(x), \qquad x\in\mathbb{D}.$$

Então para qualquer $f\in L^1(T,E)$, $n\geq 1$ e $x\in\mathbb{D}\setminus S$, temos que

(3) $$R_n f(\psi(x)) = (f\circ\psi)*D_n(x).$$

Demonstração: Seja $x\in\mathbb{D}\backslash S$. Temos que $1 = \theta_k(x) = (-1)^{x_k}$ se e somente se $x_k = 0$, isto é, se e somente se

$$\psi(x)\in \bigcup_{\substack{1\le j\le 2^k \\ j \text{ impar}}} [(j-1)\pi 2^{-k+1}, j\pi 2^{-k+1}).$$

De forma análoga mostramos que $\theta_k(x) = -1$ se e somente se

$$\psi(x)\in \bigcup_{\substack{1\le j\le 2^k \\ j \text{ par}}} [(j-1)\pi 2^{-k+1}, j\pi 2^{-k+1}).$$

Portanto podemos concluir que $\rho_{2^{k-1}}(x) = \theta_k(x) = r_k(\psi(x))$. Além disso

$$\rho_n(x) = \prod_{j=1}^{\infty}(\theta_j(x))^{a_j^n} = \prod_{j=1}^{\infty}(r_j(\psi(x)))^{a_j^n}$$

$$= W_n(\psi(x)).$$

Passemos a demonstrar (b). Tomemos $t = \psi(x)\in[0,2\pi)$, $x\in\mathbb{D}\backslash S$. Então por 6.18(2), 6.17(1) e (1) temos que

$$R_n f(t) = R_n f(\psi(x)) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)W_k(t)dt\right)W_k(\psi(x))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\mathbb{D}} f(\psi(y))W_k(\psi(y))d\mathbb{P}(y)\right)W_k(\psi(x))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\mathbb{D}} (f\circ\psi)(y)\rho_k(y)d\mathbb{P}(y)\right)\rho_k(x)$$

$$= \int_{\mathbb{D}} (f\circ\psi)(y))D_n(x\dot{+}y)d\mathbb{P}(y)$$

$$= (f\circ\psi)*D_n(x).$$

6.21. **LEMA:** Seja $k\in\mathbb{N}$ e $0 \le m \le 2^{k-1}-1$. Então

(1) $$\rho_{2^{k-1}+m} = \rho_{2^{k-1}}\,\rho_m,$$

(2) $$\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \rho_j = \theta_k \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \rho_j.$$

Demonstração: Seja $n = 2^{k-1}+ m$. Segue por 6.15 que

$$\rho_{2^{k-1}}(x)\rho_m(x) = \theta_k(x) \prod_{j=1}^{k-1}(\theta_j(x))^{a_j^m}$$

$$= \prod_{j=1}^{k}(\theta_j(x))^{a_j^n} = \rho_n(x).$$

Agora, desde que $\rho_{2^{k-1}} = \theta_k$, segue por (1) que

$$\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \rho_j = \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \rho_{2^{k-1}+j} = \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \rho_{2^{k-1}}\,\rho_j$$

$$= \rho_{2^{k-1}} \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \rho_j$$

$$= \theta_k \sum_{j=0}^{2^{k-1}-1} \rho_j.$$

6.22. LEMA: Para todo $k \geq 1$,

$$D_{2^k} = \prod_{j=1}^{k} (1+\theta_j). \tag{1}$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre k. Para $k = 1$ e $x \in \mathbb{D}$, temos por 6.20(2) que

$$D_2(x) = \rho_0(x) + \rho_1(x)$$

$$= 1 + \theta_1(x).$$

Suponhamos agora (1) verdadeiro para $k \in \mathbb{N}$. Então por 6.21(2), temos que para $x \in \mathbb{D}$,

$$D_{2^{k+1}}(x) = \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} \rho_j(x) = \sum_{j=0}^{2^k-1} \rho_j(x) + \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \rho_j(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{2^k-1} \rho_j(x) + \theta_{k+1}(x) \sum_{j=0}^{2^k-1} \rho_j(x)$$

$$= (1+\theta_{k+1}(x)) \sum_{j=0}^{2^k-1} \rho_j(x) = (1+\theta_{k+1}(x)) \prod_{j=1}^{k} (1+\theta_j(x))$$

$$= \prod_{j=1}^{k+1} (1+\theta_j(x)).$$

6.23. LEMA: Para todo $k \geq 1$ e $x, y \in \mathbb{D}$,

$$D_{2^k}(x \dot{+} y) = \begin{cases} 2^k & \text{se } y \in x \dot{+} S_k, \\ 0 & \text{se } y \notin x \dot{+} S_k. \end{cases} \tag{1}$$

Demonstração: Segue por 6.22(1) que

$$(2)\qquad \left\{y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{D}:\ D_{2^k}(x\dot{+}y) = 2^k\right\} =$$

$$= \left\{ y\in\mathbb{D}:\ \ o_j(x\dot{+}y) = (-1)^{x_j\dot{+}y_j} = 1 \ \ \text{para} \ \ 1 \le j \le k \right\}$$

$$= \left\{y\in\mathbb{D}:\ \ x_j = y_j, \ \text{para} \ \ 1 \le j \le k \right\}$$

$$= \left\{y\in\mathbb{D}:\ \ x^k = y^k\right\} = \left\{y\in\mathbb{D}:\ \ x \dot{+}S_k = y \dot{+}S_k\right\}$$

$$= \left\{y\in\mathbb{D}:\ y\in x \dot{+}S_k\right\}$$

$$= x \dot{+} S_k.$$

Como $D_{2^k}(x\dot{+}y) = 2^k$ ou $D_{2^k}(x\dot{+}y) = 0$, então (1) segue de (2).

6.24. TEOREMA: Seja $f\in L^1(\mathbf{T},E)$. Então para todo $k\ge 1$,

$$(1)\qquad R_{2^k}f = E[f/\mathcal{A}_k].$$

Demonstração: Seja $t\in[0,2\pi)$ e $x\in\mathbb{D}\setminus S$ tal que $t = \psi(x)$. Se

$$U_k = \left\{b_j:\ 1 \le j \le 2^k\right\}, \qquad\qquad b_j\dot{+} S_k = \psi^{-1}(I_j^k),$$

então segue por 6.20(3), 6.23(1) e 6.17(1) que

$$(2)\qquad R_{2^k}f(t) = R_{2^k}f(\psi(x)) = (f\circ\psi)*D_{2^k}(x)$$

$$= \int_{\mathbb{D}} f(\psi(y))D_{2^k}(x\dot{+}y)d\mathbb{P}(y)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^k} \int_{b_j+S_k} f(\psi(y))D_{2^k}(x\dot{+}y)d\mathbb{P}(y)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^k} \left(2^k \int_{\mathbb{D}} f(\psi(y))\chi_{b_j\dot{+}S_k}(y)d\mathbb{P}(y)\right)\chi_{b_j\dot{+}S_k}(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^k} \left(2^k \int_{\mathbb{D}} f(\psi(y))\chi_{I_j^k}(\psi(y))d\mathbb{P}(y)\right)\chi_{I_j^k}(\psi(x))$$

$$= \sum_{j=1}^{2^k} \left(\frac{2^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)\chi_{I_j^k}(s)ds\right)\chi_{I_j^k}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{2^k} \left(\frac{1}{|I_j^k|} \int_{I_j^k} f(s)\frac{ds}{2\pi}\right)\chi_{I_j^k}(t)$$

$$= E[f/\mathcal{A}_k](t),$$

onde a última igualdade segue por II-2.8(2).

6.25. COROLÁRIO: Seja $f \in L^1(T,E)$, $f_n = E[f/\mathcal{A}_n]$ e $d_n = f_n - f_{n-1}$. Então

(1) $$d_n(t) = \left(\sum_{k=o}^{2^{n-1}-1} \hat{f}(2^{n-1}+k)W_k(t)\right)r_n(t), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Demonstração: Sejam $2^{n-1} \leq j \leq 2^n-1$ e $0 \leq k \leq 2^{n-1}-1$ tais que $j = 2^{n-1}+k$. Então $W_j = W_{2^{n-1}}W_k = r_nW_k$. Logo por 6.24(1) temos que

$$d_n(t) = R_{2^n}f(t) - R_{2^{n-1}}f(t) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \hat{f}(j)W_j(t) - \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} \hat{f}(j)W_j(t)$$

$$= \sum_{j=2^{n-1}}^{2^n-1} \hat{f}(j)W_j(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \hat{f}(2^{n-1}+ k))W_k(t)r_n(t)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \hat{f}(2^{n-1}+ k)W_k(t)\right) r_n(t).$$

6.26. TEOREMA: Sejam $n,k\in\mathbb{N}$. Então

(1) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_n(t)W_k(t)dt = 0, \qquad n \neq k,$$

(2) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_n^2(t)dt = 1, \qquad n\geq 0.$$

Para $1 < p < \infty$ e $f\in L^p(T,E)$ temos que $R_{2^n}f \longrightarrow f$ q.s e na norma de $L^p(T,E)$.

Demonstração: A demonstração de (1) e (2) segue imediatamente pelo fato que as funções de Rademacher são ortonormais. Agora, pelo teorema 6.24 temos que

$$f_n = E[f/\mathcal{A}_n] = R_{2^n}f$$

para todo $n\geq 0$. Portanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um L^p_E- martingal fechado em $L^p([0,2\pi),E)$ por f. Logo segue por II-4.6 que $f_n = R_{2^n}f \longrightarrow f$ q.s. e na norma de $L^p([0,2\pi),E)$.

CAPÍTULO III

OS ESPAÇOS U.M.D. E O OPERADOR DE CONJUGAÇÃO

Neste capítulo caracterizamos os espaços de Banach **U.M.D.** via operador de conjugação.

Na primeira seção demonstramos que a propriedade **U.M.D.** implica na limitação do operador de conjugação sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$. Nós nos baseamos na demonstração dada por D. L. Burkholder em [5].

Na segunda seção demonstramos que a limitação do operador de conjugação sobre $L^p(T,E)$, para algum $1 < p < \infty$, implica que o espaço de Banach **E** tem a propriedade **U.M.D.**. Nós nos baseamos na demonstração dada por J. Bourgain em [1].

Em ambas as seções utilizamos propriedades da esperança condicional, dos martingais, das funções de Rademacher e das séries de Walsh-Fourier pertencentes ao Capítulo II.

1. CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA QUE UM ESPAÇO DE BANACH TENHA A PROPRIEDADE U.M.D..

A referência para os resultados apresentados nesta seção é [5].

Nesta seção e na próxima, **E** será um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, o toro **T** será identificado com o intervalo $[0,2\pi)$ munido da medida de probabilidade $(1/2\pi)dt$, r_n, $n\geq 0$, serão as funções de Rademacher definidas no capítulo anterior e $\mathcal{A}_n$, para $n\geq 0$, será a σ-álgebra gerada pelos intervalos diádicos I_k^n, $1 \leq k \leq 2^n$, isto é, $\mathcal{A}_n = \sigma(r_o,r_1,\ldots,r_n)$.

1.1. LEMA: Seja **E** um espaço **U.M.D.** e $1 < p < \infty$. Para cada $k,n\in\mathbb{N}$, seja $\psi_k:\mathbb{R}^k \longrightarrow E$ mensurável e sejam

(1) $$v_k = \psi_k(r_1,\dots,r_k) \qquad e \qquad f_n = \sum_{k=1}^{n} v_k r_{k+1}.$$

Então existe uma constante C_p, dependendo somente de p e **E**, tal que

(2) $$C_p^{-1}\|f_n\|^p_{L^p_E} \leq \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n} v_k(t)r_{k+1}(s)\Big\|^p ds\,dt \leq C_p\|f_n\|^p_{L^p_E}.$$

Demonstração: A sequência $f = (f_n)_{n\geq 1}$ é um martingal vetorial. De fato, seja $\mathcal{F}_n = \mathcal{A}_{n+1}$, $n\geq 1$. Assim $v = (v_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência previsível vetorial com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ e $h = (h_n)_{n\geq 1}$ definido por $h_n = \sum_{k=1}^{n} r_{k+1}$, $n\geq 1$, é um martingal real com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Portanto por II-4.4, f é um martingal.

Fixemos $s\in[0,2\pi)$, tomemos $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k\geq 1}$, $\varepsilon_k = r_{k+1}(s)$ e seja

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k(t) r_{k+1}(t), \quad t\in[0,2\pi), \ n\geq 1.$$

Então $g = (g_n)_{n\geq 1}$ é o martingal transformado de f por ε e f é o martingal transformado de g por ε. Logo, como **E** é um espaço **U.M.D.**, existe uma constante positiva C_p, dependendo somente de p e **E**, tal que

$$C_p^{-1}\|f_n\|_{L^p_E} \leq \|g_n\|_{L^p_E} \leq C_p\|f_n\|_{L^p_E}$$

isto é,

(3) $$\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n} r_{k+1}(s)v_k(t)r_{k+1}(t)\Big\|^p dt \leq C_p^p\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n} v_k(t)r_{k+1}(t)\Big\|^p dt$$

e

(4) $$\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n} v_k(t)r_{k+1}(t)\Big\|^p dt \leq C_p^p\int_0^{2\pi}\Big\|\sum_{k=1}^{n} r_{k+1}(s)v_k(t)r_{k+1}(t)\Big\|^p dt.$$

Fixemos agora $t \in [0,2\pi)$, e para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam F_n, $G_n : [0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, dados por

$$F_n(s) = (r_2(s), r_3(s), \dots, r_{n+1}(s)),$$

$$G_n(s) = (r_2(t)r_2(s), \dots, r_{n+1}(t)r_{n+1}(s))$$

e

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n) = \Big\|\sum_{k=1}^{n} v_k(t)x_k\Big\|^p.$$

Então por II-5.8 e II-5.9, temos que

$$\int_0^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} v_k(t)r_{k+1}(s)\Big\|^p ds = \int_0^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} v_k(t)r_{k+1}(s)r_{k+1}(t)\Big\|^p ds.$$

Portanto, integrando em ambos os membros de (3) e (4) com respeito a s e aplicando o teorema de Tonelli, obtemos (1).

1.2. DEFINIÇÃO: Para as funções de Rademacher r_n, $n \geq 2$ e $0 < \delta < 1/2$, definimos para cada $k, n \in \mathbb{N}$

$$(1) \qquad \begin{cases} d_k = \delta r_{2k+1}, \quad e_k = \delta r_{2k}, \quad X_n = \sum_{k=1}^{n} e_k, \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} d_k, \\ Z_n = X_n + iY_n, \quad Z_0 = 0. \end{cases}$$

Além disso, se $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, definimos a função $\tau : [0,2\pi) \longrightarrow \{1,2,\dots,\infty\}$ como sendo

$$(2) \qquad \tau(t) = \inf\{n > 0 : |Z_n(t)| \geq 1\},$$

onde por convenção $\inf \emptyset = \infty$, e

$$(3) \qquad \mathcal{X} = \chi_D, \qquad w_k = \prod_{j=0}^{k-1} \mathcal{X}(Z_j), \quad k \geq 1.$$

1.3. **LEMA:** Sejam τ e w_k como em 1.2 e S o operador definido em II-3.15(2), e para cada $n\in\mathbb{N}$ seja

$$(1) \qquad f_n = \sum_{k=1}^{n} w_k e_k, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Então $f = (f_n)_{n\geq 1}$ é um martingal e para todo $k,n\in\mathbb{N}$ temos

$$(2) \qquad w_k = \chi_{\{\tau\geq k\}}, \qquad S(f) = \delta\tau^{1/2},$$

$$(3) \qquad \tau\wedge n = \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{F}_n = \sigma(r_2, r_3, \ldots, r_{2n+1})$. Então f_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável e w_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável, isto é, $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência previsível com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Como a sequência $X = (X_n)_{n\geq 1}$ definida em 1.2 é o martingal com respeito à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$, segue por II-4.4 que f é um martingal transformado de X por $\mathbf{w}$ e portanto é um martingal.

Temos que $\tau(t)\geq k$ se e somente se $|Z_j(t)| < 1$ para todo $1 \leq j \leq k-1$ e portanto $w_k(t) = 1$. Por outro lado, se $\tau(t)>k$, existe $1 \leq j \leq k-1$ tal que $|Z_j(t)| \geq 1$ e portanto $w_k(t) = 0$. Logo w_k é a função característica de $\{\tau \geq k\}$.

Como a sequência de diferenças $d = (d_k)_{k\geq 1}$ associada ao martingal f é dada por $d_k(t) = w_k(t)e_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$, $t\in[0,2\pi)$ e como $w_m(t) = 0$ se $m>\tau(t)$, então

$$S(f)(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |w_k(t)e_k(t)|^2\right)^{1/2} = \delta\left(\sum_{k=1}^{\infty} |w_k(t)|^2\right)^{1/2}$$

$$= \delta\left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\right)^{1/2}$$

$$= \delta\tau^{1/2}(t).$$

Finalmente, seja $t \in [0,2\pi)$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\tau(t) < n$, então $w_k(t) = 0$ se $\tau(t) < k \le n$ e 1 se $1 \le k \le \tau(t)$. Por outro lado se $n \le \tau(t)$, $w_k(t) = 1$ para todo $1 \le k \le n$. Portanto segue que $n \wedge \tau(t) = \sum_{k=1}^{n} w_k(t)$.

O resultado que daremos a seguir é uma simples generalização da conhecida Fórmula de Taylor.

1.4. LEMA: Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ aberto; $a,b \in E$; f, $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^3 sobre $\mathcal{U}$ (isto é, as derivadas parciais até a orden 3 de f e g existem e são contínuas em $\mathcal{U}$) e $z_o = x_o + iy_o \in \mathcal{U}$. Se $w = h + ik \neq 0$ e o segmento de extremidades z_o e $z_o + w$ está contido em $\mathcal{U}$, então a função $F: \mathbb{C} \longrightarrow E$ dada por

$$F(z) = af(z) + bg(z) \tag{1}$$

é de classe C^3 sobre $\mathcal{U}$ e

$$F(z_o + w) = F(z_o) + F_x(z_o)h + F_y(z_o)k + \frac{1}{2}\,[F_{xx}(z_o)h^2 + 2F_{xy}(z_o)hk + F_{yy}(z_o)k^2] + E(h,k),$$

onde

$$E(h,k) = aE_f(h,k) + bE_g(h,k) \tag{2}$$

e

$$E_f(h,k) = \frac{1}{3!}[f_{xxx}(\bar{z})h^3 + 3f_{xxy}(\bar{z})h^2k + 3f_{xyy}(\bar{z})hk^2 + f_{yyy}(\bar{z})k^3], \tag{3}$$

$$E_g(h,k) = \frac{1}{3!}[g_{xxx}(\bar{\bar{z}})h^3 + 3g_{xxy}(\bar{\bar{z}})h^2k + 3g_{xyy}(\bar{\bar{z}})hk^2 + g_{yyy}(\bar{\bar{z}})k^3], \tag{4}$$

para algum par $\bar{z}$, $\bar{\bar{z}}$ no interior do segmento com extremidades z_o e $z_o + w$.

Em particular, se as derivadas de terceira orden de f e g são limitadas por M e $|h| \le \delta$, $|k| \le \delta$, então

(5) $$\|E(h,k)\| \le 2M\delta^3(\|a\| + \|b\|).$$

1.5. LEMA: Seja $N\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_N$, $b_1,\dots,b_N$ elementos de E, $z = x + iy$ e $w = h + ik \neq 0$. Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}:\mathbb{C}\longrightarrow E$ definidas por

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{N} (a_k\cos(k\theta) + b_k\operatorname{sen}(k\theta))r^k,$$

$$v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{N} (a_k\operatorname{sen}(k\theta) - b_k\cos(k\theta))r^k.$$

Então, para $0 \le r < 2$, $0 < \delta < 1/2$, $|z| < 1$, $|h| \le \delta$ e $|k| \le \delta$,

(1) $$\|u(z+w) - u(z) - u_x(z)h - u_y(z)k - u_{xy}(z)hk\| < \gamma\delta^3$$

e

(2) $$\|v(z+w) - v(z) - v_x(z)h - v_y(z)k - v_{xy}(z)hk\| < \gamma\delta^3,$$

onde

(3) $$\gamma = N^3 2^N \sum_{k=1}^{N} (\|a_k\| + \|b_k\|).$$

Demonstração: Seja $G(x+iy) = (x+iy)^k$ para $k\in\mathbb{N}$ e $|x+iy| < 2$. Então as derivadas de terceira ordem com respeito a x e y de $r^k\cos(k\theta)$ e $r^k\operatorname{sen}(k\theta)$, parte real e imaginária de G respectivamente, são limitadas por $k^3 2^{k-3}$ e portanto para $1 \le k \le N$ elas são limitadas por $M = N^3 2^{N-3}$. Não é difícil mostrar que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{e} \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Logo para $|z| = |x+iy| < 1$, $|h| \le \delta$ e $|k| \le \delta$, temos pelo lema 1.4 que

$$\|u(z+w) - u(z) - u_x(z)h - u_y(z)k - u_{xy}(z)hk\| = \|E(h,k)\|,$$

onde

$$(4) \qquad E(h,k) = \sum_{j=1}^{N} E^j(h,k),$$

$$E^j(h,k) = a_j E_{f_j}(h,k) + b_j E_{g_j}(h,k),$$

$f_j(\theta) = r^j\cos(j\theta)$, $g_j(\theta) = r^j\mathrm{sen}(j\theta)$ e E_{f_j}, E_{g_j} são como em 1.4(3). Assim para $1 \le j \le N$, temos por 1.4(5) com $M = N^3 2^{N-3}$ que

$$\|E^j(h,k)\| \le 2N^3 2^{N-3}\delta^3(\|a_j\| + \|b_j\|)$$

$$< \delta^3 N^3 2^N(\|a_j\| + \|b_j\|).$$

Portanto por (4)

$$\|E(h,k)\| < \delta^3 N^3 2^N \sum_{k=1}^{N}(\|a_k\| + \|b_k\|)$$

e assim obtemos a demonstração de (1). A demonstração de (2) é análoga à (1).

1.6. TEOREMA: Sejam E um espaço **U.M.D.**, $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ e $a_1,\dots,a_N$, $b_1,\dots,b_N$ elementos de **E**. **Então para todo** $r \ge 0$, existe uma constante positiva C_p, dependendo somente de p e **E**, tal que

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} \|v(re^{i\theta})\|^p d\theta \le C_p^p \int_0^{2\pi} \|u(re^{i\theta})\|^p d\theta$$

onde u e v são definidos em 1.5.

Demonstração: Sejam r_n, $n \ge 1$, as funções de Rademacher, $0 < \delta < 1/2$, sejam d_k, e_k, X_n, Y_n, Z_n, τ, $\mathcal{X}$, w_k, como em 1.2 e seja $f = (f_n)_{n \ge 1}$ como em 1.3. Vimos em **1.3** que $w_k = \chi_{\{\tau \ge k\}}$ e f é um martingal.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,2\pi)$ tal que $\tau(t) > n$. Como $w_k = \chi_{\{\tau \geq k\}}$, então $w_k(t) = 1$ para $1 \leq k \leq n$ e $|Z_n(t)| < 1$. Assim

$$(2) \qquad |f_n(t)| = \left|\sum_{k=1}^{n} w_k(t) e_k(t)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} e_k(t)\right|$$

$$= |X_n(t)|$$

$$\leq |Z_n(t)| < 1.$$

Por outro lado, se $n \geq \tau(t)$, $w_m(t) = 0$ para $m \geq \tau(t)+1$ e assim

$$(3) \qquad |f_n(t)| = |e_1(t) + \ldots + e_\tau(t)| = |X_\tau(t)|$$

$$\leq |X_{\tau-1}(t)| + |e_\tau(t)| \leq 1 + \delta < 2.$$

Por II-3.17 e II-3.18, existe uma constante positiva C_p, dependendo somente de p, tal que

$$\|S(f)\|_p \leq C_p \|f\|_p, \qquad \|S(f)\|_{2p} \leq C_p \|f\|_{2p}.$$

Portanto segue de (2), (3) e 1.3(2) que

$$(4) \qquad \|\tau^{1/2}\|_p = \delta^{-1} \|S(f)\|_p \leq \delta^{-1} C_p \|f\|_p \leq 2\delta^{-1} C_p$$

e

$$(5) \qquad \|\tau\|_p = \|\tau^{1/2}\|_{2p}^2 = \delta^{-2} \|S(f)\|_{2p}^2 \leq 4\delta^{-2} C_p^2.$$

Em particular temos que $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$ é finito q.s. e assim

$$(6) \qquad \lim_{n \to \infty} Z_{\tau \wedge n} = Z_\tau \qquad \text{q.s.}\ .$$

Se $n \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,2\pi)$ é tal que $n \leq \tau(t)$, então

$$|Z_n(t)| \le |Z_{n-1}(t)| + |e_n(t) + id_n(t)|$$

$$< 1 + 2\delta < 2.$$

Por outro lado, se $n \ge \tau(t)$, então

$$|Z_\tau(t)| \le |Z_{\tau-1}(t)| + |e_\tau(t) + id_\tau(t)|$$

$$< 1+2\delta < 2,$$

e consequentemente

(7) $$|Z_{\tau\wedge n}| < 1+2\delta < 2.$$

Agora, por (6), (7) e pela definição de τ temos

(8) $$1 \le |Z_\tau| \le 1+2\delta < 2. \quad \text{q.s.}\ .$$

Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e sejam

$$U = \sum_{k=1}^{n} w_k[u_x(Z_{k-1})e_k + u_y(Z_{k-1})d_k]$$

$$W = \sum_{k=1}^{n} w_k u_{xy}(Z_{k-1})d_k e_k.$$

Suponha que $w_k(t) = 1$. Então $|Z_{k-1}(t)| < 1$, $|Z_k(t)| < 2$ e segue do lema 1.5 que

$$\|u(Z_k(t)) - u(Z_{k-1}(t)) - u_x(Z_{k-1}(t))e_k(t) - u_y(Z_{k-1}(t))d_k(t)$$

$$- u_{xy}(Z_{k-1}(t))d_k(t)e_k(t)\| < \gamma\delta^3.$$

Assim

$$w_k\|u(Z_k) - u(Z_{k-1}) - u_x(Z_{k-1})e_k - u_y(Z_{k-1})d_k - u_{xy}(Z_{k-1})d_k e_k\| < \gamma\delta^3 w_k$$

e portanto

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} w_k(u(Z_k) - u(Z_{k-1})) - U - W\right\| < \gamma\delta^3\sum_{k=1}^{n} w_k. \tag{9}$$

Se $n \leq \tau(t)$, temos $w_k(t) = 1$ para $1 \leq k \leq n$ e assim

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(t)[u(Z_k(t)) - u(Z_{k-1}(t))] = u(Z_n(t)).$$

Por outro lado, se $n > \tau(t)$, então $w_K(t) = 1$ se $1 \leq k \leq \tau(t)$ e 0 se $\tau(t)+1 \leq k \leq n$ e assim

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(t)[u(Z_k(t)) - u(Z_{k-1}(t))] = u(Z_\tau(t)).$$

Consequentemente

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(u(Z_k) - u(Z_{k-1})) = u(Z_{\tau\wedge n})$$

e portanto segue por (9) e pela desigualdade de Minkowski que

$$\|u(Z_{\tau\wedge n}) - U - W\| < \gamma\delta^3(\tau\wedge n),$$

$$\|u(Z_{\tau\wedge n}) - U\|_{L^p_E} \leq \|W\|_{L^p_E} + \gamma\delta^3\|\tau\wedge n\|_p.$$

Logo por (5) temos

$$\|u(Z_{\tau\wedge n}) - U\|_{L^p_E} \leq \|W\|_{L^p_E} + 4\gamma\delta C_p^2. \tag{10}$$

A seguir estimaremos W na norma de $L^p(T,E)$. Não é difícil ver que

$$W = \sum_{j=1}^{N}(a_j W^{2j-1} + b_j W^{2j})$$

onde

$$W^{2j-1} = \sum_{k=1}^{n} w_k u_{xy}^{2j-1}(Z_{k-1})d_k e_k, \qquad u^{2j-1}(re^{i\theta}) = r^j\cos(j\theta),$$

$$W^{2j} = \sum_{k=1}^{n} w_k u_{xy}^{2j}(Z_{k-1})d_k e_k, \qquad u^{2j}(re^{i\theta}) = r^j\operatorname{sen}(j\theta).$$

Usaremos o símbolo u^j para indicar u^{2j-1} ou u^{2j} indiferentemente e W^j para indicar W^{2j-1} ou W^{2j} indiferentemente. Lembremos que $n\in\mathbb{N}$ está fixo. Então a sequência $\mathbb{W}^j = (g_m)_{m\geq 1}$ definida por $g_m = g_n$ se $m>n$ e $g_m = \sum_{k=1}^{m} w_k u_{xy}^j(Z_{k-1})d_k e_k$ se $m\leq n$ é um martingal com respeito à $(\mathcal{F}_m)_{m\geq 1}$, onde $\mathcal{F}_m = \sigma(r_2,\ldots,r_{2m+1})$. De fato, para $m\geq n$, temos que $E[g_{m+1}/\mathcal{F}_m] = g_n = g_m$ e para $n<m$, segue por II-1.3(d) que

$$\begin{aligned} E[g_{m+1}/\mathcal{F}_m] &= E[g_m + w_{m+1}u_{xy}^j(Z_m)d_{m+1}e_{m+1}/\mathcal{F}_m] \\ &= g_m + E[w_{m+1}u_{xy}^j(Z_m)d_{m+1}e_{m+1}/\mathcal{F}_m] \\ &= g_m + w_{m+1}u_{xy}^j(Z_m)E[d_{m+1}e_{m+1}/\mathcal{F}_m] \\ &= g_m. \end{aligned}$$

Portanto $\mathbb{W}^j$ é um martingal com sequência de diferenças $d' = (d'_m)_{m\geq 1}$ dada por $d'_m = w_m u_{xy}^j(Z_{m-1})d_m e_m$ se $1 \leq m \leq n$ e 0 se $m>n$. Observe que $|u_{xy}^j(Z_{m-1})d_m e_m| \leq j^2\delta^2$ para todo $m\geq 1$. Então por II-3.17(1), 1.3(3) e (4),

$$(11) \qquad \|W^j\|_p \leq C_p\|S_n(\mathbb{W}^j)\|_p = C_p\Big\|\Big(\sum_{m=1}^{n}|d'_m|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$$

$$= C_p\Big\|\Big(\sum_{m=1}^{n}|w_m u_{xy}^j(Z_{m-1})d_m e_m|^2\Big)^{1/2}\Big\|_p$$

$$\le C_p \Big\| \Big(\sum_{m=1}^{n} w_m j^4 \delta^4 \Big)^{1/2} \Big\|_p$$

$$\le N^2\delta^2 C_p \Big\| \Big(\sum_{m=1}^{n} w_m \Big)^{1/2} \Big\|_p$$

$$\le N^2\delta^2 C_p \| (\tau\wedge n)^{1/2} \|_p$$

$$\le 2N^2\delta C_p^2,$$

onde a constante C_p é a mesma constante de (4) e (5). Assim pela desigualdade de Minkowski, (11) e 1.5(3) temos que

$$\text{(12)} \qquad \|W\|_{L_E^p} \le \sum_{j=1}^{N} \|a_j\| \, \|W^{2j-1}\|_p + \sum_{j=1}^{N} \|b_j\| \, \|W^{2j}\|_p$$

$$\le 2N^2\delta C_p^2 \sum_{j=1}^{N} (\|a_j\| + \|b_j\|)$$

$$< C_p^2 \delta N^3 2^N \sum_{j=1}^{N} (\|a_j\| + \|b_j\|)$$

$$= C_p^2 \gamma\delta.$$

Logo por (10) e (12) temos

$$\text{(13)} \qquad \|u(Z_{\tau\wedge n}) - U\|_{L_E^p} \le C_p^2\gamma\delta + 4\gamma\delta C_p^2 = 5C_p^2\gamma\delta.$$

Similarmente, se demonstra que

$$\text{(14)} \qquad \|v(Z_{\tau\wedge n}) - V\|_{L_E^p} \le 5C_p^2\gamma\delta,$$

onde

$$V = \sum_{k=1}^{n} w_k [v_x(Z_{k-1}) e_k + v_y(Z_{k-1}) d_k].$$

A seguir vamos demonstrar que existe uma constante A_p, dependendo somente de p e E, tal que

$$\|V\|_{L^p_E} \le A_p \|U\|_{L^p_E}.$$

Podemos escrever

$$U = \sum_{k=1}^{2n} u_k r_{k+1} \qquad \text{e} \qquad V = \sum_{k=1}^{2n} v_k r_{k+1}$$

onde u_k e v_k são $\mathcal{A}_k$-mensuráveis para todo $1 \le k \le 2n$. Logo como E é um espaço U.M.D., então pelo lema 1.1, existe uma constante B_p, dependendo somente de p e E, tal que

$$(15) \qquad \|V\|^p_{L^p_E} \le$$

$$\le B_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \delta w_k(t)[v_x(Z_{k-1}(t))r_{2k}(s) + v_y(Z_{k-1}(t))r_{2k+1}(s)]\Big\|^p dsdt$$

e

$$(16) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \delta w_k(t)[u_x(Z_{k-1}(t))r_{2k}(s) + u_y(Z_{k-1}(t))r_{2k+1}(s)]\Big\|^p dsdt \le$$

$$\le B_p \|U\|^p_{L^p_E}.$$

Não é difícil ver que $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Portanto a expressão do lado direito de (15) é igual à

$$(17) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \delta w_k(t)[-u_y(Z_{k-1}(t))r_{2k}(s) + u_x(Z_{k-1}(t))r_{2k+1}(s)]\Big\|^p dsdt.$$

Por II-5.4 e II-5.8 segue que as funções

$$F(s) = (-r_2(s), r_3(s), -r_4(s), \ldots, r_{2n+1}(s))$$

e

$$G(s) = (r_3(s), r_2(s), r_5(s), \ldots, r_{2n+1}(s), r_{2n}(s))$$

têm a mesma distribuição. Logo por II-5.9 temos que a integral do lado esquerdo de (16) é igual à integral em (17). Assim

(18) $$\|V\|_{L_E^p} \leq B_p^{2/p}\|U\|_{L_E^p}.$$

Logo por (13), (14) e (18) temos que

(19)
$$\begin{aligned} \|v(Z_{\tau\wedge n})\|_{L_E^p} &\leq \|V\|_{L_E^p} + 5C_p^2\gamma\delta \\ &\leq B_p^{2/p}\|U\|_{L_E^p} + 5C_p^2\gamma\delta \\ &\leq B_p^{2/p}(\|u(Z_{\tau\wedge n})\|_{L_E^p} + 5C_p^2\gamma\delta) + 5C_p^2\gamma\delta \\ &= B_p^{2/p}\|u(Z_{\tau\wedge n})\|_{L_E^p} + 5C_p^2(B_p^{2/p}+1)\gamma\delta. \end{aligned}$$

Como u e v são contínuas e limitadas e por (6) $\lim_{n\to\infty} Z_{\tau\wedge n} = Z_\tau$ q.s., então $\lim_{n\to\infty} u(Z_{\tau\wedge n}) = u(Z_\tau)$ q.s. e $\lim_{n\to\infty} v(Z_{\tau\wedge n}) = v(Z_\tau)$ q.s..Portanto pelo Teorema da Convergência Dominada para integral de Bochner e por (19) temos

(20) $$\|v(Z_\tau)\|_{L_E^p} \leq B_p^{2/p}\|u(Z_\tau)\|_{L_E^p} + 5C_p^2(B_p^{2/p}+1)\gamma\delta.$$

A desigualdade em (20) também é verdadeira para as funções u^α e v^α definidas por

$$u^\alpha(re^{i\theta}) = u(re^{i(\theta+\alpha)}), \qquad v^\alpha(re^{i\theta}) = v(re^{i(\theta+\alpha)}).$$

A função Z_τ depende somente de $0 < \delta < 1/2$ e das funções de Rademacher. Portanto para cada $t \in [0,2\pi)$, existe um único $\theta(\delta,t) \in [0,2\pi)$ tal que $Z_\tau(t) = |Z_\tau(t)| e^{i\theta(\delta,t)}$. Logo

$$v^\alpha(Z_\tau(t)) = v(|Z_\tau(t)| e^{i[\theta(\delta,t)+\alpha]}).$$

Assim aplicando Tonelli e fazendo a mudança de variável $\beta = \theta(\delta,t) + \alpha$ obtemos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \|v^\alpha(Z_\tau(t))\|^p dt d\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \|v(|Z_\tau(t)| e^{i[\theta(\delta,t)+\alpha]})\|^p d\alpha dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \|v(|Z_\tau(t)| e^{i\alpha})\|^p d\alpha dt.$$

Da mesma forma conseguimos a igualdade acima para u^α. Portanto, como a igualdade (20) é verdadeira para as funções u^α e v^α segue que

(21) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|v(|Z_\tau(t)| e^{i\alpha})\|^p d\alpha dt \leq$$

$$\leq 2^p B_p^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|u(|Z_\tau(t)| e^{i\alpha})\|^p d\alpha dt + \pi 2^{p+1} 5^p C_p^{2p} (B_p^{2/p} + 1)^p \gamma^p \delta^p.$$

Quando $\delta \longrightarrow 0$, temos por (8) que $|Z_\tau| \longrightarrow 1$. como u e v são contínuas e limitadas, então pelo Teorema da Convergência Dominada para integral de Bochner, fazendo $\delta \longrightarrow 0$ em ambos os membros de (21) obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|v(e^{i\alpha})\|^p d\alpha \leq 2^p B_p^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|u(e^{i\alpha})\|^p d\alpha,$$

isto é, obtemos (1) para o caso $r = 1$. Como a desigualdade acima é verdadeira para $a_1,\ldots,a_N$, $b_1,\ldots,b_N$ em $\mathbf{E}$ arbitrários, então (1) é verdadeira para todo $r>0$. Portanto o teorema está completamente demonstrado.

1.7. COROLÁRIO: Seja E um espaço **U.M.D.** e $1 < p < \infty$. Então o operador de conjugação $f \longmapsto \tilde{f}$ está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$.

Demonstração: Sejam **u** e **v** definidas em 1.5 com $r = 1$. Então, pelo teorema anterior, existe uma constante C_p, dependendo somente de p e E, tal que

$$\|v\|_{L^p_E} \le C_p \|u\|_{L^p_E}. \tag{1}$$

Por I-3.20, temos que $\tilde{u} = v$. Então segue que o operador de conjugação é limitado sobre os polinômios trigonométricos que, segundo I-3.9, são densos em $L^p(T,E)$. Portanto por I-3.21, temos que

$$\|\tilde{f}\|_{L^p_E} \le C_p \|f\|_{L^p_E}.$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R},E)$.

2. CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA QUE UM ESPAÇO DE BANACH TENHA A PROPRIEDADE U.M.D.

A referência para os resultados apresentados nesta seção é [1]. Os resultados desta seção também pode ser encontrados em [18].

2.1. DEFINIÇÃO: Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\Phi \in L^1(T^n,E)$. Para cada $m \in \mathbb{Z}^n$ definimos o coeficiente de Fourier $\hat{\Phi}(m)$ por

$$\hat{\Phi}(m) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} \Phi(\theta) e^{-im\cdot\theta} d\theta$$

one

$$m\cdot\theta = (m_1,\dots,m_n)\cdot(\theta_1,\dots,\theta_n) = m_1\theta_1 + \dots + m_n\theta_n.$$

2.2. **DEFINIÇÃO:** Seja $f \in L^1(T,E)$. Definimos o espectro de f, que denotamos por $Esp(f)$, como sendo o suporte de $\hat{f}$, isto é,

$$Esp(f) = \left\{ n \in \mathbb{Z}: \ \hat{f}(n) \neq 0 \right\}.$$

Analogamente definimos o espectro de $\Phi \in L^1(T^n,E)$, $n \in \mathbb{N}$, por

$$Esp(\Phi) = \left\{ m \in \mathbb{Z}^n: \ \hat{\Phi}(m) \neq 0 \right\}.$$

2.3. **OBSERVAÇÃO:** Sabemos por I-3.9, que os polinômios trigonométricos de uma variável são densos em $L^p(T,E)$ para $1 \leq p < \infty$. Similarmente temos que os polinômios trigonométricos de n variáveis são densos em $L^p(T^n,E)$ para $1 \leq p < \infty$.

Suponhamos que o operador de conjugação seja limitado sobre $L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$. Então por I-3.22, temos que para toda $f \in L^p(T,E)$, $Hf = \tilde{f}$, onde H é a transformada de Hilbert sobre o toro definida em I-3.18. Assim nesta seção a conjugada de $f \in L^p(T,E)$, $1 < p < \infty$, será denotada por Hf. Se $m = (m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$ escrevemos $\|m\| = |m_1| + \ldots + |m_n|$.

2.4. **LEMA:** Suponhamos que o operador de conjugação esteja bem definido en $L^p(T,E)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Seja $\varphi \in L^\infty(T)$ tal que $\hat{\varphi}(0) = 0$, seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $\Phi: T^k \longrightarrow E$ o polinômio trigonométrico dado por

(1) $$\Phi(\theta_1,\ldots,\theta_k) = \sum_{\|\gamma\| \leq N} b_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k} e^{i\gamma\cdot\theta}, \quad \theta \in T^k.$$

Seja $0 = n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1}$ uma sequência crescente de $k+1$ números inteiros tal que $n_{k+1} = n_k N + 1$. Então para $(\theta_1,\ldots,\theta_k,x) \in T^{k+1}$ fixo, temos para todo $\alpha \in T$ que

(2) $$H(\Phi(\theta_1+n_1\alpha,\ldots,\theta_k+n_k\alpha)\varphi(x+n_{k+1}\alpha)) =$$

$$= \Phi(\theta_1+n_1\alpha,\dots,\theta_k+n_k\alpha)H(\varphi(x+n_{k+1}\alpha)).$$

Demonstração: Para $(\theta_1,\dots,\theta_k,x)\in T^{k+1}$ fixo definimos as funções $f:T\longrightarrow E$ e $g:T\longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(\alpha) = \Phi(\theta_1+n_1\alpha,\dots,\theta_k+n_k\alpha), \qquad g(\alpha) = \varphi(x+n_{k+1}\alpha).$$

Temos que

$$f(\alpha) = \sum_{\|\gamma\|\le N} b_{\gamma_1,\dots,\gamma_k} e^{i\gamma\cdot\theta}\, e^{i(n_1\gamma_1+\dots+n_k\gamma_k)\alpha}$$

e assim

$$\operatorname{Esp}(f) \subset \left\{ j\in\mathbb{Z}:\ \ j = n_1\gamma_1+\dots+n_k\gamma_k,\ \ \|\gamma\|\le N\right\}.$$

Logo se $j = n_1\gamma_1+\dots+ n_k\gamma_k\in\operatorname{Esp}(f)$ temos que

$$|j| \le |\gamma_1|n_1+\dots+|\gamma_k|n_k \le n_kN < n_{k+1}$$

e assim $\operatorname{Esp}(f) \subset (-n_{k+1},n_{k+1})$. Portanto podemos escrever

(3) $$f(\alpha) = \sum_{|j|<n_{k+1}} b_j e^{ij\alpha}$$

onde os b_j são os coeficientes de Φ. Usando propriedades dos coeficientes de Fourier obtemos que $\hat{g}(mn_{k+1}) = \hat{\varphi}(m)e^{imx}$ se $m\in\mathbb{Z}$ e $\hat{g}(j) = 0$ se $j\notin\left\{mn_{k+1}:\ m\in\mathbb{Z}\right\}$. Portanto a série de Fourier de g é

(4) $$\sum_{m\neq 0} \hat{\varphi}(m)\, e^{imx}\, e^{imn_{k+1}\alpha}$$

e a série de Fourier da conjugada Hg é

(5) $$\sum_{m\neq 0} (-i)\operatorname{sgn}(mn_{k+1})\hat{\varphi}(m)\, e^{imx}\, e^{imn_{k+1}\alpha}.$$

Como f, $fg \in L^p(T,E)$ e Hf, $H(fg)$ estão bem definidas, então segue por (3), (4) e (5) que

$$\sum_{m\neq 0} \sum_{|j|<n_{k+1}} b_j \hat{\varphi}(m) e^{imx} e^{i(j+mn_{k+1})\alpha}$$

e

$$\sum_{m\neq 0} \sum_{|j|<n_{k+1}} (-i)\operatorname{sgn}(mn_{k+1}) b_j \hat{\varphi}(m) e^{imx} e^{i(j+mn_{k+1})\alpha}$$

são as séries de Fourier de fg e fHg respectivamente e

$$\sum_{m\neq 0} \sum_{|j|<n_{k+1}} (-i)\operatorname{sgn}(j+mn_{k+1}) b_j \hat{\varphi}(m) e^{imx} e^{i(j+mn_{k+1})\alpha}$$

é a série de Fourier de $H(fg)$. Agora, como $-n_{k+1} < j < n_{k+1}$, então $j + mn_{k+1} > 0$ se $m>0$ e $j + mn_{k+1} < 0$ se $m<0$. Logo temos que

$$\operatorname{sgn}(j+mn_{k+1}) = \operatorname{sgn}(m) = \operatorname{sgn}(mn_{k+1})$$

e portanto as séries de Fourier de $fH(g)$ e de $H(fg)$ coincidem. Consequentemente $fHg = H(fg)$ e assim o teorema está demonstrado.

2.5.LEMA: Seja $1 < p < \infty$ e suponhamos que o operador de conjugação esteja bem definido e seja limitado sobre $L^p(T,E)$. Para cada $k\geq 1$ seja $\Phi_k \in L^p(T^k,E)$, $\Phi_0 \in E$ e para cada $k\geq 1$ seja $\varphi_k \in L^\infty(T)$ tal que $\hat{\varphi}_K(0) = 0$ para todo $k\geq 1$. Então existe uma constante C_p, dependendo somente de p e E, tal que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$(1) \qquad \int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \Phi_{k-1}(\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}) H\varphi_k(\theta_k)\Big\|^p d\theta \leq$$

$$\leq C_p^p \int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \Phi_{k-1}(\theta_1,\ldots,\theta_{k-1}) \varphi_k(\theta_k)\Big\|^p d\theta.$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente que os Φ_k sejam polinômios trigonométricos, isto é,

$$\Phi_k(\theta_1,\dots,\theta_k) = \sum_{\|\gamma\|\le N_k} b^k_{\gamma_1,\dots,\gamma_k} e^{i\gamma\cdot\theta}, \qquad \theta\in T^k.$$

Fixemos $\theta_1,\dots,\theta_k,\theta_{k+1}\in T$. Definimos uma sequência crescente de inteiros $(n_k)_{k\ge1}$ por indução, tomando $n_1 = 0$ e $n_{k+1} = n_k N_k + 1$ para $k\ge1$. Então pelo lema 2.4 temos que

$$H(\Phi_k(\theta_1+n_1\alpha,\dots,\theta_k+n_k\alpha)\varphi_{k+1}(\theta_{k+1}+n_{k+1}\alpha)) =$$

$$= \Phi_k(\theta_1+n_1\alpha,\dots,\theta_k+n_k\alpha)H(\varphi_{k+1}(\theta_{k+1}+n_{k+1}\alpha))$$

para $0 \le k \le n-1$. Portanto, como o operador de conjugação é limitado sobre $L^p(T,E)$, então

$$\int_T \Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1+n_1\alpha,\dots,\theta_{k-1}+n_{k-1}\alpha)H\varphi_k(\theta_k+n_k\alpha)\Big\|^p d\alpha =$$

$$= \int_T \Big\|\sum_{k=1}^{n}H(\Phi_{k-1}(\theta_1+n_1\alpha,\dots,\theta_{k-1}+n_{k-1}\alpha)\varphi_k(\theta_k+n_k\alpha))\Big\|^p d\alpha$$

$$\le C_p^p\int_T \Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1+n_1\alpha,\dots,\theta_{k-1}+n_{k-1}\alpha)\varphi_k(\theta_k+n_k\alpha)\Big\|^p d\alpha.$$

Logo integrando ambos os membros da desigualdade acima com respeito à $\theta_1,\dots,\theta_n$,aplicando o teorema de Tonelli e usando o fato que as medidas $(1/2\pi)d\theta_i$, $1 \le i \le n$, são invariantes por translações, temos que

$$\int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k)\Big\|^p d\theta \le$$

$$\leq C_p^p \int_{T^n} \Big\| \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})\varphi_k(\theta_k)\Big\|^p d\theta.$$

Passemos agora ao caso geral. Como os polinômios trigonométricos de k variáveis são densos em $L^p(T^k,E)$, então para cada $k\in\mathbb{N}$ existe uma sequência $(P_k^m)_{m\in\mathbb{N}}$, de polinômios trigonométricos de k variáveis tal que $P_k^m \longrightarrow \Phi_k$ na norma de $L^p(T^k,E)$. Por outro lado, como $\varphi_k\in L^p(T)$, segue pelo teorema de Tonelli que

$$\|\Phi_k\varphi_{k+1} - P_k^m\varphi_{k+1}\|_{L_E^p} \leq \|\varphi_{k+1}\|_p \|\Phi_k - P_k^m\|_{L_E^p},$$

e portanto $P_k^m\varphi_{k+1} \longrightarrow \Phi_k\varphi_{k+1}$ na norma de $L^p(T^{k+1},E)$. Analogamente, como $H\varphi_{k+1}\in L^p(T,E)$, temos que $P_k^m H\varphi_{k+1} \longrightarrow \Phi_k H\varphi_{k+1}$ na norma de $L^p(T^{k+1},E)$. Logo para $n\in\mathbb{N}$, temos

$$\sum_{k=1}^{n} P_{k-1}^m\varphi_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}\varphi_k, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{k-1}^m H\varphi_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}H\varphi_k \tag{3}$$

na norma de $L^p(T^n,E)$. Assim temos que

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k)\Big\|_{L_E^p} \leq$$

$$\leq \Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k) - \sum_{k=1}^{n}P_{k-1}^m(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k)\Big\|_{L_E^p}$$

$$+ \Big\|\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}^m(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k)\Big\|_{L_E^p}$$

$$\leq \Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k) - \sum_{k=1}^{n}P_{k-1}^m(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k)\Big\|_{L_E^p}$$

$$+ C_p\Big\|\sum_{k=1}^{n} P^m_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})\varphi_k(\theta_k)\Big\|_{L^p_E}.$$

Fazendo $m\longrightarrow\infty$ em ambos os membros da desigualdade acima, segue por (2) e (3) que

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k)\Big\|_{L^p_E} \le C_p\Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})\varphi_k(\theta_k)\Big\|_{L^p_E}.$$

2.6. OBSERVAÇÃO: Sejam p, H, Φ_k, φ_k e C_p nas condições do lema 2.5. Então

$$(1)\qquad \int_{T^n}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})\varphi_k(\theta_k)\Big\|^p d\theta \le$$

$$\le C_p^p\int_{T^n}\Big\|\sum_{k=1}^{n}\Phi_{k-1}(\theta_1,\dots,\theta_{k-1})H\varphi_k(\theta_k)\Big\|^p d\theta.$$

Com efeito, como $\hat{\varphi}_k(0) = 0$, temos que $H(H\varphi_k) = -\varphi_k$. Portanto (1) segue por 2.5(1).

2.7. TEOREMA: Seja $1 < p < \infty$ e suponhamos que o operador de conjugação esteja bem definido e seja limitado sobre $L^p(T,E)$. Então E tem a propriedade U.M.D..

Demonstração: Seja $f = (f_k)_{k\ge 0}$ um L^p_E- martingal diádico fechado tal que $f_0 = 0$, seja $n\in\mathbb{N}$ e $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n$. Por II-6.25 a sequência de diferenças $(d_k)_{k\ge 1}$, $d_k = f_k - f_{k-1}$, tem a forma

$$d_k = D_{k-1}(r_1,\dots,r_{k-1})r_k, \qquad k\in\mathbb{N},$$

onde $D_k\in L^p(T^k,E)$ para $k\ge 1$ e D_0 é constante.

Seja $u:T\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $u(t) = \mathrm{sgn}(\cos t)$. Como u é par, então Hu é impar e assim para todo $1 \le k \le n$ e $\theta_k\in T$ temos que

(1) $$\varepsilon_k Hu(\theta_k) = Hu(\varepsilon_k \theta_k).$$

Seja $\Phi_{k-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}) = D_{k-1}(u(\theta_1), \ldots, u(\theta_{k-1}))$, $1 \le k \le n$. Então por 2.6(1) e (1) temos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k D_{k-1}(u(\theta_1), \ldots, u(\theta_{k-1}))u(\theta_k)\Big\|^p d\theta \\
&\le C_p^p \int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k D_{k-1}(u(\theta_1), \ldots, u(\theta_{k-1}))Hu(\theta_k)\Big\|^p d\theta \\
&= C_p^p \int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(u(\theta_1), \ldots, u(\theta_{k-1}))Hu(\varepsilon_k \theta_k)\Big\|^p d\theta \\
&= I_2.
\end{aligned}$$

Trocando $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ por $(\varepsilon_1 \theta_1, \ldots, \varepsilon_n \theta_n)$ em I_2 e aplicando 2.5(1) obtemos

$$\begin{aligned}
I_2 &= C_p^p \int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(u(\theta_1), \ldots, u(\theta_{k-1}))Hu(\theta_k)\Big\|^p d\theta \\
&\le C_p^{2p} \int_{T^n} \Big\|\sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(u(\theta_1), \ldots, u(\theta_{k-1}))u(\theta_k)\Big\|^p d\theta \\
&= I_3.
\end{aligned}$$

Considere as funções $F_n : T^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $G_n : T \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_n, \psi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$F_n(\theta_1, \ldots, \theta_n) = (u(\theta_1), \ldots, u(\theta_n)),$$

$$G_n(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$$

e

$$\varphi_n(x_1,\dots,x_n) \;=\; \Big\|\sum_{k=1}^{n} D_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1})x_k\Big\|^p,$$

$$\psi_n(x_1,\dots,x_n) = \Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k D_{k-1}(x_1,\dots,x_{k-1})x_k\Big\|^p.$$

Então por II-5.8 e II-5.9 segue que

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \psi_n(G_n(t))dt \;=\; \int_0^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k d_k(t)\Big\|^p dt$$

e

$$I_3 = C_p^{2p}\int_0^{2\pi} \varphi_n(G_n(t))dt = C_p^{2p}\int_0^{2\pi} \Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k(t)\Big\|^p dt,$$

e portanto temos

(2) $$\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k d_k\Big\|_{L^p_E} \le C_p^2\Big\|\sum_{k=1}^{n} d_k\Big\|_{L^p_E}.$$

Seja agora $n\in\mathbb{N}$ e $f = (f_k)_{k\ge 0}$, $f_0 = 0$ um L^p_E- martingal diádico arbitrário. Então $f^n = (f^n_k)_{k\ge 0}$, onde f^n é o martingal f pardo em n, é um L^p_E- martingal diádico, fechado por f_n. Como

$$d_k = f_k - f_{k-1} = f^n_k - f^n_{k-1}$$

para $1 \le k \le n$ e (2) é verdadeiro para o martingal f^n, então (2) também é verdadeiro para f.

2.8. OBSERVAÇÃO: Seja $1 < p < \infty$. Então temos provado que **E** é um espaço **U.M.D.** se e somente se o operador de conjugação está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$.

Na quarta seção do Capítulo I, mostramos que a transformada de Hilbert está bem definida e é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$ se e somente se o operador de conjugação está bem definido e é limitado sobre $L^p(T,E)$.

Além disso, a limitação da transformada de Hilbert sobre $L^p(\mathbb{R},E)$ é equivalente à limitação da transformada de Hilbert maximal sobre $L^p(\mathbb{R},E)$. Logo E é um espaço **U.M.D.** se e somente se a transformada de Hilbert ou a transformada de Hilbert maximal é limitada sobre $L^p(\mathbb{R},E)$ para algum $1 < p < \infty$.

Finalmente, um espaço de Banach E tem a propriedade U.M.D. se e somente se uma das condições do teorema 3.17 do Capítulo I é satisfeita.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. BOURGAIN. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Arkiv Mat. 21(1983), 163-68.

[2] L. BREIMAN. Probability. Addison - Wesley, 1968.

[3] D. L. BURKHOLDER. Distribution function inequalities for martingales. Annals of Probability 1(1973), 19-42.

[4] D. L. BURKHOLDER. A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Annals of Probability 9(1981), 997-1011.

[5] D. L. BURKHOLDER. A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions. Proc. Conf. Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Chicago, 1981, Wadsworth, Belmont, 1983.

[6] D. L. BURKHOLDER. Martingales and Fourier analysis in Banach spaces. C.I.M.E. Lectures, Verenna, Italy, 1985.

[7] S. D. CHATTERJI. A note on the convergence of Banach-space-valued martingales. Math. Annalen 153(1964), 142-149.

[8] R. R. COIFMAN and G. WEISS. Transference Methods in Analysis. Conference Board of the Mathematical Sciences, American Mathematical Society, number 31, 1977.

[9] J. DIESTEL and J. J. UHL. Vector Measures. Math. Surveys 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.

[10] R. E. EDWARDS G. I. GAUDRY. Littlewood-Paley and Multiplier Theory. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[11] D. L. FERNANDEZ. On **U.M.D.** spaces and Fourier series of vector-valued functions (pre print).

[12] D. J .H. GARLING. Brownian motion and **U.M.D.** -spaces. Conference on Probability and Banach spaces, Lecture Notes in Math., Zaragosa, 1985.

[13] Y. KATZNELSON. An introduction to Harmonic Analysis. J. Wiley, New York, 1968.

[14] U. NERI. Singular Integrals. Lecture Notes 200, 1971, 55-81.

[15] J. NEVEU. Discrete parameter martingales. North-Holland Publishing Company, 1975.

[16] L. S. PONTRYAGIN. Topological Groups. Gordon and Breach, New York, 1966.

[17] M. RIESZ. Sur les fonctions conjuguées. Math. Z. 27(1927), 218-244.

[18] J. L. RUBIO DE FRANCIA. Martingale and integral transforms of Banach space valued functions. Probability and Banach spaces. Lecture notes in Math. 1221, Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.

[19] W. RUDIN. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New Delhi, 1978.

[20] F. S. SCALORA. Abstract martingale convergence theorems. Pacific J. Math. 11(1961), 347-374.

[21] E. M. STEIN and G. WEISS. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.

[22] A. TORCHINSKY. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. Academic Press, Orlando, 1986.

[23] T. M. WOLNIEWICZ. The Hilbert transform in weighted spaces of integrable vector-valued functions. Colloquium Mathematicum, vol. LIII, fasc. 1, 1987.