

VARIETADES COM OPERADOR DE CURVATURA PURO

MARIA HELENA NORONHA

Orientador

Prof. Dr. Francesco Mercuri

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Maria Helena Noronha
1983.06.05

Junho de 1983.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADEDIMENTOS

Ao Prof. Francesco Mercuri

pela proposição deste trabalho, pela dedicação e por sua segura e valiosa orientação.

Ao Prof. Alcibiades Rigas

pelo seu incentivo e discussões instrutivas.

Ao Prof. Andrzej Derdziński

pela colaboração em alguns resultados do capítulo III.

Aos meus pais, José Carlos e Alice

pelos seus esforços, incentivos e confiança.

À Deus

e a todos que contribuíram para que eu aqui chegasse, o testemunho de meu agradecimento.

Maria Helena Noronha,

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - ESTRUTURA ALGÉBRICA DO TENSOR DE CURVATURA. .	1
§1. Generalidades	1
§2. Imersões isométricas	3
§3. O teorema fundamental das imersões	6
CAPÍTULO II - VARIEDADES CONFORMEMENTE PLANAS	13
§1. Generalidades	13
§2. Estrutura folheada de uma imersão conformemente plana	19
§3. Imersões conformemente planas em codimensão 2 com $R^1 = 0$	22
§4. Existência de imersões isométricas	33
§5. Alguns comentários das equações de Codazzi e Ricci e problemas em aberto	47
§6. Algumas propriedades globais	53
CAPÍTULO III - VARIEDADES COM OPERADOR DE CURVATURA PURO NÃO NEGATIVO	57
§1. Definições e resultados preliminares	57
§2. Espaços simétricos de tipo compacto	65

§3. Variedades de Kähler.	67
§4. Variedades analíticas com o.c.p.	67
§5. Imersões isométricas com curvatura não negativa e fibrado normal plano	72
BIBLIOGRAFIA	85

INTRODUÇÃO

É um processo clássico em geometria (em particular em geometria riemanniana) tentar obter informações globais (topológicas) ou locais (analíticas) a partir de informações pontuais (algébricas) do objeto em estudo.

No caso de variedades riemannianas as informações pontuais que mais permitem deduzir informações locais e globais são as sobre o tensor curvatura.

Nesta tese queremos estudar alguns dos aspectos locais e globais de variedades riemannianas cujo tensor curvatura tem uma estrutura algébrica particularmente simples.

Se M é uma variedade riemanniana com tensor curvatura R , diremos que R é *puro* se existir uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ em cada espaço tangente tal que $\langle R(X_i, X_j)X_k, X_\ell \rangle = 0$ se o conjunto $\{i, j, k, \ell\}$ tem mais que dois elementos. A classe das variedades riemannianas com tensor curvatura puro é de um certo interesse pois engloba pelo menos duas classes de variedades particularmente importantes, as variedades conformemente planas e as variedades que admitem imersões isométricas em espaços de curvatura constante, com fibrado normal plano. E de fato, estas variedades serão os objetos principais de nosso estudo.

No primeiro capítulo recordaremos conceitos e resultados básicos de geometria riemanniana essencialmente para fixar as notações.

No segundo capítulo faremos um estudo das variedades conformemente planas imersas em espaços euclidianos em codimensão baixa. Um estudo bastante completo das hipersuperfícies conformemente planas, $n \geq 4$, é feito em [C-D-M] onde em particular é mostrado que "genericamente" elas são umbílicas ou folheadas por esferas geométricas de codimensão 1. Chamamos de *esfera geométrica* de tipo ϵ , $\epsilon = 0, 1$ uma subvariedade $\Sigma \subset M$ totalmente umbílica, com vetor curvatura média paralelo, e tal que a curvatura seccional de M ao longo Σ é uma constante k^2 , $k^2 = 0$ se $\epsilon = 0$, $k^2 > 0$ se $\epsilon = 1$. Também por "genericamente" entenderemos que existe um conjunto aberto e denso cujas componentes conexas são do tipo em questão. Se uma variedade conformemente plana M^n é folheada (localmente) por esferas geométricas de tipo ϵ e codimensão p , diremos que M^n é do tipo (p, ϵ) . Um primeiro resultado geral que segue de [M-M] e [Re] (teorema 2.24) garante que se M^n é conformemente plana e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica com $n \geq 4$, $p \leq n-3$ então M^n é "genericamente" do tipo (ℓ, ϵ) , $\ell \leq p$. Um caso interessante é o caso $p = 2$. Consideremos a hipótese adicional que o fibrado normal seja plano. Vale a pena observar que em [Ch₂-T] é "demonstrado" um teorema que afirma que todas as imersões isométricas $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ quase umbílicas tem fibrado normal plano. Este resultado, juntamente com o teorema de Moore-Morvan implicaria que se M^n é conformemente plana, $n \geq 5$, então o fibrado normal de f é plano. Em 2.1.10 mostraremos com um exemplo que o resultado acima é falso e de fato existem imersões de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^{n+2} quase umbílicas com fibrado normal não plano.

Consideremos uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, $n \geq 5$, com M^n conformemente plana e fibrado normal plano. Então, "genericamente" temos as seguintes possibilidades:

- (a) M^n é umbílica
- (b) M^n é do tipo $(1, \epsilon)$
- (c) M^n é do tipo $(2, \epsilon)$

Provamos o seguinte resultado (Veja Teorema 2.3.9):

TEOREMA. *No caso (c) M^n admite duas folheações ortogonais de co-dimensão 1 cujas folhas são quase umbílicas em M , conformemente planas na métrica induzida, de tipo $(1, \epsilon)$, cuja intersecção é uma folheação por esferas geométricas F e a distribuição ortogonal a F é integrável.*

Olhando de um ponto de vista intrínseco as do tipo (a) são de curvatura constante (e portanto admitem localmente imersões isométricas em \mathbb{R}^{n+1}). As de tipo $(1, \epsilon)$ admitem também imersões isométricas locais "genericamente" em \mathbb{R}^{n+1} . Este é um resultado de do Carmo-Dajczer [C-D] e daremos uma demonstração simplificada, nas mesmas linhas (o nosso caso é mais particular pois estamos supondo $n \geq 5$ e o resultado acima vale para $n = 4$). Nesta linha de raciocínio tentamos provar o seguinte:

CONJECTURA 1. *Seja M^n , $n \geq 5$, uma variedade conformemente plana de tipo $(2, 1)$ tal que as folheações por esferas geométricas sejam*

intersecção de duas folheações ortogonais com folhas quase umbilícas de codimensão 1. Então M^n admite localmente imersões isométricas em \mathbb{R}^{n+2} com fibrado normal plano.

Informalmente falando, mostraremos o suporte da nossa conjectura, o seguinte resultado (Veja Teorema 2.4.3 para mais detalhes):

TEOREMA. Nas hipóteses da conjectura existe uma família α^φ de "segundas formas fundamentais" diagonalizáveis que verificam as equações de Gauss e parte das equações de Codazzi e Ricci.

As equações de Codazzi e Ricci que "sobram" para provar a conjectura deveriam ser verificadas para uma escolha oportuna do parâmetro φ . De fato um tal φ é solução de um sistema $\{C_1, C_2, R\}$ de três equações diferenciais parciais (com coeficientes que dependem da geometria intrínseca de M) para uma função $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Algumas tentativas de resolver este sistema são discutidos no §5.

O último parágrafo do capítulo II é principalmente motivação para o capítulo III. Comentaremos resultados globais (essencialmente conhecidos) sobre variedades compactas conformemente planas M^n mostrando como a condição de não-negatividade da curvatura seccional é extremamente restritiva na topologia e geometria de M .

No capítulo III estudaremos propriedades globais de variedades com curvatura seccional não negativa. Motivados dos resultados do §6 do capítulo II enfraqueceremos a hipótese de conformemente plana para uma hipótese mais geral, de ter operador de

curvatura puro. Um primeiro resultado que mostraremos é o seguinte (Veja Teorema 3.4.1)

TEOREMA. Seja M^n uma variedade riemanniana analítica, compacta e simplesmente conexa, com curvaturas seccionais não negativas e operador curvatura puro. Então M^n é produto (riemanniano) de subvariedades M_i cada uma com a mesma cohomologia real de uma esfera.

Uma consequência interessante é a seguinte:

COROLÁRIO. Seja M^n uma variedade compacta, simplesmente conexa, kähleriana e analítica. Então, se M^n tem operador de curvatura puro não negativo, M^n é difeomorfa ao produto de esferas de dimensão dois.

A seguinte conjectura parece razoável.

CONJECTURA 2. Os resultados acima valem sem a hipótese de analiticidade.

O último teorema que mostraremos de um lado reforça a nossa opinião de uma resposta positiva a conjectura 2 e também é interessante em relação ao seguinte resultado devido a Erbacher (veja [Ch₁], cap. 4, teor. 7.1).

TEOREMA. Seja M^n compacta com curvaturas seccionais não negativas e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com vetor curvatura

média paralelo e fibrado normal plano. Então M^n é produto (riemanniano) de esferas (de curvatura constante) e f imerge cada fator em codimensão 1:

O papel da hipótese do fibrado normal ser plano no teorema acima é relacionado com o aspecto topológico da tese. De fato, mostraremos o seguinte resultado (veja Teorema 3.5.1):

TEOREMA. Seja M^n compacta, simplesmente conexa, com curvaturas seccionais não negativas e $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano. Então M^n é produto (riemanniano) de subvariedades M_i cada uma com a mesma cohomologia real de uma esfera.

CAPÍTULO I

ESTRUTURA ALGÉBRICA DO TENSOR DE CURVATURA

Neste capítulo recordaremos alguns conceitos básicos de geometria riemanniana com a finalidade principal de fixar as notações. Nossas referências básicas são [C], [K-N], [R], [S].

§ 1. GENERALIDADES: Seja M uma variedade riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita de M . Denotaremos com TM o fibrado tangente a M , $T_x M$ o espaço tangente a M em $x \in M$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ ou simplesmente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em $T_x M$. $\mathfrak{X}(M)$ denotará a álgebra dos campos de vetores diferenciáveis ao longo de M , $\Lambda_x^p(M)$ as p -formas externas em $T_x M$ e $\Lambda^p(M)$ as p -formas diferenciáveis.

O *tensor curvatura* associado a ∇ é a aplicação trilinear $R: \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$.

$$1.1.1 \quad R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

É bem conhecido que $(R(X,Y)Z)_x$ depende só dos valores de X, Y, Z em x e portanto 1.1.1 define efetivamente um tensor. As principais propriedades de R são

$$1.1.1.a \quad \langle R(X,Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y,X)Z, W \rangle$$

$$1.1.1.b \quad \langle R(X,Y)Z, W \rangle = -\langle R(X,Y)W, Z \rangle$$

$$1.1.1.c \quad \langle R(X,Y)Z,W \rangle = \langle R(Z,W)X,Y \rangle$$

$$1.1.1.d \quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

$$1.1.1.e \quad (\nabla_W R(X,Y) + \nabla_X R(Y,W) + \nabla_Y R(W,X))(Z) = 0$$

As propriedades (d) e (e) são conhecidas como primeira e segunda identidade de Bianchi, respectivamente.

Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base de $T_x M$ e $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ a base dual em $(T_x M)^* = \Lambda_x^1(M)$. As 2-formas externas $X_i^* \wedge X_j^*$ formam, para $i < j$, uma base de $\Lambda_x^2(M)$. Devido as propriedades de simetria, o tensor R induz um operador simétrico a nível de 2-formas, o *operador curvatura*

$$1.1.2 \quad \rho_x : \Lambda_x^2(M) \longrightarrow \Lambda_x^2(M)$$

obtido estendendo por bilinearidade a aplicação

$$1.1.2.a \quad \langle \rho_x(X_i^* \wedge X_j^*), X_k^* \wedge X_\ell^* \rangle = \langle R(X_i, X_j)X_\ell, X_k \rangle$$

onde o produto escalar no primeiro membro de 1.1.2.a é o induzido, a nível de $\Lambda_x^2(M)$, pela métrica riemanniana, (i.e. se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é base ortonormal em $T_x M$, $X_i^* \wedge X_j^*$, $i < j$ é base ortonormal em $\Lambda_x^2(M)$) e o do segundo membro é a métrica riemanniana em $T_x M$.

Sejam X, Y dois vetores linearmente independentes em $T_x M$ e $\sigma(X, Y)$ o 2-plano gerado por X e Y . O número

$$1.1.3 \quad K(\sigma) = K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

não depende de X e Y mas somente de σ e é chamado de *curvatura seccional* de M em σ .

1.1.4 OBSERVAÇÃO: ρ é um operador simétrico e portanto diagonalizável. Se para cada 2-forma $\omega \in \Lambda^2_X(M)$, $\langle \rho(\omega), \omega \rangle$ é positivo (o que é equivalente a os autovalores de ρ serem positivos) então todas as curvaturas seccionais são positivas. Por outro lado se as curvaturas seccionais são positivas então $\langle \rho(\omega), \omega \rangle$ é positivo para todas 2-formas ω decomponíveis isto é formas do tipo $\omega = X^* \wedge Y^*$ onde X^*, Y^* são as 1-formas duais dos vetores $X, Y \in T_X M$. Isso em geral não é suficiente para garantir a positividade de ρ . De fato a finalidade desta tese é estudar a estrutura de variedades em que a positividade de ρ é equivalente a positividade de K e veremos que esta é uma condição bastante restritiva.

§ 2. IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Sejam M e \tilde{M} variedades riemannianas de dimensão n e $n+p$ respectivamente e $f: M \rightarrow \tilde{M}$ uma imersão isométrica (i.e. para cada $x \in M$, $(df)_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \tilde{M}$ é isometria como aplicação linear entre espaços vetoriais com produto escalar). Para todas as considerações de caráter local identificaremos M com $df(M)$ (localmente) e $T_x M$ com $(df)_x (T_x M)$. A imersão f determina uma decomposição ortogonal do "pull-back" de $T\tilde{M}$.

$$1.2.1. \quad f^*(T\tilde{M}) = \left. T\tilde{M} \right|_M = TM \otimes \nu M$$

onde νM , o fibrado normal de M em \tilde{M} , é o complemento ortogonal de TM em \tilde{TM} . Denotaremos com ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \tilde{M} respectivamente. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e ξ uma secção diferenciável de νM (campo normal). As projeções canônicas

$$1.2.2 \quad \begin{cases} P^T : \tilde{TM} \longrightarrow TM \\ P^\perp : \tilde{TM} \longrightarrow \nu M \end{cases}$$

determinam decomposições ortogonais

$$1.2.3 \quad \begin{cases} \text{[F.G.]} : \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \\ \text{[F.W.]} : \tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi \end{cases}$$

chamadas de fórmula de Gauss e Weingarten respectivamente, onde $\alpha : TM \otimes TM \longrightarrow \nu M$ é um tensor simétrico chamado de *2.^a forma fundamental de f* . $A_\xi : TM \longrightarrow TM$ é também um tensor simétrico, chamado *operador de Weingarten* na direção ξ e ∇^\perp é uma conexão em νM , compatível com a métrica e chamada de *conexão normal*. Os tensores α e A_ξ são relacionados por:

$$1.2.4 \quad \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle$$

Os tensores de curvatura R, \tilde{R} de M e \tilde{M} são relacionados pela *equação de Gauss*:

$$1.2.5 \quad \text{(E.G.)} : \langle \tilde{R}(X, Y)Z - R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle$$

e portanto as curvaturas seccionais pela equação

$$1.2.5 \text{ (a): } \tilde{K}(X,Y) - K(X,Y) = \|\alpha(X,Y)\|^2 - \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) \rangle.$$

É útil ter uma formulação de 1.2.5 em termos dos operadores de curvatura ρ e $\tilde{\rho}$. Seja então $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ um referencial ortonormal em ν_X^M e A_{ξ_i} os operadores de Weingarten relativos. Se $X, Y \in T_X M$ a 1.2.5 pode ser escrita como

$$1.2.5 \text{ (b): } (\rho - \tilde{\rho})(X \wedge Y) = \sum_{i=1}^p A_{\xi_i} X \wedge A_{\xi_i} Y$$

onde temos identificado, como faremos sempre no que segue, os vetores X, Y com as 1-formas duais. A derivada covariante da 2ª forma fundamental \tilde{e} é definida por

$$1.2.6 \quad (\nabla_X \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^{\perp}(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

A projeção normal do tensor R mede a falta de simetria de 1.2.6 com respeito a X e Y . Isso é conhecido como a *equação de Codazzi*:

$$1.2.7 \quad P^{\perp}(\tilde{R}(X, Y)Z) = (\nabla_X \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y \alpha)(X, Z)$$

A curvatura R^{\perp} da conexão ∇^{\perp} , $R^{\perp}(X, Y)\xi = \nabla_X^{\perp} \nabla_Y^{\perp} \xi - \nabla_Y^{\perp} \nabla_X^{\perp} \xi - \nabla_{[X, Y]}^{\perp} \xi$

é relacionada com a curvatura \tilde{R} pela *equação de Ricci*:

$$1.2.8 \quad \langle \tilde{R}(X, Y) \xi - R^\perp(X, Y) \xi, \eta \rangle = \langle [A_\eta, A_\xi] X, Y \rangle$$

onde $[A_\eta, A_\xi]$ denota o produto de Lie das transformações, $[A_\eta, A_\xi]$

$$[A_\eta, A_\xi] = A_\eta A_\xi - A_\xi A_\eta.$$

§3. O TEOREMA FUNDAMENTAL DAS IMERSÕES

Por simplicidade neste parágrafo consideraremos imersões isométricas em espaços euclidianos ou seja tomaremos, com as notações do §2, $\tilde{M} = \mathbb{R}^{n+p}$. Temos visto que dada uma imersão isométrica $f: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ temos associada a esta imersão uma 2.^a forma fundamental (que descreve a geometria extrínseca de M em \mathbb{R}^{n+p}) e que satisfaz algumas condições como as equações de Gauss, Codazzi e Ricci (1.2.5, 1.2.7, 1.2.8). O teorema fundamental das imersões garante a recíproca ou seja, dada uma "segunda forma fundamental em M " que verifica as equações acima mencionadas, existe uma imersão isométrica $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ que tem esta forma como 2.^a forma fundamental.

Mais precisamente, seja $E^p \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial p -dimensional sobre M com métrica riemanniana (como fibrado) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma conexão ∇^E compatível com a métrica. Uma segunda forma fundamental é uma secção diferenciável do fibrado $\text{Hom}(TM \otimes E, TM)$ satisfazendo

$$\langle A(X, \xi), Y \rangle = \langle X, A(Y, \xi) \rangle$$

ou equivalente uma secção α do fibrado $\text{Hom}(TM \otimes TM, E)$ tal que

$\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$. A equivalência dos dois conceitos é no sentido que a relação

$$\langle \alpha(X, Y) \xi \rangle = \langle A(X, \xi), Y \rangle$$

define uma das secções a partir da outra.

(1.3.1) TEOREMA: Seja $E^p \xrightarrow{\pi} M$ um fibrado vetorial p -dimensional com métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e uma conexão ∇^E compatível com a dita métrica. Dada uma 2.^a forma fundamental $\alpha : M \rightarrow \text{Hom}(TM \otimes TM, E)$ que verifique as equações de Gauss, Codazzi e Ricci, existe uma imersão isométrica local $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ tal que $E^p \xrightarrow{\pi} M$ é isométrico a νM e α é a 2.^a forma fundamental de f . Além disso, se M é simplesmente conexa f é globalmente definida.

A imersão isométrica cuja existência é garantida pelo teorema acima é essencialmente única:

1.3.2 TEOREMA: Sejam $f_1, f_2 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ duas imersões isométricas com fibrados normais $E_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ nas condições acima. Então se existir uma isometria de fibrados:

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ \parallel \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M \end{array}$$

que preserva as conexões $\nabla^{E_1}, \nabla^{E_2}$ e as segundas formas fundamentais, então existe uma isometria

$\varphi : \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ tal que

$$\varphi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$$

Um conceito bastante importante relacionado com os teoremas acima é o de "número tipo" de um conjunto de operadores lineares. Sejam V, W espaços vetoriais e $L = \{L_1, \dots, L_p\}$ um conjunto de operadores lineares $L_i: V \longrightarrow W$. Chama-se de *número tipo* de L o máximo inteiro $t = t(L)$ tal que existem t vetores X_1, \dots, X_t em V tais que os vetores $L_i(X_j)$, $i=1, \dots, p$; $j=1, \dots, t$ são linearmente independentes.

Se $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão isométrica, denotaremos por

$$N_1(x) = \text{ger} \{ \alpha(X, Y) : X, Y \in T_x M \}$$

o primeiro espaço normal e se $\{\xi_1, \dots, \xi_q\}$ é uma base para $N_1(x)$, o número tipo de f em x é $t(\{A_{\xi_1}, \dots, A_{\xi_q}\})$. (Não é difícil ver que este número não depende da escolha da base em $N_1(x)$).

1.3.4 TEOREMA (Allendoerfer). Sejam $f_i: M_i \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $i=1, 2$ duas imersões isométricas e $\psi: M_1 \longrightarrow M_2$ uma isometria. Suponhamos que os primeiros espaços normais de f_1 e f_2 tenham dimensão constante e igual. Se $t(f_i) \geq 3$, existe uma isometria $A: \mathbb{R}^{n+p} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ tal que $f_2 = A \circ f_1$.

O problema de existência de imersões isométricas locais de uma variedade n -dimensional em \mathbb{R}^{n+p} se resume, em virtude de 1.3.1 a existência de uma segunda forma fundamental que verifique

as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Queremos observar que a primeira é de caracter puramente algébrico e as outras são de caracter diferencial. A busca de uma segunda forma fundamental que verifique a equação de Gauss se reduz a busca de p transformações lineares simétricas $A_i: T_x M \longrightarrow T_x M$ tais que

$$1.3.5 \quad \rho(X \wedge Y) = \sum_{i=1}^p A_i X \wedge A_i Y$$

Em geral se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $\rho: \Lambda^2(V) \longrightarrow \Lambda^2(V)$ é um operador simétrico, a existência de uma fatorização do tipo 1.3.5 é equivalente ao fato que verifique a primeira identidade de Bianchi. Este resultado devido a Jacobowitz (veja [J]) pode ser considerado o equivalente algébrico do teorema de imersão isométrica de Nash.

Uma vez garantida a existência de uma fatorização $\rho = \sum_{i=1}^p A_i \wedge A_i$, queremos condições suficientes que nos garantam que os A_i 's verificam as equações de Codazzi e Ricci.

1.3.6 TEOREMA (Allendoerfer): Se $\rho = \sum_{i=1}^p A_i \wedge A_i$ e $t(A_1, \dots, A_p) \geq 4$ então os A_i 's verificam as equações de Codazzi e Ricci.

Naturalmente a condição sobre o número tipo é muito forte. No caso $p=1$ ela é equivalente ao posto de ρ ser ≥ 6 mas para $p>1$ ela é efetivamente uma forte restrição. (Para mais detalhes veja [S] vol.V).

Para o caso $p=1$, temos uma série de resultados razoavelmen

te aplicáveis que passamos agora a discutir.

1.3.7 TEOREMA (Thomas): Se M^n é uma variedade riemanniana com operador de curvatura ρ de posto ≥ 6 , então M^n admite uma imersão isométrica local em \mathbb{R}^{n+1} se e somente se existe um operador simétrico $L: T_x M^n \longrightarrow T_x M^n$ tal que $\rho = LAL$.

O teorema de Thomas é obviamente consequência imediata de 1.3.6 e do teorema fundamental sobre imersões isométricas; se posto ≥ 6 , ele reduz o problema da existência de uma imersão isométrica local em \mathbb{R}^{n+1} ao problema puramente algébrico de determinar um operador simétrico L tal que $\rho = LAL$.

1.3.8 DEFINIÇÃO: Diremos que $\rho: \Lambda^2(TM) \longrightarrow \Lambda^2(TM)$ preserva a decomponibilidade se $\forall \omega \in \Lambda^2(TM)$ tal que $\omega^2 = \omega \wedge \omega = 0$ temos $\rho(\omega)^2 = \rho(\omega) \wedge \rho(\omega) = 0$.

A condição de preservar a decomponibilidade é equivalente a que, para todos, $X, Y, Z, W \in T_x M$ se tenha:

$$1.3.9 \quad \rho(XAY) \wedge \rho(ZAW) = -\rho(XAZ) \wedge \rho(YAW)$$

(veja [V₁]). Obviamente se $\rho = LAL$, ρ preserva a decomponibilidade; o inverso é verdade em uma forma fraca:

1.3.10 PROPOSIÇÃO: Seja $\rho: \Lambda^2(V) \longrightarrow \Lambda^2(V)$ um operador simétrico. Então $\rho = \pm LAL$ para algum operador L se e somente se ρ pre-

serva a decomponibilidade e satisfaz uma das duas condições abaixo:

(a) $\rho \wedge \rho \neq 0$ e ρ não é correlação se posto $\rho = 6$

(b) $\rho \wedge \rho = 0$ e ou posto $\rho = 0, 1$ ou posto $\rho = 3$ =
= conulidade ρ .

Lembramos que ρ é uma correlação se preserva a decomponibilidade e, dados X_1, \dots, X_4 linearmente independentes tais que $\rho(X_1 \wedge X_2) = Y_1 \wedge Y_2$, $\rho(X_3 \wedge X_4) = Y_3 \wedge Y_4$ com Y_1, \dots, Y_4 linearmente independentes temos $\rho(X_2 \wedge X_3) = \pm Y_1 \wedge Y_4$ e $\rho(X_1 \wedge X_4) = \pm Y_2 \wedge Y_3$. Lembramos também que o espaço nulo de ρ é definido por:

$$N(\rho) = \{X \in V : \rho(X \wedge Y) = 0, \forall Y \in V\}$$

e a conulidade de ρ é a codimensão de $N(\rho)$. (para maiores detalhes veja [V₂]).

Para o tensor de curvatura de uma variedade riemanniana vale a primeira identidade de Bianchi e portanto a simetria de L na fatorização 1.3.10 é garantida pelo resultado de Jacobowitz já citado. A indeterminação $\pm LAL$ pode ser eliminada com uma condição um pouco técnica que vamos considerar agora.

Seja X_1, \dots, X_n uma base de V e consideremos a matriz de ρ na base $\{X_i \wedge X_j : i, j = 1, \dots, n, i < j\}$

$$\rho_{kl}^{ij} = \langle \rho(X_i \wedge X_j), X_k \wedge X_l \rangle$$

Definimos

$$\delta(\rho) = \sum_{i, j, k, l, p, q} \rho_{kl}^{ij} \rho_{iq}^{kp} \rho_{jp}^{lq}$$

$$\psi(\rho) = \sum_{i,j,k,\ell,p,q} \rho_{k\ell}^{ij} \rho_{pq}^{k\ell} \rho_{ij}^{pq}$$

1.3.11 TEOREMA: Se $\rho = \pm LAL$ e $\emptyset(\rho) + \frac{1}{4} \psi(\rho) > 0$, então $\rho = LAL$

DEMONSTRAÇÃO: veja $[V_1]$.

1.3.12 EXEMPLO: O exemplo a seguir está diretamente relacionado com uma classe de variedades riemannianas, as variedades com operador de curvatura *puro* que é na realidade o tema central desta tese.

Suponhamos que M^n seja uma variedade riemanniana tal que, para cada $x \in M^n$ existe uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ em $T_x M^n$ tal que $\rho(X_i \wedge X_j) = \lambda_{ij} X_i \wedge X_j$. Os autovalores λ_{ij} são então as curvaturas seccionais dos planos $\sigma_{ij} = \text{ger}\{X_i, X_j\}$. A condição de ρ preservar a decomponibilidade é

$$1.3.13 \quad \lambda_{ij} \lambda_{kl} = \lambda_{ik} \lambda_{jl} \quad i, j, k, \ell \text{ distintos}$$

e

$$\psi(\rho) = \sum_{i < j} \lambda_{ij}^3 \quad \text{e} \quad \emptyset(\rho) = \sum_{i < j < p} \lambda_{ij} \lambda_{ip} \lambda_{jp}$$

Suponhamos agora que as curvaturas seccionais sejam não negativas e $\lambda_{ij} \neq 0$ para $i, j = 1, \dots, 4$. Então $\emptyset(\rho) + \frac{1}{4} \psi(\rho) > 0$ e posto $\rho \geq 6$. Além disso $\rho(X_1 \wedge X_2) \wedge \rho(X_3 \wedge X_4) = \lambda_{12} \lambda_{34} X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4 \neq 0$ e portanto ρ não é correlação. Portanto nesta situação $\rho = LAL$ e L verifica as equações de Codazzi e portanto uma variedade riemanniana nas hipóteses acima admite localmente uma imersão isométrica em \mathbb{R}^{n+1} .

CAPÍTULO II

VARIETADES CONFORMEMENTE PLANAS

Neste capítulo queremos estudar alguns aspectos de uma classe de variedades riemannianas cujo tensor curvatura tem uma estrutura algébrica particularmente simples, as variedades conformemente planas, tendo em vista particularmente uma caracterização daquelas tais variedades que admitem uma imersão isométrica em um espaço euclidiano em codimensão baixa.

§ 1. GENERALIDADES

2.1.1 DEFINIÇÃO: Uma variedade riemanniana M^n , $n = \dim M$, é (localmente) *conformemente plana* se $\forall x \in M^n$ existe uma vizinhança $U_x \subseteq \mathbb{R}^n$ de x e um difeomorfismo conforme $\varphi: U_x \rightarrow \Lambda \subseteq \mathbb{R}^n$.

Se $n=2$ todas variedades M^2 são conformemente planas como consequência da existência de parâmetros isotérmicos. Se $n \geq 4$, várias condições de carácter pontual sobre as curvaturas de M são equivalentes a M ser conformemente plana. Vamos agora enunciar algumas delas. Seja $x \in M$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de $T_x M$ e consideramos o operador de Ricci $Q: T_x M \rightarrow T_x M$ definido por

$$Q(X) = \sum_{i=1}^n R(X, X_i) X_i$$

onde R é o tensor de curvatura de M . Consideremos o operador $\gamma : T_x M \longrightarrow T_x M$ definido por

$$\gamma(X) = \frac{1}{(n-2)} \left[Q - \frac{\text{traço } Q}{2(n-1)} I \right] (X)$$

2.1.2 TEOREMA (Weyl, veja [B.G.]): Se $n \geq 4$, M^n é conformemente plana se e somente se $\forall X, Y \in T_x M$

$$\rho(X \wedge Y) = \gamma(X) \wedge Y + X \wedge \gamma(Y)$$

onde $\rho : \Lambda_x^2(M) \longrightarrow \Lambda_x^2(M)$ é o operador de curvatura de M .

O resultado a seguir caracteriza as variedades conformemente planas ($n \geq 4$) em termos de curvaturas seccionais:

2.1.3 TEOREMA (Kulkarni, [K]): Se $n \geq 4$, M^n é conformemente plana se e somente se para cada quatro vetores ortogonais X_1, \dots, X_4 temos

$$K(X_1, X_2) + K(X_3, X_4) = K(X_1, X_3) + K(X_2, X_4)$$

Suponhamos agora dada uma variedade M^n e uma imersão $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$

2.1.4 DEFINIÇÃO: Diremos que f é uma *imersão conformemente plana* se M for conformemente plana com respeito a métrica induzida por f . Usaremos a notação ICP e as vezes pensaremos M como *varie*

e $\xi \in \nu_x M$ diremos que ξ é uma direção quase umbílica se e somente se A_ξ tem um autovalor de multiplicidade pelo menos $(n-1)$. Diremos que f é quase umbílica se $\forall x \in M$ existe uma base ortonormal $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ de $\nu_x M$ tal que ξ_i é direção quase umbílica para $i = 1, \dots, p$.

Os conceitos de ICP e imersões quase umbílicas são relacionados pelo seguinte resultado:

2.1.9 TEOREMA (Moore-Morvan [M-M]): Seja M^n uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq 4$ e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com $p \leq 4$ e $p \leq n-3$. Então f é ICP se e somente se é quase umbílica.

Imersões quase umbílicas têm sido consideradas por B.Y.Chen em [Ch₂-T]. Neste trabalho ele afirma que imersões quase umbílicas tem conexão normal plana. Este resultado é falso como mostra o exemplo a seguir:

2.1.10 EXEMPLO: Seja $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão isométrica com M^2 plana e $R^\perp \neq 0$. (Uma tal imersão pode ser obtida de uma imersão (local) cilíndrica de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 e uma imersão cilíndrica de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^4 ao longo de uma curva não tangente às direções principais da primeira imersão). Consideremos a imersão produto $\bar{f} : M^2 \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$. Então \bar{f} ainda satisfaz $R^\perp \neq 0$ e $M^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ é plana (em particular conformemente plana). Sejam $\{\xi_1, \xi_2\}$ um referencial ortonormal para \bar{f} e $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal de $T_x(M^2 \times \mathbb{R}^{n-2})$ tal que $\{X_1, X_2\}$ é um referencial de

$T_x M^2$ que diagonaliza A_{ξ_1} | TM_2

Os operadores de Weingarten A_{ξ_1} e A_{ξ_2} de \bar{f} são da forma:

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} a & b & & 0 \\ & b & c & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos $\xi_\theta = \cos\theta \xi_1 + \sin\theta \xi_2$. Temos então

$$A_{\xi_\theta} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \cos\theta + a \sin\theta & & b \sin\theta & & 0 \\ & b \sin\theta & & \lambda_2 \cos\theta + c \sin\theta & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

e a condição para ξ_θ ser quase umbílico é

$$(\lambda_1 \cos\theta + a \sin\theta) (\lambda_2 \cos\theta + c \sin\theta) - b^2 \sin^2\theta = 0.$$

Desenvolvendo temos

$$\lambda_1 \lambda_2 \cos^2\theta + (a \lambda_2 + c \lambda_1) \cos\theta \sin\theta + (ac - b^2) \sin^2\theta = 0$$

Observamos que $K(X_1, X_2) = \lambda_1 \lambda_2 + (ac - b^2) = 0$ e portanto substituindo $-\lambda_1 \lambda_2$ por $(ac - b^2)$ vemos que a equação acima tem sempre uma solução, pois os coeficientes dos termos em $\cos^2\theta$ são opostos

e portanto \bar{F} tem pelo menos uma direção quase umbílica. O resultado geral abaixo permite concluir que \bar{F} é quase umbílica (este resultado é de Chen-Yano (veja [Ch₁] cap.5, prop.2.1) e daremos uma demonstração simplificada).

2.1.11 PROPOSIÇÃO: Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma ICP, $n \geq 5$ e ξ uma direção quase umbílica. Então ξ^\perp é quase umbílico.

DEMONSTRAÇÃO: Seja X_1, \dots, X_n uma base como em 2.1.7. Além disso podemos escolher X_1, X_2 tais que a base acima diagonalize A_ξ . Temos então:

$$A_\xi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \quad A_{\xi^\perp} = \begin{bmatrix} a & b & & & 0 \\ & b & c & & \\ & & & \mu & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

Pela equação de Gauss temos

$$\begin{aligned} K(X_1, X_2) &= \lambda \lambda_1 + (ac - b^2) & K(X_1, X_4) &= \lambda \lambda_1 + a\mu \\ K(X_3, X_4) &= \lambda^2 + \mu^2 & K(X_2, X_3) &= \lambda^2 + c\mu \end{aligned}$$

Portanto por 2.1.3

$$0 = K(X_1, X_2) + K(X_3, X_4) - K(X_1, X_4) - K(X_2, X_3) = \mu^2 - (a+c)\mu + (ac-b^2)$$

o que implica que ξ^\perp é uma direção quase umbílica pois μ é autova-

lor de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} .$$

2.1.12. OBSERVAÇÃO: Não é de estranhar que a condição que garante a existência de uma direção quase umbílica no exemplo acima é o anular-se da curvatura seccional de M^2 . De fato 2.1.3 implica facilmente que se uma variedade conformemente plana é produto de subvariedades de dimensão ≥ 2 então $\forall X, Y$ tangentes ao primeiro fator e $\forall W, Z$ tangentes ao segundo, $K(X, Y) = -K(W, Z)$.

§ 2. ESTRUTURA FOLHEADA DE UMA IMERSÃO CONFORMEMENTE PLANA

Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, $n \geq 4$ e $p \leq n-3$, uma ICP. Por 2.1.7 $\forall x \in M^n$ fica determinado o "autoespaço relativo ao autovalor ξ de α " o que sugere a existência de uma "distribuição de curvaturas principais" associadas. Queremos precisar e estudar esta idéia.

2.2.1 DEFINIÇÃO: Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Uma *curvatura principal* ξ em x é um vetor $\xi \in v_x M$ tal que o espaço vetorial

$$E_x(\xi) = \{X \in T_x M : A_n X = \langle n, \xi \rangle X, \forall n \in v_x M\}$$

tem dimensão positiva. Uma *secção principal* é um campo normal contínuo ξ tal que ξ é uma curvatura principal em cada ponto.

Dada uma secção principal ξ , consideremos os subconjuntos

$$M_i = \{x \in M / \dim E_x(\xi) = i\}$$

Sendo a função dimensão superiormente semicontínua temos

$$M = \overline{\bigcup_i M_i^{\circ}}, \quad M_i^{\circ} = \text{interior de } M_i.$$

2.2.2 TEOREMA (Reckziegel [Re]): Com as notações acima temos :

1. ξ é diferenciável em M_i° e $E(\xi)$ é integrável em M_i° .
2. As variedades integrais de $E(\xi)$ são umbílicas em M e \mathbb{R}^{n+p} .
3. Se $\nabla_X^\perp \xi = 0$, $\forall X \in E(\xi)$ então as variedades integrais de $E(\xi)$ tem curvatura média paralela em M .
4. Se M é completa e M_i° é aberto, as variedades integrais de $E(\xi)$ são completas.

Antes de aplicar o resultado acima à nossa situação vamos introduzir algumas definições:

2.2.3 DEFINIÇÃO: Uma subvariedade $\Sigma \longrightarrow M$ é uma *esfera extrín*
seca se Σ é umbílica e o vetor curvatura média é paralelo na co-
nexão normal. Se, além disso M tem curvatura constante k^2 ao lon-
go de Σ , diremos que Σ é uma *esfera geométrica de tipo 0 ou 1 res*
pectivamente se $k=0$ ou $k>0$.

2.2.4 TEOREMA: Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma ICP, $n \geq 4$ e $p \leq n-3$. En-
tão existe um subconjunto aberto e denso $V \subseteq M^n$, folheado por es-
feras geométricas totalmente umbílicas em \mathbb{R}^{n+p} .

DEMONSTRAÇÃO: O teorema 2.1.7 garante a existência em cada $x \in M$ de uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ tal que

$$\alpha(X_i, X_j) = \begin{bmatrix} A & & & & 0 \\ & \xi & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \\ & 0 & & & \xi \end{bmatrix}$$

onde A é uma matriz vetorial $(n-\ell) \times (n-\ell)$ para algum $\ell \geq n-p$. Portanto ξ é uma secção principal e é diferenciável no conjunto $U = \overset{\circ}{U}M_i$ onde também a base $\{X_1, \dots, X_n\}$ pode ser escolhida diferenciavelmente.

Seja $x \in \overset{\circ}{M}_\ell$. Escrevendo a equação de Codazzi para X_i, X_j, X_j , $i, j \geq \ell$, $i \neq j$ temos:

$$\nabla_{X_i}^\perp \xi = \langle \nabla_{X_j} X_j, X_i \rangle (\alpha(X_j, X_j) - \alpha(X_i, X_i)) = 0.$$

Portanto podemos aplicar 2.2.2 e concluir observando que a curvatura de M ao longo dos planos $X_i \wedge X_j$, $i, j \geq \ell$ é $\|\xi\|^2$ que é obviamente constante e não negativa ao longo das folhas. Além disso se Σ é uma folha (umbílica) com segunda forma fundamental $\alpha(X_i, X_i) = \lambda X$ temos, pela equação de Guass

$$\tilde{K}(X_i, X_j) = K(X_i, X_j) + \lambda^2.$$

Portanto Σ tem curvatura constante não negativa em cada ponto e portanto constante pelo lema de Schur ($\dim \Sigma \geq n-p \geq 3$).

§ 3. IMERSÕES CONFORMEMENTE PLANAS EM CODIMENSÃO 2 COM $R^1 \equiv 0$

Com a finalidade de entender melhor a estrutura folheada de uma ICP, vamos examinar o caso de codimensão baixa e fibrado normal plano. Queremos observar explicitamente que a hipótese $R^1 \equiv 0$ "pertence a geometria conforme" no sentido que uma transformação conforme do espaço ambiente transforma uma imersão com $R^1 \equiv 0$ em outra com a mesma propriedade.

O caso de hipersuperfícies, $p = 1$, é estudado com bastante detalhe em [C-D-M]. Vamos aqui ressaltar algumas consequências imediatas dos resultados do §2. Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma ICP, $n \geq 4$. M_n é então o conjunto dos pontos de curvatura constante, umbílicos de f e as componentes conexas de $\overset{\circ}{M}_n$ são aplicadas por f sobre abertos de n -esferas ou n -planos em \mathbb{R}^{n+1} . $\overset{\circ}{M}_{n-1}$ é a reunião de dois subconjuntos U_0 e U_1 folheados por esferas geométricas de codimensão 1 de tipo 0 e 1 respectivamente. Além disso $\overset{\circ}{U}_0 \cup \overset{\circ}{U}_1$ é denso em $\overset{\circ}{M}_{n-1}$. Como este tipo de estrutura aparecerá em codimensão maior, vamos dar a seguinte definição:

2.3.1 DEFINIÇÃO: Uma variedade M^n é *conformemente plana de tipo* (p, ϵ) ($\epsilon=0,1$) se M^n é folheada por esferas geométricas de codimensão p e de tipo ϵ .

Vamos considerar agora uma ICP $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ com $R^1 \equiv 0$. Temos então que $\overset{\circ}{M}_n$ é uma variedade conformemente plana de tipo $(0, \epsilon)$. As componentes conexas de $\overset{\circ}{M}_{n-1}$ são também variedades conformemente planas de tipo $(1, \epsilon)$ e, como veremos a seguir, tem a mesma estrutura intrínseca das ICP em \mathbb{R}^{n+1} .

Seja $x \in \mathring{M}_{n-2}$ e ξ_1, ξ_2 duas direções quase umbílicas ortogonais em x e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base que diagonaliza simultaneamente A_{ξ_1} e A_{ξ_2} . Nesta base os dois operadores A_{ξ_i} são da forma (a menos de reordenar os índices)

$$A_{\xi_1} = \begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a \end{bmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{bmatrix} b_1 & & & & 0 \\ & b_2 & & & \\ & & b & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & b \end{bmatrix}$$

sendo $b_1 = b$ ou $b_2 = b$.

2.3.2 LEMA: $b_2 \neq b$, $a_1 \neq a$ e $b_1 = b$

DEMONSTRAÇÃO: Com as notações do §2, se $b_2 = b$, $E(\xi) \supseteq \text{ger}\{X_2, \dots, X_n\}$ e portanto $x \in M_{n-1} \cup M_n$. Então $b_2 \neq b$ e $b_1 = b$. Pelo mesmo argumento $a_1 \neq a$.

Vamos considerar em \mathring{M}_{n-2} os seguintes subconjuntos

$$U_0^2 = \{x \in \mathring{M}_{n-2} : a^2 + b^2 = 0\}$$

$$U_1^2 = \{x \in \mathring{M}_{n-2} : ab = 0, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

$$U_2^2 = \{x \in \mathring{M}_{n-2} : ab \neq 0\}$$

2.3.3 OBSERVAÇÃO: Os conjuntos acima são bem definidos. De fato as direções quase umbílicas são univocamente determinadas pois $x \in M_{n-2}$. As componentes conexas de \mathring{U}_0^2 são planas e portanto con

formemente planas de tipo (0,0).

2.3.4 PROPOSIÇÃO: As componentes conexas de $\overset{\circ}{U}_1^2$ são conformemente planas de tipo (1,1). De fato existem imersões isométricas locais de U_1^2 em \mathbb{R}^{n+1} .

DEMONSTRAÇÃO: Suponha $b = 0$. Temos então pela equação de Gauss

$$\rho(XAY) = A_{\xi_1} X \wedge A_{\xi_1} Y$$

Portanto A_{ξ_1} é um operador linear simétrico que verifica a equação de Gauss. Além disso sendo $n \geq 5$, $a \neq 0$ implica posto $\rho \geq 6$ e portanto A_{ξ_1} verifica as equações de Codazzi (veja 1.3.7) e o teorema de existência 1.3.1 garante a nossa afirmação.

Vamos então estudar com mais detalhes a estrutura local das componentes conexas de $\overset{\circ}{U}_2^2$. Elas são conformemente planas do tipo (2,1) e vamos agora ver como a folheação por esferas geométricas de codimensão 2 aparece como intersecção de duas folheações ortogonais de codimensão 1 cujas folhas são quase umbílicas em M e conformemente planas de tipo (1,1).

Seja $x \in \overset{\circ}{U}_2^2$ e $\bar{\xi}_1$ e $\bar{\xi}_2$ um referencial ortonormal paralelo na conexão normal. Os operadores de Weingarten associados são da forma

$$A_{\bar{\xi}_1} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & & & & & 0 \\ & \bar{a}_2 & & & & \\ & & \bar{a} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \bar{a} & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \quad A_{\bar{\xi}_2} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & & & & & 0 \\ & \bar{b}_2 & & & & \\ & & \bar{b} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \bar{b} & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix}$$

onde $\xi = \bar{a} \bar{\xi}_1 + \bar{b} \bar{\xi}_2$. Como já mostramos em 2.2.4 que $\nabla_{X_j}^\perp \xi = 0$ $j \geq 3$, segue que \bar{a} e \bar{b} são constantes em cada folha Σ da folheação por esferas geométricas de codimensão 2. Queremos relacionar as direções paralelas $\bar{\xi}_1$ e $\bar{\xi}_2$ com as direções quase umbílicas ξ_1 e ξ_2 . Dados $\bar{\xi}_1$ e $\bar{\xi}_2$, seja $\xi_\theta = \cos\theta \bar{\xi}_1 + \sin\theta \bar{\xi}_2$. ξ_θ é uma direção quase umbílica se e somente se o ângulo θ é solução da equação:

$$(\cos\theta \bar{a}_1 + \sin\theta \bar{b}_1 - \cos\theta \bar{a} - \sin\theta \bar{b}) \cdot (\cos\theta \bar{a}_2 + \sin\theta \bar{b}_2 - \cos\theta \bar{a} - \sin\theta \bar{b}) = 0$$

As soluções da equação acima são dadas por

$$\theta_1 = \arctg \left[\frac{\bar{a}_1 - \bar{a}}{\bar{b}_1 - \bar{b}} \right] \quad \theta_2 = \arctg \left[\frac{\bar{a}_2 - \bar{a}}{\bar{b}_2 - \bar{b}} \right]$$

Observamos que a condição do teorema 2.1.3

$$K(X_1, X_2) + K(X_3, X_4) = K(X_1, X_3) + K(X_2, X_4)$$

que pela equação de Gauss é escrita

$$(\bar{a}_2 - \bar{a}) (\bar{a}_1 - \bar{a}) + (\bar{b}_2 - \bar{b}) (\bar{b} - \bar{b}_1) = 0$$

que garante ξ_{θ_1} e ξ_{θ_2} serem ortogonais.

2.3.5. COROLÁRIO: As direções quase umbílicas ξ_1 e ξ_2 são diferenciáveis em U_2^2 .

Antes de proceder ao estudo das distribuições dos autoespaços das direções quase umbílicas, vamos coletar algumas fórmulas, consequências das equações de Codazzi, que nos serão úteis. Fixaremos então dois vetores unitários ξ_1, ξ_2 nas direções quase umbílicas, diferenciáveis em uma vizinhança aberta em U_2^2 e seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal e diferenciável tangente a M que diagonaliza A_{ξ_i} e tal que X_i seja o autovetor simples de A_{ξ_i} , $i = 1, 2$.
A equação de Codazzi é

$$D_{X_i} \alpha(X_j, X_k) = D_{X_j} \alpha(X_i, X_k).$$

Sejam $a_i = \langle A_{\xi_1} X_i, X_i \rangle$, $b_i = \langle A_{\xi_2} X_i, X_i \rangle$. $a_i = a$, $i \neq 1$ e $b_i = b$, $i \neq 2$.

Sejam

$$\Gamma_{ij}^k = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle$$

os símbolos de Cristoffel da conexão ∇ . A equação de Codazzi se escreve então:

$$\begin{aligned} & \delta_{jk} [X_i(a_k) \xi_1 + X_i(b_k) \xi_2 + a_k \nabla_{X_i}^\perp \xi_1 + b_k \nabla_{X_i}^\perp \xi_2] + \Gamma_{ij}^k [(a_k - a_j) \xi_1 + \\ & + (b_k - b_j) \xi_2] = \delta_{ik} [X_j(a_k) \xi_1 + X_j(b_k) \xi_2 + a_k \nabla_{X_j}^\perp \xi_1 + b_k \nabla_{X_j}^\perp \xi_2] + \\ & + \Gamma_{jk}^i [(a_k - a_i) \xi_1 + (b_k - b_i) \xi_2]. \end{aligned}$$

Se $i \neq j \neq k \neq i$ temos

$$2.3.5.1 \quad \begin{cases} \Gamma_{ij}^k (a_k - a_j) - \Gamma_{jk}^i (a_k - a_i) = 0 \\ \Gamma_{ij}^k (b_k - b_j) - \Gamma_{jk}^i (b_k - b_j) = 0 \end{cases}$$

Se $i \neq j$, $j = k$ temos

$$2.3.5.2 \quad \begin{cases} X_i (a_k) + b_k \langle \nabla_{X_i}^\perp \xi_2, \xi_1 \rangle = \Gamma_{kk}^i (a_k - a_i) \\ X_i (b_k) + a_k \langle \nabla_{X_i}^\perp \xi_1, \xi_2 \rangle = \Gamma_{kk}^i (b_k - b_i) \end{cases}$$

2.3.6 LEMA: A conexão normal é dada em termos de a_i , b_i por:

$$(a) \quad \nabla_{X_1}^\perp \xi_1 = \frac{-X_1(b)}{a} \xi_2, \quad \nabla_{X_1}^\perp \xi_2 = \frac{X_1(b)}{a} \xi_1$$

$$(b) \quad \nabla_{X_2}^\perp \xi_1 = \frac{X_2(a)}{b} \xi_2, \quad \nabla_{X_2}^\perp \xi_2 = \frac{-X_2(a)}{b} \xi_1$$

$$(c) \quad \nabla_{X_i}^\perp \xi_1 = 0, \quad \nabla_{X_i}^\perp \xi_2 = 0 \quad i \geq 3$$

DEMONSTRAÇÃO: Pondo $i = 1$, $k > 2$ na segunda equação de 2.3.4.2 temos (a). Analogamente segue (b) pondo $i = 2$ e $k > 2$ na primeira equação. Além disso se $i, k > 2$ temos

$$\langle \nabla_{X_i}^\perp \xi_1, \xi_2 \rangle = \frac{X_i(b)}{a}$$

Por outro lado para $k = 1$ e $i > 2$ temos na segunda equação de 2.3.4.2

$$\langle \nabla_{X_i}^1 \xi_1, \xi_2 \rangle = \frac{-X_i(b)}{a_1}$$

e sendo $a \neq a_1$ segue $X_i(b) = 0 = \langle \nabla_{X_i}^1 \xi_1, \xi_2 \rangle$, $i > 2$

2.3.7 COROLÁRIO: $X_i(a) = 0 = X_i(b)$ se $i \geq 3$.

2.3.8 LEMA: Os símbolos de Cristoffel são dados em termos de a_i, b_i por:

$$(a) \quad r_{ij}^1 = r_{ij}^2 = 0 \quad \text{se } i \neq j, i, j \geq 3$$

$$(b) \quad r_{ii}^1 = \frac{1}{2} \frac{X_1(a^2+b^2)}{a(a-a_1)}, \quad r_{ii}^2 = \frac{1}{2} \frac{X_2(a^2+b^2)}{b(b-b_2)}, \quad i \geq 3$$

$$(c) \quad r_{11}^i = \frac{X_i(a_1)}{a_1-a}, \quad r_{22}^i = \frac{X_i(b_2)}{(b_2-b)}, \quad i \geq 3$$

$$(d) \quad r_{11}^2 = \frac{X_2(a_1-a)}{(a_1-a)}, \quad r_{22}^1 = \frac{X_1(b_2-b)}{(b_2-b)}$$

$$(e) \quad r_{12}^i = 0 = r_{21}^i, \quad i \geq 3$$

DEMONSTRAÇÃO: A 2.3.4.1 para $k = 1$, $i \neq j$, $i, j \geq 3$ fornece $r_{ij}^1 - r_{ji}^1 = 0$. Por outro lado a distribuição $\{X_3, \dots, X_n\}$ é integrável e portanto $r_{ij}^1 - r_{ji}^1 = 0$. Logo $2 r_{ij}^1 = r_{j1}^1 - r_{ji}^1 = 0$ o que prova (a). A (b) segue de 2.3.4.2 para $i = 1, 2$, $k > 3$ tendo em conta 2.3.6. A (c) segue também de 2.3.4.2 para $i > 3$, $k=1, 2$. Analogamente (d) segue de 2.3.4.2 e (e) segue de 2.3.4.1.

Vamos agora considerar as distribuições $D_1 = \text{ger}\{X_2, \dots, X_n\}$,
 $D_2 = \text{ger}\{X_1, X_3, \dots, X_n\}$, $D = D_1 \cap D_2 = \text{ger}\{X_3, \dots, X_n\}$ e
 $D^\perp = \text{ger}\{X_1, X_2\}$.

2.3.9 TEOREMA: As distribuições acima são integráveis. Além disso se Σ_i é uma variedade integral de D_i , Σ_i é quase umbílica em M e, na métrica induzida, conformemente plana de tipo (1.1).

DEMONSTRAÇÃO: A integrabilidade das distribuições acima segue imediatamente de 2.3.8. A segunda forma fundamental de Σ_1 em M é dada por:

$$\langle \tilde{A}_{X_1} X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1$$

e a quase umbilicidade segue também de 2.3.8. Analogamente para Σ_2 .

O fato de Σ_i ser conformemente plana segue do fato geral que uma hipersuperfície quase umbílica de uma variedade conformemente plana é conformemente plana. De fato sendo M conformemente plana, $\forall x \in M$ existe um difeomorfismo conforme de uma vizinhança U de x em um aberto de \mathbb{R}^n . Difeomorfismos conformes preservam a quase umbilicidade e portanto a imagem de Σ_i em \mathbb{R}^n é quase umbílica e portanto conformemente plana. Mas a métrica original de Σ_i é conforme a métrica induzida pela imersão em \mathbb{R}^n e portanto a métrica originária de Σ_i é conformemente plana. Vamos agora mostrar que Σ_1 é do tipo (1.1). Claramente a distribuição D induz uma folheação de Σ_1 ; seja Σ uma variedade integral de D , $\Sigma \subset \Sigma_1$.

Então Σ tem curvatura seccional constante e sua segunda forma fundamental em Σ_1 é dada por

$$\langle \tilde{A}_{X_1} X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_1 \rangle = \Gamma_{ij}^1$$

portanto Σ é umbílica em Σ_1 como segue de 2.3.8. A curvatura média H_1 de Σ em Σ_1 é

$$H_1 = \sum_{i>3} \Gamma_{ii}^2 X_2$$

e H , a curvatura média de Σ em M , é

$$H = \sum_{i>3} \Gamma_{ii}^1 X_1 + \sum_{i>3} \Gamma_{ii}^2 X_2$$

Por 2.3.8 (e) e pela integrabilidade de D_1 temos

$$\Gamma_{i2}^1 = \Gamma_{2i}^1 + \langle [X_i, X_2], X_1 \rangle = -\Gamma_{21}^1 + \langle [X_i, X_2], X_1 \rangle = 0$$

Sendo H paralelo temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{X_j}^1 H = \sum_{i>3} X_j (\Gamma_{ii}^1) X_1 + \Gamma_{ii}^1 \nabla_{X_i}^1 X_1 + \sum_{i>3} X_j (\Gamma_{ii}^2) X_2 + \Gamma_{ii}^2 \nabla_{X_i}^1 X_2 = \\ &= (n-2) (X_j (\Gamma_{ii}^1) X_1 + X_j (\Gamma_{ii}^2) X_2 + \Gamma_{ii}^1 \Gamma_{i1}^2 X_2 + \Gamma_{ii}^2 \Gamma_{i2}^1 X_1) = 0 \end{aligned}$$

Portanto $X_j (\Gamma_{ii}^1) = 0 = X_j (\Gamma_{ii}^2)$ e também H_1 é paralelo na conexão normal de Σ em Σ_1 . Analogamente para Σ_2 .

A curvatura de Σ_1 ao longo de Σ é dada pela equação de Gauss

$$\tilde{K}_1(X_i, X_j) - K(X_i, X_j) = \|H_1\|^2$$

e portanto $\tilde{K}_1(X_i, X_j)$ é constante positiva ao longo de Σ .

Antes de fechar este parágrafo queremos ressaltar algumas outras relações entre os invariantes intrínsecos de uma variedade conformemente plana nas hipóteses do teorema 2.3.9.

Seja $k = K(X_i, X_j)$, $k_1 = K(X_1, X_i)$, $k_2 = K(X_2, X_i)$, $i, j \geq 3$.

Temos então $a^2 + b^2 = k$, $aa_1 + b^2 = k_1$, $bb_2 + a^2 = k_2$. Chamando $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, a primeira equação de 2.3.8 (d) fornece:

$$r_{11}^2 = -X_2 (\log(|a_1 - a|)) = -X_2 \left(\log \frac{|k_1 - k|}{\sqrt{k}} - \log \cos \varphi \right)$$

Analogamente a segunda equação 2.3.7 (d) fornece

$$r_{22}^1 = -X_1 (\log(|b_2 - b|)) = -X_1 \left(\log \frac{|k_2 - k|}{\sqrt{k}} - \log \sin \varphi \right)$$

Portanto φ é solução do sistema:

$$2.3.10 \quad \left\{ \begin{array}{l} (C_1): X_2 (\log \cos \varphi) = r_{11}^2 + X_2 \left(\log \frac{|k_1 - k|}{\sqrt{k}} \right) \\ (C_2): X_1 (\log \sin \varphi) = r_{22}^1 + X_1 \left(\log \frac{|k_2 - k|}{\sqrt{k}} \right) \end{array} \right.$$

A equação de Ricci para imersão $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ fornece, de modo análogo, uma equação diferencial de 2.^a ordem que admite φ como so

lução. A saber, por 2.3.6 temos:

$$R^1(X_1, X_2)\xi_1 = \nabla_{X_1}^1 \left(\frac{X_2(a)}{b} \right) \xi_2 - \nabla_{X_2}^1 \left(\frac{-X_1(b)}{a} \right) \xi_2 - \nabla_{[X_1, X_2]}^1 \xi_1 = 0$$

Desenvolvendo e escrevendo $[X_1, X_2]$ em termos da conexão ∇ , temos

$$X_1 \left(\frac{X_2(a)}{b} \right) + X_2 \left(\frac{X_1(b)}{a} \right) - \Gamma_{11}^2 \left(\frac{X_1(b)}{a} \right) - \Gamma_{22}^1 \left(\frac{X_2(a)}{b} \right) = 0$$

Lembrando que $a = \sqrt{k} \cos \varphi$ e $b = \sqrt{k} \sin \varphi$, temos

$$\begin{aligned} & X_2(X_1(\varphi)) - X_1(X_2(\varphi)) + X_1(\cotg \varphi X_2(\log(\sqrt{k}))) + \\ & + X_2(\tg \varphi X_1(\log(\sqrt{k}))) = \Gamma_{11}^2(X_1(\varphi) + \tg \varphi X_1(\log(\sqrt{k}))) + \\ & + \Gamma_{22}^1(-X_2(\varphi) + \cotg \varphi X_2(\log(\sqrt{k}))). \end{aligned}$$

Portanto φ é solução de:

$$\begin{aligned} 2.3.11(R): \quad & X_1(\cotg \varphi X_2(\log(\sqrt{k})) + X_2(\tg \varphi X_1(\log(\sqrt{k})))) = \\ & = \Gamma_{22}^1(\cotg \varphi X_2(\log(\sqrt{k})) + \Gamma_{11}^2(\tg \varphi X_1(\log(\sqrt{k}))). \end{aligned}$$

Queremos observar explicitamente que a existência de solução φ do sistema $\{C_1, C_2, R\}$ depende somente dos invariantes intrínsecos de M .

§ 4. EXISTÊNCIA DE IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Neste parágrafo vamos tentar inverter os resultados do § 3, mostrando que as condições geométricas intrínsecas de uma variedade conformemente plana isometricamente imersa em \mathbb{R}^{n+2} com $R^1 = 0$ são suficientes para garantir a existência de uma tal imersão isométrica. O primeiro resultado é devido a do Carmo e Dajczer (veja [C-D]) e daremos uma demonstração levemente simplificada na hipótese adicional $n \geq 5$.

2.4.1 TEOREMA: Seja M^n uma variedade conformemente plana do tipo $(1, \varepsilon)$, $n \geq 5$. Então M^n admite uma imersão isométrica local em \mathbb{R}^{n+1} .

DEMONSTRAÇÃO: Seja $U \subseteq M$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ um referencial local ortonormal adaptado à estrutura folheada, isto é, X_1 é normal a folha Σ . A segunda forma fundamental de Σ em M é dada por

$$\tilde{A}_{X_1}(X_i) = \lambda X_i$$

sendo Σ umbílica em M . As curvaturas de M e Σ respectivamente no plano $\{X_i, X_j\}$, $i, j \geq 2$ são relacionadas pela equação de Gauss

$$\tilde{K}(X_i, X_j) - K(X_i, X_j) = \lambda^2$$

Pelo teorema 2.1.3 temos

/

$$K(X_1, X_i) + K(X_j, X_\ell) = K(X_1, X_j) + K(X_i, X_\ell)$$

para cada i, j, ℓ distintos e maiores que 1. Portanto $K(X_1, X_i)$ não depende i . Pondo $\mu = K(X_1, X_j)^{1/2}$ e $\mu_1 = K(X_1, X_i)\mu^{-1}$ consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu \end{bmatrix}$$

2.4.11 ASSERÇÃO: $\rho = A \wedge A$

De fato o operador de curvatura $\tilde{\rho}$ de Σ é da forma

$$\tilde{\rho}(X_i \wedge X_j) = \tilde{K}(X_i, X_j) X_i \wedge X_j = (\lambda^2 + \mu^2) X_i \wedge X_j$$

pois Σ tem curvatura constante $(\lambda^2 + \mu^2)$. Pela equação de Gauss temos então

$$\tilde{\rho}(X_i \wedge X_j) - \rho(X_i \wedge X_j) = \tilde{A}_{X_1}(X_i) \wedge \tilde{A}_{X_1}(X_j) = \lambda^2 X_i \wedge X_j, \quad i, j \geq 2$$

e portanto

$$\rho(X_i \wedge X_j) = \mu^2 X_i \wedge X_j$$

Além disso

$$\langle \rho(X_1 \wedge X_j), X_k \wedge X_i \rangle = \langle X_1 \wedge X_j, \rho(X_k \wedge X_i) \rangle = 0$$

e portanto, denotado por Q o operador de Ricci, temos

$$\langle Q(X_1), X_i \rangle = 0 \quad i \geq 2$$

Segue então que a base $\{X_1, \dots, X_n\}$ diagonaliza Q e portanto $X_i \wedge X_j$ diagonalizam $\rho \quad \forall i, j \geq 1$ (veja 2.1.2) e a asserção segue imediatamente.

Temos então uma segunda forma fundamental A que verifica a equação de Gauss. Se $\nu \neq 0$, posto $\rho \geq 6$ ($n \geq 5$), A verifica a equação de Codazzi pelo teorema 1.3.11. Portanto, o nosso teorema é provado para $\epsilon = 1$. Se M é do tipo $(1,0)$ a afirmação acima implica que M é plana e portanto admite uma imersão isométrica local em $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

2.4.2 OBSERVAÇÃO: Se $n = 4$ e M é do tipo $(1,0)$ o mesmo resultado obviamente vale pois M continua plana. Se M é do tipo $(1,1)$ o mesmo teorema vale, com a mesma demonstração se $\nu_1 \neq 0$. Se $\nu_1 = 0$ do Carmo e Dajczer provam diretamente a validade da equação de Codazzi para A .

Vamos agora supor que M^n , $n \geq 5$ seja uma variedade conformemente plana de tipo $(2,\epsilon)$ tal que a folheação por esferas geométricas Σ seja intersecção de duas folheações ortogonais Σ_1 e Σ_2 quase umbílicas em M .

Se $\epsilon = 0$ então M^n admite uma imersão isométrica em \mathbb{R}^{n+2} com $R^\perp = 0$ se e somente se M^n é plana (veja observação 2.3.3). Realmente é fácil ver que a condição $R^\perp = 0$ é supérflua.

Vamos então considerar o caso $\epsilon = 1$.

2.4.3 TEOREMA: Nas hipóteses acima existem operadores lineares

$T_1^\varphi, T_2^\varphi : T_X M \longrightarrow T_X M, \quad 0 < \varphi < \pi/2$, tais que

$$i) \quad T_1^\varphi \circ T_2^\varphi = T_2^\varphi \circ T_1^\varphi$$

$$ii) \quad \rho = T_1^\varphi \wedge T_1^\varphi + T_2^\varphi \wedge T_2^\varphi$$

Além disso, se φ for solução de 2.3.10, T_i^φ verifica as equações de Codazzi e se φ for também solução de 2.3.11 T_i^φ verifica as equações de Ricci e portanto M admite uma imersão isométrica local em \mathbb{R}^{n+2} com $R^\perp \equiv 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ um referencial ortonormal adaptado à estrutura folheada, isto é, $T \Sigma_1 = \text{ger} \{X_2, \dots, X_n\}$ e $T \Sigma_2 = \text{ger} \{X_1, X_3, \dots, X_n\}$. $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}, \tilde{A}_{X_1}, \tilde{A}_{X_2}, \bar{A}_{X_1}, \bar{A}_{X_2}$ são as 2ªs formas fundamentais e os operadores de Weingarten de Σ_1, Σ_2 e Σ em M .

Sendo Σ umbílica em M , temos para $i \neq j, i, j \geq 3$

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, X_1 \rangle = \langle \bar{A}_{X_1} X_i, X_j \rangle = \langle \tilde{A}_{X_1} X_i, X_j \rangle = 0$$

$$\langle \nabla_{X_i} X_j, X_2 \rangle = \langle \bar{A}_{X_2} X_i, X_j \rangle = \langle \tilde{A}_{X_2} X_i, X_j \rangle = 0$$

Segue então que $\{X_3, \dots, X_n\}$ são autovetores de \tilde{A}_{X_1} e \tilde{A}_{X_2} e portanto X_2 é autovetor de \tilde{A}_{X_1} e X_1 é autovetor de \tilde{A}_{X_2} . Em particular

onde $\bar{c} = K(X_i, X_j)$. Por outro lado

$$\rho(X_i \wedge X_j) = \gamma(X_i) \wedge X_j + X_i \wedge \gamma(X_j) = \bar{c} (X_i \wedge X_j)$$

(Veja 2.1.2). Fazendo produto escalar por $X_j \wedge X_k$, $k \neq i, j$, $k \geq 3$, temos $\langle \gamma(X_i), X_k \rangle = 0$ e portanto $\gamma(X_i) = a_1 X_i + b_1 X_j$. Procedendo analogamente substituindo j por k temos $\gamma(X_i) = a_2 X_i + b_2 X_k$ e portanto $\gamma(X_i) = t_i X_i$. Portanto os X_i , $i \geq 3$ são autovetores de γ e portanto de Q . Observamos também que se $Q(X_i) = \delta_i X_i$ temos

$$\delta_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n K(X_i, X_j)$$

Se i, j, k são índices distintos maiores ou iguais a 3 temos

$$K(X_1, X_i) + K(X_j, X_k) = K(X_1, X_j) + K(X_j, X_k)$$

e sendo $K(X_j, X_k) = K(X_i, X_k)$ segue $K(X_1, X_i)$ não depende de i e de maneira análoga $K(X_2, X_i)$ não depende de i . Segue então que δ_i também não depende de i , $i \geq 3$.

Vamos agora mostrar que X_1, X_2 são autovetores de Q . Temos para $i \geq 3$, pela equação de Gauss e 2.4.3.3

$$\rho(X_2 \wedge X_i) = \tilde{\rho}(X_2 \wedge X_i) - \tilde{A}_{X_1} X_2 \wedge \tilde{A}_{X_1} X_i = \sigma(X_2 \wedge X_i)$$

Analogamente

$$\rho(X_1 \wedge X_i) = \tau X_1 \wedge X_i$$

Temos portanto

$$\langle Q(X_1), X_2 \rangle = \sum_{k=3}^n \langle \rho(X_1 \wedge X_k), X_2 \wedge X_k \rangle = 0$$

e a conclusão segue do fato que Q é simétrico e $Q(X_i) = X_i, i \geq 3$.

Temos portanto que a base $\{X_1, \dots, X_n\}$ é tal que $\rho(X_i \wedge X_j) = K(X_i, X_j) X_i \wedge X_j, i, j = 1, \dots, n$. Vamos agora procurar uma "segunda forma fundamental" que verifique as equações de Guass, Codazzi e Ricci.

2.4.3.5 ASSERÇÃO: Existem dois operadores lineares simétricos $T_1^\varphi, T_2^\varphi : T_x M \longrightarrow T_x M$ tais que:

$$(1) T_1^\varphi \circ T_2^\varphi = T_2^\varphi \circ T_1^\varphi$$

$$(2) \rho = T_1^\varphi \wedge T_1^\varphi + T_2^\varphi \wedge T_2^\varphi$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base adaptada à estrutura folheada e $\gamma : T_x M \longrightarrow T_x M$ já definido em 2.1.2. Por 2.4.3.4 temos que γ é na base $\{X_1, \dots, X_n\}$ da forma

$$\gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \mu^2 & & \\ & & & \dots & \\ 0 & & & & \mu^2 \end{bmatrix}$$

Temos então para $i, j \geq 3$:

$$\rho(X_1 \wedge X_2) = \gamma(X_1) \wedge X_2 + X_1 \wedge \gamma(X_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) X_1 \wedge X_2$$

$$\rho(X_1 \wedge X_i) = \gamma(X_1) \wedge X_i + X_1 \wedge \gamma(X_i) = (\lambda_1 + \mu^2) X_1 \wedge X_i$$

$$\rho(X_2 \wedge X_i) = \gamma(X_2) \wedge X_i + X_2 \wedge \gamma(X_i) = (\lambda_2 + \mu^2) X_2 \wedge X_i$$

$$\rho(X_i \wedge X_j) = \gamma(X_i) \wedge X_j + X_i \wedge \gamma(X_j) = 2\mu^2 X_i \wedge X_j$$

Vamos considerar os operadores

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} b & & & & 0 \\ & b_1 & & & \\ & & b & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & b \end{bmatrix}$$

Sendo

$$a = \sqrt{2} \cos \varphi \mu \quad , \quad b = \sqrt{2} \operatorname{sen} \varphi \mu$$

$$a_1 = \frac{\lambda_1 + (1 - 2 \cos^2 \varphi) \mu^2}{\sqrt{2} \cos \varphi \mu} \quad b_1 = \frac{\lambda_2 + (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \mu^2}{\sqrt{2} \operatorname{sen} \varphi \mu}$$

onde φ é um parâmetro, $\varphi \in (0, \pi/2)$. Obviamente T_1^φ, T_2^φ satisfazem a condição (1) e um cálculo direto mostra a condição (2). Observamos explicitamente que $a \neq 0 \neq b$.

Vamos agora considerar um ponto $x \in M$ e uma vizinhança $U \subseteq M$ de x . Seja $E = U \times \mathbb{R}^2$ e ξ_1 e ξ_2 as secções $\xi_1(x) = (x, (1, 0))$ e $\xi_2(x) = (x, (0, 1))$. Definimos uma métrica em E pedindo que ξ_1 e ξ_2 sejam ortonormais e uma conexão ∇^1 estendendo:

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1}^\perp \xi_1 &= \frac{-X_1(b)}{a} \xi_2, & \nabla_{X_1}^\perp \xi_2 &= \frac{X_1(b)}{a} \xi_1 \\ \nabla_{X_2}^\perp \xi_1 &= \frac{X_2(a)}{b} \xi_2, & \nabla_{X_2}^\perp \xi_2 &= \frac{-X_2(a)}{b} \xi_1 \\ \nabla_{X_i}^\perp \xi_1 &= 0 = \nabla_{X_i}^\perp \xi_2, & i &\geq 3. \end{aligned}$$

Claramente ∇^\perp é uma conexão compatível com a métrica e definimos uma "segunda forma fundamental" $\alpha: TM \otimes TM \longrightarrow E$

$$\alpha^\varphi(X_i, X_j) = \langle T_1^\varphi X_i, X_j \rangle \xi_1 + \langle T_2^\varphi X_i, X_j \rangle \xi_2$$

Por construção α^φ verifica a equação de Gauss. Vamos estudar então a equação de Codazzi

$$(D_{X_i} \alpha^\varphi)(X_j, X_k) = (D_{X_j} \alpha^\varphi)(X_i, X_k)$$

Sendo obviamente

$$(D_{X_i} \alpha^\varphi)(X_j, X_k) = \nabla_{X_i}^\perp \alpha^\varphi(X_j, X_k) - \alpha^\varphi(\nabla_{X_i} X_j, X_k) - \alpha^\varphi(X_j, \nabla_{X_i} X_k)$$

2.4.3.6 OBSERVAÇÃO: escolhendo o parâmetro φ constante nas direções X_i , $i \geq 3$, temos $X_i(a) = X_i(b) = 0$.

2.4.3.7: A equação de Codazzi é verificada para $i, j, k \geq 3$.

De fato, se $k \neq i, j$, usando a notação dos símbolos de Cristoffel, temos:

$$\Gamma_{ij}^k (\alpha(X_k, X_k) - \alpha(X_j, X_j)) = \Gamma_{ji}^k (\alpha(X_k, X_k) - \alpha(X_i, X_i))$$

que é obviamente verificada pois $\alpha(X_i, X_i) = \alpha(X_j, X_j) = \alpha(X_k, X_k)$.

Se $k = i$ temos

$$\nabla_{X_j}^1 \alpha(X_i, X_i) = 0$$

que também é obviamente verificada pois $\nabla_{X_i}^1 \xi_\sigma = 0$, $\sigma = 1, 2$ e com a escolha 2.4.3.6, $X_i(a) = X_i(b) = 0$.

2.4.3.8 A equação de Codazzi é verificada se $i = \sigma = 1, 2$ e $j \neq k$, $j, k \geq 3$.

De fato neste caso temos

$$\Gamma_{\sigma j}^k (\alpha(X_j, X_j) - \alpha(X_k, X_k)) = \Gamma_{jk}^\sigma (\alpha(X_k, X_k) - \alpha(X_\sigma, X_\sigma))$$

e a condição segue da umbilicidade de Σ e $\Gamma_{jk}^\sigma = 0$

2.4.3.9 A equação de Codazzi é verificada para $i, j, k = \sigma = 1, 2$ e $i, j \geq 3$.

De fato se $i = j$ não temos nada a mostrar. Se $i \neq j$, segue imediatamente da umbilicidade de Σ ($\Gamma_{ij}^\sigma = 0$ $i \neq j$).

2.4.3.10 A equação de Codazzi verificada para σ, τ, k , $\sigma, \tau = 1, 2$ e $k \geq 3$.

Segue também imediatamente de 2.4.3.1

2.4.3.11 A equação de Codazzi é verificada para $\sigma, j, \tau, \sigma, \tau = 1, 2$, $j \geq 3$, $\sigma \neq \tau$.

Segue também imediatamente.

Os casos não triviais são portanto os seguintes:

i) $(1, j, j)$ e $(2, j, j)$

ii) $(1, j, 1)$ e $(2, j, 2)$

iii) $(1, 2, 1)$ e $(1, 2, 2)$

Para o caso (i) temos as relações a serem verificadas (confronte com 2.3.8):

$$(i) \left\{ \begin{array}{l} r_{jj}^1 = \frac{a X_1(a) + b X_1(b)}{a(a - a_1)} \\ r_{jj}^2 = \frac{a X_2(a) - b X_2(b)}{b(b - b_1)} \end{array} \right.$$

Para o caso (ii) temos as relações a serem verificadas:

$$(ii) \quad r_{11}^j = \frac{X_j(a_1)}{(a_1 - a)}, \quad r_{22}^j = \frac{X_j(b_1)}{(b_1 - b)}$$

Para o caso (iii) temos as relações a serem verificadas:

$$(iii) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{12}^1 = \frac{X_2 (a_1 - a)}{(a_1 - a)} = \frac{b X_2 (b) + a_1 X_2 (a)}{b (b_1 - b)} \\ \Gamma_{21}^2 = \frac{X_1 (b_1 - b)}{(b_1 - b)} = \frac{a X_1 (a) + b_1 X_1 (b)}{a (a_1 - a)} \end{array} \right.$$

Consideremos então a forma bilinear associada ao operador

$$L(X, Y) = \frac{1}{(n-2)} \left[Q(X, Y) - \frac{\text{traço } Q(X, Y)}{2(n-1)} \right]$$

Usando a segunda identidade de Bianchi é fácil ver que L é um tensor de Codazzi isto é, verifica a equação

$$(\nabla_X L)(Y, Z) = (\nabla_Y L)(X, Z)$$

onde $(\nabla_X L)(Y, Z) = X(L(Y, Z)) - L(\nabla_X Y, Z) - L(Y, \nabla_X Z)$.

2.4.3.12 ASSERÇÃO: As relações (i) são verificadas

De fato, escrevendo a equação de Codazzi para L e $\{X_1, X_j, X_j\}$ temos

$$X_1 (\mu^2) = \Gamma_{jj}^1 (\mu^2 - \lambda_1)$$

e lembrando que $2\mu^2 = a^2 + b^2$, $\lambda_1 + \mu^2 = a a_1 + b^2$ temos a primeira relação. Analogamente considerando $\{X_2, X_i, X_i\}$ temos a segunda relação.

2.4.3.13 ASSERÇÃO: As relações (ii) são verificadas

De maneira análoga a 2.4.3.12, escrevendo a equação de Codazzi para L , $\{X_1, X_j, X_1\}$ temos

$$\Gamma_{11}^j = \frac{X_j(\lambda_1)}{\lambda_1 - \mu^2}$$

Agora, $X_j(\lambda_1) = a X_j(a_1)$ pois por 2.4.3.6, φ é tal que $X_i(a) = X_i(b) = X_i(\mu) = 0$. Analogamente usando $\{X_2, X_j, X_2\}$ segue a segunda relação.

2.4.3.14 ASSERÇÃO: Se φ é solução do sistema 2.3.10 então as relações (iii) são verificadas e portanto α^φ verifica as equações de Codazzi.

De fato, escrevendo a equação de Codazzi para L e $\{X_1, X_2, X_2\}$ temos

$$X_1(\lambda_2) = \Gamma_{22}^1 (\lambda_2 - \lambda_1)$$

e lembrando que $\lambda_1 + \mu^2 = b^2 + a_1 a$, $\lambda_2 + \mu^2 = a^2 + b b_1$ e $2\mu^2 = a^2 + b^2$ temos

$$X_1(b b_1 + 2^{-1} a^2 - 2^{-1} b^2) = \Gamma_{22}^1 (a^2 - a_1 a + b b_1 - b^2)$$

que é igual a

$$b X_1 (b_1 - b) + a X_1 (a) + b_1 X_1 (b) = r_{21}^2 (a(a_1 - a) + b(b_1 - b)).$$

Como φ é solução de 2.3.10 temos então $r_{21}^2 = X_2 (\log |b_1 - b|)$ e portanto segue a segunda relação de (iii). Analogamente considerando $\{X_2, X_1, X_1\}$ temos a primeira relação.

2.4.3.15 ASSERÇÃO: Se φ é solução de 2.3.11 então α^φ verifica as equações de Ricci.

De fato, como $T_1^\varphi \circ T_2^\varphi = T_2^\varphi \circ T_1^\varphi$, basta provar que

$$(i) \quad R^\perp (X_1, X_2) \xi_1 = 0 = R^\perp (X_1, X_2) \xi_2$$

$$(ii) \quad R^\perp (X_\sigma, X_i) \xi_1 = 0 = R^\perp (X_\sigma, X_i) \xi_2, \quad \sigma = 1, 2 \text{ e } i \geq 3$$

$$(iii) \quad R^\perp (X_i, X_j) \xi_1 = 0 = R^\perp (X_i, X_j) \xi_2, \quad i, j \geq 3.$$

Se φ é solução de 2.3.11 então a relação (i) é verificada. (veja 2.3.11). A relação (iii) é obviamente verificada pois $\nabla_{X_i}^\perp \xi_1 = \nabla_{X_i}^\perp \xi_2 = 0$ para $i \geq 3$. Verifiquemos (ii) para $\sigma = 1$. Pela definição ∇^\perp temos

$$R^\perp (X_1, X_i) (\xi_1) = - \nabla_{X_i}^\perp \left(\frac{-X_1(b)}{a} \right) \xi_2 - \nabla_{[X_1, X_i]}^\perp \xi_2 =$$

$$= X_i \left(\frac{X_1(b)}{a} \right) \xi_2 + \langle [X_1, X_i], X_1 \rangle \frac{X_1(b)}{a} \xi_2$$

Como $[X_1, X_i](b) = -X_i(X_1(b))$ e $X_i \left(\frac{X_1(b)}{a} \right) = X_i(X_1(b)) a^{-1}$ (lembra

de 2.4.3.6), temos (ii) para $\sigma = 1$. Analogamente (ii) vale para $\sigma = 2$.

§ 5. ALGUNS COMENTÁRIOS SOBRE A INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CODAZZI E RICCI (2.3.9 e 2.3.10) E PROBLEMAS EM ABERTO

A finalidade deste parágrafo é fazer considerações relativas à seguinte conjectura:

CONJECTURA: Seja M^n , $n \geq 5$ uma variedade conformemente plana de tipo (2.1) tal que a folheação por esferas geométricas Σ de codimensão dois é intersecção de duas folheações ortogonais Σ_1, Σ_2 quase umbílicas em M . Então M admite localmente uma imersão isométrica em \mathbb{R}^{n+2} com $R^1 \equiv 0$.

Dada a natureza deste parágrafo, ficaremos um pouco informais.

O teorema 2.4.3 reduz a conjectura a existência de uma solução local $\varphi: M \rightarrow (0, \pi/2)$ do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 : X_2 (\log \cos \varphi) - \Gamma_{11}^2 - X_2 \left(\log \frac{|k_1 - k|}{\sqrt{k}} \right) = 0 \\ C_2 : X_1 (\log \sin \varphi) - \Gamma_{22}^1 - X_1 \left(\log \frac{|k_2 - k|}{\sqrt{k}} \right) = 0 \\ R : X_1 (\cotg \varphi X_2 (\log \sqrt{k})) + X_2 (\tg \varphi X_1 (\log \sqrt{k})) = \\ \quad = \Gamma_{22}^1 (\cotg \varphi X_2 (\log \sqrt{k})) + \Gamma_{11}^2 (\tg \varphi X_1 (\log \sqrt{k})) \end{array} \right.$$

onde $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base local ortonormal adaptada à estrutura folheada i.e. $T \Sigma_1 = \text{ger}\{X_2, \dots, X_n\}$, $T \Sigma_2 = \text{ger}\{X_1, X_3, \dots, X_n\}$, $r_{ij}^r = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_r \rangle$, $k = k(X_i, X_j)$ $i, j \geq 3$ $i \neq j$ (k não depende de i, j), $k_1 = K(X_1, X_j)$ $j \geq 3$, $k_2 = K(X_2, X_j)$ $j \geq 3$ (k_1, k_2 também não dependem de j).

Vamos começar analisando o sistema $\{C_1, C_2\}$. Como temos visto na demonstração do teorema 2.4.3, a existência de uma solução do sistema $\{C_1, C_2\}$ é equivalente as equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1^1 = \Gamma_{11}^2 - X_2 (\log |a_1 - a|) = 0 \\ \gamma_1^2 = \Gamma_{11}^2 + \frac{b X_2(b) + a_1 X_2(a)}{b(b-b_1)} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_2^1 = \Gamma_{22}^1 - X_1 (\log |b_1 - b|) = 0 \\ \gamma_2^2 = \Gamma_{22}^1 + \frac{a X_1(a) + b_1 X_1(b)}{a(a-a_1)} = 0 \end{array} \right.$$

As equações $\gamma_i^j = 0$ são as equações *escalares* correspondentes a equação vetorial.

$$\gamma_1^1 \xi_1 + \gamma_1^2 \xi_2 = 0$$

Por outro lado a "equação de Codazzi" para o operador L (veja 2.4.3.14) fornece uma equação escalar

$$\gamma_i^1 + \gamma_i^2 = 0$$

e portanto $\gamma_i^1 = 0$ se e somente se $\gamma_i^2 = 0$. Uma primeira tentativa de mostrar então a existência de soluções $\{C_1, C_2\}$ seria tentar obter uma equação de Codazzi *vetorial* intrínseca análoga a do operador L que fornece uma relação do tipo

$$\gamma_i^1 X + \gamma_i^2 Y = 0$$

para X, Y independentes.

Um ataque mais direto para garantir soluções de $\{C_1, C_2\}$ pode ser feito da seguinte maneira: consideramos coordenadas locais (x_1, \dots, x_n) adaptadas à estrutura folheada, isto é, $X_i = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Além disso, sendo M conformemente plana podemos supor as coordenadas tais que $\alpha_i = \alpha$ não depende de i , $i = 1, \dots, n$. Temos então por definição de produto de Lie

$$[X_1, X_2] = -X_2 (\log \alpha) X_1 + X_1 (\log \alpha) X_2$$

Por outro lado, escrevendo o produto de Lie em termos da conexão temos

$$[X_1, X_2] = -r_{11}^2 X_1 + r_{22}^1 X_2$$

Portanto

$$\begin{array}{l}
 2.5.1 \quad \Gamma_{11}^2 = X_2 (\log \alpha) \\
 \Gamma_{22}^1 = X_1 (\log \alpha)
 \end{array}
 \quad \text{ou} \quad
 \begin{array}{l}
 \Gamma_{11}^2 = - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \\
 \Gamma_{22}^1 = - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}
 \end{array}$$

Observamos, de passagem, que, como consequência temos a relação

$$2.5.2 \quad X_1 (\Gamma_{11}^2) = X_2 (\Gamma_{22}^1)$$

Sejam agora h_1, h_2 funções reais positivas tais que $X_2 (h_1) = 0$, $X_1 (h_2) = 0$ e consideramos as funções

$$2.5.3 \quad \varphi = \arccos \alpha^{-1} \frac{|k_1 - k|}{\sqrt{k}} \sqrt{h_1}$$

$$\psi = \arcsen \alpha^{-1} \frac{|k_2 - k|}{\sqrt{k}} \sqrt{h_2}$$

φ é solução de C_1 e ψ é solução de C_2 . A condição $\varphi = \psi$ pode ser escrita na forma

$$2.5.4 \quad \frac{(k_1 - k)^2}{k \alpha^2} h_1 + \frac{(k_2 - k)^2}{k \alpha^2} h_2 = 1.$$

A existência de funções h_i , $i = 1, 2$ que verificam a condição acima é então equivalente a existência de soluções do sistema

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial f_1}{\partial x} h_1 + f_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x} h_2 = 0 \\
 \frac{\partial f_1}{\partial x} h_1 + f_2 \frac{\partial h_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_2 = 0
 \end{array}$$

onde $f_i = \frac{(k_i - k)^2}{k \alpha^2}$. A condição de existência de h_1, h_2 soluções do sistema acima e tais que $X_2(h_1) = 0$ e $X_1(h_2) = 0$ pode ser escrita explicitamente em termos de f_i e suas derivadas. Nós não faremos isso pois não achamos nenhuma forma esteticamente aceitável. Só comentaremos que ela expressa que uma certa função das f_i e suas derivadas são constantes ao longo de certas direções. Isto deveria ter um significado geométrico intrínseco que não conseguimos descobrir.

Se de um lado os comentários acima parecem sugerir uma resposta positiva para a nossa conjectura, uma primeira análise da equação R mostra as dificuldades do problema. De fato uma primeira tentativa de resolver a equação R seria tentar resolver o sistema.

$$2.5.5 \quad X_1(f) = r_{22}^1 f, \quad X_2(g) = r_{11}^2 g$$

OBSERVAÇÃO: O sistema acima pode ser escrito em termos dos invariantes extrínsecos das folheações Σ_i em M da seguinte forma

$$X_1(\log |\tau_1 - \tau|) = X_1(\log |a_1 - a|)$$

$$X_2(\log |\delta_1 - \delta|) = X_2(\log |b_1 - b|)$$

onde τ e δ são os autovalores de multiplicidade $(n-2)$ de Σ_1 e Σ_2 em M e τ_1 e δ_1 são os autovalores simples.

Usando 2.5.1, o sistema 2.5.5 se escreve

$$X_1 (\log f) = X_1 (\log \alpha) , \quad X_2 (\log g) = X_2 (\log \alpha)$$

que tem soluções do tipo

$$f = \alpha \ell_2 \quad g = \alpha \ell_1$$

sendo $X_1 (\ell_2) = 0 = X_2 (\ell_1)$. Portanto

$$\cotg \varphi = \alpha \ell_2 (X_2 (\log \sqrt{k}))^{-1} \quad \tg \varphi = \alpha \ell_1 (X_1 (\log \sqrt{k}))^{-1}$$

com a condição

$$\ell_1 \ell_2 = X_1 (\log \sqrt{k}) X_2 (\log \sqrt{k}) \alpha^{-2}$$

e a existência de tais ℓ_1 e ℓ_2 é equivalente a

$$2.5.6 \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\log \sqrt{k}) \frac{\partial}{\partial x_2} \log \sqrt{k} = 0$$

o que é uma condição forte sobre o crescimento de k nas direções ortogonais à folheação por esferas geométricas.

Assumindo 2.5.6, a eventual solução de R é do tipo

$$2.5.7 \quad \tg \varphi = \alpha \ell_1 (X_1 \log \sqrt{k})^{-1}$$

e comparando com as eventuais soluções $\{C_1, C_2\}$ temos

$$2.5.8 \quad \frac{|k_2 - k|}{|k_1 - k|} \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} = \ell_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \log \sqrt{K} \right)$$

Então, mesmo assumindo 2.5.6 uma condição suficiente para existência de soluções do sistema $\{C_1, C_2, R\}$ é a existência de funções h_i, ℓ_i $i = 1, 2$ tais que verifiquem 2.5.4, 2.5.8 e $X_1(\ell_2) = X_2(\ell_1) = X_1(h_2) = X_2(h_1) = 0$.

Finalmente vamos concluir este parágrafo propondo dois problemas preliminares a uma tentativa de resolução de nossa conjectura:

1) As equações C_1, C_2, R são independentes ou, por exemplo, R é uma condição de integrabilidade para o sistema $\{C_1, C_2\}$?

2) Achar eventuais condições geométricas intrínsecas e *simples* que uma variedade conformemente plana M^n isometricamente imersa em \mathbb{R}^{n+2} com $R \equiv 0$ tenha que satisfazer (a mais das do teorema 2.3.8) para que o sistema $\{C_1, C_2, R\}$ tenha solução.

§ 6. ALGUMAS PROPRIEDADES GLOBAIS

Neste capítulo queremos discutir alguns resultados de carácter global sobre variedades conformemente planas. Provavelmente o resultado mais interessante nesta direcção é o seguinte teorema devido a N. Kuiper (Veja [Ku]).

2.6.1 TEOREMA: Seja M^n uma variedade riemanniana compacta e simplesmente conexa. Se M^n é conformemente plana então M^n é

globalmente conformemente equivalente a esfera S^n . (isto é, existe um difeomorfismo global conforme $\varphi: M^n \longrightarrow S^n$).

2.6.2 OBSERVAÇÃO: A condição de compacidade é uma condição global razoável em geometria conforme. Outras condições globais, por exemplo a de ser completo, não são invariantes por transformações conformes. N. Kuiper tem considerado também um conceito de variedade conformemente completa que foi mostrado ser equivalente à compacidade.

O teorema 2.6.1 nos diz essencialmente que a topologia de uma variedade compacta conformemente plana está concentrada no grupo fundamental. Os resultados a seguir fornecem um exemplo de tal situação:

2.6.3 TEOREMA (Veja [C-D-M]) Seja $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma ICP; $n \geq 4$, M^n compacta e conexa. Então M^n é difeomorfa a S^n com $b_1(M)$ asas coladas, onde $b_1(M)$ é o 1º número de Betti de M .

2.6.4 TEOREMA: Seja M^n uma variedade compacta conexa. Se existir uma métrica conformemente plana cujo tensor de Ricci é não negativo e positivo em um ponto, então M^n é difeomorfa a um quociente de S^n por um grupo finito de difeomorfismos.

DEMONSTRAÇÃO: De fato nestas hipóteses $\pi_1(M)$ é finito (veja [M-R₂], teorema 6.19) e o resultado segue do teorema 1.

2.6.5 TEOREMA (Veja [Y]) Seja M^n uma variedade compacta conformemente plana com curvatura seccional não negativa e $n \geq 4$. Então o recobrimento universal \tilde{M}^n de M^n é difeomorfo a \mathbb{R}^n , S^n ou $S^{n-1} \times \mathbb{R}$. No último caso M é difeomorfa a $S^{n-1} \times S^1$ e a métrica é localmente o produto de uma métrica de curvatura constante positiva em S^{n-1} e uma métrica em S^1 .

DEMONSTRAÇÃO: Se $\pi_1(M)$ é finito então \tilde{M}^n , com a métrica de recobrimento é uma variedade compacta simplesmente conexa conformemente plana e portanto por 2.6.1, difeomorfa a S^n . Suponhamos $\pi_1(M)$ infinito. Então \tilde{M}^n é completa, não compacta, com curvaturas seccionais não negativas e portanto, pelo teorema da alma (veja [M-R₁]), difeomorfa ao fibrado normal de uma subvariedade Σ totalmente convexa. Além disso, se $X \in T\Sigma$ e $Y \in (T\Sigma)^\perp$, $K(X,Y) = 0$ e se $\dim \Sigma = n-1$, \tilde{M} é isométrica a $\Sigma \times \mathbb{R}$.

Suponhamos $\dim \Sigma = n-1$. Queremos mostrar que Σ tem curvatura seccional constante. De fato, sejam X, Y, Z vetores ortonormais em $T_X \Sigma$ e $N \in T_X \Sigma^\perp$. De 2.1.3 temos:

$$K(X,Y) + K(Z,N) = K(X,Z) + K(Y,N)$$

portanto

$$K(X,Y) = K(X,Z).$$

Segue então facilmente que $K \Big|_{\Sigma}$ é constante em $T_X \Sigma$ e portanto pe

lo lema de Schur ($n-1 \geq 3$) $K|_{\Sigma}$ é constante. Além disso, sendo Σ compacta e simplesmente conexa $K|_{\Sigma} > 0$.

Suponhamos agora $\dim \Sigma < n-1$ e sejam $N_1, N_2 \in (T_x \Sigma)^\perp$ e $X, Y \in T_x \Sigma$. Ainda por 2.1.3 temos

$$K(X, Y) + K(N_1, N_2) = K(X, N_1) + K(Y, N_2) = 0$$

e sendo $K \geq 0$, temos $K(X, Y) = 0 = K(N_1, N_2)$. Segue então que Σ é plana, compacta e simplesmente conexa e portanto $\dim \Sigma = 0$ e \tilde{M}^n é difeomorfa a \mathbb{R}^n .

Em relação ao teorema 2.6.5 e a situação analisada nos parágrafos anteriores, temos o seguinte resultado

2.6.6 TEOREMA: Seja M^n , $n \geq 4$, uma variedade compacta, conexa, conformemente plana com curvatura seccional não negativa e $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma imersão isométrica. Então ou M^n é difeomorfa a S^n ou é isométrica a $S^{n-1} \times S^1$ e a imersão é justa.

DEMONSTRAÇÃO: Se M for simplesmente conexa então M é difeomorfa a S^n pelo teorema de Kuiper. Se M não for simplesmente conexa o teorema segue da classificação das subvariedades de codimensão dois do \mathbb{R}^{n+2} com $k \geq 0$ dada em [B-M].

CAPÍTULO III

VARIETADES COM OPERADOR DE CURVATURA PURO NÃO NEGATIVO

Temos visto, no último parágrafo do capítulo anterior, que para variedades compactas conformemente planas, a hipótese de curvatura não negativa implica em fortes consequências globais. Neste capítulo manteremos a hipótese de curvatura não negativa enfraquecendo a hipótese da variedade ser conformemente plana. Consideremos uma classe de variedades Riemannianas, as com *operador curvatura puro* (veja definição abaixo) que inclui como dizíamos as conformemente planas e também as isometricamente imersas com espaços de curvatura constante com fibrado normal plano, para as quais a positividade da curvatura seccional é equivalente a positividade do operador curvatura (confronte observação 1.1.4).

§ 1. DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

Em (G-M) Gallot e Meyer provaram o seguinte teorema:

3.1.1 TEOREMA: Seja M uma variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa com operador de curvatura não negativo. Então M é produto riemanniano de variedades dos seguintes tipos:

GM_1 : Variedades m -dimensionais com grupo de holonomia $\emptyset = SO(m)$ e com cohomologia de de Rham isomorfa a da esfera S^m .

GM_2 : Variedades $2k$ -dimensionais com grupo de holonomia $\emptyset \cong U(k)$ e com a cohomologia de de Rham isomorfa a do espaço projetivo $\mathbb{C}P^k$.

GM_3 : Espaços simétricos de tipo compacto.

Além disso, se ρ é positivo em um ponto, M é do tipo GM_1 .

Como já observamos na introdução, a positividade das curvaturas seccionais de M não implicam, em geral, na positividade de ρ . Consideremos as seguintes condições:

P_1 : Existe uma base $\{w_{ij}\}$ de $\Lambda^2(T_x M)$ de autovetores decomponíveis de ρ , isto é, $\rho(w_{ij}) = \lambda_{ij} w_{ij}$ e existem vetores X_{ij} e $Y_{ij} \in T_x M$ tal que $w_{ij} = X_{ij} \wedge Y_{ij}$.

P_2 : Existe uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ em $T_x M$ tal que $\rho(X_i \wedge X_j) = \lambda_{ij} X_i \wedge X_j$.

Claramente $P_2 \Rightarrow P_1$ e P_1 implica a equivalência entre a positividade das curvaturas seccionais e a positividade de ρ .

Os seguintes resultados são de algum interesse:

3.1.2 EXEMPLO: $P_1 \not\Rightarrow P_2$: É suficiente exibir um contra-exemplo para um ponto de M . Seja V um espaço vetorial com produto interno tal que $\dim V \geq 4$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base ortonormal de V . Para $i < j$, seja

$$w_{ij} = \begin{cases} X_i \wedge X_j & \text{se } (i,j) \neq (1,3), (i,j) \neq (2,3) \\ (\cos \theta X_1 + \operatorname{sen} \theta X_2) \wedge X_3 & \text{se } (i,j) = (1,3) \\ (-\operatorname{sen} \theta X_1 + \cos \theta X_2) \wedge X_3 & \text{se } (i,j) = (2,3) \end{cases}$$

onde $\theta \neq K\pi/2$. Então $\{w_{ij}\}$ é uma base ortonormal em $\Lambda^2(V)$ consistindo de elementos decomponíveis. Definimos

$$\rho : \Lambda^2(V) \longrightarrow \Lambda^2(V)$$

$$\rho(w_{ij}) = \lambda_{ij} w_{ij} \text{ com } \lambda_{ij} \neq \lambda_{ks} \text{ se } (i,j) \neq (k,s)$$

Então ρ é um operador como um operador de curvatura verificando P_1 . Mas ρ não verifica P_2 pois se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base de V , as 2-formas $\pi_{ij} = X_i \wedge X_j$ olhadas como 2-planos em V verificam a seguinte propriedade: existem duas retas em π_{ij} , L_1 e L_2 , tal que $\pi_{kl} \cap \pi_{ij}$ é zero, L_1 ou L_2 . Mas w_{12} é interceptado por w_{13} , w_{14} , w_{23} e w_{24} ao longo de quatro retas distintas.

3.1.3 PROPOSIÇÃO: Suponha $\dim M \leq 3$. Então ρ satisfaz P_2

DEMONSTRAÇÃO: Se $\dim M = 2$, ρ satisfaz obviamente P_2 . Se $\dim M = 3$, observamos primeiramente que se $w \in \Lambda^2_x(M)$, w é decomponível. Sejam X_1, X_2, X_3 formando uma base ortonormal de $T_x M$. Então

$$w = a_{12} X_1 \wedge X_2 + a_{13} X_1 \wedge X_3 + a_{23} X_2 \wedge X_3$$

Se $a_{13} = 0$ ou $a_{23} = 0$, obviamente w é decomponível. Se $a_{13} \neq 0$ e $a_{23} \neq 0$ definimos

$$Z = a_{12} a_{13} X_1 - a_{23} a_{13} X_3$$

$$W = a_{23}^{-1} X_1 + a_{13}^{-1} X_2$$

e $w = \sum w_i$. Consideremos agora $\{w_1, w_2, w_3\}$ base de autovetores de ρ . Como w_1, w_2, w_3 são linearmente independentes e $\dim M=3$, olhando w_i como 2-plano, temos que existem três retas perpendiculares L_1, L_2 e L_3 tais que $w_1 \cap w_2 = L_1$, $w_1 \cap w_3 = L_2$ e $w_2 \cap w_3 = L_3$. Então a base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ tal que E_1, E_2 e E_3 geram L_1, L_2 e L_3 respectivamente implica que ρ satisfaz P_2 .

3.1.4 PROPOSIÇÃO: Se M é conformemente plana então ρ satisfaz P_2 .

DEMONSTRAÇÃO: Temos por 2.1.2 que existe um operador simétrico $\gamma: T_x M \rightarrow T_x M$ tal que

$$\rho(X \wedge Y) = \gamma(X) \wedge Y + X \wedge \gamma(Y)$$

Portanto se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base ortonormal que diagonaliza γ , $\{X_i \wedge X_j\}$ diagonaliza ρ e portanto ρ satisfaz P_2 .

3.1.5 PROPOSIÇÃO: Seja $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma imersão isométrica com fibrado normal plano. Então ρ satisfaz P_2 .

DEMONSTRAÇÃO: Como $\tilde{R} = R^\perp = 0$, segue da equação de Ricci [1.2.8] que para todo $\xi, \eta \in T_x M$, $A_\xi \circ A_\eta = A_\eta \circ A_\xi$. Logo para todo $x \in M$ existe uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ em $T_x M$ que diagonaliza simultaneamente $A_\xi, \forall \xi \in T_x M$. Então se $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ é uma base ortonormal de $T_x^\perp M$ e $\lambda_i^\alpha = \langle A_{\xi_\alpha} X_i, X_j \rangle$ temos por 1.2.5 b

$$\rho(X_i \wedge X_j) = \left(\sum_{\alpha=1}^p \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha \right) X_i \wedge X_j$$

e ρ satisfaz P_2 .

Os resultados 3.1.3, 3.1.4 e 3.1.5 justificam nosso interesse na propriedade P_2 .

3.1.6 DEFINIÇÃO: Dizemos que o operador de curvatura ρ é *puro* se ρ satisfaz P_2 . Neste caso diremos que M tem o.c.p. (operador de curvatura puro) e uma base ortonormal de $T_x M$, $\{X_1, \dots, X_n\}$ tal que $\rho(X_i \wedge X_j) = \lambda_{ij} X_i \wedge X_j$ será chamada uma ρ -base

É claro que se M_1 e M_2 são variedades riemannianas com o.c.p. ρ_1 e ρ_2 respectivamente, então o produto $M = M_1 \times M_2$ tem o.c.p. ρ , pois a união da ρ_1 -base com a ρ_2 -base forma a ρ -base. A recíproca da afirmação acima foi provada sob condições adicionais em [Ma]. Agora provaremos a recíproca no caso geral:

3.1.7 PROPOSIÇÃO: Seja $M = M_1 \times M_2$ uma variedade riemanniana com o.c.p.. Então M_1 e M_2 têm o.c.p.

DEMONSTRAÇÃO: Seja X_1, \dots, X_n a ρ -base para $T_x M$. Denotaremos por ρ_i , $i = 1, 2$, o operador de curvatura de M_i e, para $X \in T_x M$, por X' e X'' as projeções de X sobre os espaços tangentes a M_1 e M_2 respectivamente. Com esta notação temos:

$$3.1.7.1 \left\{ \begin{array}{l} \rho(X_i \wedge X_j) = \lambda_{ij}(X_i \wedge X_j) = \lambda_{ij}(X_i' \wedge X_j' + X_i' \wedge X_j'' + X_i'' \wedge X_j' + X_i'' \wedge X_j'') \\ \rho(X_i \wedge X_j) = \rho_1(X_i' \wedge X_j') + \rho_2(X_i'' \wedge X_j'') \end{array} \right.$$

e então:

$$3.1.7.2 \left\{ \begin{array}{l} \rho_1(X_i' \wedge X_j') = \lambda_{ij} X_i' \wedge X_j' \quad , \quad \rho_2(X_i'' \wedge X_j'') = \lambda_{ij} X_i'' \wedge X_j'' \\ \lambda_{ij} (X_i' \wedge X_j'' + X_i'' \wedge X_j') = 0 \end{array} \right.$$

ASSERÇÃO: Se $\lambda_{ij} \neq 0$ então ou $X_i' = 0 = X_j'$ ou $X_i'' = 0 = X_j''$

Vamos supor $X_i' \neq 0$ e seja $w = X_i' \wedge X_j'' + X_i'' \wedge X_j'$. Tomando o produto interior com X_j' temos:

$$\begin{aligned} 0 = i(X_j')w &= \|X_i'\|^2 X_j'' - \langle X_j'', X_i' \rangle X_i' + \langle X_i'', X_i' \rangle X_j' - \langle X_j', X_i' \rangle X_i'' \\ &= \|X_i'\|^2 X_j'' - \langle X_j', X_i' \rangle X_i'' \end{aligned}$$

e então
$$X_j'' = \langle X_i', X_j' \rangle \|X_i'\|^{-2} X_i''.$$

Tomando produto interior com X_j' temos:

$$0 = i(X_j')w = \langle X_i', X_j' \rangle X_j'' - \|X_j'\|^2 X_i''$$

e então
$$(\langle X_i', X_j' \rangle^2 - \|X_i'\|^2 \|X_j'\|^2) X_i'' = 0.$$

Se $X_i'' \neq 0$, a condição acima implica $X_j' = \lambda X_i'$ e por 3.1.7.1, 3.1.7.2 e $\lambda_{ij} \neq 0$ temos $X_i' \wedge X_j' = X_i'' \wedge X_j''$ que implica, tomando produto interior com X_i' , que $X_i' = 0$ contradizendo a hipótese. Logo $X_i'' = 0$. Invertendo-se os índices de X_i e X_j obtemos novamente $X_j' = 0$ ou $X_j'' = 0$. Então X_i e X_j são tangentes a M_1 e M_2 . Como $\lambda_{ij} \neq 0$,

X_i e X_j devem ser tangentes a mesma M_i o que prova a asserção.

Agora, reordenamos os vetores X_1, \dots, X_n de maneira que X_1, \dots, X_k são vetores tangentes a M_1 e que para todo $i = 1, \dots, k$ existe j tal que $\lambda_{ij} \neq 0$ (em particular X_j é tangente a M_1), X_{k+1}, \dots, X_m são tais que $\lambda_{ij} = 0$ para $i = k+1, \dots, m$ e todo j e $\{X_1, \dots, X_k, X'_{k+1}, \dots, X'_m\}$ é uma base do espaço tangente a M_1 . Observamos que $\{X_1, \dots, X_k\}$ é ortonormal e ger $\{X'_{k+1}, \dots, X'_m\}$ é ortogonal a ger $\{X_1, \dots, X_k\}$. Seja $\{Y_{k+1}, \dots, Y_m\}$ uma base ortonormal para ger $\{X'_{k+1}, \dots, X'_m\}$. De 3.1.7.1 segue facilmente que $\{X_1, \dots, X_k, Y_{k+1}, \dots, Y_m\}$ é uma ρ_1 -base para o espaço tangente a M_1 . Do mesmo modo vemos que M_2 tem o.c.p. e isto completa a prova.

3.1.8 OBSERVAÇÃO: Não sabemos ainda se uma subvariedade totalmente geodésica de uma variedade com o.c.p. tem também o.c.p.. Seria interessante no mínimo provar que a alma de uma variedade não compacta com o.c.p. não negativo tem a mesma propriedade.

A existência de uma métrica com o.c.p. fornece imediatamente restrições fortes sobre a topologia de M . Por exemplo:

3.1.9 PROPOSIÇÃO: Se M admite uma métrica com o.c.p. então todas as formas de Pontrjagin de M se anulam.

DEMONSTRAÇÃO: Se g_{2k} é uma forma de Pontrjagin, podemos expressar $g_{2k}(\rho)$ como segue:

$$3.1.9.1 \quad g_{2k}(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{2k} (2k)!} \sum \delta_{i_1 \dots i_{2k}}^{j_1 \dots j_{2k}} \rho(X_{i_1} \wedge X_{j_1}) \wedge \dots \wedge \rho(X_{i_{2k}} \wedge X_{j_{2k}})$$

onde a soma é sobre todos os subconjuntos ordenados (i_1, \dots, i_{2k}) de $2k$ elementos de $(1, \dots, n)$ e todas as permutações (j_1, \dots, j_{2k}) de (i_1, \dots, i_{2k}) e $\delta_{i_1 \dots i_{2k}}^{j_1 \dots j_{2k}}$ denota o sinal da permutação. Se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma ρ -base,

$$\rho(X_{i_1} \wedge X_{j_1}) \wedge \dots \wedge \rho(X_{i_{2k}} \wedge X_{j_{2k}}) = \lambda_{i_1 j_1} \dots \lambda_{i_{2k} j_{2k}} X_{i_1} \wedge X_{j_1} \wedge \dots \wedge X_{i_{2k}} \wedge X_{j_{2k}}$$

que é zero pois $X_{i_1} \wedge X_{j_1} \wedge \dots \wedge X_{i_{2k}} \wedge X_{j_{2k}}$ tem elementos iguais $((j_1, \dots, j_{2k})$ é permutação de (i_1, \dots, i_{2k}))

Esta proposição mais o teorema da assinatura de Hirzebruch fornecem um interessante resultado sobre a dimensão das variedades do tipo GM_2 que têm o.c.p.. Lembramos que se uma variedade M compacta e orientada tem dimensão $n = 4k$, a assinatura $\sigma(M)$ é definida como segue: escolhamos uma base a_1, \dots, a_r para $H^{2k}(M)$ tal que a matriz simétrica $[(a_i \cup a_j)(\mu)]$ é diagonal (onde \cup é o produto "cup" e μ a classe fundamental de $H_{4k}(M)$). Então $\sigma(M^{4k})$ é o número de autovalores positivos menos o número de autovalores negativos da matriz acima.

3.1.10 PROPOSIÇÃO: Se uma variedade do tipo GM_2 tem o.c.p. então sua dimensão é da forma $4m + 2$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\dim M = 4k$ e M é do tipo GM_2 , então $\sigma(M) = \pm 1$. Mas o teorema da assinatura de Hirzebruch diz que $\sigma(M)$ é combinação dos números de Pontrjagin e portanto $\sigma(M) = 0$ por 3.1.9.

3.1.11 OBSERVAÇÃO: É possível construir variedades compactas, simplesmente conexas e de dimensão $4m + 2$ cuja cohomologia de de Rham é isomorfa a de $\mathbb{C}P^{2m+1}$ e tendo classes de Pontrjagin nulas. Então o problema de não existência de métricas com o.c.p. sobre variedades do tipo GM_2 não parece ser puramente topológico se a dimensão não é múltiplo de 4.

3.1.12 Se M^{2n} é uma variedade de dimensão par com o.c.p. e $\{X_1, \dots, X_{2n}\}$ é uma ρ -base então o integrando de Gauss - Bonnet - Chern (veja [Ma]) é dado por

$$3.1.12.1 \quad G = \frac{2^n}{(2n)!} \sum_{\sigma} \lambda_{\sigma(1)\sigma(2)\dots\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

onde a soma é sobre todas as permutações σ de $\{1, \dots, 2n\}$ tal que $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n)$.

Como estamos interessados em variedades simplesmente conexas com curvaturas seccionais não negativas e o.c.p., começaremos analisando variedades irredutíveis do tipo GM_2 e GM_3 .

§ 2. ESPAÇOS SIMÉTRICOS DE TIPO COMPACTO:

Seja M um espaço simétrico de tipo compacto, simplesmente conexo. Então a métrica simétrica natural sobre M tem curvatura seccional constante.

3.2.1. TEOREMA: Se M é um espaço simétrico de tipo compacto, irreduzível com o.c.p. então M tem curvatura seccional constante.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam X_1, \dots, X_n campos de vetores ortonormais definidos num conjunto aberto $A \subset M$ tal que $\rho(X_i \wedge X_j) = \lambda_{ij} X_i \wedge X_j$. Como M é simétrico, λ_{ij} é constante em A . Provaremos primeiramente um resultado preliminar:

3.2.2 LEMA: Sejam j, ℓ fixados e suponha $\lambda_{ij} \neq \lambda_{i\ell}$ para algum $i = 1, \dots, n$. Então:

$$\langle \nabla_X X_j, X_\ell \rangle = 0 \quad \forall X \in TM$$

DEMONSTRAÇÃO DE 3.2.2: Como M é simétrica, $\nabla R = 0$. Além disso como ρ é puro, se o conjunto $\{i, j, k, \ell\}$ contém mais que dois elementos, $\langle R(X_i, X_j)X_k, X_\ell \rangle = 0$. Então temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_X R \rangle (X_i, X_j, X_i, X_\ell) = -R(X_i, \nabla_X X_j, X_i, X_\ell) - R(X_i, X_j, X_i, \nabla_X X_\ell) = \\ &= -\langle \nabla_X X_j, X_\ell \rangle \lambda_{i\ell} - \langle \nabla_X X_\ell, X_j \rangle \lambda_{ij} = \\ &= \langle \nabla_X X_j, X_\ell \rangle (\lambda_{ij} - \lambda_{i\ell}). \end{aligned}$$

(3.2.3) Completaremos a demonstração de 3.2.1. Vamos supor que M tem curvatura não constante. Então existe X_{i_0} tal que o conjunto $\{\lambda_{i_0 j} ; j \neq i_0\}$ tem no mínimo dois elementos distintos. Vamos rearranjar a base $\{X_1, \dots, X_n\}$ para que

$$(3.2.3.1) \quad \lambda_{12} = \dots = \lambda_{1p}, \quad \lambda_{1r} \neq \lambda_{12} \quad \text{se } r > p.$$

Aplicando 3.2.2 para $i = 1, j = 2, \dots, p$ e $l = r > p$, obtemos

$$3.2.3.2 \quad \langle \nabla_X X_j, X_r \rangle = 0 \quad j = 2, \dots, p, \quad r > p$$

Afirmamos que existe $r_0 > p$ tal que se $i \neq 1, r_0$ então $\lambda_{li} = \lambda_{r_0 i}$.

De fato, suponha que para todo $r > p$ existe $i \neq 1, r$ com $\lambda_{li} \neq \lambda_{ri}$.

Aplicando 3.2.2 temos

$$3.2.3.3 \quad \langle \nabla_X X_1, X_r \rangle = 0 \quad \forall X \in TM, \quad r > p$$

e isto junto com 3.2.3.2 implicaria que a distribuição $D = \text{ger} \{X_1, \dots, X_p\}$ é paralela contradizendo a irredutibilidade de M . Aplicando novamente 3.2.2 a $i = r_0, j = 2, \dots, p, l = 1$ obtemos

$$3.2.3.4 \quad \langle \nabla_X X_j, X_1 \rangle = 0 \quad \forall X \in TM \quad j = 2, \dots, p$$

Portanto 3.2.3.2 e 3.2.3.4 implicam que $\tilde{D} = \text{ger} \{X_2, \dots, X_p\}$ é uma distribuição paralela não trivial o que contradiz a irredutibilidade de M .

§ 3. VARIEDADES DE KÄHLER

Seja M uma variedade riemanniana compacta, orientada e w uma p -forma diferencial. A fórmula de Weitzenböck é:

$$3.3.1 \quad (\Delta w|w) = (\nabla w|\nabla w) + (Q_p w|w)$$

onde Δ é o operador de Laplace-Beltrami, Q_p o tensor de Ricci generalizado e

$$(\tau|\tau) = \int_M \langle \tau(x), \tau(x) \rangle dM$$

é o L^2 - produto interno em $\Lambda^p(M)$ (veja [G-M], [M-R₂])

Se $\{X_1, \dots, X_n\}$ é uma base ortonormal em $T_x M$ definimos

$$3.3.2 \left\{ \begin{array}{l} A(w) = \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} w(X_{\alpha_3}, X_{\alpha_4}, \dots, X_{\alpha_p}) \cdot \\ \quad \cdot w(X_t, X_r, X_{\alpha_3}, \dots, X_{\alpha_p}) \cdot \langle \rho(X_s \wedge X_u), X_t \wedge X_u \rangle \\ B(w) = \sum_{\alpha_3, \dots, \alpha_p} w(X_r, X_s, X_{\alpha_3}, \dots, X_{\alpha_p}) \cdot \\ \quad \cdot w(X_t, X_u, X_{\alpha_3}, \dots, X_{\alpha_p}) \cdot \langle \rho(X_r \wedge X_s), X_t \wedge X_u \rangle \end{array} \right.$$

então

$$\langle Q_p(w), w \rangle = \frac{1}{(p-1)!} \left[A(w) - \frac{p-1}{2} B(w) \right] \quad (\text{veja [MR}_2]).$$

O ponto fundamental na demonstração do teorema de Gallot - Meyer (3.1.1) é o fato que se $\rho \geq 0$ então $Q_p \geq 0$. Em particular se $\rho \geq 0$ cada forma harmônica é paralela como segue de 3.3.1.

Se M é do tipo GM_2 um gerador de $H^2(M; \mathbb{R})$ define uma estrutu-

ra kähleriana sobre M . O objetivo deste parágrafo é provar o seguinte resultado:

3.3.4 TEOREMA: Seja M^{2k} , $k > 1$, uma variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa com o.c.p. não negativo. Se existe uma forma harmônica $w \in \Lambda^2(M)$ tal que $w^k \neq 0$ então existe um conjunto aberto $A \subset M^{2k}$, $A \neq \emptyset$, isométrico a um produto de subvariedades de dimensão positiva.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in M$ e $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal em $T_x M$ tal que $\rho(X_i \wedge X_j) = \lambda_{ij} X_i \wedge X_j$. Se $w \in \Lambda^2(M)$ é uma 2-forma harmônica, temos:

$$3.3.4.1 \quad \left\{ \begin{array}{l} A(w) = \sum_{s,u,r} w(X_s, X_r)^2 \lambda_{su} \\ B(w) = \sum_{r,s} 2 w(X_r, X_s)^2 \lambda_{rs} \end{array} \right.$$

Então por 3.4.3

$$3.3.4.2 \quad \langle \Omega_p(w), w \rangle = \sum_{s,u \neq r} w(X_s, X_r)^2 \lambda_{su} = 0$$

Observamos que como $\lambda_{su} \geq 0$ então todos os termos na soma acima têm que anular. Se $\lambda_{su} = 0 \quad \forall s, u$ e $\forall x \in M^{2k}$ então M é plana e simplesmente conexa o que contradiz a compacidade de M . Então vamos supor $\lambda_{12} \neq 0$. De 3.3.4.2 temos

$$3.3.4.3 \quad w(X_1, X_r) = 0, \quad \forall r \neq 2$$

Então w é da forma

$$3.3.4.4 \quad w = w_{12} X_1 \wedge X_2 + \sum_{i,j>2} w_{ij} X_i \wedge X_j$$

Como $w^k \neq 0$, então $w_{12} \neq 0$. Assim 3.3.4.2 implica

$$3.3.4.5 \quad \lambda_{1s} = 0 \quad \forall s > 2.$$

Usando o mesmo argumento para os outros índices temos, após uma possível renumeração,

$$3.3.4.6 \quad \lambda_{ij} = 0 \quad \text{se } (i,j) \neq (2s-1, 2s) \quad s = 0, \dots, k$$

O integrando de Gauss-Bonnet-Chern dado por 3.1.12.1 é

$$G = \frac{2^k}{k!} \lambda_{12} \cdots \lambda_{2k-1,2k}$$

Se $G \equiv 0$ então $\chi(M) = 0$ e por 3.1.1 M é do tipo GM_3 . Então ou M é redutível o que prova o teorema ou $\chi(M) \neq 0$. Se $\chi(M) \neq 0$ existe um conjunto aberto $\tilde{A} \subseteq M$ tal que $\lambda_{12} \cdots \lambda_{2k-1,2k} \neq 0$. Em um conjunto possivelmente menor $A \subseteq \tilde{A}$, onde as multiplicidades dos autovalores de ρ são localmente constantes, podemos escolher X_1, \dots, X_{2k} diferenciáveis e se comportando em cada ponto como o referencial que temos usado até o momento.

ASSERÇÃO: As distribuições $D_s = \text{ger} \{X_{2s-1}, X_{2s}\}$ são paralelas e determinam uma fatorização local como produto de superfícies.

DEMONSTRAÇÃO DA ASSERÇÃO: Consideremos a segunda Identidade de Bianchi:

$$3.3.4.7 \quad (\nabla_{X_k} R(X_1, X_2) + \nabla_{X_1} R(X_2, X_k) + \nabla_{X_2} R(X_k, X_1))(X_1, X_\ell) = 0.$$

Expandindo 3.3.4.7 temos:

$$\begin{aligned} & X_k \langle R(X_1, X_2) X_1, X_\ell \rangle - \langle R(\nabla_{X_k} X_1, X_2) X_1, X_\ell \rangle - \langle R(X_1, \nabla_{X_k} X_2) X_1, X_\ell \rangle - \\ & - \langle R(X_1, X_2) \nabla_{X_k} X_1, X_\ell \rangle - \langle R(X_1, X_2) X_1, \nabla_{X_k} X_\ell \rangle + X_1 \langle R(X_2, X_k) X_1, X_\ell \rangle - \\ & - \langle R(\nabla_{X_1} X_2, X_k) X_1, X_\ell \rangle - \langle R(X_2, \nabla_{X_1} X_k) X_1, X_\ell \rangle - \langle R(X_2, X_k) \nabla_{X_1} X_1, X_\ell \rangle - \\ & - \langle R(X_2, X_k) X_1, \nabla_{X_1} X_\ell \rangle + X_2 \langle R(X_k, X_1) X_1, X_\ell \rangle - \langle R(\nabla_{X_2} X_k, X_1) X_1, X_\ell \rangle - \\ & - \langle R(X_k, \nabla_{X_2} X_1) X_1, X_\ell \rangle - \langle R(X_k, X_1) \nabla_{X_2} X_1, X_\ell \rangle - \langle R(X_k, X_1) X_1, \nabla_{X_k} X_\ell \rangle = 0 \end{aligned}$$

Como $\langle R(X_i, X_j) X_k, X_\ell \rangle = 0$ se $\{i, j, k, \ell\}$ contém mais que dois elementos, de 3.3.4.6 segue que o único termo da expansão de 3.3.4.7 que não se anula para $k, \ell > 2$ é $\langle R(X_1, X_2) X_1, \nabla_{X_k} X_\ell \rangle$.

Portanto

$$\langle \nabla_{X_k} X_\ell, X_2 \rangle = 0 \quad k, \ell > 2$$

Analogamente temos

$$\langle \nabla_{X_k} X_\ell, X_1 \rangle = 0 \quad k, \ell > 2$$

o que prova que D_1 é uma distribuição paralela. Pelo mesmo argumento D_s é uma distribuição paralela e isto prova a asserção e o teorema.

§4. VARIEDADES ANALÍTICAS COM o.c.p.

É um resultado bem conhecido que os grupos de holonomia local de uma variedade analítica são iguais. Usando este fato, 3.2.1, 3.3.4 e o teorema de Gallot e Meyer (3.1.1), os seguintes resultados são facilmente provados:

3.4.1. TEOREMA. Seja M uma variedade riemanniana compacta, simplesmente conexa com o.c.p. não negativo. Se a métrica de M é analítica, então M é o produto riemanniano de variedades com a cohomologia de de Rham isomorfa a da esfera.

3.4.2. COROLÁRIO. Se M é variedade de Kähler compacta, simplesmente conexa, analítica com o.c.p. não negativo, então M é produto riemanniano de variedades difeomorfas a esfera dois dimensional.

§5. IMERSÕES ISOMÉTRICAS COM CURVATURA NÃO NEGATIVA E FIBRADO NORMAL PLANO.

Seja M^n uma variedade riemanniana e simplesmente conexa com curvaturas seccionais não negativas e $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com curvatura normal $R^\perp \equiv 0$. Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é

uma base ortonormal de $T_x M$ que diagonaliza a 2^{a} forma fundamental α , então por 3.1.5 os bivectores $X_i \wedge X_j$, $i < j$, diagonalizam o operador de curvatura ρ e portanto ρ é puro. A finalidade deste parágrafo é provar o seguinte resultado:

3.5.1. TEOREMA. Nas hipóteses acima, M^n é produto de variedades do tipo GM_1 .

OBSERVAÇÃO. Do teorema 3.2.1 segue que, na decomposição de de Rham de M não aparecem espaços simétricos que não sejam esferas. Portanto para mostrar 3.5.1 é suficiente mostrar o seguinte resultado:

3.5.2. TEOREMA. Se M^n é do tipo GM_2 , então $n = 2k = 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $v^1 = \{(x, \xi) \in v : \|\xi\| = 1\}$ o fibrado normal unitário da imersão f e $G : v^1 \longrightarrow S^{n+p-1} \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ a aplicação normal de Gauss generalizada, $G(x, \xi) = \xi$. Sejam

$$D = \{\xi \in S^{n+p-1} : \xi \text{ é valor regular de } G\}$$

$$A = \{(x, \xi) \in v^1 : (x, \xi) \text{ é ponto regular de } G\}$$

$$P = \{x \in M : \exists \xi \in v_x^1 M : (x, \xi) \in A\} = \pi_v(A)$$

onde $\pi_v : v \longrightarrow M$ é a projeção canônica e $v_x = \pi_v^{-1}(x)$.

Seja $A_\ell = \{(x, \xi) \in A : \text{índice } A_\xi = \ell\}$. A ℓ -ésima curvatura

total absoluta de f é

$$\tau_\ell(f) = \frac{1}{c} \int_{A_\ell} |\det A_\xi| dv^1$$

onde dv^1 é a medida em v^1 e c o volume da esfera S^{n+p-1} . A característica de Euler-Poincaré pode ser calculada a partir de $\tau_\ell(f)$ por

$$\chi(M) = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \tau_\ell(f)$$

(veja [R]). Pelas nossas hipóteses $\chi(M) = k+1$ e a idéia da demonstração é mostrar que $\sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \tau_\ell(f) > k+1$ se $k > 1$. Começaremos dando uma decomposição de v_x que nos será útil para estimar $\tau_\ell(f)$.

3.5.2.1. ASSERÇÃO. Seja $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de $T_x M$ que diagonaliza a 2^a forma fundamental de α . Se $x \in P$, $\alpha(X_j, X_j) \neq 0$ e os subespaços $B_i = \text{ger} \{ \alpha(X_{2i-1}, X_{2i-1}), \alpha(X_{2i}, X_{2i}) \}$ são dois a dois ortogonais.

De fato, se $\alpha(X_j, X_j) = 0$, para qualquer $\xi \in v_x^1$, $A_\xi(X_j) = 0$ e portanto $x \notin P$. A ortogonalidade dos B_i segue de 3.3.4.6 e da equação de Gauss. Temos portanto uma decomposição ortogonal.

$$v_x = B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus N_1(x)^\perp$$

onde $\dim B_i = 1$ ou 2 e $N_1(x)^\perp = \{\xi \in v_x : A_\xi \equiv 0\}$ é ortogonal ao 1º espaço normal.

Suponhamos ter ordenado os X_i 's de tal maneira que $\dim B_i = 2$, $i \leq s$, $\dim B_i = 1$, $s+1 \leq i \leq k$. Em cada B_i consideramos a base ortonormal:

$$i \leq s \left\{ \begin{array}{l} \xi_{2i-1} = \alpha(X_{2i-1}, X_{2i-1}) \|\alpha(X_{2i-1}, X_{2i-1})\|^{-1} \\ \xi_{2i} = \text{vetor unitário normal a } \xi_{2i-1} \text{ e tal que} \\ \langle \xi_{2i}, \alpha(X_{2i}, X_{2i}) \rangle \geq 0. \end{array} \right.$$

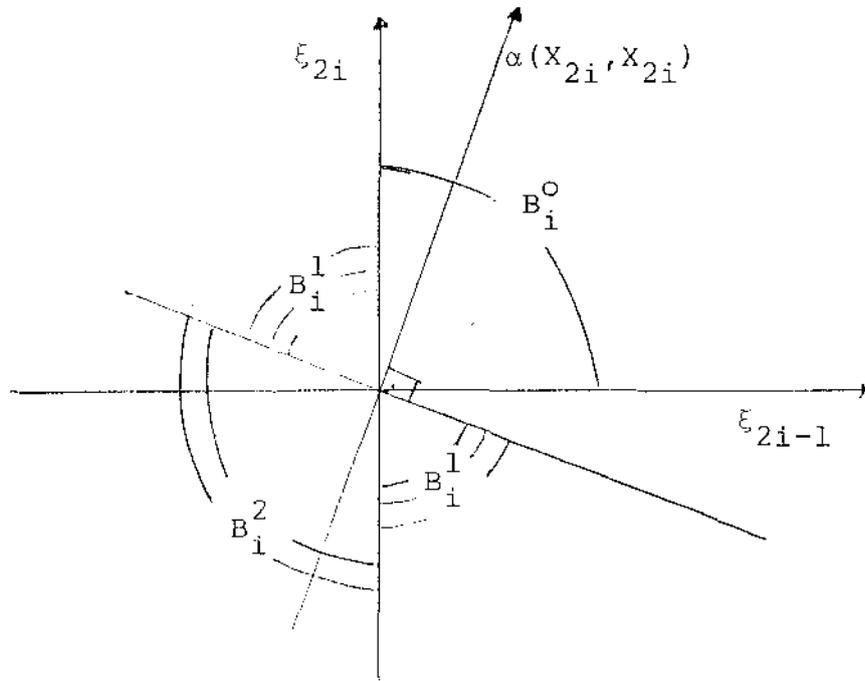
$$\xi_{2s+t} = \alpha(X_{2s+t}, X_{2s+t}) \|\alpha(X_{2s+t}, X_{2s+t})\|^{-1}$$

e completamos a base com uma base ortonormal de $N_1(x)^\perp$. Para $\xi \in v^1$ seja $a_i(\xi) = \langle A_\xi X_i, X_i \rangle$ o i -ésimo autovalor de A_ξ . Em cada B_i consideremos os seguintes subconjuntos:

$$B_i^0 = \{\xi \in B_i : a_{2i-1}(\xi), a_{2i}(\xi) > 0\}$$

$$B_i^1 = \{\xi \in B_i : a_{2i-1}(\xi) \cdot a_{2i}(\xi) < 0\}$$

$$B_i^2 = \{\xi \in B_i : a_{2i-1}(\xi), a_{2i}(\xi) < 0\}$$



Claramente, se $\dim B_i = 1$, $B_i^1 = \emptyset$. Seja $\dim B_i = 2$ e $\xi \in B_i$, $\xi = x_{2i-1}\xi_{2i-1} + x_{2i}\xi_{2i}$. Consideremos os conjuntos

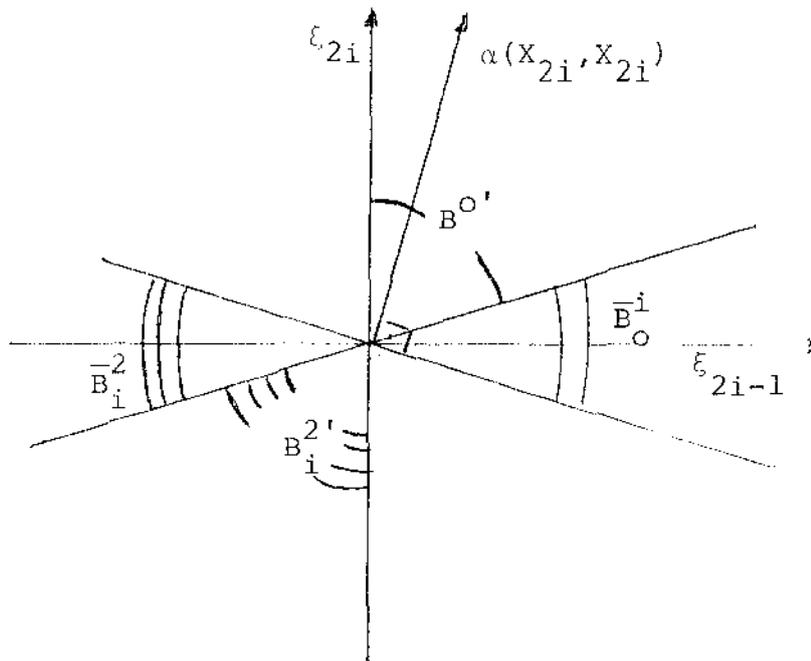
$$B_i^{0'} = \{ \xi \in B_i^0 : -x_{2i-1}\xi_{2i-1} + x_{2i}\xi_{2i} \quad \text{ou}$$

$$x_{2i-1}\xi_{2i-1} - x_{2i}\xi_{2i} \in B_i^1 \};$$

$$\bar{B}_i^{0'} = \{ \xi \in B_i^0 : -x_{2i-1}\xi_{2i-1} + x_{2i}\xi_{2i} \quad \text{ou}$$

$$x_{2i-1}\xi_{2i-1} - x_{2i}\xi_{2i} \in B_i^0 \cup B_i^2 \} .$$

Analogamente definimos $B_i^{2'}$ e $\bar{B}_i^{2'}$.



Temos então $\bar{B}_i^0 \neq \emptyset \neq \bar{B}_i^2$ se, e somente se $K(X_{2i-1}, X_{2i}) > 0$.

Consideremos agora $W_\ell(x) = A_\ell \cap v_x^1$. Dado $\xi \in v_x^1$ consideramos a decomposição de ξ .

$$3.5.5.2. \quad \xi = \xi^1 + \dots + \xi^k + \bar{\xi}$$

onde $\xi^i \in B_i$ e $\bar{\xi} \in N_1(x)^\perp$. Seja $\bar{W}_0(x) = \{\xi \in A \cap v_x^1 : \xi^i \in \bar{B}_i^0\} \subseteq W_0(x)$. Dado um subconjunto $\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{1, \dots, k\}$, $i_1 < \dots < i_t$ consideramos as aplicações

$$v_{i_1 \dots i_t} : \bar{W}_0(x) \longrightarrow v_x^1$$

que consiste em trocar, na decomposição 3.5.2.2 de ξ , os vetores $\xi^{i_1}, \dots, \xi^{i_t}$ com seus opostos. Seja $\bar{W}_{i_1 \dots i_t}(x) \subseteq W_{2t}(x)$ a imagem

de \bar{W}_0 por $\varphi_{i_1 \dots i_t}$. Observamos:

(a) as φ 's são isometrias sobre suas imagens e estas são disjuntas.

(b) $|\det A_{\xi}| = |\det A_{\varphi(\xi)}|$

($\varphi = \varphi_{i_1 \dots i_t}$). Destas observações segue imediatamente:

$$3.5.2.3. \quad \int_{\bar{W}_{2t}(x)} |\det A_{\xi}| ds_x = \binom{k}{t} \int_{\bar{W}_0(x)} |\det A_{\xi}| ds_x$$

onde ds_x é a medida em v_x^1 e $\bar{W}_{2t}(x)$ a reunião dos $\bar{W}_{i_1 \dots i_t}(x)$.

Somando a relação acima em t temos:

$$3.5.2.4. \quad \sum_{t=0}^k \int_{\bar{W}_{2t}(x)} |\det A_{\xi}| ds_x = \sum_{t=0}^k \binom{k}{t} \int_{\bar{W}_0(x)} |\det A_{\xi}| ds_x =$$

$$= 2^k \int_{\bar{W}_0(x)} |\det A_{\xi}| ds_x .$$

Consideramos agora $W_{2\ell-1}(x)$, $\ell = 1, \dots, k$. Se $\xi \in W_{2\ell-1}(x)$ existe um primeiro $i < k$ tal que $\xi^i \in B_i^1$ e B_i é bidimensional. Então $\xi^i = a\xi_{2i-1} + b\xi_{2i}$ com $ab < 0$. Consideremos as aplicações φ_1^i e φ_2^i como segue:

Se $a < 0$, aplicar φ_1^i consiste em trocar, na decomposição de ξ , o vetor ξ^i pelo vetor $|a| \xi_{2i-1} + b\xi_{2i}$.

Se $b < 0$, aplicar φ_2^i consiste em trocar, na decomposição de ξ , o vetor ξ^i pelo vetor $-a\xi_{2i-1} + b\xi_{2i}$.

Temos:

(a) φ_1^i e φ_2^i são isometrias sobre suas imagens.

(b) a imagem φ_1^i está contida em $W_{2\ell}(x) - \bar{W}_{2\ell}(x)$ e a imagem de φ_2^i está contida em $W_{2\ell+2}(x) - \bar{W}_{2\ell+2}(x)$.

(c) $|\det A_\xi| \leq |\det A_{\varphi_j^i(\xi)}|$, $j = 1, 2$.

Portanto de 3.5.2.4 e das observações acima temos:

$$\begin{aligned} X(M) &= \frac{1}{c} \int_P \left(\sum_{\ell=0}^k \int_{\bar{W}_{2\ell}(x)} |\det A_\xi| ds_x + \int_{W_{2\ell}(x) - \bar{W}_{2\ell}(x)} |\det A_\xi| ds_x - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\ell=1}^k \int_{W_{2\ell-1}(x)} |\det A_\xi| ds_x \right) dx \geq \frac{2^k}{c} \int_P \int_{\bar{W}_0(x)} |\det A_\xi| ds_x dx = \\ &= \frac{2^k}{c} \int_{\bar{A}_0} |\det A_\xi| dv^1 \end{aligned}$$

onde $\bar{A}_0 = \{(x, \xi) \in A_0 : x \in P \text{ e } \xi \in \bar{W}_0(x)\}$.

Queremos agora, estimar $\int_{\bar{A}_0} |\det A_\xi| dv^1$

Seja $\{U_\lambda\}_{\lambda \in I}$ uma coleção de abertos conexos de v^1 tal que $\bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ é igual, exceto para um conjunto de medida nula, ao conjunto A e tal que $G|_{U_\lambda}$ é injetiva para todo λ em I . Os abertos U_λ têm a seguinte propriedade: o índice de x como ponto crítico de h_ξ para $(x, \xi) \in U_\lambda$ é constante.

Seja $I_\ell = \{\lambda \in I : U_\lambda \subseteq A_\ell\}$ para $\ell = 0, \dots, 2k$. Para $\lambda \in I_\ell$, sejam $T_\ell(x) = U_\lambda \cap v_x^1$ e $\bar{T}_\ell(x) = T_\ell(x) \cap \bar{W}_\ell(x)$. Existe uma correspondência biunívoca entre I_0 e I_ℓ para qualquer $\ell \geq 1$ pois $T_\ell(x)$ pode ser obtido de $T_0(x)$ compondo as isometrias $\varphi_{i_1 \dots i_t}^i$, φ_1^i e φ_2^i definidas anteriormente. Para cada $\lambda \in I_0$, seja δ seu correspondente em I_ℓ . Chamemos U_δ por U_λ^ℓ e U_λ por U_λ^0 . Temos então $L = I_0$ tal que se $\lambda \in L$ e $(x, \xi) \in U_\lambda^\ell$, x é ponto crítico de h_ξ de índice λ .

Temos então, denotando com V a medida em S^{n+p-1} ,

$$\chi(M) \geq \frac{2^k}{c} \sum_{\lambda \in L} V(G(\bar{U}_\lambda^0)) = \sum_{\lambda \in L} \left\{ \frac{V(G(\bar{U}_\lambda^0))}{c} + \dots + \frac{V(G(\bar{U}_\lambda^\ell))}{c} + \dots + \frac{V(G(\bar{U}_\lambda^{2k}))}{c} \right\}.$$

onde $\bar{U}_\lambda^0 = \{(x, \xi) \in U_\lambda^0 : \xi \in \bar{T}_0(x)\}$ e $U_\lambda^\ell = \{(x, \xi) \in U_\lambda^\ell : \xi \in \bar{T}_\ell(x)\}$.

Chamemos $\sum_{\lambda \in L} V(G(\bar{U}_\lambda^0))$ por V_0 e $\sum_{\lambda \in L} V(G(\bar{U}_\lambda^\ell))$ por V_ℓ .

2.2.5.5. ASSERÇÃO. $2V_0 > c$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $B = \bigcup_{\lambda \in L} G(\bar{U}_\lambda^0)$. Então $V(B) \leq V_0$. Seja $C = D - B$.

Vamos provar que $V(C) < V_0$. Seja $C_\lambda^0 \subset U_\lambda^0$ tal que $G(C_\lambda^0) \cap B = \emptyset$.

Se $V(C) > 0$, $\exists \lambda \in L$ tal que $V(G(C_\lambda^0)) > 0$. Se expressarmos por α a soma das medidas de todas as intersecções dos $G(C_\lambda^0)$ teremos

$$V(C) = \sum_{\lambda \in L} V(G(C_\lambda^0)) - \alpha$$

Se M é do tipo GM_2 , $\chi(M) = k+1$ e então

$$k+1 \geq \frac{V_0}{c} + \dots + \frac{V_\ell}{c} + \dots + \frac{V_{2k}}{c} .$$

Se $V_0 \geq c$ não há nada a demonstrar. Mas se $V_0 < c$ então existe ℓ , número par, tal que $V_\ell > c$.

Para este ℓ , sejam $D_1 = \bigcup_{\lambda \in L} G(\bar{U}_\lambda^\ell)$ e $D_2 = D - D_1$. Conside-

remos para todo λ , $C_\lambda^\ell \subset U_\lambda^\ell$ tal que $G(C_\lambda^\ell) \cap D_1 = \emptyset$. Se β expressa a soma das medidas de todas as intersecções dos $G(C_\lambda^\ell)$, te

mos:

$$V(D_2) = \sum_{\lambda \in L} V(G(C_\lambda^\ell)) - \beta$$

Observemos que

$$3.5.2.6. \quad V(D_2) < c < V_\ell$$

Vamos agora relacionar V_ℓ com V_0 . Lembremos que

$$V_0 = \sum_{\lambda \in L} \int_{\bar{U}_\lambda^0} |\det A_\xi| dv^1 \quad \text{e} \quad V_\ell = \sum_{\lambda \in L} \int_{\bar{U}_\lambda^\ell} |\det A_\xi| dv^1$$

e se $\ell = 2t$, dado um elemento ξ de $\bar{T}_\ell(x)$ existe $i_1 < \dots < i_t$ com $\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ tal que ξ é obtido de um elemento de $\bar{T}_0(x)$ por $\varphi_{i_1 \dots i_t}$. Segue de 3.5.2.3 que

$$\int_{P_\lambda} \int_{T_{2t}(x)} |\det A_\xi| ds_x dx = \binom{k}{t} \int_{P_\lambda} \int_{\bar{T}_0(x)} |\det A_\xi| ds_x dx$$

onde $P_\lambda = \pi_V(U_\lambda)$. Portanto

$$3.5.2.7. \quad V_\ell = \binom{k}{t} V_0.$$

Agora relacionaremos $V(D_2)$ com $V(C)$.

Sejam $T'_0(x) = C_\lambda^0 \cap v_x^1$ e $T'_\ell(x) = C_\lambda^\ell \cap v_x^1$. Novamente, recordamos que existe $\binom{k}{t}$ escolhas de $i_1 < \dots < i_t$ com

$\{i_1, \dots, i_t\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ tal que $\varphi_{i_1 \dots i_t} (T'_0(x)) \subseteq T'_{2t}(x)$ e suas imagens são disjuntas. Como

$$\sum_{\lambda} V(G(C_{\lambda}^0)) = \sum_{\lambda \in L} \int_{C_{\lambda}^0} |\det A_{\xi}| dv^1,$$

$$\sum_{\lambda \in L} V(G(C_{\lambda}^{\ell})) = \sum_{\lambda \in L} \int_{C_{\lambda}^{\ell}} |\det A_{\xi}| dv^1$$

temos se $P'_{\lambda} = \pi_{\nu}(C_{\lambda}^0)$

$$\begin{aligned} \int_{P'_{\lambda}} \int_{T'_{\lambda}(x)} |\det A_{\xi}| ds_x dx &= \gamma \int_{P'_{\lambda}} \int_{T'_0(x)} |\det A_{\xi}| ds_x dx \geq \\ &\geq \binom{k}{t} \int_{C_{\lambda}^0} |\det A_{\xi}| dv^1. \end{aligned}$$

Agora precisamos relacionar α com β . Se $G_0 = G(C_{\lambda}^0) \cap G(C_{\delta}^0)$, para todo $\xi \in G_0$ existem x e y tais que $\xi \in T'_0(x)$ e $\xi \in T'_0(y)$. Portanto $\varphi_{i_1 \dots i_t}(\xi) \in T'_{\ell}(x)$ e $\varphi_{i_1 \dots i_t}(\xi) \in T'_{\ell}(y)$ e $\varphi_{i_1 \dots i_t}(\xi) \in G_{\ell} = G(C_{\lambda}^{\ell}) \cap G(C_{\delta}^{\ell})$. Chamando de $C_{\lambda}^{0'} = C^{-1}(G_0) \cap C_{\lambda}^0$ e $C_{\lambda}^{\ell'} = G^{-1}(G_{\ell}) \cap C_{\lambda}^{\ell}$ temos

$$V(G_\ell) = \int_{C_\lambda^\ell} |\det A_\xi| dv^1 = \gamma \int_{C_\lambda^0} |\det A_\xi| dv^1 = \gamma V(G_0)$$

onde como já temos observado $\gamma \geq \binom{k}{t}$ com $2t = \ell$. Segue que $\gamma \cdot \alpha = \beta$. Logo

$$3.5.2.8 \quad V(D_2) \geq \binom{k}{t} V(C)$$

De 3.5.2.6, 3.5.2.7 e 3.5.2.8 segue

$$V(C) < c < V_0$$

o que prova 3.2.5.5.

Portanto $\chi(M) > 2^{k-1}$. Como $\chi(M) = k+1$ e por 3.1.10, $\dim M \neq 4$ segue que $k = 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [B - G] Bishop, R.L., Goldberg, S.I., On conformally flat spaces with commuting curvature and Ricci transformations, Canadian Journal of Mat. Vol. XXIV 5, 1972, 799-804.
- [B - M] Baldin, Y., Mercuri, F., Isometric immersions in codimension two with non negative curvature, Math. Z. 173, 1980, 111-117.
- [C] do Carmo, M., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides , 1979.
- [C - D] do Carmo, M., Dajczer, M., General conformally flat hypersurfaces of \mathbb{R}^{n+1} , Informes de Matemática, IMPA, série A-008- Junho 1982.
- [C-D-M] do Carmo, M., Dajczer, M., Mercuri, F., Compact conformally flat hypersurfaces, Preprint, IMPA, 1983.
- [Ch₁] Chen, B.Y., Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker , New York, 1973.
- [Ch₂-T] Chen, B.Y., Teng, T., Flatness of normal connections of Totally quasiumbilical submanifolds and its application, Soochow , J. Math. and Mat. Sci. 1, 1975, 9-16.

- [G - M] Gallot, S., Meyer, D., Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. pures et appl. 54, 1975, 285-304.
- [J] Jacobowitz, H., Curvature operators on the exterior algebra, Linear and Multilinear Algebra 7, 1979, 93-105.
- [K] Kulkarki, R.S., Curvature Structures and conformal transformations, J. Diff. Geometry 4, 1970, 425-451.
- [K - M] Kobayashi, S., Nomizu, K., Foundations of Differential Geometry, vol. I e II, New York, London, Inters.Publ., 1969.
- [Ku] Kuiper, N.H., On conformally flat spaces in the large, Annals of Math. 50, 1949, 916-924.
- [M] Moore, J.D., Conformally Flat Submanifolds of Euclidean space, Math. Ann., 225, 1977, 89-97.
- [M - M] Moore, J.D., Morvan, J.M., Sous-variétés conformément plates de codimension quatre, C.R. Acad. Sc. Paris 287, 1978, 655-657.
- [M - R₁] Mercuri, F., Rigas, A., Curvatura e Topologia, Escola de Geometria Diferencial, Univ. Fed. do Ceará, 1978.
- [M - R₂] Mercuri, F., Rigas, A., Formas harmônicas e curvatura. Escola de Geometria Diferencial, IMPA, R. Janeiro, 1982.

- [Ma] Maillot, Sur L'Operateur de courbure d'une variété Riemannienne, these 3ème cycle, L'Université Claude-Bernard -Lyon, junho 1974.
- [M - S] Milnor, J., Stasheff, J.D., Characteristic Classes, Annals of Mathematics Studies 76. Princeton University Press, 1974.
- [R] Rodrigues, L., Geometria das Subvariedades, IMPA 26, Rio de Janeiro, 1976.
- [Re] Reckziegel, H., Completeness of curvatures surfaces of an isometric immersion, J. Diff. Geometry, 14, 1979, 7-20.
- [S] Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish, Inc., Boston, 1975.
- [V₁] Vilms, J., Local isometric imbedding of Riemannian n -manifolds into Euclidean $(n+1)$ -space, J. Diff. Geometry 12, 1977, 197-202.
- [V₂] Vilms, J., Factorization of curvature operators, Trans. Amer. Math. Soc., 260, 1980, 595-605.
- [Y] Yau, S.T., Remarks on Conformal Transformations, J. Diff. Geometry, vol. 8, 3, 1973, 369-381.