

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

PROPRIEDADES GLOBAIS DE CURVAS EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

MARCELO FIRER $\tilde{\wedge}$

ORIENTADORA: SUELI IRENE RODRIGUES COSTA $\tilde{\wedge}$

IMECC - UNICAMP, Agosto de 1991

F515p

15675/BC

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

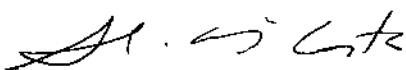
PROPRIEDADES GLOBAIS DE CURVAS EM VARIEDADES RIEMANNÍAS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr.-----

MARCELO FIRER-----

e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de SETEMBRO de 1991

Prof. Dr. 

Orientador

SUELI IRENE RODRIGUEZ COSTA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE EM MATEMÁTICA
TICA-----

Embora este trabalho seja muito pouco se colocado ao seu lado,
dedico-o a vocês, meus queridos Aidê Gabriel e Tamar.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

CAPITULO I.....	1
I.1 - CONCEITOS BÁSICOS RELATIVOS A VARIEDADES E CURVAS.....	2
I.2 - CURVATURA GEODÉSICA.....	5
I.2.1 - Curvaturas de Ordem Maior.....	6
I.2.2 - Curvatura Geodésica com Sinal - Caso Bidimensional.....	8
I.3 - CURVATURA GEODÉSICA CONSTANTE NA ESFERA E NO PLANO HIPERBÓLICO.....	14
I.3.1 - Curvatura Geodésica Constante em \mathbb{H}^2	20
I.3.2 - Curvatura Geodésica Constante em \mathbb{S}^2	27
I.3.3 - Círculos Osculadores e Evolutas.....	28
 CAPITULO II.....	 33
II.1 - CURVATURA TOTAL E CONVEXIDADE EM \mathbb{R}^2 - CONCEITOS BÁSICOS.....	34
II.2 - CURVATURA TOTAL E CONVEXIDADE.....	36
 CAPITULO III.....	 49
III.1 - BREVE HISTÓRIA DO TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES.....	50
III.2 - TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES NO PLANO HIPERBÓLICO.....	54
III.3 - TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES NA ESFERA.....	69
 BIBLIOGRAFIA.....	 75

INTRODUÇÃO

O título desta dissertação é bastante ilustrativo do trabalho desenvolvido. Mesmo assim, acreditamos ser necessário estender-nos um pouco para tornar claro o espírito que o norteou. Os resultados clássicos sobre propriedades globais de curvas planas, datam da primeira metade deste século: o Teorema dos Quatro Vértices foi demonstrado por Mukhopadhyaya em 1909, Hopf demonstrou o Umlaufsatz em 1935, enquanto a desigualdade isoperimétrica foi tratada por A. Hurwitz em 1902 e E. Schmidt em 1939, isto para citarmos apenas os teoremas mais conhecidos.

A riqueza e a relativa "maturidade" existente no tratamento de curvas planas serviu de suporte e inspiração para este trabalho. Nossa linha diretriz foi a de dar um tratamento riemanniano e estender conceitos e resultados da teoria clássica de curvas planas para superfícies (variedades bidimensionais), resgatando, sempre que possível, a percepção geométrica original.

Assim sendo, começamos mostrando no primeiro capítulo, que a curvatura geodésica com sinal de uma curva em uma variedade bidimensional pode ser vista, de modo análogo ao que ocorre no plano, como a variação angular da indicatriz tangente, via transporte paralelo. Na sequência, determinamos as curvas com curvatura geodésica constante no plano hiperbólico e na esfera. Esta questão surgiu a partir da

demonstração feita por [Osserman] do Teorema dos Quatro-ou-Mais Vértices (que leva em consideração o fato das circunferências terem curvatura constante), mas não deixa de ser interessante por si própria.. Acreditamos que a abordagem que fizemos possa ser estendida para a determinação de curvas em espaços hiperbólicos e esferas de dimensão maior, que tenham curvaturas de ordem mais alta constantes, problema que tem sido abordado recentemente no caso euclidiano ([Barbosa] e [Weiner,1]). Ainda neste contexto, definimos círculos osculadores e evolutas de curvas no plano hiperbólico e na esfera e argumentamos que estes conceitos fazem sentido apenas nas superfícies de curvatura gaussiana constante.

No segundo capítulo começamos o estudo global de curvas mostrando que o conceito de índice de uma curva não faz sentido, de modo geral, em variedades que não sejam "flat". Seguimos generalizando e demonstrando um resultado clássico de análise que garante a equivalência entre a convexidade de um conjunto em um espaço vetorial normado de dimensão finita e a existência de hiperplanos suportes por pontos de fronteira do conjunto. No contexto em que trabalhamos, substituímos convexidade por convexidade geodésica e hiperplano por geodésica suporte. Além disto, mostramos que uma curva com curvatura geodésica positiva é necessariamente convexa.

O terceiro capítulo é inteiramente dedicado ao Teorema dos Quatro Vértices. Antes de detalharmos o trabalho realizado referente a este teorema, gostaríamos de comentar que a demonstração deste no plano hiperbólico representou o passo inicial deste trabalho e nos levou, de

uma forma ou outra, a vários dos resultados que apresentamos nos capítulos anteriores. Além da determinação das curvas com curvatura constante para podermos trabalhar com círculos circunscritos, a interpretação da curvatura geodésica com sinal e a discussão sobre índice de uma curva feitas nos dois primeiros capítulos surgiram a partir de uma tentativa (mal sucedida) de demonstrar o Teorema dos Quatro Vértices no plano hiperbólico.

Para o plano hiperbólico fizemos duas demonstrações do teorema: a primeira foi feita a partir de uma relação que estabelecemos entre curvatura euclidiana e curvatura geodésica de uma curva no plano hiperbólico e a segunda delas é uma adaptação da demonstração de Osserman. Finalizamos o capítulo com uma versão do Teorema dos Quatro Vértices para curvas esféricas. Garantimos a existência de quatro pontos críticos da curvatura geodésica de uma curva fechada simples na esfera, a partir de uma relação que estabelecemos entre torção e curvatura geodésica destas.

Devemos mencionar neste ponto que, após concluído o trabalho e já redigida esta dissertação, nos deparamos com o artigo de [Thorbergsson]. Nesse artigo ele demonstra, por caminhos totalmente distintos do que fizemos, que uma curva fechada simples homotópica a zero em uma variedade riemanniana bidimensional completa, orientada e de curvatura gaussiana constante, possui ao menos quatro "pontos estacionários" (pontos críticos da curvatura geodésica). Observamos que a menos de isometria, este resultado abrange apenas curvas na esfera e no plano hiperbólico.

Para finalizar esta introdução, gostaríamos de dizer que

consideramos este trabalho um ponto de partida bastante fértil para desenvolvimentos futuros. Estes podem ir por duas vertentes básicas: a primeira seria a de desenvolver o estudo global de curvas em variedades de dimensão arbitrária (como buscar formulações semelhantes ao do Teorema dos quatro vértices) e a segunda seria a de tentar generalizar propriedades de sub-variedades geodesicamente convexas de co-dimensão arbitrária.

Além destas possibilidades, vários trabalhos interessantes têm sido feitos sobre curvas no plano euclidiano, assim como diversos problemas, também interessantes, continuam em aberto. Apenas para citarmos alguns exemplos, Osserman sugere um problema que seria o da existência de uma medida natural no espaço das curvas fechadas planas simples que caracterizasse de modo adequado o fato das curvas com apenas quatro vértices serem "poucas" por possuírem uma propriedade muito especial: estas devem interceptar seu círculo circunscrito em apenas dois pontos, e estes devem ser antípodas no círculo. Citando outro resultado recente, [Pinkall] demonstra em 1987 que uma curva fechada (não necessariamente simples) plana que é bordo de uma superfície imersa possui ao menos quatro vértices e conjectura que se a superfície tiver genus $g > 1$ então a curva tem ao menos $4g + 2$ vértices.

CAPÍTULO I

Neste primeiro capítulo trataremos das definições e conceitos básicos referentes a curvas em uma variedade, e estudaremos algumas questões locais. O parágrafo I.1 terá a responsabilidade de recordar aos leitores as definições de variedade, curva em variedade, transporte paralelo, conexão, curvatura geodésica, círculo osculador, e outros conceitos locais. Alguns destes conceitos serão definidos apenas em espaços euclidianos, particularmente no plano, pois na literatura disponível não encontramos definições mais genéricas e assim sendo, a extensão destes conceitos faz parte do trabalho desenvolvido e constará dos parágrafos seguintes. Todas as definições e resultados mencionados no parágrafo I.1 podem ser encontradas em [Carmoll], [Berger1] ou [Spivak1,2 e 4], sendo que a maioria dos resultados pode ser encontrada em mais de uma das referências acima citadas.

No parágrafo I.2, exploraremos o conceito de curvatura geodésica e daremos uma definição alternativa para este conceito, a qual estende do modo mais natural possível a idéia original de curvatura como sendo a variação local da direção das retas tangentes. No parágrafo I.3 determinaremos todas as curvas de curvatura geodésica constante na esfera e no plano hiperbólico. Em ambos os casos iniciaremos com uma demonstração bem simpática de que uma determinada família de curvas tem de fato curvatura geodésica constante, apenas através do conhecimento dos grupos de isometria das respectivas variedades. No entanto, para demonstrar a unicidade destas, haverá a necessidade de calcularmos explicitamente a curvatura.

1.1 CONCEITOS BÁSICOS RELATIVOS A VARIEDADES E CURVAS

Durante todo o trabalho denotaremos por M^n uma variedade Riemanniana onde o índice n indica sua dimensão, mas o índice poderá ser omitido quando a dimensão da variedade for irrelevante ao assunto em questão ou quando não houver espaço para dúvidas, o mesmo ocorrendo com o adjetivo "Riemanniana". Denotaremos a métrica associada a tal variedade por $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, o fibrado tangente por TM e o espaço tangente em um ponto $p \in M$ por $T_p M$; $\chi(M)$ será o conjunto dos campos em M e $\nabla_X Y$ denotará a conexão Riemanniana em M . Em termos de coordenadas locais, temos que, se (x^1, x^2, \dots, x^n) for um sistema de coordenadas locais em M e $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ base de cada fibra, podemos localmente representar os campos X e Y por

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

e obtemos que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n x_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j} x_i \frac{\partial}{\partial x^i} (y_j) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \left(\sum_{i,j} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

onde

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Se a métrica for dada, neste sistema de coordenadas, por uma matriz (g_{ij}) , onde $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle_M$ com inversa (g^{ij}) , então os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^m tem a seguinte forma:

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \right) g^{km}.$$

Uma curva em uma variedade M é uma aplicação $\gamma: I \rightarrow M$, onde I é um intervalo da reta e vamos supor sempre que tais curvas são ao menos de classe C^3 , mas na maioria dos casos poderemos supô-las não apenas de classe C^∞ como também analíticas. Uma curva γ é dita fechada se ela for periódica ou, equivalentemente, se γ for uma aplicação de S^1 em M . Eventualmente cometeremos um abuso de linguagem ao denotar por γ o traçado de γ , que definimos como sendo a imagem de I por γ , ou seja, $\gamma(I) \subseteq M$ e denotamos por $\{\gamma\}$. Se $\beta: J \rightarrow M$ for uma curva com $\beta(J) = \gamma(I)$ e existir difeomorfismo $\phi: I \rightarrow J$ tal que $\beta \circ \phi = \gamma$ diremos que β é uma reparametrização de γ . Diremos que uma curva γ é k -regular em $t \in I$ se para qualquer sistema de coordenadas (U, φ) onde U é uma vizinhança de $\gamma(t)$ e $\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ tivermos que $\{(\varphi \circ \gamma)', (\varphi \circ \gamma)'', \dots, (\varphi \circ \gamma)^{(k)}\}$ forma um conjunto linearmente independente de vetores em $T_{\varphi \circ \gamma(t)} M$, considerando-se a identificação canônica de \mathbb{R}^n com $T_{\varphi \circ \gamma(t)} \mathbb{R}^n$. Semelhantemente diremos que o traçado $\{\gamma\}$ de uma curva é k -regular se admitir uma reparametrização k -regular. Se γ está definida em um intervalo $[a, b]$, definimos a função comprimento de arco de γ como sendo

$$l(t) = \int_a^t \langle \gamma'(\tau), \gamma'(\tau) \rangle_M d\tau.$$

Vale recordar que o parâmetro t é dito comprimento de arco de γ se tivermos $l(t) = t - a$ e que se γ for uma curva regular podemos sempre reparametriza-la pelo comprimento de arco e neste caso denotaremos o parâmetro por s , obtendo que $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_M = 1$.

Lembramos ainda que

$$\rho: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(p, q) \mapsto \inf \left\{ \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_M dt \mid \gamma \text{ curva } C^1 \text{ ligando } p \text{ à } q \right\}$$

é uma métrica em M .

Vamos lembrar também que a derivada covariante de um campo de vetores X ao longo de uma curva γ será definida como sendo a conexão de X pelo campo $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}$ e denotada por $\frac{DX}{dt}$. Lembramos ainda que um campo de vetores X é dito paralelo ao longo de uma curva $\{\gamma\}$ se a derivada covariante de X ao longo de γ for constantemente nula e que se o for para alguma parametrização 1-regular (que será dita apenas regular), então o será para qualquer reparametrização pois:

$$\nabla_{(\varphi \circ \gamma)'} X = \nabla_{\varphi' \gamma'} X = \varphi' \nabla_{\gamma'} X.$$

Recordamos também que dado um vetor $X_0 \in T_{\gamma(t_0)} M$ existe um e apenas um campo de vetores X , paralelo ao longo de γ tal que $X_{\gamma(t_0)} = X_0$ (demonstra-se este resultado aplicando o Teorema de Picard de existência e unicidade da solução de equações diferenciais ao sistema de equações que implicam no paralelismo do campo que procuramos). Assim sendo, ao menos localmente podemos definir uma aplicação

$$P_{\gamma(t_0)}: T_{\gamma(t_0)} M \longrightarrow \chi(M) \Big|_{\gamma}$$

que a cada vetor X_0 tangente à M em $\gamma(t_0)$ associa o único campo paralelo ao longo de γ tal que $X_{\gamma(t_0)} = X_0$. Além disto, considerando-se sobre $\chi(M) \Big|_{\gamma}$ a estrutura diferencial induzida, temos que se γ for de classe C^k , então tal aplicação será de classe C^{k-1} (novamente a diferenciabilidade pode ser garantida pelo Teorema de Picard).

I.2 CURVATURA GEODÉSICA

O conceito fundamental para falarmos de curvas em uma variedade é o de curvatura geodésica, que é definida do seguinte modo:

definição I.2.1: Seja M^n variedade Riemanniana e $\gamma: I \rightarrow M$ curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco (e portanto regular), de classe C^k , com $k \geq 2$. O campo de vetores de curvatura geodésica de γ é definido pela aplicação

$$\begin{aligned} K_\gamma: I &\rightarrow UT_{\gamma(s)} M \\ s &\mapsto \nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s) \end{aligned}$$

Se γ for parametrização regular com um parâmetro t qualquer, tomamos $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ e temos que $K_\gamma(t) = \nabla_{T(t)} T(t)$. Chamamos de **curvatura geodésica** de γ a função

$$\begin{aligned} k_\gamma: I &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \langle K_\gamma(t), K_\gamma(t) \rangle_M^{1/2} \end{aligned}$$

ou seja, à função que a cada ponto da curva associa o módulo do vetor curvatura geodésica no ponto. Uma curva em M é dita **geodésica** se tiver curvatura geodésica constantemente nula e diremos que uma variedade riemanniana M é **geodesicamente completa** - ou simplificando apenas **completa** - se toda geodésica $g: [a, b] \rightarrow M$ puder ser estendida a uma geodésica $\bar{g}: \mathbb{R} \rightarrow M$. O Teorema de Hopf-Rinow-De Rham nos garante que M é geodesicamente completa se e somente se (M, ρ) for espaço métrico completo e que se M for geodesicamente completa, dados dois pontos quaisquer de M existe geodésica de comprimento mínimo ligando estes pontos. De agora em diante consideraremos de modo geral todas as curvas

como sendo parametrizadas pelo comprimento de arco, salvo explicitação em contrário.

Se M for bidimensional, podemos definir um referencial ortonormal ao longo de uma curva e com seu auxílio definir a curvatura geodésica com sinal de uma curva. Na realidade tal procedimento pode ser generalizado para uma variedade de dimensão n arbitrária, para a $(n-1)$ -ésima curvatura.

I .2.1 Curvaturas de Ordem Maior

Seja então M^n variedade Riemanniana, γ curva regular parametrizada pelo comprimento de arco definida em um intervalo I e κ_γ a curvatura geodésica de γ . Chamaremos κ_γ de primeira curvatura que denotaremos por κ_1 e chamaremos de v_1 o campo tangente unitário $\gamma'(s)$. Se $\kappa_1 \neq 0$ para todo $s \in I$, temos que $v_2(s) = \frac{1}{\kappa_1(s)} \frac{Dv_1(s)}{ds}$ é um campo unitário ao longo de γ que é perpendicular ao campo v_1 , pois sendo $v_1(s)$ campo unitário temos que

$$\frac{d}{ds} \langle v_1(s), v_1(s) \rangle_M = 2 \langle v_1(s), \frac{Dv_1(s)}{ds} \rangle_M = \kappa_1(s) \langle v_1(s), v_2(s) \rangle_M = 0$$

Sendo v_2 campo de norma constante, temos que $v_2(s)$ e $\frac{Dv_2(s)}{ds}$ também são campos perpendiculares e mais;

$$\langle v_1(s), v_2(s) \rangle_M \equiv 0 \implies \left\langle \frac{Dv_1(s)}{ds}, v_2(s) \right\rangle_M + \left\langle v_1(s), \frac{Dv_2(s)}{ds} \right\rangle_M =$$

$$k_2(s) + \left\langle v_1(s), \frac{Dv_2(s)}{ds} \right\rangle_M = 0$$

Assim sendo temos que $\frac{Dv_2(s)}{ds} = -k_1(s)v_1(s) +$ vetor perpendicular à $v_1(s)$ e $v_2(s)$ simultaneamente e definimos a segunda curvatura

$$k_2(s) = \left| \frac{Dv_2(s)}{ds} + k_1(s)v_1(s) \right|,$$

onde o módulo é dado pela métrica da variedade. Se $k_2(s)$ também não se anular em qualquer ponto de I , podemos definir de modo análogo o campo $v_3(s)$ e a terceira curvatura $k_3(s)$ e seguimos recursivamente com este processo. Supondo que para $j \leq n$, obtemos j campos ortonormais v_1, \dots, v_j ao longo de γ e $j-1$ funções curvatura k_1, \dots, k_{j-1} que não se anulam, tais que

$$\frac{Dv_{j-1}(s)}{ds} = -k_{j-2}(s)v_{j-2}(s) + k_{j-1}(s)v_j(s)$$

Sendo v_1, \dots, v_j referencial ortonormal, obtemos que

$$\frac{Dv_j(s)}{ds} = -k_{j-1}(s)v_{j-1}(s) + \text{vetor perpendicular à } v_1, \dots, v_j$$

e definimos

$$j\text{-ésima curvatura geodésica} = k_j(s) = \left| \frac{Dv_j(s)}{ds} + k_{j-1}(s)v_{j-1}(s) \right|$$

No caso particular em que $j = n-1$, ou seja, em que todas as curvaturas até a ordem $n-2$ não se anulam, podemos definir a $n-1$ curvatura geodésica com sinal do seguinte modo: tomamos $v_{j+1} = v_n$ como sendo o único campo unitário, simultaneamente ortogonal à v_1, \dots, v_{n-1} tal que $\{v_1(s), \dots, v_{n-1}(s), v_n(s)\}$ forme uma base positivamente orientada de $T_{\gamma(s)}M$, e definimos

$$\text{curvatura com sinal} = k_g(s) = \left\langle \frac{Dv_{n-1}(s)}{ds} + k_{n-2}(s)v_{n-2}(s), v_n(s) \right\rangle_M =$$

$$= \left\langle \frac{Dv_{n-1}(s)}{ds}, v_n(s) \right\rangle_M$$

Sendo $\frac{Dv_{n-1}(s)}{ds} + k_{n-2}(s)v_{n-2}(s)$ ortogonal à v_1, \dots, v_{n-1} , e sendo v_n campo unitário, temos que $|k_g(s)| = k_{n-1}(s)$.

Observemos ainda que o referencial móvel $v_1(s), \dots, v_n(s)$ - chamado de referencial de Frenet - nada mais é que o referencial obtido a partir de $\gamma'(s), \frac{D\gamma'(s)}{ds}, \dots, \frac{D\gamma^{(n-1)}(s)}{ds}$ através do processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.

1.2.2 Curvatura Geodésica com Sinal - Caso Bi-dimensional

As definições dadas em 1.2.1 são as necessárias para encerrarmos este parágrafo, mas, como trabalharemos com variedades bi-dimensionais, definiremos a parte a curvatura com sinal no caso bi-dimensional, apenas para clarear a notação e facilitar o andamento do trabalho.

definição 1.2.2: Chamamos de **campo normal positivo** ao longo de uma curva γ ao campo $n(s)$ satisfazendo:

i) $\langle n(s), n(s) \rangle_M \equiv 1$

ii) $\langle n(s), \gamma'(s) \rangle_M \equiv 0$

iii) $\{\gamma'(s), n(s)\}$ formam, nesta ordem, uma base de $T_{\gamma(s)}M$ com orientação compatível com a induzida pelos sistemas de coordenadas locais.

definição I.2.3: A curvatura geodésica com sinal de uma curva γ é a

$$\text{função } k: I \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \langle \mathcal{K}_\gamma(s), n(s) \rangle_M$$

Seja s comprimento de arco temos que $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$ e consequentemente

$$\frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_M = 2 \langle \frac{D\gamma'}{ds}(s), \gamma'(s) \rangle_M \equiv 2 \langle \mathcal{K}_\gamma(s), \gamma'(s) \rangle_M \equiv 0$$

e obtemos que $|k_\gamma(s)| = k_\gamma(s)$ pois o vetor de curvatura geodésica é sempre ortogonal ao vetor tangente à curva, ou seja, é múltiplo do vetor normal $n(s)$. Lembramos ainda que em termos de coordenadas locais temos

$$\mathcal{K}(s) = \sum_k \left(\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (*)$$

As definições acima mencionadas são as que podemos encontrar usualmente nos livros sobre Geometria Riemanniana, e são estas as definições mais razoáveis em termos computacionais. No entanto, por ser o conceito de curvatura geodésica com sinal um conceito fundamental neste trabalho, havemos por bem tentar resgatá-lo em termos dos conceitos originais da Geometria Riemanniana, de modo a obter uma interpretação tão "geométrica" quanto possível.

Tomemos então $\gamma: I=[0,L] \rightarrow \mathbb{M}^2$ curva regular de classe C^k ($k \geq 2$), parametrizada pelo comprimento de arco e a família de funções

$$P^{\gamma(a)}: \bigcup_{s \in I} T_{\gamma(s)} \rightarrow T_{\gamma(a)} \mathbb{M} \quad (**)$$

$$[\gamma(s), v] \mapsto P([s], v) = \text{transporte paralelo de } T_{\gamma(a)} \text{ ao longo de } \\ \gamma([a, s]) \text{ se } a \geq s \text{ ou ao longo de } \gamma([s, a]) \\ \text{ se } s \leq a.$$

Na realidade, vamos considerar a família de funções

$P^{\gamma(a)} \circ \gamma': I \rightarrow T_{\gamma(a)}M$, onde cada elemento da família associa ao vetor tangente $\gamma'(s)$ sua imagem via transporte paralelo em $T_{\gamma(a)}M$, traçando assim uma curva de classe C^{k-1} , (pois o transporte paralelo é aplicação analítica e assumimos γ como sendo de classe C^k) no espaço tangente correspondente. Consideramos também a família de funções

$$P_{\gamma(a)} \circ \gamma': I \rightarrow \bigcup_{s \in I} T_{\gamma(s)}M$$

que transporta paralelamente o vetor $\gamma'(a)$ ao longo de γ à $T_{\gamma(s)}M$.

Obviamente

$$P^{\gamma(a)} \circ \gamma'(s) = P_{\gamma(s)} \circ \gamma'(a)$$

e como $P_{\gamma} \circ \gamma'$ define um campo paralelo ao longo de γ , obtemos a partir da definição de campo paralelo, que $\frac{DP_{\gamma} \circ \gamma'}{ds} \equiv 0$. Mas

$$\begin{aligned} \frac{DP_{\gamma} \circ \gamma'}{ds} \equiv 0 &\implies \frac{d}{ds} \langle P_{\gamma} \circ \gamma', P_{\gamma} \circ \gamma' \rangle = 2 \left\langle \frac{DP_{\gamma} \circ \gamma'}{ds}, P_{\gamma} \circ \gamma' \right\rangle = 0 \implies \\ &\langle P_{\gamma} \circ \gamma', P_{\gamma} \circ \gamma' \rangle \equiv \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle \equiv 1 \end{aligned}$$

e sendo $P^{\gamma(a)} \circ \gamma'(s) = P_{\gamma(s)} \circ \gamma'(a)$ na realidade a aplicação (***) assume valores apenas em uma circunferência unitária em $T_{\gamma(a)}M$. Logo, considerando o referencial ortonormal dado por $\{\gamma'(s), n(s)\}$, obtemos uma família de funções $\theta_a: I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P^{\gamma(a)} \circ \gamma'(s) = \cos(\theta_a(s))\gamma'(a) + \sin(\theta_a(s))n(a).$$

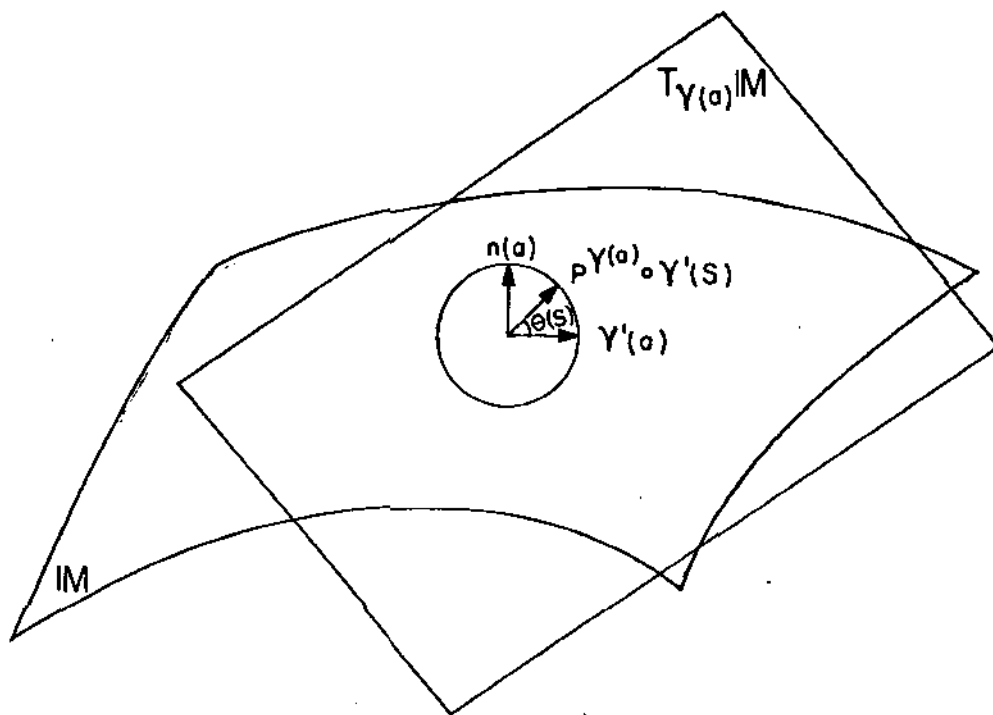


figura 1

Neste ponto estamos interessados em demonstrar a diferenciabilidade das funções θ_a para estabelecer um paralelo com o que ocorre no caso euclidiano. No espaço euclidiano \mathbb{R}^n , temos que se $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, então $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i$, ou seja, $(g_{ij}) \equiv \text{Id}_{n \times n}$ ($g_{ij} = \delta_{ij}$) e conseqüentemente os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k são identicamente nulos, verificando-se de modo imediato a partir de (*) a noção usual de paralelismo em \mathbb{R}^n . Neste caso, considerando-se novamente a identificação canônica de \mathbb{R}^n com o espaço tangente em cada ponto, temos que

$$\gamma'(s) = P^{\gamma(a)} \circ \gamma'(s) = \gamma'(a) \cos(\theta_a(s)) + n(a) \sin(\theta_a(s)).$$

Derivando-se o primeiro e o terceiro termo desta igualdade obtemos que

$$\frac{d\gamma'}{ds}(a) = \frac{d\theta}{ds}(a) \left(-\gamma'(a) \sin(\theta_a(a)) + n(a) \cos(\theta_a(a)) \right) = \frac{d\theta}{ds}(a) n(a) \implies$$

$$k_g(a) = \left\langle \frac{d\gamma'}{ds}(a), n(a) \right\rangle = \frac{d\theta}{ds}(a),$$

pois $\theta_a(a) = 0$, ou seja, a curvatura de uma curva em \mathbb{R}^2 mede a variação angular do campo de vetores tangentes à curva. No caso de uma variedade bi-dimensional qualquer, como o transporte paralelo não se trivializa, devemos considerar a variação angular do campo tangente relativamente a um campo paralelo. Vamos agora precisar do seguinte lema:

LEMA 1.2.1 [Spivak2]: Seja γ curva regular de classe C^k em M^2 , e seja $Y \in \chi(M)$. Então

$$\nabla_{\gamma'(t)} Y \Big|_{t=a} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t} \left(P_{\gamma(a)}^{\gamma(t)}(Y_{\gamma(t)}) - Y_{\gamma(a)} \right).$$

demonstração: Sejam $X_1(t)$ e $X_2(t)$ campos de vetores paralelos ao longo de γ , tais que $X_1(a)$ e $X_2(a)$ sejam linearmente independentes. Como

$$\frac{d}{dt} \langle X_1(t), X_2(t) \rangle = \left\langle \frac{DX_1}{dt}(t), X_2(t) \right\rangle + \langle X_1(t), \frac{DX_2}{dt}(t) \rangle = 0$$

temos que X_1 e X_2 formam um ângulo constante e são LI em todos os pontos da curva γ e podemos escrever

$$Y_{\gamma(t)} = y^1(t)X_1(t) + y^2(t)X_2(t).$$

Sendo $P_{\gamma(a)}$ linear (novamente tal fato decorre imediatamente do fato da derivada covariante ser linear e do fato que $\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$ quaisquer que sejam os campos V e W e qualquer que seja a curva diferenciável) obtemos

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(P_{\gamma(a)}^{\gamma(t)}(Y_{\gamma(t)}) - Y_{\gamma(a)} \right) = \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(y^1(t)P_{\gamma(a)}^{\gamma(t)}X_1(t) + y^2(t)P_{\gamma(a)}^{\gamma(t)}X_2(t) - y^1(a)X_1(a) - y^2(a)X_2(a) \right) = \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(y^1(t)X_1(a) - y^1(a)X_1(a) + y^2(t)X_2(a) - y^2(a)X_2(a) \right) = \\ & \frac{dy^1}{dt}(a)X_1(a) + \frac{dy^2}{dt}(a)X_2(a) = \frac{DY}{dt}(a) = \nabla_{\gamma'(t)} Y \Big|_{t=a} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Como corolário deste lema temos que, se γ for de classe C^k ,

($k \geq 2$) então teremos as funções θ_s de classe C^{k-1} e faz sentido o seguinte teorema:

TEOREMA 1.2.1: Seja γ curva de classe C^k ($k \geq 2$) definida numa variedade riemanniana M^2 , parametrizada pelo comprimento de arco e sejam as famílias de aplicações $P^{\gamma(a)}$ e θ_s definidas como acima. Então,

$$k_s(a) = \left. \frac{d\theta}{ds}(s) \right|_{s=0}$$

demonstração: De acordo com o lema 1, o vetor de curvatura geodésica

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\gamma(s) &= \nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(P^{\gamma(s)}(\gamma'(t)) - \gamma'(s) \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\gamma'(s) \cos(\theta_s(t)) + n(s) \operatorname{sen}(\theta_s(t)) - \gamma'(s) \right) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\gamma'(s) \cos(\theta_s(t)) + n(s) \operatorname{sen}(\theta_s(t)) \right) \right|_{t=0} = \\ &= \left(\begin{array}{l} -\gamma'(s) \operatorname{sen}(\theta_s(t)) + n(s) \cos(\theta_s(t)) \\ n(s) \frac{d\theta}{dt}(t) \end{array} \right) \bigg|_{t=0} = \\ &= n(s) \frac{d\theta}{dt}(0), \end{aligned}$$

pois sendo θ_s uma escolha contínua de ângulo orientado entre $\gamma'(s)$ e o transporte paralelo de $\gamma'(s+t)$ ao longo de γ em $T_{\gamma(s)}M$, temos que $\theta_s(0) = 2k\pi$. Consequentemente,

$$k_s(s) = \langle \mathcal{K}_\gamma(s), n(s) \rangle_M = \langle n(s) \frac{d\theta}{dt}(0), n(s) \rangle_M = \frac{d\theta}{dt}(0) \blacksquare$$

I.3 CURVATURA GEODÉSICA CONSTANTE NA ESFERA E NO PLANO HIPERBÓLICO

O objetivo que nos propomos neste parágrafo é o de determinar todas as curvas de curvatura geodésica constante na esfera S^2 e no plano hiperbólico H^2 , que são os modelos fundamentais para variedades bi-dimensionais com curvatura constante positiva e constante negativa respectivamente [Wolf-cap.2]. Por mais natural que pareça esta questão, ela não deixa de ser bastante atual, já que a determinação da existência de curvas fechadas curvas com torção (2-curvatura) constante em \mathbb{R}^3 foi feita apenas em 1974 por [Weiner,1] e a caracterização de curvas em \mathbb{R}^n com todas as $n-1$ curvaturas constantes foi feita em 1981 [Barbosa].

Vamos então começar este parágrafo apresentando os fatos principais da geometria destas variedades. Uma exposição excelente e muito agradável sobre os espaços hiperbólicos pode ser encontrada em [Beardon], enquanto em [Berger2] encontramos uma boa exposição sobre as esferas e podemos encontrar nestas duas referências os fatos que lembraremos, sem demonstrar, nos dois parágrafos seguintes. Achamos ainda por bem lembrar que historicamente, o plano hiperbólico se constituiu no primeiro exemplo de uma variedade riemanniana que não é imersa isometricamente no espaço euclidiano usual.

Consideramos então $S^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$ que

pode ser parametrizada por $2(n+1)$ cartas via anti-projeção ortogonal, ou seja, as funções

$$\Phi_i: B^n \rightarrow S^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{j=1}^n x_j^2}, x_i, \dots, x_n), \quad i \in \{1, \dots, n+1\}$$

definem um atlas para S^n e temos que localmente, dada uma parametrização Φ_i , a métrica induzida por \mathbb{R}^{n+1} é definida pela matriz (g_{ij}) , onde $g_{ij} = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$. No caso específico em que $n = 2$ trabalharemos com

coordenadas esféricas

$$\Psi: (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow S^2 \\ (\theta, \xi) \mapsto (\sin \theta \cos \xi, \sin \theta \sin \xi, \cos \theta)$$

que cobre a esfera menos uma semi-circunferência, sistema de coordenadas relativo ao qual $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$. O grupo das isometrias de $S^n = Is(S^n)$ é naturalmente isomorfo a $O(n+1)$, sendo o isomorfismo dado pela restrição à S^n da ação de $O(n+1)$ em \mathbb{R}^{n+1} . Sabemos ainda que as geodésicas de S^n são os grandes círculos, ou seja, a intersecção de S^n com sub-espaços vetoriais bi-dimensionais de \mathbb{R}^n , ou então pedaços destes. Mais ainda, dados dois pontos em S^n não antípodas, existe uma única geodésica minimizante ligando estes dois pontos. Se tais pontos forem antípodas teremos uma infinidade de geodésicas minimizantes ligando-os. De qualquer modo temos que γ é (geodésicamente) completa.

Definimos H^n como sendo $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ com a matriz métrica definida por $g_{ij} = (\frac{1}{x_n})^2 \delta_{ij}$. No caso bi-dimensional, consideramos $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ e temos que o grupo das isometrias de $H^2 = Is(H^2)$ é dado pelas aplicações

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$$

onde a, b, c, d são reais, com $ad - bc > 0$ [Beardon - cap.7].

Sabemos também que as geodésicas de H^n são as intersecções de H^n com circunferências ou retas euclidianas normais ao hiperplano $P =$

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Além disso, \mathbb{H}^n é uma variedade geodesicamente completa e dados dois pontos quaisquer de \mathbb{H}^n existe uma única geodésica minimizante ligando estes pontos.

Conhecendo as geodésicas de \mathbb{H}^2 , podemos mencionar algumas propriedades interessantes de $Is(\mathbb{H}^2)$. Dada uma geodésica g do plano hiperbólico, definimos a transformação $\mu_g: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ que age do seguinte modo (figura 2): Dado um ponto $p \in \mathbb{H}^2$, considere a geodésica h passando por p e ortogonal a g , e chame de q o único ponto da intersecção de g com h . Tomamos então $\mu(p)$ como sendo o único ponto de h tal que:

$$i) d(p, q) = d(q, \mu(p))$$

ii) q está entre p e $\mu(p)$.

Algebricamente, temos que se $g = \{a + re^{i\theta} \mid 0 < \theta < \pi\}$, então que $\mu(z) = \frac{a\bar{z} - a^2 + r^2}{\bar{z} - a}$ e se constata imediatamente que os pontos fixos de μ_g

são exatamente os pontos de g . Pela semelhança com a reflexão euclidiana, chamamos tal isometria de **reflexão hiperbólica em torno da geodésica g** e pode-se demonstrar [Beardon-cap3,7] que as reflexões em geodésicas geram as isometrias de \mathbb{H}^2 . Na realidade, semelhantemente ao que ocorre no plano euclidiano [Eves-cap.5], pode-se provar que qualquer isometria do plano hiperbólico é produto (por composição) de no máximo três reflexões hiperbólicas. Gostaríamos ainda de mencionar, apenas a título de curiosidade, que a classificação das isometrias de \mathbb{H}^2 (em isometrias parabólicas, elípticas e hiperbólicas) é bastante bela e rica, podendo ser feita tanto em termos de pontos fixos, do tipo de feixe que formam as geodésicas cujas respectivas reflexões hiperbólicas geram a isometria g e também em termos da função $\text{traço}^2(g) = \frac{\text{tr}^2(A)}{\det(A)}$, onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é a matriz dos coeficientes de $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ (ou $g(z)$

$$= \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d} \Big),$$

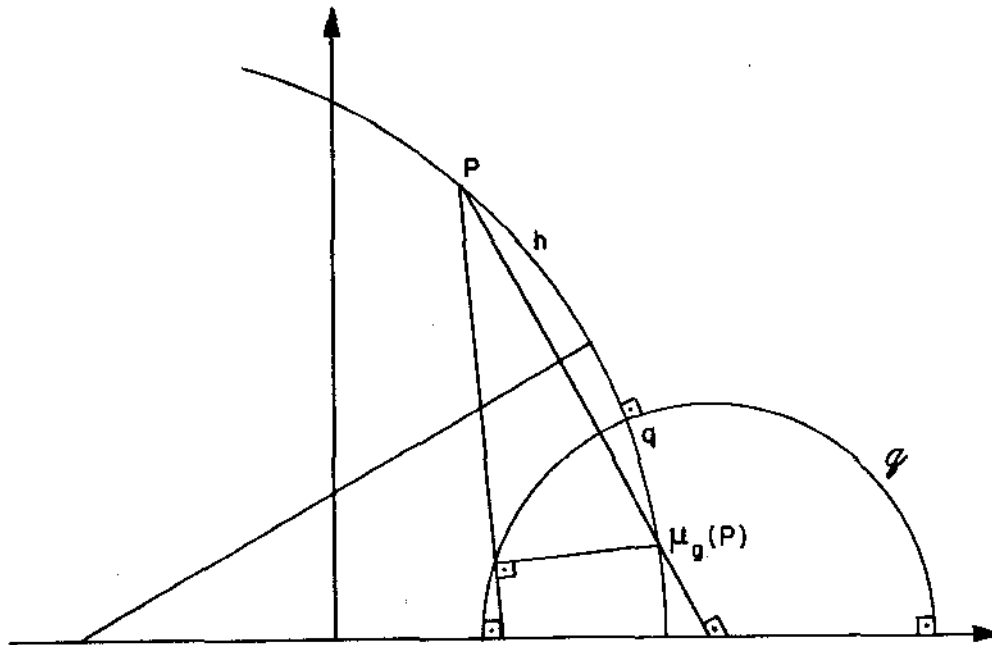


figura 2

Apenas o conhecimento dos grupos de isometrias $Is(S^2)$ e $IS(H^2)$ já nos permite construir uma série de curvas com curvatura geodésica constante, se considerarmos que isometrias preservam a curvatura geodésica. A verificação deste fato é feita explicitando-se as propriedades da conexão riemanniana (compatível com a métrica).

LEMA 1.3.1: Seja M^n variedade riemanniana, $\zeta: M \rightarrow M$ isometria e ∇ a conexão riemanniana de M . Então, ζ preserva a conexão, ou seja, dados $X, Y \in \chi(M)$; $p \in M$, temos que $d\zeta_p(\nabla_X Y) = \nabla_{d\zeta_p(X)} d\zeta_p(Y)$.

demonstração: Dado $p \in M$, seja $\varphi_p(t)$ o fluxo do campo X , ou seja, $\varphi_p(t)$ e curva diferenciável com $\varphi_p(0) = p$ e $\varphi_p'(0) = X_p$. Tomamos ainda $Z(t)$ campo unitário paralelo ao longo de $\varphi_p(t)$ e o estendemos a uma vizinhança suficientemente pequena de p . Sendo a conexão compatível com

a métrica, temos que

$$\frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle_M = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle_M + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt} \right\rangle_M = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle_M = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_M$$

$$\parallel$$

$$\frac{d}{dt} \langle d\zeta(Y), d\zeta(Z) \rangle_M = \left\langle \frac{D(d\zeta(Y))}{dt}, d\zeta(Z) \right\rangle_M = \langle \nabla_{d\zeta(X)} d\zeta(Y), d\zeta(Z) \rangle_M$$

Seendo $Z_{(p)}$ qualquer, podemos tomar $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ linearmente independentes e como ζ é difeomorfismo, teremos $\{d\zeta(Z_1), \dots, d\zeta(Z_n)\}$ também linearmente independentes, formando uma base de $T_{\zeta(p)}M$. Assim sendo, como todas as projeções de $\nabla_{d\zeta(X)} d\zeta_p(Y)$ coincidem com as projeções de $d\zeta_p(\nabla_X Y)$ e como p foi tomado arbitrariamente, temos que

$$\nabla_{d\zeta(X)} d\zeta(Y) = d\zeta(\nabla_X Y) \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO 1.3.2: Seja M variedade riemanniana, γ curva regular de classe C^2 em M e seja $\zeta \in Is(M)$ que mantém γ invariante, i.é., $\zeta(\{\gamma\}) \subseteq \{\gamma\}$. Então, $k_g(p) = k_g(\zeta(p))$ se ζ mantém a orientação de γ e $k_g(p) = -k_g(\zeta(p))$ se ζ inverte a orientação de γ .

demonstração: Como ζ preserva a conexão temos que pondo $p = \gamma(a)$

$$K_{\zeta(\gamma)}(\zeta(p)) = \nabla_{d\zeta_p(\gamma'(a))} d\zeta_p(\gamma'(a)) =$$

$$d\zeta_p(\nabla_{\gamma'(a)} \gamma'(a)) = d\zeta_p(K_\gamma(p))$$

Por outro lado, $d\zeta_p(n(a)) = \pm n(\zeta(a))$, dependendo do fato de ζ preservar ou inverter a orientação de γ . Como ζ é isometria temos que

$$k_g(p) = \langle K_\gamma(p), n(p) \rangle_M = \langle d\zeta_p(K_\gamma(p)), d\zeta_p(n(p)) \rangle_M =$$

$$\pm \langle K_\gamma(\zeta(p)), n(\zeta(p)) \rangle_M = k_g(\zeta(p)) \quad \blacksquare$$

Vamos agora enunciar um Teorema que é conhecido como **Teorema Fundamental das Curvas** o qual nos garantirá que, dados um ponto e uma

direção em uma variedade bi-dimensional e uma função real que não se anula, temos no máximo duas curvas por este ponto e nessa direção que tem esta função como curvatura geodésica com sinal.

TEOREMA 1.3.3: (I) Sejam $\gamma, \bar{\gamma}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{M}^n$ curvas parametrizadas pelo comprimento de arco, com funções curvatura k_1, \dots, k_{n-1} e $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_{n-1}$ respectivamente, que não se anulam em qualquer ponto do intervalo $[0, \ell]$, e sejam os referenciais ortonormais móveis v_1, \dots, v_n e $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ respectivamente. Suponha que $k_i = \bar{k}_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$ e que $\gamma(a) = \bar{\gamma}(a)$ e $v_i(a) = \bar{v}_i(a)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Então $\gamma = \bar{\gamma}$.

(II) Sejam \mathbb{M}^n variedade riemanianna completa, $k_1, \dots, k_{n-1}: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas estritamente positiva e v_1, \dots, v_n base ortonormal de $T_p \mathbb{M}$, onde p é um ponto qualquer de M . Então existe curva $\gamma: [0, \ell] \rightarrow M$ parametrizada pelo comprimento de arco com $\gamma(0) = p$, que tem k_1, \dots, k_{n-1} como funções curvatura e cujos referenciais moveis $v_1(s), \dots, v_n(s)$ satisfazem $v_i(0) = v_i$ para $i = 1, \dots, n$.

Este Teorema está demonstrado em [Spivak IV], e como consequência imediata temos que, numa variedade bi-dimensional completa, dado um ponto p , um vetor $v \in T_p \mathbb{M}$ e uma constante $k \neq 0$, existem duas e apenas duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco que passam por p na direção de v com curvatura geodésica constante $= k$.

I.3.1 Curvatura Geodésica Constante em \mathbb{H}^2

Começemos determinando uma família de curvas com curvatura geodésica constante (que mais adiante demonstraremos serem as únicas com tal propriedade), utilizando apenas o conhecimento das isometrias do plano hiperbólico e o corolário I.3.2.

Seja então γ a intersecção de uma circunferência euclidiana com \mathbb{H}^2 ou então a intersecção de uma reta euclidiana com \mathbb{H}^2 . e sejam p e q dois pontos distintos em γ (figura 3). Tomemos h a única geodésica minimizante ligando p à q , m o ponto médio entre p e q (que esta em h), g a única geodésica por m ortogonal à h e b um ponto de intersecção de g e γ (demonstra-se facilmente, via geometria analítica, a existência deste ponto). Pela própria construção temos que os pontos p e q são imagens recíprocas pela reflexão hiperbólica na geodésica g ($\mu_g(p) = q$, $\mu_g(q) = p$ e $\mu_g(b) = b$). Como μ é a restrição a \mathbb{H}^2 de uma inversão em \mathbb{R}^2 , μ_g fica bem determinada pela imagem de três pontos distintos. Além disso, como inversões (no plano euclidiano) levam círculos e retas em círculos ou retas, temos que $\mu_g(\gamma) = \gamma$ e pelo corolário I.2.1, como p e q foram tomados arbitrariamente, temos que γ possui curvatura geodésica constante. Para simplificar a notação, denotaremos ao conjunto de tais curvas por \mathcal{C} .

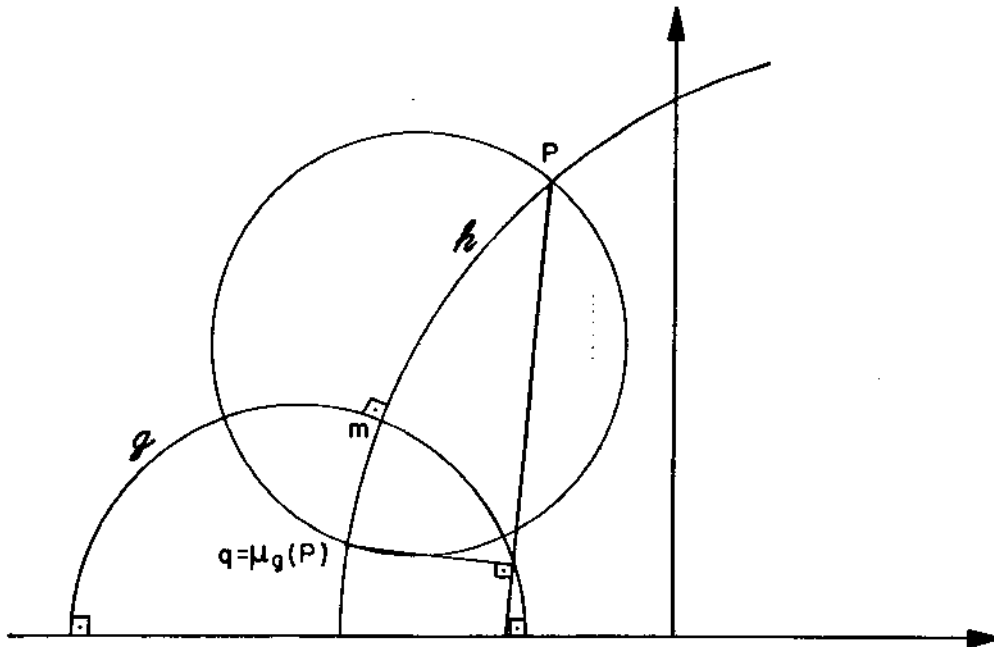


figura 3

Vamos agora calcular explicitamente a curvatura geodésica de tais curvas. Seja então $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2$ parametrização regular de uma reta euclidiana em \mathbb{H}^2 com $I=(0, \ell)$. Então,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &\equiv (b, d) \implies |\gamma'(t)| = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{H}}^{1/2} = \\ &= \left(\frac{b^2 + d^2}{(c + dt)^2} \right)^{1/2} = \frac{(b^2 + d^2)^{1/2}}{c + dt} \implies \\ s(t) &= \int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = (b^2 + d^2)^{1/2} \int_0^t \frac{d\tau}{c + d\tau} = \\ &= \frac{(b^2 + d^2)^{1/2}}{d} \left(\ln(c + d\tau) \right) \Big|_0^t = \frac{(b^2 + d^2)^{1/2}}{d} \ln(c + dt) \implies \\ c + dt &= ce^{sd/(b^2 + d^2)^{1/2}} \implies t = \frac{1}{d} \left(ce^{sd/(b^2 + d^2)^{1/2}} - c \right) \\ \text{Tomando } * &= \frac{d}{(b^2 + d^2)^{1/2}} \text{ temos que } \gamma(s) = \left(a + \frac{bc}{d} e^{s*}, ce^{s*} \right) \text{ é} \end{aligned}$$

uma reparametrização de γ pelo comprimento de arco e obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds}(s) &= \left(\frac{bc*}{d} e^{s*}, c*e^{s*} \right), \quad \frac{d^2\gamma}{ds^2}(s) = \left(\frac{bc*^2}{d} e^{s*}, c*^2 e^{s*} \right) e \\ \mathcal{K}_{\gamma}(s) &= \frac{D\gamma'}{ds}(s) = \sum_k \left(\frac{d^2\gamma_k}{ds^2} + \sum_{1, j} \Gamma_{1j}^k \frac{d\gamma_i}{ds} \frac{d\gamma_j}{ds} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Calcula-se diretamente da equação apresentada no primeiro parágrafo para os símbolos de Christoffel que

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{x_2}, \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{x_2}$$

e obtemos que, em termos de coordenadas

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\gamma(s) &= \left(\frac{1}{d}bc^{*2}e^{s^*} - \frac{2}{d}bc^{*2}e^{s^*}, c^{*2}e^{s^*} + \frac{1}{d^2}b^2c^{*2}e^{s^*} - c^{*2}e^{s^*} \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{d}bc^{*2}e^{s^*}, c^{*2}e^{s^*} + \frac{1}{d^2}b^2c^{*2}e^{s^*} - c^{*2}e^{s^*} \right) = \\ &= \frac{bc}{b^2 + d^2} e^{sd/(b^2 + d^2)^{1/2}} (-d, b) \implies \\ &\implies k_\gamma(s) = \langle \mathcal{K}_\gamma(s), n(s) \rangle_H = \\ &= \left\langle \frac{bc}{b^2 + d^2} e^{sd/(b^2 + d^2)^{1/2}} (-d, b), c^*e^{s^*} \left(-1, \frac{b}{d}\right) \right\rangle_H = \\ &= \frac{bdc^2}{(b^2 + d^2)^{3/2}} e^{2sd/(b^2 + d^2)^{1/2}} \langle (-d, b), \left(-1, \frac{b}{d}\right) \rangle_H = \\ &= \frac{b}{(b^2 + d^2)^{1/2}} \square \end{aligned}$$

Assim sendo vemos que segmentos de retas euclidianas contidas em \mathbb{H}^2 tem curvatura geodésica com sinal constante, sendo que o módulo desta é limitado superiormente por 1, $k_\gamma \equiv 1$ se e somente se γ for uma reta horizontal e o sinal depende exclusivamente da orientação dada à curva (figura 4). Como era de se esperar, a curvatura geodésica de retas euclidianas em \mathbb{H}^2 depende exclusivamente da inclinação destas, já que a imagem de uma semi-reta euclidiana pela reflexão sucessiva em duas geodésicas verticais é uma reta com a mesma inclinação.

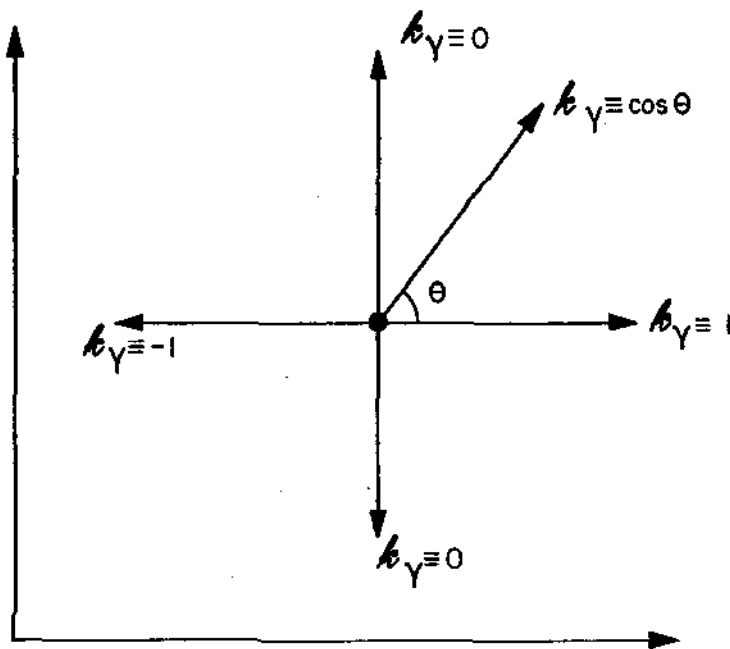


figura 4

Seja então agora $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2$, $r > 0$ uma
 $t \mapsto (b+r\cos t, a+r\sin t)$

parametrização regular de um pedaço de circunferência euclídeana em \mathbb{H}^2 , onde o intervalo I é tomado convenientemente, de modo a termos $a + r\sin t > 0$ (obviamente, se $a < 0$ devemos ter $r > -a$ para existir tal intervalo).

Tomamos

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{(-r\sin t, r\cos t)}{r/(a+r\sin t)}$$

e temos, pela definição do campo de curvatura geodésica e pelas propriedades de conexão que

$$\begin{aligned} K_\gamma(t) &= \nabla_{T(t)} T(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \nabla_{\gamma'(t)} T(t) = \\ &= \frac{1}{|\gamma'(t)|} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\gamma'(t)|} \right) \gamma'(t) + \frac{1}{|\gamma'(t)|} \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \right) \end{aligned}$$

Mas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\gamma'(t)|} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{a + r\sin t}{r} \right) = \cos t$$

e lembrando a expressão em coordenadas locais da conexão riemaniana, dada na introdução a este capítulo, temos que

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \left(-r\cos t + \frac{2r^2 \sin t \cos t}{a + r\sin t}, -r\sin t + \frac{r^2 \sin^2 t - r^2 \cos^2 t}{a + r\sin t} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r}{a+r\text{sent}} \left(r\text{sentcost} - acost, -a\text{sent} - r\cos^2 t \right) = \\
&= |\gamma'(t)| \left(r\text{sentcost} - acost, -a\text{sent} - r\cos^2 t \right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
K_{\gamma}(t) &= \nabla_{T(t)} T(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \left(\text{cost}\gamma'(t) + \frac{1}{|\gamma'(t)|} \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \right) = \\
&= - \frac{a}{|\gamma'(t)|} (\text{cost}, \text{sent}).
\end{aligned}$$

Sendo o vetor normal principal ao longo de γ , $n(t) = -r \frac{(\text{cost}, \text{sent})}{|\gamma'(t)|}$,

temos que (figura 5)

$$k_g(t) = \langle K_{\gamma}(t), n(t) \rangle_{\mathbb{H}} = \frac{1}{(a+r\text{sent})^2} \frac{ar}{r^2/(a+r\text{sent})^2} = \frac{a}{r} \square$$

Neste ponto devemos observar que se $a > r > 0$ podemos definir γ como uma curva fechada em um intervalo $[0, 2\pi]$, ou seja, se uma circunferência euclidiana está contida em \mathbb{H}^2 , sua curvatura é, em módulo, maior que 1. Além disso, temos que nestes casos γ pode ser vista também como lugar geométrico dos pontos equidistante de um determinado ponto.

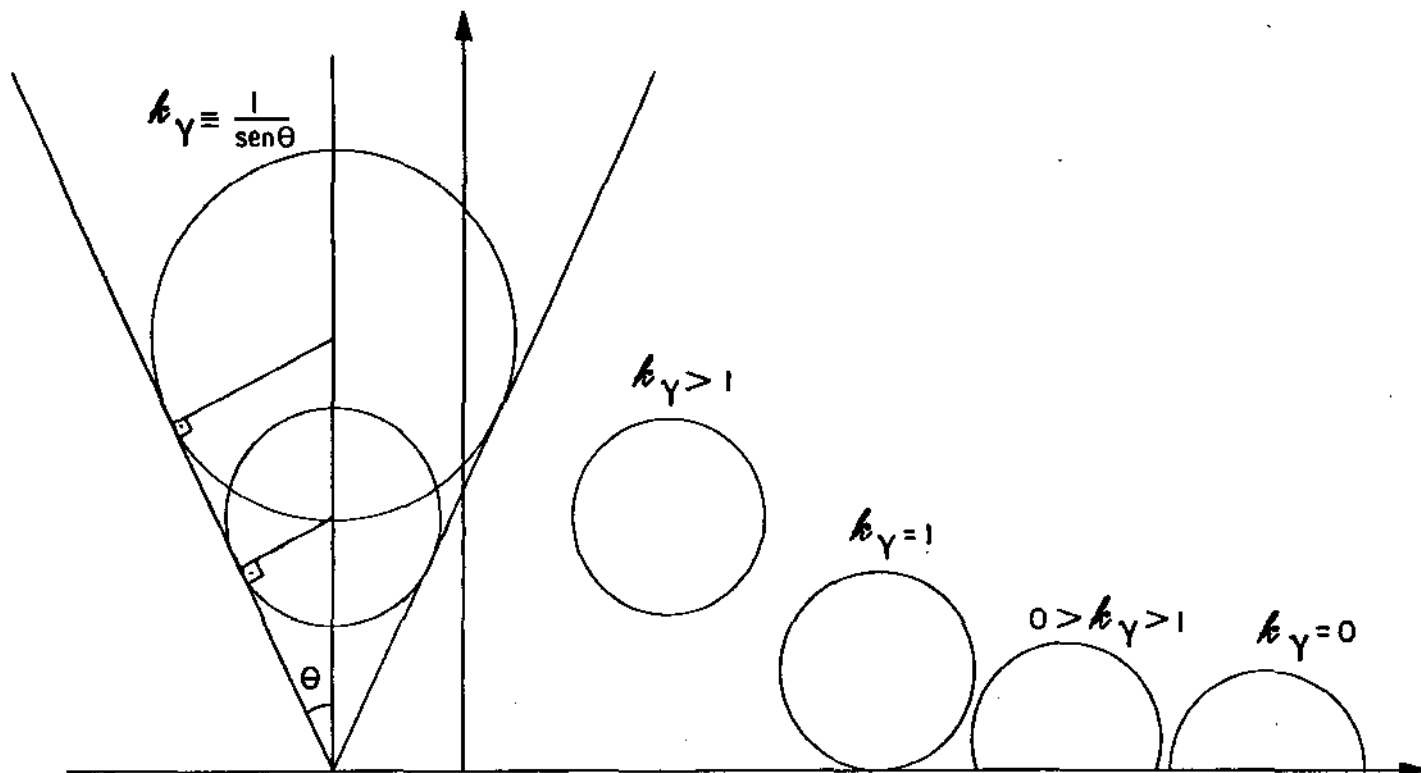


figura 5

Consideramos a geodésica γ ligando os pontos $p = \gamma(\pi/2) = (b, a+r)$ e $q = \gamma(3\pi/2) = (b, a-r)$ e considere a parametrização $\alpha: [0, 2r] \rightarrow \mathbb{H}^2$ e $t \mapsto (b, a-r+t)$

temos que o comprimento de arco de α é dado por

$$s(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{a-r+\tau} = \ln \left(\frac{a-r+t}{a-r} \right)$$

Tomando $t_0 = r - a + \sqrt{a^2 - r^2}$ temos que $\ln \left(\frac{a-r+t_0}{a-r} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{a+r}{a-r} \right) = \frac{1}{2} d(p, q)$ e afirmamos que $d(\gamma(t), \alpha(t_0)) \equiv \frac{1}{2} d(p, q)$, fato que pode ser verificado por simples substituição, considerando-se que em termo de variáveis complexas, $\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|}{2\text{Im}(z)\text{Im}(w)}$. No entanto, torna-se desnecessário fazermos contas se encontrarmos uma isometria de \mathbb{H}^2 que leva um ponto qualquer de γ em p mantendo $\sigma(t_0)$ invariante. De fato, tome h a geodésica minimizante entre um ponto arbitrário $\gamma(t)$ e p . Seja m seu ponto médio e g a geodésica por m normal a h e μ_g a reflexão hiperbólica em torno de g . Pela construção temos que $\mu_g(\gamma(t)) = p$ e como $\alpha(t_0)$ esta em g , este fica fixo por μ_g \square

Vamos agora provar que estas são as únicas curvas de \mathbb{H}^2 com curvatura geodésica constante. Dado um ponto $p = (p_1, p_2)$ no plano hiperbólico, um vetor $v = (\cos\theta, \sin\theta) \in T\mathbb{H}$ e uma constante estritamente positiva k . Se $k \neq \cos\theta$ tome $s = \frac{p_2}{k - \cos\theta}$ e considere β como sendo a intersecção com \mathbb{H}^2 da circunferência euclidiana de centro $p + s(-\sin\theta, \cos\theta)$ e raio euclidiano s . Tal curva passa por p tem vetor tangente em p múltiplo de v e como constatamos acima, sua curvatura geodésica é constante $= \frac{p_2 + s\cos\theta}{s} = \frac{p_2}{s} + \cos\theta = k$ (se k fosse igual a $\cos\theta$ tomaríamos $s = \frac{p_2}{k + \cos\theta}$ e como centro tomaríamos o ponto $p + s(\sin\theta, -\cos\theta)$ prosseguindo de modo análogo). Considere então a geodésica g tal que $g(0) = p$ e $g'(0) = v$ e realize a reflexão μ_g . Obtemos assim uma nova curva de curvatura constante igual a k , passando por p e com vetor tangente em p múltiplo de v (a curvatura mantém-se invariante pelo corolário I.3.2). O Teorema I.3.3 nos garante que estas são as únicas curvas de curvatura geodésica constante igual a k passando por p na direção dada por v . Mas como a reflexão hiperbólica leva circunferências e retas euclidianas em circunferências ou retas euclidianas, temos que a imagem de β por μ_g também estará em \mathbb{C} . Para sermos mais precisos, teremos que $\mu_g(\beta)$ será um segmento de reta euclidiano se $k \leq 1$ e será uma circunferência hiperbólica se $k > 1$. O caso em que $k < 0$ se resume a mudança de orientação das curvas. No caso em que $k = 0$ temos uma geodésica e esta é única (dados ponto e direção).

I.3.2 Curvatura Geodésica Constante em S^2

Passemos agora à S^2 e vamos mostrar que as curvas de curvatura constante da esfera são circunferências euclidianas do espaço contidas na esfera. Sabendo que todas as circunferências euclidianas de um determinado raio - fixado arbitrariamente - em S^2 podem ser identificadas pela ação de $O(3)$ restrita a S^2 , basta calcularmos a curvatura geodésica com sinal dos paralelos usuais, ou seja, tomando $\gamma(s) = \left(\text{sen}(a)\cos(s), \text{sen}(a)\text{sen}(s), \cos(a) \right)$ com $a \in (0, \pi)$ fixo onde $s = \frac{t}{\text{sen}(a)}$ é o comprimento de arco de γ . Como S^2 é mergulhada em \mathbb{R}^3 , tem-se que a derivada covariante do campo de vetores $\gamma'(t)$ na esfera nada mais é que a componente tangente da derivada dada pela conexão euclideana de \mathbb{R}^3 . Sendo γ uma circunferência no espaço de curvatura constante $= \frac{1}{\text{sen}(a)}$, a derivada usual de $\gamma'(t)$ é o campo de norma constante $= \frac{1}{\text{sen}(a)}$, normal a γ e contido no plano de γ , ou seja,

$$\gamma''(t) = \frac{1}{\text{sen}(a)} \left(-\cos\left(\frac{t}{\text{sen}(a)}\right), -\text{sen}\left(\frac{t}{\text{sen}(a)}\right), 0 \right)$$

e a curvatura geodésica de γ , que é o módulo de sua projeção em $T_{\gamma(t)}S$ é dada por

$$k_g(t) = \cos(a) \langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle^{1/2} = \frac{\cos(a)}{\text{sen}(a)} = \cotg(a).$$

Podemos constatar assim que os grandes círculos são geodésicas ($a = \pi/2$) e $k_g \rightarrow \pm\infty$ dependendo se $a \rightarrow 0$ ou $a \rightarrow \pi$ e da orientação de γ .

Para demonstrar a unicidade destas curvas, i.é., que estas são as únicas curvas da esfera de curvatura geodésica constante, nos reportaremos novamente ao Teorema I.3.3. Dado um ponto p na esfera, um vetor $v \in T_p S$ e uma constante k tomemos g a geodésica por p na direção

de v e γ como sendo a intersecção da esfera com um sub-espaço afim que contém v e forma um ângulo $\arccotang(k)$ com o vetor normal à S^2 em p . Pela forma de construção temos imediatamente que γ possui curvatura geodésica constante igual a k . Consideremos então o subespaço vetorial W que contém g e a reflexão euclidiana em torno deste plano. A reflexão em torno W é uma isometria de \mathbb{R}^3 que mantém a esfera invariante, sendo então a sua restrição uma isometria de S^2 . Logo a imagem de γ também será um paralelo e terá curvatura geodésica igual a de γ . Logo pelo Teorema 2.3 estas são as únicas curvas de curvatura geodésica constante igual a k , passando por p na direção de v . \square

I.3.3 Círculos Osculadores e Evolutas

Podemos definir abstratamente uma esfera em um espaço métrico como sendo o conjunto dos pontos que distam uma distância fixa de um determinado ponto. Se estivermos trabalhando em uma variedade riemanniana M tais esferas serão sub-variedades fechadas de co-dimensão 1, desde que estejam contidas em uma vizinhança normal. No caso específico em que M for bi-dimensional, teremos uma curva na variedade, ou seja, uma circunferência.

Vimos nos dois parágrafos anteriores que as circunferências no plano hiperbólico e na esfera tem curvatura geodésica constante. Este é um fato notável já que este foi demonstrado usando reflexões em geodésicas que mantém as circunferências invariantes permutando dois

pontos quaisquer das circunferências. Para sermos mais precisos, para cada circunferência C (em \mathbb{H}^2 ou em \mathbb{S}^2) encontramos um subgrupo do grupo de isometria da variedade, que é gerado por reflexões em geodésicas (as geodésicas passando pelo centro da circunferência), que mantém C invariante e age sobre esta transitivamente. Não conseguimos determinar se estas são ou não as únicas variedades bi-dimensionais cujas circunferências gozam desta propriedades. No entanto, a demonstração por este caminho é exclusiva destas duas, pois o fato das reflexões em geodésicas serem isometrias nos garante que a variedade é simétrica e em dimensão 2, a simetria implica em curvatura gaussiana constante. Assim sendo, não sabemos se a definição que daremos a seguir faz sentido em outras variedades mas, por via das dúvidas, daremos uma definição tão genérica quando possível.

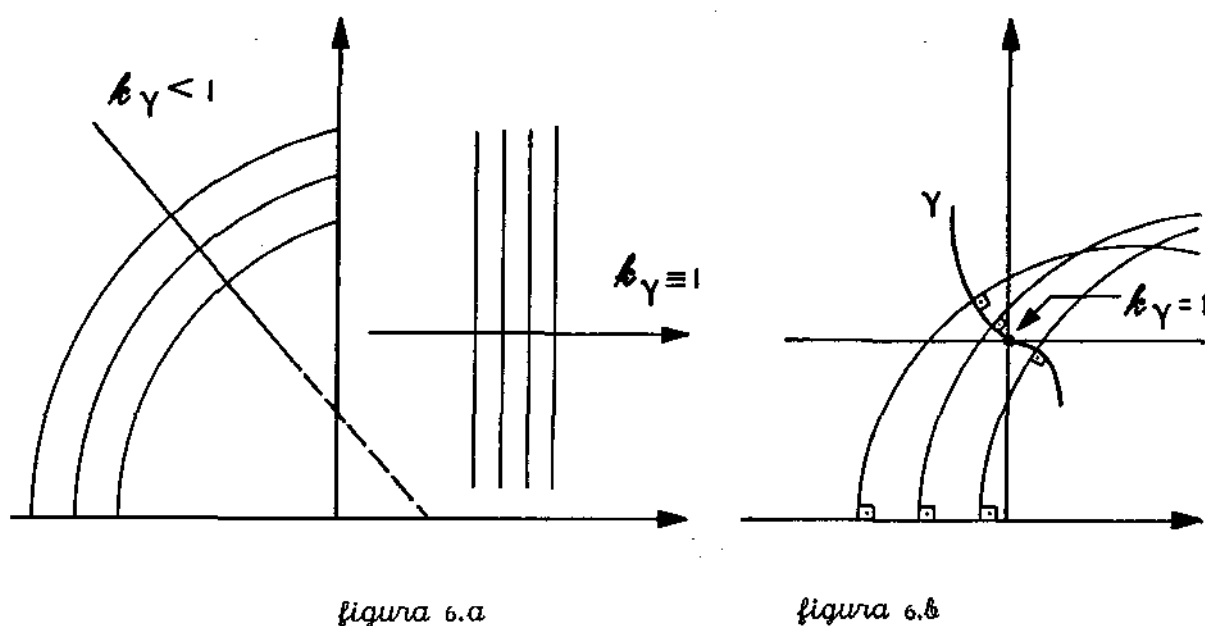
definição I.3.1: Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{M}^2$ curva de classe C^k , $k \geq 2$ seja $a \in I$ e C uma circunferência em \mathbb{M} . Diremos que C é um círculo osculador de γ no ponto $\gamma(a)$ se C satisfizer as seguintes condições:

- i) C for uma curva de classe ao menos C^2 .
- ii) C for tangente a $\{\gamma\}$ em $\gamma(a)$, com a mesma orientação.
- iii) A curvatura geodésica de C no ponto de tangência for a mesma que a de γ .

No caso particular da esfera, para todo ponto de uma curva C^2 existe um círculo que oscula a curva no ponto. Já no caso do plano hiperbólico, encontramos o círculo osculador apenas nos pontos da curva que tiverem curvatura geodésica estritamente maior do que 1 (figura 6).

Vamos mostrar agora, para o caso do plano hiperbólico, que se tomarmos a intersecção das geodésicas normais passando por dois pontos próximos de uma curva e tomarmos o limite desta intersecção quando estes

dois pontos tenderem para um único ponto, obtemos que este limite é o centro do círculo osculador da curva neste ponto. É possível demonstrar-se esta proposição também na esfera mas esta demonstração é bastante semelhante ao caso hiperbólico e por isso a omitiremos. Escolhemos demonstrar o caso hiperbólico, pois esta demonstração contribui para termos uma interpretação geométrica da inexistência de círculos osculadores em pontos de curvas com curvatura geodésica (em módulo) menor ou igual à 1.



PROPOSIÇÃO 1.3.1 : Seja $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^2$ curva de classe C^2 com curvatura geodésica estritamente maior do que 1 e seja g_t a única geodésica de \mathbb{H}^2 normal à γ no ponto $\gamma(t)$. Tomemos a aplicação $\lambda: (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^2$ tal que $\lambda(t) = \{g_t\} \cap \{g_0\}$.

Afirmamos que: i) $\exists 0 < \delta \leq \varepsilon$ tq λ está bem definida em $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$.

ii) λ é contínua em $(-\delta, 0)$ e em $(0, \delta)$.

iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda(t)$ e $\lim_{t \rightarrow 0^-} \lambda(t)$ existem e coincidem.

iv) A circunferência hiperbólica de centro no ponto

$q = \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda(t)$ e que passa por $\gamma(0)$ é a

circunferência osculadora de γ no ponto $p = \gamma(0)$.

demonstração: Apenas para facilitar a notação e sem perda de generalidade podemos supor que γ está parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano ($\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) \equiv 1$), $\gamma(0) = (0, a)$ e $\gamma'(0) = (1, 0)$. Assumindo estas suposições temos que $g_0(s) = (0, ae^s)$ é uma parametrização pelo comprimento de arco da geodésica normal à γ em $\gamma(0)$, ou seja, esta é uma geodésica vertical. A hipótese da curvatura de γ ser estritamente maior do que 1 nos garante a existência de δ tal que $\gamma'(t)$ não seja "horizontal" para $0 < |t| < \delta$ (um argumento mais rigoroso desta afirmação pode ser baseado no Lema II.2.1 que veremos mais adiante).

Como $\gamma_2'(t) \neq 0$ para $0 < |t| < \delta$, está bem definida a curva $g_t(s) = \left(\gamma_1(t) - \frac{\gamma_2(t)\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)}, 0 \right) + \frac{\gamma_2(t)}{|\gamma_2'(t)|} \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$ e por verificação direta constatamos que esta é a geodésica normal à γ em $\gamma(t)$. Impondo que a primeira coordenada de $g_t(s)$ se anule obtemos que

$$\lambda(t) = \{g_t\} \cap \{g_0\} = \left(0, (\gamma_2^2(t) - \gamma_1^2(t) + 2 \frac{\gamma_1(t)\gamma_2(t)\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)})^{1/2} \right)$$

e constatamos a veracidade de i) e ii).

Utilizando a Regra de L'Hôpital calcula-se o limite de $\lambda(t)$ a direita e a esquerda e verifica-se que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \lambda(t) = \left(0, \sqrt{\gamma_2^2(0) + 2 \frac{\gamma_2(0)}{\gamma_2''(0)}} \right)$$

e sendo $\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) \equiv 1$ e $\gamma_1'(0) = 1$ temos que $\gamma_2''(0)$ não pode ser zero, pois senão teríamos $\gamma'(0) = 0$ obtendo que a curvatura geodésica de

γ em $\gamma(0)$ seria = 0 e *iii)* está demonstrado. A afirmação *iv)* verifica-se a partir dos resultados apresentados no parágrafo I.3.1.■

CAPITULO 2

Neste capítulo daremos início ao estudo de conceitos globais relativos a curvas em uma variedade riemanniana. Estudaremos a curvatura geodésica total de uma curva e alguns conceitos relativos a convexidade. Antes disto, no parágrafo II.1, devemos recordar sem demonstrarmos, alguns resultados globais relativos a curvas em variedades. Novamente, remetemos a [Spivak] e [Berger] para os resultados mencionados neste parágrafo. No parágrafo II.2 daremos uma versão para variedades bi-dimensionais de um teorema válido em espaços euclidianos, que garante que uma sub-variedade compacta é bordo de uma região convexa se e somente se todo ponto possuir hiper-plano suporte. Além disto, mostraremos que uma curva com curvatura geodésica estritamente positiva é convexa.

II.1 CURVATURA TOTAL E CONVEXIDADE EM \mathbb{R}^2 - RESULTADOS BASICOS

Vamos começar este parágrafo definindo o índice de uma aplicação entre duas variedades. A fim de evitarmos discorrer sobre Cohomologia de de Rham, pois não faremos outro uso desta, definiremos índice da seguinte forma:

definição II.1.1: Sejam M e N duas variedades n -dimensionais compactas, conexas e orientadas. Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável tal que $f^{-1}(D)$ é compacto sempre que $D \subseteq N$ for compacto (tal aplicação é dita aplicação própria). Tomemos $q \in N$ valor regular de f e para cada $p \in \{f^{-1}(q)\}$ tomaremos o sinal de f em p , o qual denotaremos por $\text{sin}_p f$, como sendo 1 se df_p preservar a orientação de $T_p M$ e -1 se inverter esta orientação. Definimos então

$$\text{grau de } f = \text{grau}(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sin}_p f \quad (= 0 \text{ se } f^{-1}(q) = \emptyset),$$

onde q é valor regular da aplicação f . Pelo Teorema de Sard, existem valores regulares. Assim sendo, para que $\text{grau}(f)$ esteja bem definido, basta mostrarmos que a soma acima é finita e independe do valor regular escolhido. Mas sendo M compacta e q valor regular, existe vizinhança V de q tal que a restrição de f a $f^{-1}(V)$ é uma aplicação de recobrimento e assim sendo $f^{-1}(y)$ tem cardinalidade constante numa vizinhança de um valor regular q . Como M é compacto, tal recobrimento deve ser finito, implicando então na soma ser finita.. Por uma questão de diferenciabilidade o sinal de f deve ser constante em alguma vizinhança de cada ponto $p \in f^{-1}(q)$ e temos então bem definido o sinal da

aplicação.

Tendo definido o grau de uma aplicação diferenciável, podemos tomar a seguinte definição:

definição II.1.2: Seja $\gamma:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva fechada parametrizada pelo comprimento de arco de classe C^k , com $k \geq 1$ e consideremos a identificação canônica entre o plano e o espaço tangente em cada ponto. Chamamos de índice de γ , e denotamos por $\text{ind}\gamma$, o grau da aplicação $\gamma':[a,b] \rightarrow S^1$.

Definido o índice de uma curva fechada podemos enunciar o Teorema do Índice (Hopf Umlaufsatz)

TEOREMA II.1.1 (Hopf Umlaufsatz): O índice de uma curva fechada simples no plano é igual a ± 1 , dependendo da direção que percorremos a curva. Mais ainda, se γ for curva fechada, temos que $\text{ind}\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa_g(s) ds$, onde γ está parametrizada pelo comprimento de arco, com período L e κ_g é a curvatura com sinal de γ .

Vamos ainda recordar um dos mais belos teoremas de geometria diferenciável, o **Teorema de Gauss-Bonnet**, lembrando antes que se γ for uma curva regular por partes, parametrizada pelo comprimento de arco e t_0 for um ponto de descontinuidade de γ' , chamamos de ângulo de descontinuidade δ_0 de γ' ao ângulo orientado entre $\gamma'(t_0^-)$ e $\gamma'(t_0^+)$. Para sermos mais rigorosos, escolhemos um representante local de γ , tomamos a derivada a esquerda e a direita deste representante e voltamos a

$T_{\gamma'(t_0)}\mathbb{M}$ pela inversa da diferencial do sistema de coordenadas, obtendo $\gamma'(t_0^-)$ e $\gamma'(t_0^+)$ respectivamente.

TEOREMA II.1.2: Seja \mathbb{M}^2 uma variedade riemanniana orientada bi-dimensional, com curvatura gaussiana K . Sejam (U, ϕ) um sistema de coordenadas em \mathbb{M} , P polígono contido em U , γ uma parametrização pelo comprimento de arco da fronteira de P ($\partial P = \{\gamma\}$) e k_g a curvatura geodésica com sinal de γ . Sejam ainda $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ os vértices de P e δ_1 os ângulos de descontinuidade de γ em t_1 . Então

$$\int_P K dA + \int_{\partial P} k_g ds + \sum_{i=1}^n \delta_i = 2\pi$$

Podemos agora começar a tratar de alguns resultados globais em variedades bi-dimensionais.

II.2 CURVATURA TOTAL E CONVEXIDADE

Começaremos este parágrafo com a definição de curvatura geodésica total de uma curva e algumas observações as quais, apesar de serem simples são interessantes na medida em que realçam até que ponto vários conceitos da geometria diferencial plana são trivializados, tanto

pela estrutura vetorial de \mathbb{R}^2 como pelo fato da curvatura gaussiana deste ser nula.

definição II.2.1: Seja $\gamma:[a,b] \rightarrow \mathbb{M}^n$ curva regular de classe C^k , $k \geq 2$.

Chamamos de função curvatura geodésica total à função

$$k_T(t) = \int_a^t k_g(\tau) d\tau$$

e de curvatura geodésica total ao número $k_T(b) = \int_a^b k_g(\tau) d\tau$.

Como demonstramos no parágrafo I.2, se considerarmos a aplicação $P^{\gamma(a)} \circ \gamma':[a,b] \rightarrow T_{\gamma(a)}\mathbb{M}^2$ que a cada $t \in [a,b]$ associa o transporte paralelo do vetor tangente unitário $\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ ao longo de $\gamma([a,t])$ até o espaço tangente de \mathbb{M} em $\gamma(a)$, podemos encontrar uma função diferenciável $\theta_a:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$P^{\gamma(a)} \circ \gamma'(t) = \cos(\theta_a(t))\gamma'(a) + \sin(\theta_a(t))n(a) \quad (*)$$

e demonstramos (Teorema I.2.1) que $k_g(t) = \frac{d\theta_a}{dt}(t)$. Temos então, pelo Teorema Fundamental do Calculo que a curvatura geodésica total de uma curva $k_T(b) = \int_a^b k_g(t) dt = \int_a^b \frac{d\theta_a}{dt}(t) dt = \theta_a(b) - \theta_a(a)$ e, embora a escolha da função $\theta_a(t)$ não seja única, temos que $k_T(t)$ independe desta escolha, pois duas funções θ_a e θ'_a satisfazendo (*) diferem por um múltiplo inteiro de 2π .

No entanto, se \mathbb{M}^n não tiver curvatura gaussiana nula, a aplicação $P^{\gamma(a)} \circ \gamma':[a,b] \rightarrow T_{\gamma(a)}\mathbb{M}^n$ não é uma aplicação própria, pois, de modo geral $\lim_{t \rightarrow a} P^{\gamma(a)} \circ \gamma'(t) \neq \gamma'(a)$, e não podemos definir o seu grau, assim como não faz sentido definir o índice de uma curva fechada. De fato, se γ for uma curva fechada, fronteira de uma região P numa variedade riemaniana bi-dimensional qualquer, temos que, pelo Teorema de

Gauss-Bonnet,

$$\kappa_T(b) = \theta_a(b) - \theta_a(a) = 2\pi - \int_P K dA .$$

Particularmente, se $M = H^2$, temos $K \equiv -1$ e assim sendo

$$\kappa_T(b) = 2\pi - \int_P K dA = 2\pi + \text{área}(P) > 2\pi ,$$

e se $M = S^2$, temos $K \equiv 1$ e conseqüentemente,

$$\kappa_T(b) = 2\pi - \int_P K dA = 2\pi - \text{área}(P) < 2\pi ,$$

Vamos agora ver algumas definições relativas a convexidade em variedades e tentar, na medida do possível, relacioná-las à curvatura geodésica.

definição II.2.2: Seja M^n variedade riemanniana e $A \subseteq M$ subconjunto. Diremos que A é **geodesicamente convexo** (para abreviar diremos apenas convexo) se, dados $p, q \in A$ quaisquer, existir geodésica γ_{pq} ligando p a q , contida em A . Se, para dois pontos arbitrários em A existir geodésica minimizante ligando estes pontos, contida em A , diremos que A é **fortemente convexo**.

definição II.2.3: Seja γ curva fechada em uma variedade bi-dimensional. Diremos que γ é (fortemente) **convexa** se γ for bordo de uma região (fortemente) convexa.

Estas são as definições mais naturais possíveis de convexidade, adaptadas das respectivas definições feitas em \mathbb{R}^n (ou mais genericamente em espaços de Banach quaisquer). Observemos que a definição II.2.3 se adapta para variedades de dimensão arbitrárias se

substituímos "uma curva fechada γ " por "subvariedade compacta sem bordo de codimensão 1". Remetendo-nos ao Teorema de Hahn-Banach o qual nos garante que uma região de um espaço de Banach é convexa se e somente se cada ponto de sua fronteira possuir um hiperplano suporte, definiremos o que entendemos por geodésica suporte.

definição II.2.4: Seja M^2 variedade riemanniana, $A \subseteq M$ subconjunto, $p \in A$ e q_p geodésica por p . Diremos que q_p é geodésica suporte de A se A estiver contido no fecho de apenas uma componente conexa de $M \setminus \{q_p\}$. É imediata a constatação de que se A for uma curva regular fechada que desconecta M , então, dado $p \in A$, a única geodésica por p que se habilita a ser geodésica suporte é a geodésica tangente a A em p .

Naturalmente, a definição acima não nos acrescenta muito se M possuir geodésicas que não desconectam M . Assim sendo, no resto deste capítulo assumiremos que M é desconectada por qualquer geodésica (maximal). Estamos agora aptos a enunciar e demonstrar, uma versão riemanniana do Teorema de Hahn-Banach.

TEOREMA II.2.1: Seja M^2 variedade riemanniana completa, na qual existe apenas uma geodésica (maximal) ligando dois pontos quaisquer, e seja $\{\gamma\} \subset M$ curva fechada, simples, de classe C^k , $k \geq 1$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

i) $\{\gamma\}$ é convexa.

ii) Todo ponto de γ possui geodésica suporte.

demonstração: ($i \Rightarrow ii$) Supondo γ convexa, chamemos de A a região convexa da qual a curva é bordo e suponhamos $p = \gamma(0)$ ponto de γ que não admite

geodésica suporte. Tomemos $\{\gamma'(s), n(s)\}$ referencial móvel ortonormal ao longo de γ , com $n(s)$ apontando para \mathcal{A} . Como $n(s)$ aponta para \mathcal{A} , temos que $-n(s)$ aponta sempre para \mathcal{A}^c . Consideremos a aplicação

$$g: (-\pi/2, \pi/2) \times (0, +\infty) \longrightarrow M \quad \text{onde } g_t(0) = p \text{ e } g_t(s) \text{ é geodésica com}$$

$$(t, s) \longmapsto g_t(s)$$

$g_t'(0) = -n(0)\cos(t_0) + \gamma'(0)\sin(t_0)$. Como $-n(0)$ aponta para \mathcal{A}^c , temos que para t e s suficientemente pequenos, $g_t(s) \in \mathcal{A}^c$, pois g é obviamente contínua. Como estamos supondo que p não admite geodésica suporte, e como M é completa, $\exists q \in \{\gamma\} \cap \text{im}(g)$. Sendo γ compacta, existe

$$\alpha = \min \left\{ |t|; t \in (-\pi/2, \pi/2) \mid \{g_t\} \cap \{\gamma\} \right\}$$

e tomemos $t_0 = \pm \alpha$ que realiza tal mínimo. Tomemos então

$$s_0 = \min \left\{ s \in (0, +\infty) \mid g_{t_0}(s) \in \{\gamma\} \right\},$$

cuja existência podemos novamente garantir por uma questão de compacidade. Logo obtemos geodésica $g_{t_0}: [0, s_0] \longrightarrow M$, ligando dois pontos de γ e contida em \mathcal{A}^c , contradizendo a convexidade de γ .

(ii \Rightarrow i) Para cada $p \in \gamma$, consideremos g_p geodésica suporte de γ por p e chamemos de \mathcal{H}_p o fecho da componente conexa de $M \setminus \{g_p\}$ que contém γ e de \mathcal{A} a região limitada por γ , contida em \mathcal{H}_p . Obviamente $\mathcal{A} \subseteq \bigcap_{p \in \gamma} \mathcal{H}_p$ e, sendo a intersecção de convexos um conjunto convexo, $\bigcap_{p \in \gamma} \mathcal{H}_p$ é convexo. Resta-nos

então mostrar que $\bigcap_{p \in \gamma} \mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{A}$. Para isto consideremos $p \in \mathcal{A}^c$, $q \in \mathcal{A}$ e g_{pq} a geodésica ligando os dois pontos. Como os dois pontos estão em componentes conexas distintas de $M \setminus \{\gamma\}$, temos que existe um ponto $m \in g_{pq} \cap \{\gamma\}$. Por construção, $m, q \in \mathcal{H}_m$, mas o ponto p não pode estar em \mathcal{H}_p pois para que isto ocorresse, o segmento geodésico g_{mp} teria que interceptar a geodésica g_m em outro ponto, possibilidade que excluimos

por causa da hipótese que existe apenas uma geodésica ligando dois pontos. ■

Vamos encerrar este capítulo tentando relacionar a curvatura geodésica com sinal de uma curva com a convexidade desta. No plano euclidiano, podemos demonstrar que uma curva fechada simples é convexa se e somente se a curvatura geodésica com sinal desta não mudar de sinal. Tentamos determinar a validade deste resultado em outras variedades, mas estas tentativas falhavam ao admitirmos a possibilidade de a geodésica tangente não ser, nem ao menos localmente uma geodésica suporte. Neste caso, não conseguimos resolver o problema, nem encontramos na literatura disponível qualquer referência elucidativa. No entanto, assumindo que a curvatura geodésica seja estritamente positiva (ou então estritamente negativa se invertermos a orientação da curva), poderemos completar o resultado, com a restrição adicional de que a variedade seja conforme com \mathbb{R}^2 . Passemos então a definição de conformidade e ao lema que nos dará a chave da demonstração.

definição II.2.5: Um difeomorfismo $\phi: M^n \rightarrow N^n$ entre variedades riemannianas é dito **conforme** se existir uma aplicação contínua $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, estritamente positiva tal que, para todo $p \in M$, $X, Y \in \chi(M)$, tivermos

$$\langle X, Y \rangle_{(p)} = f(p) \langle d\phi(X), d\phi(Y) \rangle_{\phi(p)}$$

Duas variedades riemannianas são ditas **variedades conformes** se existir difeomorfismo conforme entre elas. Se para todo ponto $p \in M$ existir vizinhança V de p e difeomorfismo conforme $\phi: V \rightarrow \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, diremos que M

é localmente conforme a \mathbb{N} .

LEMA II.2.1: Seja M^2 variedade Riemanniana localmente conforme a \mathbb{R}^2 e sejam $\alpha, \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ curvas diferenciáveis parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que $\alpha(0) = \beta(0) = p$ e $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$. Consideremos V vizinhança de p , $\phi: V \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ difeomorfismo conforme, e $\bar{\alpha} = \phi \circ \alpha$, $\bar{\beta} = \phi \circ \beta$, representantes locais de α e β respectivamente, determinados por ϕ . Considere ainda $\bar{n}_\alpha(s)$ e $\bar{n}_\beta(s)$ vetores normais principais ao longo de $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ respectivamente. Diremos então que α está localmente à esquerda (estritamente à esquerda) de β se existir $\delta > 0$ tal que, para todo $s \in (-\delta, \delta)$ tivermos

$$\langle \bar{\beta}(s) - \bar{\alpha}(s), \bar{n}_\alpha(0) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \bar{\beta}(s) - \bar{\alpha}(s), \bar{n}_\beta(0) \rangle_{\mathbb{R}} \geq 0 \quad (> 0)$$

Nestas condições temos que:

i) $k_\beta(0) > k_\alpha(0) \implies \alpha$ está localmente à esquerda de β

ii) α está localmente estritamente à esquerda de $\beta \implies k_\alpha(0) \leq k_\beta(0)$

demonstração : Lembremos antes de tudo que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\alpha(0) &= \sum_{k=1}^2 \left[\bar{\alpha}_k''(0) + \left(\sum_{1, j=1}^2 \Gamma_{1j}^k(0) \bar{\alpha}'_1(0) \bar{\alpha}'_j(0) \right) \right] \\ \mathcal{K}_\beta(0) &= \sum_{k=1}^2 \left[\bar{\beta}_k''(0) + \left(\sum_{1, j=1}^2 \Gamma_{1j}^k(0) \bar{\beta}'_1(0) \bar{\beta}'_j(0) \right) \right] \end{aligned}$$

logo, $\mathcal{K}_\beta(0) - \mathcal{K}_\alpha(0) = \bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0)$ e é óbvio que (*)

$$\begin{aligned} k_\beta(0) - k_\alpha(0) > 0 &\iff k_\beta(0) - k_\alpha(0) = \langle \mathcal{K}_\beta(0) - \mathcal{K}_\alpha(0), \bar{n}(0) \rangle_M = \\ &= \langle \bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0), \bar{n}(0) \rangle_M = f(p) \langle \bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0), \bar{n}(0) \rangle_E > 0 \iff \end{aligned}$$

$$\iff \langle \bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0), \bar{n}(0) \rangle_E > 0 \quad (**)$$

pois sendo M localmente conforme com \mathbb{R}^2 , existe função $f: V' \subseteq V \rightarrow \mathbb{R}$

estritamente positiva tal que, para todo $X, Y \in \chi(M)$ temos

$$\langle X(p), Y(p) \rangle_M = \langle \bar{X}(\phi(p)), \bar{Y}(\phi(p)) \rangle_{\bar{M}} = f(p) \langle \bar{X}(\phi(p)), \bar{Y}(\phi(p)) \rangle_E$$

onde \bar{X} e \bar{Y} são os campos induzidos em U pelo difeomorfismo ϕ , assim como $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\bar{M}}$ é a métrica induzida em U por ϕ .

Observemos ainda que existe vizinhança de $\bar{p} = \phi(p)$, contida em U , na qual podemos expandir $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ em séries de Taylor, obtendo

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(s) - \bar{\alpha}(s) &= \bar{\beta}(0) - \bar{\alpha}(0) + \left(\bar{\beta}'(0) - \bar{\alpha}'(0) \right) s + \left(\bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0) \right) \frac{s^2}{2} + r_{\beta-\alpha}(s^2) = \\ &= \left(\bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0) \right) \frac{s^2}{2} + r_{\beta-\alpha}(s^2) \end{aligned} \quad (***)$$

Temos assim praticamente pronta a demonstração do Lema.

$$\begin{aligned} i) \ k_{\beta}(0) > k_{\alpha}(0) &\implies k_{\beta}(0) - k_{\alpha}(0) > 0 \implies (**) \ \langle \bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0), \bar{n}(0) \rangle_E = \\ &= (***) \ \langle \bar{\beta}(s) - \bar{\alpha}(s), \bar{n}(0) \rangle_E - \langle r_{\beta-\alpha}(s^2), \bar{n}(s) \rangle_E > 0 \end{aligned}$$

logo,

$$\langle \bar{\beta}(s) - \bar{\alpha}(s), \bar{n}(0) \rangle_E \geq 0$$

ou seja, α está localmente a esquerda de β .

ii) α está localmente estritamente à esquerda de β quer dizer, por definição que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\beta}(s) - \bar{\alpha}(s), \bar{n}(0) \rangle_E &\implies \langle \bar{\beta}(s) - \bar{\alpha}(s), \bar{n}(0) \rangle_E - \langle r_{\beta-\alpha}(s^2), \bar{n}(s) \rangle_E = \\ &= (***) \ \langle \bar{\beta}''(0) - \bar{\alpha}''(0), \bar{n}(0) \rangle_E \geq 0 \implies \\ &\implies (**) \ k_{\beta}(0) - k_{\alpha}(0) \geq 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

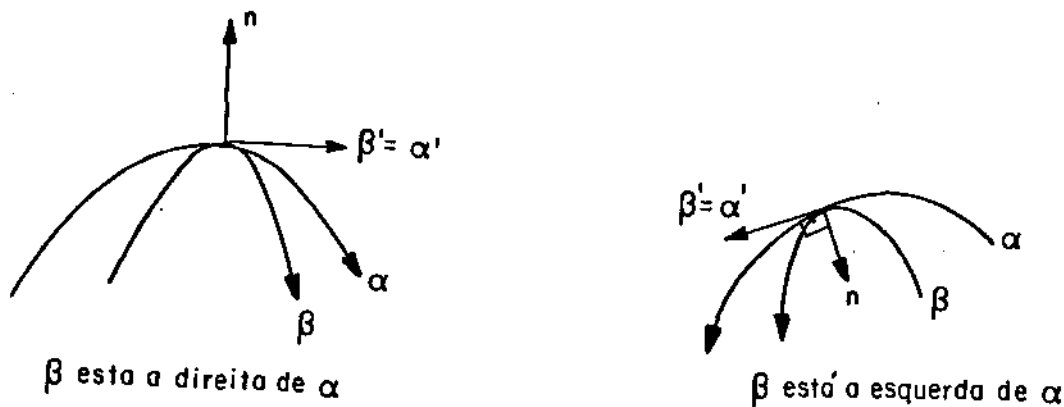


figura 7

Antes de seguirmos adiante, gostaríamos de mencionar que, embora não tenhamos conseguido demonstrar, acreditamos que o resultado deste lema possa ser mais forte do que o enunciado, obtendo que:

- i) $\kappa_\beta(0) > \kappa_\alpha(0) \implies \alpha$ está localmente estritamente à esquerda de β
- ii) α está localmente à esquerda de $\beta \implies \kappa_\alpha(0) \leq \kappa_\beta(0)$

Vamos utilizar o lema anterior para obter, no caso especial do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , o seguinte teorema:

TEOREMA II.2.2: Seja $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{H}^2$ curva fechada simples, de período L , parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura geodésica com sinal estritamente positiva (ou estritamente negativa). Então, γ é convexa.

demonstração: Suponhamos por absurdo que exista $a \in I$ tal que $p = \gamma(a)$ não possua geodésica suporte. Sem perda de generalidade podemos supor que $\gamma(a) = (0, 1)$ e $\gamma'(a) = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Seja g_p a geodésica tangente à γ em p . Pelo Lema acima, temos que g_p está localmente a esquerda de γ , e mais ainda, γ não pode coincidir com g_p numa vizinhança de p pois esta

possibilidade contradiz a hipótese de γ ter curvatura geodésica estritamente positiva. Como g_p não é geodésica suporte de γ , e esta é contínua, $\{\gamma\} \cap \{g_p\} \neq \{p\}$. Vamos agora supor que $\{\gamma\} \cap \{g_p\}$ seja um conjunto finito e mais tarde trataremos da possibilidade de $\{\gamma\} \cap \{g_p\}$ ser infinito. Tomemos $t_1 = \max \{t \in [0, a] \mid \gamma(t) \in \{g_p\}\}$ e $t_2 = \min \{t \in (a, L] \mid \gamma(t) \in \{g_p\}\}$. Temos então dois arcos de curvas em γ que interceptam $\{g_p\}$ apenas em seus pontos extremos, a saber, $\gamma_1 = \gamma \Big|_{[t_1, a]}$ e $\gamma_2 = \gamma \Big|_{[a, t_2]}$.

Vamos agora provar que ao menos um destes dois arcos deve possuir algum ponto com curvatura geodésica menor ou igual a zero. Sendo g_p uma geodésica vertical, $\gamma(t_1)$ um ponto desta e sendo γ curva simples, temos que $\gamma(t_1)$ é da forma $(0, \tau_1)$, com $(0, \tau_1)$, $(0, \tau_2)$ e $(0, 1)$ pontos distintos. Afirmamos agora que $\tau_1 < 1$ ou $\tau_2 > 1$. De fato, se $\tau_1 > 1$ temos que $\{\gamma_1\}$ junto com o segmento geodésico ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(t_1)$ formam uma curva fechada simples (curva de Jordan) e para ε suficientemente pequeno $\gamma(a+\varepsilon)$ mora na componente limitada determinada por esta curva. Assim sendo pela simplicidade de γ , temos que $\gamma(t_2)$ deve morar no segmento geodésico ligando $\gamma(a)$ e $\gamma(t_1)$ e esta provada a afirmação acima, pois usamos raciocínio totalmente análogo para o caso de termos $\tau_2 < 1$ (figura 8). Vamos então supor, apenas para facilitar a notação que $\tau_1 < 1$.

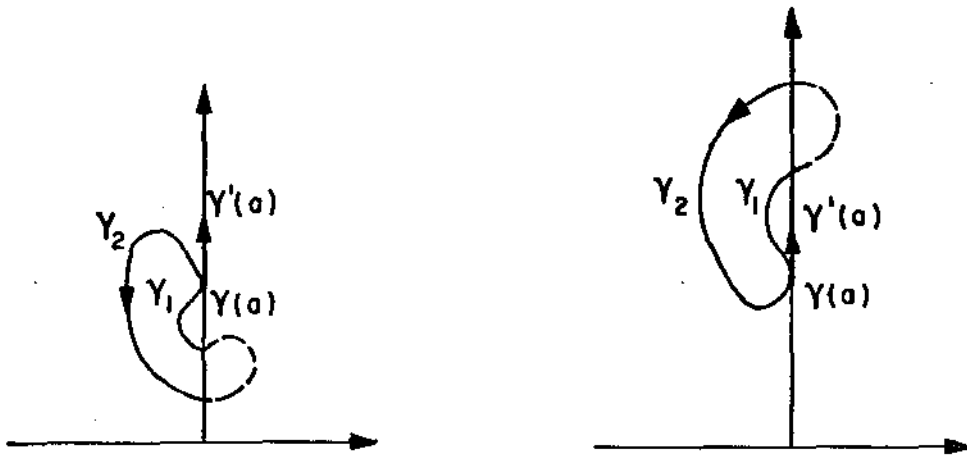


figura 8

Chamemos então de q um ponto do arco $\{\gamma_1\}$ que maximize localmente (na métrica hiperbólica) a distância entre a geodésica g_p e $\{\gamma_1\}$ e consideremos g_q a geodésica por q tangente a γ (figura 9). Temos então que, numa vizinhança do ponto q , γ está estritamente à direita de g_q . Mas isto, pelo Lema II.2.1 implicaria em a curvatura geodésica com sinal de γ ser menor ou igual a zero em q , contradizendo a hipótese de γ ter curvatura estritamente positiva.

Se considerarmos a possibilidade de termos $\tau_2 > 1$ procedemos de modo inteiramente análogo e temos então demonstrado o teorema. ■

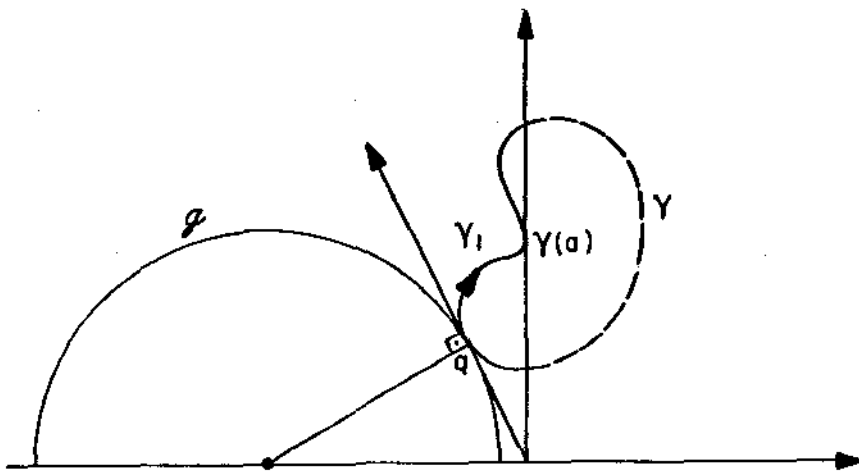


figura 9

Para encerrar a demonstração do teorema devemos analisar quais as possibilidades que podem ocorrer se $\{\gamma\} \cap \{g_p\}$ for infinito. O problema que pode surgir é o de termos

$$\sup\left\{t \in [0,a] \mid \gamma(t) \in \{g_p\}\right\} = a \text{ ou } \inf\left\{t \in (a,L] \mid \gamma(t) \in \{g_p\}\right\} = a,$$

ou seja, se a for ponto de acumulação de $\{\gamma\} \cap \{g_p\}$. Excluimos a possibilidade de $\{\gamma\} \cap \{g_p\}$ conter uma vizinhança de p em $\{\gamma\}$ pois esta possibilidade implicaria na existência de um arco de $\{\gamma\}$ com curvatura geodésica nula. Como $\{\gamma\}$ e $\{g_p\}$ são fechados, temos que a intersecção destes dois conjuntos também deve ser, logo numa vizinhança fechada de p em $\{g_p\}$, temos que $\{\gamma\} \cap \{g_p\}$ não pode ser denso, pois se isto ocorresse teríamos $\{\gamma\}$ coincidindo com $\{g_p\}$ ao longo de um arco. Assim sendo, mesmo que p seja ponto de acumulação de $\{\gamma\} \cap \{g_p\}$, podemos tomar vizinhança V de p em $\{\gamma\}$ na qual γ esteja à esquerda de g_p e esta vizinhança conterà pontos isolados da intersecção. Como em V γ está à esquerda de g_p temos que estes pontos são pontos de tangencia das duas curvas e relativo a estes pontos isolados existem

$$t_1 = \max\left\{t \in [0,a] \mid \gamma(t) \in \{g_p\}\right\} \text{ e } t_2 = \min\left\{t \in (a,L] \mid \gamma(t) \in \{g_p\}\right\}.$$

e damos continuidade a demonstração sem outros problemas.

Observemos também que se, na demonstração do Teorema, ao invés de tomarmos o ponto q no arco γ_1 como maximizando a distância hiperbólica à geodésica g_p tomássemos q' ponto que maximizasse a distância euclidiana a esta geodésica, poderíamos mostrar, de modo inteiramente análogo que a curvatura de γ em q' é menor ou igual a zero. Assim sendo, teríamos que o arco de γ ligando q e q' seria um arco

geodésico ou possuiria pontos com curvatura geodésica estritamente negativa.

Para encerrar o capítulo, gostaríamos de observar que na realidade, o Teorema II.2.2. vale em qualquer variedade que satisfaça também as condições do Teorema II.2.1; pois a única propriedade específica do plano hiperbólico que utilizamos foi o fato de existir um único arco geodésico ligando dois pontos distintos .

CAPITULO 3

Este capítulo será dedicado ao Teorema dos Quatro Vértices, o qual garante que a função curvatura de uma curva fechada simples no plano euclidiano possui ao menos quatro pontos críticos de extremo (dois de máximo local e dois de mínimo local), os quais chamamos de vértices da curva.

No parágrafo III.1 faremos um breve apanhado histórico relativo ao Teorema dos Quatro Vértices. Esta revisão histórica não tem a pretensão de ser completa, mas acreditamos que abranja os principais resultados relativos a vértices de curvas planas, percorrendo praticamente todo este século. Existem vários trabalhos tratando de versões do Teorema do Quatro-Vértices para curvas no espaço, como o que afirma que curvas fechadas simples que estão no bordo de uma superfície convexa tem quatro pontos de torção nula [Costa], assim como vários trabalhos caracterizando vértices de curvaturas de ordem mais alta. No entanto, estes resultados extrapolam os limites do nosso trabalho e assim sendo não serão mencionados na revisão que nos propomos.

No parágrafo III.2, nos concentramos na demonstração do Teorema dos Quatro Vértices no plano hiperbólico. A primeira demonstração que fizemos segue como corolário de um Lema que provamos, o qual relaciona os vértices hiperbólicos e euclidianos de uma curva em H^2 e da versão euclidiana do Teorema. A segunda demonstração é uma adaptação da prova feita por Osserman para o Teorema dos Quatro-ou-mais

Vértices.

No parágrafo III.3 demonstraremos o Teorema dos quatro Vértices na esfera. Para fazê-lo, necessitaremos de alguns resultados já conhecidos sobre curvas esféricas.

III.1 BREVE HISTORIA DO TEOREMA DOS QUATRO VERTICES

A primeira versão deste Teorema foi feita em 1909 por [Mukhopadhyaya] para o caso da curva ser convexa - uma oval na terminologia da época. Desde então, vários trabalhos foram escritos sobre o assunto, enfraquecendo as hipóteses do Teorema, caracterizando os vértices, caracterizando as curvas com apenas quatro vértices e fornecendo novas demonstrações para o Teorema.

Em 1912, [Kneser] generaliza o Teorema para curvas fechadas simples, não necessariamente convexas. Na demonstração do teorema, vem embutida uma caracterização de vértice, como sendo os pontos de uma curva nos quais a curva e o círculo osculador não se interceptam, no sentido apresentado no Lema II.2.1. Para sermos mais precisos, temos que os pontos de máximo da curvatura são precisamente os pontos em que a curva esta à esquerda do círculo osculador e os de mínimo são os pontos em que a curva se encontra à direita de seu círculo osculador. A demonstração de Kneser é feita provando que, ao tomarmos a anti-projeção estereográfica, levamos de forma biunívoca os pontos de vértice em pontos de inflexão e então ele utiliza um resultado de Möebius que

garante a existência de ao menos três destes pontos. Como os vértices de máximo e mínimo de uma curva fechada devem aparecer aos pares (pois a curvatura de uma curva fechada é uma função periódica), na realidade existem ao menos quatro destes pontos. É interessante observar que esta demonstração foi feita ainda sob uma forte influência da geometria projetiva, sendo o círculo osculador caracterizado como o "círculo por três pontos consecutivos" e pontos de inflexão são pontos nos quais o círculo osculador "passa por quatro pontos consecutivos da curva" e assim por diante.

A demonstração mais conhecida do caso convexo é fruto do trabalho de [Herglotz] que apareceu, conforme nos informa [Chern] em um trabalho de 1933. Reproduziremos em linhas gerais esta demonstração.

Considerando a convexidade da curva γ , podemos supor $\gamma_2'(s) < 0$ para $0 < s < s_0$ e $\gamma_2'(s) > 0$ para $s_0 < s < L$, onde s é o comprimento de arco da curva e supomos a curvatura de γ monótona em $(0, s_0)$ e em (s_0, L) , ou seja, supondo que 0 e s_0 são os únicos vértices da curva. A partir das formulas de Frenet obtemos que $\gamma_1''(s) = -k(s)\gamma_2'(s)$ e $\gamma_2''(s) = k(s)\gamma_1'(s)$. Integrando a primeira equação obtemos que

$$\int_0^L k(s)\gamma_2'(s)ds = \int_0^{s_0} k(s)\gamma_2'(s)ds + \int_{s_0}^L k(s)\gamma_2'(s)ds = -\gamma_1'(s) \Big|_0^L = 0$$

Como estamos supondo $k(s)$ monótona nos dois intervalos $\exists \xi_1$ e ξ_2 tais que

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} k(s)\gamma_2'(s)ds &= k(0) \int_0^{\xi_1} \gamma_2'(s)ds + k(s_0) \int_{\xi_1}^{s_0} \gamma_2'(s)ds = \\ &= \gamma_2(\xi_1)(k(0) - k(s_0)) \quad , \text{ e} \end{aligned}$$

$$\int_{s_0}^L k(s)\gamma_2'(s)ds = k(s_0)\int_{s_0}^{\xi_2}\gamma_2'(s)ds + k(s_0)\int_{\xi_2}^L \gamma_2'(s)ds =$$

$$= \gamma_2(\xi_2)(k(s_0)-k(0))$$

Obtemos assim uma contradição pois pela equação (*) e pelas equações acima obtemos que $(\gamma_2(\xi_1) - \gamma_2(\xi_2))(k(0) - k(s_0)) = 0$ o que é um absurdo se levarmos em consideração que $\gamma_2(\xi_1) - \gamma_2(\xi_2) < 0$ e $k(0) - k(s_0) > 0$.

Em 1936, [Graunstein,1] faz uma distinção entre vértices primários, que são pontos de máximo (mínimo) em que a curvatura é maior (menor) que a "curvatura média" (curvatura total/comprimento da curva) e vértices secundários, que são vértices que não satisfazem estas condições. Feita esta distinção, Graunstein demonstra que uma curva convexa possui ao menos quatro vértices primários e que o número de vértices primários excede em ao menos quatro o número de vértices secundários.

Em 1937, Graunstein volta a tratar desta questão [Graunstein2], e faz uma nova prova do Teorema dos Quatro Vértices, desta vez para curvas não necessariamente convexas. Na realidade, ele trata os dois casos - o convexo e o não convexo - em separado e demonstra que uma curva fechada simples, não convexa, deve ter ao menos três pontos de inflexão (pontos de mudança de sinal da curvatura) e como entre cada dois pontos de inflexão temos um vértice, a curva deve ter no mínimo quatro vértices (pela paridade entre vértices de mínimo e de máximo).

Além disto Graunstein define um arco de curva pq como sendo do tipo Ω se este for uma curva simples ligando os pontos p e q, de

curvatura não negativa, tal que as retas tangentes em p e q coincidem e é reta suporte da curva (na realidade as curvas γ_1 definidas na demonstração do Teorema II.2.2 são curvas do tipo Ω). Definidos este tipo de arco, ele demonstra que uma curva fechada de índice 1, contendo um arco do tipo Ω possui pelo menos quatro vértices.

Estimulado pela extensão do Teorema feita por Graunstein, [Jackson] publica um trabalho em 1944 no qual caracteriza as curvas com apenas dois vértices, provando por exclusão o Teorema dos Quatro Vértices. Jackson demonstra que uma curva contendo exatamente dois vértices pode ser dividida em dois arcos simples, cada um contendo um dos vértices.

Tratando de curvas com exatamente quatro vértices ele demonstra que os círculos osculadores nos vértices da curva interceptam a curva apenas nos respectivos vértices. Mais ainda, uma curva fechada simples que intercepta retas e circunferências em no máximo quatro pontos, tem exatamente quatro vértices.

Além disso, Jackson fornece uma condição suficiente para que uma curva fechada simples contenha ao menos $2n$ vértices: Que exista circunferência interceptando a curva, tal que a intersecção destas determine ao menos $2n-1$ arcos cujas extremidades estejam na mesma ordem cíclica tanto na curva como na circunferência.

Em 1971, [Gluck] demonstra uma espécie de recíproca do Teorema: Se k for uma função real periódica, estritamente positiva que seja constante ou possua ao menos dois máximos e dois mínimos, então existe curva fechada simples que tem k como função curvatura (e sendo k

estritamente positiva, tal curva será convexa).

Chegamos enfim ao trabalho de [Osserman], publicado em 1985, no qual apresenta uma nova demonstração para o teorema, demonstração que, segundo o próprio autor tem as vantagens de ser, bastante intuitiva do ponto de vista geométrico, de funcionar não apenas para curvas convexas e de oferecer imediatamente uma caracterização das curvas com apenas quatro vértices. Não vamos entrar agora nos detalhes desta demonstração pois a demonstração que faremos no plano hiperbólico é uma adaptação da demonstração de Osserman.

III.2 TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES NO PLANO HIPERBÓLICO

A parte central deste parágrafo é a demonstração que fazemos do Teorema dos Quatro-ou-mais Vértices em \mathbb{H}^2 , seguindo os passos da demonstração feita por Osserman para o caso euclidiano. Ao fazermos esta demonstração, provaremos os três lemas que encaminham a prova de Osserman mas não foram demonstrados em seu artigo.

No entanto, começaremos este parágrafo com uma demonstração quase elementar que fizemos do Teorema dos Quatro Vértices para o caso hiperbólico. Na bibliografia comentada que Spivak nos oferece ao final

do último volume de seu livro, ele menciona uma demonstração deste resultado, comunicada verbalmente por A. Weinstein, que teria sido feita mostrando-se que a partir da correspondência entre vértices de uma curva em \mathbb{H}^2 e cúspides de sua evoluta. Cabe ressaltar que esta foi a única referência sobre a possível validade do Teorema dos quatro Vértices para o plano hiperbólico que encontramos em toda a literatura consultada.

Como não encontramos referência posterior a esta menção, começamos a explorar este caminho por conta própria. O tratamento de curvas em \mathbb{H}^2 via a evoluta, só faz sentido - como vimos em I.2 - se a curva em questão tiver curvatura geodésica maior do que 1. Assim sendo, este tipo de argumento já começa impondo uma restrição bastante significativa ao universo das curvas fechadas simples que ele pode abranger. A partir do estudo que fizemos inicialmente da evoluta de uma curva γ em \mathbb{H}^2 , chegamos a uma relação direta entre a curvatura geodésica e curvatura euclidiana (considerando-se \mathbb{H}^2 apenas como um sub-conjunto aberto de \mathbb{R}^2 , podemos considerar γ como sendo uma curva no plano euclidiano, e assim faz sentido falarmos da curvatura euclidiana desta) de γ . Esta relação nos permitiu realizarmos uma demonstração do Teorema para o plano hiperbólico, sem impormos restrições a curvatura geodésica da curva.

Para estabelecermos esta relação entre curvatura geodésica e curvatura euclidiana, vamos inicialmente determinar a expressão, em termos de coordenadas, da curvatura geodésica com sinal de uma curva no plano hiperbólico.

Lembrando as expressões da derivada covariante em termos de coordenadas locais (I.0) e dos símbolos de Christoffel do plano hiperbólico (I.2),

temos que, se $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2$ for curva regular de classe C^2 , então

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \left(\gamma_1''(t) - 2 \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)}, \gamma_2''(t) + \frac{\gamma_1'^2(t)}{\gamma_2(t)} - \frac{\gamma_2'^2(t)}{\gamma_2(t)} \right),$$

considerando que (I.2.1)

$$\mathcal{K}_\gamma(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\gamma'(t)|} \right) \gamma'(t) + \frac{1}{|\gamma'(t)|} \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \right)$$

e sendo o vetor normal principal $n(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))$ temos que a curvatura geodésica com sinal de γ é dada por

$$\begin{aligned} k_g(t) &= \langle \mathcal{K}_\gamma(t), n(t) \rangle_{\mathbb{H}} = \\ &= \frac{1}{|\gamma'(t)|} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{|\gamma'(t)|} \right) \langle \gamma'(t), n(t) \rangle_{\mathbb{H}} + \frac{1}{|\gamma'(t)|} \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), n(t) \rangle_{\mathbb{H}} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{|\gamma'(t)|} \right)^2 \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), n(t) \rangle_{\mathbb{H}} = \\ &= \left(\frac{1}{|\gamma'(t)|} \right)^3 \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle_{\mathbb{H}} \quad (*) \end{aligned}$$

Passemos então à demonstração de um Lema que nos auxiliará na demonstração da primeira versão do Teorema dos Quatro Vértices para o plano hiperbólico.

LEMA III.2.1 (Relação entre curvatura geodésica e curvatura euclidiana):

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2$ curva regular de classe C^k ($k \geq 2$), parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano. Seja $k_g(t)$ a curvatura geodésica de γ e $k_E(t)$ a curvatura euclidiana de γ . Então, $k_g(t) = \gamma_2(t)k_E(t) + \gamma_1'(t)$.

demonstração: Sendo γ uma parametrização pelo comprimento de arco euclidiano, ou seja, com $\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) \equiv 1$, temos que

$$\frac{1}{|\gamma'(t)|} = \gamma_2(t),$$

onde $|\gamma'(t)| = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\mathbb{H}}^{1/2}$ e obtemos que

$$\begin{aligned}
k_g(t) &= \left(\frac{1}{|\gamma'(t)|}\right)^3 \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle_H = \\
&= (\gamma_2'(t))^3 \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle_H = \\
&= \gamma_2'(t) \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle_E = \\
&= \gamma_2'(t) \left(-\gamma_1''(t) \gamma_2'(t) + \gamma_2''(t) \gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(t)} (\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)) \right) = \\
&= \gamma_2'(t) \left(\gamma_1'(t) \gamma_2''(t) - \gamma_1''(t) \gamma_2'(t) \right) + \gamma_1'(t)
\end{aligned}$$

Mas sendo t comprimento de arco euclidiano, temos que

$$\gamma_1'(t) \gamma_2''(t) - \gamma_1''(t) \gamma_2'(t) = \langle \gamma''(t), (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle_E$$

que é, por definição, a curvatura com sinal de γ se esta for considerada como uma curva no plano euclidiano [Carmo2, pag.16]. Denotaremos a curvatura euclidiana de γ por $k_E(t)$ e temos que

$$k_g(t) = \gamma_2'(t) k_E(t) + \gamma_1'(t). \quad \blacksquare$$

Gostaríamos apenas de observar que a relação acima vale apenas no caso de tomarmos o comprimento de arco euclidiano como parâmetro. Apesar disso o teorema abaixo é essencialmente geométrico e a escolha da parametrização pelo comprimento de arco euclidiano, nada mais é que uma conveniência que simplifica a demonstração.

TEOREMA III.2.1 (Relação entre vértices da curvatura geodésica e da curvatura euclidiana em \mathbb{H}^2): Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2$ curva de classe C^k ($k \geq 2$). Sejam ainda k_g a curvatura geodésica com sinal de γ e k_E a curvatura euclidiana com sinal de γ . Então, $t_0 \in I$ é máximo (mínimo) local de k_g se e somente se for máximo (mínimo) local de k_E .

demonstração: Podemos parametrizar $\{\gamma\}$ pelo comprimento de arco

euclidiano. Assim sendo, sem perda de generalidade, vamos considerar que γ é uma parametrização pelo comprimento de arco euclidiano. Derivando-se então a igualdade obtida no Lema III.2.1 vemos que

$$\begin{aligned}
 k'_g(t) &= \gamma'_2(t)k_E(t) + \gamma_2(t)k'_E(t) + \gamma''_1(t) = \\
 &= \gamma'_2(t) \left(\gamma'_1(t)\gamma''_2(t) - \gamma''_1(t)\gamma'_2(t) \right) + \gamma_2(t)k'_E(t) + \gamma''_1(t) = \\
 &= \gamma'_2(t)\gamma'_1(t)\gamma''_2(t) + \gamma''_1(t) \left(1 - \gamma'^2_2(t) \right) + \gamma_2(t)k'_E(t) = \\
 &= \gamma'_2(t)\gamma'_1(t)\gamma''_2(t) + \gamma''_1(t)\gamma'^2_1(t) + \gamma_2(t)k'_E(t) = \\
 &= \gamma'_1(t) \left(\gamma''_1(t)\gamma'_1(t) + \gamma''_2(t)\gamma'_2(t) \right) + \gamma_2(t)k'_E(t). \quad (**)
 \end{aligned}$$

Lembramos neste ponto que tomamos o parâmetro t como sendo o comprimento de arco euclidiano, ou seja $\gamma'^2_1(t) + \gamma'^2_2(t) \equiv 1$.

Derivando-se ambos os termos desta igualdade, obtemos que

$$\gamma''_1(t)\gamma'_1(t) + \gamma''_2(t)\gamma'_2(t) \equiv 0$$

e a expressão em (**) assume a seguinte forma:

$$k'_g(t) = \gamma_2(t)k'_E(t) \quad (***)$$

Sendo $\gamma_2(t) > 0$, verificamos que os pontos críticos da curvatura geodésica e da curvatura euclidiana de γ coincidem. Derivando-se ambos os termos da igualdade (***) ficamos com

$$k''_g(t) = \gamma'_2(t)k'_E(t) + \gamma_2(t)k''_E(t)$$

logo, se t for ponto crítico das curvaturas temos que

$$k''_g(t) = \gamma_2(t)k''_E(t)$$

e novamente, por ser $\gamma_2(t) > 0$, temos que os máximos e mínimos das duas funções coincidem. ■

COROLARIO II.2.2 (Teorema dos Quatro Vértices em $\mathbb{H}^2 - 1^a$ demonstração):

Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{H}^2$ curva fechada simples de classe C^2 . Então, γ possui ao

menos quatro vértices.

demonstração: Pelo Teorema dos Quatro Vértices no plano euclidiano, k_E possui ao menos dois máximos e dois mínimos locais. Pelo Teorema acima, estes pontos serão máximos e mínimos locais também da curvatura geodésica k_g , e portanto, vértices da curva. ■

Vamos agora começar a apresentar a demonstração de Osserman, que tem a vantagem clara de não pressupor a validade da versão euclidiana do Teorema.

A idéia básica da demonstração de Osserman é considerarmos a circunferência de raio mínimo contendo a curva e mostrarmos que podemos nos pontos de tangência, limitar superiormente a curvatura da curva pela curvatura da circunferência e que em cada arco da curva determinado por esta intersecção podemos encontrar ao menos um ponto com curvatura maior que a da circunferência.

Osserman constrói esta demonstração a partir de quatro lemas, sendo que os três primeiros são resultados geométricos gerais que ele não demonstra. Em seu artigo, todos estes lemas estão enunciados no plano euclidiano. Demonstraremos estes lemas, assim como o Teorema propriamente dito, tanto em \mathbb{R}^2 como em \mathbb{H}^2 .

LEMA III.2.2 Sejam (M, ρ) espaço métrico completo e $K \subseteq M$ conjunto compacto com ao menos dois pontos. Então, existe bola fechada $\overline{B}(a, r)$ de centro em a e raio $r > 0$ contendo K de raio mínimo, no sentido de que se $K \subseteq \overline{B}(a', r')$ então $r' \geq r$.

demonstração: Sendo M completo, temos que K é limitado. Logo, para todo

$x \in M$, existe $r > 0$ tal que a bola fechada $K \subseteq \overline{B}(x,r)$. Ainda pelo fato de K ser compacto, temos que para cada x em M , $r_x = \sup\{\rho(x,y) \mid y \in K\}$ é na realidade um máximo e temos então $\overline{B}(x,r_x)$ como sendo a menor bola centrada em x e contendo K . Como K contem ao menos dois pontos, temos $r_x \geq \frac{1}{2}\text{diam}(K) > 0$.

Consideremos então a função $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$. Demonstra-se por argumentos usuais que φ é contínua, logo, se restringirmos φ a uma bola fechada $\overline{B}(a,r_a)$, onde $a \in K$ e $K \subseteq \overline{B}(a,r_a)$, existirá $\alpha \in \overline{B}(a,r_a)$ tal que

$$r_\alpha = \inf\{r_x \mid x \in \overline{B}(a,r_a)\}.$$

Observamos ainda que se $x \in (\overline{B}(a,r_a))^c$, então, $r_x = \sup\{\rho(x,y) \mid y \in K\} \geq \rho(x,a) > r_a \geq r_\alpha$ e temos que $\overline{B}(\alpha,r_\alpha)$ é a bola mínima que buscavamos. ■

Como vimos no parágrafo I.1, uma variedade riemanniana é geodesicamente completa se e somente se o espaço métrico adjacente a esta for completo. Assim sendo, o Lema III.2.2 vale para qualquer variedade geodesicamente completa. Vamos agora demonstrar a unicidade desta bola mínima.

LEMA III.2.3 Seja $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto com mais de dois pontos e sejam $\overline{B}(a,R)$ e $\overline{B}(b,R)$ duas bolas fechadas distintas mas com raios iguais que contenham K . Então, existe bola fechada de raio estritamente menor que R que contém K .

demonstração: Considere m o ponto médio do segmento \overline{ab} que liga os centros das bolas e seja $p \in \partial\overline{B}(a,R) \cap \partial\overline{B}(b,R)$. Como ambas as bolas tem o mesmo raio e são distintas, elas não podem estar uma contida na outra e como a intersecção das duas contém ao menos dois pontos,

temos que $\partial\overline{B}(a,R) \cap \partial\overline{B}(b,R) \neq \emptyset$. A métrica em \mathbb{R}^n provém de um produto interno, logo, como $p \in \partial\overline{B}(a,R) \cap \partial\overline{B}(b,R)$

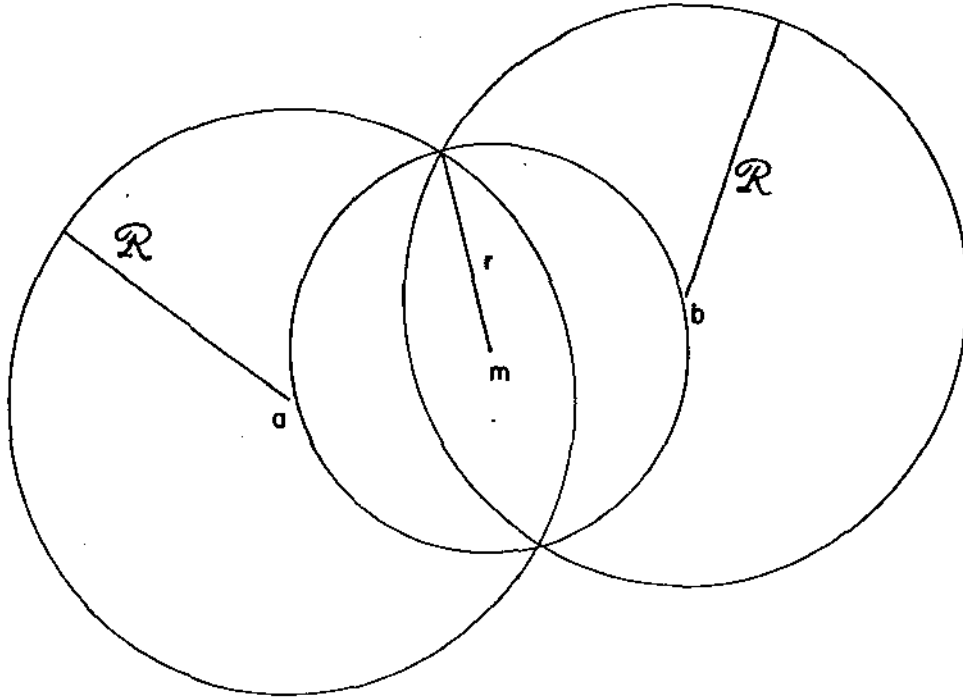


figura 10

e m é ponto médio de \overline{ab} temos que

$$\begin{aligned} (\rho(a,p))^2 &= \langle a-p, a-p \rangle = \langle b-p, b-p \rangle = (\rho(b,p))^2 \\ (\rho(a,m))^2 &= \langle a-m, a-m \rangle = \langle b-m, b-m \rangle = (\rho(b,m))^2 \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda igualdade da primeira e considerando a linearidade do produto interno, temos que

$$\langle a, m \rangle - \langle a, p \rangle = \langle b, m \rangle - \langle b, p \rangle$$

o que implica que $\langle p-m, b-a \rangle = 0$, ou seja os segmentos \overline{pm} e \overline{am} são ortogonais e pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$r = \rho(p,m) < \rho(p,a) = R$$

Vamos então mostrar que $\overline{B}(a,R) \cap \overline{B}(b,R) \subseteq \overline{B}(m,r)$. Para fazê-lo Se $x \in \overline{B}(a,R) \cap \overline{B}(b,R)$, $\rho(x,a) \leq R$ e $\rho(x,b) \leq R$. Como m é o ponto médio de \overline{ab} , temos que $m = \frac{1}{2}(a+b)$ e assim sendo,

$$(\rho(x,m))^2 = \langle x-m, x-m \rangle = \langle x, x \rangle - 2 \langle x, \frac{1}{2}(a+b) \rangle + \langle \frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a+b) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \langle x-a, x-a \rangle + \frac{1}{2} \langle x-b, x-b \rangle - \frac{1}{2} \langle a-b, a-b \rangle = \\
&= \frac{1}{2} (\rho(x,a))^2 + \frac{1}{2} (\rho(x,b))^2 - \frac{1}{2} (\rho(a,b))^2 \leq \\
&\leq R^2 - \frac{1}{2} (\rho(a,b))^2 < R^2
\end{aligned}$$

Assim sendo $\overline{B}(a,R) \cap \overline{B}(b,R) \subseteq \overline{B}(m,r)$ onde $r < R$. ■

Tendo demonstrado a unicidade da circunferência de raio mínimo cujo interior contém um compacto de \mathbb{R}^n , vamos usar esta unicidade para demonstrar o mesmo resultado em \mathbb{H}^2 .

LEMA III.2.3' Seja $K \subseteq \mathbb{H}^2$ compacto com mais de dois pontos e sejam $\overline{B}(a,R)$ e $\overline{B}(b,R)$ duas bolas fechadas distintas mas com raios iguais que contenham K . Então, existe bola fechada de raio estritamente menor que R que contém K .

demonstração: O fato de K possuir mais de dois pontos implica nas circunferências $\partial\overline{B}(a,R)$ e $\partial\overline{B}(b,R)$ se interceptarem em dois pontos e chamemos estes pontos de p_1 e p_2 e seja λ a geodésica por estes pontos. Considerando λ como uma semi-circunferência euclidiana temos que o prolongamento desta interceptaria o eixo horizontal do sistema de coordenadas de \mathbb{R}^2 os quais chamamos de q_1 e q_2 , de modo a termos $q_1 p_1 p_2 q_2$ em ordem cíclica no prolongamento de λ . Consideramos g a intersecção com o semi-plano superior da circunferência euclidiana centrada em q_1 passando por p_2 (figura 11). Deste modo, g é uma geodésica de \mathbb{H}^2 e a reflexão μ_g em torno desta geodésica leva λ numa geodésica vertical passando por p_2 (de modo geral, a inversão em \mathbb{R}^2 em torno de uma circunferência g leva uma circunferência h que passa pelo centro de g e intercepta g em dois pontos em uma reta passando pelos pontos de intersecção. Como a reflexão em geodésicas de \mathbb{H}^2 pode ser

vista como a restrição ao semi plano superior das inversões em torno de circunferências euclidianas centradas no eixo horizontal. Mais detalhes podem ser encontrados em [Eves] ou [Rochal].

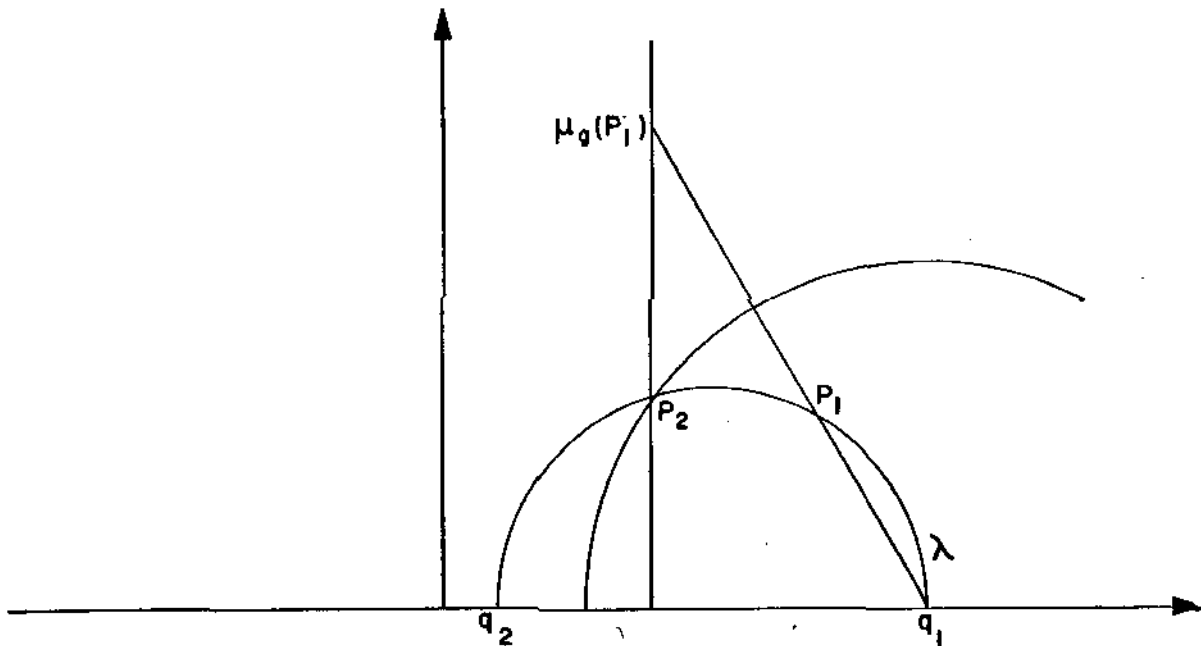


figura 11

Nesta situação, consideramos $m = (m_1, m_2)$ como sendo o ponto médio euclidiano entre os pontos $\bar{p}_1 = \mu_g(p_1)$ e $\bar{p}_2 = \mu_g(p_2)$. Toda circunferência passando por estes pontos, deve ter seu centro euclidiano na reta $(m_1 + t, m_2)$. Lembrando que em I.2.1 vimos que o raio hiperbólico de uma circunferência com centro euclidiano em (a_1, a_2) e raio euclidiano r é dado por $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{a_2 + r}{a_2 - r} \right)$, vemos que as duas circunferências $C_1 = \mu_g(\partial\bar{B}(a, R))$ e $C_2 = \mu_g(\partial\bar{B}(b, R))$ devem ter também o mesmo raio euclidiano r . Construimos então - de modo idêntico ao que fizemos no Lema III.2.3 - uma circunferência C com centro euclidiano em m e raio euclidiano $\bar{r} < r$ (= raio euclidiano de C_1 e C_2) que contém $\mu_g(\bar{B}(a, R)) \cap \mu_g(\bar{B}(b, R))$. Temos

assim que

$$\text{raio de } C = \bar{R} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_2 + \bar{r}}{m_2 - \bar{r}} \right) < \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_2 + r}{m_2 - r} \right) = R \doteq \text{raio de } C_1 \text{ e de } C_2 \blacksquare$$

Daqui em diante, considerando a reflexão μ_g que definimos na demonstração do Lema acima, poderemos considerar que dois pontos distintos quaisquer de \mathbb{H}^2 podem ser levados por uma isometria de modo a estarem alinhados verticalmente. Além disso, dada a unicidade da circunferência de raio mínimo que contém um compacto, tanto em \mathbb{H}^2 como em \mathbb{R}^2 , daremos um nome a estas circunferências: **círculo circunscrito do compacto** K . Passemos agora ao Lema seguinte, que fala sobre o posicionamento no círculo circunscrito da intersecção deste com o compacto K .

LEMA III.2.4 Seja $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto com ao menos dois pontos. Então, todo arco fechado de seu círculo circunscrito, medindo ao menos π , contém ao menos um ponto de K .

demonstração: Seja C circunferência contendo K de modo que exista arco fechado de π de C que não contenha pontos de K . Como estamos tomando um arco fechado, existe $\varepsilon > 0$ tal que, se aumentarmos este arco de ε em ambas as direções, este também não conterá pontos de K . Sem perda de generalidade podemos supor que C tem raio R , está centrada na origem e o arco em questão é o arco

$$C_1 = \left\{ (R \cos \theta, R \sin \theta) \mid \theta \in [\pi/2 - \varepsilon, 3\pi/2 + \varepsilon] \right\}$$

e consideremos

$$B_1 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) \mid \theta \in [\pi/2 - \varepsilon, 3\pi/2 + \varepsilon]; 0 \leq r \leq R \right\} \text{ e } B_2 = (B_1)^c.$$

Tomamos ainda $K_1 = K \cap B_1$ e $K_2 = K \cap B_2$. Estamos supondo que $K_1 \cap C_1 = \emptyset$.

Como ambos são compactos não vazios, temos que $\rho(K_1, C_1) = \delta > 0$. Consideremos ainda a circunferência C' de centro no ponto $(d\delta, 0)$ e raio R , onde $d \in (0, 1)$ é tal que $d\delta < 2R\text{sen}(\epsilon)$.

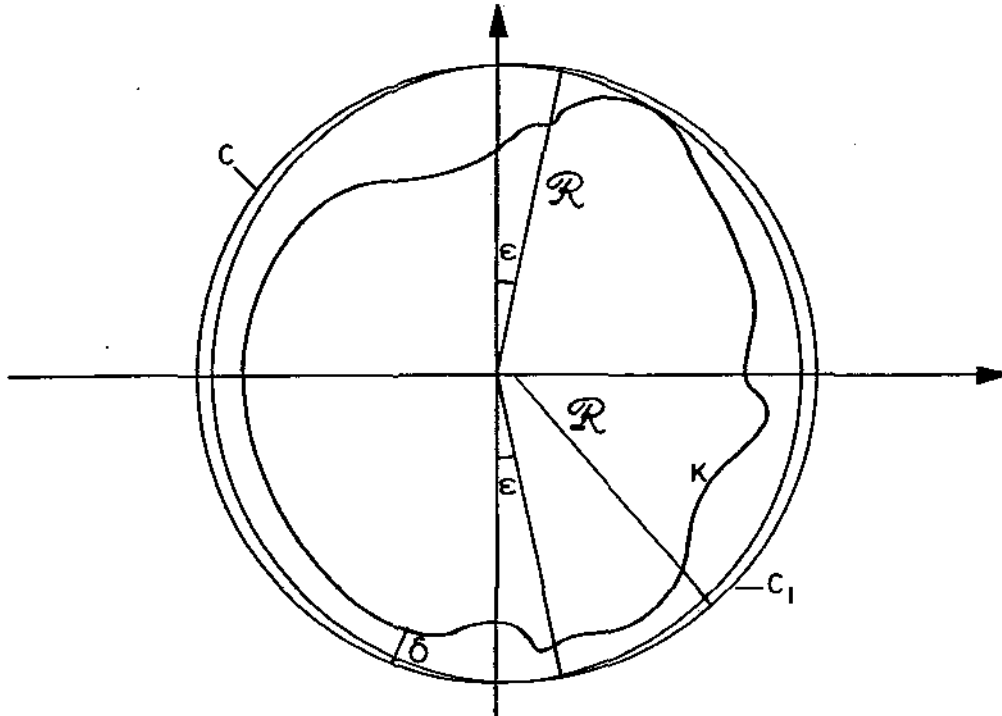


figura 12

Vamos mostrar que C' também contém K . Feito isto, pela unicidade do círculo circunscrito, teremos que C não é o círculo de menor raio contendo K .

Seja então $x \in K_1$.

$$\rho(x, (d\delta, 0)) \leq \rho(x, 0) + \rho(0, (d\delta, 0)) \leq R - \delta + d\delta = R - \delta(1-d) < R$$

e neste caso $x \in C'$.

Se $x \in K_2$ temos que $x = (r\cos\theta, r\text{sen}\theta)$ onde $r \leq R$ e $\theta \in (-\pi/2 + \epsilon, \pi/2 - \epsilon)$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} (\rho(x, (d\delta, 0)))^2 &= (r\cos\theta - d\delta)^2 + (r\text{sen}\theta)^2 = r^2 + d^2\delta^2 - 2d\delta r\cos\theta \leq \\ &\leq r^2 + d^2\delta^2 - 2d\delta r\cos(\pi/2 - \epsilon) = r^2 + d^2\delta^2 - 2d\delta R\text{sen}(\epsilon) < \\ &< r^2 + d^2\delta^2 - 2d^2\delta^2 = r^2 - d^2\delta^2 \leq (R - d\delta)^2 < R^2 \end{aligned}$$

e portanto, também neste caso $x \in C'$ e provamos assim que $K \subseteq C'$. ■

A versão hiperbólica deste Lema decorre imediatamente da versão euclidiana acima. Tomamos C como no lema e chamamos de p_1 e p_2 os pontos extremos do arco de C que não contém pontos de K . Como mencionamos anteriormente, podemos supor p_1 e p_2 alinhados verticalmente. Como a reflexão hiperbólica em geodésicas verticais podem ser vistas como a restrição à \mathbb{H}^2 de reflexões euclidianas em retas, temos que p_1 e p_2 definem um diâmetro também sob o ponto de vista euclidiano. Encontramos então C' do mesmo modo que no caso anterior e observamos, por um argumento idêntico ao apresentado na demonstração do Lema III.2.3', que C e C' possuem o mesmo raio hiperbólico, contradizendo a unicidade do círculo circunscrito.

O penúltimo dos lemas a serem mencionados por Osserman, é a versão euclidiana do Lema II.2.1, que recordaremos para a comodidade do leitor.

LEMA II.1.1: Seja M^2 variedade Riemanniana localmente conforme a \mathbb{R}^2 e sejam $\alpha, \beta: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ curvas diferenciáveis parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que $\alpha(0) = \beta(0) = p$ e $\alpha'(0) = \beta'(0) = v$. Nestas condições temos que:

i) $\kappa_\beta(0) > \kappa_\alpha(0) \implies \alpha$ está localmente à esquerda de β

ii) α está localmente estritamente à esquerda de $\beta \implies \kappa_\alpha(0) \leq \kappa_\beta(0)$

Passemos agora à demonstração feita por Osserman do seguinte lema:

LEMA III.2.5 Seja γ curva fechada simples no plano euclidiano, C o

círculo circunscrito de γ , p_1 e p_2 pontos de $\{\gamma\} \cap C$. Tome γ_1 como sendo o arco de γ ligando os pontos p_1 e p_2 , orientado positivamente. Então, ou γ_1 coincide com o arco de C ligando os pontos ou existe um ponto q_1 em γ_1 tal que a curvatura de γ neste ponto é estritamente menor do que $1/R$, onde R é o raio de C .

demonstração: Pelo Lema III.2.4, podemos assumir que o arco orientado de C ligando p_1 à p_2 está contido numa semi-circunferência; se isto não ocorrer, pelo Lema III.2.4 existe ponto p'_2 entre p_1 e p_2 tal que p_1 e p'_2 estão contidos em uma semi-circunferência fechada de C e aplicamos o argumento seguinte para o sub-arco γ'_1 de γ_1 .

Sem perda de generalidade, vamos assumir que C esta centrada na origem e que p_1 e p_2 estão alinhados verticalmente, com p_2 acima de p_1 , com ambos os pontos contidos no semi-plano direito. Se γ_1 não coincidir com o arco de C que liga estes pontos, deve existir ponto $q \in \gamma_1$ pertencente ao interior da região limitada pelo arco de C ligando os pontos e ao segmento de reta que liga os pontos. Nestas condições temos que a circunferência C' passando por p_1 , p_2 e q tem raio $R' > R$.

Se trasladarmos para a esquerda a circunferência C' , haverá uma última posição em que este intercepta o arco γ_1 . Chamemos o círculo nesta posição de C'' e de q_1 um ponto isolado de $C'' \cap \{\gamma_1\}$. Como γ é curva simples, o mesmo argumento utilizado na demonstração do Teorema II.2.2 pode ser usado para garantir tanto a existência de pontos isolados em $C'' \cap \{\gamma_1\}$ como o fato de γ estar a esquerda de C'' em q_1 . Assim sendo, o Lema II.2.1 nos garante que a curvatura de γ em q_1 é menor ou igual a curvatura de C'' que é dada por $1/R' < 1/R$. ■

Para verificarmos a versão hiperbólica deste Lema, devemos

ser cuidadosos na escolha do ponto $q \in \{\gamma_1\} \cap \text{int}(C)$. Este ponto deve estar na reta horizontal ℓ passando pelo centro de C para garantirmos que a curvatura geodésica da circunferência C' é estritamente menor que a curvatura geodésica de C . Satisfeita esta condição, o cálculo da curvatura geodésica de circunferências em \mathbb{H}^2 , feito no parágrafo I.3.1 torna claro que $k_{C'} < k_C$. A única possibilidade de não existir ponto $q \in \{\gamma_1\} \cap \text{int}(C) \cap \{\ell\}$ é a de termos $\{\gamma_1\} \cap (C) \cap \{\ell\} \neq \emptyset$. Neste caso, tomamos o ponto desta intersecção como sendo o ponto p'_2 e aplicamos o mesmo raciocínio ao sub arco γ'_1 de γ_1 .

Neste ponto podemos enunciar a segunda versão do Teorema dos Quatro Vértices.

TEOREMA III.2.2 (Teorema dos Quatro-ou-mais Vértices - Osserman). Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ curva fechada simples de classe C^k , $k \geq 2$. Então γ possui ao menos quatro vértices. Se γ intercepta seu círculo circunscrito em n pontos, γ possui ao menos $2n$ vértices.

demonstração: Pelos Lemas III.2.2 e III.2.3, existe e é único o círculo circunscrito C de γ . Pelo Lema III.2.4, C intercepta γ em ao menos dois pontos, desconectando $\{\gamma\}$ em ao menos dois arcos conexos (lembramos que γ é um mergulho de S^1). Sem perda de generalidade, podemos supor γ orientada de modo que o vetor normal principal $n(s)$ aponta na direção na componente limitada de \mathbb{R}^2 da qual $\{\gamma\}$ é fronteira. O Lema II.2.1 nos garante que nos pontos de $\{\gamma\} \cap C$ a curvatura de γ é maior ou igual a curvatura de C , a qual é constante. O Lema III.2.5 nos garante que em cada componente de $\{\gamma\} \setminus C$, existe ponto com curvatura geodésica estritamente menor do que a de C . Logo, como a função curvatura é ao menos contínua, cada um destes arcos deve conter um vértice de mínimo

de γ . Logo, se $\{\gamma\} \cap C$ possuir n pontos, obtivemos n vértices de mínimo em γ . Sendo γ função periódica, temos que a curvatura de γ também será, logo os mínimos e máximos ocorrem aos pares, e devemos ter também n vértices de máximo, totalizando ao menos $2n$ vértices, com $n \geq 2$. ■

A versão hiperbólica desta demonstração, segue exatamente os mesmos passos do caso euclidiano. Observamos apenas que, sendo a curvatura geodésica das circunferências no plano hiperbólico maior ou igual a um, temos que a existência de círculo hiperbólico circunscrito em \mathbb{H}^2 nos garante que toda curva fechada em \mathbb{H}^2 deve ter pontos com curvatura geodésica maior ou igual a 1.

III.3 TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES NA ESFERA

Existe um grande número de trabalhos referentes a curvas esféricas, ou seja, curvas espaciais contidas na esfera. As curvas esféricas, particularmente as fechadas, são de grande interesse, pois a uma curva espacial qualquer, podemos sempre associar três curvas esféricas especiais: as indicatrizes tangente, normal e binormal. Estas três curvas esféricas determinam, a menos de isometrias (de acordo com o Teorema Fundamental das Curvas), uma única curva espacial.

No entanto, a maior parte destes trabalhos trata das curvas

esféricas como curvas espaciais, sem tanta ênfase no aspecto Riemanianno destas curvas. Assim sendo, trata-se mais dos conceitos de curvatura e torção destas curvas do que da curvatura geodésica destas. Creio ser esta a melhor explicação para a surpresa que tivemos em não encontrar, na literatura disponível, uma demonstração do Teorema dos Quatro Vértices na esfera na concepção que trabalhamos, ou seja, com vértices significando máximos ou mínimos da curvatura geodésica.

Normalmente, a literatura disponível chama de "vértice" de uma curva no espaço os pontos nos quais a torção se anula. Para o caso da curva ser esférica, já em [Kneser] aparece um resultado que garante a existência de ao menos quatro pontos de torção nula para curvas fechadas, bi-regulares (a bi-regularidade é necessária para definirmos a torção, conforme visto no parágrafo I.1) de classe C^3 . A Relação entre este resultado e o clássico Teorema dos Quatro Vértices no plano, é estabelecido via projeção estereográfica: Os vértices no plano (onde a curva fica localmente de um só lado de seu círculo osculador), são levados em pontos estacionários do plano osculador (pontos onde a curva fica localmente de um só lado do plano osculador), que são pontos de torção nula. Além disto, o uso do termo "vértice" para pontos de torção nula pode se justificado por estes corresponderem a cúspides da indicatriz binormal. No entanto, de modo coerente com o trabalho desenvolvido até o momento, para nós, vértice de uma curva esférica, continuará significando pontos extremos da curvatura geodésica.

Um caso particular do Teorema dos Quatro Vértices na esfera pode ser demonstrado como consequência direta do seguinte resultado provado por [Weiner] em um artigo de 1977: Se γ for uma curva esférica,

fechada simples que não contém um grande-semicírculo (lembramos que os grandes círculos são as geodésicas máximas da esfera), e se o centro da esfera estiver contido no fecho convexo de γ (ou seja, se a curva passar por pontos antípodas da esfera), então a curvatura geodésica de γ muda de sinal ao menos quatro vezes. Este resultado é uma extensão de um teorema feito por Fenchel, no qual provou que a curvatura geodésica de γ deve mudar duas vezes de sinal se esta satisfizer as condições acima, a não ser a simplicidade desta que é trocada por um eventual ponto duplo (ponto de auto-intersecção da curva). Como consequência deste resultado, temos que **curvas esféricas fechadas simples, que contenham alguma par de pontos antípodas, devem possuir ao menos quatro vértices (pontos de extremo da curvatura geodésica).**

Vamos agora demonstrar uma versão do Teorema dos Quatro Vértices na esfera, que garante a existência de ao menos quatro pontos críticos da função curvatura geodésica de uma curva esférica fechada cuja curvatura espacial (euclidiana) não se anule. A exigência que fazemos da curvatura espacial não se anular é necessária pois utilizaremos o fato desta possuir ao menos quatro pontos de torção nula e a torção só pode ser definida se a curvatura não se anular.

Antes disso, vamos precisar estender o conceito de círculo osculador para esferas osculatrizes, a fim de obtermos uma caracterização das curvas esféricas.

Dada uma curva diferenciável em \mathbb{R}^n , e um ponto p da curva no qual todas as curvaturas até ordem $n-1$ são não nulas, existe uma vizinhança de p na curva, satisfazendo a seguinte condição: dados $n+1$

... curva nesta vizinhança, existe uma única esfera $n-1$ dimensional passando por estes pontos. Se a $(n-1)$ -ésima curvatura for contínua e não se anular, existe uma esfera limite quando estes pontos tendem para p . A esta esfera limite, chamamos de esfera oscultriz de γ em p . Observamos apenas que a esfera oscultriz tem contato de ordem três com a curva que oscula.

Vamos considerar agora γ como sendo uma curva em \mathbb{R}^3 cuja curvatura espacial não se anula, $\mathcal{R}(s)$ e $c(s)$ como sendo respectivamente o raio e o centro da esfera oscultriz de γ em $\gamma(s)$. Se considerarmos as coordenadas do raio ($\gamma(s) - c(s)$) da esfera oscultriz, em relação ao referencial móvel de Frenet (parágrafo II.2), obtemos que

$$k'(s)^2 = \tau(s)^2 k(s)^2 (k(s)^2 - \mathcal{R}(s)). \quad (*)$$

onde k é a curvatura de γ e τ a torção (2^{a} curvatura) da curva vista como uma curva em \mathbb{R}^3 . Temos então que se γ for uma curva esférica, teremos $\mathcal{R}(s) \equiv 1$ e conseqüentemente

$$k'(s)^2 = \tau(s)^2 k(s)^2 (k(s)^2 - 1). \quad (**)$$

Assim sendo, temos que numa curva esférica, a torção se anula apenas em pontos críticos da curvatura. Maiores detalhes sobre esta construção podem ser encontrados em [Struik].

Passemos então a nossa versão do Teorema:

TEOREMA III.3.1 (Versão do Teorema dos Quatro Vértices na Esfera): Seja $\gamma: I \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ curva fechada simples, de classe C^3 , cuja curvatura espacial não se anula. Então a curvatura geodésica de γ possui ao menos quatro pontos críticos.

demonstração: O vetor de curvatura geodésica de uma curva na esfera é

obtido pela projeção no espaço tangente do vetor curvatura (euclidiana) $K(s) = k(s)n(s) = \gamma''(s)$, onde $n(s)$ é o campo normal principal ao longo de γ , o qual é unitário e ortogonal a $t(s) = \gamma'(s)$, de fo. Se considerarmos $N(s)$ o campo unitário ao longo de γ , ortogonal a esfera, temos que

$$k(s)n(s) = k_n(s)N(s) + k_g(s)u(s)$$

onde $u(s)$ é vetor unitário tangente a S^2 . Derivando-se ambos os termos da equação acima, obtemos que

$$k'_g(s)u(s) = k'(s)n(s) + k(s)n'(s) - k'_n(s)N(s) - k_n(s)N'(s) - k'_g(s)u'(s)$$

Pelas equações de Frenet, temos que

$$n'(s) = -k(s)t(s) + \tau(s)b(s)$$

onde $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é o referencial de Frenet da curva.

Particularmente no caso da esfera, temos que $N(s) = \pm \gamma(s)$, logo, $\pm N'(s) = \gamma'(s) = t(s)$. Temos então que

$$k'_g(s)u(s) = (-k^2(s) \mp k_n(s))t(s) + k'(s)n(s) - k'_n(s)N(s) + k(s)\tau(s)b(s) - k'_g(s)u'(s) (**)$$

Além disto, o vetor $u(s)$ é ortogonal aos seguintes vetores:

- i) $N(s)$ porque $N(s)$ é normal a S^2 enquanto $u(s)$ é tangente ;
- ii) $t(s)$ pois sendo $n(s)$ ortogonal a $t(s)$, sua projeção em qualquer plano contendo $t(s)$ também será ortogonal a este;
- iii) $u'(s)$ pois $\langle u(s), u(s) \rangle = 1$.

Assim sendo, se tomarmos o produto interno de ambos os lados da equação (*) por $u(s)$, obtemos que

$$k'_g(s) = k'(s)\langle n(s), u(s) \rangle + k(s)\tau(s)\langle b(s), u(s) \rangle (***)$$

Seja então $t_0 \in I$ ponto no qual a torção de γ se anula. Pela equação (*), a curvatura (euclidiana) também deve se anular. Logo, constatamos a partir de (***) que nestes pontos a derivada da curvatura geodésica de γ

também se anula, ou seja, este deve ser um ponto crítico da curvatura geodésica da curva. Sendo γ curva esférica, fechada e simples, esta possui ao menos quatro pontos de torção nula [Kneser] e conseqüentemente a curvatura geodésica de γ possui ao menos quatro pontos críticos. ■

BIBLIOGRAFIA

- [Barbosa], J.L. e Carmo, Manofredo P. do - Helicoids, Catenoids and Minimal Hypersurfaces of \mathbb{R}^n invariants by l -parameter - An. Acad. Bras. Ciênc., 53, 1981, pg 403-408.
- [Beardon], Alan F. - The Geometry of Discrete Groups - Spriger Verlag, 1982.
- [Berger], Marcel e Bernard Gostiaux - Differential Geometry: Manifolds, Curves and Surfaces - Springer Verlag, 1988.
- [Berger], Marcel - Geometry II - Springer Verlag, 1990
- [Carmo], Manofredo P. do - Geometria Riemanniana - IMPA/CNPq, 1979.
- [Carmo], Manofredo P. do - Differential Geometry of Curves and Surfaces - Prentice-Hall, Inc., 1976.
- [Chern], S.S. - Curves and Surfaces in Euclidean Spaces em Studies in Global Geometry and Analysis - Math.Ass.of Am., 1967, pg. 16-56.
- [Costa], Sueli I.R. - On Closed Twisted Curves - Proc. Amer. Math. Soc., 109, 1990, pg 205-214.
- [Eves], Howard - A Survey of Geometry - Allyn and Bacon, Inc., 1974
- [Fenchel], Werner - On the Differential Geometry of Closed Space Curves - Bull. Amer. Math. Soc., 57, 1951, pg. 44-54.
- [Gluck], Herman - The Converse of the Four Vertex Theorem - L'Enseignemet Math.,17, 1971, pg 295-309.
- [Graunstein], W.C. -Extensions of the Four-Vertex Theorem - Trans. Amer. Math. Soc.,41, 1937, pg 9-23.

- [Graunstein], W.C. - A New Form of the Four-Vertex Theorem - Monatshefte für Math. und Physik Wirtinger Festband, 1936, pg 381-384.
- [Herglotz], G. - Lectures on Geometric Probabilities (notas mimeografadas), Göttingen, 1933
- [Jackson], S.B. - Vertices of Plane Curves - Bull. Amer. Math. Soc., 50, 1944, pg 564-578.
- [Kneser], A. - Bemerkungen über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie - Festschrift Heinrich Weber, Teubner 1912, pg 170-180.
- [Mukhopadhyaya], S. - New Methods in the Geometry of a Plane Arc - Bull. Calcutta Math. Soc., 1, 1909, pg 31-37.
- [Osserman], Robert - The Four-or-More Vertex Theorem - Amer. Math. Monthly, 92, 1985, pg 331-337.
- [Pinkall], U. - On the Four-Vertex Theorem - Aequat. Math., 34, 1987, pg 221-230.
- [Rocha], Luiz Fernando C.- Introdução à Geometria Hiperbólica Plana - IMPA/CNPq, 1987.
- [Spivak], Michael - A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, volumes I à IV - Publish or Perish, Inc., 1979.
- [Struik], Dirk J. - Lectures on Classical Differential Geometry - Addison-Wesley Publ. Comp., 1950
- [Thorbergsson], Gudlaugur - Vierscheitelsatz auf Flächen nichtpositiver Krümmung - Math. Z., 149, 1976, pg. 47-56.
- [Weiner, I], Joel L. - Closed Curves of Constant Torsion - Proc. Symp. Pure Math., 27, 1974.

[Weiner,2], Joel L. - Global Properties of Spherical Curves - J.
Diff. Geom. 12, 1977, pg 425-434.

[Wolf], Joseph A. - Spaces of Constant Curvature - Publish or
Perish, Inc., 1974.