

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TESE DE DOUTORADO

**Equações Diferenciais:
Reversibilidade e Bifurcações**

Ricardo Miranda Martins

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

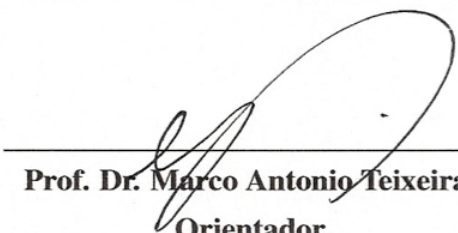
Campinas, 2011.

Apoio financeiro: Fapesp Processo 2007/05215-4.

Equações Diferenciais: Reversibilidade e Bifurcações

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Ricardo Miranda Martins** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de Fevereiro de 2011.



Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira
Prof. Dr. Eduardo Garibaldi
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo
Prof. Dr. Daniel Smania Brandão
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Martins, Ricardo Miranda

M366e Equações diferenciais: reversibilidade e bifurcações/Ricardo
Miranda Martins-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2011.

Orientador : Marco Antonio Teixeira

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Teoria dos sistemas dinâmicos. 2.Forma normal (Matemática).
3.Simetria. 4.Sistemas hamiltonianos. 5.Orbitas periodicas.
I. Teixeira, Marco Antonio. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Differential equations: reversibility and bifurcations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1.Dynamical systems. 2.Normal form (Mathematics).
3.Symmetry. 4.Hamiltonian systems. 5.Periodic orbits.

Área de concentração: Sistemas dinâmicos

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Eduardo Garibaldi (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME – USP)
Prof. Dr. Daniel Smania Brandão (ICMC – USP)
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia (UFG)

Data da defesa: 28/02/2011

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 28 de fevereiro de 2011 e aprovada

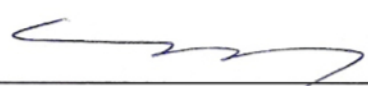
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



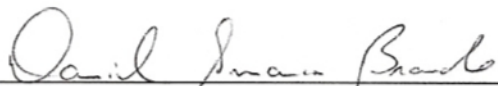
Prof(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



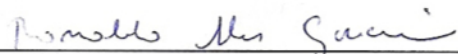
Prof(a). Dr(a). EDUARDO GARIBALDI



Prof(a). Dr(a). CLODOALDO GROTTA RAGAZZO



Prof(a). Dr(a). DANIEL SMANIA BRANDÃO



Prof(a). Dr(a). RONALDO ALVES GARCIA

AGRADECIMENTOS

Uma versão ampliada desta página de agradecimentos foi publicada na minha dissertação de mestrado. Então aí vai uma versão resumida.

Agradeço a Deus e aos meus pais, por me propiciarem chegar até aqui.

Ao Marco Antonio, pela orientação.

À minha esposa Juliana pelo apoio e tudo mais.

Aos amigos do Predinho pelas várias discussões muito pouco científicas.

Aos membros da banca, Professores Eduardo Garibaldi, Clodoaldo Ragazzo, Daniel Smania e Ronaldo Garcia pelas correções e acréscimos sugeridos. Ao Professor Jaume Llibre, pelas idéias que culminaram nos capítulos 2 e 5.

Aos professores e funcionários do IMECC, especialmente ao pessoal da Secretaria de Pós-Graduação pela ajuda com detalhes chatos da vida acadêmica.

ÍNDICE

Resumo	ix
Abstract	xi
Introdução	xiii
1 Estrutura hamiltoniana para campos vetoriais reversíveis	1
1.1 Introdução	1
1.2 Preliminares	3
1.3 Resultados detalhados	10
1.4 Prova do Teorema 1.14	13
1.5 Prova do Teorema 1.15	16
1.6 Provas dos Teoremas 1.17 e 1.18	18
1.7 Conclusões	20
2 Conjuntos minimais em perturbações de campos vetoriais reversíveis	21
2.1 Introdução e resultados principais	21
2.2 Preliminares	24
2.3 Prova do Teorema 2.1	33
2.4 Prova do Teorema 2.3	34

3	Conjuntos minimais para uma classe de osciladores fracamente acoplados	37
3.1	Introdução	37
3.2	Resultados principais	39
3.3	Ciclos limite	40
3.4	Cilindros invariantes	45
3.5	Conclusões	49
4	Cilindros e toros invariantes em equações diferenciais perturbadas em múltiplas escalas	51
4.1	Introdução	51
4.2	Resultados básicos sobre a Teoria da Média	53
4.3	Cilindros e toros invariantes, via Teoria da Média de Segunda Ordem	53
4.4	Aplicações do algoritmo	58
4.5	Dimensões superiores	61
5	Conjuntos Minimais em Perturbações de Sistemas Hamiltonianos Integráveis	63
5.1	Introdução e resultados principais	63
5.2	Resultados básicos sobre a Teoria da Média	67
5.3	Prova do Teorema 5.1	68
5.4	Prova do Teorema 5.2	70
	Apêndices	75
	A.1: Método da Média de Segunda Ordem: Encontrando Cilindros e Toros Invariantes . . .	75
	Bibliografia	78

RESUMO

Na primeira parte desta tese, estudamos a semelhança entre sistemas dinâmicos reversíveis e Hamiltonianos, sob um ponto de vista formal. Nos restringimos a sistemas definidos ao redor de pontos de equilíbrio simples e simétricos. Mostramos que, sob algumas hipóteses, tais sistemas são formalmente orbitalmente equivalentes.

Na segunda parte, estudamos a existência de conjuntos minimais em certas famílias de equações diferenciais. Especificamente, exibimos condições sob as quais existem cilindros e toros invariantes para sistemas de equações que são perturbações de sistemas reversíveis.

ABSTRACT

In the first part of this thesis, we study the similarity between reversible and Hamiltonian dynamical systems, from a formal viewpoint. We restrict ourselves to systems defined around an isolated and symmetric equilibria. We show that, under some conditions, such systems are formally orbitally equivalent to Hamiltonian vector fields.

In the second part, we study the existence of minimal sets for some families of differential equations. We obtain conditions for the existence of the invariant cylinders and tori for perturbed reversible systems.

INTRODUÇÃO

Em um artigo de 1917, Birkhoff [9] fez um estudo sobre sistemas dinâmicos conservativos com dois graus de liberdade. Ele percebeu que impondo uma certa condição de “reversibilidade” (este termo foi usado sem nenhuma definição formal) no seu modelo, sua análise se tornava mais simples.

Usando estas novas condições, Birkhoff provou a existência de órbitas periódicas no seu modelo. Estava claro para Birkhoff que os resultados obtidos para o caso reversível deveriam ser válidos para o caso geral, somente hamiltoniano, mas a prova formal no caso “irreversível” seria muito mais complicada.

Em 1935, Price [38] escreveu um *survey* sobre sistemas reversíveis, com ênfase em sistemas com uma elipse de singularidades. Os sistemas reversíveis que ele considerou eram um caso especial de uma família de campos hamiltonianos.

A semelhança entre campos vetoriais reversíveis e hamiltonianos começou a aparecer com os trabalhos de Price. Seus resultados não dependiam estritamente da estrutura hamiltoniana.

No artigo de Price é enunciada a propriedade fundamental dos campos vetoriais R -reversíveis, de que a órbita por $R(x_0)$ é simplesmente a órbita por x_0 , refletida por R e percorrida no sentido contrário. A involução R era sempre tomada como $R(x, y) = (x, -y)$. Como no artigo de Birkhoff, nenhuma definição formal de sistemas dinâmicos reversíveis foi dada.

Somente em 1976, Devaney [16] apresentou definições formais para campos vetoriais reversíveis, independente de estruturas conservativas. Devaney demonstrou teoremas do tipo Kupka-Smale para

campos vetoriais reversíveis, e adaptou o Teorema do Centro de Lyapunov e alguns resultados sobre existência de órbitas homoclínicas, do caso hamiltoniano para o caso reversível.

Anos depois, Moser [42] demonstrou a Teoria KAM para campos vetoriais reversíveis.

Em 1984, Arnold [3] propôs a seguinte questão, sugerindo que todo resultado hamiltoniano deveria poder ser adaptado para o contexto reversível, e vice-versa.

Desenvolva uma “super-teoria”, cuja componente par corresponda aos sistemas reversíveis, e a ímpar aos hamiltonianos.

Um campo vetorial suave

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n},$$

é dito R -reversível, com respeito a uma involução $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, se

$$DR(x)f(x) = -f(R(x))$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Neste trabalho, consideramos $\dim \text{Fix}(R) = n$.

O retrato de fase de um campo vetorial R -reversível é simétrico com respeito ao conjunto $F = \text{Fix}(R)$.

Um conceito análogo ao de campo vetorial reversível é o de campo vetorial equivariante. Dizemos que uma equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ é R -equivariante se

$$DR(x)f(x) = f(R(x)).$$

Note que, dada uma involução linear $R : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, todo campo vetorial pode ser quebrado em soma de dois campos vetoriais, um R -reversível e o outro R -equivariante,

$$f = \underbrace{\frac{f + RfR}{2}}_g + \underbrace{\frac{f - RfR}{2}}_h,$$

onde g é R -equivariante e h é R -reversível.

Nesta tese consideramos dois tipos de problemas. No primeiro deles, estudamos a semelhança entre campos vetoriais reversíveis e hamiltonianos, via equivalências formais.

O segundo tipo de problema considerado nesta tese é típico na Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais: buscamos conjuntos minimais em certas famílias de equações diferenciais. Utilizamos basicamente variações da Redução de Lyapunov-Schmidt e do Método da Média.

Inicialmente quebramos a simetria de um sistema reversível de equações diferenciais, por polinômios de grau 3. Especificamente, consideramos a forma normal em torno de um ponto de equilíbrio elíptico em um sistema reversível. Genericamente, os termos de menor grau em tal forma normal têm ordem 3. Este é o motivo pelo qual consideramos perturbações cúbicas. Mostramos a existência de toros invariantes para tal sistema.

A seguir, estudamos um sistema de osciladores lineares fracamente acoplados por termos não lineares. O modelo que consideramos é comumente encontrado em trabalhos sobre sincronização. Estudamos a existência de cilindros e toros invariantes para tal sistema.

No terceiro caso, desenvolvemos um algoritmo para estudar o aparecimento de cilindros e toros invariantes em equações diferenciais suaves da forma

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon^\alpha F_0(x) + \varepsilon^{\alpha+1} F_1(x),$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \geq 1$. Aplicamos o algoritmo a dois casos especiais: perturbações de formas normais e osciladores fracamente acoplados.

Finalmente, estudamos com dois modelos a persistência e/ou bifurcação de conjuntos minimais em perturbações de sistemas hamiltonianos integráveis, com a propriedade de que alguma potência de sua aplicação de primeiro retorno seja igual à identidade. Este é um contexto em que não é possível utilizar o Teorema de Poincaré-Birkhoff nem os métodos da Teoria KAM para estudar continuação de órbitas periódicas e toros invariantes.

No início de cada capítulo, forneceremos referências sobre os assuntos estudados.

Passamos agora a descrever os principais resultados obtidos, e uma descrição detalhada dos capítulos desta tese.

Resultados principais

Apresentamos agora os principais resultados desta tese. Os Teoremas A e B são referentes à semelhança entre sistemas reversíveis e hamiltonianos, enquanto os Teoremas C, D, E e F tratam da existência de conjuntos minimais em certas famílias de equações diferenciais, em geral perturbações de sistemas reversíveis.

Teorema A: Seja $X : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um campo vetorial reversível, com um equilíbrio isolado, simples,

simétrico e não-ressonante na origem. Então, ao redor da origem, X é genericamente formalmente conjugado a um campo vetorial hamiltoniano e genericamente formalmente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano polinomial.

Teorema B: Seja $X : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ um campo vetorial reversível, com um equilíbrio elíptico isolado, simples, simétrico e não-ressonante na origem. Suponha ainda que $j^3 X$ é hamiltoniano. Então, ao redor da origem, X é genericamente formalmente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano.

Teorema C: Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - \varepsilon y \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_1(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= px + \varepsilon x \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_2(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -qw - \varepsilon w \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_3(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= qz + \varepsilon z \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_4(x, y, z, w),\end{aligned}\tag{1}$$

onde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um pequeno parâmetro, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$, p e q primos entre si e f_1, f_2, f_3, f_4 são polinômios arbitrários de grau 3. Para $\varepsilon \neq 0$ pequeno, o sistema perturbado (1) pode ter um, dois ou três toros invariantes, folheados por órbitas periódicas.

Teorema D: Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon f(x, y) - \varepsilon g(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -z - \varepsilon f(z, w) - \varepsilon g(z, w, x, y),\end{aligned}\tag{2}$$

onde $f(x, y) = f_m(x, y)$, $g(x, y, z, w) = g_n^{(1)}(x, y) + g_n^{(2)}(z, w)$, com $f_m, g_n^{(1)}, g_n^{(2)}$ polinômios homogêneos de graus m, n, n respectivamente. Então, para todo $\varepsilon \neq 0$ pequeno e f, g num aberto não vazio no espaço dos polinômios homogêneos, o sistema perturbado (2) tem pelo menos um ciclo limite estável.

Teorema E: Considere um sistema de equações diferenciais da forma

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon^\alpha F(x) + \varepsilon^{\alpha+1} L(x),\tag{3}$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha \geq 1$ é um inteiro, p, q são inteiros primos entre si, F, L são aplicações de classe C^2 definidas ao redor da origem. Então existe uma função, denotada $f_3^{\phi_0}$ no caso $\alpha = 1$ e $\tilde{f}_3^{\phi_0}$ no caso $\alpha \geq 2$, de modo que cada solução simples de $f_3^{\phi_0}(r, R) = 0$ ou $\tilde{f}_3^{\phi_0}(r, R) = 0$ para ϕ_0 num conjunto conexo nos dá um cilindro ou toro invariante folheado por órbitas periódicas para o sistema(3).

Teorema F: Considere os sistemas hamiltonianos $\dot{x} = J\nabla H_j(x)$, onde J é a matriz simplética usual e H_1, H_2 são dados por

$$H_1 = \frac{1}{2} \left((r-1)^2 + z^2 \right) + w + \varepsilon \left(a r^2 + b \log r + (z+w)\theta \right)$$

e

$$H_2 = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2 + w^2) - \varepsilon G,$$

com

$$\begin{aligned} G(x, y, z, w) &= \rho \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \left(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 w - xw - y^2 + yz - 2zw \right) \\ &+ \rho \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{\lambda_5 xy + 10zw}{z^2 + w^2} + \frac{\lambda_6 zw}{(z^2 + w^2)^2} \right). \end{aligned}$$

Note que ambos os sistemas têm aplicação de primeiro retorno igual à identidade. Então, para $\varepsilon > 0$ pequeno, existem órbitas periódicas e cilindros invariantes para tais sistemas, bifurcando das órbitas periódicas e toros invariantes destes sistemas quando $\varepsilon = 0$. Tais resultados são obtidos pelo Método da Média, já que o Teorema de Poincaré-Birkhoff e os teoremas da Teoria KAM não podem ser utilizados neste caso.

Descrição dos capítulos

No primeiro capítulo, estudamos o problema da semelhança entre sistemas dinâmicos reversíveis e hamiltonianos. Consideramos dois tipos de equivalência: conjugação formal e equivalência orbital formal.

Diz-se que dois campos vetoriais X, Y são formalmente conjugados (FC) se existe uma mudança de coordenadas formal Ψ de modo que $\Psi_* X = Y$. Isto é equivalente a dizer que, para todo $k \geq 1$, existe uma mudança de coordenadas analítica Ψ_k de modo que $j^k(\Psi_{k*} X - Y) = 0$. A equivalência orbital formal é uma relação um pouco mais fraca: X é formalmente orbitalmente equivalente (FOE) a Y se existem uma mudança de coordenadas formal Ψ e uma função formal $\rho = 1 + \dots$ de modo que $\Psi_*(\rho \cdot X) = Y$.

Em 1994, foi provado em [36] que, se X é um campo vetorial reversível em $\mathbb{R}^4$, com um equilíbrio isolado do tipo elíptico 1 : 1-ressonante na origem, então X é FC a um campo vetorial hamiltoniano.

Este resultado foi generalizado em [23], no seguinte contexto. Seja X um campo vetorial em $\mathbb{R}^4$, com um equilíbrio isolado do tipo elíptico na origem. Foi provado em [23] que:

- i) se a origem é não-ressonante, então X é genericamente FC a um campo vetorial hamiltoniano e genericamente FOE a um campo hamiltoniano polinomial;
- ii) se a origem é 1 : 1-ressonante, então X é genericamente FOE a um campo vetorial hamiltoniano polinomial.

Aqui consideramos o problema da semelhança entre sistemas reversíveis e hamiltonianos para outros tipos de singularidades. Foi provado o seguinte resultado. Se X é um campo vetorial reversível em $\mathbb{R}^4$ com um equilíbrio isolado na origem que seja do tipo sela não-ressonante ou sela-elíptico, então X é genericamente FC a um campo vetorial hamiltoniano e genericamente FOE a um campo vetorial hamiltoniano polinomial.

Além disto, mostramos um resultado válido em dimensões arbitrárias: se X é um campo vetorial reversível em $\mathbb{R}^{2n}$, com um equilíbrio isolado do tipo elíptico não-ressonante na origem, e se $j^3 X$ é um campo vetorial hamiltoniano, então X é genericamente FOE a um campo vetorial hamiltoniano. Ou seja, a propriedade de ser hamiltoniano é 3-determinada para este caso. Ainda neste contexto, mostramos que, para $n = 3$ (dimensão 6), X é FOE a um campo hamiltoniano Y com a propriedade de que $Y - j^3 Y$ é desacoplado (no sentido de separação de variáveis).

Os resultados do Capítulo 1 estão em [31] e [32].

No segundo capítulo, consideramos o problema da existência, persistência e bifurcação de conjuntos minimais para campos vetoriais reversíveis. Seja X um campo vetorial reversível em $\mathbb{R}^4$, com um equilíbrio isolado do tipo elíptico na origem. Suponha que a origem seja $p : q$ -ressonante, com $p + q \geq 5$. Da Teoria de Formas Normais, temos que em uma vizinhança da origem, X se escreve

como

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -py - y(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2)) + R_1(x, y, z, w), \\
\dot{y} &= px + x(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2)) + R_2(x, y, z, w), \\
\dot{z} &= -qw - w(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2)) + R_3(x, y, z, w), \\
\dot{w} &= qz + z(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2)) + R_4(x, y, z, w),
\end{aligned} \tag{4}$$

para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $R_j, j = 1, 2, 3, 4$, funções de classe C^∞ com

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{|R_j(x, y, z, w)|}{\|\mathbf{x}\|^k} = 0,$$

para $k = 1, 2, 3$, onde $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$.

Foi mostrado em [43], usando o Método de Lyapunov-Schmidt, que o sistema (4) admite até três famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas simétricas, e que tal existência é 3-determinada, ou seja, só depende dos termos de grau até 3 no sistema (4). Apresentamos a prova deste resultado na Seção 2.3.

A seguir, consideramos uma perturbação quebrando a reversibilidade do sistema (4) por funções polinomiais de grau 3. Usando o Método da Média, mostramos que surgem até três toros invariantes, folheados por órbitas periódicas, para o sistema perturbado. Acreditamos que os toros nascem a partir da bifurcação das famílias de órbitas periódicas simétricas obtidas em [43].

Ressaltamos que, apesar de considerarmos um perturbação específica, o método utilizado no Capítulo 2 é geral, e pode ser empregado para outros sistemas de equações diferenciais. Os resultados do Capítulo 2 estão em [24].

No terceiro capítulo, estudamos a existência de ciclos limite e cilindros invariantes para um sistema de osciladores fracamente acoplados, que é uma perturbação de um sistema reversível linear. Consideramos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}
\ddot{x} + x &= -\varepsilon f(x, \dot{x}) - \varepsilon g(x, \dot{x}, z, \dot{z}), \\
\ddot{z} + z &= -\varepsilon f(z, \dot{z}) - \varepsilon g(z, \dot{z}, x, \dot{x}),
\end{aligned} \tag{5}$$

para $\varepsilon \geq 0$ e f, g funções reais de classe C^∞ . Tal sistema pode ser visto como um modelo para estudar fenômenos de sincronização. Escrevendo $y = \dot{x}$ e $w = \dot{z}$, o sistema (3.1) é equivalente a

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= -x - \varepsilon f(x, y) - \varepsilon g(x, y, z, w), \\
\dot{z} &= w, \\
\dot{w} &= -z - \varepsilon f(z, w) - \varepsilon g(z, w, x, y).
\end{aligned} \tag{6}$$

O sistema (6) com $g \equiv 0$ é um sistema desacoplado de segunda ordem, e suas soluções são facilmente obtidas a partir das soluções de

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}). \quad (7)$$

Quando $g \neq 0$ em (6), tal sistema se torna acoplado, e o comportamento qualitativo de suas soluções pode não depender mais das soluções de (7).

Em [28] é discutida a existência de ciclos limite para sistemas da forma

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, y), \quad \ddot{y} + y = \varepsilon g(x, y), \quad (8)$$

para pequenos valores de $\varepsilon > 0$ e f, g polinômios arbitrários de grau 3.

No Capítulo 3 estabelecemos condições para a existência de ciclos limite estáveis e cilindros invariantes para o sistema (6) usando a Teoria da Média, no caso em que f, g são polinômios homogêneos. Seja $C_{m,n}$ o espaço dos pares (f, g) de aplicações polinomiais homogêneas em $\mathbb{R}^4$, de modo que:

- a) f é um polinômio homogêneo de grau $m \geq 2$ e
- b) g é um polinômio homogêneo de grau $n \geq 2$ com matriz hessiana $H_g = (h_{i,j})$ satisfazendo $h_{i,j} = 0$ para $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{3, 4\}$.

Note que $\dim C_{m,n} = m + 2n + 3$. Mostramos que:

- i) existe um conjunto aberto $\mathcal{A} \subset C_{m,n}$ de modo que se $(f, g) \in \mathcal{A}$, então o sistema (3.1) possui um ciclo limite estável;
- ii) existe um conjunto aberto $\mathcal{B} \subset C_{m,n}$ de modo que se $(f, g) \in \mathcal{B}$, então o sistema (3.1) possui um ou dois cilindros invariantes folheados por órbitas periódicas normalmente estáveis.

Os resultados do Capítulo 3 estão em [33].

No quarto capítulo, apresentamos um algoritmo para detectar a existência de toros e cilindros invariantes, folheados por órbitas periódicas, para sistemas de equações diferenciais da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \varepsilon^\alpha F_0(\mathbf{x}) + \varepsilon^{\alpha+1} F_1(\mathbf{x}), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (9)$$

onde A é uma matriz com autovalores $\pm p_1 i, \dots, \pm p_n i$, onde $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{Z}_+$ são primos dois a dois, $\alpha \geq 1$ é um inteiro, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro pequeno e F_1, F_2 são aplicações de classe C^2 definidas num aberto ao redor da origem.

Enquanto perturbações de sistemas lineares são muito estudadas, em especial o caso de centros lineares (veja [28]), usualmente considera-se somente uma ε -escala de perturbação. Nosso algoritmo permite considerar duas ε -escalas de perturbação no sistema(4.1). Sistemas como (4.1) aparecem no estudo de equações de Liénard [27]. Apresentamos também aplicações de equações do tipo (4.1) no estudo da perturbação de formas normais de equações diferenciais, e no problema de osciladores não-lineares fracamente acoplados.

O algoritmo que apresentamos no Capítulo 4 é baseado no Método da Média de Segunda Ordem. Aplicamos o algoritmo a dois problemas particulares.

O primeiro é o problema da detecção de toros invariantes em sistemas de equações diferenciais em equilíbrio elíptico, quando perturbados. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - \varepsilon^\alpha (y(a_{1,0}\Delta_1 + a_{0,1}\Delta_2) - x(c_{1,0}\Delta_1 + c_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_1(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= px + \varepsilon^\alpha (x(a_{1,0}\Delta_1 + a_{0,1}\Delta_2) + y(c_{1,0}\Delta_1 + c_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_2(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -qw - \varepsilon^\alpha (w(b_{1,0}\Delta_1 + b_{0,1}\Delta_2) - z(d_{1,0}\Delta_1 + d_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_3(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= qz + \varepsilon^\alpha (z(b_{1,0}\Delta_1 + b_{0,1}\Delta_2) + w(d_{1,0}\Delta_1 + d_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_4(x, y, z, w),\end{aligned}\tag{10}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um pequeno parâmetro, $\Delta_1 = x^2 + y^2$, $\Delta_2 = z^2 + w^2$, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j} \in \mathbb{R}$, p e q são inteiros primos entre si e f_1, f_2, f_3, f_4 são polinômios.

O sistema não-perturbado ((10) com $\varepsilon = 0$) é um centro linear em $\mathbb{R}^4$ cujas órbitas periódicas estão em ressonância $p : q$. Note que este sistema é reversível quando $\varepsilon = 0$. Se $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \equiv 0$ em (10), então este sistema é uma forma normal até ordem 3 para campos vetoriais com uma singularidade elíptica $p : q$ -ressonante na origem, com $p + q \geq 5$.

Em [24], considerando $\alpha = \beta = 1$, $c_{i,j} = d_{i,j} = 0$ e $f_1, \dots, f_4$ polinômios de grau 3 no sistema (10), foi provado que o sistema (10) pode ter um, dois ou três toros invariantes, folheados por órbitas periódicas. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, dois destes toros (quando existem) tendem a órbitas periódicas do sistema (10) com $\varepsilon = 0$, e o terceiro toro (quando existe) persiste.

No Capítulo 4 consideramos $\beta = \alpha + 1$, $\alpha \geq 2$, $f_1 = f_3 \equiv 0$, $f_2(x, y, z, w) = 2y^5 - x^5$ e $f_4(x, y, z, w) = z^5 - y^5$ no sistema (10). Provamos que se $c_{1,0} < 0$ e $d_{0,1} < 0$, então existem dois toros invariantes, folheados por órbitas periódicas, para o sistema (10).

O segundo modelo ao qual aplicamos o algoritmo do Capítulo 4 é similar ao estudado no Capítulo

3. Consideramos o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + \varepsilon^\alpha a(x, y) + \varepsilon^\beta b(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -w, \\ \dot{w} &= z + \varepsilon^\alpha a(z, w) + \varepsilon^\beta b(z, w, x, y),\end{aligned}\tag{11}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ e a, b são funções de classe C^2 .

Consideramos $\beta = \alpha + 1$ com $\alpha \geq 2$, $a(x, y) = x^3 - y^3$, $b(x, y, z, w) = w^5 + y^5$ e $\varepsilon > 0$ pequeno. Mostramos que para todo $\varepsilon > 0$ pequeno, o sistema (11) tem um toro folheado por órbitas periódicas.

Os resultados do Capítulo 4 estão em [34].

No quinto capítulo, estudamos como se comportam as órbitas periódicas, cilindros e toros invariantes de sistemas hamiltonianos integráveis quando perturbados. Nos focamos em sistemas cuja aplicação de primeiro retorno não é do tipo twist. Consideramos dois modelos:

No primeiro modelo, definimos

$$H = \frac{1}{2} \left((r-1)^2 + z^2 \right) + w + \varepsilon \left(a r^2 + b \log r + (z+w)\theta \right),\tag{12}$$

onde ε é um pequeno parâmetro e $a, b \in \mathbb{R}$ são números reais arbitrários, com $r \in \mathbb{R}^+$, $z, w \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{R})$. A partir daí, consideramos o sistema hamiltoniano associado

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -H_z = -z - \varepsilon\theta, \\ \dot{z} &= H_r = r - 1 + \varepsilon \left(2a r + \frac{b}{r} \right), \\ \dot{w} &= -H_\theta = -\varepsilon(z+w), \\ \dot{\theta} &= H_w = 1 + \varepsilon\theta.\end{aligned}\tag{13}$$

No segundo modelo, consideramos

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) - \varepsilon G,\tag{14}$$

onde

$$\begin{aligned}G(x, y, z, w) &= \rho \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \left(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 w - xw - y^2 + yz - 2zw \right) \\ &+ \rho \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{\lambda_5 xy + 10zw}{z^2 + w^2} + \frac{\lambda_6 zw}{(z^2 + w^2)^2} \right),\end{aligned}$$

para $(x, y, z, w) \notin \{x^2+y^2 = 0\} \cup \{z^2+w^2 = 0\}$, e $G \equiv 0$ caso contrário, com $\rho = \exp\left(\frac{-1}{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)}\right)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$, e o sistema hamiltoniano associado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -H_y = -y + \varepsilon G_y, \\ \dot{y} &= H_x = x - \varepsilon G_x, \\ \dot{z} &= -H_w = -w + \varepsilon G_w, \\ \dot{w} &= H_z = z - \varepsilon G_z.\end{aligned}\tag{15}$$

Para estes dois modelos, estudamos a continuação dos cilindros e toros invariantes, quando passamos de $\varepsilon = 0$ para $\varepsilon \neq 0$.

Os resultados do Capítulo 5 estão em [25].

CAPÍTULO 1

ESTRUTURA HAMILTONIANA PARA CAMPOS VETORIAIS REVERSÍVEIS

Neste capítulo estudamos o problema da equivalência entre campos vetoriais reversíveis e hamiltonianos. A teoria clássica necessária neste capítulo pode ser encontrada em [1, 4, 8, 16, 19]. Já os resultados estão nas referências [23, 31, 32].

1.1 Introdução

A semelhança entre as dinâmicas de campos vetoriais reversíveis e hamiltonianos foi percebida inicialmente por Birkhoff [9], no começo do século XX. Mais tarde, Price [38] e Devaney [16] também observaram tal similaridade.

Muitos resultados originalmente produzidos para campos vetoriais hamiltonianos, como por exemplo a Teoria KAM ([42]) e o Teorema do Centro de Lyapunov ([16]), foram adaptados com sucesso para campos vetoriais reversíveis. Deste então, muitos autores tentam entender o papel exato da estrutura simplética nas demonstrações de resultados hamiltonianos, e quando tal estrutura pode ser substituída pela reversibilidade. Isto motivou a seguinte questão no livro *Arnold's Problems* ([3]):

Question 1984-23: Develop a “supertheory” whose even component corresponds to reversible systems, and odd one to hamiltonian systems.

Nossa idéia aqui é unificar ambas as teorias de um ponto de vista formal, isto é, queremos investigar condições para a existência de certas equivalências entre campos vetoriais reversíveis e hamiltonianos.

Fixe $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ um aberto contendo a origem. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma involução de classe C^∞ , com $\dim \text{Fix}(\varphi) = n$. Um ponto $p \in \mathbb{R}^{2n}$ é dito simétrico se $p \in \text{Fix}(\varphi)$. Considere Ω_0^φ o conjunto dos germes de campos vetoriais X definidos em U que são φ -reversíveis, com uma singularidade simples e simétrica na origem. Suponha ainda que a origem é a única singularidade de X em U . Assim, se $X \in \Omega_0^\varphi$, então $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\det DX(\mathbf{0}) \neq 0$, $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\varphi_*X = -X$.

Diz-se que dois campos vetoriais X, Y são formalmente conjugados se existe uma mudança de coordenadas formal Ψ de modo que $\Psi_*X = Y$. Isto é equivalente à existência de mudanças de coordenadas $\Psi_k = Id + \psi_k$, com cada ψ_k uma aplicação polinomial homogênea de grau k , $k \geq 2$, definidas ao redor da origem, de modo que $j^k(\Psi_{k*}X - Y) = 0$.

Dado $X \in \Omega_0^\varphi$, nosso objetivo é investigar condições para a existência de mudanças de coordenadas $\Psi_k = Id + \psi_k$, com cada ψ_k uma aplicação polinomial homogênea de grau k , $k \geq 2$, definidas ao redor da origem, de modo que $j^k\Psi_{k*}X$ seja um campo hamiltoniano.

Uma relação mais fraca que a conjugação formal é a equivalência orbital formal. Diz-se que dois campos vetoriais $X, Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são formalmente orbitalmente equivalentes se existe uma função formal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que não se anula perto de $\mathbf{0}$, de modo que $f \cdot X$ e Y são formalmente conjugados. A multiplicação $f \cdot X$ tem o efeito de reparametrizar o tempo.

Consideramos a questão de quando as formas normais de campos vetoriais reversíveis podem ser feitas hamiltonianas. O caso bidimensional deste problema tem uma solução trivial: formas normais formais reversíveis, em torno de singularidades simétricas simples, são hamiltonianas.

Em dimensão 4, este problema foi tratado em [36] para singularidades 1 : 1-ressonantes, e em [23] para singularidades não ressonantes.

Nesta tese iremos focar nos seguintes casos:

- em dimensão 4, tratamos de campos vetoriais $X \in \Omega_0^\varphi$, cuja origem é uma singularidade não-ressonante dos tipos sela e sela-elíptico. Mostramos que tais campos são genericamente formalmente conjugados a campos vetoriais hamiltonianos e genericamente formalmente orbitalmente equivalentes a campos vetoriais hamiltonianos polinomiais;
- em dimensão 6, tratamos de campos vetoriais $X \in \Omega_0^\varphi$, cuja origem é uma singularidade elíptica não-ressonante. Mostramos que, se j^3X é um campo hamiltoniano genérico, então X é formal-

mente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano “quase-desacoplado”. No entanto, não é possível estabelecer uma conjugação formal;

- em dimensão $2n$, $n \geq 4$, mostramos que se $X \in \Omega_0^\varphi$, com a origem uma singularidade elíptica não-ressonante, então X é genericamente formalmente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 1.2 apresentamos alguns resultados de campos vetoriais reversíveis e hamiltonianos, além de uma rápida introdução à Teoria de Formas Normais. Na Seção 1.3 detalhamos os resultados do capítulo, que são demonstrados nas Seções 1.4, 1.5 e 1.6. Na Seção 1.7 resumimos os resultados do capítulo, e apresentamos direções para continuar o estudo aqui desenvolvido.

1.2 Preliminares

Nesta seção apresentamos alguns resultados básicos sobre campos vetoriais reversíveis e hamiltonianos que precisaremos ao longo deste capítulo. Referências clássicas sobre estes temas são [44] e [1].

1.2.1 Campos vetoriais reversíveis

Um campo vetorial $X : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é dito ser φ -reversível se $\varphi_* X = -X$, onde $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um difeomorfismo involutivo. Isto implica que, se $\mathbf{x}(t)$ é solução de

$$\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$$

então $\varphi(\mathbf{x}(-t))$ também é solução. As singularidades de X que pertençam ao conjunto $\text{Fix}(\varphi)$ são chamadas de singularidades simétricas. Assumiremos que $\dim \text{Fix}(\varphi) = n$. O seguinte resultado nos permite considerar φ linear.

Lema 1.1 (Montgomery-Bochner Theorem). *Seja $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ um difeomorfismo com $\varphi^2 = \text{Id}$ e $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Então φ e $D\varphi(0)$ são conjugados.*

Demonstração. A prova é direta. Seja $\phi = Id + D\varphi(\mathbf{0})\varphi$. Note que $D\phi(\mathbf{0}) = Id$, logo ϕ é um difeomorfismo local. Além disto:

$$\begin{aligned}
\phi(\varphi(\mathbf{x})) &= (Id + D\varphi(\mathbf{0})\varphi)(\varphi(\mathbf{x})) \\
&= \varphi(\mathbf{x}) + (D\varphi(\mathbf{0})\varphi)(\varphi(\mathbf{x})) \\
&= \varphi(\mathbf{x}) + D\varphi(\mathbf{0})\mathbf{x} \\
&= D\varphi(\mathbf{0})(\mathbf{x} + D\varphi(\mathbf{0})\varphi(\mathbf{x})) \\
&= D\varphi(\mathbf{0})\phi(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

□

Seja X um campo vetorial φ -reversível. Seja $S = Fix(\varphi)$. Seguem algumas propriedades de X , com respeito a S .

- i) O retrato de fase de X é simétrico com respeito a S .
- ii) Se $p \in S$ e $X(p) \neq \mathbf{0}$, então a trajetória de X é transversal a S em p .
- iii) Se $X(p) = \mathbf{0}$ então $X(\varphi(p)) = \mathbf{0}$. A aplicação φ troca as variedades estáveis e instáveis. Além disto, um ponto crítico simétrico (contido em S) não pode ser atrator ou repulsor.
- iv) Qualquer órbita periódica de X que cruza S é chamada de órbita periódica simétrica. Uma órbita periódica simétrica nunca é isolada no conjunto das órbitas periódicas de X . Se, por outro lado, uma órbita periódica γ não corta $Fix(\varphi)$, então $\varphi \circ \gamma$ é outra solução periódica.
- v) Se X_t denota o fluxo associado a X , então $X_t \circ \varphi = \varphi \circ X_{-t}$. Se $U_t = X_t \circ \varphi$, então $U_t^2 = Id$ e $Fix(U_t) = X_{t/2}(Fix(\varphi))$.
- vi) Qualquer órbita de X conectando duas selas hiperbólicas assimétricas cruza S de forma transversal, portanto é persistente por perturbações reversíveis.
- vii) Não existem órbitas periódicas isoladas de X passando por pontos de S .
- viii) As singularidades simétricas genéricas de X são selas hiperbólicas, pontos elípticos, ou pontos do tipo sela-elíptico.

Mostraremos agora, a título de curiosidade, uma propriedade algébrica muito interessante dos campos reversíveis. Tal propriedade não será explorada nesta tese. Para isto precisamos do conceito de campo vetorial equivariante. Se $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é uma involução, um campo vetorial $Y : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é dito ser φ -equivariante se $\varphi_* Y = Y$.

A definição é semelhante à de campo vetorial reversível, com a ressalva do sinal. Isto significa que, se γ é uma trajetória de Y , então $\varphi \circ \gamma$ também é uma trajetória de Y , percorrida no mesmo

sentido. Mais detalhes sobre Campos Vetoriais Equivariantes podem ser encontrados em [2].

Proposição 1.2. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma involução linear. Seja Z um campo vetorial em $\mathbb{R}^{2n}$. Então existem únicos campos vetoriais X, Y , com X φ -reversível e Y φ -equivariante de modo que $Z = X + Y$.*

Demonstração. A prova é algébrica, e simples. Escreva $Z = X + Y$, com X φ -reversível e Y φ -equivariante. Então $\varphi Z \varphi = -X + Y$. Portanto,

$$X = \frac{Z - \varphi Z \varphi}{2}, \quad Y = \frac{Z + \varphi Z \varphi}{2}.$$

□

1.2.2 Campos vetoriais hamiltonianos

Transformações simpléticas

Seja V um espaço vetorial $2n$ -dimensional e ω uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada em V . Nestas condições, V (ou o par (V, ω)) será chamado de **espaço simplético**. Uma transformação $T : V \rightarrow V$ é dita **simplética** se T preserva ω , isto é, se para quaisquer $x, y \in V$ vale

$$\omega(T(x), T(y)) = \omega(x, y).$$

Lema 1.3. *Seja (V, ω) um espaço simplético, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $T : V \rightarrow V$ uma transformação simplética. Sejam $\tilde{\Omega} = (\omega(v_i, v_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ e $M = [T]_{\mathcal{B}}$ as matrizes da forma ω e da transformação T , respectivamente, em relação à base $\mathcal{B}$. Então M é anti-simétrica, invertível e vale $M^t \tilde{\Omega} M = \tilde{\Omega}$.*

O lema abaixo é um resultado clássico em álgebra linear:

Lema 1.4. *Duas matrizes invertíveis e anti-simétricas são sempre semelhantes.*

Nos é conveniente reformular o lema acima para:

Corolário 1.5. *Com a notação do lema anterior, existe uma matriz mudança de base J tal que $\tilde{\Omega} = J^t \Omega J$, onde*

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix},$$

onde Id_n é a matriz identidade $n \times n$. Assim, em relação a alguma base $\mathcal{B}'$ a matriz de ω é Ω .

Por todo o texto, Ω denotará a matriz acima, denominada **matriz simplética usual**. A forma bilinear induzida será dita **forma simplética usual**. Motivados pelos lemas acima, diremos que uma matriz real M $2n \times 2n$ é uma **matriz simplética** se

$$M^T \Omega M = \Omega.$$

Lema 1.6. *Seja M uma matriz $2n \times 2n$ dada em blocos por*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

onde A, B, C e D são matrizes $n \times n$. Então M é simplética se, e só se

$$\begin{cases} A^t D - C^t B &= Id_n, \\ A^t C - C^t A &= 0_n, \\ D^t B - B^t D &= 0_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Campos Hamiltonianos

Seja $H : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^2 e ∇H o gradiente de H , isto é,

$$\nabla H(x) = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n}(x), \frac{\partial H}{\partial y_1}(x), \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}(x) \right),$$

onde $x \equiv (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Um campo de vetores hamiltoniano é um campo da forma

$$X_H(x) = J \nabla H(x), \quad x \in U, \quad (1.2)$$

onde J é a matriz de alguma forma simplética (uma matriz simplética). Neste caso, H denomina-se hamiltoniano do sistema (1.2).

Exemplo 1.7. *Usualmente define-se campo hamiltoniano como um campo da forma*

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^2 . Neste caso, é fácil ver que $J = \Omega$. A menos de uma mudança de coordenadas (simplética), todo campo hamiltoniano é desta forma.

Quando não for especificada a forma simplética, deve ser entendido que o campo é hamiltoniano em relação à forma simplética usual.

Proposição 1.8. *Uma condição necessária e suficiente para que um sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

seja hamiltoniano é que as funções $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaçam

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Note que quando a dimensão do espaço é maior que 2 ou quando não estamos trabalhando com a forma simplética usual, o critério da proposição anterior não pode ser usado.

Seja

$$\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

uma solução para (1.2) com $J = \Omega$ e ponha $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $x, y : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt}(\alpha(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}y'(t) \\ &= -y'(t)x'(t) + x'(t)y'(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, H é constante sobre as trajetórias do campo. Quando isto acontece, dizemos que a função H é uma integral primeira¹ do sistema (1.2). Note que as trajetórias de um sistema hamiltoniano estão sempre contidas nas superfícies de nível de H .

Observação 1.9. *Em $\mathbb{R}^{2n}$, se encontrarmos $2n-1$ integrais primeiras para um campo X , conseguimos caracterizar completamente suas trajetórias, considerando interseções entre as superfícies de nível ([1]). Tais sistemas são ditos completamente integráveis. Assim, em $\mathbb{R}^2$, basta uma integral primeira para isto.*

Vamos voltar às condições (1.1), agora noutro contexto.

Proposição 1.10. *Considere o sistema $\dot{x} = X(x)$ com $X(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Seja*

$$DX(0) = \begin{pmatrix} DX(0)_1 & DX(0)_2 \\ DX(0)_3 & DX(0)_4 \end{pmatrix}$$

¹A definição de integral primeira existe para sistemas gerais, não só para hamiltonianos.

uma decomposição em blocos para $DX(0)$, com cada $DX(0)_j$ uma matriz quadrada $n \times n$. Um conjunto de condições necessárias para o campo X ser hamiltoniano é:

$$\begin{cases} DX(0)_1^t + DX(0)_4 = 0, \\ DX(0)_2 = DX(0)_2^t, \\ DX(0)_3 = DX(0)_3^t. \end{cases}$$

Note que se o sistema $\dot{x} = X(x)$ for hamiltoniano, da condição $DX(0)_1^t + DX(0)_4 = 0$ segue que $\text{tr}(DX(0)) = 0$. Isso nos dá o seguinte critério:

Proposição 1.11. *As singularidades hiperbólicas de um sistema hamiltoniano só podem ser pontos de sela.*

Outra propriedade interessante e importante de um sistema hamiltoniano é a preservação de volumes. Seja $X = X_H$ um campo hamiltoniano em $\mathbb{R}^n$ com fluxo $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Q \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $V(Q)$ é o volume da região Q , então $V(Q) = V(\phi_t(Q))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Noutras palavras, hamiltonianos preservam volumes. Este resultado é conhecido com Teorema de Liouville. Para uma demonstração dessa propriedade e outros comentários, veja [6] e [14]. Estudar a preservação de medidas por aplicações é o objetivo da teoria ergódica, que é apresentada de maneira introdutória em [37].

1.2.3 Formas normais

Considere um sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \tag{1.3}$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ and $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Procuramos um sistema de coordenadas no qual o sistema (1.3) se torne mais “simples” próximo da origem. Noutras palavras, queremos eliminar alguns termos da expansão em Taylor de f ao redor da origem.

Escreva $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) + h.o.t.$, onde $A = Df(\mathbf{0})$ é uma matriz e f_l é homogêneo de grau l . Considere uma mudança de coordenadas da forma $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h_2(\mathbf{x})$ onde h_2 é homogêneo de grau 2. Com esta mudança de coordenadas, e usando o fato de que $(Id + Dh_2)^{-1} = Id - Dh_2 + h.o.t.$, o sistema (1.3) se escreve como

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + Ah_2(\mathbf{y}) - Dh_2(\mathbf{y})A\mathbf{y} + f_2(\mathbf{y}) + h.o.t.$$

Denote $L_A^{(2)}(h_2)(\mathbf{y}) = Ah_2(\mathbf{y}) - Dh_2(\mathbf{y})A\mathbf{y}$. Se f_2 está na imagem de $L_A^{(2)}$, então é possível escolher h_2 que elimina os termos quadráticos em (1.3). Entretanto, em geral $L_A^{(2)}$ não é sobrejetor. Os termos de f_2 que não estão na imagem de $L_A^{(2)}$ são chamados termos ressonantes. Os termos ressonantes não podem ser removidos de (1.3) com mudanças de coordenadas, ao contrário dos não-ressonantes.

Deve ficar claro que o processo anterior pode ser repetido para termos de ordem superior, usando o operador $L_A^{(m)}$, eliminando assim todos os termos não-ressonantes de (1.3).

Teorema 1.12 (Poincaré-Dulac, [4]). *Um sistema de equações diferenciais*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + f_2(\mathbf{x}) + h.o.t. \quad (1.4)$$

pode ser formalmente reduzido a

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \sum_{k=2}^{\infty} g_k(\mathbf{y}) \quad (1.5)$$

onde g_k é homogêneo de grau k e formado somente por termos ressonantes, com $Dg_k(\mathbf{y})A\mathbf{y} - Ag_k(\mathbf{y}) = 0$, para todo $k \geq 2$. O sistema (1.5) é dito ser uma forma normal para o sistema (1.4).

Note que os termos ressonantes na expansão em série de Taylor de f só dependem da parte linear de f . A expressão ressonante é devido à presença de ressonâncias entre os autovalores de $A = Df(\mathbf{0})$. Para ver isto, assuma que A é uma matriz diagonal real com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. O caso complexo é análogo. Seja $H^{m,n}$ o espaço dos monômios m -homogêneos em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^m \frac{\partial}{\partial x_s}$, e $L_A^{(m)} : H^{m,n} \rightarrow H^{m,n}$ definido por $L_A^{(m)}(h_m)(\mathbf{x}) = Ah_m(\mathbf{x}) - Dh_m(\mathbf{x})A\mathbf{x}$, onde $\mathbf{x}^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$.

Os autovalores de $L_A^{(m)}$ são os monômios $\mathbf{x}^m \frac{\partial}{\partial x_s}$, satisfazendo

$$L_A^{(m)}\left(\mathbf{x}^m \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = [(m, \lambda) - \lambda_s]\mathbf{x}^m \frac{\partial}{\partial x_s},$$

onde $(m, \lambda) = \sum_j m_j \lambda_j$ (veja [4]).

Portanto, se a relação $(m, \lambda) - \lambda_s = 0$ é satisfeita para certos s e m , então o monômio $\mathbf{x}^m \frac{\partial}{\partial x_s}$ é ressonante (ou seja, tal monômio está no núcleo do operador $L_A^{(m)}$).

Mais detalhes sobre formas normais, incluindo discussões sobre convergência, podem ser encontrados em [11]. Por fim, observamos que é possível obter uma forma normal reversível para campos vetoriais reversíveis, como provado em [19].

Exemplo 1.13 (Estrutura reversível-hamiltoniana em dimensão 2). *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial com $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $A = DX(\mathbf{0})$. Suponha que X é φ -reversível, com $\varphi(x, y) = (x, -y)$ e que*

$\det(A) \neq 0$. Os autovalores de A são ou um par de números imaginários puros $\pm\alpha i$, $\alpha > 0$, ou um par de números reais $\pm\beta$, $\beta > 0$. Assim, a forma normal formal reversível $\tilde{X}$ de X é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\alpha y - yf(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= \alpha x + xf(x^2 + y^2)\end{aligned}\tag{1.6}$$

no primeiro caso e por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \beta x + xf(xy), \\ \dot{y} &= -\beta y - yf(sy)\end{aligned}\tag{1.7}$$

no segundo caso, onde f, g são funções formais sem termo constante. O sistema (1.6) é hamiltoniano com respeito a

$$H_e(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2) + \int yf(x^2 + y^2) dy$$

e o sistema (1.7) é hamiltoniano com respeito a

$$H_s(\mathbf{x}) = -\beta xy - x \int g(xy) dy.$$

Desta forma, campos vetoriais reversíveis em $\mathbb{R}^2$ com uma singularidade simples na origem são formalmente hamiltonianos.

1.3 Resultados detalhados

1.3.1 Dimensão 4

Considere um campo vetorial reversível $X : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ com $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Seja $A = DX(\mathbf{0})$. Pelo Teorema de Kupka-Smale ([16]), podemos supor genericamente que o conjunto $\sigma(A)$ dos autovalores de A é de um dos três tipos:

caso **E**: $\sigma_1(A) = \{\pm\alpha_1 i, \pm\alpha_2 i\}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$;

caso **ES**: $\sigma_2(A) = \{\pm\alpha i, \pm\beta\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

caso **S**: $\sigma_3(A) = \{\pm\beta_1, \pm\beta_2, \}$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$,

sujeitos à condição genérica: $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\{\alpha, \beta\}$ e $\{\beta_1, \beta_2\}$ são conjuntos linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$.

Para cada um dos tipos acima, apresentamos agora a forma normal de X , onde $\Delta_j = x_j^2 + y_j^2$ e $\Gamma_j = x_j y_j$, para $j = 1, 2$.

Caso **E**:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\alpha_1 y_1 - y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{i,j} \Delta_1^i \Delta_2^j, \\
\dot{y}_1 &= \alpha_1 x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{i,j} \Delta_1^i \Delta_2^j, \\
\dot{x}_2 &= -\alpha_2 y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{i,j} \Delta_1^i \Delta_2^j, \\
\dot{y}_2 &= \alpha_2 x_2 + x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{i,j} \Delta_1^i \Delta_2^j.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Caso **ES**:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{i,j} \Delta_1^i \Gamma_2^j, \\
\dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{i,j} \Delta_1^i \Gamma_2^j, \\
\dot{x}_2 &= \beta x_2 + x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{i,j} \Delta_1^i \Gamma_2^j, \\
\dot{y}_2 &= -\beta y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{i,j} \Delta_1^i \Gamma_2^j.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Caso **S**:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j, \\
\dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1 \sum_{i+j=1}^{\infty} a_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j, \\
\dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j, \\
\dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2 \sum_{i+j=1}^{\infty} b_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Denote por $\tilde{X}$ um dos sistemas (1.9) ou (1.10). O caso 1.8 foi tratado em [23].

Pelo Teorema 1.12, X é formalmente conjugado a $\tilde{X}$. A partir de agora, supomos a condição $a_{0,1}b_{1,0} \neq 0$ sobre os coeficientes de $\tilde{X}$.

Nosso objetivo é transformar $\tilde{X}$ em um campo vetorial hamiltoniano, usando mudanças de coordenadas da forma $Id + h.o.t.$. Faremos isto jato a jato. O resultado principal é o seguinte.

Teorema 1.14. *Se $b_{1,0}a_{0,1} \neq 0$, então para todo $k \geq 3$, existe uma mudança de coordenadas da forma $\Psi_{k-2} = Id + \psi_{k-2}$, com $\psi_{k-2} \in H^{k-2,4}$, e uma função $H_{k+1} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$j^k(\Psi_{k-2*}\tilde{X} - J\nabla H_{k+1}) = 0.$$

Usando reparametrizações do tempo, é possível transformar X em um campo vetorial hamiltoniano polinomial desacoplado.

Considere as funções

$$H_{es}(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2}\alpha\Delta_1 + \frac{1}{4}\tilde{a}_{1,0}\Delta_1^2 + \frac{1}{6}\tilde{a}_{2,0}\Delta_1^3 \right) - \left(\beta\Gamma_2 + \frac{1}{2}\tilde{b}_{0,1}\Gamma_2^2 \right)$$

e

$$H_s(\mathbf{x}) = -\left(\beta_1\Gamma_1 + 1/2a_{1,0}\Gamma_1^2 + 1/3a_{2,0}\Gamma_1^3 \right) - \left(\beta_2\Gamma_2 + 1/2b_{0,1}\Gamma_2^2 \right),$$

com campos vetoriais hamiltonianos associados $J\nabla H_{es}$ e $J\nabla H_s$, dados respectivamente por (1.11) e (1.12):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha y_1 - y_1(\tilde{a}_{1,0}\Delta_1 + \tilde{a}_{2,0}\Delta_1^2), \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 + x_1(\tilde{a}_{1,0}\Delta_1 + \tilde{a}_{2,0}\Delta_1^2), \\ \dot{x}_2 &= \beta x_2 + x_2(\tilde{b}_{1,0}\Gamma_2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta y_2 - y_2(\tilde{b}_{1,0}\Gamma_2),\end{aligned}\tag{1.11}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1(\tilde{a}_{1,0}\Gamma_1 + \tilde{a}_{2,0}\Gamma_1^2), \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1(\tilde{a}_{1,0}\Gamma_1 + \tilde{a}_{2,0}\Gamma_1^2), \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2(\tilde{b}_{1,0}\Gamma_2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2(\tilde{b}_{1,0}\Gamma_2).\end{aligned}\tag{1.12}$$

O resultado principal é:

Teorema 1.15. (a) Suponha que $\tilde{X} = (1.9)$. Se $a_{1,0}b_{0,1} \neq 0$, então para todo $k \geq 3$, existe uma mudança de coordenadas $\Psi_{k-2} = Id + \psi_{k-2}$, uma função $f_{k-1} = 1 + \tau_{k-1}$, com $\psi_{k-2} \in H^{k-2,4}$ e $\tau_{k-1} \in H^{k-1,4}$ de modo que

$$j^k(\Psi_{k*}f_{k-1} \cdot \tilde{X} - J\nabla H_{es}) = 0.$$

(b) Suponha $\tilde{X} = (1.10)$. Se $a_{1,0}b_{0,1} \neq 0$, então para todo $k \geq 3$, existe uma mudança de coordenadas $\Psi_{k-2} = Id + \psi_{k-2}$, uma função $f_{k-1} = 1 + \tau_{k-1}$, com $\psi_{k-2} \in H^{k-2,4}$ e $\tau_{k-1} \in H^{k-1,4}$ tal que

$$j^k(\Psi_{k*}f_{k-1} \cdot \tilde{X} - J\nabla H_s) = 0.$$

O Teorema 1.15 diz que (1.9) é formalmente orbitalmente equivalente a (1.11) e (1.10) é formalmente orbitalmente equivalente a (1.12).

Observação 1.16. As funções Ψ_k, H_k nos Teoremas 1.14 e 1.15 são diferentes, para cada caso.

1.3.2 Dimensão 6 e superiores

Considere um campo vetorial reversível $X : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ com $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Seja $A = DX(\mathbf{0})$, e suponha que os autovalores de A são $\pm p_1 i, \dots, \pm p_n i$, com $\{p_1, \dots, p_n\}$ um conjunto linearmente independente sobre os racionais.

Ao contrário do que fizemos em dimensão 4, aqui iremos considerar somente o caso elíptico.

Uma forma normal para X é dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -p_1 y_1 - y_1 f_1^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n), \\ \dot{y}_1 &= p_1 x_1 + x_1 f_1^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n), \\ \tilde{X} : \quad &\vdots \\ \dot{x}_n &= -p_n y_n - y_n f_n^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n), \\ \dot{y}_n &= p_n x_n + x_n f_n^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n), \end{aligned}$$

onde $f_i^{[j]}$ é um polinômio j -homogêneo e $\Delta_j = x_j^2 + y_j^2$ para $\mathbf{x} = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ (note que $f_i^{[j]}$ é um polinômio de grau $2j$ nas variáveis $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$).

Temos o seguinte resultado.

Teorema 1.17. *Suponha que $j^3 \tilde{X}$ é hamiltoniano e genérico, isto é, seus coeficientes não satisfazem uma certa relação algébrica. Então X é formalmente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano, ou seja, para todo $k \geq 2$ existe uma mudança de coordenadas Ψ_k , uma reparametrização do tempo ρ_k e uma função H_k de modo que*

$$j^k (\Psi_{k*} \rho_k \cdot \tilde{X} - J \nabla H_k) = 0.$$

Dado um campo vetorial $Z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que Z é k -quase-desacoplado se $Z - j^k Z$ é um campo vetorial desacoplado.

O próximo resultado é exclusivo para campos vetoriais em dimensão 6.

Teorema 1.18. *Com a notação desta seção, suponha $n = 3$. Se $j^3 \tilde{X}$ é hamiltoniano e genérico, então X é formalmente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano 3-quase-desacoplado.*

1.4 Prova do Teorema 1.14

Vamos considerar somente o caso $\sigma(A) = \sigma_3(A)$. O caso $\sigma(A) = \sigma_2(A)$ é análogo. O 3-jato de $\tilde{X}$ é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1(a_{1,0}\Gamma_1 + a_{0,1}\Gamma_2), \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1(a_{1,0}\Gamma_1 + a_{0,1}\Gamma_2), \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2(b_{1,0}\Gamma_1 + b_{0,1}\Gamma_2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2(b_{1,0}\Gamma_1 + b_{0,1}\Gamma_2), \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde $\Gamma_j = x_j y_j$, para $j = 1, 2$.

O sistema (1.13) é hamiltoniano se, e só se,

$$b_{1,0} = a_{1,0}. \quad (1.14)$$

Lembre que estamos supondo $b_{1,0}a_{0,1} \neq 0$.

Iremos considerar $b_{1,0}a_{0,1} > 0$; o caso negativo é similar. A condição (1.14) pode ser obtida com uma reescala linear das variáveis. Defina $x_1 = c\tilde{x}_1$, $y_1 = c\tilde{y}_1$, $x_2 = d\tilde{x}_2$ e $y_2 = d\tilde{y}_2$. O sistema (1.13) nestas coordenadas é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1(c^2 a_{1,0} \Gamma_1 + d^2 a_{0,1} \Gamma_2), \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1(c^2 a_{1,0} \Gamma_1 + d^2 a_{0,1} \Gamma_2), \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2(c^2 b_{1,0} \Gamma_1 + d^2 b_{0,1} \Gamma_2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2(c^2 b_{1,0} \Gamma_1 + d^2 b_{0,1} \Gamma_2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Tomando $d = \sqrt{\frac{b_{1,0}}{a_{0,1}}}$ e $c = 1$, a condição (1.14) se verifica.

O 5-jato de $\tilde{X}$, após esta mudança de coordenadas, é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1(a_{1,0} \Gamma_1 + a_{0,1} \Gamma_2) + x_1(a_{2,0} \Gamma_1^2 + a_{1,1} \Gamma_1 \Gamma_2 + a_{0,2} \Gamma_2^2), \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1(a_{1,0} \Gamma_1 + a_{0,1} \Gamma_2) - y_1(a_{2,0} \Gamma_1^2 + a_{1,1} \Gamma_1 \Gamma_2 + a_{0,2} \Gamma_2^2), \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2(a_{0,1} \Gamma_1 + b_{0,1} \Gamma_2) + x_2(b_{2,0} \Gamma_1^2 + b_{1,1} \Gamma_1 \Gamma_2 + b_{0,2} \Gamma_2^2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2(a_{0,1} \Gamma_1 + b_{0,1} \Gamma_2) - y_2(b_{2,0} \Gamma_1^2 + b_{1,1} \Gamma_1 \Gamma_2 + b_{0,2} \Gamma_2^2), \end{aligned} \quad (1.16)$$

onde os coeficientes $a_{i,j}, b_{i,j}$ podem não ser os mesmos de (1.10). Continuaremos denotando este campo por $\tilde{X}$.

O sistema (1.16) é hamiltoniano se, e só se, $a_{1,1} = -2b_{2,0}$ e $a_{0,2} = -\frac{1}{2}b_{1,1}$. Procuramos por $\Psi_3(\mathbf{x}) = Id + \psi_3(\mathbf{x})$, onde ψ_3 é escrito em termos de (Γ_1, Γ_2) como

$$\psi_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1(\mu_{1,0} \Gamma_1 + \mu_{0,1} \Gamma_2) \\ x_2(\mu_{1,0} \Gamma_1 + \mu_{0,1} \Gamma_2) \\ x_2(\delta_{1,0} \Gamma_1 + \delta_{0,1} \Gamma_2) \\ y_2(\delta_{1,0} \Gamma_1 + \delta_{0,1} \Gamma_2) \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} H_6(\mathbf{x}) &= -\beta_1 \Gamma_1 - \beta_2 \Gamma_2 - a_{0,1} \Gamma_1 \Gamma_2 - \frac{a_{1,0}}{2} \Gamma_1^2 - \frac{b_{0,1}}{2} \Gamma_2^2 \\ &+ h_{3,0} \Gamma_1^3 + h_{2,1} \Gamma_1^2 \Gamma_2 + h_{1,2} \Gamma_1 \Gamma_2^2 + h_{0,3} \Gamma_2^3. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é resolver

$$j^5(\Psi_{3*}\tilde{X} - J\nabla H_6) = 0.$$

Isto é equivalente a resolver o seguinte sistema linear nas variáveis $\mu_{i,j}$, $\delta_{i,j}$ e $h_{i,j}$:

$$\begin{aligned} 2a_{1,0}\mu_{1,0} - 3h_{3,0} &= a_{2,0}, \\ 2b_{0,1}\delta_{0,1} - 3h_{0,3} &= b_{0,2}, \\ 2a_{0,1}\mu_{1,0} - h_{2,1} &= b_{2,0}, \\ 2a_{0,1}\delta_{0,1} - h_{1,2} &= a_{0,2}, \\ 2b_{0,1}\delta_{1,0} + 2a_{0,1}\mu_{0,1} - 2h_{1,2} &= b_{1,1}, \\ 2a_{0,1}\delta_{1,0} + 2a_{1,0}\mu_{0,1} - 2h_{2,1} &= a_{1,1}. \end{aligned}$$

É fácil obter uma solução para este sistema. Por exemplo, é possível tomar

$$\begin{aligned} \mu_{0,1} &= \frac{1}{2} \frac{b_{1,1} - 2a_{0,2}}{a_{0,1}}, \quad \mu_{1,0} = \frac{1}{4} \frac{2a_{0,1}b_{2,0} - a_{0,1}a_{1,1} + a_{1,0}b_{1,1} - 2a_{1,0}a_{0,2}}{a_{0,1}^2}, \\ \delta_{0,1} &= 0, \quad \delta_{1,0} = 0. \end{aligned}$$

Após esta mudança de coordenadas, $\tilde{X}$ é hamiltoniano até ordem 5.

Agora iremos normalizar um jato arbitrário. Suponha que $\tilde{X}$ é hamiltoniano até ordem $2k-1$ com respeito a H_{2k} . Procuramos por $\Psi_{2k-1}(\mathbf{x}) = Id + \psi_{2k-1}(\mathbf{x})$, onde ψ_{2k-1} é escrito em termos de (Γ_1, Γ_2) como

$$\psi_{2k-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \sum_{i+j=k-1} \mu_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \\ x_2 \sum_{i+j=k-1} \mu_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$H_{2k+2}(\mathbf{x}) = H_{2k}(\mathbf{x}) + \sum_{i+j=k+1} h_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j.$$

Nosso objetivo é resolver

$$j^{2k+1}(\Psi_{2k-1*}\tilde{X} - J\nabla H_{2k+2}) = 0.$$

Isto é equivalente a resolver

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= 2a_{0,1}\delta_{i,j-1} - (i+1)h_{i+1,j} + 2a_{1,0}\mu_{i-1,j}, \\ b_{i,j} &= 2b_{0,1}\delta_{i,j-1} - (j+1)h_{i,j+1} + 2a_{0,1}\mu_{i-1,j}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

para $i+j=k$ (assuma $\mu_{i,j} = \delta_{i,j} = 0$ para $i, j \notin \{0, \dots, k\}$). Este sistema é triangular, portanto pode ser resolvido (lembramos que $b_{1,0}a_{0,1} \neq 0$).

Isto conclui a prova do Teorema 1.14.

1.5 Prova do Teorema 1.15

Iremos agora nos focar no Teorema 1.15-(b). A prova do Teorema 1.15-(a) é similar. Lembramos o 3-jato de $\tilde{X}$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1(a_{1,0}\Gamma_1 + a_{0,1}\Gamma_2), \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1(a_{1,0}\Gamma_1 + a_{0,1}\Gamma_2), \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2(b_{1,0}\Gamma_1 + b_{0,1}\Gamma_2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2(b_{1,0}\Gamma_1 + b_{0,1}\Gamma_2).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Primeiro multiplicamos $\tilde{X}$ por $f_2(\mathbf{x}) = 1 - \frac{b_{1,0}}{\beta_2}\Gamma_1 - \frac{a_{0,1}}{\beta_1}\Gamma_2$, de forma que $j^3(f_2 \cdot \tilde{X})$ se escreve como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1(a_{1,0}\Gamma_1), \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1(a_{1,0}\Gamma_1), \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2(b_{0,1}\Gamma_2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2(b_{0,1}\Gamma_2).\end{aligned}\tag{1.19}$$

O sistema (1.19) é hamiltoniano com respeito a

$$H_4(\mathbf{x}) = -\left(\beta_1\Gamma_1 + \frac{1}{2}\tilde{a}_{1,0}\Gamma_1^2\right) - \left(\beta_2\Gamma_2 + \frac{1}{2}\tilde{b}_{0,1}\Gamma_2^2\right).$$

Vamos continuar denotando $f_2 \cdot \tilde{X}$ por $\tilde{X}$. O 5-jato de $\tilde{X}$ se escreve como

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \beta_1 x_1 + x_1(a_{1,0}\Gamma_1 + a_{2,0}\Gamma_1^2 + a_{1,1}\Gamma_1\Gamma_2 + a_{0,2}\Gamma_2^2), \\ \dot{y}_1 &= -\beta_1 y_1 - y_1(a_{1,0}\Gamma_1 + a_{2,0}\Gamma_1^2 + a_{1,1}\Gamma_1\Gamma_2 + a_{0,2}\Gamma_2^2), \\ \dot{x}_2 &= \beta_2 x_2 + x_2(b_{0,1}\Gamma_2 + b_{2,0}\Gamma_1^2 + b_{1,1}\Gamma_1\Gamma_2 + b_{0,2}\Gamma_2^2), \\ \dot{y}_2 &= -\beta_2 y_2 - y_2(b_{0,1}\Gamma_2 + b_{2,0}\Gamma_1^2 + b_{1,1}\Gamma_1\Gamma_2 + b_{0,2}\Gamma_2^2).\end{aligned}\tag{1.20}$$

Procuramos $\Psi_3(\mathbf{x}) = Id + \psi_3(\mathbf{x})$, onde ψ_3 é escrito em termos de (Γ_1, Γ_2) como

$$\psi_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1(\mu_{1,0}\Gamma_1 + \mu_{0,1}\Gamma_2) \\ y_1(\mu_{1,0}\Gamma_1 + \mu_{0,1}\Gamma_2) \\ x_2(\delta_{1,0}\Gamma_1 + \delta_{0,1}\Gamma_2) \\ y_2(\delta_{1,0}\Gamma_1 + \delta_{0,1}\Gamma_2) \end{pmatrix}$$

e

$$f_4(\mathbf{x}) = 1 + \rho_{2,0}\Gamma_1^2 + \rho_{1,1}\Gamma_1\Gamma_2 + \rho_{0,2}\Gamma_2^2.$$

Nosso objetivo é resolver

$$j^5(\Psi_{3*}\tilde{X} - J\nabla H_s) = 0.$$

Isto é equivalente a resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}\rho_{0,2}\beta_1 &= -a_{0,2}, \\ \rho_{2,0}\beta_2 &= -b_{2,0}, \\ 2a_{1,0}c_{0,1} - \rho_{1,1}\beta_1 &= a_{1,1}, \\ 2d_{0,1}b_{0,1} - \rho_{0,2}\beta_2 &= b_{0,2}, \\ 2d_{1,0}b_{0,1} - \rho_{1,1}\beta_2 &= b_{1,1}, \\ \rho_{2,0}\beta_1 - 2a_{1,0}c_{1,0} + 3h_{3,0} &= -a_{2,0}.\end{aligned}$$

Este sistema é triangular, logo pode ser resolvido facilmente. Desta forma, obtemos a equivalência orbital entre os 5-jatos de $\tilde{X}$ e $J\nabla H_s$.

Nosso objetivo é mostrar que todos os termos de ordem superior podem ser eliminados de $\tilde{X}$, usando mudanças de coordenadas e reparametrizações do tempo.

Vamos normalizar um jato arbitrário. Suponha que o $2k - 1$ -jato de $\tilde{X}$ está normalizado, de modo que ele é igual a $J\nabla H_s$. Procuramos por uma mudança de coordenadas da forma $\Psi_{2k-1}(\mathbf{x}) = Id + \psi_{2k-1}(\mathbf{x})$, onde ψ_{2k-1} é escrito em termos de (Γ_1, Γ_2) como

$$\psi_{2k-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \sum_{i+j=k-1} \mu_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \\ y_1 \sum_{i+j=k-1} \mu_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \\ x_2 \sum_{i+j=k-1} \delta_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \\ y_2 \sum_{i+j=k-1} \delta_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j \end{pmatrix}$$

e

$$f_{2k}(\mathbf{x}) = 1 + \sum_{i+j=k} \rho_{i,j} \Gamma_1^i \Gamma_2^j.$$

Nosso objetivo é resolver

$$j^{2k+1}(\Psi_{2k-1*}(f_{2k} \cdot \tilde{X}) - J\nabla H_s) = 0.$$

Isto é equivalente a resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}2b_{0,1}\delta_{i,j} - \beta_2\rho_{i,j+1} &= b_{i,j+1}, \\ 2a_{1,0}\mu_{i,j} - \beta_1\rho_{i+1,j} &= a_{i+1,j}, \\ \beta_1\rho_{0,k} &= -a_{0,k}, \\ \beta_2\rho_{k,0} &= -b_{0,k},\end{aligned}\tag{1.21}$$

para $i + j = k$. Se $a_{1,0}b_{0,1} \neq 0$, o sistema (1.21) tem solução, já que é triangular. Isto conclui a prova do Teorema 1.15.

1.6 Provas dos Teoremas 1.17 e 1.18

Seja $X \in \Omega_0^\varphi$ e $\tilde{X}$ uma forma normal para X , ao redor da origem. Assim $\tilde{X}$ se escreve como $\tilde{X}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + f_3(\mathbf{x}) + f_5(\mathbf{x}) + \dots$, onde cada f_k é uma aplicação polinomial k -homogênea (os termos de ordem par na expansão em série de Taylor de $\tilde{X}$ são nulos).

As hipóteses de não-ressonância da singularidade $\mathbf{0}$ garantem que

$$f_{2j+1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -y_1 f_1^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \\ x_1 f_1^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \\ \vdots \\ -y_n f_n^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \\ x_n f_n^{[j]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \end{pmatrix}$$

onde $f_i^{[j]}$ é um polinômio j -homogêneo e $\Delta_j = x_j^2 + y_j^2$ para $\mathbf{x} = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ (note que $f_i^{[j]}$ é um polinômio de grau $2j$ em $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$).

Nosso objetivo é levar $\tilde{X}$ a um campo vetorial hamiltoniano Y . Escreva $Y(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + g_3(\mathbf{x}) + g_5(\mathbf{x}) + \dots$, onde $g_k = J\nabla H_{k+1}$ para uma certa função polinomial $k+1$ -homogênea $H_{k+1} : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$.

Para $k \geq 1$, considere uma mudança de coordenadas da forma $\Psi_{2k+1} = Id + \psi_{2k+1}$ com ψ_{2k+1} uma aplicação polinomial $(2k+1)$ -homogênea e uma reparametrização do tempo $\rho_{2k+2} = 1 + \theta_{2k+2}$, para uma certa função polinomial $2k+2$ -homogênea θ_{2k+2} .

Se

$$j^{2k+3} (\Psi_{2k+1*}(\rho_{2k+2} \cdot \tilde{X}) - Y) = 0 \quad (1.22)$$

vale para todo k , então $\tilde{X}$ é formalmente orbitalmente equivalente a Y . Como X é formalmente conjugado a $\tilde{X}$, segue que X é formalmente orbitalmente equivalente a Y .

Vamos considerar ψ_{2k+1} da forma

$$\psi_{2k+1} = \begin{pmatrix} x_1 \sigma_1^{[k]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \\ y_1 \sigma_1^{[k]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \\ \vdots \\ x_n \sigma_n^{[k]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \\ y_n \sigma_n^{[k]}(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \end{pmatrix}$$

com $\sigma_j^{[k]}$ um polinômio k -homogêneo..

Suponha que (1.22) se verifique para todo $k' < k$. Para $k' = k$, a equação (1.22) é equivalente ao sistema

$$f_{2k+3} - g_{2k+3} + A\mathbf{x} \cdot \theta_{2k+2} = 2f_3^\Sigma, \quad (1.23)$$

onde $f_3^\Sigma = f_3(\sigma_1\Delta_1, \dots, \sigma_n\Delta_n)$ e $\sigma_j = \sigma_j(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$.

Portanto, para provar o Teorema A é suficiente mostrar que, sob certa condição genérica, a equação (1.23) tem uma solução com respeito a g_{2k+3} , θ_{2k+2} e f_3^Σ , para todo $k \geq 1$. A hipótese é de que o primeiro caso é verdade, isto é, $j^3\tilde{X}$ é assumido hamiltoniano.

Devemos resolver a equação (1.23), isto é, $f_{2k+3} - g_{2k+3} + A\mathbf{x} \cdot \theta_{2k+2} = 2f_3^\Sigma$.

É fácil descrever todos os termos desta soma, exceto o lado direito, $f_3^\Sigma = f_3(\sigma_1\Delta_1, \dots, \sigma_n\Delta_n)$.

A equação (1.23) é equivalente a um sistema linear nos coeficientes de g_{2k+3} , θ_{2k+2} e $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Considere

$$\begin{aligned} f_{2j-1}^{[k]} &= -y_j \sum_{|I|=k+1} a_{j,I}^{[k]} \Delta_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \Delta_n^{i_n}, \quad j = 1, \dots, n, \\ f_{2j}^{[k]} &= x_j \sum_{|I|=k+1} a_{j,I}^{[k]} \Delta_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \Delta_n^{i_n}, \quad j = 1, \dots, n, \\ \theta_{2k+2}(\mathbf{x}) &= 1 + \sum_{|I|=k+1} \theta_I \Delta_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \Delta_n^{i_n}, \\ g_{2k+3} &= J\nabla H_{2k+4}, \text{ where } H_{2k+4}(\mathbf{x}) = \sum_{|I|=k+2} h_I \Delta_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \Delta_n^{i_n} \text{ e} \\ \sigma_j^{[k]}(\mathbf{x}) &= \sum_{|I|=k} \mu_{j,I} \Delta_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \Delta_n^{i_n}. \end{aligned}$$

Assim, a equação (1.23) é equivalente ao seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} a_{j,I} &= -\alpha_j \theta_I \text{ (from } A\mathbf{x} \cdot \theta_{2k+2}) \\ &+ 2(i_j + 1)h_{i_1, \dots, i_{j-1}, i_j+1, i_{j+1}, \dots, i_n} \text{ (from } g_{2k+3}) \\ &+ \sum_{l=1}^n a_{j,e_r}^{[1]} \cdot \mu_{l,i_1, \dots, i_{j-1}, i_j-1, i_{j+1}, \dots, i_n} \text{ (from } f_3^\Sigma), \end{aligned} \quad (1.24)$$

para $j = 1, \dots, n$, onde $e_r = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ tem 1 na posição r e 0 caso contrário. Na última soma, consideramos $\mu_{j,i_1, \dots, i_{j-1}, i_j-1, i_{j+1}, \dots, i_n} = 0$ se $i_j - 1 < 0$, e $a_{j,e_r}^{[1]}$ são os coeficientes de f_3 . Note que a relação $a_{j,e_r}^{[1]} = a_{r,e_j}^{[1]}$ se verifica entre estes coeficientes, já que $j^3\tilde{X}$ é hamiltoniano.

Defina $\mathcal{F} = \prod_{j=1}^n \prod_{r=1}^n a_{j,e_r}^{[1]}$ e suponha que $\mathcal{F} \neq 0$. Esta é a condição genérica para que o sistema (1.24) tenha solução (uma espécie de não-nulidade da diagonal). Com esta hipótese, o sistema (1.24) tem solução. Isto conclui a prova do Teorema A.

Para provar o Teorema 1.18, basta alterar a equação (1.23) e considerar $h_{j,I} = 0$ para $I \neq (k+2)e_r$, $j, r = 1, \dots, 6$. Como a condição $\mathcal{F} \neq 0$ não é afetada por esta alteração, o novo sistema ainda tem solução.

1.7 Conclusões

Seja $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ uma involução que fixa a origem com $\dim \text{Fix}(\varphi) = n$. Lembramos que se $X \in \Omega(2n, \mathbf{0}, \emptyset, \varphi)$ então $X : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um campo vetorial suave e φ -reversível, com $\mathbf{0}$ um equilíbrio elíptico não-ressonante para X , isto é, $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e os autovalores de $DX(\mathbf{0})$ são $\pm p_1 i, \dots, \pm p_n i$, com $p_j > 0$ e $\{p_1, \dots, p_n\}$ um conjunto linearmente independente sobre os racionais.

No Teorema 1.17, mostramos que todo campo vetorial $X \in \Omega(2n, \mathbf{0}, \emptyset, \varphi)$ com $j^3 \tilde{X}$ hamiltoniano, onde $\tilde{X}$ é uma forma normal para X , é formalmente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano.

O próximo passo é estudar os casos ressonantes. Em dimensão 4, alguns casos ressonantes são estudados em [23]. Baseado nos resultados de [35], um bom ponto de partida para lidar com os casos ressonantes é considerar campos vetoriais reversíveis-equivariantes.

Seja $G = \langle \varphi, \psi \rangle$ um grupo finito de difeomorfismos, com $\varphi(\mathbf{0}) = \psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\varphi^2 = \psi^2 = \text{Id}$. Considere $\{G_1, \dots, G_r\}$ a linearização de G . Seja $X : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ um campo vetorial G_j -reversível-equivariante para algum $j = 1, \dots, r$, com $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0}$ é uma singularidade simples e $p_1 : \dots : p_s$ -ressonante.

Acreditamos ser possível provar o seguinte resultado.

Conjectura 1: Suponha que $p_1, \dots, p_s$ satisfaçam alguma relação diofantina. Então existe $r_0 \leq r$ tal que para todo $j \in \{1, \dots, r_0\}$, se X é G_j -reversível-equivariante e $j^3 \tilde{X}$ é hamiltoniano, então X é genericamente formalmente orbitalmente equivalente a um campo vetorial hamiltoniano.

Outro avanço possível no Teorema 1.17 é entender como passar de *equivalência orbital* para *conjugação*, mesmo com mais hipóteses sobre os jatos de ordem baixa de $\tilde{X}$.

Além disto, baseado no que foi feito em dimensão 4 neste capítulo e no artigo [23], seria interessante obter condições para a equivalência orbital formal a campos hamiltonianos polinomiais, ou mesmo a campos vetoriais quase-desacoplados.

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS MINIMAIS EM PERTURBAÇÕES DE CAMPOS VETORIAIS REVERSÍVEIS

Neste capítulo desenvolvemos um programa para estudar bifurcação de famílias de órbitas periódicas em sistemas dinâmicos reversíveis. A teoria necessária neste capítulo se encontra em [8, 13, 19, 20, 41, 26]. Os resultados deste capítulo estão contidos em [24].

2.1 Introdução e resultados principais

Um dos principais objetivos da teoria qualitativa das equações diferenciais é estudar a persistência ou bifurcação de conjuntos minimais invariantes para uma dada equação diferencial, quando sujeita a pequenas perturbações.

Neste capítulo consideramos campos vetoriais reversíveis sujeitos a perturbações não-reversíveis.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Lembremos que um sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \quad (2.1)$$

é dito ser φ -reversível se existe uma involução suave $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, com $\dim(\text{Fix}(\varphi)) = 2$, tal que

$$D\varphi(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = -f(\varphi(\mathbf{x})).$$

Claramente, se $\mathbf{x}(t)$ é uma solução do sistema (2.1), então $\varphi(\mathbf{x}(-t))$ também é uma solução de (2.1). Uma solução $\mathbf{x}(t)$ de (2.1) é dita ser *simétrica* se $\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{x}(-t))$.

Note que uma solução é simétrica se ela intercepta $\text{Fix}(\varphi)$ em pelo menos um ponto. Além disto, se $\mathbf{x}(t)$ intercepta $\text{Fix}(\varphi)$ em mais que um ponto, então $\mathbf{x}(t)$ é uma órbita periódica simétrica.

Vamos nos focar em pequenas perturbações do sistema (2.1), com $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$, da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - y(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2)) + \dots, \\ \dot{y} &= px + x(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2)) + \dots, \\ \dot{z} &= -qw - w(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2)) + \dots, \\ \dot{w} &= qz + z(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2)) + \dots,\end{aligned}\tag{2.2}$$

para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{N}$ com $(p, q) = 1$, onde $\dots$ representam os termos de ordem superior.

O sistema (2.2) é uma forma normal até ordem 3 para campos vetoriais reversíveis, ao redor de um equilíbrio elíptico $p : q$ -ressonante, com $p + q \geq 5$, ou não-ressonante, em $\mathbb{R}^4$. Estes termos genericamente não pode ser eliminados de (2.2) por meio de mudanças de coordenadas.

Dado um campo vetorial X em numa variedade M , com fluxo ϕ_t , um conjunto $\Omega \subset M$ é dito ser invariante para X se $\phi_t(\Omega) \subset \Omega$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Casos importantes são quando $\Omega = \{p\}$, $p \in M$ e quando Ω é homeomorfo a S^1 . Neste capítulo consideramos os casos em que Ω é homeomorfo a um toro ou à união de cilindros.

Conjuntos minimais invariantes, tais como órbitas periódicas e toros invariantes, genericamente aparecem em famílias a 1 parâmetro em campos vetoriais reversíveis. Basicamente, isto se deve à simetria do sistema com respeito ao conjunto $\text{Fix}(\varphi)$ (mais detalhes, veja [29]).

Uma das principais ferramentas para estudar a existência de conjuntos invariantes minimais para sistemas reversíveis é o método de Lyapunov-Schmidt. Para uma descrição deste método, veja [22]. Este método foi empregado, por exemplo em [15], [26] e [43] para estudar a existência de órbitas periódicas e toros invariantes para sistemas reversíveis em dimensões 4 e 6. Em [22] o método de Lyapunov-Schmidt foi utilizado para estudar a persistência de famílias de órbitas periódicas em uma deformação versal linear de uma família de campos vetoriais reversíveis.

Neste capítulo iniciamos um programa para estudar bifurcações de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas e toros invariantes em sistemas reversíveis, considerando perturbações polinomiais.

Este programa consiste em considerar a equação diferencial reversível (2.1) com $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $A = f'(\mathbf{0})$ invertível. Passando este sistema para forma normal até ordem k , podemos escrevê-lo como

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + f_k(\mathbf{y}) + o(|\mathbf{y}|^{k+1}), \quad (2.3)$$

com f_k dependendo dos termos de graus menores ou iguais a k da expansão de Taylor de f numa vizinhança da origem. A existência de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas simétricas para o sistema (2.1) com $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ and $A = f'(\mathbf{0})$ pode ser estudada aplicando o método de Lyapunov-Schmidt à equação (2.3). Os casos que trataremos aqui admitem tais famílias, genericamente.

Uma vez obtida a existência de famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas, consideramos um sistema auxiliar da forma

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \varepsilon f_k(\mathbf{y}), \quad (2.4)$$

e sua versão perturbada

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \varepsilon f_k(\mathbf{y}) + \varepsilon P_m(\mathbf{y}), \quad (2.5)$$

onde P_m é um campo vetorial polinomial ε é um pequeno parâmetro, considerado em (2.4) e (2.5) por razões técnicas. Finalmente, estudamos a existência de conjuntos minimais para o sistema perturbado (2.5). Esta análise é feita usando o algoritmo apresentado na Seção 2.2.1.

Apesar de nos restringirmos a um caso particular de sistemas reversíveis, enfatizamos que o método apresentado é aplicável a muitas outras classes de sistemas. De fato, o resultado que apresentamos faz parte de um programa geral, que visa entender profundamente a dinâmica de campos vetoriais próximos a campos reversíveis. O (sub-)programa que apresentamos aqui nos permite discutir como são certos conjuntos minimais, e sua persistência e/ou bifurcação quando sujeito a pequenas perturbações.

Nossos resultados principais são os seguintes:

Teorema 2.1. *Considere um sistema diferencial reversível como (2.2), com $p, q \in \mathbb{N}$, p e q primos entre si. Assuma que uma das seguintes condições é satisfeita:*

$$(i) \ a > 0; \quad (ii) \ d > 0; \quad (iii) \ \frac{pd - qb}{ad - bc} > 0 \text{ e } \frac{pc - qa}{ad - bc} < 0.$$

Então existe uma família, parametrizada por σ , de soluções simétricas $\frac{2\pi}{1+\sigma}$ -periódicas do sistema (2.2), com $\sigma \in (0, \sigma_0)$ para $\sigma_0 > 0$ pequeno.

O Teorema 2.1 será provado na Seção 2.3.

Observação 2.2. *Da prova do Teorema 2.1 ficará claro que se duas (resp. três) das condições (i), (ii), (iii) são satisfeitas, então existem duas (resp. três) famílias de soluções periódicas e simétricas para o sistema (2.2).*

Considere agora o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - \varepsilon y \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_1(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= px + \varepsilon x \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_2(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -qw - \varepsilon w \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_3(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= qz + \varepsilon z \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon f_4(x, y, z, w),\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um pequeno parâmetro, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$, p e q primos entre si e f_1, f_2, f_3, f_4 são polinômios arbitrários de grau 3. O sistema não-perturbado, (2.6) com $\varepsilon = 0$, é um centro linear em $\mathbb{R}^4$, cujas órbitas periódicas estão em ressonância $p : q$.

Teorema 2.3. *Para $\varepsilon \neq 0$ pequeno, o sistema perturbado (2.6) pode ter um, dois ou três toros invariantes, folheados por órbitas periódicas, de modo que, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, dois deles (caso existam) se tornem órbitas periódicas de (2.6) com $\varepsilon = 0$, e o terceiro toro (se existir) persiste como toro invariante do sistema (2.6) com $\varepsilon = 0$. Além disto, apresentamos condições explícitas nos coeficientes do sistema (2.6) para a existência de um, dois ou três toros invariantes.*

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2.2 nós apresentamos alguns resultados básicos sobre campos vetoriais reversíveis, Teoria da Média, Formas Normais e o método de Lyapunov-Schmidt. Na Seção 2.3 provamos o Teorema 2.1, e na Seção 2.4 provamos o Teorema 2.3.

2.2 Preliminares

2.2.1 Resultados básicos sobre a Teoria da Média

Neste subseção apresentamos alguns resultados básicos sobre a Teoria da Média. Estes resultados serão úteis neste e nos demais capítulos.

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \varepsilon F(t, \mathbf{x}(t)) + \varepsilon^2 R(t, \mathbf{x}(t), \varepsilon),\tag{2.7}$$

onde $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, D é um domínio limitado e $t \geq 0$. Suponha ainda que $F(t, \mathbf{x})$ e $R(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$ são T -periódicas em t .

O sistema promediado associado ao sistema (2.7) é definido por

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \varepsilon f(\mathbf{y}(t)), \quad (2.8)$$

onde

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, \mathbf{y}) ds. \quad (2.9)$$

O próximo teorema apresenta condições para que as singularidades do sistema (2.8) estejam relacionadas com soluções T -periódicas do sistema (2.7). Para uma demonstração deste resultado, veja o Teorema 2.6.1 de [40], os Teoremas 11.5 e 11.6 de [45], ou o Teorema 4.1.1 de [20].

Teorema 2.4. *Considere o sistema de equações diferenciais (2.7) e assuma que as funções F , R , $D_{\mathbf{x}}F_1$, $D_{\mathbf{x}}^2F_1$ e $D_{\mathbf{x}}R$ são contínuas e limitadas por uma constante M (independente de ε) no intervalo $[0, \infty) \times D$ com $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Além disto, suponha que F e R são T -periódicas em t , com T independente de ε .*

- (a) *Se $a \in D$ é um ponto singular do sistema promediado (2.8) tal que $\det(D_{\mathbf{x}}f(a)) \neq 0$ então, para $|\varepsilon| > 0$ pequeno, existe uma solução T -periódica $\mathbf{x}_{\varepsilon}(t)$ do sistema (2.7) tal que $\mathbf{x}_{\varepsilon}(0) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.*
- (b) *Se o ponto singular a do sistema promediado (2.8) é hiperbólico, então a solução periódica correspondente $\mathbf{x}_{\varepsilon}(t)$ do sistema (2.7) é única, hiperbólica e de mesma estabilidade que a .*

Observamos que o Método da Média procura soluções periódicas isoladas. Portanto, não é esperado que ele possa ser aplicado a sistema reversíveis para procurar órbitas periódicas simétricas, visto que tais órbitas nunca são isoladas.

O algoritmo descrito em [26], baseado no Teorema 2.4, permite procurar cilindros e toros invariantes, folheados por órbitas periódicas. Passamos a descrever tal algoritmo.

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \varepsilon F(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -N & 0 & 0 \\ N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $N \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Let $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$.

Usando a mudança de variáveis $\mathbf{x} = (x, y, z, w)$ para (r, θ, R, ϕ) , onde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = R \cos \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right), \quad w = R \sin \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right),$$

o sistema (2.10) se transforma no sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\theta} &= N + \varepsilon G_2(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{R} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\phi} &= N + \varepsilon G_4(r, \theta, R, \phi), \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde

$$\begin{aligned} G_1 &= \cos \theta \bar{F}_1(r, \theta, R, \phi) + \sin \theta \bar{F}_2(r, \theta, R, \phi), \\ G_2 &= \frac{1}{r} \left[\cos \theta \bar{F}_2(r, \theta, R, \phi) - \sin \theta \bar{F}_1(r, \theta, R, \phi) \right], \\ G_3 &= \cos \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right) \bar{F}_3(r, \theta, R, \phi) + \sin \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right) \bar{F}_4(r, \theta, R, \phi), \\ G_4 &= \frac{N}{1-N} \left[\frac{1}{r} \left(\cos \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right) \bar{F}_4(r, \theta, R, \phi) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sin \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right) \bar{F}_3(r, \theta, R, \phi) \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r} (\sin \theta \bar{F}_1(r, \theta, R, \phi) - \cos \theta \bar{F}_2(r, \theta, R, \phi)) \right], \end{aligned}$$

$$\text{com } \bar{F}_k(r, \theta, R, \phi) = F_k \left(r \cos \theta, r \sin \theta, R \cos \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right), R \sin \left(\theta + \frac{1-N}{N} \phi \right) \right).$$

Tomando θ como o tempo no sistema (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} G_1(r, \theta, R, \phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} G_3(r, \theta, R, \phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{d\phi}{d\theta} &= 1 + \frac{\varepsilon}{N} (G_4 - G_2)(r, \theta, R, \phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.12}$$

Da última equação, segue que qualquer solução $(r(\theta), R(\theta), \phi(\theta))$ deste sistema será da forma $\phi(\theta) = \theta + \phi_0 + \varepsilon \cdot \eta(\varepsilon, r, R, \phi_0, \theta)$, onde η é uma função sem parte linear ou constante. Substituindo

esta expressão de $\phi(\theta)$ no sistema (2.12), ele se reduz ao sistema $X_{\phi_0}^\theta$, dado por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{2.13}$$

com $\phi_0 \in \mathbb{S}^1$.

Agora estudamos as órbitas periódicas do sistema (2.13) usando o Teorema 2.4. Calculando o sistema promediado do sistema (2.13), obtemos o campo vetorial X_{ϕ_0} , dado por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} g_1(r, R, \phi_0), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} g_3(r, R, \phi_0),\end{aligned}\tag{2.14}$$

onde $g_k(r, R, \phi_0) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} G_k(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta$ para $k = 1, 3$ com $N = p/q$, p e q primos entre si.

Seja $\phi_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que X_{ϕ_0} (o sistema (2.14)) tem um ponto singular simples $(r(\phi_0), R(\phi_0))$, ou seja, um ponto singular com

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_3)}{\partial(r, R)} \Big|_{r=r(\phi_0), R=R(\phi_0)} \right) \neq 0.\tag{2.15}$$

Para cada $\phi_0 \in \mathbb{S}^1$, aplicamos o Teorema 2.4 ao sistema (2.14), deduzindo que para $\varepsilon \neq 0$ pequeno, o sistema (2.13) tem uma única órbita periódica tal que

$$(r(0; (r(\phi_0), R(\phi_0))), R(0; (r(\phi_0), R(\phi_0)))) \rightarrow (r(\phi_0), R(\phi_0)) \quad \text{when } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Agora seja $I \subset \mathbb{S}^1$ conexo de modo que para todo $\phi_0 \in I \subset \mathbb{S}^1$, o sistema promediado (2.14) tem um ponto singular $(r(\phi_0), R(\phi_0))$ satisfazendo a condição (2.15). Voltando para o sistema (2.13), obtemos que este sistema, para todo $\varepsilon \neq 0$ pequeno, tem uma família contínua de órbitas periódicas, parametrizada por ϕ_0 , isto é, o sistema (2.12) (e, consequentemente, os sistemas (2.11) e (2.10)) têm um cilindro invariante folheado por órbitas periódicas. Se $I = \mathbb{S}^1$, então o sistema (2.12) (logo os sistemas (2.11) e (2.10)) têm um toro invariante folheado por órbitas periódicas.

2.2.2 Formas normais para campos vetoriais reversíveis

Apresentamos agora alguns resultados clássicos da teoria de formas normais, com ênfase no caso reversível. Para mais detalhes, veja [15] e [22].

O próximo lema nos dá a relação entre campos vetoriais reversíveis ao redor de um ponto de equilíbrio elíptico e o sistema (2.2).

Lema 2.5. *Seja*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \quad (2.16)$$

um campo vetorial reversível com $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, de modo que os autovalores de $f'(\mathbf{0})$ são $\pm pi, \pm qi$, $p < q$, $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si e $(p, q) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$. Então existe uma mudança de coordenadas $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \dots$ que transforma o sistema (2.16) no sistema (2.2) até ordem 3.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + f_2(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x}) + \dots$, onde A se escreve na forma de Jordan como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

e cada f_k , $k = 2, 3$ é polinomial homogênea de grau k .

O primeiro passo consiste em eliminar f_2 , já que o sistema (2.2) não possui termos quadráticos. Com este objetivo, propomos uma mudança de coordenadas da forma $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h_2(\mathbf{y})$, onde h_2 é polinomial homogêneo de grau 2, a ser determinado. Esta mudança de coordenadas transforma o sistema (2.16) no sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + Ah_2(\mathbf{y}) - h_2'(\mathbf{y})A\mathbf{y} + f_2(\mathbf{y}) + \tilde{f}_3(\mathbf{y}) + \dots, \quad (2.17)$$

onde $\tilde{f}_3$ depende de f_2 , f_3 e h_2 .

Para eliminar os termos quadráticos de (2.17), precisamos escolher h_2 de modo que

$$h_2'(\mathbf{y})A\mathbf{y} - Ah_2(\mathbf{y}) = f_2(\mathbf{y}). \quad (2.18)$$

Escreva $f_2 = (f_2^1, f_2^2, f_2^3, f_2^4)$, onde

$$f_2^j(x, y, z, w) = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=2} a_{j,i_1,i_2,i_3,i_4} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4},$$

e $h_2 = (h_2^1, h_2^2, h_2^3, h_2^4)$ onde

$$h_2^j(x, y, z, w) = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=2} b_{j,i_1,i_2,i_3,i_4} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4}.$$

Assim a equação (2.18) é equivalente a um sistema linear com 40 equações e 40 variáveis (os coeficientes de b_{j,i_1,i_2,i_3,i_4}). O determinante da matriz dos coeficientes de tal sistema é

$$\Delta_2 = 81p^{12}q^{12}(q+2p)^4(-q+2p)^4(2q+p)^4(-2q+p)^4.$$

Ou seja, se $p, q \neq 0$, $p \neq \pm 2q$ e $q \neq \pm 2p$ o sistema linear tem uma solução única. Logo, a equação (2.18) tem uma única solução h_2 , que pode ser utilizado para eliminar os termos quadráticos em (2.2).

Após a mudança de coordenadas que elimina os termos quadráticos, o sistema (2.17) pode ser reescrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \tilde{f}_3(\mathbf{x}) + \dots$$

onde $\tilde{f}_3$ depende de f_2, f_3 e h_2 .

Agora procuramos uma mudança de coordenadas da forma $\mathbf{x} = \mathbf{y} + h_3(\mathbf{y})$, onde h_3 é uma aplicação polinomial homogênea de grau 3 a ser determinada.

A última equação pode ser escrita como

$$\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + Ah_3(\mathbf{y}) - h'_3(\mathbf{y})A\mathbf{y} + \tilde{f}_3(\mathbf{y}) + \dots \quad (2.19)$$

Procuramos h_3 de modo que $Ah_3(\mathbf{y}) - h'_3(\mathbf{y})A\mathbf{y} + \tilde{f}_3(\mathbf{y})$ seja igual aos termos cúbicos em (2.2). Ponha $f_3 = (f_3^1, f_3^2, f_3^3, f_3^4)$, onde

$$f_3^j(x, y, z, w) = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=3} c_{j,i_1,i_2,i_3,i_4} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4},$$

e $h_3 = (h_3^1, h_3^2, h_3^3, h_3^4)$, onde

$$h_3^j(x, y, z, w) = \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=3} d_{j,i_1,i_2,i_3,i_4} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4}.$$

Como (2.2) é reversível, $\tilde{f}_3$ também é (veja [19]). Para determinar h_3 , precisamos resolver um sistema linear com 80 equações e 84 variáveis (os coeficientes d_{j,i_1,i_2,i_3,i_4} , a, b, c and d). Tal sistema pode ser resolvido se, e só se,

$$\Delta_3 = (p-q)(p+q)(3p+q)(3p-q) \neq 0,$$

ou seja, se $q \neq \pm p$ e $q \neq \pm 3p$.

Observamos que os coeficientes a, b, c e d de (2.2) são dados por

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{8}(-3c_{1,0,3,0,0} - c_{1,2,1,0,0} + c_{2,1,2,0,0} + 3c_{2,3,0,0,0}), \\ b &= \frac{1}{4}(-c_{1,0,1,2,0} + c_{2,1,0,2,0} - c_{1,0,1,0,2} + c_{2,1,0,0,2}), \\ c &= \frac{1}{4}(-c_{3,2,0,0,1} - c_{3,0,2,0,1} + c_{4,0,2,1,0} + c_{4,2,0,1,0}), \\ d &= \frac{1}{8}(-3c_{3,0,0,0,3} + c_{4,0,0,1,2} - c_{3,0,0,2,1} + 3c_{4,0,0,3,0}). \end{aligned}$$

Isto conclui a prova do lema. □

O sistema (2.2) é uma forma normal (de *Poincaré-Dulac* ou *Belitskii*) para (2.16). A teoria das formas normais é muito mais completa que este caso especial. Um bom texto sobre o assunto pode ser encontrado em [8].

2.2.3 Famílias a 1-parâmetro de órbitas periódicas

Nesta seção apresentamos brevemente o método de Lyapunov-Schmidt. Uma exposição mais detalhada pode ser encontrada em [43].

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função suave com $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e suponha que todos os autovalores da matriz $f'(\mathbf{0})$ são números imaginários puros não-nulos. Suponha ainda que tal matriz seja diagonalizável (uma hipótese simplificadora, mas não essencial). Estamos interessados em encontrar órbitas periódicas de

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{2.20}$$

com período próximo de 2π .

Denote por $C_{2\pi}^0$ (resp. $C_{2\pi}^1$) o espaço das aplicações $\mathbf{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que são 2π -periódicas e de classe C^0 (resp. C^1). Definimos em $C_{2\pi}^0$ o produto interno

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t) \rangle dt,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$.

Considere a aplicação $M : C_{2\pi}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow C_{2\pi}^0$ given by

$$M(\mathbf{x}, \sigma)(t) = (1 + \sigma)\dot{\mathbf{x}}(t) - f(\mathbf{x}(t)). \tag{2.21}$$

Veremos no fim desta seção que se $(\mathbf{x}, \sigma)$ satisfaz $M(\mathbf{x}, \sigma) = 0$ então $\mathbf{x}(\sigma t)$ é uma solução $2\pi/(1 + \sigma)$ -periódica de (2.20). Portanto, o problema de encontrar soluções periódicas com período próximo a 2π para (2.20) se reduz ao problema de encontrar soluções para $M(\mathbf{x}, \sigma) = 0$ com σ pequeno.

Enquanto a função M está definida em um espaço de dimensão infinita, o método de Lyapunov-Schmidt permite construir uma função $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida em um espaço de dimensão finita, de modo que soluções para $B = 0$ são soluções para $M = 0$.

Note que $M(0, 0) = 0$. Denote por $L := M_{\mathbf{x}}(0, 0) : C_{2\pi}^1 \rightarrow C_{2\pi}^0$ o operador dado por $L(\mathbf{x})(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - f'(0)\mathbf{x}(t)$.

Seja

$$D = \{q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n; q(t) = \exp(tf'(0))\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Defina

$$X_1 = \{\mathbf{x} \in C_{2\pi}^1; (\mathbf{x}, D) = 0\}$$

e

$$Y_1 = \{\mathbf{y} \in C_{2\pi}^0; (\mathbf{y}, D) = 0\}$$

o complemento ortogonal de D em $C_{2\pi}^1$ e $C_{2\pi}^0$, respectivamente, em relação ao produto interno definido anteriormente.

Considere uma base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e $q_i = \exp(tf'(0))u_i$, $i = 1, \dots, n$. Defina a projeção $P : C_{2\pi}^0 \rightarrow C_{2\pi}^0$ por

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (q_i, \mathbf{x}) q_i.$$

Assim, $\text{Im}(P) = D$, $\text{Ker}(P) = Y_1$; logo $C_{2\pi}^1 = X_1 \oplus D$ e $C_{2\pi}^0 = Y_1 \oplus D$.

Finalmente, defina

$$F(\mathbf{x}, \sigma) = F(\mathbf{q} + \mathbf{x}_1, \sigma) = \hat{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \sigma),$$

para $\mathbf{q} \in D$ e $\mathbf{x}_1 \in X_1$.

Para resolver $\hat{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \sigma) = 0$, basta resolver

$$\begin{aligned} (Id - P) \circ \hat{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \sigma) &= 0, \\ P \circ \hat{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1, \sigma) &= 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Lema 2.6. *A primeira equação do sistema (2.22) pode ser resolvida como $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^*(\mathbf{q}, \sigma)$.*

Demonstração. Veja [21]. □

Do lema anterior, resolver $M = 0$ é equivalente a resolver

$$\tilde{F}(\mathbf{q}, \sigma) = P \circ \hat{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1^*(\mathbf{q}, \sigma), \sigma) = 0.$$

A última equação é satisfeita se, e só se,

$$(\mathbf{q}_i, \hat{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}_1^*(\mathbf{q}, \sigma), \sigma) = 0, i = 1, \dots, n.$$

Portanto $M(\mathbf{x}, \sigma) = 0$ se, e só se, $B(\mathbf{u}, \sigma) = 0$, com $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$B(\mathbf{u}, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-tf'(0))F(\mathbf{x}^*(\mathbf{u}, \sigma), \sigma) dt$$

e

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{u}, \sigma) = \exp(tf'(0))\mathbf{u} + \mathbf{x}_1^*(\exp(tf'(0))\mathbf{u}, \sigma)$$

Se (2.20) é R -reversível, então B também é R -reversível.

Lema 2.7. *Suponha que (2.20) é R -reversível. Então*

$$(a) \quad RB(\mathbf{x}, \sigma) = -B(R\mathbf{x}, \sigma),$$

$$(b) \quad s_\phi B(\mathbf{x}, \sigma) = B(s_\phi \mathbf{x}, \sigma), \text{ com } s_\phi \mathbf{x} = \exp(-\phi f'(0))\mathbf{x}.$$

Demonstração. Veja [46]. □

Lema 2.8. *Suponha que f está na forma normal de Belitskii até ordem k , isto é,*

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + g_k(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}|^{k+1}),$$

com $A = f'(0)$ linear e g_k soma de monômios homogêneos, de grau 2 até k , com $[A^t, g_k] = 0$. Então

$$B(\mathbf{x}, \sigma) = \sigma A\mathbf{x} - g_k(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}|^{k+1}).$$

Demonstração. Veja [43]. □

Resumindo, o seguinte resultado é provado em [43].

Teorema 2.9. *Suponha que*

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + g_k(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}|^{k+1})$$

está na forma normal de Belitskii até ordem k . Defina

$$B(\mathbf{x}, \sigma) = \sigma A\mathbf{x} - g_k(\mathbf{x}) + o(|\mathbf{x}|^{k+1}).$$

Então para cada solução não-nula $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$ de $B(\mathbf{x}, \sigma) = 0$, temos uma família de soluções periódicas γ_σ com período $\frac{2\pi}{1+\sigma}$ para (2.20).

Utilizaremos o Teorema 2.9 para provar o Teorema 2.1.

2.3 Prova do Teorema 2.1

Provaremos o Teorema 2.1, que trata do sistema (2.2) e do Lema 2.5, mas é válido para sistemas mais gerais.

Prova do Teorema 2.1. Do Lema 2.5, este sistema está na forma normal de Belitskii até ordem 3. Defina $B : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ para o sistema (2.2) como

$$B(x, y, z, w, \sigma) = \begin{pmatrix} -\sigma p y + y(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2)) + \dots \\ \sigma p x - x(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2)) + \dots \\ -\sigma q w + w(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2)) + \dots \\ \sigma q z - z(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2)) + \dots \end{pmatrix}.$$

Do Teorema 2.9, se encontrarmos uma solução $(x, y, z, w) = (x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma), w(\sigma))$ para $B(x, y, z, w, \sigma) = 0$, então teremos obtido também uma família de soluções $\frac{2\pi}{1+\sigma}$ -periódicas para (2.2).

Como (2.2) é R -reversível, com $R(x, y, z, w) = (x, -y, z, -w)$, procuramos por soluções de $B = 0$ no subespaço $\text{Fix}(R) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; y = w = 0\}$.

Considere os termos de ordem superior na expressão de B escritos como $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)$, onde $\Omega_i = \Omega_i(x, y, z, w)$.

Pelo Lema 2.7(a), B é R -reversível, logo $\Omega_1(x, y, z, w) = -y\tilde{\Omega}_1(x, y, z, w)$ e $\Omega_3(x, y, z, w) = -w\tilde{\Omega}_3(x, y, z, w)$, para certas funções $\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_3$ de classe C^∞ . Usando o Lema 2.7(b) com $\phi = \pi/4$, obtemos que $\Omega_2(x, y, z, w) = x\tilde{\Omega}_2(x, y, z, w)$ e $\Omega_4(x, y, z, w) = z\tilde{\Omega}_4(x, y, z, w)$, para certas funções $\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_4$ de classe C^∞ .

Desta forma, $B|_{\text{Fix}(R)}$ se escreve como

$$\bar{B}(x, z, \sigma) = \begin{pmatrix} \sigma x(p - ax^2 - bz^2 + \Omega_1(x, z)) \\ \sigma z(q - cx^2 - dz^2 + \Omega_2(x, z)) \end{pmatrix}.$$

Nosso objetivo é resolver $B|_{\text{Fix}(R)} = 0$, o que pode ser feito, pelas hipóteses do Teorema 2.1.

Para $x \neq 0$, existe uma solução próxima de $(x, z) = \left(\sqrt{\frac{p}{a}}, 0\right)$ (caso (i) no Teorema 2.1).

Para $z \neq 0$, existe uma solução próxima de $(x, z) = \left(0, \sqrt{\frac{q}{d}}\right)$ (caso (ii) no Teorema 2.1).

Já se $xz \neq 0$, então existe uma solução próxima de

$$(x, z) = \left(\sqrt{\frac{pd - qb}{ad - bc}}, \sqrt{-\frac{pc - qa}{ad - bc}}\right)$$

(caso (iii) no Teorema 2.1).

Isto conclui a prova do Teorema 2.1. □

2.4 Prova do Teorema 2.3

Nesta seção estudamos o que acontece com as famílias de órbitas periódicas simétricas, obtidas na seção anterior, quando a simetria do sistema (2.2) é quebrada. Esta é a parte final do nosso programa, quando consideramos uma perturbação do truncamento de terceira ordem do sistema (2.2). Neste seção, provamos o Teorema 2.3.

Considere a reparametrização do tempo $s = qt$ no sistema (2.6). Obtemos assim o sistema

$$\begin{aligned} x' &= -Ny - \varepsilon y \left(\bar{a}(x^2 + y^2) + \bar{b}(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \bar{f}_1(x, y, z, w), \\ y' &= Nx + \varepsilon x \left(\bar{a}(x^2 + y^2) + \bar{b}(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \bar{f}_2(x, y, z, w), \\ z' &= -w - \varepsilon w \left(\bar{c}(x^2 + y^2) + \bar{d}(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \bar{f}_3(x, y, z, w), \\ w' &= z + \varepsilon z \left(\bar{c}(x^2 + y^2) + \bar{d}(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \bar{f}_4(x, y, z, w), \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $N = p/q$, $\bar{k} = k/p$ para $k \in \{a, b, c, d, f\}$ e a ξ' é a derivada de ξ com respeito a s .

No sistema (2.23), consideramos

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=j} \alpha_{i_1, i_2, i_3, i_4}^j x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4}, \\ \bar{f}_2 &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=j} \beta_{i_1, i_2, i_3, i_4}^j x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4}, \\ \bar{f}_3 &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=j} \gamma_{i_1, i_2, i_3, i_4}^j x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4}, \\ \bar{f}_4 &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=j} \delta_{i_1, i_2, i_3, i_4}^j x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3} w^{i_4}, \end{aligned}$$

e aplicamos o método descrito na Seção 2.2.1. Passando o sistema (2.23) para a forma padrão análoga ao sistema (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} r(a_1 r^2 + a_2 R^2 + a_3), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \frac{\varepsilon}{N} R(b_1 r^2 + b_2 R^2 + a_3), \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3\alpha_{3,0,0,0}^3 + 3\beta_{0,3,0,0}^3 + \alpha_{1,2,0,0}^3 + \beta_{2,1,0,0}^3, \\
a_2 &= 2\alpha_{1,0,0,2}^3 + 2\beta_{0,1,2,0}^3 + 2\beta_{0,1,0,2}^3 + 2\alpha_{1,0,2,0}^3, \\
a_3 &= 4\alpha_{1,0,0,0}^1 + 4\beta_{0,1,0,0}^1, \\
b_1 &= 2\delta_{2,0,0,1}^3 + 2\gamma_{2,0,1,0}^3 + 2\gamma_{0,2,1,0}^3 + 2\delta_{0,2,0,1}^3, \\
b_2 &= \gamma_{0,0,1,2}^3 + 3\gamma_{0,0,3,0}^3 + \delta_{0,0,2,1}^3 + 3\delta_{0,0,0,3}^3, \\
b_3 &= 4\delta_{0,0,0,1}^1 + 4\gamma_{0,0,1,0}^1.
\end{aligned}$$

Devemos encontrar as singularidades do sistema promediado (2.24), com $r \geq 0$, $R \geq 0$ e $r+R > 0$. Noutras palavras, devemos resolver o sistema

$$r(a_1 r^2 + a_2 R^2 + a_3) = 0, \quad R(b_1 r^2 + b_2 R^2 + b_3) = 0,$$

com $r \geq 0$, $R \geq 0$ e $r+R > 0$. Tais solução são:

$$\begin{aligned}
(r_1, R_1) &= \left(0, \sqrt{-\frac{b_3}{b_2}}\right), \text{ se } b_2 b_3 < 0; \\
(r_2, R_2) &= \left(\sqrt{-\frac{a_3}{a_1}}, 0\right), \text{ se } a_1 a_3 < 0; \\
(r_3, R_3) &= \left(\sqrt{\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}}, \sqrt{\frac{b_1 a_3 - b_3 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}}\right) \text{ se } \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} > 0 \& \frac{b_1 a_3 - b_3 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} > 0; \\
(r_4, R_4) &= \left(0, \sqrt{\frac{b_1 a_3 - b_3 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2}}\right) \text{ se } a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0 \& \frac{b_1 a_3 - b_3 a_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} > 0; \\
(r_5, R_6) &= \left(\sqrt{\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}}, 0\right) \text{ se } \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} > 0 \& b_1 a_3 - b_3 a_1 = 0.
\end{aligned}$$

A solução (r_k, R_k) é simples se:

$$\begin{aligned}
\frac{(a_2 b_3 - a_3 b_2) b_3}{b_2} &\neq 0 \text{ for } k = 1; \\
\frac{a_3 (b_3 a_1 - b_1 a_3)}{a_1} &\neq 0 \text{ for } k = 2; \\
\frac{(a_2 b_3 - a_3 b_2) (b_3 a_1 - b_1 a_3)}{a_1 b_2 - b_1 a_2} &\neq 0 \text{ for } k = 3.
\end{aligned}$$

Para $k = 4, 5$, a solução nunca é simples. Como o ângulo $\varphi_0 \in \mathbb{S}^1$ pode ser qualquer, cada uma das soluções encontradas dá origem a um toro invariante, folheado por órbitas periódicas, para o sistema (2.6).

Isto prova o Teorema 2.3.

Observação 2.10. *Os resultados do Teorema 2.3 dependem de f_1, f_2, f_3, f_4 , mas não de p, q, a, b, c e d , presentes no sistema (2.6). Tais termos se anulam quando calculamos o sistema promediado (2.14).*

No próximo exemplo, exibimos sistemas de equações diferenciais que realizam as condições do Teorema 2.3.

Exemplo 2.11. *Considere os sistemas de equações diferenciais*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - \varepsilon y \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}xw^2 \right), \\ \dot{y} &= px + \varepsilon x \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon (2x^2y), \\ \dot{z} &= -qw - \varepsilon w \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right), \\ \dot{w} &= qz + \varepsilon z \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{4}w + z^2w + \frac{1}{2}y^2w \right),\end{aligned}\tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - \varepsilon y \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{2}xw^2 \right), \\ \dot{y} &= px + \varepsilon x \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon (-10x^2y), \\ \dot{z} &= -qw - \varepsilon w \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right), \\ \dot{w} &= qz + \varepsilon z \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{4}w + z^2w \right)\end{aligned}\tag{2.26}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - \varepsilon y \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon (x - x^3), \\ \dot{y} &= px + \varepsilon x \left(a(x^2 + y^2) + b(z^2 + w^2) \right), \\ \dot{z} &= -qw - \varepsilon w \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right) + \varepsilon (z - z^3), \\ \dot{w} &= qz + \varepsilon z \left(c(x^2 + y^2) + d(z^2 + w^2) \right),\end{aligned}\tag{2.27}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $p, q \in \mathbb{N}$ com p e q primos entre si. O Teorema 2.3 garante que, para $\varepsilon > 0$ pequeno:

- o sistema (2.25) possui um toro invariante folheado por órbitas periódicas;
- o sistema (2.26) possui dois toros invariantes folheados por órbitas periódicas;
- o sistema (2.27) possui três toros invariantes folheados por órbitas periódicas.

CAPÍTULO 3

CONJUNTOS MINIMAIS PARA UMA CLASSE DE OSCILADORES FRACAMENTE ACOPLADOS

Neste capítulo estudamos sincronização de osciladores fracamente acoplados, usando a Teoria da Média. A teoria necessária neste capítulo se encontra em [13, 20, 26, 41, 45]. Os resultados deste capítulo estão em [33].

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= -\varepsilon f(x, \dot{x}) - \varepsilon g(x, \dot{x}, z, \dot{z}), \\ \ddot{z} + z &= -\varepsilon f(z, \dot{z}) - \varepsilon g(z, \dot{z}, x, \dot{x}),\end{aligned}\tag{3.1}$$

para $\varepsilon \geq 0$ e f, g funções reais de classe C^∞ .

O sistema (3.1) com $g \equiv 0$ é um sistema desacoplado de segunda ordem, e suas soluções são facilmente obtidas a partir das soluções de

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}).\tag{3.2}$$

Quando $g \neq 0$ em (3.1), tal sistema se torna acoplado, e o comportamento qualitativo de suas soluções pode não depender mais das soluções de (3.2).

Nosso objetivo é estabelecer condições para a existência de ciclos limite estáveis e cilindros invariantes para o sistema (3.1) usando a Teoria da Média.

A motivação para estudar o sistema (3.1) vem de [17] e [18]. Em [28] é discutida a existência de ciclos limite para sistemas da forma

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, y), \quad \ddot{y} + y = \varepsilon g(x, y), \quad (3.3)$$

para pequenos valores de $\varepsilon > 0$ e f, g polinômios arbitrários de grau 3.

A existência de conjuntos minimais invariantes estáveis em sistemas fracamente acoplados é por vezes referida como fenômeno de sincronização. Uma introdução ao assunto pode ser encontrada em [10], onde a formulação geral do problema de sincronização de sistemas dinâmicos é dada, além de vários exemplos. A sincronização de sistemas dinâmicos acoplados é estudada também em [7].

Apresentamos agora um esboço dos resultados principais deste capítulo. Seja $C_{m,n}$ o espaço dos pares (f, g) de aplicações polinomiais homogêneas em $\mathbb{R}^4$, de modo que:

- a) f é um polinômio homogêneo de grau $m \geq 2$ e
- b) g é um polinômio homogêneo de grau $n \geq 2$ com matriz hessiana $H_g = (h_{i,j})$ satisfazendo $h_{i,j} = 0$ para $(i, j) \in \{1, 2\} \times \{3, 4\}$.

Note que $\dim C_{m,n} = m + 2n + 3$. Mostramos que:

- 1) Existe um conjunto aberto $\mathcal{A} \subset C_{m,n}$ de modo que se $(f, g) \in \mathcal{A}$, então o sistema (3.1) possui um ciclo limite estável.
- 2) Existe um conjunto aberto $\mathcal{B} \subset C_{m,n}$ de modo que se $(f, g) \in \mathcal{B}$, então o sistema (3.1) possui um ou dois cilindros invariantes folheados por órbitas periódicas normalmente estáveis.

Os resultados da Teoria da Média que são necessários neste capítulo foram apresentados no capítulo anterior, especificamente na Seção 2.2.1, página 24.

Este capítulo é dividido da seguinte forma. Na Seção 2 nós detalhamos os resultados que serão demonstrados, e exibimos alguns exemplos. Nas Seções 3 e 4, deduzimos equações algébricas cujas soluções isoladas fornecem ciclos limites e/ou cilindros invariantes para o sistema (3.1).

3.2 Resultados principais

Note que escrevendo $y = \dot{x}$ e $w = \dot{z}$, o sistema (3.1) se torna

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon f(x, y) - \varepsilon g(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= w, \\ \dot{w} &= -z - \varepsilon f(z, w) - \varepsilon g(z, w, x, y).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Vamos considerar $(f, g) \in C_{m,n}$, onde $C_{m,n}$ foi definido na introdução.

Primeiro nos focamos na existência de ciclos limite para (3.1).

Teorema A: *Considere o sistema (3.1) com*

$$f(x, y) = f_m(x, y),$$

$$g(x, y, z, w) = g_n^{(1)}(x, y) + g_n^{(2)}(z, w),$$

onde $f_m, g_n^{(1)}, g_n^{(2)}$ são polinômios homogêneos de graus m, n, n respectivamente.

Então existe um conjunto aberto $\mathcal{A} \subseteq C_{m,n}$ de modo que para todo $\varepsilon \neq 0$ pequeno, se $(f, g) \in \mathcal{A}$, o sistema perturbado (3.1) tem pelo menos um ciclo limite. Além disto, existe um conjunto aberto $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A} \subseteq C_{m,n}$ de modo que se $(f, g) \in \mathcal{A}_0$, então o ciclo limite é estável.

O Teorema A será provado na Seção 3.3. O próximo exemplo é uma aplicação direta deste teorema.

Exemplo 3.1. *Considere o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= -\varepsilon(ax^5 + b\dot{x}^5) - \varepsilon(c\dot{x}^3 + d\dot{z}^3), \\ \ddot{z} + z &= -\varepsilon(az^5 + b\dot{z}^5) - \varepsilon(c\dot{z}^3 + d\dot{x}^3),\end{aligned}\tag{3.5}$$

com $b(c + d) < 0$, $d \neq 0$ e $c^2 + 5cd + 4d^2 \neq 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ pequeno, o sistema (3.5) tem um ciclo limite γ_ε . Se $b > 0$, $d < 0$ e $c + 4d < 0$, então este ciclo limite é estável (por exemplo, tomando $(a, b, c, d) = (1, 1, -1, -5)$).

Além disto, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon = \gamma_0$, onde

$$\gamma_0 = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 = \left(\frac{(c + d)I(n)}{bI(m)} \right)^{\frac{2}{m-n}}, z = 0, w = \left(\frac{(c + d)I(n)}{bI(m)} \right)^{\frac{1}{m-n}} \right\}$$

é uma órbita periódica de (3.5) para $\varepsilon = 0$, onde $I(k) = \int_0^{2\pi} \cos^{k+1}(s) ds$.

Nos voltamos agora para os resultados sobre a existência de cilindros invariantes, folheados por órbitas periódicas para o sistema (3.1).

Teorema B: *Considere o sistema (3.1) com*

$$f(x, y) = f_m(x, y),$$

$$g(x, y, z, w) = g_n^{(1)}(x, y) + g_n^{(2)}(z, w),$$

onde $f_m, g_n^{(1)}, g_n^{(2)}$ são polinômios homogêneos de graus m, n e n respectivamente.

Então existe um conjunto aberto $\mathcal{B} \subseteq C_{m,n}$ de modo que para todo $\varepsilon \neq 0$ pequeno, se $(f, g) \in \mathcal{B}$, então o sistema (3.1) tem genericamente um ou dois cilindros invariantes, folheados por órbitas periódicas. Além disto, existe um conjunto aberto $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B} \subseteq C_{m,n}$ de forma que se $(f, g) \in \mathcal{B}_0$, então os cilindros invariantes são normalmente estáveis.

O Teorema B será provado na Seção 3.4. O próximo exemplo o ilustra.

Exemplo 3.2. *Considere o sistema de equações diferenciais*

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= -\varepsilon(x^5 + \dot{x}^5) - \varepsilon(x^3 + \dot{x}^3 - 2z^3 - 2\dot{z}^3), \\ \ddot{z} + z &= -\varepsilon(z^5 + \dot{z}^5) - \varepsilon(z^3 + \dot{z}^3 - 2x^3 - 2\dot{x}^3). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para todo $\varepsilon > 0$ pequeno, o sistema (3.5) possui um cilindro invariante normalmente estável, folheado por órbitas periódicas.

3.3 Ciclos limite

Nesta seção demonstramos o Teorema A, utilizando o Teorema 2.4.

Considerando a mudança de coordenadas

$$x = r \sin(\theta), \quad y = r \cos(\theta), \quad z = R \sin(\phi + \theta), \quad w = R \cos(\phi + \theta),$$

o sistema (3.4) se escreve como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon G_2(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{R} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\phi} &= \varepsilon G_4(r, \theta, R, \phi), \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
G_1 &= -\cos(\theta)[f(r \sin(\theta), r \cos(\theta)) + g(r \sin(\theta), r \cos(\theta), R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta))], \\
G_2 &= \frac{1}{r} \sin(\theta)[f(r \sin(\theta), r \cos(\theta)) + g(r \sin(\theta), r \cos(\theta), R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta))], \\
G_3 &= -\cos(\theta + \phi)[f(R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta)) + g(R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta), r \sin(\theta), r \cos(\theta))], \\
G_4 &= -\frac{1}{R} \sin(\theta)[f(r \sin(\theta), r \cos(\theta)) + g(r \sin(\theta), r \cos(\theta), R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta))] \\
&\quad + \frac{1}{R} \sin(\phi + \theta)[f(R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta)) + g(R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta), r \sin(\theta), r \cos(\theta))].
\end{aligned}$$

Usando uma reparametrização do tempo, podemos tomar θ como a nova variável independente. Assim, o sistema (3.7) se torna

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2), \\
\frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2), \\
\frac{d\phi}{d\theta} &= \varepsilon G_4(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

O sistema (3.8) está na forma padrão para calcular o sistema promediado associado, que é

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon \gamma_1(r, R, \phi) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_1(r, \theta, R, \phi) d\theta, \\
\frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon \gamma_3(r, R, \phi) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_3(r, \theta, R, \phi) d\theta, \\
\frac{d\phi}{d\theta} &= \varepsilon \gamma_4(r, R, \phi) = \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_4(r, \theta, R, \phi) d\theta.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Escreva

$$\begin{aligned}
f_m(x, y) &= \sum_{i_1+i_2=m} a_{i_1, i_2} x^{i_1} y^{i_2}, \\
g_n^{(1)}(x, y) &= \sum_{i_1+i_2=n} b_{i_1, i_2} x^{i_1} y^{i_2}, \\
g_n^{(2)}(z, w) &= \sum_{i_1+i_2=n} c_{i_1, i_2} z^{i_1} w^{i_2},
\end{aligned}$$

com $f(x, y) = f_m(x, y)$ e $g(x, y, z, w) = g_n^{(1)}(x, y) + g_n^{(2)}(z, w)$. Note que o espaço dos coeficientes de f, g tem dimensão $m + 2n + 3$.

Denote

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \sum_{i+j=m} \frac{\alpha_{i,j}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^i(\theta) \cos^{j+1}(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\rho(m)} [\lambda_1 \alpha_{m-1,1} + \lambda_3 \alpha_{m-3,3} + \dots + \lambda_m \alpha_{0,m}], \\
B_\alpha &= \sum_{i+j=m} \frac{\alpha_{i,j}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i+1}(\theta) \cos^j(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\rho(m)} [\lambda_m \alpha_{m,0} + \lambda_{m-2} \alpha_{m-2,2} + \dots + \lambda_1 \alpha_{1,m-1}],
\end{aligned}$$

onde $\rho(m), \lambda_j, j = 1, 3, \dots, m$ são constantes positivas, dependendo de m, n .

Defina ainda

$$\Delta_1 = 2A_a m^2 B_c B_a - 2A_a m B_c B_a + 2A_a^2 m^2 A_c,$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= 2A_a m B_c B_b n - 2A_a m B_c^2 - 2A_a m B_c^2 n - 2A_a m B_c B_b \\
&+ 4A_a m A_c A_b n - 2A_b n B_c B_a - 2A_c n B_c B_a + 2A_b n B_c B_a m \\
&+ 2A_c n B_c B_a m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= 2A_b^2 n^2 A_c - 2A_c^3 n^2 - 2A_b n^2 B_c^2 - 2A_b n B_c^2 \\
&+ 2A_b n^2 B_c B_b - 2A_c n^2 B_c^2 - 2A_c n B_c^2 - 2A_b n B_c B_b - 2A_c n B_c B_b \\
&+ 2A_c n^2 B_c B_b,
\end{aligned}$$

$$r_0 = \left(-\frac{A_b + A_c}{A_a} \right)^{\frac{1}{m-n}},$$

$$\delta(\rho) = \Delta_1 \rho^{2m+n-3} + \Delta_2 \rho^{2n+m-3} + \Delta_3 \rho^{3n-3}.$$

Teorema 3.3. *Considere o sistema (3.1) com $f(x, y) = f_m(x, y)$, $g(x, y, z, w) = g_n^{(1)}(x, y) + g_n^{(2)}(z, w)$, onde $f_m, g_n^{(1)}, g_n^{(2)}$ são polinômios homogêneos de graus m, n, n respectivamente. Assuma:*

(H.1) $A_a(A_b + A_c) < 0$,

(H.2) $\delta(r_0) \neq 0$.

Então, para cada $\varepsilon \neq 0$ pequeno, o sistema (3.1) genericamente tem ao menos um ciclo limite γ_ε .

Além disto, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_\varepsilon = \gamma_0$, onde

$$\gamma_0 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x^2 + y^2 = r_0, z = 0, w = r_0\}$$

é uma órbita periódica de (3.1) para $\varepsilon = 0$.

Observação 3.4. O conjunto aberto $\mathcal{A}$ no enunciado do Teorema A é definido pelas hipóteses (H.1) e (H.2).

Demonstração. Reescrevendo $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ usando as expressões para f_m e g_n , temos

$$\begin{aligned} \gamma_1(r, R, \phi) &= -r^m \sum_{i_1+i_2=m} a_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1}(\theta) \cos^{i_2+1}(\theta) d\theta \\ &\quad - r^n \sum_{i_1+i_2=n} b_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1}(\theta) \cos^{i_2+1}(\theta) d\theta \\ &\quad - R^n \sum_{i_1+i_2=n} c_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin^{i_1}(\phi + \theta) \cos^{i_2}(\phi + \theta) d\theta, \\ \gamma_3(r, R, \phi) &= -R^m \sum_{i_1+i_2=m} a_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1}(\phi + \theta) \cos^{i_2+1}(\phi + \theta) d\theta \\ &\quad - R^n \sum_{i_1+i_2=n} b_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1}(\phi + \theta) \cos^{i_2+1}(\phi + \theta) d\theta \\ &\quad - r^n \sum_{i_1+i_2=n} c_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta + \phi) \sin^{i_1}(\theta) \cos^{i_2}(\theta) d\theta, \\ \gamma_4(r, R, \phi) &= -r^{m-1} \sum_{i_1+i_2=m} a_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1+1}(\theta) \cos^{i_2}(\theta) d\theta \\ &\quad - r^{n-1} \sum_{i_1+i_2=n} b_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1+1}(\theta) \cos^{i_2}(\theta) d\theta \\ &\quad - \frac{R^n}{r} \sum_{i_1+i_2=n} c_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \sin^{i_1}(\phi + \theta) \cos^{i_2}(\phi + \theta) d\theta \\ &\quad + R^{m-1} \sum_{i_1+i_2=m} a_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1+1}(\phi + \theta) \cos^{i_2}(\phi + \theta) d\theta \\ &\quad + R^{n-1} \sum_{i_1+i_2=n} b_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i_1+1}(\phi + \theta) \cos^{i_2}(\phi + \theta) d\theta \\ &\quad + \frac{r^n}{R} \sum_{i_1+i_2=n} c_{i_1, i_2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\phi + \theta) \sin^{i_1}(\theta) \cos^{i_2}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

As funções $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ podem ser escritas em termos de A_α, B_α na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -A_a r^m - A_b r^n - [A_c \cos(\phi) + B_c \sin(\phi)] R^n \\ \gamma_3 &= -A_a R^m - A_b R^n - [A_c \cos(\phi) - B_c \sin(\phi)] r^n \\ \gamma_4 &= -B_a r^{m-1} - B_b r^{n-1} - \frac{R^n}{r} [B_c \cos(\phi) - A_c \sin(\phi)] \\ &\quad + B_a R^{m-1} + B_b R^{n-1} + \frac{r^n}{R} [B_c \cos(\phi) + A_c \sin(\phi)].\end{aligned}\tag{3.10}$$

Iremos procurar por soluções do sistema $\gamma_j = 0$, $j = 1, 3, 4$ restrito ao conjunto $r = R$, $\phi \in \{0, \pi\}$. Desta forma, a única solução não-nula é

$$r_0 = \left(-\frac{A_b + A_c}{A_a} \right)^{\frac{1}{m-n}},$$

que está bem-definida pela hipótese (H.1).

Como por (H.2) vale

$$\delta(\rho) = \frac{\partial(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4)}{\partial(r, R, \phi)} \Big|_{r=\rho, R=\rho, \phi=0} \neq 0,$$

segue que r_0 é uma singularidade simples do sistema (3.9). Usando o Teorema 2.4, existe um ciclo limite para o sistema (3.1), que converge para Γ_0 quando $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Cálculos do Exemplo 3.1. As condições $b(c+d) < 0$ e $d \neq 0$ são equivalente à hipótese (H.1) e a condição $c^2 + 5cd + 4d^2 \neq 0$ é equivalente à hipótese (H.2), a primeira parte do Exemplo 3.1 segue do Teorema 3.3. Resta mostrar que o ciclo limite é normalmente estável se $b > 0$, $d < 0$ e $c + 4d < 0$. Note que as funções $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4$ neste caso são dadas por

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -\frac{3}{8}dR^3 \cos(\phi) - \frac{3}{8}cr^3 - \frac{5}{16}br^5, \\ \gamma_3 &= -\frac{3}{8}dr^3 \cos(\phi) - \frac{3}{8}cR^3 - \frac{5}{16}bR^5, \\ \gamma_4 &= \frac{1}{16} \frac{5arR^5 + 6dr^4 \sin(\phi) - 5aRr^5 + 6dR^4 \sin(\phi)}{rR}.\end{aligned}$$

A singularidade r_0 do enunciado do Teorema 3.3 é dada por $r_0 = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{-30b(c+d)}}{b}$, e os autovalores da aproximação linear de $(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4)$ em r_0 são $-\frac{9}{10} \frac{(c+4d)(c+d)}{b}$, $-\frac{9}{10} \frac{(c+d)^2}{b}$ and $-\frac{9}{10} \frac{(c+4d)(c+d)}{b}$. Logo, o ciclo-limite é normalmente estável. $\square$

Existência do conjunto aberto $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$. Sejam Λ_1, Λ_2 e Λ_3 os autovalores da matriz jacobiana de $(\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4)$ em $(r_0, r_0, 0)$. Como $\Lambda_i, i = 1, \dots, 3$ são funções contínuas ($A_a \neq 0$), $\Lambda_i^{-1}(-\infty, 0)$ é um conjunto aberto para $i = 1, 2, 3$. Tais conjuntos são não-vazios pelo Exemplo 3.1. $\square$

3.4 Cilindros invariantes

Nesta seção, provamos o Teorema B.

Considere a mudança de coordenadas

$$x = r \sin(\theta), \quad y = r \cos(\theta), \quad z = R \sin(\phi), \quad w = R \cos(\phi)$$

aplicada ao sistema (3.4):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon G_2(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{R} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\phi} &= 1 + \varepsilon G_4(r, \theta, R, \phi), \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde

$$\begin{aligned} G_1 &= -\cos(\theta)[f(r \sin(\theta), r \cos(\theta)) + g(r \sin(\theta), r \cos(\theta), R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta))], \\ G_2 &= \frac{1}{r} \sin(\theta)[f(r \sin(\theta), r \cos(\theta)) + g(r \sin(\theta), r \cos(\theta), R \sin(\phi + \theta), R \cos(\phi + \theta))], \\ G_3 &= -\cos(\phi)[f(R \sin(\phi), R \cos(\phi)) + g(R \sin(\phi), R \cos(\phi), r \sin(\theta), r \cos(\theta))], \\ G_4 &= \frac{1}{R} \sin(\phi)[f(R \sin(\phi), R \cos(\phi)) + g(R \sin(\phi), R \cos(\phi), r \sin(\theta), r \cos(\theta))]. \end{aligned}$$

Tomando θ como a nova variável independente no sistema (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{d\phi}{d\theta} &= 1 + \varepsilon(G_4 - G_2)(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Da última equação, qualquer solução $(r(\theta), R(\theta), \phi(\theta))$ do sistema é da forma $\phi(\theta) = \theta + \phi_0 + O(\varepsilon)$. Substituindo esta expressão no sistema (3.12), ele se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.13}$$

com $\phi_0 \in S^1$.

Do Teorema 2.4, cada solução isolada $(r(\phi_0), R(\phi_0))$ do sistema

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \cos(\theta) f(r \sin(\theta), r \cos(\theta)) d\theta & + \\
& \int_0^{2\pi} \cos(\theta) g(r \sin(\theta), r \cos(\theta), R \sin(\theta + \phi_0), R \cos(\theta + \phi_0)) d\theta & = 0, \\
& \int_0^{2\pi} \cos(\theta + \phi_0) f(R \sin(\theta + \phi_0), R \cos(\theta + \phi_0)) d\theta & + \\
& \int_0^{2\pi} \cos(\theta + \phi_0) g(R \sin(\theta + \phi_0), R \cos(\theta + \phi_0), r \sin(\theta), r \cos(\theta)) d\theta & = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

dá origem a uma órbita periódica para (3.11). Assim, se existe um conjunto conexo próprio $I \subset S^1$ de modo que $(r(\phi_0), R(\phi_0))$ é uma solução simples do sistema anterior para todo $\phi_0 \in I$, existe um cilindro invariant folheado por órbitas periódicas para tal sistema.

Vamos especificar o sistema anterior, de acordo com f, g . Escreva

$$\begin{aligned}
f &= f_m = \sum_{i_1+i_2=m} a_{i_1, i_2} x^{i_1} y^{i_2} \text{ e} \\
g &= g_n(x, y, z, w) = g_n^{(1)}(x, y) + g_n^{(2)}(z, w), \text{ onde} \\
g_n^{(1)}(x, y) &= \sum_{i_1+i_2=m} b_{i_1, i_2} x^{i_1} y^{i_2} \text{ e} \\
g_n^{(2)}(z, w) &= \sum_{i_1+i_2=m} c_{i_1, i_2} z^{i_1} w^{i_2}.
\end{aligned}$$

Relembre a notação

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \sum_{i+j=m} \frac{\alpha_{i,j}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^i(\theta) \cos^{j+1}(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\rho(m)} [\lambda_1 \alpha_{m-1,1} + \lambda_3 \alpha_{m-3,3} + \dots + \lambda_m \alpha_{0,m}], \\
B_\alpha &= \sum_{i+j=m} \frac{\alpha_{i,j}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^{i+1}(\theta) \cos^j(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{\rho(m)} [\lambda_m \alpha_{m,0} + \lambda_{m-2} \alpha_{m-2,2} + \dots + \lambda_1 \alpha_{1,m-1}],
\end{aligned}$$

onde $\rho(m), \lambda_j, j = 1, 3, \dots, m$ são constantes positivas, dependendo de m, n .

Vamos denotar $K_{\phi_0} = A_c \cos(\phi_0) + B_c \sin(\phi_0)$ e $\bar{K}_{\phi_0} = A_c \cos(\phi_0) - B_c \sin(\phi_0)$.

Lema 3.5. (a) Se $A_c B_c > 0$, então existem $\phi_0^j \in \left(\frac{j\pi}{2}, \frac{(j+1)\pi}{2}\right)$, $j = 0, 1, 2, 3$ de modo que $\bar{K}_{\phi_0^0} = K_{\phi_0^1} = \bar{K}_{\phi_0^2} = K_{\phi_0^3} = 0$ e $\bar{K}_{\phi_0}, K_{\phi_0} \neq 0$ caso contrário. (b) Se $A_c B_c < 0$, então existem $\phi_0^j \in \left(\frac{j\pi}{2}, \frac{(j+1)\pi}{2}\right)$, $j = 0, 1, 2, 3$ tais que $K_{\phi_0^0} = \bar{K}_{\phi_0^1} = K_{\phi_0^2} = \bar{K}_{\phi_0^3} = 0$ e $\bar{K}_{\phi_0}, K_{\phi_0} \neq 0$ caso contrário.

Demonstração. As provas de (a) e (b) são diretas, já que $K_{\phi_0} = 0$ se, e só se, $-\frac{A_c}{B_c} = \tan(\phi_0)$ e $\bar{K}_{\phi_0} = 0$ se, e só se, $\frac{A_c}{B_c} = \tan(\phi_0)$. $\square$

Após multiplicar por $1/2\pi$, o sistema (3.14) se escreve como

$$\begin{aligned} A_a r^m + A_b r^n - K_{\phi_0} R^n &= 0, \\ A_a R^m + A_b R^n - \bar{K}_{\phi_0} r^n &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Considere

$$\begin{aligned} \delta_3(r, R) &= \det \begin{pmatrix} A_a m r^{m-1} + A_b n r^{n-1} & -K_{\phi_0} n R^{n-1} \\ -\bar{K}_{\phi_0} n r^{n-1} & A_a m R^{m-1} + A_b n R^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (A_a^2 m^2) r^{m-1} R^{m-1} + (A_a A_b m n) r^{m-1} R^{n-1} \\ &\quad + (A_a A_b m n) r^{n-1} R^{m-1} + (A_b^2 n^2 - K_{\phi_0} \bar{K}_{\phi_0} n^2) r^{n-1} R^{n-1} \end{aligned}$$

Para cada solução $r(\phi_0), R(\phi_0)$ de (3.15) com $\phi_0 \in I \subset S^1$ um conjunto conexo próprio que satisfaça $\delta_3(r(\phi_0), R(\phi_0)) \neq 0$, existe um cilindro invariante de “tamanho” $|I|$, folheado por órbitas periódicas, para o sistema (3.1).

Vamos estudar as soluções $(r(\phi_0), R(\phi_0))$ de (3.15) para $\phi_0 \in S^1$ com $K_{\phi_0}, \bar{K}_{\phi_0} \neq 0$ (veja o Lema 3.5).

Ponha $Z = r^n$, $W = R^n$ e $l = m/n$. Então o sistema (3.15) se escreve como

$$\begin{aligned} \frac{A_a}{K_{\phi_0}} Z^l + \frac{A_b}{K_{\phi_0}} Z &= \eta(Z) = W, \\ \frac{A_a}{\bar{K}_{\phi_0}} W^l + \frac{A_b}{\bar{K}_{\phi_0}} W &= \tilde{\eta}(W) = Z, \end{aligned} \quad (3.15)$$

e

$$\delta_3(Z, W) = A_a^2 l^2 Z^{l-1} W^{l-1} + A_a A_b l Z^{l-1} + A_a A_b l W^{l-1} + A_b^2 - K_{\phi_0} \bar{K}_{\phi_0}.$$

Lema 3.6. (a) Para $l > 1$, se $A_a K_{\phi_0} < 0$, $A_a \bar{K}_{\phi_0} < 0$, $A_b K_{\phi_0} > 0$ e $A_b \bar{K}_{\phi_0} > 0$ então (3.15) tem pelo menos uma solução isolada.

(b) Para $l < 1$, se $A_a K_{\phi_0} > 0$, $A_a \bar{K}_{\phi_0} > 0$, $A_b K_{\phi_0} < 0$ e $A_b \bar{K}_{\phi_0} < 0$, então (3.15) tem pelo menos uma solução isolada.

Demonstração. Vamos provar (a). Seja $\eta(Z) = \frac{A_a}{K_{\phi_0}} Z^l + \frac{A_b}{K_{\phi_0}} Z$. Assim $\eta'(Z) = \frac{A_a l}{K_{\phi_0}} Z^{l-1} + \frac{A_b}{K_{\phi_0}}$, e

$\eta'(Z) = 0$ se, e só se, $Z = \left(\frac{-A_b}{A_a l} \right)^{\frac{1}{l-1}}$. Como $A_a K_{\phi_0} < 0$ e $A_b K_{\phi_0} > 0$, segue que $A_a A_b < 0$ e o ponto crítico de η é bem definido e positivo. Como $A_a K_{\phi_0} < 0$, tal ponto crítico é um máximo local.

Agora trabalhando com $\tilde{\eta}(W) = \frac{A_a}{K_{\phi_0}} W^l + \frac{A_b}{K_{\phi_0}} W$, obtemos um máximo local para $\tilde{\eta}$ usando argumentos similares.

A existência de pontos de máximo para η e $\tilde{\eta}$ garante a existência de pelo menos uma solução para (3.15). A geometria das curvas do sistema (3.15) no plano ZW garante que a solução é isolada. $\square$

Observação 3.7. Considere $l > 1$, $A_a > 0$ e $A_b < 0$ no Lema 3.6. Assim, para $K_{\phi_0} < 0$ e $\bar{K}_{\phi_0} < 0$, o sistema (3.15) tem uma solução isolada. Vamos estudar quando ocorre simultaneamente $K_{\phi_0} < 0$ e $\bar{K}_{\phi_0} < 0$, de acordo com A_c e B_c . Se A_c e B_c são ambos positivos, então esta condição vale para $\phi_0 \in (\phi_0^1, \phi_0^2)$. Entretanto, se A_c, B_c são ambos negativos, esta condição vale para $\phi_0 \in (0, \phi_0^0) \cup (\phi_0^3, 2\pi)$. Como $\phi_0 \in S^1$, esta união é um conjunto conexo. Portanto, as condições do Lema 3.6, quando válidas, são válidas para ϕ_0 em um conjunto conexo de S^1 .

Observamos que para aplicar o Teorema 2.4 é preciso assumir que o ponto crítico é simples.

A curva definida por $\delta_3(Z, W) = 0$, que é dada explicitamente por

$$W = \tilde{\delta}_3(Z) = \left(-\frac{A_a A_b l Z^{l-1} + A_b^2 - K_{\phi_0} \bar{K}_{\phi_0}}{A_a^2 l^2 Z^{l-1} + A_a A_b l} \right)^{\frac{1}{l-1}},$$

tem uma assíntota horizontal em $W = \left(-\frac{A_b}{A_a l} \right)^{\frac{1}{l-1}}$ e uma assíntota vertical em $Z = -\frac{A_b}{A_a l}$. Comparando as coordenadas das assíntotas com as coordenadas dos pontos de máximo de η e $\tilde{\eta}$, vemos que a curva $\tilde{\delta}_3$ não passa pela solução de (3.15), ou seja, tal solução é simples.

Para cada ϕ_0 fixado para o qual a condição do Lema 3.6 seja verdadeira, obtemos uma órbita periódica para (3.4). Como ϕ_0 pode variar num conjunto conexo próprio de S^1 , obtemos um cilindro folheado de órbitas periódicas para o sistema (3.4). Note que estas condições são válidas num conjunto aberto do espaço dos coeficientes de f_m, g_n .

Observação 3.8. A prova da existência do conjunto aberto $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, que resulta em cilindros normalmente estáveis, é muito similar à prova da existência do aberto $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, demonstrada na prova do Teorema 3.1.

Cálculos do Exemplo 3.2. No contexto do Exemplo 3.2, o sistema 3.15 é dado por

$$\begin{aligned} -\frac{3}{8}r^3 - \frac{5}{16}r^5 + \frac{3}{4}R^3 \cos(\phi_0) &= 0, \\ -\frac{3}{8}R^3 - \frac{5}{16}R^5 + \frac{3}{4}r^3 \cos(\phi_0) &= 0. \end{aligned}$$

Uma singularidade simples para tal sistema é $R_0 = r_0 = \sqrt{\frac{12}{5} \cos(\phi_0) - \frac{6}{5}}$, for $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Os autovalores na linearização do sistema em (r_0, R_0) são

$$-\frac{9}{10}(8 \cos(\phi_0) - 1)(2 \cos(\phi_0) - 1), \quad -\frac{9}{10}(2 \cos(\phi_0) - 1)^2.$$

Note que são ambos negativos para $\phi_0 \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. Assim (r_0, R_0) é uma singularidade atratora. Pelo Teorema 2.4-(b), a órbita periódica correspondente também é atratora, logo o cilindro é normalmente atrator. $\square$

3.5 Conclusões

A respeito do sistema

$$\begin{aligned} \ddot{x} + x &= -\varepsilon f(x, \dot{x}) - \varepsilon g(x, \dot{x}, z, \dot{z}), \\ \ddot{z} + z &= -\varepsilon f(z, \dot{z}) - \varepsilon g(z, \dot{z}, x, \dot{x}), \end{aligned} \tag{3.16}$$

estabelecemos condições sobre f, g para a existência de ciclos-limite e cilindros folheados de órbitas periódicas, no caso de f, g serem polinômios homogêneos. A motivação deste estudo vem de [17] e [18]. A existência de tais conjuntos invariantes é importante no estudo de fenômenos de sincronização ([7]).

Uma direção para continuar este estudo é considerar f, g funções analíticas. Um passo intermediário é considerar f, g polinômios, não necessariamente homogêneos. Neste caso, é possível obter resultados similares com os Teoremas A e B. As principais mudanças serão sobre as equações (3.10) e (3.15), que passarão a ser mais complicadas.

Exemplo 3.9. *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x &= -\varepsilon f(x, \dot{x}) - \varepsilon g(x, \dot{x}, z, \dot{z}), \\ \ddot{z} + z &= -\varepsilon f(z, \dot{z}) - \varepsilon g(z, \dot{z}, x, \dot{x}),\end{aligned}\tag{3.17}$$

com $f(x, \dot{x}) = x^3 - \dot{x}^3 - x^7$ e $g(x, \dot{x}, z, \dot{z}) = x^3 + 2z^2\dot{x} + \dot{z}^5$. Para todo $\varepsilon > 0$ pequeno, o sistema (3.17) admite um cilindro invariante normalmente estável folheado de órbitas 2π -periódicas.

CAPÍTULO 4

CILINDROS E TOROS INVARIANTES EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PERTURBADAS EM MÚLTIPLAS ESCALAS

Neste capítulo desenvolvemos uma metodologia para estudar a existência de cilindros e toro invariantes em uma classe de sistemas de equações diferenciais, que pode ser descrita como “centros lineares perturbados em duas escalas”. Aplicamos o algoritmo apresentado em dois modelos específicos. A teoria necessária neste capítulo se encontra em [13, 20, 41, 45]. Os resultados deste capítulo estão em [34]. Uma implementação do algoritmo que apresentamos neste capítulo está no Apêndice A.1, na página 75.

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos um algoritmo para estudar cilindros e toros invariantes folheados por órbitas periódicas para sistemas de equações diferenciais da forma

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon^\alpha F(x) + \varepsilon^{\alpha+1} L(x), \quad (4.1)$$

onde A é uma matriz com autovalores $\pm p_1 i, \dots, \pm p_n i$, onde $\{p_1, \dots, p_n\} \subset \mathbb{Z}_+$ são primos dois a dois, $\alpha \geq 1$ é um inteiro, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro pequeno e F, L são aplicações de classe C^2 definidas num aberto ao redor da origem.

Enquanto perturbações de sistemas lineares são muito estudadas, em especial o caso de centros lineares (veja [28]), usualmente considera-se somente um nível de perturbação. Nosso algoritmo permite considerar dois níveis de perturbação no sistema (4.1). Sistemas como (4.1) aparecem no estudo de equações de Liénard [27]. Apresentamos também aplicações de equações do tipo (4.1) no estudo da perturbação de formas normais de equações diferenciais, e no problema de osciladores não-lineares fracamente acoplados.

Nosso método é uma generalização do algoritmo apresentado em [26], utilizado para estudar o nascimento de toros invariantes em sistemas de equações diferenciais em dimensão 4, da forma

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon F(x),$$

onde A é uma matriz com autovalores $\pm pi, \pm qi$, p, q inteiros primos entre si e F uma função de classe C^2 . O algoritmo apresentado em [26] se baseia na Teoria da Média de Primeira Ordem. A Teoria da Média é um método clássico que associa singularidades simples da equação diferencial

$$\dot{x} = \varepsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t, \varepsilon) dt,$$

a soluções periódicas da equação não-autônoma

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t, \varepsilon),$$

onde f é uma função suave T -periódica em t e $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno.

O algoritmo que apresentamos neste capítulo também se baseia na Teoria da Média. A diferença em relação ao método apresentado em [26] é que utilizamos a Teoria da Média de Segunda Ordem.

A Teoria da Média de Segunda Ordem leva em conta perturbações em ε e ε^2 , enquanto a Teoria da Média de Primeira Ordem só considera perturbações da ordem de ε . A consequência disto é que o Método da Média de Segunda Ordem é algebricamente mais difícil de ser aplicado do que o de Primeira Ordem. Mais detalhes na Seção 4.2.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos alguns resultados sobre a Teoria da Média. Na Seção 3 apresentamos nosso algoritmo, em dimensão 4. Na Seção 4 mostramos duas aplicações do algoritmo. Na Seção 5 mostramos como adaptar o algoritmo para dimensões superiores.

4.2 Resultados básicos sobre a Teoria da Média

Nesta seção apresentamos alguns resultados básicos sobre a Teoria da Média de Segunda Ordem. Para referências gerais, veja [41], [13] e [20].

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon), \quad (4.2)$$

onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções de classe C^2 , T -periódicas em t .

Defina $f_1, f_2, f_3 : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \int_0^T F_1(s, z) ds, \\ f_2(z) &= \int_0^T \left[D_z F_1(s, z) \cdot \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z) \right] ds, \\ f_3(z) &= f_1(z) + \varepsilon f_2(z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Teorema 4.1. *Com a notação anterior, suponha que para todo conjunto aberto e limitado $V \subset D$ e para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \setminus \{0\}$, exista $a_\varepsilon \in V$ tal que $f_3(a_\varepsilon) = 0$ e $\det f'_3(a_\varepsilon) \neq 0$. Então, para todo $|\varepsilon| > 0$ pequeno, existe uma solução T -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ para o sistema (4.2).*

Demonstração. Veja [13]. □

4.3 Cilindros e toros invariantes, via Teoria da Média de Segunda Ordem

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon^\alpha F(x) + \varepsilon^{\alpha+1} L(x), \quad (4.4)$$

com

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -p & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha \geq 1$ é um inteiro, p, q são inteiros primos entre si, $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$, $L = (L_1, L_2, L_3, L_4)$ são aplicações de classe C^2 definidas ao redor da origem.

Nosso objetivo é desenvolver um algoritmo análogo ao apresentado em [26], voltado a sistemas da forma (4.4).

Multiplicando (4.4) por $1/q$, podemos supor que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -n & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com $n = -p/q$.

Usando as coordenadas

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta), \quad z = R \cos\left(\theta + \frac{1-n}{n}\phi\right), \quad w = R \sin\left(\theta + \frac{1-n}{n}\phi\right),$$

o sistema (4.4) se transforma em

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon^\alpha G_1(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^{\alpha+1} H_1(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\theta} &= n + \varepsilon^\alpha G_2(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^{\alpha+1} H_2(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{R} &= \varepsilon^\alpha G_3(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^{\alpha+1} H_3(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\phi} &= n + \varepsilon^\alpha G_4(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^{\alpha+1} H_4(r, \theta, R, \phi), \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde

$$\begin{aligned} G_1 &= \sin(\theta)\bar{F}_2 + \cos(\theta)\bar{F}_1, \\ G_2 &= \frac{1}{r} \left(\cos(\theta)\bar{F}_2 - \sin(\theta)\bar{F}_1 \right), \\ G_3 &= \cos\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)\bar{F}_3 + \sin\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)\bar{F}_4, \\ G_4 &= \frac{-n}{(n-1)rR} \left(\cos(\theta)R\bar{F}_2 - \cos\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)r\bar{F}_4 - \sin(\theta)R\bar{F}_1 \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)r\bar{F}_3 \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sin(\theta)\bar{L}_2 + \cos(\theta)\bar{L}_1, \\
H_2 &= \frac{1}{r}(\cos(\theta)\bar{L}_2 - \sin(\theta)\bar{L}_1), \\
H_3 &= \cos\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)\bar{L}_3 + \sin\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)\bar{L}_4, \\
H_4 &= \frac{-n}{(n-1)rR}\left(\cos(\theta)R\bar{L}_2 - \cos\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)r\bar{L}_4 - \sin(\theta)R\bar{L}_1\right. \\
&\quad \left.+ \sin\left(\frac{(\theta + \phi)n - \phi}{n}\right)r\bar{L}_3\right),
\end{aligned}$$

com

$$\bar{F}_k(r, \theta, R, \phi) = F_k\left(r \cos(\theta), r \sin(\theta), R \cos\left(\theta + \frac{1-n}{n}\phi\right), R \sin\left(\theta + \frac{1-n}{n}\phi\right)\right)$$

e

$$\bar{L}_k(r, \theta, R, \phi) = L_k\left(r \cos(\theta), r \sin(\theta), R \cos\left(\theta + \frac{1-n}{n}\phi\right), R \sin\left(\theta + \frac{1-n}{n}\phi\right)\right)$$

para $k = 1, 2, 3, 4$.

Agora tomando θ como a nova variável independente no sistema (4.5). O sistema resultante depende do valor de α .

Se $\alpha = 1$, o sistema (4.5), após a troca da variável independente, fica escrito como

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^2(H_1 - G_1 G_2) + O(\varepsilon^3), \\
\frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^2(H_3 - G_2 G_3) + O(\varepsilon^3), \\
\frac{d\phi}{d\theta} &= 1 + \varepsilon(G_4 - G_2)(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^2(H_4 - H_2 + G_2(G_2 - G_4)) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Se $G_4 - G_2 \equiv 0$, da última equação do sistema (4.6) temos que qualquer solução $(r(\theta), R(\theta), \phi(\theta))$ do sistema (4.6) é da forma $\phi(\theta) = \theta + \phi_0 + O(\varepsilon^2)$. Substituindo esta expressão de $\phi(\theta)$ no sistema (4.6), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + \varepsilon^2(H_1 - G_1 G_2)(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^3), \\
\frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + \varepsilon^2(H_3 - G_2 G_3)(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Defina as funções f_1, f_2, f_3 por

$$f_1^{\phi_0}(r, R) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \\ \int_0^{2\pi} G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \end{pmatrix}$$

$$f_2^{\phi_0}(r, R) = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G_1}{\partial r}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) + \right. \\ H_1(r, s, R, s + \phi_0) - G_1(r, s, R, s + \phi_0)G_2(r, s, R, s + \phi_0) + \\ \left. \frac{\partial G_1}{\partial R}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) \right) ds \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G_3}{\partial r}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) + \right. \\ H_3(r, s, R, s + \phi_0) - G_3(r, s, R, s + \phi_0)G_2(r, s, R, s + \phi_0) + \\ \left. \frac{\partial G_3}{\partial R}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) \right) ds \end{pmatrix}$$

e

$$f_3^{\phi_0}(r, R) = f_1^{\phi_0}(r, R) + \varepsilon f_2^{\phi_0}(r, R). \quad (4.8)$$

Se $\alpha \geq 1$ então o sistema (4.5), após a troca da variável independente, se escreve como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon^\alpha G_1(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^{\alpha+1} H_1(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon^\alpha G_3(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^{\alpha+1} H_3(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{d\phi}{d\theta} &= 1 + \varepsilon^\alpha (G_4 - G_2)(r, \theta, R, \phi) + \varepsilon^{\alpha+1} (H_4 - H_2)(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Analogamente ao caso $\alpha = 1$, da última equação do sistema (4.9) temos que qualquer solução $(r(\theta), R(\theta), \phi(\theta))$ deste sistema é da forma $\phi(\theta) = \theta + \phi_0 + \varepsilon^\alpha \cdot \eta_2(\varepsilon, r, R, \theta, \phi_0)$, onde η_2 é uma função sem termos constantes ou lineares. Substituindo esta expressão de $\phi(\theta)$ no sistema (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon^\alpha G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + \varepsilon^{\alpha+1} H_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon^\alpha G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + \varepsilon^{\alpha+1} H_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

que, para $\varepsilon > 0$, é equivalente a

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + \varepsilon^2 H_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + \varepsilon^2 H_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Defina

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1^{\phi_0}(r, R) &= \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \\ \int_0^{2\pi} G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \end{pmatrix} \\ \tilde{f}_2^{\phi_0}(r, R) &= \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G_1}{\partial r}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) + \right. \\ H_1(r, s, R, s + \phi_0) + \\ \left. \frac{\partial G_1}{\partial R}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) \right) ds \\ \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial G_3}{\partial r}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) + \right. \\ H_3(r, s, R, s + \phi_0) + \\ \left. \frac{\partial G_3}{\partial R}(r, s, R, s + \phi_0) \left(\int_0^s G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) d\theta \right) \right) ds \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e

$$\tilde{f}_3^{\phi_0}(r, R) = \tilde{f}_1^{\phi_0}(r, R) + \varepsilon \tilde{f}_2^{\phi_0}(r, R).\tag{4.12}$$

O resultado segue do Teorema 4.1.

Teorema 4.2. *Suponha que uma das seguintes condições se verifiquem no sistema (4.5):*

(a) $\alpha = 1$,

$$R \left(\cos(\theta) \overline{F}_2 - \sin(\theta) \overline{F}_1 \right) + nr \left(\sin \left(\frac{n(\phi + \theta) - \phi}{n} \right) \overline{F}_3 - \cos \left(\frac{n(\phi + \theta) - \phi}{n} \right) \overline{F}_4 \right) \equiv 0,$$

e para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe $(r_\varepsilon(\phi_0), R_\varepsilon(\phi_0)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, com $\phi_0 \in I \subset S^1$, onde I é conexo, de modo que $\tilde{f}_3^{\phi_0}(r_\varepsilon(\phi_0), R_\varepsilon(\phi_0)) = 0$ e $\det D\tilde{f}_3^{\phi_0}(r_\varepsilon(\phi_0), R_\varepsilon(\phi_0)) \neq 0$, para cada $\phi_0 \in I$.

(b) $\alpha \geq 2$ e para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe $(r_\varepsilon(\phi_0), R_\varepsilon(\phi_0)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, com $\phi_0 \in I \subset S^1$, I conexo, de modo que $\tilde{f}_3^{\phi_0}(r_\varepsilon(\phi_0), R_\varepsilon(\phi_0)) = 0$ e $\det D\tilde{f}_3^{\phi_0}(r_\varepsilon(\phi_0), R_\varepsilon(\phi_0)) \neq 0$, para cada $\phi_0 \in I$.

Então:

(i) se $I \neq S^1$ então para todo $|\varepsilon| > 0$ pequeno, existe um cilindro folheado de órbitas periódicas para o sistema (4.2).

(ii) se $I = S^1$ então para todo $|\varepsilon| > 0$ pequeno, existe um toro folheado de órbitas periódicas para o sistema (4.2).

Demonstração. Denote por X_{ϕ_0} o sistema (4.7) e seja $f_3^{\phi_0}$ como em (4.8) (resp. (4.10) e $\tilde{f}_3^{\phi_0}$ em (4.12)) para $\phi_0 \in S^1$ fixado.

Seja $I_0 \subset S^1$ tal que $f_3^{\phi_0}$ (resp. $\tilde{f}_3^{\phi_0}$) tem uma singularidade simples $p_\varepsilon(\phi_0)$ (resp. $\tilde{p}_\varepsilon(\phi_0)$) para todo $\phi_0 \in I_0$ e $\varepsilon > 0$ pequeno.

Note que $I_0 = S^1$ ou I_0 é união de conjuntos abertos e conexos de S^1 , $I_0 = I_1 \cup \dots \cup I_l$.

Fixe $\phi_0 \in I_j$ para algum $j = 1, \dots, l$. Aplicando o Teorema 4.1 à singularidade $p_\varepsilon(\phi_0)$ de $f_3^{\phi_0}$ (resp. $\tilde{p}_\varepsilon(\phi_0)$ de $\tilde{f}_3^{\phi_0}$), obtemos que para todo $\varepsilon \neq 0$ pequeno, o sistema (4.7) (resp. (4.10)) tem uma única órbita periódica.

Se $I_j \neq S^1$, teremos um cilindro invariante, folheado por órbitas periódicas, para o sistema (4.6) (resp. (4.9)). No caso $I_j = S^1$, teremos um toro invariante para o sistema (4.6) (resp. (4.9)) folheado por órbitas periódicas. O mesmo vale para o sistema (4.5), já que ele é equivalente ao sistema (4.6), para $\alpha = 1$, e equivalente ao sistema (4.9), para $\alpha \geq 2$.

□

O algoritmo que implementa este procedimento, no Maple 14, é dado no Apêndice A.1, página 75.

4.4 Aplicações do algoritmo

Nesta seção apresentamos duas aplicações do Teorema 4.2.

4.4.1 Perturbação de Formas Normais

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -py - \varepsilon^\alpha (y(a_{1,0}\Delta_1 + a_{0,1}\Delta_2) - x(c_{1,0}\Delta_1 + c_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_1(x, y, z, w), \\ \dot{y} &= px + \varepsilon^\alpha (x(a_{1,0}\Delta_1 + a_{0,1}\Delta_2) + y(c_{1,0}\Delta_1 + c_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_2(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -qw - \varepsilon^\alpha (w(b_{1,0}\Delta_1 + b_{0,1}\Delta_2) - z(d_{1,0}\Delta_1 + d_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_3(x, y, z, w), \\ \dot{w} &= qz + \varepsilon^\alpha (z(b_{1,0}\Delta_1 + b_{0,1}\Delta_2) + w(d_{1,0}\Delta_1 + d_{0,1}\Delta_2)) + \varepsilon^\beta f_4(x, y, z, w),\end{aligned}\tag{4.13}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ é um pequeno parâmetro, $\Delta_1 = x^2 + y^2$, $\Delta_2 = z^2 + w^2$, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j} \in \mathbb{R}$, p e q são inteiros primos entre si e f_1, f_2, f_3, f_4 são polinômios.

O sistema não-perturbado ((4.13) com $\varepsilon = 0$) é um centro linear em $\mathbb{R}^4$ cujas órbitas periódicas estão em ressonância $p : q$. Note que este sistema é reversível.

Se $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \equiv 0$ em (4.13), então o sistema (4.13) é uma forma normal até ordem 3 para campos vetoriais com uma singularidade elíptica $p : q$ -ressonante na origem, com $p + q \geq 5$.

O seguinte resultado é demonstrado em [24].

Teorema 4.3. *Suponha que no sistema (4.13), tenhamos $\alpha = \beta = 1$, $c_{i,j} = d_{i,j} = 0$ e $f_1, \dots, f_4$ são polinômios de grau 3. Então, para todo $\varepsilon \neq 0$ pequeno, o sistema (4.13) pode ter uma, duas ou três toros invariantes, folheados por órbitas periódicas. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, dois destes toros (quando existem) tendem a órbitas periódicas do sistema (4.13) com $\varepsilon = 0$, e o terceiro toro (quando existe) persiste.*

O Teorema 4.3 é provado em [24] usando o algoritmo proposto em [26].

Mostraremos agora que com o método desenvolvido na Seção 4.3 é possível estudar o sistema (4.13) para valores mais gerais dos parâmetros.

Considere, no sistema (4.13), que $\beta = \alpha + 1$, $\alpha \geq 2$, $f_1 = f_3 \equiv 0$, $f_2(x, y, z, w) = 2y^5 - x^5$ e $f_4(x, y, z, w) = z^5 - y^5$. A função $\tilde{f}_3$ do Teorema 4.2 é dada neste caso por

$$\tilde{f}_3(r, R, \phi_0) = \begin{pmatrix} \varepsilon\omega_1 r^5 + \omega_2 r^3 + \varepsilon\omega_3 r^3 R^2 + \omega_4 r R^2 + \varepsilon\omega_5 r R^4 \\ \varepsilon\kappa_1 r^4 R + \kappa_2 r^2 R + \varepsilon\kappa_3 r^2 R^3 + \kappa_4 R^3 + \varepsilon\kappa_5 R^5 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 5\pi + 96c_{1,0}^2\pi^2, & \kappa_1 &= 32d_{1,0}^2\pi^2 + 64d_{1,0}c_{1,0}\pi^2, \\ \omega_2 &= 8\pi c_{1,0}, & \kappa_2 &= 8d_{1,0}\pi, \\ \omega_3 &= 128c_{0,1}c_{1,0}\pi^2 + 64c_{0,1}d_{1,0}\pi^2, & \kappa_3 &= 64c_{0,1}d_{1,0}\pi^2 + 128d_{0,1}d_{1,0}\pi^2, \\ \omega_4 &= 8c_{0,1}\pi, & \kappa_4 &= 8d_{0,1}\pi, \\ \omega_5 &= 64c_{0,1}d_{0,1}\pi^2 + 32c_{0,1}^2\pi^2, & \kappa_5 &= 96d_{0,1}^2.\end{aligned}$$

Se $c_{1,0} < 0$ e $d_{0,1} < 0$, então a equação $\tilde{f}_3(r, R, \phi_0) = 0$ tem duas soluções: $\left(0, \frac{1}{2\sqrt{-3\varepsilon\pi d_{0,1}}}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{-8c_{1,0}}{5\varepsilon + 96\pi c_{1,0}^2}}, 0\right)$.

Pelo Teorema 4.2, como $\tilde{f}_3$ não depende de ϕ_0 , cada uma destas soluções dá origem a um toro invariante, folheado por órbitas periódicas, para o sistema (4.13).

4.4.2 Osciladores fracamente acoplados

Osciladores fracamente acoplados são tratados em [7] e [18]. Ilustramos aqui como estudá-los usando o Teorema 4.2.

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + \varepsilon^\alpha a(x, y) + \varepsilon^\beta b(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -w, \\ \dot{w} &= z + \varepsilon^\alpha a(z, w) + \varepsilon^\beta b(z, w, x, y),\end{aligned}\tag{4.14}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ e a, b são funções de classe C^2 .

Quando $\alpha = \beta = 1$ e a, b são polinômios homogêneos, a existência de cilindros e toros invariantes para este sistema é estudada em [33]. Aqui consideramos $\beta = \alpha + 1$ com $\alpha \geq 2$, $a(x, y) = x^3 - y^3$, $b(x, y, z, w) = w^5 + y^5$ e $\varepsilon > 0$ pequeno.

A aplicação $\tilde{f}_3$ do Teorema 4.2 é dada neste caso por

$$\tilde{f}_3(r, R) = \begin{pmatrix} \left(\frac{5}{8}r^5 + \frac{27}{32}r^5\pi + \frac{5}{8}R^5 \cos(\phi_0)\right)\varepsilon - \frac{3}{4}r^3 \\ \left(\frac{5}{8}R^5 + \frac{27}{32}R^5\pi + \frac{5}{8}r^5 \cos(\phi_0)\right)\varepsilon - \frac{3}{4}R^3 \end{pmatrix}$$

Considere $\xi(\varepsilon, \varphi_0) = 2\sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon(20 + 20\cos(\phi_0) + 27\pi)}}$.

Note que $\tilde{f}_3(\xi(\varepsilon, \varphi_0), \xi(\varepsilon, \varphi_0)) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$ e $\varphi_0 \in S^1$. Além disto,

$$D\tilde{f}_3(r, R)\big|_{r=R=\xi(\varepsilon, \varphi_0)} = -1296 \frac{(80\cos(\phi_0) - 20 - 27\pi)\pi^2}{\varepsilon^2(20 + 20\cos(\phi_0) + 27\pi)^3} \neq 0,$$

para todo $\varphi_0 \in S^1$ e $\varepsilon > 0$.

Portanto, para todo $\varepsilon > 0$ pequeno, o sistema (4.14) tem um toro folheado por órbitas periódicas.

Os cálculos deste modelo podem ser facilmente realizados utilizando o algoritmo dado no Apêndice A.1.

4.5 Dimensões superiores

Nesta seção, apresentamos as ideias necessárias na adaptação do Teorema 4.2 para dimensões superiores.

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon^\alpha F(x) + \varepsilon^{\alpha+1} L(x), \quad (4.15)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{2n}$, $F, L : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ são aplicações de classe C^2 e A é uma matriz $2n \times 2n$ com autovalores $\pm p_1 i, \dots, \pm p_n i$ tais que $\{p_1, \dots, p_n\}$ é um conjunto linearmente independente sobre os racionais. Escreva $F = (F_1, \dots, F_{2n})$ e $L = (L_1, \dots, L_{2n})$. Vamos considerar $\alpha \geq 2$, mas o caso $\alpha = 1$ pode ser tratado de forma completamente análoga.

A mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1 \\ x_2 &= r_2 \cos \left(\frac{p_2}{p_1} \theta_2 \right), \quad y_2 = r_2 \sin \left(\frac{p_2}{p_1} \theta_2 \right) \\ x_j &= r_j \cos \left(\frac{p_j}{p_1} \theta_2 + \theta_j \right), \quad y_j = r_j \sin \left(\frac{p_j}{p_1} \theta_2 + \theta_j \right), \quad j \geq 3. \end{aligned} \quad (4.16)$$

transforma (4.15) em

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \varepsilon^\alpha \Phi_1 + \varepsilon^{\alpha+1} \Psi_1, \\ \dot{\theta}_1 &= p_1 + \varepsilon^\alpha \Phi_2 + \varepsilon^{\alpha+1} \Psi_2, \\ \dot{r}_2 &= \varepsilon^\alpha \Phi_3 + \varepsilon^{\alpha+1} \Psi_3, \\ \dot{\theta}_2 &= p_1 + \varepsilon^\alpha \Phi_4 + \varepsilon^{\alpha+1} \Psi_4, \\ \dot{r}_j &= \varepsilon^\alpha \Phi_{2j-1} + \varepsilon^{\alpha+1} \Psi_{2j-1}, \quad j \geq 3, \\ \dot{\theta}_j &= \varepsilon^\alpha \Phi_{2j} + \varepsilon^{\alpha+1} \Psi_{2j}, \quad j \geq 3. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Multiplicando (4.17) por $1/p_1$ e tomando θ_1 como a nova variável independente, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dr_1}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \tilde{\Phi}_1 + \varepsilon^{\alpha+1} \tilde{\Psi}_1 + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \\
\frac{dr_2}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \tilde{\Phi}_3 + \varepsilon^{\alpha+1} \tilde{\Psi}_3 + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \\
\frac{d\theta_2}{d\theta_1} &= 1 + \varepsilon^\alpha \tilde{\Phi}_4 + \varepsilon^{\alpha+1} \tilde{\Psi}_4 + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \\
\frac{dr_j}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \tilde{\Phi}_{2j-1} + \varepsilon^{\alpha+1} \tilde{\Psi}_{2j-1} + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \quad j \geq 3, \\
\frac{d\theta_j}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \tilde{\Phi}_{2j} + \varepsilon^{\alpha+1} \tilde{\Psi}_{2j} + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \quad j \geq 3.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Resolvendo a equação de $\dot{\theta}_2$, obtemos $\theta_2(\theta_1) = \theta_1 + \theta_2^* + O(\varepsilon^\alpha)$. Substituindo esta expressão no sistema (4.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dr_1}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \widehat{\Phi}_1 + \varepsilon^{\alpha+1} \widehat{\Psi}_1 + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \\
\frac{dr_2}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \widehat{\Phi}_3 + \varepsilon^{\alpha+1} \widehat{\Psi}_3 + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \\
\frac{dr_j}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \widehat{\Phi}_{2j-1} + \varepsilon^{\alpha+1} \widehat{\Psi}_{2j-1} + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \quad j \geq 3, \\
\frac{d\theta_j}{d\theta_1} &= \varepsilon^\alpha \widehat{\Phi}_{2j} + \varepsilon^{\alpha+1} \widehat{\Psi}_{2j} + O(\varepsilon^{\alpha+2}), \quad j \geq 3.
\end{aligned}$$

Este sistema está na forma padrão para aplicar a Teoria da Média de Segunda Ordem. Seu análogo em dimensão 4 é o sistema 4.10. Seguindo a mesma metodologia da Seção 4.3, é possível obter condições para existência de cilindros e toros invariantes, folheados por órbitas periódicas, para o sistema (4.15).

Observação 4.4. *Com uma pequena modificação na mudança de coordenadas mud.cc é possível usar o método anterior para procurar por cilindros e k -toros invariantes para o sistema(4.4). Aplicando, por exemplo, a mudança de coordenadas*

$$\begin{aligned}
x_1 &= r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1, \\
x_j &= r_j \cos \left(\frac{p_j}{p_1} \theta_j \right), \quad y_j = r_j \sin \left(\frac{p_j}{p_1} \theta_j \right), \quad 2 \leq j \leq k, \\
x_j &= r_j \cos \left(\frac{p_j}{p_1} \theta_k + \theta_j \right), \quad y_j = r_j \sin \left(\frac{p_j}{p_1} \theta_k + \theta_j \right), \quad k+1 \leq j \leq n
\end{aligned}$$

ao sistema (4.15), e aplicando a mesma metodologia da Seção 4.3, é possível obter um método para procurar por k -toros folheados por órbitas periódicas.

CAPÍTULO 5

CONJUNTOS MINIMAIS EM PERTURBAÇÕES DE SISTEMAS HAMILTONIANOS INTEGRÁVEIS

Neste capítulo estudamos perturbações de sistemas hamiltonianos integráveis, com a propriedade de que alguma potência da aplicação de primeiro retorno é igual à identidade, usando a Teoria da Média. A teoria necessária neste capítulo se encontra em [13, 20, 26, 41, 45]. Os resultados deste capítulo estão em [25].

5.1 Introdução e resultados principais

Um dos principais problemas da Teoria da Perturbação é detectar o quão persistente são certas propriedades. Noutras palavras, queremos passar algumas propriedades dinâmicas do sistema não-perturbado para o perturbado. Frequentemente, o sistema não-perturbado é linear, polinomial ou um sistema hamiltoniano integrável, e os objetos que queremos continuar são singularidades, órbitas periódicas ou toros invariantes.

Quando não ocorre persistência, ocorre uma bifurcação. Grosseiramente falando, nosso objetivo neste capítulo é perturbar um sistema hamiltoniano integrável e analisar o que acontece com suas

órbitas periódicas e toros invariantes.

É um fato bem-conhecido que a aplicação de primeiro retorno de um sistema hamiltoniano integrável com dois graus de liberdade é uma aplicação do tipo twist. Assim, o Teorema de Poincaré-Birkhoff pode ser utilizado para estudar quais órbitas periódicas persistem quando perturbamos tal sistema por um outro sistema hamiltoniano. Por outro lado, a Teoria KAM determina quais toros *quasi*-periódicos persistem. Mais detalhes, veja [1, 5].

No entanto, se alguma potência da aplicação de primeiro retorno de um sistema hamiltoniano integrável é igual à identidade, então não podemos utilizar os Teoremas de Poincaré-Birkhoff ou a Teoria KAM.

Mostraremos neste capítulo como utilizar a Teoria da Média para determinar se alguma órbita periódica e/ou toro invariante do sistema não-perturbado persiste, quando perturbado.

Passamos agora a introduzir os modelos que iremos considerar.

Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Considere o hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \left((r-1)^2 + z^2 \right) + w + \varepsilon \left(a r^2 + b \log r + (z+w)\theta \right), \quad (5.1)$$

onde ε é um pequeno parâmetro, a, b são parâmetros arbitrários e as variáveis satisfazem $r \in \mathbb{R}^+$, $z, w \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{R})$. O sistema hamiltoniano associado é

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -H_z = -z - \varepsilon\theta, \\ \dot{z} &= H_r = r - 1 + \varepsilon \left(2a r + \frac{b}{r} \right), \\ \dot{w} &= -H_\theta = -\varepsilon(z+w), \\ \dot{\theta} &= H_w = 1 + \varepsilon\theta. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para $\varepsilon = 0$, temos que H e w são integrais primeiras independentes para o sistema hamiltoniano (5.2). Portanto, tal sistema é completamente integrável.

O sistema não-perturbado, isto é, o sistema (5.2) com $\varepsilon = 0$, não é genérico já que todos os seus toros invariantes são folheados por órbitas periódicas de período 2π .

É sabido que as órbitas periódicas de um sistema hamiltoniano com dois graus de liberdade vivem, genericamente, em um cilindro localmente parametrizado pelos valores do hamiltoniano. Além disto, nosso objetivo é usar um resultado da Teoria da Média que detecta somente órbitas periódicas isoladas. Portanto, iremos fixar um nível do hamiltoniano, digamos $H = h$, com $h \in \mathbb{R}$, e estudar as órbitas periódicas do sistema (5.2), para $\varepsilon \neq 0$, que estejam contidas em $H = h$ que são continuações de órbitas periódicas do sistema (5.2) com $\varepsilon = 0$, também contidas no nível $H = h$.

Como trabalhamos no nível $H = h$, podemos expressar uma das variáveis em função das outras três, e restringir o estudo do sistema (5.2) a estas três variáveis.

No nosso caso, iremos considerar w como função de (r, z, θ) usando o hamiltoniano (5.1), isto é,

$$w = \frac{2h - (r - 1)^2 - z^2 - 2\varepsilon(ar^2 + b \log r + z\theta)}{2(1 + \varepsilon\theta)}. \quad (5.3)$$

Restringindo ao nível $H = h$, teremos então o sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -z - \varepsilon\theta, \\ \dot{z} &= r - 1 + \varepsilon \left(2ar + \frac{b}{r} \right), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon\theta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

O principal resultado sobre as órbitas periódicas do sistema (5.2) é:

Teorema 5.1. *As seguintes afirmações se verificam:*

- (a) *Para $\varepsilon \neq 0$ pequeno e para todo $h \in \mathbb{R}$, o sistema hamiltoniano (5.2) restrito ao nível invariante $H = h$ (isto é, o sistema (5.4)) pode ter no máximo 5 órbitas periódicas bifurcando das órbitas periódicas do toro invariante do sistema (5.4) com $\varepsilon = 0$, dentre as órbitas que são detectadas pelo Método da Média (a ser descrito na Seção 5.2).*
- (b) *Além disto, para valores adequados dos parâmetros a e b , o sistema tem exatamente 5 órbitas periódicas.*

O Teorema 5.1 é provado na Seção 5.3.

Consideramos agora a família a 6-parâmetros de funções hamiltonianas

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) - \varepsilon G, \quad (5.5)$$

onde

$$\begin{aligned} G(x, y, z, w) &= \rho \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} (\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 w - xw - y^2 + yz - 2zw) \\ &+ \rho \frac{y}{x} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{\lambda_5 xy + 10zw}{z^2 + w^2} + \frac{\lambda_6 zw}{(z^2 + w^2)^2} \right), \end{aligned}$$

para $(x, y, z, w) \notin \{x^2 + y^2 = 0\} \cup \{z^2 + w^2 = 0\}$, e $G \equiv 0$ caso contrário, com $\rho(x, y, z, w) = \exp\left(\frac{-1}{(x^2 + y^2)(z^2 + w^2)}\right)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_6 \in \mathbb{R}$.

Observamos que, quando $\varepsilon = 0$, o sistema não-perturbado corresponde a um oscilador harmônico duplo. Assim, a menos da origem, todas as outras órbitas do sistema não-perturbado são periódicas de período 2π . Logo, a aplicação de primeiro retorno deste sistema é a identidade. O sistema hamiltoniano associado à função (5.5) é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -H_y = -y + \varepsilon G_y, \\ \dot{y} &= H_x = x - \varepsilon G_x, \\ \dot{z} &= -H_w = -w + \varepsilon G_w, \\ \dot{w} &= H_z = z - \varepsilon G_z.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Veremos, usando um resultado da Teoria da Média, que o sistema (5.6), para $\varepsilon \neq 0$ pequeno, tem quatro ou oito cilindros folheados por órbitas periódicas, de acordo com o valor do parâmetro λ_6 . Estes cilindros invariantes nascem a partir da destruição de um toro invariante do sistema não-perturbado.

O resultado principal para este modelo é o seguinte.

Teorema 5.2. *Considere o toro*

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2 + \sin^2 \phi} - \sin \phi \right)^2, \phi \in \mathbb{S}^1, z^2 + w^2 = 1\},$$

que é folheado por órbitas periódicas isócronas do sistema (5.6) quando $\varepsilon = 0$. Para $\varepsilon \neq 0$ e para todo $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$, vale o seguinte:

- (a) Se $\lambda_6 \in \left(-\frac{25}{2}, 0\right)$, então T se quebra em oito cilindros $C_1, \dots, C_8$ folheados por órbitas periódicas isócronas do sistema hamiltoniano (5.6).
- (b) Se $\lambda_6 \rightarrow 0^-$, então os cilindros C_{2j} , $j = 1, 2, 3, 4$ diminuem até desaparecer, quando $\lambda_6 = 0$.
- (c) Se $\lambda_6 \geq 0$ ou se $\lambda_6 = -\frac{25}{2}$, então T se quebra em quatro cilindros C_1, C_3, C_5, C_7 , folheados por órbitas periódicas isócronas do sistema hamiltoniano (5.6).
- (d) Se $\lambda_6 < -\frac{25}{2}$, a técnica que utilizamos não nos permite chegar a nenhuma conclusão.

Observação 5.3. O toro T no enunciado do Teorema 5.2 se quebra em cilindros porque existem quatro órbitas periódicas em T que não podem ser prolongadas: as órbitas correspondentes a $\phi = k\pi/2$ para $k = 1, 2, 3, 4$.

Theorem 5.2 is proved in section 5.4.

5.2 Resultados básicos sobre a Teoria da Média

Nesta seção apresentamos alguns resultados básicos da Teoria da Média.

Consideramos o problema da bifurcação de soluções T -periódicas de equações diferenciais da forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (5.7)$$

$\varepsilon \geq 0$ pequeno. Supomos que as funções $F_0, F_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $F_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são de classe C^2 , T -periódicas na primeira variável e Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$. Assumimos que o sistema não-perturbado

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F_0(t, \mathbf{x}), \quad (5.8)$$

possui uma subvariedade formada por soluções periódicas.

Seja $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ uma solução do sistema (5.8) tal que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z}$. Escrevemos a linearização do sistema não-perturbado ao longo de uma solução periódica $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ como

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}F_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0))\mathbf{y}. \quad (5.9)$$

Denotaremos por $M_{\mathbf{z}}(t)$ uma matriz fundamental do sistema linear (5.9).

Assumimos que existe um conjunto aberto V com $\text{Cl}(V) \subset \Omega$ tal que para cada $\mathbf{z} \in \text{Cl}(V)$, $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ é T -periódica. O conjunto $\text{Cl}(V)$ é *isócrono* para o sistema (5.7), isto é, ele é formado somente por órbitas periódicas, todas delas de mesmo período T . Então, uma resposta para o problema da bifurcação de soluções T -periódicas das soluções periódicas $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ contidas em $\text{Cl}(V)$ para o sistema (5.7) é dada no seguinte resultado:

Teorema 5.4. (Perturbação de um conjunto isócrono) *Assumimos que existe um conjunto aberto e limitado V com $\text{Cl}(V) \subset \Omega$ tal que para cada $\mathbf{z} \in \text{Cl}(V)$, a solução $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ é T -periódica. Consideramos a função $\mathcal{F} : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \int_0^T M_{\mathbf{z}}^{-1}(t, \mathbf{z}) F_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)) dt. \quad (5.10)$$

Se existe $a \in V$ com $\mathcal{F}(a) = 0$ e $\det((d\mathcal{F}/d\mathbf{z})(a)) \neq 0$, então existe uma solução periódica $\varphi(t, \varepsilon)$ de período T para o sistema (5.7) tal que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

O Teorema 5.4 é devido a Malkin [30] e Roseau [39]. Para uma prova mais simples, veja [12].

O Teorema 5.4 será usado na Seção 5.3 para provar o Teorema 5.1.

Utilizamos ainda os resultados da Teoria da Média que já foram apresentados no capítulo anterior, especificamente na Seção 2.2.1, página 24.

5.3 Prova do Teorema 5.1

Note que o domínio de definição do sistema (5.4) é $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$.

Primeiramente, é fácil checar que uma solução $(r(t), z(t), \theta(t))$ do sistema (5.4) com $\varepsilon = 0$ tal que $(r(0), z(0), \theta(0)) = (r_0, z_0, \theta_0)$ é

$$\begin{aligned} r(t) &= 1 + (r_0 - 1) \cos t - z_0 \sin t, \\ z(t) &= z_0 \cos t + (r_0 - 1) \sin t, \\ \theta(t) &= t + \theta_0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Como $r > 0$, as órbitas periódicas deste sistema preenchem os toros invariantes $f_a(r, z, \theta) = z^2 + (r - 1)^2 - a^2 = 0$ com $a \in (0, 1)$, sempre com período 2π . O toro $f_a(r, z, \theta) = 0$ é invariante pelo fluxo do sistema (5.4) com $\varepsilon = 0$, já que para toda solução periódica de (5.11) em $f_a(r, z, \theta) = 0$ temos

$$\frac{df_a}{dt}(r(t), z(t), \theta(t)) = \frac{\partial f_a}{\partial r} \dot{r}(t) + \frac{\partial f_a}{\partial z} \dot{z}(t) + \frac{\partial f_a}{\partial \theta} \dot{\theta}(t) = 0.$$

Note que a única solução periódica que não está num toro invariante é a representada por $z^2 + (r - 1)^2 = 0$. Seja V a subvariedade de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ formada pela união de todos os toros invariantes descritos anteriormente. Assim V é uma subvariedade aberta e limitada, formada por órbitas 2π -periódicas.

Para aplicar o Teorema 5.4 ao sistema (5.4), tomamos

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (r, z, \theta), \\ \mathbf{z} &= (r_0, z_0, \theta_0), \\ \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0) &= (r(t), z(t), \theta(t)) \text{ dado por (5.11),} \\ F_0(t, \mathbf{x}) &= (-z, r - 1, 1), \\ F_1(t, \mathbf{x}) &= \left(-\theta, 2ar + \frac{b}{r}, \theta \right), \\ F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) &= \mathbf{0}, \\ \Omega &= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \\ T &= 2\pi. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Observamos que Ω pode ser visto como um aberto de $\mathbb{R}^3$. Claro que o conjunto aberto e limitado do enunciado do Teorema 5.4 será a subvariedade V anteriormente.

Para a função F_0 e a solução periódica $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ dada em (5.12), alguns cálculos mostram que a matriz fundamental $M_{\mathbf{z}}(t)$ do sistema (5.9), tal que $M_{\mathbf{z}}(0)$ é a matriz identidade de $\mathbb{R}^3$ é dada por

$$M_{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Observamos que para o sistema (5.4) com $\varepsilon = 0$, a matriz fundamental $M_{\mathbf{z}}(t)$ não depende da escolha da órbita periódica $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$.

Como todas as hipóteses do Teorema 5.4 estão satisfeitas, devemos estudar os zeros em V do sistema $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = 0$, com três equações e três variáveis, onde $\mathcal{F}$ é dado por (5.10). Com alguns cálculos, obtemos

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = (\mathcal{F}_1(r_0, z_0, \theta_0), \mathcal{F}_2(r_0, z_0, \theta_0), \mathcal{F}_3(r_0, z_0, \theta_0)),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= -2\pi z_0 \left(a + \frac{b \left(\sqrt{1 - (r_0 - 1)^2 - z_0^2} - 1 \right)}{\left((r_0 - 1)^2 + z_0^2 \right) \sqrt{1 - (r_0 - 1)^2 - z_0^2}} \right), \\ \mathcal{F}_2 &= 2\pi \left(a(r_0 - 1) - 1 + \frac{b(r_0 - 1) \left(\sqrt{1 - (r_0 - 1)^2 - z_0^2} - 1 \right)}{\left((r_0 - 1)^2 + z_0^2 \right) \sqrt{1 - (r_0 - 1)^2 - z_0^2}} \right), \\ \mathcal{F}_3 &= 2\pi(\theta_0 + \pi). \end{aligned}$$

Assim, pela hipótese $0 < (r_0 - 1)^2 + z_0^2 < 1$, o sistema anterior está bem-definido, e pode-se mostrar que suas soluções são $(r_0 = \bar{r}_0, z_0 = 0, \theta_0 = -\pi)$, onde $\bar{r}_0$ percorre as raízes reais do polinômio

$$\begin{aligned} p(r_0) = & a^2 r_0^5 + (-5a - 2)ar_0^4 + (9a^2 + 2ba + 8a + 1)r_0^3 + (-7a^2 - 6ba - \\ & 10a - 2b - 3)r_0^2 + (2a^2 + 4ba + 4a + b^2 + 4b + 2)r_0 - b^2 \end{aligned}$$

que estão contidas no intervalo $(0, 2)$.

Pelo Teorema 5.4, para cada raiz $\bar{r}_0 \in (0, 2)$ do polinômio $p(r_0)$ tal que

$$\det \frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)}{\partial(r_0, z_0, \theta_0)} \Big|_{(r_0=\bar{r}_0, z_0=0, \theta_0=-\pi)} = -\frac{8\pi^3}{(\bar{r}_0 - 2)^2(\bar{r}_0 - 1)^4\bar{r}_0^2}$$

$$\begin{aligned} & \left(-a^2\bar{r}_0^8 + 8a^2\bar{r}_0^7 - 26a^2\bar{r}_0^6 + 44a^2\bar{r}_0^5 - (41a^2 - b^2)\bar{r}_0^4 + \right. \\ & 4(5a^2 - b^2)\bar{r}_0^3 - 2(2a^2 - b^2)\bar{r}_0^2 + 4b^2\bar{r}_0 - b^2 + \\ & \left. b\sqrt{2\bar{r}_0 - \bar{r}_0^2}(a\bar{r}_0^4 - 4a\bar{r}_0^3 + 3(2a + b)\bar{r}_0^2 - 2(2a + 3b)\bar{r}_0 + a + b) \right) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

temos um ciclo limite do sistema (5.4) para $\varepsilon \neq 0$ pequeno. Portanto, a parte (a) do Teorema 5.1 está provada.

Tomando

$$a = \frac{6}{14273}(-4916 - 1290\sqrt{3} + 783\sqrt{5} + 198\sqrt{15}),$$

$$b = \frac{1}{28546} \left(-24645 + 6480\sqrt{15} + \sqrt{15(69081827 - 17769888\sqrt{15})} \right),$$

o polinômio $p(r_0)$ tem as seguintes 5 raízes contidas no intervalo $(0, 2)$:

$$0.005027269874128..., 1/3, 1/2, 1.13509506477830..., 1.9995591385847..$$

Como, para estas raízes, o determinante (5.14) vale

$$\begin{aligned} & 57805.5952633892..., 1042.080111492805..., 1004.924480347716..., \\ & 983.390018341011..., 3802297.318120450.. \end{aligned}$$

respectivamente, a parte (b) do Teorema 5.1 fica demonstrada. 5.2

5.4 Prova do Teorema 5.2

Prova do Teorema 5.2. Considerando a mudança de coordenadas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = R \cos \phi, \quad w = R \sin \phi,$$

o sistema hamiltoniano (5.6) é transformado no sistema

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon G_2(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{R} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi), \\ \dot{\phi} &= 1 + \varepsilon G_4(r, \theta, R, \phi), \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde G_1, G_2, G_3, G_4 são dadas por

$$G_1 = -\frac{1}{rR^2} \text{sign}(\cos \theta) \exp\left(-\frac{1}{r^2 R^2}\right) \tilde{G}_1,$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 = & -\lambda_6 \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta - 10R^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta + \lambda_5 r^2 \sin \theta - \\ & 2rR^3 \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + 2R^4 \cos \varphi \cos \theta \sin \varphi - \lambda_3 R^3 \cos \varphi \cos \theta - \\ & - 2\lambda_1 rR^2 \cos^2 \theta - R^2 \cos \theta - 2\lambda_2 rR^2 \sin \theta \cos \theta - 3\lambda_5 r^2 \cos^2 \theta \sin \theta - \\ & rR^3 \sin \varphi + 2rR^3 \cos^2 \theta \sin \varphi + 3r^2 R^2 \cos \theta + \lambda_1 rR^2 - 3r^2 R^2 \cos^3 \theta - \\ & \lambda_4 R^3 \sin \varphi \cos \theta; \end{aligned}$$

$$G_2 = \frac{1}{r^4 R^4} \text{sign}(\cos \theta) \exp\left(-\frac{1}{r^2 R^2}\right) \tilde{G}_2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2 = & 2rR^3 \cos \varphi \cos^2 \theta - r^3 R^5 \cos \varphi - 2rR^3 \cos \varphi - 2\lambda_6 \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi - \\ & 2\lambda_3 R^3 \sin \theta \cos \varphi - 20R^2 \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + 4R^4 \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \\ & r^3 R^5 \cos \varphi \cos^2 \theta - 2\lambda_4 R^3 \sin \theta \sin \varphi + 2r^4 R^4 \sin \theta + 2\lambda_5 r^2 \cos^3 \theta - \\ & 2\lambda_5 r^2 \cos \theta + 2r^2 R^2 \sin \theta + r^3 R^5 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta - 2R^2 \sin \theta + \\ & 2\lambda_5 r^4 R^2 \cos^3 \theta + 2\lambda_2 rR^2 \cos^2 \theta + \lambda_2 r^3 R^4 \cos^2 \theta - 2r^4 R^4 \sin \theta \cos^2 \theta - \\ & 2\lambda_5 r^4 R^2 \cos \theta - 2r^2 R^2 \sin \theta \cos^2 \theta - 2\lambda_2 rR^2 - \lambda_2 r^3 R^4 - 2\lambda_1 rR^2 \sin \theta \cos \theta - \\ & \lambda_1 r^3 R^4 \sin \theta \cos \theta + 2rR^3 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta; \end{aligned}$$

$$G_3 = -\frac{1}{R^3} \text{sign}(\cos \theta) \sin \theta \exp\left(-\frac{1}{r^2 R^2}\right) \tilde{G}_3,$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_3 = & 10R^2 - 2\lambda_6 \cos^2 \varphi - \cos \varphi \lambda_4 R^3 + \lambda_3 R^3 \sin \varphi - 2R^4 - 20R^2 \cos^2 \varphi + \\ & rR^3 \sin \varphi \sin \theta + rR^3 \cos \varphi \cos \theta + \lambda_6 + 4R^4 \cos^2 \varphi; \end{aligned}$$

$$G_4 = \frac{1}{r^2 R^6} \text{sign}(\cos \theta) \exp\left(-\frac{1}{r^2 R^2}\right) \tilde{G}_4$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_4 = & -2\lambda_3 R^3 \sin \theta \cos \varphi - 2\lambda_4 R^3 \sin \theta \sin \varphi + 4R^4 \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + \\ & r^3 R^5 \cos \varphi \cos^2 \theta - 2\lambda_6 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta - 20R^2 \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi - \\ & 2rR^3 \cos \varphi + 2rR^3 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta - r^3 R^5 \cos \varphi - \lambda_3 r^2 R^5 \cos \varphi \sin \theta + \\ & 2\lambda_5 r^2 \cos^3 \theta + 4r^2 R^6 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta - 2\lambda_5 r^2 \cos \theta + 2rR^3 \cos \varphi \cos^2 \theta + \\ & 2r^2 R^2 \sin \theta - 2R^2 \sin \theta - 2\lambda_5 r^4 R^2 \cos^3 \theta + 2\lambda_2 rR^2 \cos^2 \theta + \\ & 2\lambda_5 r^4 R^2 \cos \theta - 2r^2 R^2 \sin \theta \cos^2 \theta - 2\lambda_2 rR^2 - 2\lambda_1 rR^2 \sin \theta \cos \theta + \\ & r^3 R^5 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta - \lambda_4 r^2 R^5 \sin \varphi \sin \theta + 2\lambda_6 R^2 r^2 \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

Tomamos θ como a nova variável independente no sistema (5.15), este sistema se torna

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{d\phi}{d\theta} &= 1 + \varepsilon(G_4 - G_2)(r, \theta, R, \phi) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{5.16}$$

Da última equação, obtemos que qualquer solução $(r(\theta), R(\theta), \phi(\theta))$ do sistema será da forma $\phi(\theta) = \theta + \phi_0 + O(\varepsilon)$.

Substituindo esta expressão de $\phi(\theta)$ no sistema (5.16), ele se reduz a

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon G_1(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon G_3(r, \theta, R, \theta + \phi_0) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{5.17}$$

Agora estudaremos as órbitas periódicas do sistema (5.17) pelo Teorema 2.4. Calculando o sistema promediado de (5.17), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon g_1(r, R, \phi_0), \\ \frac{dR}{d\theta} &= \varepsilon g_3(r, R, \phi_0),\end{aligned}$$

onde

$$g_k(r, R, \phi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_k(r, \theta, R, \theta + \phi_0), \quad k = 1, 3;$$

isto é,

$$\begin{aligned}g_1(r, R, \phi_0) &= \left(-\frac{4R^2}{3\pi r} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{20}{3\pi r} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{2}{\pi r} - \right. \\ &\quad \left. \frac{2r}{\pi} + \frac{4\lambda_6}{3\pi R^2 r} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2R}{\pi} \sin \varphi_0 \right) \exp\left(-\frac{1}{r^2 R^2}\right), \\ g_3(r, R, \phi_0) &= \left(-\frac{64\lambda_6}{3\pi R^3} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{16R}{3\pi} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{80}{3\pi R} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right) \exp\left(-\frac{1}{r^2 R^2}\right).\end{aligned}\tag{5.18}$$

As duas soluções (r_i, R_i) do sistema (5.18) com r, R positivos (para λ_6 em um intervalo, que será

especificado mais tarde) são

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{4} \sqrt{10 + 2 \sqrt{25 + 2\lambda_6}} \sin \varphi_0 + \frac{1}{4} \sqrt{(10 + 2 \sqrt{25 + 2\lambda_6}) \sin^2 \varphi_0 + 16}, \\ R_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{10 + 2 \sqrt{25 + 2\lambda_6}}, \\ r_2 &= -\frac{1}{4} \sqrt{10 - 2 \sqrt{25 + 2\lambda_6}} \sin \varphi_0 + \frac{1}{4} \sqrt{(10 - 2 \sqrt{25 + 2\lambda_6}) \sin^2 \varphi_0 + 16}, \\ R_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{10 - 2 \sqrt{25 + 2\lambda_6}}. \end{aligned}$$

Note que a primeira solução só faz sentido para $\lambda_6 > -\frac{25}{2}$, e a segunda para $\lambda_6 \in \left(-\frac{25}{2}, 0\right)$.

Observe que

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, R)} \Big|_{r=r_1, R=R_1} \right) = f_1(\lambda_6) \sin(2\phi_0),$$

com $f_1 : \left(-\frac{25}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva e

$$\det \left(\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(r, R)} \Big|_{r=r_2, R=R_2} \right) = f_2(\lambda_6) \sin(2\phi_0),$$

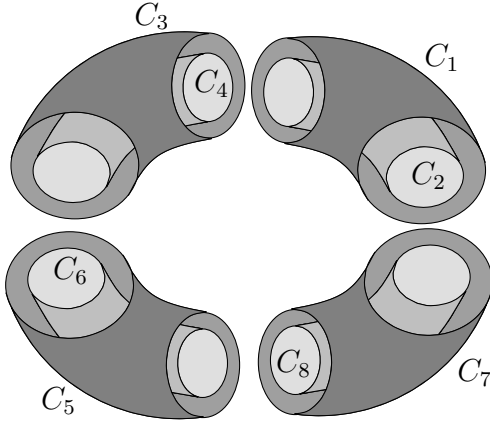
com $f_2 : \left(-\frac{25}{2}, 0\right) \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, exceto no zero.

Portanto, do Teorema 2.4, deduzimos que para cada ϕ_0 fixo e para qualquer $\lambda_6 \in \left(-\frac{25}{2}, 0\right)$, existem duas órbitas periódicas, correspondendo às condições iniciais (r_i, R_i) para $i = 1, 2$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, desde que $\sin(2\phi_0) \neq 0$. Desta forma, temos uma órbita periódica para o sistema (5.16), para cada $\phi_0 \in \mathbb{S}^1 \setminus \{k\pi/2 : k = 1, 2, 3, 4\}$. Isto mostra a existência de oito cilindros, folheados por órbitas periódicas, para o sistema (5.16) (consequentemente, para o sistema (5.6)).

Denotamos tais cilindros por C_j , $j = 1, \dots, 8$ de acordo com a seguinte regra: C_{2k+1} corresponde a $\phi_0 \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ para soluções que vem de (r_1, R_1) , e C_{2k+2} corresponde a $\phi_0 \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$ para as soluções que vem de (r_2, R_2) , para $k = 0, 1, 2, 3$. Com isto, provamos a parte (a) do teorema.

Quando $\lambda_6 \geq 0$, os cilindros associados à solução (r_2, R_2) desaparecem. Isto prova os itens (b) e (c) do teorema. $\square$

Observação 5.1. *Uma ilustração ingênua da posição relativa dos cilindros do Teorema 5.2 é a seguinte:*



Os cilindros internos são os que desaparecem quando a solução (r_2, R_2) deixa de existir. Note que a separação entre os cilindros tem medida zero.

APÊNDICE

O algoritmo abaixo foi produzido para o software Maple 14. Os comandos estarão distinguidos por `>`. Faremos alguns comentários para esclarecer ao leitor cada passo do algoritmo, explicando como adaptá-lo para os diversos casos.

A.1: Método da Média de Segunda Ordem: Encontrando Cilindros e Toros Invariantes

Apresentamos um algoritmo para estudar a existência de cilindros e toros invariantes para equações diferenciais da forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \varepsilon^\alpha F(\mathbf{x}) + \varepsilon^{\alpha+1} L(\mathbf{x}),$$

onde A é uma matriz elíptica semisimples, F, L são aplicações de classe C^3 e ε é um pequeno parâmetro.

Ilustraremos a aplicação do algoritmo à equação diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + \varepsilon^\alpha a(x, y) + \varepsilon^{\alpha+1} b(x, y, z, w), \\ \dot{z} &= -w, \\ \dot{w} &= z + \varepsilon^\alpha a(z, w) + \varepsilon^{\alpha+1} b(z, w, x, y),\end{aligned}\tag{19}$$

onde $\alpha \geq 2$ e a, b são funções de classe C^2 . O algoritmo pode ser executado no software Maple 14.

Primeiro carregamos os pacotes básicos e introduzimos os modelos.

```
> with(LinearAlgebra); with(VectorCalculus);
> T := 2*Pi;
> alpha:=2;
> X := Vector([
y, -x-epsilon^alpha*a(x, y)-epsilon^(alpha+1)*b(x, y, z, w),
w, -z-epsilon^alpha*a(z, w)-epsilon^(alpha+1)*b(z, w, x, y)
]);
```

Agora consideramos uma mudança de coordenadas e truncamos o campo até ordem $\alpha + 1$, inclusive.

```
> Y := Matrix(1/Matrix(
Jacobian([r*cos(theta), r*sin(theta), R*cos(2*phi), R*sin(2*phi)], [r, theta, R, phi])
)).subs(x = r*cos(theta), y = r*sin(theta), z = R*cos(2*phi), w = R*sin(2*phi), X);
> Z := Vector([
mtaylor(simplify(Y[1]), epsilon, alpha+2), mtaylor(simplify(Y[2]), epsilon, alpha+2),
mtaylor(simplify(Y[3]), epsilon, alpha+2), mtaylor(simplify(Y[4]), epsilon, alpha+2)
]);
```

Agora reduzimos o sistema a um problema bidimensional com um parâmetro:

```
> G := Vector([
mtaylor(Z[1]/Z[2], epsilon, alpha+2), mtaylor(Z[3]/Z[2], epsilon, alpha+2),
mtaylor(Z[4]/Z[2], epsilon, alpha+2)
]);
> J[1] := subs(phi = theta+phi[0], G[1]); J[2] := subs(phi = theta+phi[0], G[2]);
>
>
> F[1] := Vector([coeff(J[1], epsilon^alpha), coeff(J[2], epsilon^alpha)]);
> F[2] := Vector([coeff(J[1], epsilon^(alpha+1)), coeff(J[2], epsilon^(alpha+1))]);
```

Calculamos a equação promediada (no caso da Teoria da Média de Segunda Ordem):

```
> f[1] := Vector([int(F[1][1], theta = 0 .. T), int(F[1][2], theta = 0 .. T)]);
> ff[2] := subs(theta = s, Jacobian(F[1], [r, R])).Vector([
int(F[1][1], theta = 0 .. s),
int(F[1][2], theta = 0 .. s)
])+subs(theta = s, F[2]);
```

```

> f[2] := Vector([int(ff[2][1], s = 0 .. T), int(ff[2][2], s = 0 .. T)]);
>
> M := f[1]+epsilon*f[2];

```

O algoritmo retorna a função M . Cada solução simples de $M(r, R) = 0$ nos dá um cilindro ou toro invariante da equação (19).

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. ABRAHAM, J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*. Benjamin Cummings, London, 1978.
- [2] F. ANTONELI, P. BAPTISTELLI, A. P. DIAS, M. MANOEL, *Invariant theory and reversible-equivariant vector fields*. Journal of Pure and Applied Algebra **213**(5) (2009) 649–663.
- [3] V. I. ARNOLD, *Arnold's problems*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [4] V. I. ARNOLD, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1988
- [5] V.I. ARNOLD, *Mathematical methods of classical mechanics*, Second Edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer–Verlag, New York, 1990.
- [6] D. K. ARROWSMITH, C. M. PLACE, *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [7] J. A. BARRIONUEVO, J.A.L. SILVA, *Stability and Synchronism of Certain Coupled Dynamical Systems*. SIAM Journal on Mathematical Analysis **40** (2008) 939–951.
- [8] G. BELITSKII, *C^∞ -normal forms of local vector fields*. Symmetry and perturbation theory. Acta Appl. Math. **70** (2002) 23–41.
- [9] G. D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems with Two Degrees of Freedom*. Transactions of the American Mathematical Society **18**(2) (1917) 199–300.

- [10] I. I. BLEKHMEN, *The problem of synchronization of dynamical systems*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics **28** (1964) 239–265.
- [11] A. D. BRUNO, *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*. Springer-Verlag, 1979.
- [12] A. BUICĂ, J.P. FRANÇOISE, J. LLIBRE, *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*. Communications on Pure and Applied Analysis **6** (2007) 103–111.
- [13] A. BUICA, J. LLIBRE, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*. Bulletin des Sciences Mathématiques **128** (2004) 7–22.
- [14] H. BURSZTYN, L. MACARINI, *Introdução à Geometria Simplética*. Notas da XIV Escola de Geometria Diferencial, UFBA, 2006.
- [15] C. A. BUZZI, L. A. ROBERTO, M. A. TEIXEIRA, *Branching of periodic orbits in reversible Hamiltonian systems*. In: M. Manoel; M. C. Romero Fuster; C. T. C. Wall. (Org.). Real and Complex Singularities Series: London Mathematical Society Lecture Note Series. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press **380** (2010) 1–22.
- [16] R. L. DEVANEY, *Reversible diffeomorphisms and flows*. Transactions of the American Mathematical Society **218** (1976) 89–113.
- [17] G. B. ERMENTROUT, N. KOPELL, *Phase transitions and other phenomena in chains of coupled oscillators*. SIAM Journal of Applied Mathematics **50** (1990) 1014–1052.
- [18] G. B. ERMENTROUT, N. KOPELL, *Symmetry and phaselocking in chains of weakly coupled oscillators*. Communications on Pure and Applied Mathematics **39** (1986) 623–660.
- [19] G. GAETA, *Normal Forms of Reversible Dynamical Systems*. International Journal of Theoretical Physics **33**(9) (1994) 1917–1928.
- [20] J. GUCKENHEIMER, P. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*. Springer, 1983.
- [21] J. HALE, *Ordinary differential equations*. Dover Publications, 2009.
- [22] A. JACQUEMARD, M. F. S. LIMA, M. A. TEIXEIRA, *Degenerate resonances and branching of periodic orbits*. Annali di Matematica Pura ed Applicata **187**(1) (2008) 105–117.

- [23] J. S. W. LAMB, M. F. S. LIMA, R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA, J. YANG, *On the Hamiltonian Structure of Normal Forms at Elliptic Equilibria of Reversible Vector Fields in $\mathbb{R}^4$* . IMECC/Unicamp Research Report 05/10, 2010. Available from: http://www1.ime.unicamp.br/rel_pesq/relatorio.html.
- [24] J. LLIBRE, R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA. *On the birth of minimal sets for perturbed reversible vector fields*. Preprint, 2010.
- [25] J. LLIBRE, R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA, *Periodic orbits, invariant tori and cylinders of Hamiltonian systems near integrable ones having a return map equal to the identity*. Journal of Mathematical Physics **51** (2010) 082704.
- [26] J. LLIBRE, A. C. O. MEREU AND M. A. TEIXEIRA, *Invariant tori filled with periodic orbits for 4-dimensional C^2 differential systems in presence of resonance*. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering **20**(10) (2010) 1–4.
- [27] J. LLIBRE, A. C. MEREU, M. A. TEIXEIRA, *Limit cycles of the generalized polynomial Liénard differential equations*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **148** (2010) 363–383.
- [28] J. LLIBRE, M. A. TEIXEIRA, *Limit cycles for a mechanical system coming from the perturbation of a four-dimensional linear center*. Journal of Dynamics and Differential Equations **18**(4) (2006) 931–941.
- [29] M. F. S. LIMA AND M. A. TEIXEIRA, *Families of periodic orbits in resonant reversible systems*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society (New Series) **40**(4) (2009) 511–537.
- [30] I.G. MALKIN, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*. Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.
- [31] R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA, *On the Similarity of Hamiltonian and Reversible Vector Fields in 4D*. Aceito para publicação no *Communications on Pure and Applied Analysis*.
- [32] R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA, *On the Similarity of Hamiltonian and Reversible Vector Fields in $\mathbb{R}^{2n}$* . Preprint, 2010.

- [33] R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA, *On minimal sets for a class of weakly coupled oscillators*. Preprint, 2010.
- [34] R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA, *Invariant cylinders and tori in double-perturbed differential systems*. Preprint, 2010.
- [35] R. M. MARTINS, M. A. TEIXEIRA, *Reversible-equivariant systems and matricial equations*. arXiv:0809.0299. Aceito para publicação no *Anais da Academia Brasileira de Ciências*.
- [36] J. C. VAN DER MEER, J. A. SANDERS AND A. VANDERBAUWHEDÉ, *Hamiltonian Structure of the Reversible Nonsemisimple 1:1 Resonance*. In “Dynamics, Bifurcation and Symmetry: New Trends and New Tools”, Kluwer Academic Publishers, (1994), 221–240.
- [37] K. OLIVEIRA, M. VIANA, *Introdução à Teoria Ergódica*, Notas do Workshop de Geometria de Subvariedades e Dinâmica Caótica, UFAL, 2004.
- [38] G. B. PRICE, *On Reversible Dynamical Systems*. Transaction of the American Mathematical Society **37**(1) (1935) 51–79.
- [39] M. ROSEAU, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*. Springer Tracts in Natural Philosophy **8** Springer–Verlag, Berlin–New York, 1966.
- [40] J. A. SANDERS AND F. VERHULST, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*. Applied Mathematical Sciences **59**, Springer, 1985.
- [41] J. A. SANDERS, F. VERHULST, J. MURDOCK, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems (Second edition)*. Applied Mathematical Sciences **59**, Springer, 2007.
- [42] M. B. SEVRYUK, *The finite-dimensional reversible KAM theory*. Physica D: Nonlinear Phenomena **112** (1998) 132–147.
- [43] C.-W. SHIH, *Bifurcations of symmetric periodic orbits near equilibrium in reversible systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering **7**(3) (1997) 569–584.
- [44] M. A. TEIXEIRA, *Singularities of reversible vector fields*. Physica D: Nonlinear Phenomena **100** (1997) 101–118.

- [45] F. VERHULST, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universitext, Springer, 1991.
- [46] T. WAGENKNECHT, *An analytical study of a two degrees of freedom Hamiltonian system associated to the reversible hyperbolic umbilic*. Tese de Doutorado, Universidade de Ilmenau, 1999.