2-CONEXÕES E CÁLCULO ESTOCÁSTICO

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Pedro José Catuogno e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 26 de Fevereiro de 1996

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin

Dissertação apressentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Catuogno, Pedro Jose

C299d 2-Conexões e calculo estocastico / Pedro Jose Catuogno -- Campinas, [S.P. : s.n.], 1996.

Orientador : Luiz Antonio Barrera San Martin

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatistica e Ciência da Computação.

1. Geometria diferencial. 2. Analise estocástica. I. San Martin, Luiz Antonio Barrera. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 26 de fevereiro de 1996 pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). Marcelo Dutra Fragoso

Prof (a). Dr (a). Mauro Sergio de Freitas Marques

Prof (a). Dr (a). Nancy Lopes Garcia

Prof (a). Dr (a). Pedro Aladar Tonelli

Prof (a). Dr (a). Luiz Antonio Barrera San Martin

Resumo

Neste trabalho, presentamos uma teoria de conexões adaptada à geometria de Schwartz (2-conexões) e estudamos os levantamentos horizontais estocásticos em relação a 2-conexões. Nos capítulos 2 e 3 desenvolvemos a teoria de 2-conexões para fibrados principais e fibrados vetoriais associados, damos diferentes caracterizações desta noção de conexão e a comparamos com outras noções de conexão de ordem dois já existentes na literatura, estudamos as 2-conexões invariantes para fibrados do tipo G(G/H,H) em que a base é o espaço homogeneo G/H do grupo G e consideramos levantamentos horizontais estocásticos de semimartingales em relação a 2-conexões, finalmente introduzimos uma noção de paralelismo estocástico de difusões, mostramos que todo paralelismo estocástico que verifica certas propriedades naturais é obtido como o sistema dos levantamentos horizontais estocásticos em relação a uma 2-conexão.

No capítulo 4 estabelecemos a existência de bijeções entre as 1-conexões de H^2M, as 2-conexões de H^1M e os transportes paralelos estocásticos em TM. Achamos um prolongamento $\Gamma \to \Gamma^1$ de 1-conexões sem torsão de H^1M a 1-conexões de H^2M, este prolongamento coincide com o prolongamento $p(\Gamma)$ definido por I. Kolar [22].

Agradecimentos

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, participaram na realização desta tese.

Ao Prof. Dr. Luiz San Martin, pela amizade e orientação.

A meus colegas e amigos da UNMDP.

A meus amigos Lord Paul, Capitan Dan–Dan de Passagarda, Tomas, São, Marcinha, a turma dos Maringones e o povo Chileno.

Aos companheiros do predinho.

Ao IMECC.

AoCNpQ, por ter financiado meu trabalho.

Pedro José Catuogno

Aos meus pais Pedro Carlos e Marta Amalia.

Introdução

No inicío da década passada P. Meyer fez a seguinte observação fundamental: "A teoria de semimartingales é essencialmente uma teoria geométrica ".O ponto chave, é que o espaço dos semimartingales contínuos é estável por composição com aplicações $\mathcal{C}^{\infty}$. Em 1980, L. Schwartz descobriu o que hoje é conhecido como o princípio de Schwartz: "Se X é um semimartingale contínuo numa variedade diferenciável M, os diferenciais de Itô dX^i e $d[X^i, X^j]$ (onde (x^i) é uma carta local e X^i a i-coordenada de X nesta carta) comportam-se (formalmente), como os coeficientes de um vetor tangente de segunda ordem, isto é,

$$d_2 X_t \quad = \quad dX_t^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2} d[X^i, X^j]_t \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$$

é um vetor tangente de segunda ordem (formal) de M em X_t ". O significado heurístico deste principípio é que, toda fórmula geométrica envolvendo vetores tangentes de segunda ordem tem uma leitura probabilística.

Assim, naturalmente vinculado ao estudo dos semimartingales numa variedade diferenciável, temos uma geometria de segunda ordem, chamada de geometria de Schwartz [8].

Estos fatos sugeriram a P. Meyer e L. Schwartz ([28], [30] e [34]) um novo enfoque do cálculo estocástico, o qual estende e esclarece as construções elementares do cálculo estocástico numa variedade diferenciável (Isto é, integração estocástica ao longo de semimartigales, equações diferenciais estocásticas, Γ-martingales, etc). Este enfoque também permitiu formular novos e interessantes problemas, tanto de natureza estocástica como geométrica.

Neste ponto é interessante destacar que motivados por problemas analíticos e geométricos. vários autores (ver [3], [11], [31] e [36]) já tinhan-se interessado pelas geometrias de segunda ordem.

A pesar do dito anteriormente, a geometria de Schwartz foi pouco desenvolvida além dos trabalhos iniciais de P. Meyer e L. Schwartz. Em nossa opinião, isto é devido a dois fatores.

O primeiro é a visão da geometria de Schwartz, só como uma linguagem adaptada à geometria estocástica. O segundo é a falta de uma noção de conexão adaptada a esta geometria.

Por isto, um dos objetivos desta tese é desenvolver uma teoria de conexões adaptada à geometria de Schwartz, de maneira análoga à teoria de conexões clássica. Com esta finalidade introduzimos as 2-conexões. Estas são um tipo de conexão de segunda ordem adaptadas à geometria de Schwartz. A noção de 2-conexão esta implícita no trabalho de P. Meyer [28] como prolongamento de 1-conexões. Nós explicitamos esta noção no inicio do capítulo 2, onde também a comparamos com outras noções de conexão de segunda ordem, já existentes na literatura. Nos capítulos 2 e 3 desenvolvemos a teoria de 2-conexões para fibrados principais e fibrados vetoriais.

Um outro assunto central nesta tese são os levantamentos estocásticos. O princípio de Schwartz sugere uma definição de levantamento horizontal estocástico de semimartingales em relação a uma 2-conexão, que estende o levantamento horizontal estocástico em relação a uma 1-conexão. No capítulo 2 mostramos diversas propriedades dos levantamentos horizontais em relação a 2-conexões, merecendo especial destaque a seguinte: Toda difusão num fibrado principal com gerador infinitesimal horizontal em relação a uma 2-conexão é um levantamento horizontal estocástico em relação a esta 2-conexão. Como era de esperar o enfoque de P. Meyer e L. Schwartz do cálculo estocástico e a teoria de 2-conexões sugerem novos resultados. Por exemplo, de natureza geométrica: No capítulo 2 mostramos que se $P(M,G)$ é um fibrado principal, então toda 2-conexão $\mathbf{H}$ para $P(M,G)$ determina um prolongamento canônico das conexões de M a conexões G-invariantes de P. Ou de natureza estocástica por exemplo no capítulo 3 achamos uma fórmula que permite interpretar os 2-operadores de derivada covariante em termos de difusões. Ou ainda de natureza mista, tanto estocástica como geométrica, por exemplo no capítulo 4 provamos a existência de bijeções entre as 1-conexões de H^2M, as 2-conexões de H^1M e os transportes paralelos estocásticos em TM.

A seguir faremos um breve resumo dos capítulos que compõem esta tese.

No Capítulo 1 abordaremos de forma breve os principais conceitos e resultados dos quais dependem o desenvolvimento da tese. Dividimos este capítulo em duas seções. Na primeira expomos as noções básicas do cálculo estocástico em variedades diferenciaveis, na forma desenvolvida por L. Schwartz e P. Meyer ([28],[30],[34]) junto com os elementos de geometria de segunda ordem necessários ao desenvolvimento das construções elementares do cálculo estocástico neste contexto. Na segunda seção deste capítulo desenvolvemos a teoria elementar dos jatos de ordem um e dois, que são relevantes para nosso trabalho ([31],[13]).

No capítulo 2 introduzimos e estudamos uma noção de conexão adaptada à geometria de Schwartz, que chamaremos de 2-conexão. Preferimos dividir este capítulo em três seções. Na primeira introduzimos as 2-conexões para uma variedade fibrada $\pi : P \to M$. Observamos que as 2-conexões são uma extensão natural das 1-conexões e que toda 2-conexão induz uma 1-conexão. Mostramos que as 2-conexões podem ser olhadas como seções do fibrado $\beta : J_2P \to P$, o que nos permite dar uma nova caracterização do prolongamento de Stratonovich de P. Meyer, em termos de morfismos da teoria de jatos. A seguir, provamos que as conexões holonômicas de ordem dois de Ch. Ehresmann [11] coincidem com as 2-conexões quando estas são formuladas em termos da teoria de jatos. Concluímos esta seção mostrando que as 2-conexões estão em correspondência biunívoca com os pares formados pela 1-conexão induzida e um certo tensor simétrico.

A segunda seção é um estudo das 2-conexões invariantes para fibrados do tipo $G(G/H, H)$ em que a base é o espaço homogêneo G/H do grupo de Lie G.

Finalmente na terceira seção consideramos levantamentos horizontais estocásticos em relação a 2-conexões. Primeiramente mostramos sua existência e unicidade. A seguir observamos que se $\mathbf{H}$ é uma 1-conexão para $P(M, G)$ e X um M-semimartingale então o levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}$ definido por I. Shigekawa em [35] coincide com o levantamento horizontal estocástico em relação à 2-conexão $\mathbf{H}^S$.

Depois estudamos os prolongamentos de 1-conexões a 2-conexões num fibrado principal $P(M, G)$ tais que, para um par fixo de conexões sem torsão $\overline{\Gamma}$ de P e Γ de M se verifique que os levantamentos horizontais estocásticos de Γ-martingales são $\overline{\Gamma}$-martingales. Mostramos que se $P(M, G)$ é um fibrado principal, toda 2-conexão $\mathbf{H}$ para $P(M, G)$ determina um prolongamento canônico das conexões de M a conexões G-invariantes de P.

Concluímos este capítulo mostrando que toda difusão no fibrado principal com gerador infinitesimal horizontal é um levantamento horizontal estocástico em relação a esta 2-conexão.

O capítulo 3 se divide em duas seções. Na primeira seção desenvolvemos a teoria das 2-conexões para fibrados vetoriais. Definimos as chamadas 2-conexões induzidas nos fibrados vetoriais e as comparamos com as 2-surconexões [26]. Introduzimos um tipo de operador de derivada covariante de segunda ordem que chamamos 2-operadores de derivada covariante. Resumimos os resultados obtidos da seguinte maneira

Seja E um fibrado vetorial e BE o fibrado principal das bases de E. Então as seguientes noções de conexão de segunda ordem são equivalentes

1 2-conexão induzida em E.

2 2-surconexão em E [26].

3 2-conexão em BE.

4 2-operador de derivada covariante em E.

Mostramos uma fórmula que vincula o 2-operador de derivada covariante ∇ de E com P^{∇}, o transporte paralelo estocástico associado a ∇. Com efeito, sejam $\varphi \in \Gamma(E)$ e X uma difusão com gerador infinitesimal L inicializada em x, então

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\ \mathbf{E}[(\mathrm{P}^{\nabla}_{X_t})^{-1}\varphi \circ X_t] = \nabla_L \varphi(x)$$

Na segunda seção do capítulo 3 introduzimos a noção de paralelismo estocástico de difusões. Um paralelismo estocástico é um sistema especial de levantamentos de difusões. Em particular, o sistema dos levantamentos horizontais estocásticos de difusões em relação a uma 2-conexão é um paralelismo estocástico. O objetivo desta seção é mostrar que todo paralelismo estocástico que verifica certas propriedades naturais é obtido como o sistema dos levantamentos horizontais estocásticos em relação a uma 2-conexão.

O principal objetivo do capítulo 4 é estudar as relações entre a geometria de Schwartz de H^1M e a geometria usual de H^2M. Estabelecemos a existência de bijeções entre as 1-conexões de H^2M, as 2-conexões de H^1M e os transportes paralelos estocásticos em TM. A seguir introduzimos de uma maneira natural um prolongamento $\Gamma \rightarrow \Gamma^1$ de 1-conexões sem torsão de H^1M a 1-conexões de H^2M. Provamos que este prolongamento coincide com o prolongamento $p(\Gamma)$ definido por I. Kolar [22].E damos uma interpretação estocástica deste prolongamento em termos de transporte paralelo estocástico.

Capítulo 1

Geometria de Schwartz e Teoria de Jatos.

Neste capitulo apresentamos, sem pretensão de originalidade, alguns elementos básicos do cálculo estocástico e da teoria de jatos; Acreditamos que isto facilitará a leitura do resto deste trabalho.

Preferimos dividir este capítulo em duas seções. Na primeira expomos as noções básicas do cálculo estocástico em variedades diferenciáveis, na forma desenvolvida por L. Schwartz e P. Meyer ([28],[30],[34]) junto com os elementos de geometria de segunda ordem necessários ao desenvolvimento das construções elementares do cálculo estocástico neste contexto. Esta forma do cálculo estócastico é sugerida pela seguinte observação fundamental de L. Schwartz, conhecida como o Princípio de Schwartz: "Se X é um semimartingale contínuo numa variedade diferenciável M, os diferenciais de Itô dX^i e $d[X^i, X^j]$ (onde (x^i) é uma carta local e X^i a i-coordenada de X nesta carta) comportam-se (formalmente), como os coeficientes de um vetor tangente de segunda ordem, isto é,

$$d_2X_t \;=\; dX_t^i\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{2}d[X^i, X^j]_t\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$$

é um vetor tangente de segunda ordem (formal) de M em X_t ". O significado heurístico deste princípio é que, toda fórmula geométrica envolvendo vetores tangentes de segunda ordem tem uma leitura probabilística.

Na segunda seção deste capítulo desenvolvemos a teoria elementar dos jatos de ordem um e dois, que são relevantes para nosso trabalho ([31],[13]).

1.1 Geometria de Schwartz e cálculo estocástico.

Começaremos desenvolvendo as noções básicas da geometria de segunda ordem, tambem chamada de geometria de Schwartz [8].

Seja x um ponto de uma variedade diferenciável M, o espaço tangente de segunda ordem a M em x, denotado por $\tau_x M$, é o espaço vetorial dos operadores diferenciais de M em x de ordem menor ou igual a dois sem termo constante. Se $\dim(M) = n$ então $\dim(\tau_x M) = n + \frac{1}{2}n(n+1)$. Como os elementos de $T_x M$ podem ser olhados como os operadores diferenciais de M em x de ordem um, sem termo constante, temos que $T_x M \subset \tau_x M$.

Seja (U, x^i) um sistema de coordenadas local para M tal que $x \in U$. Então todo $L \in \tau_x M$ pode ser escrito de maneira única como

$$L = a^i D_i + a^{ij} D_{ij} \qquad \text{com } a^{ij} = a^{ji}$$

onde $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ e $D_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$ são operadores diferenciais em x (usamos aqui e em outras expressões em coordenadas, a convenção da soma dos índices repetidos). Os elementos de $\tau_x M$ são chamados de vetores tangentes de segunda ordem (ou vetores tangentes de ordem dois) em x; Os elementos do espaço vetorial dual $\tau_x^* M$ são chamados de formas de segunda ordem (ou covetores de segunda ordem) em x.

A união disjunta $\tau M = \bigcup_{x\in M} \tau_x M$ $[\tau^* M = \bigcup_{x\in M} \tau_x^* M]$ é canonicamente dotada com uma estrutura de fibrado vetorial sobre M, chamada de fibrado tangente de segunda ordem [fibrado cotangente de segunda ordem] de M. Observamos que a inclusão $i : TM \to \tau M$ é um monomorfismo de fibrados vetoriais.

Sejam M e N variedades diferenciáveis, $x \in M$ e $\phi : M \to N$ uma função C^∞. Então ϕ induz uma transformação linear $\phi_*(x) : \tau_x M \to \tau_{\phi(x)} N$, chamada de diferencial de ϕ em x. Se $L \in \tau_x M$ então $\phi_*(x)L \in \tau_{\phi(x)} N$ é dado por

$$\phi_*(x)L(f) = L(f \circ \phi) \text{ para toda } f \in C^\infty(N).$$

Dualmente, para um covetor $\theta \in \tau^*_{\phi(x)} N$ definimos $\phi^*(x)\theta \in \tau^*_x M$ pela fórmula

$$\langle \phi^*(x)\theta, L\rangle = \langle \theta, \phi_*(x)L\rangle \text{ para todo } L \in \tau M$$

Denotamos por $\Gamma(\tau M)$[respectivamente $\Gamma(\tau^* M)$] o espaço das seções de τM[respectivamente $\tau^* M$]. Sejam $U \subset M$ um aberto, $x \in U$ e $f, g \in C^\infty(U)$. Definimos $d^2 f(x)$ e $(df \cdot dg)(x) \in \tau^*_x M$ por

$$\begin{aligned} d^2 f(x) \cdot A &= A(f) \\ (df \cdot dg)(x) \cdot A &= \tfrac{1}{2}[A(fg) - f(x)A(g) - g(x)A(f)](x) \end{aligned}$$

onde $A \in \tau_x M$.

Seja (U, x^i) um sistema de coordenadas local de M e $x \in M$ então $\{d^2 x^i, dx^i \cdot dx^j : i \leq j\}$ é a base de $\tau^*_x M$ dual de $\{D_i, D_{ij} : i \leq j\}$. Logo se $\Theta \in \tau^*_x M$ existem únicos coeficientes $\theta_i, \theta_{ij} = \theta_{ji}$ tais que $\Theta = \theta_i d^2 x^i + \theta_{ij} dx^i \cdot dx^j$. Observamos que

$$d^2 f = D_i f d^2 x^i + D_{ij} f dx^i \cdot dx^j$$

Seja $L \in \Gamma(\tau M)$. Denotamos por QL o "operador quadrado do campo" associado a L. Ele é dado por

$$QL(f, g) = (df \cdot dg)(L) = \frac{1}{2}[L(fg) - fL(g) - gL(f)]$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$. Em um sistema de coordenadas (U, x^i) temos que

$$QL(f, g) = a^{ij} D_i f D_j g$$

onde $L = a^i D_i + a^{ij} D_{ij}$. Seja $(U, \bar{x}^\alpha)$ outro sistema de coordenadas. Neste sistema $L = \bar{a}^i \overline{D}_i + \bar{a}^{ij} \overline{D}_{ij}$ as coordenadas nos diferentes sistemas estão relacionadas por

$$\begin{aligned} \bar{a}^\alpha &= a^i D_i \bar{x}^\alpha + a^{ij} D_{ij} \bar{x}^\alpha \\ \bar{a}^{\alpha\beta} &= a^{ij} D_i \bar{x}^\alpha \cdot D_j \bar{x}^\beta \end{aligned}$$

A segunda destas fórmulas coincide com a fórmula de mudança de coordenadas de um tensor de $TM \otimes TM$. Logo a expressão anterior para QL mostra que o operador quadrado de campo associado a um operador diferencial de segunda ordem sem termo constante, pode ser interpretado como um tensor simétrico, isto é, um elemento de $TM \odot TM$. Em coordenadas, QL é dado por $QL = a^{ij} D_i \odot D_j$. Podemos considerar $Q_x : \tau_x M \to T_x M \odot T_x M$ como uma aplicação linear, definida por

$$Q_x(L = a^i D_i + a^{ij} D_{ij}) = a^{ij} D_i \odot D_j$$

Observamos, que $Q : \tau M \to TM \odot TM$ é um morfismo de fibrados vetoriais tal que a seguinte seqüência de fibrados vetoriais é exata

$$0 \to TM \to \tau M \to TM \odot TM \to 0$$

Definição 1.1.1 *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $x \in M$ e $y \in N$. Uma transformação linear $f : \tau_x M \to \tau_y N$ é dita um morfismo de Schwartz se*

1. $f(T_x M) \subset T_y N$
2. $Q(f(L)) = (f \otimes f)(QL)$, para todo $L \in \tau_x M$.

Seja (U, x^i) um sistema de coordenadas local para M tal que $x \in U$ e seja também (V, x^α) um sistema de coordenadas local para N tal que $y \in V$. Se $f : \tau_x M \to \tau_y N$ é linear, nestas coordenadas temos que

$$\begin{aligned} f(D_i) &= f_i^\alpha D_\alpha + f_i^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} \\ f(D_{ij}) &= f_{ij}^\alpha D_\alpha + f_{ij}^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Logo f é um morfismo de Schwartz se e só se

$$\begin{aligned} f_i^{\alpha\beta} &= 0 \\ f_{ij}^{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{2}(f_i^\alpha f_j^\beta + f_j^\alpha f_i^\beta) \end{aligned}$$

Sabe-se que $f : \tau_x M \to \tau_y N$ é um morfismo de Schwartz se e só se existe uma aplicação $\mathcal{C}^\infty$ $\phi : M \to N$ com $\phi(x) = y$ tal que $f = \phi_*(x)$.[8]

Seja M uma variedade diferenciável, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ um espaço de probabilidade filtrado. Um processo estocástico contínuo adaptado e a valores em M, X é dito um M-semimartingale se para toda função $\mathcal{C}^\infty$, f de M o processo a valores reais $f \circ X$ é um semimartingale.

A seguir definiremos a integral estocástica de processos a valores no fibrado cotangente de segunda ordem ao longo de semimartingales. Esta é uma generalização devida a P. Meyer da integral de Itô em $\mathbb{R}$. ([28], [8])

Com efeito, seja X um semimartingale a valores em M e $\mathbf{A}(X)$ o conjunto dos processos prediziveis Θ a valores em $\tau^* M$ que satisfazem:

1. $\pi \circ \Theta = X$ q.s.

2. O conjunto $\{\Theta_s : 0 \leq s \leq t\}$ é relativamente compacto em τM^*, para todo t e $\omega \in \Omega$.

Então existe uma única aplicação linear [8, Theorem 6.24, pg. 81]

$$\Theta \longmapsto \int \langle \Theta, d_2 X \rangle$$

Do conjunto $\mathbf{A}(X)$ nos semimartingales reais contínuos, tal que para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, todo processo predizível localmente limitado K e todo $\Theta \in \mathbf{A}(X)$ temos que

$$\begin{aligned}\int \langle d_2 f, d_2 X\rangle &= f\circ X - f\circ X_0\\ \int \langle K\Theta, d_2 X\rangle &= \int K d(\int \langle \Theta, d_2 X\rangle)\end{aligned}$$

O processo $\int \langle \Theta, d_2 X\rangle$ é chamado a integral de Θ ao longo de X e seu valor no tempo t é denotado por $\int_0^t \langle \Theta, d_2 X\rangle$. Quando θ é uma forma de segunda ordem e $\Theta_t(\omega) = \theta(X_t)$ escrevemos simplesmente $\int \langle \theta, d_2 X\rangle$ para $\int \langle \Theta, d_2 X\rangle$.

Se X é um semimartingale que toma seus valores em U, domínio da carta local (U, x^i) e nesta carta local $\Theta_t(\omega) = \theta_{it}(\omega) d^2 x^i + \theta_{ijt}(\omega) dx^i \cdot dx^j$ então $\int_0^t \langle \Theta_s, d_2 X_s\rangle = \int_0^t \theta_{is} dX_s^i + \frac{1}{2}\theta_{ijs} d[X^i, X^j]_s$.

Seja $L \in \Gamma(\tau M)$ e X um semimartingale contínuo em M. Dizemos que X é uma difusão para $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ com gerador infinitesimal (abreviado g.i.) L, se para toda $f \in C_0^\infty(M)$[respectivamente $C^\infty(M)$]

$$f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t Lf(X_s) ds$$

é um martingale[respectivamente martingale local].

Esta condição é equivalente a

Para qualquer 1-forma θ com suporte compacto

$$\int_0^t \langle \theta, \delta X\rangle - \int_0^t \langle d\theta, L\rangle (X_s) ds$$

é um martingale.

Onde $\int_0^t \langle \theta, \delta X\rangle = \int_0^t \langle d\theta, d_2 X\rangle$ é a integral de Stratonovich de θ ao longo de X .($d : T^*M \to \tau^*M$ é o morfismo de fibrados vetoriais definido por P. Meyer em [28]. Em coordenadas locais $d(\theta = \theta_i dx^i) = d\theta_i \cdot dx^i + \theta_i d^2 x^i$.)

São imediatas a partir da definição as seguintes propriedades:

1) Se X é uma difusão para $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ com geradores infinitesimais L e R então $L(X_s) = R(X_s)$ q.s.

2) Se X_0 é uma variável aleatória em M e X_t é o fluxo associado ao campo L então $X_t(X_0)$ é uma difusão com g.i. L.

3) Se X é uma difusão para $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ com g.i. L então X é uma difusão para $(\Omega, \mathcal{F}, (\sigma(X_t)), \mathbf{P})$ com g.i. L onde $\sigma(X_t)$ é a σ-álgebra gerada por $\{X_s : s \leq t\}$.

4) Se X é uma difusão para $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ com g.i L e $\Upsilon \in \mathcal{F}_0$ é tal que $\mathbf{P}(\Upsilon) > 0$, então $X \mid_\Upsilon$ é uma difusão para $(\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon, (\mathcal{F}_t^\Upsilon), \mathbf{P}^\Upsilon)$ com g.i L. onde $\mathcal{F}_t^\Upsilon$ $[\mathcal{F}^\Upsilon]$ é a σ-álgebra $\{\alpha \cap \Upsilon : \alpha \in \mathcal{F}_t \ [\mathcal{F}^\Upsilon]\}$ e $\mathbf{P}^\Upsilon$ é a medida de probabilidade em $(\Upsilon, \mathcal{F}^\Upsilon)$, $\mathbf{P}^\Upsilon(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap \Upsilon)}{\mathbf{P}(\Upsilon)}$.

proposição 1.1.2 *Sejam M e N variedades diferenciáveis, $\phi : M \to N$ aplicação regular e X uma difusão com gerador infinitesimal L. Então $\phi \circ X$ é uma difusão se e só se existe $R \in \Gamma(\tau(N))$ tal que $(\phi_* L)(X_s) = R(\phi(X_s))$. Neste caso $\phi \circ X$ é uma difusão com g.i. R.*

Demonstração: Se $\phi \circ X$ é uma difusão com g.i. R então para toda $f \in C_0^\infty(N)$ temos que

$$f(\phi \circ X_t) - f(\phi \circ X_0) - \int_0^t Rf(\phi \circ X_s)ds \text{ é um martingale.}$$

e como

$$(f \circ \phi)(X_t) - (f \circ \phi)(X_0) - \int_0^t L(f \circ \phi)(X_s)ds \text{ é um martingale}$$

concluimos que

$$\phi_* L(X_s) = R(\phi(X_s)).$$

Por outro lado, se $\phi_* L(X_s) = R(\phi(X_s))$ então $\phi \circ X$ é uma difusão com gerador infinitesimal R. □

Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão sem torsão ∇. No contexto da geometria de Schwartz ∇ é interpretada como uma regra que permite encontrar a parte de primeira ordem dos operadores diferenciais de segunda ordem [8]. Formalmente, para cada $x \in M$ seja $F_\nabla(x) : \tau_x M \to T_x M$ definido por: $F_\nabla(x)(A) = A$ e $F_\nabla(x)(AB) = \nabla_A B(x)$ para A e B campos locais de primeira ordem em x. Se $\Gamma^k_{ij}(x)$ são os símbolos de Christoffel da conexão ∇ no ponto x num sistema de coordenadas (U, x^i), obtemos que $F_\nabla(x)(D_{ij}) = \Gamma^k_{ij}(x) D_k$. Assim as aplicações $F_\nabla(x) : \tau_x M \to T_x M$ são 1) lineares, 2) dependem suavemente de x e 3) verificam que $F_\nabla(x) \mid_{T_x M} = \mathrm{Id}_{T_x M}$ para todo $x \in M$. Obviamente toda família $\Gamma = \{\Gamma(x) : x \in M\}$ tal que $\Gamma(x)$ satisfaz 1), 2) e 3) determina uma conexão sem torsão de M, ∇^Γ tal que $F_{\nabla^\Gamma} = \Gamma$ e também $\nabla^{F_\nabla} = \nabla$. De aqui em mas, todas as conexões que nós consideraremos são sem torsão salvo menção explícita do contrario.

Definição 1.1.3 *Sejam M e N variedades diferenciáveis providas de conexões Γ e $\overline{\Gamma}$ respectivamente. Um morfismo de Schwartz $\phi : \tau_x M \to \tau_y N$ é dito afim se:*

$$\overline{\Gamma}(y) \circ \phi = \phi \circ \Gamma(x)$$

É conhecido que

proposição 1.1.4 *Sejam M e N variedades diferenciáveis providas de conexões Γ e $\overline{\Gamma}$ respectivamente, e $\Phi : M \to N$ regular. Então são equivalentes:*

1. Φ é uma aplicação afim.

2. Para todo $x \in M$, $\Phi_*(x)$ é afim.

A existência de uma conexão na variedade diferenciável permite definir a integral de Itô de 1-fôrmas. Com efeito, sejam M uma variedade diferenciável, $\Gamma = \{\Gamma(x) : x \in M\}$ uma conexão de M, X um M-semimartingale e θ uma 1-forma de M. Então a integral de Itô de θ ao longo de X, $\int_0^t \langle \theta, \Gamma d_2 X\rangle$ é definida como $\int_0^t \langle \Gamma^* \theta, d_2 X\rangle$, onde Γ^* é o adjunto de Γ.

Seja M uma variedade diferenciável provida de uma conexão Γ , nós definimos Γ-martingale de acordo com P. Meyer e M. Bismut ([28],[8])

Definição 1.1.5 *Sejam M uma variedade diferenciável, $\Gamma = \{\Gamma(x) : x \in M\}$ uma conexão de M e X um M-semimartingale. X é um Γ-martingale se alguma das seguintes afirmações equivalentes é satisfeita:*

i) Para toda $f \in C^\infty(M)$, $f \circ X - f \circ X_0 - \frac{1}{2}\int Hess_\Gamma f(dX, dX)$ é um martingale local.

ii) Para toda 1-forma θ de M temos que $\int_0^t \langle \theta, \Gamma d_2 X \rangle$ é um martingale local.

iii) Se (U, x^i) é uma carta local de M e (X^i) é a expressão local de X parado em U, então existem martingales locais reais M^i tais que

$$X_t^i - X_0^i = M_t^i - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma_{jk}^i(X_s)d[M^j, M^k]_s$$

R. Darling provo o seguinte resultado que vincula martingales e aplicações afins (ver [8, prop. 4.32]).

proposição 1.1.6 *Sejam M e N variedades diferenciáveis providas de conexões Γ e $\overline{\Gamma}$ respectivamente, e $\Phi : M \to N$, C^∞. Então Φ é afim se e só se para qualquer espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ e todo Γ-martingale X temos que $\Phi \circ X$ é um $\overline{\Gamma}$-martingale.*

L.Schwartz [34] introduziu de uma forma intrínseca, equações diferenciais estocásticas em variedades diferenciáveis, de tipo geral.

Definição 1.1.7 *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Um operador de Schwartz f de M a N é uma familia $\{f(x, y)\}_{x \in M, y \in N}$ onde cada $f(x, y) : \tau_x M \to \tau_y N$ é um morfismo de Schwartz e f é regular.*

Definição 1.1.8 *Sejam X um semimartingale em M e f um operador de Schwartz de M a N. Uma solução da equação*

$$d_2Y = f(X,Y)d_2X$$

é um semimartingale Y com valores em N tal que para qualquer forma de segunda ordem Θ de N

$$\int \langle \Theta, d_2Y \rangle = \int \langle f^*(X,Y)\Theta, d_2X \rangle$$

onde $f^*(x,y) : \tau_y^*N \to \tau_x^*M$ é o adjunto de $f(x,y)$.

M. Emery [8, Theorem 6.41] prova o seguinte

Teorema 1.1.9 *Seja X um semimartingale em M, f um operador de Schwartz de M a N, e Y_0 uma $\mathcal{F}_0$-v.a. em N. Então existe um tempo de parada predizível $\zeta > 0$ e um semimartingale Y com domínio $[0,\zeta[$ e valor inicial Y_0, solução de $d_2Y = f(X,Y)d_2X$ que explode no tempo ζ no evento $\{\zeta < \infty\}$. Ainda mais vale a seguinte unicidade: Se η é outro tempo de parada predizível e Z é outra solução inicializada em Y_0 definida em $[0,\eta[$ então $\eta \leq \zeta$ e $Z = Y$ q.s. em $[0,\eta[$.*

Seja $\pi : P \to M$ uma fibração, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ um espaço de probabilidade filtrado que satisfaz as condições habituais. Estamos interessados no seguinte tipo de equação diferencial estocástica

$$\begin{aligned} d_2Y_t(\omega) &= F(Y_t(\omega))d_2X_t(\omega) \\ Y_0 &= y_0 \end{aligned}$$

onde X é um semimartingale contínuo em M, y_0 uma $\mathcal{F}_0$-v.a. a valores em P tal que $\pi(y_0) = X_0$ e $F = \{F(y)\}_{y\in P}$ é uma família de morfismos de Schwartz restrita a $\{(x,y) \in M \times P : \pi(y) = x\}$, isto é $F(y) : \tau_{\pi(y)}M \to \tau_yP$ é da forma $\phi_*(\pi y)$ onde ϕ é uma seção local de $\pi : P \to M$.([9]).

Uma solução desta equação consiste de um par (Y, ζ) onde $\zeta > 0$ é um tempo de parada predizivel e Y é um semimartingale inicializado em y_0, definido em $[0, \zeta[$ que verifica $\pi Y = X$ neste intervalo e tal que para toda forma de segunda ordem θ de P,

$$\int \langle \theta, d_2 Y \rangle = \int \langle F^*(Y)\theta, d_2 X \rangle$$

onde $F^*(y) : \tau_y^* P \to \tau_{\pi y}^* M$ é o adjunto de $F(y) : \tau_{\pi y} M \to \tau_y P$.

M. Emery prova em [9, Theorem 4] um teorema de existência e unicidade de soluções para este tipo de equações diferenciais estocásticas.

1.2 Teoria de Jatos de ordem ≤ 2.

Expomos aqui os rudimentos da teoria de jatos de ordem ≤ 2 que utilizaremos ao longo deste trabalho. Nossa referência básica é [31, capitulo 1].

Seja $\pi : P \to M$ uma fibração. Duas seções locais C^∞ s e t de $\pi : P \to M$ são ditas k-equivalêntes em $x \in M$ $(k = 1, 2.)$ se verificam as seguintes condições de 1 até $k + 1$.

1. $s(x) = t(x)$
2. $D_i s(x) = D_i t(x)$
3. $D_{ij} s(x) = D_{ij} t(x)$

É imediato que a relação de k-equivalência em $x \in M$ é uma relação de equivalência no conjunto das seções locais de $\pi : P \to M$. A classe de equivalência de uma seção s é chamada de "k-jato de s em x" e é denotada por $j_x^k s$. O ponto $x \in M$ é chamado a "fonte" do jato e $s(x) \in P$ é a "saída ".

Seja $J_k P_x$ o conjunto de todos os k-jatos em x de seções locais de $\pi : P \to M$ então $J_k P = \bigcup_{x \in M} J_k P_x$ tem uma estrutura natural de variedade diferenciável. $J_k P$ pode ser considerarado como uma fibração sobre M [sobre P] com a "projeção fonte"

$\alpha : J_kP \to M$, $\alpha(j^k_x s) = x$ [com a "projeção saída" $\beta : J_kP \to P$, $\beta(j^k_x s) = s(x)$], [13],[31]. J_kP é chamado o "fibrado dos k-jatos holonômicos de P " [10] ou mais brevemente, o "fibrado dos k-jatos de P ". É interessante observar que quando $\pi : P \to M$ é um fibrado vetorial, $\alpha : J_kP \to M$ e $\beta : J_kP \to P$ são fibrados vetoriais.

Sejam $\pi : P \to M$, $\theta : Q \to M$ fibrações e $\phi : P \to Q$ um morfismo de fibrações (isto é ϕ é suave e $\theta \circ \phi(p) = \pi(p)$ para todo $p \in P$). Então ϕ pode-se prolongar a um morfismo de fibrações $j^1\phi : J_1P \to J_1Q$ definido pela propriedade de ser o único tal que $j^1\phi(j^1 s) = j^1(\phi \circ s)$ para toda seção local s de $\pi : P \to M$ [13], [31].

Definimos os 2-jatos semiholonômicos de uma fibração $\pi : P \to M$ de acordo com Ch. Ereshmann. Seja $x \in M$ e

$$\begin{aligned} \overline{J_2}P_x \;=\; & \{ j^1_x s : s \text{ é uma seção local de } \alpha : J_1P \to M \text{ em } x \\ & \text{tal que } s(x) = j^1_x \beta \circ s \} \end{aligned}$$

Sabe-se que [3] $\alpha : \overline{J_2}P = \cup_{x\in M} \overline{J_2 P} \to M$ é uma fibração, o "fibrado dos 2-jatos semiholonômicos de P".

Existe um morfismo de fibrações canônico $Sym : \overline{J_2}P \to J_2P$. Em coordenadas locais este morfismo é dado por

$$Sym : ((x^\lambda, y^i, y^i_\lambda), y^i_\lambda, {}_\lambda y^i_\mu)) \to (x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, 1/2({}_\lambda y^i_\mu +_\mu y^i_\lambda))$$

Onde $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\lambda\mu})$ e $((x^\lambda, y^i, y^i_\lambda), y^i_\lambda, {}_\lambda y^i_\mu)$ são as coordenadas induzidas em J_2P e $\overline{J_2}P$ respectivamente, pela carta fibrada (x^λ, y^i) de $\pi : P \to M$.

Sejam $\pi : P \to M$ uma fibração e $\varphi \in \Gamma(\beta : J_1P \to P)$. Estamos interessados em definir um prolongamento $*$ de $\Gamma(\beta : J_1P \to P)$ em $\Gamma(\beta : J_2P \to P)$. De fato, como $(j^1\varphi \circ \varphi)(P) \subset \overline{J_2}P$, definimos $\varphi^* = Sym \circ j^1\varphi \circ \varphi$. Obviamente $\varphi^* \in \Gamma(\beta : J_2P \to P)$ e $\rho^2_1 \circ \varphi^* = \varphi$ (onde $\rho^2_1 : J_2P \to J_1P$ é definida por $\rho^2_1(j^2_x s) = j^1_x s$). Provamos assim a seguinte,

proposição 1.2.1 $* : \Gamma(\beta : J_1P \to P) \to \Gamma(\beta : J_2P \to P)$ *é um prolongamento.*

Capítulo 2

Teoria de 2-Conexões.

Neste capítulo introduzimos e estudamos uma noção de conexão adaptada à geometria de Schwartz, que chamaremos de 2-conexão. Nossa principal motivação para introduzir as 2-conexões é a geometria diferencial estocástica na forma desenvolvida por L. Schwartz e P. Meyer [34],[28],[30].

Preferimos dividir este capítulo em três seções. Na primeira introduzimos as 2-conexões para uma variedade fibrada $\pi : P \to M$. Observamos que as 2-conexões são uma extensão natural das 1-conexões e que toda 2-conexão induz uma 1-conexão. Mostramos que as 2-conexões podem ser olhadas como seções do fibrado $\beta : J_2P \to P$, o que nos permite dar uma nova caracterização do prolongamento de Stratonovich enunciado por P. Meyer, em termos de morfismos da teoria de jatos. A seguir, provamos que as conexões holonômicas de ordem dois de Ch. Ehresmann coincidem com as 2-conexões quando estas são formuladas em termos da teoria de jatos. Concluímos esta seção mostrando que as 2-conexões estão em correspondência biunivoca com os pares formados pela 1-conexão induzida e um certo tensor simétrico.

A segunda seção é um estudo das 2-conexões invariantes para fibrados do tipo $G(G/H, H)$ em que a base é o espaço homogeneo G/H do grupo de Lie G. Mostramos que estas podem ser olhadas de uma maneira estritamente algébrica, na verdade seu estudo se reduz ao dos pares formados pelas 1-conexões invariantes para $G(G/H, H)$ e os elementos de

$Hom_H(\mathbf{m} \odot \mathbf{m}, \mathbf{h})$, onde $\mathbf{h}$ é a álgebra de Lie de H e $\mathbf{m}$ é um subespaço de $\mathbf{g}$ complementar de $\mathbf{h}$ invariante por $Ad(H)$. Finalizamos esta seção mostrando que se G/H é um espaço simétrico tal que $\mathbf{g}$ é uma forma real normal de uma álgebra simples complexa, então as únicas 2-conexões invariantes para $G(G/H, H)$ são os prolongamentos de Stratonovich das 1-conexões invariantes para $G(G/H, H)$.

Finalmente na terceira seção consideramos levantamentos horizontais estocásticos em relação a 2-conexões. Primeiramente mostramos sua existência e unicidade. A seguir observamos que se $\mathbf{H}$ é uma 1-conexão para $P(M, G)$ e X um M-semimartingale então o levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}$ definido por I. Shigekawa em [35] coincide com o levantamento horizontal estocástico em relação à 2-conexão $\mathbf{H}^S$. Nosso próximo objetivo é estudar os prolongamentos de 1-conexões a 2-conexões num fibrado principal $P(M, G)$ tais que, para um par fixo de conexões sem torsão $\overline{\Gamma}$ de P e Γ de M se verifique que os levantamentos horizontais estocásticos de Γ-martingales são $\overline{\Gamma}$-martingales.

Mostramos que se $P(M, G)$ é um fibrado principal, toda 2-conexão $\mathbf{H}$ para $P(M, G)$ determina um prolongamento canônico das conexões de M a conexões G-invariantes de P. No caso que G seja abeliano obtemos que todo $\overline{\Gamma}$-martingale $\overline{X}$ se fatora na forma $\overline{X}_t = \widetilde{X}_t \cdot h_t$ onde $\widetilde{X}$ é o levantamento horizontal estocástico de $\pi \circ \overline{X}$ inicializado em $\overline{X}_0$ (que é um $\overline{\Gamma}$-martingale) e a θ-martingale h_t.(Onde θ é a conexão canônica de G).

Logo provamos que o levantamento horizontal estocástico em relação a uma 2-conexão preserva difusões e concluímos este capítulo mostrando que toda difusão no fibrado principal com g.i. horizontal é um levantamento horizontal estocástico em relação a esta 2-conexão.

2.1 2-conexões

Começamos com a seguinte definição

Definição 2.1.1 *Seja $\pi : P \to M$ uma variedade fibrada. Uma família de morfismos de Schwartz $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ é dita uma 2-conexão para $\pi : P \to M$ se:*

1) $H_p : \tau_{\pi(p)}M \to \tau_p P$,

2) $\pi_* \circ H_p = id_{\tau_{\pi(p)}M}$

3) Para todo $L \in \Gamma(\tau M)$ a aplicação $p \to H_p L$ pertence a $\Gamma(\tau P)$.

São imediatas a partir da definição as seguintes observações:

observação 2.1.2 :

1) Se na definição trocamos τ por T obtemos a definição usual de conexão para variedades fibradas, que neste trabalho chamaremos de 1-conexão.

2) Toda 2-conexão $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ induz uma 1-conexão $\mathbf{H}^1 = \{H_p^1 = H_p/T_{\pi p}M : p \in P\}$. Esta é a unica 1-conexão tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \tau_{\pi p}M & \xrightarrow{H_p} & \tau_p P \\ i \uparrow & & \uparrow i \\ T_{\pi p}M & \xrightarrow{H_p^1} & T_p P \end{array}$$

onde i é a inclusão natural.

3) Sejam (x^λ, y^i) e (x^λ) cartas locais para P e M respectivamente. Então a 2-conexão $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ escreve-se nestas cartas como:

$$\begin{aligned} H_p(D_\lambda) &= D_\lambda + a_\lambda^i D_i \\ H_p(D_{\lambda\mu}) &= D_{\lambda\mu} + a_{\lambda\mu}^i D_i + a_{\lambda\mu}^{ij} D_{ij} + 2a_{\lambda\mu}^{i\nu} D_{i\nu} \end{aligned}$$

onde

$$a_{\lambda\mu}^{ij} = \frac{1}{2}(a_\lambda^i a_\mu^j + a_\mu^i a_\lambda^j)$$

$$a_{\lambda\mu}^{i\nu} = \frac{1}{2}(a_\lambda^i \delta_\mu^\nu + a_\mu^i \delta_\lambda^\nu)$$

Estas ultimas identidades aseguram que H_p é um morfismo de Schwartz.

Seja $\mathbf{H} = \{H_p : p \in M\}$ uma 2-conexão para $\pi : P \to M$. Associamos a $\mathbf{H}$ uma seção $\gamma_{\mathbf{H}}$ de $\beta : J_2P \to P$, da seguinte maneira: Para cada $p \in P$, existe uma seção local s de $\pi : P \to M$ em p tal que $H_p = s_*(\pi(p))$. Definimos

$$\gamma_{\mathbf{H}}(p) = j^2_{\pi p}s$$

Como $s(\pi(p)) = p$ temos que $\pi_* \circ H_p = \pi_* \circ s_* = Id_{\tau_{\pi p}M}$, logo $\gamma_{\mathbf{H}}$ é uma seção de $\beta : J_2P \to P$.

Com as notações anteriores, podemos provar a seguinte

proposição 2.1.3 *A aplicação* $\mathbf{H} \to \gamma_{\mathbf{H}}$ *é uma correspondência bijetora do conjunto das 2-conexões de* $\pi : P \to M$ *nas seções de* $\beta : J_2P \to P$.

Demonstração: Seja γ uma seção de $\beta : J_2P \to P$ e $p \in P$. Então existe uma seção local s de $\pi : P \to M$ em p tal que $\gamma(p) = j^2_{\pi(p)}s$. Esta seção define um morfismo de Schwartz $H^\gamma_p : \tau_{\pi(p)}M \to \tau_pP$

$$H^\gamma_p = s_*(\pi(p)) : \tau_{\pi(p)}M \to \tau_pP$$

Observamos que $\mathbf{H}^\gamma = \{H^\gamma_p : p \in P\}$ é uma 2-conexão para $\pi : P \to M$, pois

$$\begin{aligned} \pi_* \circ H^\gamma_p &= \pi_* \circ s_*(\pi(p)) \\ &= (\pi \circ s)_*(\pi(p)) \\ &= id_{\tau_{\pi(p)}M} \end{aligned}$$

Sejam (x^λ), (x^λ, y^i) e $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda, y^i_{\lambda\mu})$ cartas locais para M, P e J_2P respectivamente. Nestas cartas locais γ escreve-se como

$$\gamma : (x^\lambda, y^i) \to (x^\lambda, y^i, \gamma^i_\lambda(x^\mu, y^j), \gamma^i_{\lambda\mu}(x^\mu, y^j))$$

onde γ^i_λ e $\gamma^i_{\lambda\mu}$ são C^∞. Logo $H^\gamma_{(x^\lambda,y^i)} : \tau_{(x^\lambda)}M \to \tau_{(x^\lambda,y^i)}P$ é dado por

$$
\begin{aligned}
H^\gamma_{(x^\lambda,y^i)}(D_\lambda) &= D_\lambda + \gamma^i_\lambda D_i \\
H^\gamma_{(x^\lambda,y^i)}(D_{\lambda\mu}) &= D_{\lambda\mu} + \gamma^i_{\lambda\mu} D_i + \gamma^{ij}_{\lambda\mu} D_{ij} + 2\gamma^{i\nu}_{\lambda\mu} D_{i\nu}
\end{aligned}
$$

onde $\gamma^{ij}_{\lambda\mu}$ e $\gamma^{i\nu}_{\lambda\mu}$ são determinados como em na observação acima. Obviamente, para $L \in \Gamma(\tau M)$ a aplicação $p \to H^\gamma_p(L)$ é C^∞.Como $\gamma_{\mathbf{H}^\gamma} = \gamma$ para toda $\gamma \in \Gamma(\beta : J_2P \to P)$ e $\mathbf{H}^{\gamma_\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ para toda 2-conexão $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H} \to \gamma_\mathbf{H}$ é bijetora. $\square$

Observamos que dada uma variedade fibrada existem infinitas 2-conexões que induzem a mesma 1-conexão. É natural perguntar se existe alguma maneira canônica de prolongar 1-conexões a 2-conexões.

Por uma contrução de P. Meyer [28], toda 1-conexão $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ para uma variedade fibrada $\pi : P \to M$ admite um prolongamento canônico a uma 2-conexão $\mathbf{H}^S$ para $\pi : P \to M$, isto é $H^S_p|T_{\pi(p)} = H_p$ para todo $p \in P$. Este prolongamento é chamado de prolongamento de Stratonovich e é o único que satisfaz alguma das propriedades seguintes

1) [8] Para todo $p \in P$ e todo M-semimartingale X inicializado em πp a solução da equação de Stratonovich

$$
\begin{aligned}
\delta Y &= H_Y \delta X \\
Y_0 &= p
\end{aligned}
$$

é solução da equação diferencial estocástica

$$
\begin{aligned}
d_2 Y &= H^S_Y d_2 X \\
Y_0 &= p
\end{aligned}
$$

e reciprocamente.

2) [28] Para todo $p \in P$, $H^S_p\{X, Y\} = \{HX, HY\}_p$ onde X e Y são campos locais em M e $\{.\}$ é o anticomutador $\{X, Y\} = XY + YX$.

3) [34] Se x_t é uma curva em P tal que $H_{x_t}(\frac{d}{dt}\pi x_t) = \frac{d}{dt}x_t$ para todo t, então $H^S_{x_t}(\frac{d^2}{dt^2}\pi x_t) = \frac{d^2}{dt^2}x_t$ para todo t.

4) [28] Seja (x^λ, y^i) e (x^λ) cartas locais para P e M respectivamente. Se nas cartas locais H_p escreve-se como

$$H_p(D_\lambda) = D_\lambda + a^i_\lambda D_i$$

então H^S_p escreve-se como

$$\begin{aligned} H^S_p(D_\lambda) &= D_\lambda + a^i_\lambda D_i \\ H^S_p(D_{\lambda\mu}) &= D_{\lambda\mu} + a^{ij}_{\lambda\mu} D_{ij} + a^i_{\lambda\mu} D_i + 2a^{i\nu}_{\lambda\mu} D_{i\nu} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} a^{ij}_{\lambda\mu} &= 1/2(a^i_\lambda a^j_\mu + a^i_\mu a^j_\lambda) \\ a^{i\nu}_{\lambda\mu} &= 1/2(a^i_\lambda \delta^\nu_\mu + a^i_\mu \delta^\nu_\lambda) \\ a^i_{\lambda\mu} &= 1/2(a^j_\lambda D_j a^i_\mu + a^j_\mu D_j a^i_\lambda + D_\lambda a^i_\mu + D_\mu a^i_\lambda) \end{aligned}$$

Nosso próximo objetivo é dar uma caracterização do prolongamento de Stratonovich, em termos da teoria de jatos. como é sugerido pela relação acima entre 2-conexões e jatos holonômicos.

Seja $\pi : P \to M$ uma variedade fibrada e $\varphi \in \Gamma(\beta : J_1P \to P)$. Definimos $\varphi^* = Sym \circ j^1\varphi \circ \varphi$. Como $\varphi^* \in \Gamma(\beta : J_2P \to P)$ e $\rho^2_1 \circ \varphi^* = \varphi$. Temos que * é um prolongamento de $\Gamma(\beta : J_1P \to P)$ em $\Gamma(\beta : J_2P \to P)$. Com as notações anteriores, temos a seguinte

proposição 2.1.4 *Seja $\pi : P \to M$ uma variedade fibrada e $\mathbf{H}$ uma 1-conexão para $\pi : P \to M$. Então*

$$\gamma_{\mathbf{H}^S} = (\gamma_{\mathbf{H}})^*$$

Demonstração: Sejam $(x^\lambda, y^i, y^i_\lambda)$ e $((x^\lambda, y^i, y^i_\lambda), {}_\mu y^i, {}_\mu y^i_\lambda)$ as cartas locais standard para J_1P e $J_1[J_1P]$ respectivamente, onde (x^λ) e (x^λ, y^i) são cartas locais para M e P.

Seja $\varphi \in \Gamma(\beta : J_1P \to P)$. Nestas cartas locais φ escreve-se como

$$\varphi : (x^\lambda, y^i) \to (x^\lambda, y^i, \varphi^i_\lambda(x^\beta, y^j))$$

Então $j^1\varphi : J_1P \to J_1[J_1P]$ escreve-se localmente como

$$j^1\varphi : (x^\lambda, y^i, y^i_\lambda) \to ((x^\lambda, y^i, \varphi^i_\lambda), y^i_\lambda, D_\zeta\varphi^i_\eta + \varphi^j_\zeta D_j\varphi^i_\eta)$$

Assim

$$j^1\varphi \circ \varphi : (x^\lambda, y^i) \to ((x^\lambda, y^i, \varphi^i_\lambda), \varphi^i_\lambda, D_\zeta\varphi^i_\eta + \varphi^j_\zeta D_j\varphi^i_\eta)$$

Então $\varphi^* = Sym \circ j^1\varphi \circ \varphi$ tem a expressão local

$$\varphi^* = Sym \circ j^1\varphi \circ \varphi : (x^\lambda, y^i) \to (x^\lambda, y^i, \varphi^i_\lambda, 1/2(D_\zeta\varphi^i_\eta + D_\eta\varphi^i_\zeta + \varphi^j_\zeta D_j\varphi^i_\eta + \varphi^j_\eta D_j\varphi^i_\zeta))$$

Seja $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ uma 1-conexão para $\pi : P \to M$. Em coordenadas locais

$$H_p(D_\lambda) = D_\lambda + a^i_\lambda D_i$$

Então $\gamma_\mathbf{H}$ tem a expressão local

$$\gamma_\mathbf{H} : (x^\lambda, y^i) \to (x^\lambda, y^i, a^i_\lambda)$$

e como $\gamma_{\mathbf{H}^S}$ escreve-se localmente como

$$\gamma_{\mathbf{H}^S} : (x^\lambda, y^i) \to (x^\lambda, y^i, a^i_\lambda, 1/2(D_\zeta a^i_\eta + D_\eta a^i_\zeta + a^j_\zeta D_j a^i_\eta + a^j_\eta D_j a^i_\zeta))$$

fica claro que $\gamma_{\mathbf{H}^S} = (\gamma_\mathbf{H})^*$. □

Agora reformularemos a noção de 2-conexão adaptando-a aos fibrados principais

Definição 2.1.5 *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. Uma 2-conexão $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ para $\pi : P \longrightarrow M$ é dita uma 2-conexão para $P(M,G)$ se satisfaz*

4) $H_{pg} = R_{g*}H_p$ para todo $p \in P$ e $g \in G$ onde R_g é a ação a direita de G em P.

Agora provaremos que o prolongamento de Stratonovich é bem comportado no sentido da nova definição. Isto é

Lema 2.1.6 *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e $\mathbf{H}$ uma 1-conexão para $P(M,G)$. Então $\mathbf{H}^S$ é uma 2-conexão para $P(M,G)$.*

Demonstração: Resta mostrar que, $R_{g*} \circ H_p^S = H_{pg}^S$ para todo $p \in P$ e $g \in G$. Sejam X e Y campos locais em $\pi p \in M$, como

$$\begin{aligned} R_{g*} \circ H_p^S(X) &= R_{g*} \circ H_p(X) \\ &= H_{pg}(X) \\ &= H_{pg}^S(X) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R_{g*} \circ H_p^S(\{X,Y\}) &= R_{g*}(\{HX, HY\}_p) && \text{por definição de } \mathbf{H}^S \\ &= \{HX, HY\}_{pg} && \text{propiedade de } \{,\} \\ &= H_{pg}^S(\{X,Y\}) && \text{por definição de } \mathbf{H}^S \end{aligned}$$

Sejam (x^i) coordenadas locais em πp, como $R_{g*} \circ H_p^S(D_i) = H_{pg}^S(D_i)$ e $R_{g*} \circ H_p^S(D_{ij}) = H_{pg}^S(D_{ij})$, resulta que $R_{g*} \circ H_p^S = H_{pg}^S$. □

É interessante destacar que em 1950, Ch. Ehresmann [11] introduziu diversos tipos de conexões de ordem superior para fibrados principais. Estamos interessados nas chamadas conexões holonômicas de ordem dois, pois elas são as 2-conexões em termos da teoria de jatos. Com o intuito de provar esta ultima afirmação, damos a seguinte

Definição 2.1.7 (Ch. Ehresmann) *[11] Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. Uma conexão holonômica de ordem dois é uma seção da variedade fibrada $p_G : J_2P/G \to M$ onde J_2P/G é o quociente de J_2P pela ação natural de G em J_2P e p_G é induzida pela projeção fonte $\alpha : J_2P \to M$.*

Seja $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ uma 2-conexão para $P(M,G)$. Como $\gamma_{\mathbf{H}}(p.g) = \gamma_{\mathbf{H}}(p).g$ para todo $p \in P$ e $g \in G$, resulta que $\gamma_{\mathbf{H}}$ induz uma seção $\Gamma_{\mathbf{H}}$ de $p_G : J_2P/G \to M$

$$\Gamma_{\mathbf{H}}(\pi p) = \gamma_{\mathbf{H}}(p).G$$

Agora com as notações anteriores podemos provar a seguinte

proposição 2.1.8 *A aplicação $\mathbf{H} \to \Gamma_{\mathbf{H}}$ é uma bijeção entre as 2-conexões para $P(M,G)$ e as conexões holonômicas de ordem dois de $P(M,G)$.*

Demonstração: Seja Γ uma conexão holonômica de ordem dois para $P(M,G)$ e $p \in P$, como $\Gamma(\pi p) = j^2_{\pi p}s.G$ onde s é uma seção local de $P(M,G)$ numa vizinhança de πp, podemos escolher s tal que $s(\pi p) = p$. Definimos $H^\Gamma_p = s_*(\pi p)$, esta definição é boa, pois se s' é outra seção local de $P(M,G)$ numa vizinhança de πp tal que $j^2_{\pi p}s'.G = j^2_{\pi p}s.G$ temos que $j^2_{\pi p}s' = j^2_{\pi p}s$ e portanto $s'_*(\pi p) = s_*(\pi p)$. Segue-se que $\mathbf{H}^\Gamma = \{H^\Gamma_p : p \in P\}$ é uma 2-conexão para $P(M,G)$. Com efeito, $\pi_* \circ H^\Gamma_p = \mathrm{Id}_{\tau_{\pi p}M}$ e

$$R_{g*} \circ H^\Gamma_p = R_{g*} \circ s_*(\pi p) = (R_g \circ s)_*(\pi p) = H^\Gamma_{pg}$$

Como localmente $\Gamma : (x^\lambda) \to (x^\lambda, \Gamma^i_\lambda(x^\mu), \Gamma^i_{\lambda\mu}(x^\mu))$ onde Γ^i_λ e $\Gamma^i_{\lambda\mu}$ são C^∞, resulta que os coeficientes de H^Γ_p são C^∞. Logo para $L \in \Gamma(\tau M)$ a aplicação $p \to H_pL$ pertence a $\Gamma(\tau P)$. Agora como $\Gamma_{\mathbf{H}^\Gamma} = \Gamma$ e $\mathbf{H}^{\Gamma_\mathbf{H}} = \mathbf{H}$ temos que a aplicação $\mathbf{H} \to \Gamma_{\mathbf{H}}$ é uma bijeção. □

A seguir caracterizaremos as 2-conexões em termos de objetos geométricos mais conhecidos. Isto sera feito a partir do estudo da estrutura afim das 2-conexões. Com esta finalidade introduzimos algumas notações.

Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. Denotamos por $A^e_{h,0}(P)$ o espaço vetorial

$$\left\{ \Phi \in \Gamma(Hom(TP \odot TP, M \times \mathbf{g})) : \begin{array}{lcll} \Phi \circ R_{g*} \odot R_{g*} & = & Ad(g^{-1}) \circ \Phi & p \in P \\ \Phi \mid Ker(\pi_* \odot \pi_*) & = & 0 & g \in G \end{array} \right\}$$

das formas de $TP \odot TP$ horizontais e equivariantes a valores em $\mathbf{g}$ a álgebra de Lie do grupo estrutural G.

Se $\mathbf{S}$ é uma 1-conexão para $P(M,G)$ denotamos por $C_2(\mathbf{S})$ o conjunto

$$\{\text{2-conexões } \mathbf{H} \text{ para } P(M,G) : \ \mathbf{H}^1 = \mathbf{S}\}$$

Definiremos uma ação $\bullet$ de $A^e_{h,0}(P)$ em $C_2(\mathbf{S})$.

Sejam $\Phi \in A^e_{h,0}(P)$ e $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\} \in C_2(\mathbf{S})$. Definimos

$$\Phi \bullet \mathbf{H} = \{\Phi \bullet H_p = \gamma_p \circ \tilde{\Phi}_p + H_p : p \in P\}$$

onde $\gamma_p : \mathbf{g} \to T_pP$ é dado por $\gamma_p(A) = \frac{d}{dt}_{t=0} p \cdot \exp(t \cdot A)$ e $\tilde{\Phi}_p : \tau_{\pi p}M \to \mathbf{g}$ é o único homomorfismo tal que $\tilde{\Phi}_p \circ \pi_*(p) = \Phi_p \circ Q_p$ ($Q_p : \tau_p P \to T_pP \odot T_pP$ é o operador quadrado de campo). Fazemos a seguinte

Afirmação $\bullet$ é bem definida.

Provaremos isto em quatro etapas.

i) $\Phi \bullet H_p : \tau_{\pi p}M \to \tau_p P$ é linear e $\pi_*(p) \circ \Phi \bullet H_p = \mathrm{Id}_{\tau_{\pi p}M}$.

ii) $\Phi \bullet H_p \mid T_{\pi p}M = S_p$.

iii) $R_{g*} \circ \Phi \bullet H_p = \Phi \bullet H_{pg}$.

iv) $\Phi \bullet H_p$ é um morfismo de Schwartz.

De fato,

i) $\Phi \bullet H_p$ é linear, pois é soma de transformações lineares. E obviamente $\pi_*(p) \circ \Phi \bullet H_p = 0 + \pi_*(p) \circ H_p = \mathrm{Id}_{T_{\pi p}M}$.

ii) Sejam $A \in T_{\pi p}M$ e $\widetilde{A} \in T_pP$ tais que $\pi_*(p)\widetilde{A} = A$. Como

$$
\begin{aligned}
\gamma_p \circ \widetilde{\Phi}_p(A) &= \gamma_p(\widetilde{\Phi}_p \circ \pi_*(p)(\widetilde{A})) \\
&= \gamma_p(\Phi_p \circ Q_p(\widetilde{A})) \\
&= \gamma_p(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Segue-se que $\Phi \bullet H_p |_{T_{\pi p}M} = \gamma_p \circ \widetilde{\Phi}_p |_{T_{\pi p}M} + H_p |_{T_{\pi p}M} = 0 + H_p |_{T_{\pi p}M} = S_p$.

iii) Seja $A \in T_{\pi p}M$. Então

$$
\begin{aligned}
R_{g*}\Phi \bullet H_p(A) &= R_{g*}H_pA + R_{g*}\gamma_p \circ \widetilde{\Phi}_pA \\
&= H_{pg}A + \gamma_{pg}(Ad(g^{-1})\widetilde{\Phi}_pA) \\
&= H_{pg}A + \gamma_{pg}(\widetilde{\Phi}_{pg}A) \\
&= \phi \bullet H_{pg}(A)
\end{aligned}
$$

logo $R_{g*} \circ \Phi \bullet H_p = \Phi \bullet H_{pg}$.

iv) Como

$$
\Phi \bullet H_p(T_{\pi p}M) \subseteq \gamma_p \circ \widetilde{\Phi}_p(T_{\pi p}M) + H_p(T_{\pi p}M) \subseteq T_pP
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\Phi \bullet H_p) \otimes (\Phi \bullet H_p) \circ Q &= S_p \otimes S_p \circ Q \\
&= Q \circ H_p \\
&= Q \circ (\gamma_p \circ \widetilde{\Phi}_p + H_p) \\
&= Q \circ \Phi \bullet H_p
\end{aligned}
$$

Temos que $\Phi \bullet$H é um morfismo de Schwartz.

Resulta assim, que $\bullet$ é bem definida.

Agora mostraremos que $(C_2(\mathbf{S}), \bullet)$ é um espaço afim. Este é o conteúdo da seguinte

proposição 2.1.9 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e $\mathbf{S}$ uma 1-conexão para $P(M, G)$. Então $(C_2(\mathbf{S}), \bullet)$ é um espaço afim.*

Demonstração: Sejam $\Phi, \Psi \in A^{e}_{h,0}$ e $\mathbf{H}, \mathbf{M} \in C_2(\mathbf{S})$ mostremos que $\bullet$ verifica

A_1 $(\Phi + \Psi) \bullet \mathbf{H} = \Phi \bullet (\Psi \bullet \mathbf{H})$

A_2 $0 \bullet \mathbf{H} = \mathbf{H}$, onde 0 é o zero de $A^{e}_{h,0}(P)$

A_3 Existe um único $\Phi \in A^{e}_{h,0}(P)$ tal que $\Phi \bullet \mathbf{H} = \mathbf{M}$

Obviamente $\bullet$ satisfaz A_1 e A_2. Seja Φ definida por $\gamma_p \circ \Phi_p \circ Q_p = (M - H)_p \circ \pi_*(p)$. Mostremos que $\Phi \in A^{e}_{h,0}(P)$. Como $Ker(Q_p) = T_pP \subset Ker(\gamma_p^{-1} \circ (M - H)_p \circ \pi_*(p))$ pelo teorema do isomorfismo existe uma única aplicação linear $\Phi_p : T_pP \odot T_pP \to \mathbf{g}$ tal que $\gamma_p \circ \Phi_p \circ Q_p = (M - H)_p \circ \pi_*(p)$.

Seja $A \in Ker\pi_*(p) \odot Ker\pi_*(p)$. Então existe $L \in \tau_pP$ tal que $A = Q_pL$ e como $\pi_*(p)$ é um morfismo de Schwartz, temos que $\pi_*(p)L \in T_{\pi p}M$, pois

$$\begin{aligned}
Q_{\pi p} \circ \pi_*(p)L &= \pi_*(p) \odot \pi_*(p) \circ Q_pL \\
&= \pi_*(p) \odot \pi_*(p)(A) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\Phi_p(A) &= \Phi_p(Q_pL) \\
&= \gamma_p^{-1} \circ (M - H)_p \circ \pi_*(p)(L) \\
&= \gamma_p^{-1}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim $\Phi_p \mid Ker\pi_*(p) \odot Ker\pi_*(p) = 0$.

Sejam $A \in T_pP \odot T_pP$ e $g \in G$. Como

$$\begin{aligned}
(\Phi_{pg} \circ R_{g*} \odot R_{g*})A &= \Phi_{pg} \circ Q_{pg}(R_{g*}L) \\
&= \gamma_{pg}^{-1} \circ (M - H)_{pg} \circ \pi_*(pg)(R_{g*}L) \\
&= \gamma_{pg}^{-1} \circ (M - H)_{pg} \circ \pi_*(p)(L) \\
&= \gamma_{pg}^{-1} \circ R_{g*}[(M - H)_p \circ \pi_*(p)(L)]
\end{aligned}$$

E como γ_p verifica que se $\gamma_p(A) = V_p$ então $\gamma_{pg}(Ad(g^{-1})A) = R_{g*}V_p$, temos que

$$\begin{aligned}
\gamma_{pg}^{-1} \circ R_{g*}[(M - H)_p \circ \pi_*(p)(L)] &= Ad(g^{-1})(\gamma_p^{-1} \circ (M - H)_p \circ \pi_*(p)(L)) \\
&= Ad(g^{-1})\Phi_p(A)
\end{aligned}$$

Isto é $(\Phi_{pg} \circ R_{g*} \odot R_{g*}) = Ad(g^{-1})\Phi_p$. Logo $\Phi \in A^e_{h,0}(P)$. Segue-se facilmente que $\Phi \bullet \mathbf{H} = \mathbf{M}$ e que Φ é única com esta propriedade. Resulta que $\bullet$ satisfaz A_3. Assim $(C_2(\mathbf{S}), \bullet)$ é um espaço afim. $\square$

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal. Por intermédio da ação $\bullet$ associamos ao conjunto dos pares $(\mathbf{S}, \Phi)$ onde $\mathbf{S}$ é uma 1-conexão para $P(M, G)$ e $\Phi \in A^e_{h,0}(P)$, uma 2-conexão para $P(M, G)$, $\Phi \bullet \mathbf{S}^{\mathcal{S}}$. Provaremos que a aplicação $(\mathbf{S}, \Phi) \to \Phi \bullet \mathbf{S}^{\mathcal{S}}$ é uma bijeção

Corolario 2.1.10 *A aplicação* $(\mathbf{S}, \Phi) \to \Phi \bullet \mathbf{S}^{\mathcal{S}}$ *é uma bijeção do conjunto dos pares* $(\mathbf{S}, \Phi)$ *onde* $\mathbf{S}$ *é uma 1-conexão para* $P(M, G)$ *e* $\Phi \in A^e_{h,0}(P)$, *no conjunto das 2-conexões para* $P(M, G)$.

Demonstração: Sejam $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ 1-conexões para $P(M, G)$ e Φ, $\Psi \in A^e_h(P)$ tais que $\Phi \bullet \mathbf{S}^{\mathcal{S}} = \Psi \bullet \mathbf{T}^{\mathcal{S}}$. Logo $\mathbf{S} = [\Phi \bullet \mathbf{S}^{\mathcal{S}}]^1 = [\Psi \bullet \mathbf{T}^{\mathcal{S}}]^1 = \mathbf{T}$ e como $(C_2(\mathbf{S} = \mathbf{T}), \bullet)$ é um espaço afim segue que $\Phi = \Psi$. Assim a aplicação $(\mathbf{S}, \Phi) \to \Phi \bullet \mathbf{S}^{\mathcal{S}}$ é injetora. Seja $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ uma 2-conexão para $P(M, G)$ e $\mathbf{H}^1$ a 1-conexão para $P(M, G)$ induzida por $\mathbf{H}$. Obviamente $\mathbf{H}$ e $[\mathbf{H}^1]^{\mathcal{S}}$ pertencem a $C_2(\mathbf{H}^1)$. Então por A_3 da prova da proposição anterior, existe um único $\Phi \in A^e_h(P)$ tal que $\Phi \bullet [\mathbf{H}^1]^{\mathcal{S}} = \mathbf{H}$. Logo $(\mathbf{H}^1, \Phi) \to \Phi \bullet [\mathbf{H}^1]^{\mathcal{S}} = \mathbf{H}$ ou seja a aplicação $(\mathbf{S},\Phi) \to \Phi \bullet \mathbf{S}^{S}$ é sobrejetora. $\square$

2.2 2-Conexões Invariantes

Começamos lembrando algumas definições e fatos básicos sobre espaços homogêneos. Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Sabe-se que $G(G/H, H)$ tem uma estrutura canônica de fibrado principal com projeção $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = g.H$. O grupo G age pela esquerda, sobre si mesmo por translações a esquerda e em G/H via $g.g'H = (gg')H$. Para estas ações π é equivariante, isto é $\pi(gg') = g\pi(g')$. A partir desta equivariança temos que $\pi_*(e) \circ Ad(h) = h_*(H) \circ \pi_*(e)$ para todo $h \in H$.

Definição 2.2.1 *Uma 2-conexão* $\mathbf{H} = \{H_p : p \in G\}$ *para* $G(G/H, H)$ *é dita invariante se*

$$g_* \circ H_p \circ g_*^{-1} = H_{gp}, \text{ para quaisquer } p, g \in G$$

Observamos que se $\mathbf{H} = \{H_p : p \in G\}$ é uma 2-conexão invariante para $G(G/H, H)$, então a 1-conexão induzida $\mathbf{H}^1$é uma conexão invariante para $G(G/H, H)$ [21]. Logo se existe uma 2-conexão invariante para $G(G/H, H)$, necessariamente G/H é redutivo (Isto é, existe um subespaço vetorial $\mathbf{m}$ de $\mathbf{g}$ tal que $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{m}$ e $Ad(h)\mathbf{m} \subseteq \mathbf{m}$ para todo $h \in H$).

Corolario 2.2.2 *Se* $\mathbf{H} = \{H_p : p \in G\}$ *é uma 2-conexão invariante para* $G(G/H, H)$, *então para todo* $h \in H$

$$Ad(h) \circ H_e = H_e \circ Ad(h)$$

Demonstração: Com efeito

$$
\begin{aligned}
Ad(h) \circ H_e &= L_{h*} \circ R_{h^{-1}*} \circ H_e \\
&= L_{h*} \circ H_{eh^{-1}} \\
&= H_e \circ h_*(H) \\
&= H_e \circ Ad(h)
\end{aligned}
$$

$\square$

Denotamos por $\mathbf{g}^{(2)}$ o espaço vetorial dos operadores invariantes pela esquerda de ordem no máximo dois de G. $\tau_e G$ identifica-se naturalmente com $\mathbf{g}^{(2)}$.

Seja G, H redutivo e $\{X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_n\}$ uma base de $\mathbf{g}$ onde $\{X_1, \ldots, X_r\}$ é base de $\mathbf{m}$ e $\{X_{r-1}, \ldots, X_n\}$ é base de $\mathbf{h}$. Definimos $\mathbf{m}^{(2)} = \{ \sum_{i,j=1}^{r} a^{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{r} a^i X_i : a^{ij}, a^i \in I\!R\}$. Neste caso temos que $\tau_H G/H$ identifica-se com $\mathbf{m}^{(2)}$, a ação de $h_*(H)$ em $\tau_H G/H$ com a ação de $Ad(h)$ em $\mathbf{m}^{(2)}$ e $\pi_*(e) : \tau_H G/H \to \tau_e G$ com $\pi_* : \mathbf{m}^{(2)} \to \mathbf{g}^{(2)}$ definida por: $\pi_*(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^{n} a^i X_i) = \sum_{i,j=1}^{r} a^{ij} X_i X_j + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=r-1}^{n} a^{jk} [X_j, X_k]_M + \sum_{i=1}^{r} a^i X_i$. Via estas identificações podemos considerar H_e como um morfismo de Schwartz de $\mathbf{m}^{(2)}$ em $\mathbf{g}^{(2)}$ tal que $\pi_* \circ H_e = \mathrm{Id}_{\mathbf{m}^{(2)}}$. Seja $T : \mathbf{m}^{(2)} \to \mathbf{g}^{(2)}$ um morfismo de Schwartz que verifica $Ad(h) \circ T = T \circ Ad(h)$ para todo $h \in H$ e $\pi_*(e) \circ T = \mathrm{Id}_{M^{(2)}}$. Se definimos $H_g = g_* \circ T \circ g_*^{-1} : \tau_{g.H} G/H \to \tau_g G$, resulta que $\mathbf{H} = \{H_g : g \in G\}$ é uma 2-conexão invariante para $G(G/H, H)$. Com efeito, os H_g são morfismos de Schwartz pois são composições de morfismos de Schwartz.

$\pi_* \circ H_g = \mathrm{Id}_{\tau_{\pi g} M}$. Pois

$$
\begin{aligned}
\pi_* \circ H_g &= \pi_* \circ g_* \circ T \circ g_*^{-1} \\
&= g_* \circ \pi_* \circ T \circ g_*^{-1} \\
&= g_* \circ \mathrm{Id}_{\tau_H M} \circ g_*^{-1} \\
&= \mathrm{Id}_{\tau_{\pi g} M}
\end{aligned}
$$

$R_{h*} \circ H_g = H_{gh}$ para todo $h \in H$. Pois

$$\begin{aligned} R_{h*} \circ H_g &= R_{h*} \circ g_* \circ T \circ g_*^{-1} \\ &= g_* \circ h_* \circ (R_{h*} \circ L_{h^{-1}*} \circ T) \circ g_*^{-1} \\ &= (gh)_* \circ T \circ h_*^{-1} \circ g_*^{-1} \\ &= (gh)_* \circ T \circ (gh)_*^{-1} \\ &= H_{gh} \end{aligned}$$

e obviamente se $L \in \Gamma(G/H)$ a aplicação $g \to H_g L$ é C^∞. Como

$$\begin{aligned} H_{pg} &= (pg)_* \circ T \circ (pg)_*^{-1} \\ &= p_* \circ (g_* \circ T \circ g_*^{-1}) \circ p_*^{-1} \\ &= p_* \circ H_g \circ p_*^{-1} \end{aligned}$$

temos que $\mathbf{H} = \{H_g : g \in G\}$ é uma 2-conexão invariante para $G(G/H, H)$. Provamos assim a seguinte

proposição 2.2.3 *Seja G/H redutivo. Então o conjunto das 2-conexões invariantes para $G(G/H, H)$ está em correspondência biunivoca com os morfismos de Schwartz $T : \mathbf{m}^{(2)} \to \mathbf{g}^{(2)}$ que verificam $Ad(h) \circ T = T \circ Ad(h)$ para todo $h \in H$ e $\pi_*(e) \circ T = Id_{\mathbf{m}^{(2)}}$.*

Corolario 2.2.4 *Seja G/H redutivo. Então o conjunto das 2-conexões invariantes para $G(G/H, H)$ esta em bijeção com os pares formados pelas 1-conexões invariantes para $G(G/H, H)$ e os elementos de $Hom_H(\mathbf{m} \odot \mathbf{m}, \mathbf{h})$.*

Demonstração: Seja $\mathbf{T} = \{T_p : p \in G\}$ uma 2-conexão para $G(G/H, H)$. Então $\mathbf{T}$ pode ser considerarado como um morfismo de Schwartz que satisfaz $\mathbf{T} \circ Ad(h) = Ad(h) \circ \mathbf{T}$ para todo $h \in H$ e $\pi_* \circ \mathbf{T} = \mathrm{Id}_{\mathbf{m}^{(2)}}$ logo $\mathbf{T}^1$satisfaz $\mathbf{T}^1 \circ Ad(h) = Ad(h) \circ \mathbf{T}^1$ para todo $h \in H$ e $\pi_* \circ \mathbf{T}^1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{m}}$. Assim $\mathbf{T}^1$ determina uma 1-conexão invariante para $G(G/H, H)$ [21]. Seja $\beta_{\mathbf{T}} : \mathbf{m} \odot \mathbf{m} \to \mathbf{g}$ definida por

$$\beta_{\mathbf{T}}(X \odot Y) = \mathbf{T}(\{X, Y\}) - [\mathbf{T}^1]^S(\{X, Y\})$$

É claro que $\mathrm{Im}\beta_{\mathbf{T}} \subset \mathbf{h}$ pois, $\pi_* \circ \beta_{\mathbf{T}} = 0$ e

$$Q\beta_{\mathbf{T}}(X \odot Y) = Q\mathbf{T}(\{X, Y\}) - Q[\mathbf{T}^1]^S(\{X, Y\}) = 0$$

Ainda mais $\beta_{\mathbf{T}} \circ Ad(h) = Ad(h) \circ \beta_{\mathbf{T}}$ para todo $h \in H$. De fato

$$\begin{aligned}
\beta_{\mathbf{T}}(Ad(h)X \odot Y) &= \beta_{\mathbf{T}}(Ad(h)X \odot Ad(h)Y) \\
&= \mathbf{T}(\{Ad(h)X, Ad(h)Y\}) - [\mathbf{T}^1]^S(\{Ad(h)X, Ad(h)Y\}) \\
&= Ad(h)\mathbf{T}(\{X, Y\}) - Ad(h)[\mathbf{T}^1]^S(\{X, Y\}) \\
&= Ad(h)\beta_{\mathbf{T}}(X \odot Y)
\end{aligned}$$

Assim $\beta_{\mathbf{T}} \in Hom_H(\mathbf{m} \odot \mathbf{m}, \mathbf{h})$. Como $\mathbf{T} \rightarrow (\mathbf{T}^1, \beta_{\mathbf{T}})$ é bijetora, segue-se o corolario. □

Estudaremos agora a existência de prolongamentos de 1-conexões invariantes para $G(G/H, H)$ no caso de G semi-simples, onde $\mathbf{g}$ tem decomposição de Cartan $\mathbf{g} = \mathbf{m} \oplus \mathbf{h}$.

Seja $\mathbf{a} \subset \mathbf{m}$ uma subálgebra abeliana maximal e $\beta \in Hom_H(\mathbf{m} \odot \mathbf{m}, \mathbf{h})$, como todo $X \in \mathbf{m}$ é conjugado por H a algum $A \in \mathbf{a}$ isto é $X = Ad(h)A$ temos que

$$\beta(X \odot X) = Ad(h)\beta(A \odot A)$$

e portanto β é determinada por seus valores $\beta(A \odot A)$, $A \in \mathbf{a}$. Portanto, para se determinar $Hom_H(\mathbf{m} \odot \mathbf{m}, \mathbf{h})$, é suficiente encontrar as aplicações lineares de $\mathbf{a} \odot \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{h}$ que são invariantes pelo normalizador de $\mathbf{a}$ em H. Seja $N' = \{h \in H : Ad(h)\mathbf{a} = \mathbf{a}\}$ esse normalizador e denotemos por $N = \{h \in H : Ad(h)A = A \text{ para todo } A \in \mathbf{a}\}$ o centralizador de a em H .

Sejam $A \in \mathbf{a}$ e $m \in N$ então $Ad(m)A = A$ e portanto

$$Ad(m)\beta(A \odot A) = \beta(Ad(m)A \odot Ad(m)A) = \beta(A \odot A)$$

De onde se vê que β assume valores na subálgebra

$$\mathbf{f} = \{R \in \mathbf{h} : Ad(m)R = R \text{ para todo } m \in N\}$$

dos pontos fixos de N em $\mathbf{h}$.

Esta álgebra é dada explicitamente da seguinte forma. Seja Π o conjunto das raízes do par $(\mathbf{g}, \mathbf{a})$ (raízes restritas), a álgebra se decompõe como

$$\mathbf{g} = \mathbf{n} \oplus \mathbf{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbf{g}_\alpha$$

onde $\mathbf{n}$ é o centralizador de $\mathbf{a}$ em H (isto é, a álgebra de Lie de N) e $\mathbf{g}_\alpha$ o espaço de raízes correspondente á α. Com essas raízes, se tem a seguinte decomposição de $\mathbf{h}$.

Para $\alpha \in \Pi$ seja

$$\mathbf{h}_\alpha = \{H \in \mathbf{h} : ad(A)^2 H = \alpha(A)^2 H \text{ para todo } A \in \mathbf{a}\}$$

então [15, lemma 11.3 pag.335]

$$\mathbf{h} = \mathbf{n} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbf{h}_\alpha$$

Como N centraliza $\mathbf{a}$, cada componente dessas decomposições são invariantes por N, logo a álgebra dos pontos fixos é da forma

$$\mathbf{f} = \mathbf{n} \cap \mathbf{f} \oplus \sum_{\alpha \in \Pi} \mathbf{h}_\alpha \cap \mathbf{f}$$

e por isso é necessário buscar os pontos fixos dentro de cada componente.

Seja N_0 a componente conexa da identidade de N, as outras componentes conexas de N são dadas por transformações lineares do complexificado $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ da forma $\exp iA$, $A \in \mathbf{a}$ da seguinte maneira; Para uma raiz α denotamos por H_α o seu dual em $\mathbf{a}$, isto é $\alpha(A) = \langle H_\alpha, A\rangle$ para todo $A \in \mathbf{a}$ onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é a forma de Cartan-Killing e como é usual, seja

$$H'_\alpha = \frac{2}{\langle\alpha,\alpha\rangle} H_\alpha$$

Por [37, lemma pag.213] uma exponencial da forma $\exp iA$, $A \in \mathbf{a}$ pertence a H se e só se A é um elemento do reticulado Γ gerado por $\pi H'_\alpha$, $\alpha \in \Pi$. E por [37, lemma 1.1.3.8 ,pag 28] , se tem que o conjunto

$$C = \{\exp iA : A \in \Gamma\}$$

é um subgrupo finito de H que cobre as componentes conexas de N, isto é $N = CN_0$.

Como para todo par de raízes α, β se tem que $\beta(H'_\alpha)$ é inteiro, os elementos de C são transformações lineares reais em $\mathbf{g}_{\mathbb{C}}$ e se tem que $\exp iH = \cos H$ se $H \in \Gamma$.

A partir desses comentários dá para começar a analisar os conjuntos dos pontos fixos em cada uma das componentes da decomposição de $\mathbf{h}$.

Em primeiro lugar, como os elementos de $\mathbf{a}$ comutam com os elementos de $\mathbf{n}$, se tem que a restrição de C a $\mathbf{n}$ é a identidade. Por isso, $\mathbf{n} \cap \mathbf{f}$ é exatamente o conjunto dos N_0-pontos fixos em $\mathbf{n}$ e este coincide com o centro de $\mathbf{n}$ pois N_0 é conexo.

Sejam $H \in \Gamma$ e $H \in \mathbf{h}_\alpha$ para uma raiz α. Então $ad(H)^2 A = \alpha(H)^2 A$ e portanto

$$(\exp iH)A = (\cos H)A = \cos(\alpha(H))A$$

e daí que $A \neq 0$ é fixo por $\cos H$ se e só se $\cos(\alpha(H)) = 1$, isto é, $\alpha(H) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. E se isso acontece então $\cos H$ é a identidade em $\mathbf{h}_\alpha$. Por isso, uma condição necessária para que $\mathbf{h}_\alpha$ tenha interseção não trivial com $\mathbf{f}$ é que $\alpha(H)$ seja um múltiplo par de π para todo H em Γ. No entanto, Γ é gerado por $\pi H'_\beta$, $\beta \in \Pi$ e portanto essa condição é equivalente a que $\alpha(H'_\beta)$ seja par para toda raiz β. Em outras palavras, uma condição necessária para que existam pontos fixos em $\mathbf{h}_\alpha$ é que os números de Killing

$$\frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{\langle\beta,\beta\rangle}$$

sejam pares para toda raiz β.

A partir daí se tem a

proposição 2.2.5 *Suponha que* $\mathbf{n} = 0$ *e que para toda raiz* β *exista uma raiz* α *tal que o número de Killing*

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

sejam ímpar. Então $\mathbf{f} = 0$ *e* $\mathcal{B} = 0$ *é a única forma bilinear* H*-invariante.*

Uma álgebra que satisfaz as condições desta proposição é $\mathbf{sl}(n, I\!R)$. O grupo N é discreto e o sistema de raízes é isomorfo à um múltiplo do sistema dado pelos elementos

$$(0, \ldots, 1_i, \ldots, -1_j, \ldots, 0) \qquad i \neq j$$

e portanto os números de Killing associados a raízes distintas são da forma ± 1.

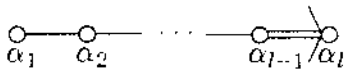
Dizer que $\mathbf{n} = 0$ é o mesmo que dizer que $\mathbf{g}$ é uma forma real normal de sua complexificada já que se isso acontece então $\mathbf{a}$ é um abeliano maximal em $\mathbf{g}$ e portanto uma subálgebra de Cartan. A proposição acima se restringe então às formas reais normais.

A condição para a raiz β na proposição anterior pode ser detectada pelo diagrama das raízes restritas. Para toda raiz restrita β existe um elemento w do grupo de Weyl tal que $w\beta$ ou é simples ou é o dobro de uma raiz simples. No caso das formas reais normais, o dobro de uma raiz nunca é raiz e portanto toda raiz é conjugada a uma raiz do diagrama. Investigando os diagramas, se existe uma ligação simples ou tripla entre duas raízes, o número de Killing é -1 ou -3 e daí que existem raízes β tal que o número de Killing

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

é par para toda raiz α se e só se no diagrama existe uma raiz simples que se liga a todas as outras raízes por uma ligação dupla. Isso só acontece em B_l e C_l. No entanto, em

$B_l, l \geq 2$



com $l \geq 3$, a raiz α_l é a única que se liga a todas as outras por uma ligação dupla. E como α_l é de comprimento menor (pela direção da ligação),

$$\frac{2\langle \alpha_l, \alpha_{l-1} \rangle}{\langle \alpha_{l-1}, \alpha_{l-1} \rangle} = -1 \,.$$

Assim

proposição 2.2.6 *As únicas formas reais normais que podem admitir $\mathcal{B} \neq 0$ são as de C_l, $l \geq 2$ ($C_2 = B_2$).*

As álgebras C_l são as álgebras simpléticas e os espaços simétricos associados são espaços simétricos hermitianos.

Para as álgebras não compactas associadas a espaços simétricos hermitianos, existe uma construção canônica de formas bilineares invariantes a partir da estrutura complexa associada: as álgebras cujos espaços simétricos são hermitianos são aquelas em que a componente $\mathbf{h}$ da decomposição de Cartan admite centro $\mathbf{z}(\mathbf{h})$ não trivial. Tome $Z \in \mathbf{z}(\mathbf{h})$ seja J a restrição de $ad(Z)$ a $\mathbf{m}$ e defina

$$\mathcal{B}(X, Y) = [JX, Y] \,.$$

Então $\mathcal{B}$ é bilinear simétrica pois

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(Y, X) &= [JY, X] \\ &= [Z, [Y, X]] - [Y, JX] \\ &= \mathcal{B}(X, Y) \end{aligned}$$

pois $[Z, [X, Y]] = 0$ já que Z está no centro de $\mathbf{h}$. Além do mais, $\mathcal{B}$ é H-invariante já que J comuta com os elementos de H.

Um exemplo de uma álgebra dessas é a álgebra simplética $\mathbf{sp}(n, I\!R)$ das matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix} \qquad B, C \text{ simétricas}$$

Se tem

$$\mathbf{h} = \{ \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} : A \text{ anti-simétrica } B \text{ simétrica}\}$$

é isomorfa à $\mathbf{u}(n)$ e

$$\mathbf{m} = \{ \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} : A, B \text{ simétricas}\}$$

O centro de $\mathbf{h}$ é formado pelas matrizes em que $A = 0$ e B é múltipla da identidade (as múltiplas da identidade em $\mathbf{u}(n)$. Tomando

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tem

$$J \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B & A \\ A & B \end{pmatrix}$$

e daí que

$$\mathcal{B}(X, X) = 2 \begin{pmatrix} [A, B] & -(A^2 + B^2) \\ A^2 + B^2 & [A, B] \end{pmatrix}$$

se X é dada por A, B.

Juntando isso com o que foi feito antes, se tem

proposição 2.2.7 *Suponha que* $\mathbf{g}$ *é uma forma real normal de uma álgebra simples complexa. Então existem formas bilineares* $\mathcal{B} \neq 0$ *definidas em* $\mathbf{m}$ *a valores em* $\mathbf{h}$ *equivariantes por* H *se e só se o espaço simétrico correspondente é hermitiano.*

Corolario 2.2.8 *Seja G/H um espaço simetrico tal que* $\mathbf{g}$ *é uma forma real normal de uma álgebra simples complexa. Então as unicas 2-conexões invariantes para $G(G/H, H)$ são os prolongamentos de Stratonovich das 1-conexões invariantes para $G(G/H, H)$.*

2.3 Levantamentos Horizontais Estocásticos

O primeiro a considerar o transporte paralelo estocástico de um tensor ao longo de uma curva aleatória foi K.Itô em [17]. I. Schigekawa, L. Schwartz . P. Meyer , M. Bismut em [35], [34], [30], [2] consideraram transportes paralelos estocásticos em relação a 1-conexões em diversas situações. Nesta seção estudamos os levantamentos horizontais estocásticos de semimartingales em relação a 2-conexões.

Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal, $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ uma 2-conexão para P e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ um espaço de probabilidade que satisfaz as condições usuais. Seja X um M-semimartingale e p uma variável aleatória a valores em P tal que $X_0 = \pi(p)$ q.s. Com as notações anteriores

Definição 2.3.1 *Um levantamento horizontal estocástico de X em relação a uma 2-conexão* $\mathbf{H}$*, começando em p, é um P-semimartingale $\tilde{X}_t$ $0 \leq t < \infty$ que satisfaz*

i) $\widetilde{X}_0 = p$

ii) $\pi\tilde{X}_t = X_t$ *para todo* $t \geq 0$ *q.s.*

iii) $\int_0^t \langle \theta, d_2\tilde{X} \rangle = 0$ *para todo* $t \geq 0$ *e* $\theta \in \mathbf{H}^{\perp}$*, onde*

$$\mathbf{H}^{\perp} = \{\theta : \theta(H_p) = 0 \text{ para todo } p \in P\}$$

Provemos a existência e unicidade dos levantamentos estocásticos

Teorema 2.3.2 *Sejam X um M-semimartingale e p uma variável aleatória a valores em P tal que $X_0 = \pi(p)$ q.s. Então existe um unico levantamento horizontal estocástico de X começando em p em relação a* $\mathbf{H}$.

Demonstração: Seja $\widetilde{X}_t$ uma solução maximal da seguinte equação diferencial estocástica

$$\begin{aligned} d_2\widetilde{X}_t &= \mathbf{H}(\widetilde{X}_t)d_2X_t \\ \widetilde{X}_0 &= p \end{aligned}$$

obviamente $\pi\tilde{X}_t = X_t$. e para $\theta \in \mathbf{H}^{\perp}$ temos que

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^t\langle\theta, d_2\tilde{X}\rangle &= \textstyle\int_0^t\langle\mathbf{H}^*(\widetilde{X})\theta, d_2X\rangle && \text{definição de } \widetilde{X} \\ &= \textstyle\int_0^t\langle\theta\circ\mathbf{H}(\widetilde{X}), d_2X\rangle && \text{definição de } \mathbf{H}^* \\ &= \textstyle\int_0^t\langle 0, d_2X\rangle && \text{pois } \theta \in \mathbf{H}^{\perp} \\ &= 0 \end{aligned}$$

então $\widetilde{X}$ é um levantamento horizontal estocástico de X.

A unicidade segue da unicidade das soluções das equações diferenciais estocásticas.

□

observação 2.3.3 (1) *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal, $\mathbf{H}$ uma 1-conexão para P e X um M-semimartingale. Então o levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}$, definido por I. Shigekawa em [35] coincide, com o levantamento estocástico que acabamos de definir respeito da 2-conexão $\mathbf{H}^S$. Isto é evidente, a partir do fato que, o levantamento horizontal estocástico de X começando em p, $\widetilde{X}$ é obtido como solução da equação*

$$\begin{aligned} d_2\widetilde{X}_t &= \mathbf{H}^S(\widetilde{X}_t)d_2X_t \\ \widetilde{X}_0 &= p \end{aligned}$$

Logo $\widetilde{X}$ é solução da equação de Stratonovich

$$\begin{aligned} \delta\widetilde{X}_t &= \mathbf{H}(\widetilde{X}_t)\delta X_t \\ \widetilde{X}_0 &= p \end{aligned}$$

o que é equivalênte a dizer que

$$\begin{aligned} \pi(\widetilde{X}_t) &= X_t \textit{ para todo } t \geq 0 \\ \int_0^t \left\langle \omega, \delta\widetilde{X} \right\rangle &= 0 \textit{ para todo } t \geq 0 \end{aligned}$$

Onde ω *é a forma de conexão associada a* $\mathbf{H}$. *Isto é* $\widetilde{X}$ *é o levantamento horizontal estocástico de* X *no sentido da definição de I. Shigekawa [35].*

observação 2.3.4 (2) *Sejam* $P(M,G)$ *um fibrado principal.* $\mathbf{H}$ *uma 2-conexão para* P *e* X *um* M*-semimartingale, obtido como solução da equação diferencial estocástica*

$$\begin{aligned} d_2X_t &= \mathbf{F}(A_t, X_t)d_2A_t \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

onde A *é um* N*-semimartingale. Então* $\widetilde{X}$ *o levantamento horizontal estocástico de* X *inicializado em* p *é obtido, como solução da seguinte equação*

$$\begin{aligned} d_2\widetilde{X}_t &= \mathbf{G}(A_t, \widetilde{X}_t)d_2A_t \\ \widetilde{X}_0 &= p \end{aligned}$$

onde $\mathbf{G}(a,z) = \mathbf{H}(z, \pi z) \circ \mathbf{F}(a, \pi z)$.

A seguir estudamos os prolongamentos de 1-conexões a 2-conexões num fibrado principal $P(M,G)$, tais que para um par fixo de conexões sem torsão $\overline{\Gamma}$ de P e Γ de M se verifique que os levantamentos horizontais estocásticos de Γ-martingales são $\overline{\Gamma}$-martingales. Mostraremos que toda conexão $\overline{\Gamma}$ de P que é G-invariante e satisfaz uma propriedade adicional induz um prolongamento nestas condições.

Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e $\overline{\Gamma}$ uma conexão G-invariante de P, isto é $\overline{\Gamma} = \{\overline{\Gamma}_p : p \in P\}$ é uma conexão sem torsão de P que verifica

G-**invariancia** Para todo $g \in G$, $\overline{\Gamma}_{pg} \circ R_{g*} = R_{g*} \circ \overline{\Gamma}_p$.

Obviamente, toda conexão G-invariante de P que satisfaz

$$\overline{\Gamma}_p(Ker(\pi_*(p))) \subset Ker(\pi_*(p))$$

para todo $p \in P$, determina uma única conexão de M tal que a projeção $\pi : P \to M$ é afim. Com efeito; Seja $\overline{\Gamma}$ uma conexão G-invariante de P, $L \in \tau_{\pi p}M$ e $T \in \tau_{\pi p}P$ tal que $L = \pi_* T$, então $\Gamma_{\pi p}(L) = \pi_*(\overline{\Gamma}_p(T))$ é a única conexão de M nestas condições.

Neste caso, observamos que $\overline{\Gamma}$ define um prolongamento de 1-conexões de $P(M,G)$ a 2-conexões de $P(M,G)$. Denotamos este prolongamento por $\mathbf{H} \to \mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$, o único que verifica

"Se X é um Γ-martingale e $\widetilde{X}$ é um levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$ então $\widetilde{X}$ é um $\overline{\Gamma}$-martingale ".

Provemos esta afirmação. Seja $\mathbf{H}_1 = \{H_p^1 : p \in P\}$ uma 1-conexão para $P(M,G)$. Então existe uma única 2-conexão $\mathbf{H} = \{H_p : p \in P\}$ para $P(M,G)$ tal que

$$H_p : \tau_{\pi p}M \to \tau_p P \text{ é afim}$$

Com efeito, de [9, lemma 11] $H_p\,|_{T_{\pi p}M} = H_p^1$ e $H_p = (\exp_p \circ H_p^1 \circ \exp_{\pi p}^{-1})_*(\pi p)$. Obviamente, $\pi_*(p) \circ H_p = \mathrm{Id}_{\tau_{\pi p}M}$ e $p \to H_p$ é regular. E como

$$\begin{aligned}
R_{g*} \circ H_p &= (R_g \circ \exp_p \circ H_p^1 \circ \exp_{\pi p}^{-1})_*(\pi p) \\
&= (\exp_{pg} \circ R_{g*} \circ H_p^1 \circ \exp_{\pi p}^{-1})_*(\pi p) \\
&= (\exp_{pg} \circ H_{pg}^1 \circ \exp_{\pi pg}^{-1})_*(\pi pg) \\
&= H_{pg}
\end{aligned}$$

Concluímos que $\mathbf{H}$ é uma 2-conexão para $P(M,G)$. Denotamos esta 2-conexão por $\mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$.

Sejam X um Γ-martingale e $\widetilde{X}$ um levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$. Sabe-se que $\widetilde{X}$ é solução da equação

$$\begin{aligned} d_2\widetilde{X}_t &= \mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}(\widetilde{X}_t)d_2X_t \\ \widetilde{X}_0 &= p \end{aligned}$$

E pelo principio de transferência de Itô [9. Theorem 12] temos, que $\widetilde{X}$ é solução da equação diferencial estocástica de Itô

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}d_2\widetilde{X}_t &= \mathbf{H}_1(\widetilde{X}_t)\Gamma d_2X_t \\ \widetilde{X}_0 &= p \end{aligned}$$

Como X é um Γ-martingale, concluímos que $\widetilde{X}$ é um $\overline{\Gamma}$-martingale.

A seguir mostraremos que $\mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$ é o único prolongamento de $\mathbf{H}_1$, tal que, todo levantamento horizontal estocástico de um Γ-martingale é um $\overline{\Gamma}$-martingale.

Com efeito. Se Γ e $\overline{\Gamma}$ tem as seguintes expressões nas coordenadas locais (x^λ) de M e (x^λ, y^i) de P respectivamente

$$\Gamma(D_{\mu\nu}) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}D_\lambda$$

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}(D_{\mu\nu}) &= \Gamma^\lambda_{\mu\nu}D_\lambda + \Gamma^i_{\mu\nu}D_i \\ \overline{\Gamma}(D_{j\mu}) &= \Gamma^i_{j\mu}D_i \\ \overline{\Gamma}(D_{jk}) &= \Gamma^i_{jk}D_i \end{aligned}$$

E nestas coordenadas, $\mathbf{H}_1$ tem a seguinte expressão

$$H(D_\lambda) = D_\lambda + a^i_\lambda D_i$$

Dado um Γ-martingale X, localmente temos que

$$dX^\lambda_t = dM^\lambda_t - \tfrac{1}{2}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(X_t)d[M^\mu, M^\nu]_t \tag{2.1}$$

onde os M_t^λ são martingales locais reais.

Localmente, qualquer levantamento horizontal estocástico $\widetilde{X}$ de X em relação a uma 2-conexão $\mathbf{H}'$, que prolonga $\mathbf{H}_1$, tem a forma $\widetilde{X} = (X^\lambda, Y^i)$. Onde

$$dY_t^i = a_\lambda^i dX_t^\lambda + \tfrac{1}{2} a_{\mu\nu}^i d[X^\mu, X^\nu]_t$$

Das expressões anteriores, obtemos que

$$dY_t^i = a_\lambda^i dM_t^\lambda + \tfrac{1}{2}(a_{\mu\nu}^i - a_\lambda^i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) d[M^\mu, M^\nu]_t \tag{2.2}$$

E como $\widetilde{X} = (X^\lambda, Y^i)$ é um $\overline{\Gamma}$-martingale se e só se

$$dY_t^i + \frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}^i d[X^\mu, X^\nu]_t + \Gamma_{j\mu}^i d[Y^j, X^\mu]_t + \frac{1}{2}\Gamma_{jk}^i d[Y^j, Y^k]_t$$

é um martingale local.

Substituindo (2.1) e (2.2) na expressão anterior, resulta que

$$a_\lambda^i dM_t^\lambda + \frac{1}{2}\left[(a_{\mu\nu}^i - a_\lambda^i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \Gamma_{\mu\nu}^i + 2\Gamma_{j\mu}^i a_\nu^j + \Gamma_{jk}^i a_\mu^j c_\nu^k\right] d[M^\mu, M^\nu]_t$$

é um martingale local, isto é

$$(a_{\mu\nu}^i - a_\lambda^i \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) + \Gamma_{\mu\nu}^i + 2\Gamma_{j\mu}^i a_\nu^j + \Gamma_{jk}^i a_\mu^j a_\nu^k = 0$$

Assim os $a_{\mu\nu}^i$ são univocamente determinado. Logo existe uma única 2-conexão $\mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$ que prolonga $\mathbf{H}_1$. Provamos o seguinte

Teorema 2.3.5 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e $\overline{\Gamma}$ uma conexão G-invariante tal que $\overline{\Gamma}_p(Ker(\pi_*(p)))\subset Ker(\pi_*(p))$ para todo $p \in P$. Então $\overline{\Gamma}$ define um prolongamento de 1-conexões de $P(M, G)$ a 2-conexões de $P(M, G)$, que denotamos por $\mathbf{H} \to \mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$. O único que satisfaz: "Se X é um Γ-martingale e $\widetilde{X}$ é um levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}^{\overline{\Gamma}}$, então $\widetilde{X}$ é um $\overline{\Gamma}$-martingale ". Onde Γ é a conexão induzida por $\overline{\Gamma}$*

em M.

A reciproca do teorema anterior é essencialmente uma reformulação de um resultado de P.Meyer para fibrados vetoriais [30, Theoreme 5], no contexto de fibrados principais.

Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e $\mathbf{H}$ uma 2-conexão para $P(M,G)$. Seja Δ a família $\{\Delta^x : x \in M\}$ onde para cada $x \in M$, Δ^x é uma conexão G-invariante para P_x tal que a aplicação $p \to \Delta_p^{\pi p}$ é $\mathcal{C}^\infty$. Então o par $(\mathbf{H},\Delta)$ define um prolongamento natural

$$(\mathbf{H},\Delta) : \{\Gamma : \text{conexão de } M\} \to \{\overline{\Gamma} : \text{conexão } G\text{-invariante de } P\}$$

Com efeito, seja Γ uma conexão de M. Definimos

$$(\mathbf{H},\Delta)_p(R) = \overline{\Gamma}_p(R) = \begin{cases} H_p \circ \Gamma_{\pi p}(\pi_*(p)R) & \text{Se } R = H_p A \\ 0 & \text{Se } R = (p_*(\epsilon)B)HA \\ \Delta_p^{\pi p}(R) & \text{Se } R = p_*(\epsilon)C \end{cases}$$

Onde $A \in \Gamma(\tau M)$, $B \in \mathbf{g}$ e $C \in \mathbf{g}^{(2)}$. Obviamente $\overline{\Gamma}_p : \tau_p P \to T_p P$ é linear e $\overline{\Gamma}_p\,|_{T_pP} = \mathrm{Id}_{T_pP}$. Mostremos que $\overline{\Gamma}$ é G-invariante

$$\begin{aligned} R_{g*} \circ \overline{\Gamma}_p(H_p A) &= R_{g*} \circ H_p \circ \Gamma_{\pi p} A \\ &= H_{pg} \circ \Gamma_{\pi pg} A \\ &= \overline{\Gamma}_{pg} \circ R_{g*}(H_p A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{g*} \circ \overline{\Gamma}_p((p_*(\epsilon)B)HA) &= R_{g*}(0) \\ &= 0 \\ &= \overline{\Gamma}_{pg}((p_*(\epsilon)Ad(g^{-1})B)(R_{g*}HA)) \\ &= \overline{\Gamma}_{pg}((R_{g*} \circ p_*(\epsilon)B)(R_{g*}HA)) \\ &= \overline{\Gamma}_{pg} \circ R_{g*}((p_*(\epsilon)B)HA) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{g*} \circ \overline{\Gamma}_p(p_*(\epsilon)C) &= R_{g*} \circ \Delta_p^{\pi p}(p_*(\epsilon)C) \\
&= \Delta_{pg}^{\pi pg} \circ R_{g*}(p_*(\epsilon)C) \\
&= \overline{\Gamma}_{pg} \circ R_{g*}(p_*(\epsilon)C)
\end{aligned}
$$

Observemos que $\overline{\Gamma}_p(Ker(\pi_*(p))) \subset Ker(\pi_*(p))$ para todo $p \in P$, logo $\pi : P \to M$ é afim e Γ é induzida por $\overline{\Gamma}$. Ainda mais, todo levantamento horizontal estocástico em relação a $\mathbf{H}$ de Γ-martingales é $\overline{\Gamma}$-martingale. Alem disso, $\overline{\Gamma}$ é a única conexão sem torsão G-invariante de P, que satisfaz:

1) $\pi : P \to M$ é afim.

2) ∇_{vertical}horizontal$= 0$.

3) A conexão induzida por $\overline{\Gamma}$ em P_x é Δ^x, para todo $x \in M$.

4) Todo levantamento horizontal estocástico em relação a $\mathbf{H}$ de Γ-martingales é $\overline{\Gamma}$-martingale.

É interessante notar que podemos fazer uma escolha canônica de $\Delta = \{\Delta^x : x \in M\}$. Para isto consideramos em G a conexão sem torsão invariante a esquerda γ definida por

$$
\begin{aligned}
\theta(XY) &= \tfrac{1}{2}[X, Y] \\
\theta(X) &= X
\end{aligned}
$$

para $X, Y \in \mathbf{g}$.

Mostraremos que para cada $x \in M$, θ induz uma conexão G-invariante de P_x.

Com efeito, seja

$$
\Theta_p^{\pi p} = p_* \circ \theta \circ p_*^{-1} : \tau_p P_{\pi p} \to T_p P_{\pi p}
$$

Obviamente $\Theta_p^{\pi p}$ é linear e $\Theta_p^{\pi p} |_{T_p P_{\pi p}} = \mathrm{Id}_{T_p P_{\pi p}}$.

$\Theta^{\pi p}$ é G-invariante. Seja $A \in \tau_p P_{\pi p}$, como

$$\begin{aligned} R_{g*} \circ \Theta_p^{\pi p}(A) &= R_{g*} \circ p_* \circ \theta \circ p_*^{-1}(A) \\ &= R_{g*} \circ p_*(\theta \circ p_*^{-1}(A)) \\ &= (pg)_* \circ Ad(g^{-1})(\theta \circ p_*^{-1}(A)) \\ &= (pg)_* \circ \theta \circ Ad(g^{-1})(p_*^{-1}(A)) \\ &= (pg)_* \circ \theta \circ (pg)_*^{-1} \circ R_{g*}(A) \\ &= \Theta_{pg}^{\pi pg} \circ R_{g*}(A) \end{aligned}$$

Resulta que $\Theta^{\pi p}$ é G-invariante. Onde utilizamos que $R_{g*} \circ p_* = (pg)_* \circ Ad(g^{-1})$ e $Ad(g^{-1}) \circ \theta = \theta \circ Ad(g^{-1})$.

A seguir, aplicamos estos resultados a um fibrado principal $P(M, G)$ com grupo estrutural abeliano provido de uma 1-conexão $\mathbf{H}_1$, para obter um teorema de fatorização de $\overline{\Gamma}$-martingales.

Seja Γ uma conexão de M e $\overline{\Gamma}$ a conexão G-invariante de P determinada por $(\mathbf{H}, \Theta)$, onde $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1^S$. Seja $\overline{X}$ um $\overline{\Gamma}$-martingale, como π é afim temos que $X = \pi \circ \overline{X}$ é um Γ-martingale, e da caracterização de $\overline{\Gamma}$ segue-se que, $\widetilde{X}$ o levantamento horizontal estocástico de X inicializado em $\overline{X}_0$ é um $\overline{\Gamma}$-martingale. Seja ω a 1-forma de conexão correspondente a $\mathbf{H}_1$não é difícil mostrar neste caso que $d\omega = \overline{\Gamma}^* \omega$ (Onde d é o operador de P. Meyer definido no capítulo 1), então

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\langle \omega, \delta\overline{X} \right\rangle &= \int_0^t \left\langle d\omega, d_2\overline{X} \right\rangle \\ &= \int_0^t \left\langle \overline{\Gamma}^* \omega, d_2\overline{X} \right\rangle \\ &= \int_0^t \left\langle \omega, \overline{\Gamma} d_2\overline{X} \right\rangle \end{aligned}$$

Assim $\int_0^t \left\langle \omega, \delta\overline{X} \right\rangle$ é uma g-martingale. Seja $g_t = \varepsilon \left(\int_0^t \left\langle \omega, \delta\overline{X} \right\rangle \right)$a exponencial estocastica de Hakim-Dowek e Lépingle, segue-se de [14, Thorme 4] que g_t é um θ-martingale. Da prova de [35, Theorem2.1] temos que $\widetilde{X}_t = \overline{X}_t \cdot g_t$, logo $\overline{X}_t = \widetilde{X}_t \cdot h_t$ onde $h_t = g_t^{-1}$é um θ-martingale (isto segue do fato de G ser abeliano e das formulas para a exponencial estocástica). Provamos assim a seguinte

proposição 2.3.6 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo estrutural abeliano e $\mathbf{H}_1$ uma 1-conexão para $P(M, G)$. Sejam Γ uma conexão de M e $\overline{\Gamma}$ a conexão G-invariante de P determinada por $(\mathbf{H}_1^S, \Theta)$. Então todo $\overline{\Gamma}$-martingale $\overline{X}$ se fatora na forma $\overline{X}_t = \widetilde{X}_t \cdot h_t$ onde $\widetilde{X}$ é o levantamento horizontal estocástico de $\pi \circ \overline{X}$ inicializado em $\overline{X}_0$ (que é um $\overline{\Gamma}$-martingale) e o θ-martingale h_t.*

Concluímos este capitulo estudando o levantamento horizontal estocástico de difusões em relação a 2-conexões. Começamos, mostrando que o levantamento horizontal estocástico preserva difusões.

proposição 2.3.7 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal, $\mathbf{H}$ uma 2-conexão e X uma difusão em M com g.i. L. Então os levantamentos horizontais estocásticos de X são difusões em P com g.i. HL.*

Demonstração: Seja HX um levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}$, então HX satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} d_2HX &= \mathbf{H}(HX_t)d_2X_t \\ HX_0 &= Y \end{aligned}$$

onde Y é uma variável aleatória a valores em P tal que $\pi \circ Y = X_0$.

Seja $f \in C^\infty(M)$ então

$$\begin{aligned} f(HX_t) - f(HX_0) &= \int_0^t \langle d_2f, d_2HX\rangle \\ &= \int_0^t \langle \mathbf{H}(HX)^* d_2f, d_2X\rangle \\ &= \int_0^t \langle \mathbf{H}(HX_s)^* d_2f, L(X_s)ds\rangle - \text{martingale local} \\ &= \int_0^t ((HL)f)(HX_s)ds + \text{martingale local} \end{aligned}$$

Logo HX é uma difusão com g.i. HL. □

Provemos o seguinte

Lema 2.3.8 *Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal. $\mathbf{H}$ uma 2-conexão, $L \in \Gamma(\tau M)$ parabolico e Y,Z difusões em P com g.i. HL tais que*

1. $Y_0 = Z_0$
2. $\pi Y = \pi Z$

Então $Y = Z$.

Demonstração: Seja $\mathbf{H}_1$ a 1-conexão induzida por $\mathbf{H}$ e $\mathbf{H}^S = \mathbf{H}_1^S$ seu prolongamento de Stratonovich. Então $HL = H^S L + U$ onde U é um campo vertical invariante a direita.

Seja ω a forma de conexão associada com $\mathbf{H}_1$ e Y uma difusão com gerador infinitesimal HL. Então

$$\int_0^t \langle \omega, \delta Y \rangle = \int_0^t \langle \omega, U \rangle (Y_s) ds .$$

De fato, seja $\theta \in \mathbf{H}_1^\top$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle d\theta, HL \rangle (Y_s) ds &= \int_0^t \left\langle d\theta, H^S L + U \right\rangle (Y_s) ds \\ &= \int_0^t \langle d\theta, U \rangle (Y_s) ds \\ &= \int_0^t \langle \theta, U \rangle (Y_s) ds \end{aligned}$$

Assim $\int_0^t \langle \theta, \delta Y \rangle - \int_0^t \langle \theta, U \rangle (Y_s) ds$ é um martingale local.

Seja $f \in C^\infty$, como $f\theta \in \mathbf{H}_1^\top$ pois $\theta \in \mathbf{H}_1^\perp$, resulta que

$$\int_0^t \langle f\theta, \delta Y \rangle - \int_0^t \langle f\theta, U \rangle (Y_s) ds$$

é um martingale local. Como

$$\int_0^t \langle f\theta, \delta Y\rangle = \int_0^t f(Y_s)d(\int_0^s \langle \theta, \delta Y\rangle) + \frac{1}{2}[f \circ Y, \int \langle \theta, \delta Y\rangle].$$

Obtemos que

$$\int_0^t (f \circ Y)d(\text{martingale local}_s + \int_0^s \langle \theta, U\rangle (Y_r)dr) +$$

$$\tfrac{1}{2}[f \circ Y, \int \langle \theta, \delta Y\rangle] - \int_0^t \langle f\theta, U\rangle (Y_s)ds$$

é um martingale local; Concluindo então que $[f \circ Y, \int \langle \theta, \delta Y\rangle] = 0$ para toda $f \in C_0^\infty$. Logo

$$\int_0^t \langle \theta, \delta Y\rangle \;=\; \int_0^t \langle \theta, U\rangle (Y_s)ds \quad \text{para toda } \theta \in \mathbf{H}_1^-$$

Em particular

$$\int_0^t \langle \omega, \delta Y\rangle \;=\; \int_0^t \langle \omega, U\rangle (Y_s)ds\,.$$

Agora, como $\pi Y = \pi Z$ existe $g_t \in G$, $g_0 = \epsilon$ tal que $Z_t = Y_t g_t$. Afirmamos que g_t é um semimartingale. De fato, em coordenadas locais $Z_t = (\pi Z_t, h_t)$ e $Y_t = (\pi Y_t, r_t)$, então $h_t = r_t \cdot g_t$ isto é $g_t = r_t^{-1}h_t$ é um produto de semimartingales, então g_t é um semimartingale.

Agora como

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle \omega, U\rangle (Z_s)ds &= \int_0^t \langle \omega, \delta Z\rangle \\
&= \int_0^t \langle \omega, \delta Y g\rangle \\
&= \int_0^t \langle \Theta, \delta g\rangle + \int_0^t \langle R_{g*}\omega, \delta Y\rangle \quad [35,\ \text{lemma } 3.4]
\end{aligned}$$

onde Θ é a 1-forma canonica de G. E

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle R_{g*}\omega, \delta Y\rangle &= \int_0^t \langle Adg^{-1}\omega, \delta Y\rangle \\
&= \int_0^t Adg^{-1}\delta(\int \langle \omega, \delta Y\rangle) \\
&= \int_0^t Adg_s^{-1}\langle \omega, U\rangle (Y_s)ds \\
&= \int_0^t \langle \omega, U\rangle (Z_s)ds
\end{aligned}$$

Obtemos que $\int_0^t \langle \Theta, \delta g\rangle = 0$. Logo de[35, Lemma 3.3] segue-se que $g_t = \epsilon$. Isto mostra que $Y = Z$. □

Do lema anterior concluímos o seguinte importante corolario

Corolario 2.3.9 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal,* $\mathbf{H}$ *uma 2-conexão e $L \in \Gamma(\tau M)$ parabolico. Então toda difusão com g.i. HL é um levantamento horizontal em relação a* $\mathbf{H}$.

Demonstração: Seja Y uma difusão com g.i. HL, então $\pi Y = X$ é uma difusão com g.i. L. Seja Z o levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}$ inicializado em Y_0, como Z é uma difusão com g.i. HL pelo lema anterior, concluimos que $Y = Z$. □

Capítulo 3

2-Conexões em Fibrados Vetoriais e Paralelismo Estocástico.

Este capítulo consta de duas seções. Na primeira seção desenvolvemos a teoria das 2-conexões para fibrados vetoriais. Começamos construindo um tipo especial de 2-conexão nos fibrados vetoriais associados, a partir das 2-conexões no fibrado principal. Chamamos estas de 2-conexões induzidas. Logo comparamos as 2-conexões induzidas com as 2-surconexões [26]. A seguir, desenvolvemos uma teoria de 2-conexões algebrica para os fibrados vetoriais. Resumimos os resultados obtidos da seguiente maneira

Seja E um fibrado vetorial e BE o fibrado principal das bases de E. Então as seguientes noções de conexão de segunda ordem são equivalentes

1 2-conexão induzida em E.

2 2-surconexão em E [26].

3 2-conexão em BE.

4 2-operador de derivada covariante em E.

Onde os 2-operadores de derivada covariante resultam ser uma extensão a segunda ordem dos operadores de derivada covariante clássicos.

Concluimos esta seção com uma fórmula que vincula o 2-operador de derivada covariante ∇ de E com P^{∇} o transporte paralelo estocástico associado a ∇. Com efeito. Sejam $\varphi \in \Gamma(E)$ e X uma difusão com gerador infinitesimal L inicializada em x. Então

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{E}[(P^{\nabla}_{X_t})^{-1}\varphi \circ X_t] = \nabla_L \varphi(x)$$

Esta fórmula permitenos mostrar que a derivada forward de Nelson da mecânica estocastica, no tempo $t = 0$,[1] define um 2-operador de derivada covariante no fibrado tangente.

Na segunda seção deste capítulo introduzimos a noção de paralelismo estocástico de difusões. Um paralelismo estocástico é um sistema especial de levantamentos de difusões. Em particular, osistema dos levantamentos horizontais estocásticos de difusões em relação a uma 2-conexão é um paralelismo estocástico. O objetivo desta seção é mostrar que todo paralelismo estocástico que verifica certas propriedades naturais é obtido como o sistema dos levantamentos horizontais estocásticos em relação a uma 2-conexão.

3.1 2-Conexões em Fibrados Vetoriais

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal, $\mathbf{H}$ uma 2-conexão para $P(M, G)$ e $E = E(M, F, G, P)$ um fibrado associado a $P(M, G)$ com fibra standard F. Então $\mathbf{H}$ induz uma 2-conexão $\mathbf{H}^E$ para $\pi : E \to M$ da seguinte maneira. Tomemos $e \in E_x$, $p \in P_x$ e $\xi \in F$ tais que $p.\xi = e$. Seja $F_\xi : P \to E$ dada por $F_\xi(q) = q.\xi$. Definimos

$$H_e^E = (F_\xi)_*(p) \circ H_p \ .$$

Não é difícil provar, que H_e^E é independente da escolha de $(p, \xi) \in P \times F$ e que $\mathbf{H}^E = \{H_e^E : e \in E\}$ é uma 2-conexão para E. Chamamos esta 2-conexão de a 2-conexão induzida por $\mathbf{H}$ em E.

proposição 3.1.1 *Seja $P(M,G)$ um fibrado principal. E um fibrado vetorial associado e $\mathbf{H}$ uma 2-conexão para $P(M,G)$. Então $\lambda_E(\mathbf{H}) = \gamma_{\mathbf{H}^E} \in \Gamma(\beta : J_2E \to E)$ é um morfismo de fibrados vetoriais.*

Demonstração: Sabe-se que $\lambda_E(\mathbf{H}) = \gamma_{\mathbf{H}^E} \in \Gamma(\beta : J_2E \to E)$. Então só resta provar que $\lambda_E(\mathbf{H})$ é linear. Sejam $p \in P$, $a \in I\!R$, $f, g \in \pi^{-1}(x = \pi p)$ e $\zeta, \eta \in F$ tais que $f = p.\zeta$ e $g = p.\eta$. Seja s uma seção local de P tal que $H_p = s_*(x)$. Então

$$\begin{aligned}
\lambda_E(\mathbf{H})(f + ag) &= j^2_x(F_{\zeta + a\eta} \circ s) \\
&= j^2_x(F_\zeta \circ s) + j^2_x(F_{a\eta} \circ s) \\
&= j^2_x(F_\zeta \circ s) + j^2_x a(F_\eta \circ s) \\
&= \lambda_E(\mathbf{H})(f) + a\lambda_E(\mathbf{H})(g)
\end{aligned}$$

como queriamos mostrar. □

Seja $J^0_kE_x$ definido por

$$J^0_kE_x = \{j^k_x s : s \text{ é uma seção local de } E \text{ tal que } s(x) = 0\}$$

Sabe-se que[36] $J^0_kE = \bigcup_{x \in M} J^0_kE_x$ é um fibrado vetorial sobre M. Este fibrado vetorial esta naturalmente imerso em J_kE pela inclusão $i : J^0_kE \to J_kE$ que é um monomorfismo de fibrados vetoriais. Obviamente temos a seguinte seqüência exata de fibrados vetoriais

$$0 \longrightarrow J^0_2E \xrightarrow{i} J_2E \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0$$

Agora é possível introduzir as 2-surconexões de P. Liebermann

Definição 3.1.2 *(Liebermann)[26] Seja E um fibrado vetorial. toda partição da seqüência exata $\lambda : E \to J_2E$ é chamada de 2-surconexão para E.*

Seguem-se da definição as seguintes

observação 3.1.3 :

1) Seja $P(M,G)$ um fibrado principal, E um fibrado vetorial associado e $\mathbf{H}$ uma 2-conexão para $P(M,G)$. Então $\lambda_E(\mathbf{H})$ é uma 2-surconexão para E.

2) Toda 2-surconexão λ induze uma 1-surconexão $\lambda^1 = \rho_1^2 \circ \lambda$. Chamamada de induzida por λ.

3) Seja λ uma 1-surconexão, então $\lambda^S = Sym \circ j^1\lambda \circ \lambda$ é uma 2-surconexão que chamamos o prolongamento de Stratonovich de λ.

4) Seja E um fibrado vetorial e λ uma 1-surconexão para E

$$S_2(\lambda) = \{\lambda_2 \in S_2(E) : \rho_1^2(\lambda_2) = \lambda\}$$

tem uma estrutura natural de espaço afim.

Nosso próximo objetivo é achar o espaço vetorial associado a $S_2(\lambda)$. Para isto, lembramos da chamada "identidade fundamental " que estabelece que a seqüência

$$0 \to E \otimes (TM \odot TM)^* \to^{\gamma} J_2E \to^{\rho_1^2} J_1E \to 0$$

é exata ([31],[24]).

Lema 3.1.4 *O espaço vetorial associado ao espaço afim $S_2(\lambda)$ é o espaço das seções do fibrado vetorial*

$$Hom((TM \odot TM), Hom(E, E))$$

Demonstração: Sejam $\lambda', \lambda'' \in S_2(\lambda)$. Como $\rho_1^2(\lambda' - \lambda'') = 0$ a imagem de $\lambda' - \lambda''$ esta contida em $\ker \rho_1^2$. Logo $\lambda' - \lambda''$ pode-se considerar como um morfismo $\lambda' - \lambda'' : E \to \ker \rho_1^2$. Da identidade fundamental temos que γ é injetora e que $\ker \rho_1^2 = \mathrm{im}\gamma$. Logo, podemos considerar $\lambda' - \lambda''$ como um morfismo $\lambda' - \lambda'' : E \to E \otimes (TM \odot TM)^*$. Isto mostra, que $\lambda' - \lambda''$ é uma seção de

$$Hom((TM \odot TM), Hom(E, E))$$

□

Seja E um fibrado vetorial, denotamos por BE o fibrado principal das bases de E. Mostraremos que toda 2-surconexão λ para E é da forma $\lambda_E(\mathbf{H})$ para alguma 2-conexão $\mathbf{H}$ para BE. Este é o conteúdo da seguinte proposição, que é uma adaptação de um resultado de N. Van Que [36].

proposição 3.1.4 *Seja E um fibrado vetorial. Então*

$$\lambda_E : C_2(BE) \to S_2(E)$$

é uma bijeção.

Demonstração: Seja $\rho : E \to J_2E$ uma 2-surconexão para E. Seja $p = [e_1, ..., e_n] \in BE_x$, existem $s^1, ..., s^n$ seções locais de E tais que $\rho(e_i) = j^2_x s^i$ para $i = 1, ..., n$. Definimos $H(\rho)_p = [s^1, ..., s^n]_*(x) : \tau_x M \to \tau_p BE$. Obviamente $H(\rho)_p$ só depende de $\{j^2_x s^1, ..., j^2_x s^n\}$. Logo $H(\rho)_p$ esta bem definida.

Provemos que $H(\rho)_{pg} = R_{g*} \circ H(\rho)_p$ para todo $g \in Gl(n)$. De fato, como

$$p.g \;=\; [e_1, ..., e_n].g \;=\; [g^{i1}e_i, ..., g^{in}e_i]$$

e $\rho(g^{ij}e_i) = g^{ij}\rho(e_i) = g^{ij}j^k_x s^i = j^k_x g^{ij} s^i$, temos que

$$H(\rho)_{pg} \;=\; [g^{i1}s^i, ..., g^{in}s^i]_*(x) \;=\; [s^1, ..., s^n].g_*(x) \;=\; R_{g*} \circ H(\rho)_p$$

Assim $\mathbf{H}(\rho) = \{H(\rho)_p : p \in P\}$ é uma 2-conexão para BE. Observamos que $\lambda_E(\mathbf{H}(\rho)) = \rho$. Pois, se $e = \alpha^i e_i \in E_x$

$$\begin{aligned}
\lambda_E(\mathbf{H}(\rho))(e) &= \lambda_E(\mathbf{H}(\rho))(\alpha^i e_i) \\
&= \alpha^i \lambda_E(\mathbf{H}(\rho))(e_i) \\
&= \alpha^i j_x^2 s^i \\
&= \alpha^i \rho(e_i) \\
&= \rho(e)
\end{aligned}$$

Isto é, λ_E é sobrejetora.

Resta provar que λ_E é injetora. Suponhamos o contrario, isto é, existem $\mathbf{T}, \mathbf{H} \in C_2(BE)$ e $p = [e_1, \ldots, e_n] \in BE_x$ tais que $H_p \neq T_p$ e $\lambda_E(\mathbf{T}) = \lambda_E(\mathbf{H})$. Logo $\lambda_E^1(\mathbf{T}) = \lambda_E^1(\mathbf{H})$ então as 1-conexões induzidas $\mathbf{T}^1$e $\mathbf{H}^1$ são iguais, assim existe $\Phi \in C_2(\mathbf{T}^1 = \mathbf{H}^1)$ tal que $\Phi \bullet \mathbf{H} = \mathbf{T}$, isto implica que $T_p = H_p + \gamma_p \circ \tilde{\Phi}_p$. Como $\mathbf{T}_e^E = \mathbf{H}_e^E$ para todo $e \in E$, temos que para todo $\zeta \in F$, $(F_\zeta)_*(p) \circ T_p = (F_\zeta)_*(p) \circ H_p$ isto é possível só no caso que

$$(F_\zeta)_*(p) \circ \gamma_p \circ \tilde{\Phi}_p = 0$$

Como isto acontece se e só se $\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\; p \exp t\tilde{\Phi}_p = 0$ ou seja se $\Phi_p = 0$. Resulta que $H_p = T_p$. Assim λ_E é injetora. □

Corolario 3.1.5 *Seja E um fibrado vetorial e $\mathbf{S}$ uma 1-conexão para BE. Então*

$$\lambda_E : C_2(\mathbf{S}) \longrightarrow S_2(\lambda_E(\mathbf{S})) \textit{ é um isomorfismo afim.}$$

Demonstração: Sejam $\mathbf{H}, \mathbf{H}' \in C_2(\mathbf{S})$, $a \in IR$, $e \in E_x$ e $p \in P_x$. Então existem s, s' e s'' seções locais de P tais que $H_p = s_*(x)$, $H'_p = s'_*(x)$ e $(aH + (1-a)H')_p = s''_*(x)$ respectivamente.

Seja $\xi \in F$ tal que $F_\xi(p) = \epsilon$. Como

$$\begin{aligned} \lambda_E(a\mathbf{H} + (1-a)\mathbf{H}') &= j_x^2 F_\zeta \circ s'' \\ &= a j_x^2 F_\zeta \circ s + (1-a) j_x^2 F_\zeta \circ s' \\ &= a\lambda_E(\mathbf{H}) + (1-a)\lambda_E(\mathbf{H}') \end{aligned}$$

da proposição anterior segue-se que λ_E é bijetora, logo é um isomorfismo afim. □

A seguir, estenderemos o enfoque de Koszul da teoria de conexões clássica para as 2-conexões. Isto é, reformulamos a teoria de 2-conexões para fibrados vetoriais em termos de certos operadores de derivada covariante. Começamos com a seguinte

Definição 3.1.7 *Seja E um fibrado vetorial sobre M. Um operador $\nabla : \Gamma(\tau M) \times \Gamma E \rightarrow \Gamma E$ é dito um 2-operador de derivada covariante para E (abreviadamente, 2-odc para E) se satisfaz:*

Para quaisquer $L, T \in \Gamma(\tau M)$, $\phi, \psi \in \Gamma E$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$

i) $\nabla_{L+T}\phi = \nabla_L\phi + \nabla_T\phi$

ii) $\nabla_{fL}\phi = f\nabla_L\phi$

iii) $\nabla_L(\phi + \psi) = \nabla_L\phi + \nabla_L\psi$

iv) $\nabla_L f\phi = L(f)\phi + f\nabla_L\phi + 2\nabla_{Q(L,f)}\phi$. *Onde* $Q(L,f)(g) = \frac{1}{2}(L(fg) - fL(g) - gL(f))$

Chamamos a $\nabla_L\phi$ de a 2-derivada covariante de ϕ em relação a L.

É imediata a partir da definição a seguinte observação

observação 3.1.8 :

1) iv)da definição é uma regra de Leibnitz de segundo ordem.

2) Todo 2-operador de derivada covariante ∇ induze um 1-operador de derivada covariante $\nabla^1 = \nabla \mid \Gamma(TM) \times \Gamma(E)$. Chamamos a ∇^1 de induzido por ∇.

3) Seja $Cd_2(E)$ o conjunto dos 2-odc para E. Este conjunto tem uma estrutura natural de espaço afim.

4) Seja D um 1-odc para E e

$$Cd_2(D) = \{\nabla \in Cd_2(E) : \nabla^1 = D\}$$

este conjunto é naturalmente um espaço afim. O espaço vetorial associado é o espaço das seções de $Hom(TM \odot TM, Hom(E, E))$, que é isomorfo com $\Gamma_0(Hom(\tau M, Hom(E, E)) = \{\phi \in \Gamma(Hom(\tau M, Hom(E, E)) : \phi_x \mid T_xM = 0\}$.

A seguir, mostramos como construir 2-odc em fibrados associados a partir de 2-conexões em fibrados principais.

Lembremos dos seguintes fatos básicos sobre seções de fibrados associados [21]. Pode-se associar com cada $\sigma \in \Gamma(E)$ uma função $F[\sigma] : P \to F$ definida por $F[\sigma](p) = p^{-1}\sigma(\pi p)$. Onde cada $p \in P$ é considerado como uma aplicação linear $p : F \to E_{\pi p}$. Observemos que $F[\sigma]$ satisfaz $F[\sigma] \circ R_g = \lambda_{g^{-1}} \circ F[\sigma]$ para todo $g \in G$. Reciprocamente, se uma função $f : P \to F$ satisfaz $f \circ R_g = \lambda_{g^{-1}} \circ f$ para todo $g \in G$, então ela define uma seção de E, $S[f]$ por $S[f](x) = pf(p)$ para todo $p \in P$ tal que $\pi p = x$. Com as notações anteriores, temos que $F[S[f]] = f$ e $S[F[\sigma]] = \sigma$.

Agora podemos mostrar a seguinte

proposição 3.1.7 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal, $\mathbf{H}$ uma 2-conexão para P e E um fibrado vetorial associado a P. Então $\nabla^{\mathbf{H}}$ definida por*

$$\nabla_L^{\mathbf{H}}\phi(\pi(p)) = S[(H_pL)F[\phi]]$$

é um 2-operador de derivada covariante para E.

Demonstração: Observamos que

$$Q(H_pL, f \circ \pi) = H_pQ(L, f)$$

para quaisquer $L \in \Gamma(\tau M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Pois

$$\begin{aligned} Q(H_pL, f\circ\pi) &= Q(H_pL)(f\circ\pi) \\ &= (H_p \otimes H_p)(QL)(f\circ\pi) \quad H_p \text{ é um morfismo de Schwartz} \end{aligned}$$

Por outro lado, para $g \in C^\infty(P)$ temos que

$$\begin{aligned} ((H_p \otimes H_p)(QL)(f\circ\pi))(g) &= (H_p \otimes H_p)(QL)(d(f\circ\pi), dg) \quad \text{definição} \\ &= QL(H_p^* d(f\circ\pi), H_p^* dg) \\ &= QL(df\circ\pi_*\circ H_p, H_p^* dg) \\ &= QL(df, H_p^* dg) \\ &= H_pQ(L, f)(g) \end{aligned}$$

Isto é $(H_p \otimes H_p)(QL) = H_pQ(L, f)$, logo $Q(H_pL, f\circ\pi) = H_pQ(L, f)$.

Agora provaremos que a expressão para $\nabla^{\mathbf{H}}$ do enunciado é bem definida.

De fato

$$\begin{aligned} F[\nabla_L^{\mathbf{H}}\phi]\circ R_g(p) &= F[\nabla_L^{\mathbf{H}}\phi](pg) \\ &= H_{pg}(L)F[\phi] && \text{definição} \\ &= ((R_g)_* H_pL)F[\phi] && \text{propriedades de } \mathbf{H} \\ &= H_pL(F[\phi]\circ R_g) \\ &= H_pL(\lambda_{g^{-1}}\circ F[\phi]) && \text{propriedades de } F[\phi] \\ &= \lambda_{g^{-1}}\circ (H_pL)F[\phi] && \lambda_{g^{-1}} \text{ é linear} \\ &= \lambda_{g^{-1}}\circ F[\nabla_L^{\mathbf{H}}\phi] && \text{definição} \end{aligned}$$

de onde $\nabla_L^{\mathbf{H}}\phi \in \Gamma E$.

Agora mostraremos que $\nabla^{\mathbf{H}}$ satisfaz as propriedades que definem um 2-odc, como i)-iii) são obvias. Só temos que verificar iv)

$$\begin{aligned}
F[\nabla_L^{\mathbf{H}} f\phi](p) &= (H_pL)(f\circ\pi)F[\phi] \\
&= ((H_pL)f\circ\pi)F[\phi] + f\circ\pi(H_pL)F[\phi] + 2Q(HL, f\circ\pi)_pF[\phi] \\
&= (H_pL(f\circ\pi))F[\phi] + f\circ\pi(H_pL)F[\phi] + 2H_pQ(L,f)F[\phi] \\
&= F[Lf\phi + f\nabla_L^{\mathbf{H}}\phi + 2\nabla_{Q(L,f)}^{\mathbf{H}}\phi](p)
\end{aligned}$$

□

Nosso próximo objetivo é formular, no contexto das 2-conexões o seguinte resultado de geometria diferencial: Seja E um fibrado vetorial. Então $\nabla : C_1(BE) \to Cd_1(E)$ definida por $\mathbf{H} \to \nabla^{\mathbf{H}}$ é um isomorfismo afim. Começaremos, mostrando que existe um prolongamento de 1-odc a 2-odc que corresponde ao prolongamento de Stratonovich de 1-conexões.

Lema 3.1.8 *Seja ∇ um 1-odc para E. Então existe um único 2-odc para E, ∇^S tal que*

1- ∇ é induzido por ∇^S

2- $\nabla^S\{X,Y\}\phi = \{\nabla_X,\nabla_Y\}\phi$ para quaisquer $X,Y \in \Gamma(TM)$ e $\phi \in \Gamma(E)$

∇^S é dito o prolongamento de Stratonovich de ∇.

Demonstração: Seja ∇ um 1-odc, então[21] existe uma única $\mathbf{H} \in \mathbf{C}_1(BE)$ tal que $\nabla^{\mathbf{H}}=\nabla$. Definimos ∇^S como $\nabla^{\mathbf{H}^S}$.

∇^S satisfaz 1- e 2-.

Com efeito, sejam $X \in \Gamma(TM)$ e $\phi \in \Gamma(E)$ como

$$\begin{aligned}
\nabla^S_X \phi(\pi p) &= \nabla^{\mathbf{H}^S}_X \phi(\pi p) \\
&= S[(\mathbf{H}^S_p X)F[\phi]](\pi p) \\
&= S[(\mathbf{H}_p X)F[\phi]](\pi p) \\
&= (\nabla^{\mathbf{H}}_1)_X \phi(\pi p) \\
&= \nabla_X \phi(\pi p)
\end{aligned}$$

temos que ∇ é induzida por ∇^S.

Sejam $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\phi \in \Gamma(E)$. Como

$$\begin{aligned}
\nabla^S_{\{X,Y\}} \phi(\pi p) &= S[(\mathbf{H}^S_p \{X, Y\})F[\phi]](\pi p) \\
&= S[\{\mathbf{H}X, \mathbf{H}Y\}_p F[\phi]](\pi p) \\
&= S[\{\mathbf{H}^S X, \mathbf{H}^S Y\}_p F[\phi]](\pi p) \\
&= \{\nabla^S_X, \nabla^S_Y\} \phi(\pi p)
\end{aligned}$$

Agora mostraremos que ∇^S é único em estas condições.

Seja $\overline{\nabla}$ um 2-odc que satisfaz 1 e 2. Então em coordenadas locais

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_L \phi(\pi p) &= \overline{\nabla}_{l^{ij} D_{ij} + l^i D_i} \phi(\pi p) \\
&= l^{ij} \overline{\nabla}_{D_{ij}} \phi(\pi p) + l^i \overline{\nabla}_{D_i} \phi(\pi p) \\
&= l^{ij} \overline{\nabla}_{\{D_i, D_j\}} \phi(\pi p) + l^i \overline{\nabla}_{D_i} \phi(\pi p) \\
&= l^{ij} \{\nabla_{D_i}, \nabla_{D_j}\} \phi(\pi p) + l^i \nabla_{D_i} \phi(\pi p) \\
&= \nabla^S_L \phi(\pi p)
\end{aligned}$$

Logo ∇^S é único. □

Agora é possível provar o seguinte

Teorema 3.1.9 *Sejam E um fibrado vetorial e $\mathbf{S}$ uma 1-conexão para BE. Então a aplicação $\nabla : C_2(\mathbf{S}) \to Cd_2(\nabla^{\mathbf{S}})$ é um isomorfismo afim.*

Demonstração: Começamos mostrando que ∇ é um morfismo afim. Sejam $\mathbf{H}, \mathbf{T} \in C_2(\mathbf{S})$ e $\lambda \in I\!R$. Então para $\phi \in \Gamma(E)$ e $L \in \Gamma(\tau M)$

$$\begin{aligned}
\nabla_L^{\lambda\mathbf{H}+(1-\lambda)\mathbf{T}}\phi(\pi p) &= S[((\lambda H + (1-\lambda)T)_p L)F[\phi]] \\
&= S[(\lambda H_p L + (1-\lambda)T_p L)F[\phi]] \\
&= S[\lambda(H_p L)F[\phi] + (1-\lambda)(T_p L)F[\phi]] \\
&= \lambda S[(H_p L)F[\phi]] + (1-\lambda)S[(T_p L)F[\phi]] \\
&= \lambda\nabla_L^{\mathbf{H}}\phi(\pi p) + (1-\lambda)\nabla_L^{\mathbf{T}}\phi(\pi p)
\end{aligned}$$

Logo ∇ é um morfismo afim. E como $\nabla^{\mathbf{S}^S} = (\nabla^{\mathbf{S}})^S$

$$\nabla(\mathbf{H}) = (\nabla^{\mathbf{S}})^S + \mathbb{T}(\mathbf{H} - \mathbf{S}^S)$$

Onde $\mathbb{T} : A_{h,0}^e(BE) \to \Gamma_0(Hom(\tau M, Hom(E,E)))$ é definida por $\mathbb{T}(\phi)(L)(\epsilon) = -p(\phi_p^* \circ Q_{\pi p}L)p^{-1}\epsilon$, onde $p \in BE$, $L \in \tau_{\pi p}M$, $\epsilon \in E_{\pi p}$ e $\phi_p^* : T_{\pi p}M \odot T_{\pi p}M \to \mathbf{gl}(n, I\!R)$ é a única aplicação linear tal que $\phi_p = \phi_p^* \circ (\pi_* \odot \pi_*)(p)$. Ela é dada pelo teorema do isomorfismo já que $Ker(\pi_* \odot \pi_*)(p) \subset Ker\phi_p$. Mostremos que esta definição é bôa.

1). $\mathbb{T}(\phi)(L)(\epsilon)$ depende só de πp. Com efeito

$$\begin{aligned}
-(pg)(\phi_{pg}^* \circ Q_{\pi(pg)}L)(pg)^{-1}\epsilon &= -p[g(\phi_{pg}^* \circ Q_{\pi p}L)g^{-1}]p^{-1}\epsilon \\
&= -p[Ad(g)(\phi_{pg}^* \circ Q_{\pi p}L)]p^{-1}\epsilon \\
&= -p[Ad(g) \circ Ad(g^{-1})(\phi_p^* \circ Q_{\pi p}L)]p^{-1}\epsilon \\
&= -p(\phi_p^* \circ Q_{\pi p}L)p^{-1}\epsilon
\end{aligned}$$

2). $\mathbb{T}_{\pi p}(\phi_p) : \tau_{\pi p}M \to Hom(E,E)_{\pi p}$ é linear. Sejam $L, S \in \tau_{\pi p}M$ e $\lambda \in I\!R$. Então para qualquer $\epsilon \in E_{\pi p}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{\pi p}(\phi_p)(L + \lambda S)(\epsilon) &= -p(\phi_p^* \circ Q_{\pi p}(L + \lambda S))p^{-1}\epsilon \\
&= -p(\phi_p^* \circ Q_{\pi p}L + \lambda\phi_p^* \circ Q_{\pi p}S)p^{-1}\epsilon \\
&= \mathbb{T}_{\pi p}(\phi_p)(L)(\epsilon) + \lambda\mathbb{T}_{\pi p}(\phi_p)(S)(\epsilon)
\end{aligned}$$

Logo a definição é bõa.

Obviamente, $\mathbb{T} : A^e_{h,0}(BE) \longrightarrow \Gamma_0(Hom(\tau M, Hom(E,E)))$ é linear. Só nos resta provar, que é um isomorfismo. Para isto, suponhamos existe $\phi \in A^e_{h,0}(BE)$ tal que $\mathbb{T}(\phi) = 0$. Então $\phi^*_p \circ Q_{\pi p}S = 0$ para todo $p \in P$ e $S \in \tau_{\pi p}M$, logo $\phi^*_p = 0$ para todo $p \in BE$. Assim $\phi_p = \phi^*_p \circ (\pi_* \odot \pi_*)(p) = 0$. Isto é $\mathbb{T}$ é um monomorfismo. Para $\Psi \in \Gamma_0(Hom(\tau M, Hom(E,E)))$ definamos $\eta_p : \tau_{\pi p}M \longrightarrow \mathbf{gl}(n, I\!R)$ por $\eta_p(S) = -p^{-1}\Psi_{\pi p}(S)p$. Como $Q_{\pi p} : \tau_{\pi p}M \longrightarrow T_{\pi p}M \odot T_{\pi p}M$ é sobrejetor e $KerQ_{\pi p} \subset Ker(\eta_p)$ pelo teorema do isomorfismo existe um único $\phi^*_p : T_{\pi p}M \odot T_{\pi p}M \rightarrow \mathbf{gl}(n, I\!R)$ tal que $\eta_p = \phi^*_p \circ Q_{\pi p}$. Como

$$\begin{aligned}
\eta_{pg}(S) &= -(pg)^{-1}\Psi_{\pi pg}(S)(pg) \\
&= g^{-1}[-p^{-1}\Psi_{\pi p}(S)p]g \\
&= Ad(g^{-1})[-p^{-1}\Psi_{\pi p}(S)p] \\
&= Ad(g^{-1})\eta_p(S)
\end{aligned}$$

Resulta que $\phi^*_{pg} = Ad(g^{-1})\phi^*_p$. Logo $\phi_p : T_{\pi p}BE \odot T_{\pi p}BE \rightarrow \mathbf{gl}(n, I\!R)$ definida por $\phi_p = \phi^*_p \circ (\pi_* \odot \pi_*)(p)$ satisfaz $\phi_{pg} \circ R_{g*} \odot R_{g*} = Ad(g^{-1}) \circ \phi_p$ e obviamente $\phi_p \mid Ker(\pi_* \odot \pi_*)(p) = 0$. Assim $\phi \in A^e_{h,0}(BE)$. Agora da definição de ϕ segue-se que para todo $S \in \tau_{\pi p}M$ e $\epsilon \in E_{\pi p}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{\pi p}(\phi_p)(S)(\epsilon) &= -p(\phi^*_p \circ Q_{\pi p}L)p^{-1}\epsilon \\
&= -p\eta_p(S)p^{-1}\epsilon \\
&= pp^{-1}\Psi_{\pi p}(S)pp^{-1}\epsilon \\
&= \Psi_{\pi p}(S)\epsilon
\end{aligned}$$

Isto é $\mathbb{T}(\phi) = \Psi$. Assim $\mathbb{T}$ é sobrejetora. Concluimos então que $\mathbb{T}$ é um isomorfismo. $\square$

A seguir, obteremos uma expressão dos 2-odc em termos do transporte paralelo de difusões.

Sejam E um fibrado vetorial, ∇ um 2-odc para E e $\mathbf{H}$ a única 2-conexão para BE tal que $\nabla^{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$. Naturalmente, podemos definir um transporte paralelo em E sobre M-semimartingales.

Com efeito, sejam X um M-semimartingale começando em $x \in M$, $\epsilon \in E$ definimos o transporte paralelo de ϵ ao longo de X como, $\mathrm{P}^{\nabla}_{X_t}(\epsilon) = \widetilde{X}_t \cdot f$ onde $\widetilde{X}$ o levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathbf{H}$ começando em $p \in P$ e f é tal que $p \cdot f = \epsilon$. Não é difícil mostrar, que a definição é bõa, e que $\mathrm{P}^{\nabla}_{X_t(\omega)} : E_x \to E_{X_t(\omega)}$ é q.s. um isomorfismo linear.

proposição 3.1.10 *Sejam E um fibrado vetorial, ∇ um 2-odc, $L \in \Gamma(\tau M)$, $\varphi \in \Gamma(E)$ e X uma difusão com gerador infinitesimal L inicializada em x. Então*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathbf{E}[(\mathrm{P}^{\nabla}_{X_t})^{-1}\varphi \circ X_t] = \nabla_L \varphi(x$$

Demonstração: Pela definição, temos que

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}^{\nabla}_{X_t})^{-1}\varphi \circ X_t &= p\widetilde{X}_t^{-1}(\varphi \circ X_t) \\ &= pF[\varphi](\widetilde{X}_t)\end{aligned}$$

Como $\widetilde{X}$ é uma HL-difusão

$$F[\varphi](\widetilde{X}_t) - F[\varphi](p) = \text{local martingale} + \int_0^t HL(F[\varphi])(\widetilde{X}_t)dt$$

Então

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\big|_{t=0} \mathbf{E}[(\mathrm{P}^{\nabla}_{X_t})^{-1}\varphi \circ X_t] &= \lim_{t\to 0} \mathbf{E}[p\tfrac{F[\varphi](\widetilde{X}_t)-F[\varphi](p)}{t}] \\ &= \lim_{t\to 0} p\mathbf{E}[\tfrac{1}{t}\int_0^t HL(F[\varphi])(\widetilde{X}_t)dt] \\ &= pHL(F[\varphi])(p) \\ &= \nabla_L\varphi(x)\end{aligned}$$

□

Uma noção matemática central da mecânica estocástica é a derivada forward de Nelson. Esta derivada é definida em termos de um transporte paralelo de vetores tangentes ao longo de difusões, introduzido por D.Dorhn e F.Guerra [6],[1, pg. 78].

É interessante notar que esta derivada no tempo $t = 0$ é um 2-operador de derivada covariante no fibrado tangente. Esta ultima afirmação é conseqüência de nossa caracterização dos 2-odc em termos do transporte paralelo de difusões. Com efeito, seja Γ uma conexão sem torsão de M e X uma difusão em M com g.i. L, P. Meyer provo [30, pg. 184-185] que o transporte paralelo estocástico de Dorhn -Guerra $\mathrm{P}^{DG}_{X_t}(e)$ de $e \in T_xM$ ao longo de X e dado por $\widetilde{X_t} \cdot f$ onde f é tal que $p \cdot f = e$ e $\widetilde{X}$ o levantamento horizontal estocástico de X começando em p em relação da 2-conexão de BM, $\mathbf{DG} = \mathbf{\Gamma}^{\Gamma^C}$(Onde Γ^C é o "complete lift" de Γ [4] e $\mathbf{\Gamma}$ é Γ vista como uma 1-conexão de BM). Por definicão, a derivada forward de Nelson do campo de vetores tangente φ ao longo de X em $t = 0$ é dada por

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\, \mathbf{E}[(\mathrm{P}^{DG}_{X_t})^{-1}\varphi \circ X_t]$$

logo, da caracterização dos 2-odc em termos do transporte paralelo de difusões, obtemos que a derivada forward de Nelson de φ ao longo de X em $t = 0$ é dada por $\nabla^{\mathbf{DG}}_L\varphi(x)$.

3.2 Paralelismo Estocástico

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com projeção $\pi : P \to M$ e $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ um espaço de probabilidade filtrado. Denotamos por $S(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P})$ o conjunto dos pares (X, B) onde X é uma difusão em M e B é uma $\mathcal{F}_0$-v.a. com valores em P tal que $\pi B = X_0$.

O paralelismo estocástico de difusões é definido como uma aplicação

$$\mathrm{H} : S(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P}) \to \{\text{difusões para } (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbf{P}) \text{ em } P\}$$

que verifica:

$A0)$ $\mathrm{H}_0(X, B) = B$ q.s.

$A1)$ $\pi \circ \mathrm{H}(X, B) = X$ q.s.

$A2)$ $R_g \mathrm{H}(X, B) = \mathrm{H}(X, R_g B)$.

$A3)$ Se X é um processo com variação limitada (V.L. processo) então $\mathrm{H}(X, B)$ é um V.L. processo.

$A4)$ Se α é uma mudança deterministica do tempo, com $\alpha_0 = 0$ então

$$\mathrm{H}(X \circ \alpha, B) = \mathrm{H}(X, B) \circ \alpha$$

$A5)$ Seja X uma difusão e $a \in I\!R_{\geq 0}$ e $X_t^a = X_{a+t}$ então

$$\mathrm{H}(X^a, \mathrm{H}(X, B)_a) = \mathrm{H}(X, B)^a$$

$A6)$ Seja $\Upsilon \in \mathcal{F}_0$ tal que $\mathbf{P}(\Upsilon) > 0$, então

$$\mathrm{H}(X, B)\mid_\Upsilon = \mathrm{H}(X\mid_\Upsilon, B\mid_\Upsilon)$$

$A7)$ Sejam $Y^n[Y]$ difusões em M com g.i. $R^n[S]$, $B^n[B]$ P-v.a. tais que $Y_0^n = \pi B^n[Y = \pi B]$. Se $\lim_{n\to\infty} B^n = B$ e $\lim_{n\to\infty} R^n_{\pi B^n(\omega)} = S_{\pi B(\omega)}$ q.s. Então $\lim_{n\to\infty} T^n_{B^n(\omega)} = R_{B(\omega)}$ q.s., onde $T^n[R]$ é o g.i. de $\mathrm{H}(Y^n, B^n)[\mathrm{H}(Y, B)]$.

Como corolario de A7) obtemos:

$[B]$ Sejam X e Y difusões com g.i. L e S respectivamente, tais que $X_0 = Y_0$. Se $L_{X_0} = S_{Y_0}$ q.s., e T $[R]$ é o g.i de $\mathrm{H}(X, B)[\mathrm{H}(Y, B)]$, então $T_B = R_B$ q.s.

Com efeito, seja $Y^n = X$ e $B^n = B$, obviamente $\lim_{n\to\infty} B^n = B$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} R^n_{\pi B^n(\omega)} &= L_{\pi B(\omega)} \\
&= L_{X_0(\omega)} \\
&= S_{Y_0(\omega)} \\
&= S_{\pi B(\omega)}
\end{aligned}$$

então de A7) segue-se que $T_{B(\omega)} = \lim_{n\to\infty} T^n_{B^n(\omega)} = R_{B(\omega)}$.

Não é dificíl de mostrar que todo levantamento horizontal estocástico em relação a uma 2-conexão para P verifica A0) - A7). De fato, seja $\mathrm{H}(X, B)$ o levantamento horizontal estocástico em relação a uma 2-conexão $\mathbf{H}$, então A0) e A1) são óbvios.

Para provar A2). Seja $Y = \mathrm{H}(X, B)$, então Y é solução de

$$\begin{aligned}
d_2Y &= \mathbf{H}(Y)d_2X \\
Y_0 &= B
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
d_2R_gY &= R_{g*}d_2Y \\
&= R_{g*}\mathbf{H}(Y)d_2X \\
&= \mathbf{H}(R_gY)d_2X
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{H}(X, R_gB)$ é a única solução de

$$\begin{aligned}
d_2Y &= \mathbf{H}(Y)d_2X \\
Y_0 &= R_gB
\end{aligned}$$

obtemos que $R_g\mathrm{H}(X, B) = \mathrm{H}(X, R_gB)$.

A3) segue de propriedades das equações diferenciais estocásticas.

Para provar A4), seja $\theta \in \Gamma(\tau P)$. Como

$$\begin{aligned}
\int_0^t \langle \theta, d_2(\mathrm{H}(X,B)\circ\alpha)\rangle &= \int_0^{\alpha_t} \langle \theta, d_2(\mathrm{H}(X,B))\rangle \\
&= \int_0^{\alpha_t} \langle \mathbf{H}^*\theta, d_2X\rangle \\
&= \int_0^t \langle \mathbf{H}^*\theta, d_2(X\circ\alpha)\rangle
\end{aligned}$$

obtemos que $\mathrm{H}(X,B)\circ\alpha$ satisfaz

$$\begin{aligned}
d_2Y &= \mathbf{H}(Y)d_2(X\circ\alpha) \\
Y_0 &= B
\end{aligned}$$

Isto é $\mathrm{H}(X\circ\alpha, B) = \mathrm{H}(X,B)\circ\alpha$.

A5) é análogo com A4), A6) é conseqüência do lema ??. Pois $\pi\circ\mathrm{H}(X,B)\mid_\Upsilon = X\mid_\Upsilon$ e $\mathrm{H}(X,B)\mid_\Upsilon$e $\mathrm{H}(X\mid_\Upsilon, B\mid_\Upsilon)$ tem o mesmo g.i.

A7) segue-se do fato que o g.i de $\mathrm{H}(Y^n, B^n)[\ \mathrm{H}(Y,B)]$ é $HR^n[HS]$ e da continuidade de H.

Estamos interessados em mostrar a reciproca da observação anterior, isto é, todo paralelismo estocástico de difusões em P de um certo tipo, é dado por um levantamento horizontal estocástico em relação a uma 2-conexão para P.

Seja $P(M,G)$ um fibrado principal e H um paralelismo estocastico de difusões em P.

Definição 3.2.1 *Seja $A\in\tau_xM$ parabolico e X uma difusão para $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbf{P})$ inicializada em x com g.i. L e tal que $L_x = A$ (uma tal difusão sempre existe ver por exemplo [16]). Para $p\in\pi^{-1}(x)$ nos definimos $\mathcal{L}_p(A)$ como o g.i. de $\mathrm{H}(X,p)$ evaluado em p.*

Mostremos que $\mathcal{L}_p$ é bem definido.

De fato, seja Y uma difusão para $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbf{P})$ inicializada em x com g.i. S tal que $S_x = A$. Seja também R o g.i. de $\mathrm{H}(Y,p)$ e T o g.i. de $\mathrm{H}(X,p$ então de [B] segue-se que $\mathcal{L}_p(A) = T_p = R_p$, isto é a definição de $\mathcal{L}_p$ só depende de $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbf{P})$.

Agora, seja $\overline{X}$ uma difusão para $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},(\overline{\mathcal{F}}_t),\overline{\mathbf{P}})$ com g.i L inicalizada em x. Podemos considerar que $\Omega \cap \overline{\Omega} = \phi$. Sejam $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \overline{\Omega}$, $\widetilde{\mathcal{F}}_t = \{a \cup b \,:\, a \in \mathcal{F}_t \,, b \in \overline{\mathcal{F}}_t\}$ e $\widetilde{\mathbf{P}}(a \cup b) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(a) + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{P}}(b)$, definamos $\widetilde{X_t}(\omega) = \begin{cases} X_t(\omega) & \text{for } \omega \in \Omega \\ \overline{X}_t(\omega) & \text{for } \omega \in \overline{\Omega} \end{cases}$ este processo é uma difusão para $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathbf{P}})$ com g.i L. De A6) obtemos, que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}(\widetilde{X}, p)\,|_{\Omega} &= \mathrm{H}(X, p) \\
\mathrm{H}(\widetilde{X}, p)\,|_{\overline{\Omega}} &= \mathrm{H}(\overline{X}, p)
\end{aligned}
$$

Seja K o g.i de $\mathrm{H}(\widetilde{X}, p)$. Então K é o g.i de $\mathrm{H}(X, p)$ e $\mathrm{H}(\overline{X}, p)$. Logo $\mathcal{L}_p$ é independente do espaço de probabilidade filtrado. Provamos assim que $\mathcal{L}_p$ esta bem definida.

proposição 3.2.2 *Sejam $p \in \pi^{-1}(x)$, $A, B \in \tau_x(M)$ parabolicos e $\lambda \in I\!R_{\geq 0}$. Então*

1. $\pi_*(\mathcal{L}_p A) = A$.

2. $\mathcal{L}_p(\lambda A) = \lambda \mathcal{L}_p(A)$.

3. $\mathcal{L}_{pg} A = R_{g*} \mathcal{L}_p A$.

4. Se $A \in T_x M$ então $\mathcal{L}_p A \in T_p P$.

Demonstração:

1. Seja X uma difusão inicializada em x com g.i. L e tal que $L_x = A$. Segue-se de A1), que $\pi(\mathrm{H}(X, p)) = X$. Se R é o g.i. de $\mathrm{H}(X, p)$ sabe-se, que $\pi_* R = L \circ \pi$. Em particular: $\pi_*(\mathcal{L}_p A) = \pi_*(R_p) = L_x = A$.

2. Seja X uma difusão inicializada em x com g.i. L tal que $L_x = A$. E seja R o g.i. de $\mathrm{H}(X, p)$. Se θ é uma mudança do tempo definida por $\theta(t) = \lambda t$. Então $Y = X \circ \theta$ é uma difusão para $(\Omega, \mathcal{F}_{\lambda t}, \mathbf{P})$ com g.i. λL. De A4)

$$
\mathrm{H}(Y, p) \;=\; \mathrm{H}(X \circ \theta, p) \;=\; \mathrm{H}(X, p) \circ \theta \,.
$$

De onde $H(Y,p)$ é uma difusão com g.i. λR. Assim pela definição de $\mathcal{L}_p$

$$\mathcal{L}_p(\lambda A) = \lambda R_p = \lambda \mathcal{L}_p A.$$

3. Seja X uma difusão inicializada em x com g.i. L, tal que $L_x = A$. Segue-se de A2) que $R_g H(X,p) = H(X,pg)$. Logo da definição de $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_{pg} A = R_{g*}(\mathcal{L}_p A)$.

4. Seja $A \in T_x M$, B um campo de M tal que $B_x = A$ e X a curva integral de B tal que $X_0 = x$. Como X é um V.L. processo segue-se de A3) que $H(X,p)$ é um V.L. processo. Logo o g.i. de $H(X,p)$ é um operador diferenciável de primer ordem, assim $\mathcal{L}_p A \in T_p P$.

□

proposição 3.2.3 *Se X é uma difusão com g.i. L. Então $H(X,B)$ é uma difusão com g.i. $\mathcal{L}L$.*

Demonstração: Mostremos primeiro, que se X é uma difusão com g.i. S e R é o g.i. de $H(X,B)$, então $R_B = \mathcal{L}_B S$ q.s., onde $\mathcal{L}_B S(\omega) = \mathcal{L}_{B(\omega)} S$.

De fato. Seja $\{Y_y\}_{y \in M}$ uma familia de difusões com g.i. S, como Y_{X_0} é uma difusão com g.i. S e $(Y_{X_0})_0 = X_0$ de [B] segue-se, que $R_B = T_B$ onde T é o g.i. de $H(Y_{X_0}, B)$.

Seja B uma variável aleatória a valores em P simples (Isto é, $B = \sum p_i 1_{\alpha_i}$). De A6), segue-se que

$$\begin{aligned} H(Y_{X_0}, B) \mid \alpha_i &= H(Y_{X_0} \mid \alpha_i, B \mid \alpha_i) \\ &= H(Y_{\pi p_i}, p_i) \end{aligned}$$

Então $T_B \mid \alpha_i = \mathcal{L}_{p_i} S$. Isto é, $R_B = T_B = \mathcal{L}_B S$.

Agora, seja $B \in \mathcal{F}_0$ arbitraria. Existe $(B^n) \subset \mathcal{F}_0$ onde cada B^n é simples, tal que $\lim B^n = B$. Como S é o g.i. de $Y^n = Y_{\pi B^n}$, segue-se de A7), que se R^n é o g.i. de $H(Y^n, B^n)$ então $\lim_{n\to\infty}(\mathcal{L}_{B^n(\omega)} S = R^n_{B^n(\omega)}) = R_{B(\omega)}$ q.s.. Logo $R_B = \mathcal{L}_B S$.

Seja X uma difusão com g.i. L. De A5) segue-se, que para todo $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{H}(X^a, \mathrm{H}(X, B)_a) = \mathrm{H}(X, B)^a$. Como X^a é uma difusão com g.i. L, se R é o g.i. de $\mathrm{H}(X, B)$ então R é o g.i de $\mathrm{H}(X, B)^a$. Logo $R_{\mathrm{H}(X,B)^a} = \mathcal{L}_{\mathrm{H}(X,B)^a}L$. Isto é $\mathrm{H}(X, B)$ tem g.i. $\mathcal{L}L$. $\square$

Corolario 3.2.4 $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}_{p\in P}$ *é* $\mathcal{C}^\infty$.

Demonstração: Seja $L \in \Gamma(\tau M)$ e X uma difusão com g.i. L. Então $\mathrm{H}(X, B)$ é uma difusão com g.i. $\mathcal{L}L$, e como $\mathcal{L}L \in \Gamma(\tau P)$ resulta que $\mathcal{L}$ é $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Propomos o seguinte axioma,

A8) Sejam $A, B \in \tau_{\pi p}M$ parabólicos, então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(A + B) &= \mathcal{L}_pA + \mathcal{L}_pB. \\ Q\mathcal{L}_pA &= (\mathcal{L}_p \odot \mathcal{L}_p)QA \end{aligned}$$

Dizemos que um paralelismo estocástico de difusões H em P é um paralelismo estocástico axiomático de difusões em P se verifica A8). Neste caso, temos uma única extensão de $\mathcal{L}_p$ a uma transformação linear $\mathcal{L}_p : \tau_{\pi p}M \longrightarrow \tau_pP$ e obviamente, $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_p\}_{p\in P}$ é uma 2-conexão.

Finalmente

Teorema 3.2.5 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e* H *um paralelismo estocástico axiomático de difusões em P. Então existe uma unica 2-conexão $\mathcal{L}^{\mathrm{H}}$ tal que se $(X, B) \in S(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$, $\mathrm{H}(X, B)$ é o levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathcal{L}^{\mathrm{H}}$ inicializado em B.*

Demonstração: Seja $\mathcal{L}^{\mathrm{H}}$ definida como em 3.2.1, então $\mathcal{L}^{\mathrm{H}}$ é uma 2-conexão. Seja X uma difusão para $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ com g.i. S e B uma $\mathcal{F}_0$-v.a. tal que $\pi B = X_0$. Segue-se da proposição 3.2.3 que $\mathrm{H}(X, B)$ é uma difusão com g.i $\mathcal{L}^{\mathrm{H}}(S)$. Agora, pelo corolario 2.3.9 e a definição de H obtemos que $\mathrm{H}(X, B)$ é o levantamento horizontal estocástico de X em relação a $\mathcal{L}^{\mathrm{H}}$inicializado em B. $\square$

Capítulo 4

Geometria de H^2M

O objetivo deste capitulo é estudar as relações entre a geometria de Schwartz de H^1M e a geometria usual de H^2M.

Nós dividimos este capitulo em duas seções. Na primeira estabelecemos a existência de bijeções entre as 1-conexões de H^2M, as 2-conexões de H^1M e os transportes paralelos estocasticos em TM. Na segunda seção introduzimos de uma maneira natural um prolongamento $\Gamma \to \Gamma^1$ de 1-conexões sem torsão de H^1M a 1-conexões de H^2M, provamos que este prolongamento coincide com o prolongamento $p(\Gamma)$ definido por I. Kolar [22] e damos uma interpretação estocástica deste prolongamento em termos de transporte paralelo estocástico.

4.1 1-Conexões de H^2M e o Transporte Paralelo Estocastico em TM.

Nesta seção estudamos as 1-conexões de H^2M. Primeiro, mostramos a expressão em coordenadas locais do operador de derivada covariante associado a uma 1-conexão de H^2M. A partir desta expressão achamos a fórmula de mudança de coordenadas das componentes locais de uma 1-conexão em H^2M. Depois achamos a fórmula de mudança de coordenadas para as componentes locais das equações estocásticas lineares [30]. Mostramos que estas componentes locais são as componentes locais de uma 1-conexão de H^2M com sinal trocado. Isto estabelece. uma correspondência bijetora entre as 1-conexões de H^2M e os transportes paralelos estocásticos em TM. Finalmente, provamos que existe uma correspondência bijetora entre 1-conexões de H^2M e 2-conexões de H^1M.

Seja M uma variedade diferenciavel, e

$$H^2M = \left\{ j_0^2 s : s \text{ é um difeomorfismo local de } 0 \in I\!R^n \text{ em } M \right\}$$

o conjunto de 2-bases holonomicas de M, este conjunto é um fibrado principal com grupo estrutural

$$Gl^2 = \left\{ j_0^2 f : f \text{ é um difeomorfismo local em } 0 \text{ e } f(0) = 0 \right\}$$

e projeção $\pi^2 : H^2M \to M$ definida por $\pi^2(j_0^2 s) = s(0)$, onde a ação pela direita de Gl^2 em H^2M é dada por: $j_0^2 s \cdot j_0^2 f = j_0^2(s \circ f)$.

Lembremos que Gl^2 é um produto semidireto $Gl^2 = Gl(n) \propto S^2(n)$ onde $S^2(n)$ é o espaço vetorial real das formas bilineares simétricas de $I\!R^n$, $Gl(n)$ identifica-se ao subgrupo de Gl^2 $\{j_0^2 f \in Gl^2 : D_{ij} f^r(0) = 0 \text{ para } r, i, j = 1, ..., n\}$, e $S^2(n)$ ao subgrupo $\left\{ j_0^2 f \in Gl^2 : D_i f^j(0) = \delta_i^j \text{ para } i, j = 1, ..., n \right\}$. Em coordenadas locais se $\zeta = (\zeta_j^i, \zeta_{jk}^i)$ e $\eta = (\eta_j^i, \eta_{jk}^i) \in Gl^2$ o produto $\zeta\eta = (\lambda_j^i, \lambda_{jk}^i)$ é dado por

$$\begin{aligned} \lambda_j^i &= \zeta_s^i \eta_j^s \\ \lambda_{jk}^i &= \zeta_{rs}^i \eta_j^r \eta_k^s + \zeta_s^i \eta_{jk}^s \end{aligned}$$

e

$$\zeta^{-1} = (\overline{\zeta}_j^i, -\overline{\zeta}_s^i \zeta_{pq}^s \overline{\zeta}_j^p \overline{\zeta}_k^q)$$

onde $(\overline{\zeta}_j^i) = (\zeta_j^i)^{-1}$.

O fibrado dos vetores tangentes de ordem dos τM é um fibrado vetorial associado a

H^2M pela seguinte ação a esquerda de Gl^2 em $\tau_0 I\!R^n$

$$\begin{aligned} \zeta \cdot a &= (\zeta^i_j, \zeta^i_{jk}) \cdot (a^i D_i + a^{ij} D_{ij}) \\ &= (\zeta^i_k a^k + \zeta^i_{jk} a^{jk}) D_i + (\zeta^i_r \zeta^j_s a^{rs}) D_{ij} \end{aligned}$$

Temos um epimorfismo canônico de fibrados principais $\pi^2_1 : H^2M \to H^1M$, definido por: $\pi^2_1(j^2_0 s) = j^1_0 s$.

Seja Γ uma conexão em H^2M, e ω sua forma de conexão associada, então ω decompõe-se como

$$\omega = \omega_0 + \omega_1$$

onde ω_0 é a $\mathbf{gl}(n, I\!R)$ componente e ω_1a $S^2(n)$ componente de ω.

Sejam $\{E^i_j\}$ e $\{E^{ik}_j = E^{ki}_j\}$ as bases canônicas de $\mathbf{gl}(n, I\!R)$ e $S^2(n)$ respectivamente. E seja σ a seção local de H^2M dada por $\sigma(x) = (x^i, Id, 0)$ sobre (U, x^i). Definimos as funções Γ^i_{jk} e Γ^i_{jlk} em U $(\Gamma^i_{jkl} = \Gamma^i_{jlk})$ por

$$\sigma^* \omega_0 = (\Gamma^i_{jk} dx^j) E^k_i$$

$$\sigma^* \omega_1 = (\Gamma^i_{jkl} dx^j) E^{kl}_i$$

As funções Γ^i_{jk} , Γ^i_{jkl} são as componentes locais de Γ respeito a (U, x^i).

Seja $\widetilde{\Gamma}$ uma conexão em H^2M, como τM é um fibrado vetorial associado de H^2M podemos definir um operador de derivada covariante $\widetilde{\nabla}$ em τM [12, proposition 1.10].

A seguir, calcularemos $\widetilde{\nabla}$ em coordenadas locais.

Seja (U, x^i) uma carta local de M e $(\pi^{-1}(U), (x^i, x^i_j))$, $(\pi^{-1}(U), (x^i, x^i_j, x^i_{jk}))$ as cartas induzidas por (U, x^i) para H^1M e H^2M respectivamente. Sejam Γ uma conexão em H^1M e $\widetilde{\Gamma}$ uma conexão em H^2M. Sabe-se que [4] se $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_xM$, o levantamento horizontal de X tem a seguinte expressão em coordenadas locais

$$X^{H^1}(x^i,x^i_j) = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^r_{il}x^l_j\frac{\partial}{\partial x^r_j}\right)$$

$$X^{H^2}(x^i,x^i_j,x^i_{jk}) = X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^r_{il}x^l_j\frac{\partial}{\partial x^r_j}-(\Gamma^r_{il}x^l_{jk}+\Gamma^r_{ilm}x^l_jx^m_k)\frac{\partial}{\partial x^r_{jk}}\right)$$

Onde as Γ^i_{jk} são as componentes locais de Γ. E Γ^i_{jk} , Γ^i_{jkl} são as componentes locais de $\widetilde{\Gamma}$.

proposição 4.1.1 *Sejam (U,x^i) uma carta local de M e $A(x)=a^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}+a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\in\tau_xM$. Então*

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}}A(x) = (\frac{\partial a^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kj}a^j+\Gamma^i_{kjr}a^{jr})\frac{\partial}{\partial x^i}+(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^j_{ks}a^{is}+\Gamma^i_{ks}a^{sj})\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$$

Demonstração: Sejam $A\in\Gamma(\tau M)$ e $F_A : H^2M \to \tau_0I\!R^n$ dado por $F_A(p)=p^{-1}\cdot A(\pi(p))$. Se $A(x)=a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+a^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$ em (U,x^i), a expressão local de F_A em $(\pi^{-1}(U),(x^i,x^i_j,x^i_{jk}))$ é

$$\begin{aligned}F_A(x^i,x^i_j,x^i_{jk}) &= (x^i_j,x^i_{jk})^{-1}\cdot F_A(x^i,\delta^i_j,0)\\ &= (x^i_j,x^i_{jk})^{-1}\cdot[a^iD_i+a^{ij}D_{ij}]\\ &= (\overline{x}^i_sa^s-\overline{x}^i_sx^s_{pq}\overline{x}^p_j\overline{x}^q_ka^{jk})D_i+(\overline{x}^i_r\overline{x}^j_sa^{rs})D_{ij}\end{aligned}$$

Onde $(\overline{x}^i_s)=(x^i_s)^{-1}$e $\{D_i,D_{ij}\}$ é a base canônica de $\tau_0I\!R^n$. Como

$$\begin{aligned}[\frac{\partial}{\partial x^k}]^{H^2}(x^i,\delta^i_j,0)F_A &= [\frac{\partial}{\partial x^k}-\Gamma^\alpha_{k\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha_\beta}-\Gamma^\alpha_{k\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\alpha_{\beta\gamma}}]((\overline{x}^i_sa^s-\overline{x}^i_sx^s_{pq}\overline{x}^p_j\overline{x}^q_ka^{jk})D_i+\\ &\quad(\overline{x}^i_r\overline{x}^j_sa^{rs})D_{ij})\\ &= (\frac{\partial a^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kj}a^j+\Gamma^i_{kjr}a^{jr})D_i+(\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^k}+\Gamma^i_{kr}a^{rj}+\Gamma^i_{kr}a^{jr})D_{ij}\end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}} A(x) &= (x^i, \delta^i_j, 0) \cdot [\tfrac{\partial}{\partial x^k}]^{H^2}(x^i, \delta^i_j, 0) F_A \\
&= (x^i, \delta^i_j, 0) \cdot [(\tfrac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} a^j + \Gamma^i_{kjr} a^{jr}) D_i + (\tfrac{\partial a^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ks} a^{is} + \Gamma^i_{ks} a^{sj}) D_{ij}] \\
&= (\tfrac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kj} a^j + \Gamma^i_{kjr} a^{jr}) \tfrac{\partial}{\partial x^i} + (\tfrac{\partial a^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ks} a^{is} + \Gamma^i_{ks} a^{sj}) \tfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}
\end{aligned}
$$

□

Agora, não é difícil achar a regra de mudança de coordenadas para as componentes locais de uma conexão em H^2M.

proposição 4.1.2 *Seja Γ uma conexão em H^2M, $(\Gamma^i_{kj}, \Gamma^s_{kmn})$ e $(\overline{\Gamma}^i_{kj}, \overline{\Gamma}^s_{kmn})$ as componentes locais de Γ ns cartas locais (U, x^i) e $(U, \overline{x}^i)$ de M respectivamente. Então*

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^k_{rl} &= \Gamma^i_{jt} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^l} \\
\overline{\Gamma}^k_{rab} &= \Gamma^i_{jmn} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^b} + \Gamma^i_{jt} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} + \\
& 2\Gamma^i_{ml} \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^n \partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^b} + \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^b} + \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^a} \right) + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^3 x^l}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r}
\end{aligned}
$$

□

Lembremos que o transporte paralelo estocástico de $Y_0 \in T_{X_0}M$ ao longo de X_t, Y_t obtem-se como solução de uma equação estocástica linear. De acordo com P. Meyer [30] Y_t é solução de uma equação estocástica linear; Se dada uma carta local (U, x^i) de M, temos que Y_t satisfaz uma equação do tipo

$$
dY^i = a^i_{jl} Y^j dX^l + a^i_{jmn} Y^j \tfrac{1}{2} d[X^m, X^n]
$$

Onde $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j = dx^j)$ é a carta induzida por (U, x^i) em TM. Chamamos (a^i_{jl}, a^i_{jmn}) das componentes locais da equação estocástica linear. A seguir, calculamos as regras de mudança de coordenadas para estas componentes locais

proposição 4.1.3 *Sejam M uma variedade diferenciavel, (a^i_{kj}, a^s_{kmn}) e $(\overline{a}^i_{kj}, \overline{a}^s_{kmn})$ as componentes locais de uma equação estocástica linear nas cartas locais de M, (U, x^i) e $(U, \overline{x}^i)$ respectivamente. Então*

$$\overline{a}^k_{rl} = a^i_{jt}\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^t}{\partial\overline{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^r} - \frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial\overline{x}^r\partial\overline{x}^l}$$

$$\overline{a}^k_{rab} = a^i_{jmn}\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^r}\frac{\partial x^m}{\partial\overline{x}^a}\frac{\partial x^n}{\partial\overline{x}^b} + a^i_{jt}\frac{\partial^2 x^k}{\partial\overline{x}^a\partial\overline{x}^b}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^r}\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i} +$$

$$2a^i_{ml}\frac{\partial^2\overline{x}^k}{\partial x^r\partial x^i}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^k}\frac{\partial x^m}{\partial\overline{x}^a}\frac{\partial x^n}{\partial\overline{x}^b} - \frac{\partial^2\overline{x}^k}{\partial x^i\partial x^j}\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial\overline{x}^a\partial\overline{x}^r}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^b} +\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 x^i}{\partial\overline{x}^b\partial\overline{x}^r}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^a}\right) - \frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^l}\frac{\partial^3 x^l}{\partial\overline{x}^a\partial\overline{x}^b\partial\overline{x}^r}$$

Demonstração: Pela regra do produto, temos que

$$d\overline{Y}^k = d\left(\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}Y^i\right)$$

$$= Y^i d\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}dY^i + d\left[\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i}, Y^i\right]$$

Agora, aplicando a fórmula de Itô

$$Y^i d\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^i} = Y^i\left(\frac{\partial^2\overline{x}^k}{\partial x^i\partial x^j}dX^j + \frac{\partial^3\overline{x}^k}{\partial x^i\partial x^i\partial x^l}\frac{1}{2}d[X^j, X^l]\right)$$

$$= \frac{\partial^2\overline{x}^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^l}\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^r}\overline{Y}^r d\overline{X}^l + \frac{\partial^2\overline{x}^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^r}\frac{\partial^2 x^j}{\partial\overline{x}^a\partial\overline{x}^b}\overline{Y}^r\frac{1}{2}d[\overline{X}^a, \overline{X}^b] +$$

$$\frac{\partial^3\overline{x}^k}{\partial x^i\partial x^j\partial x^l}\frac{\partial x^j}{\partial\overline{x}^a}\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^b}\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^r}\overline{Y}^r\frac{1}{2}d[\overline{X}^a, \overline{X}^b]$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} dY^i &= \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}(a^i_{jt} Y^j dX^t + a^i_{jmn} \tfrac{1}{2} d[X^m, X^n]) \\
&= a^i_{jt} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \overline{Y}^r d\overline{X}^l + a^i_{jt} \frac{\partial^2 x^t}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \overline{Y}^r \tfrac{1}{2} d[\overline{X}^a, \overline{X}^b] + \\
& \quad a^i_{jmn} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^b} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^r} \overline{Y}^r \tfrac{1}{2} d[\overline{X}^a, \overline{X}^b]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d[\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i}, Y^i] &= d[\frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} dX^j + \frac{\partial^3 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j \partial x^t} \tfrac{1}{2} d[X^j, X^t], a^i_{jt} Y^j dX^t + a^i_{jmn} \tfrac{1}{2} d[X^m, X^n]] \\
&= 2a^i_{ml} \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^b} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^r} \overline{Y}^r \tfrac{1}{2} d[\overline{X}^a, \overline{X}^b]
\end{aligned}
$$

Por derivações parciais de $\dfrac{\partial x^r}{\partial x^s} = \delta^r_s$ e $\dfrac{\partial \overline{x}^a}{\partial \overline{x}^b} = \delta^a_b$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^t \partial x^s} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^r} + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^l} &= 0 \\
\frac{\partial^3 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j \partial x^t} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^b} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^r} + \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b} + & \\
\frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} (\frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^a}) + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^3 x^l}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r} &= 0
\end{aligned}
$$

Logo obtemos que

$$
\begin{aligned}
d\overline{Y}^k &= (a^i_{jt} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} - \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^l}) \overline{Y}^r d\overline{X}^l + \\
& \quad (a^i_{jmn} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^b} + a^i_{jt} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} + \\
& \quad 2a^i_{ml} \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^n \partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^b} - \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} (\frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^b} + \\
& \quad \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^a}) - \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^3 x^l}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r}) \overline{Y}^r \tfrac{1}{2} d[\overline{X}^a, \overline{X}^b]
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Por outro lado, temos que $d\overline{Y}^k = \overline{a}^k_{rl}\overline{Y}^r d\overline{X}^l + \overline{a}^k_{rab}\overline{Y}^r \frac{1}{2} d[\overline{X}^a, \overline{X}^b]$. Então comparando coeficientes 4.1 temos que

$$
\begin{aligned}
\overline{a}^k_{rl} &= a^i_{jt} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^l} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} - \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^r \partial \overline{x}^l} \\
\overline{a}^k_{rab} &= a^i_{jmn} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^b} + a^i_{jt} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^r} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^i} + \\
& \quad 2a^i_{ml} \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^r \partial x^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^a} \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^b} - \frac{\partial^2 \overline{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^b} + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r} \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^a} \right) - \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^3 x^l}{\partial \overline{x}^a \partial \overline{x}^b \partial \overline{x}^r}
\end{aligned}
$$

□

Segue-se, que a fórmula de mudança de coordenadas locais de uma equação estocástica linear é a mesma que a das componentes locais de uma 1-conexão de H^2M com sinal trocado. Temos assim o seguinte corolário

Corolario 4.1.4 *Existe uma correspondência bijetora entre as 1-conexões de H^2M e os transportes paralelos estocásticos de TM. Seja Γ uma 1-conexão de H^2M e (U, x^i) uma carta local de M. Então esta correspondência é dada explícitamente por*

$$\Gamma = (\Gamma^i_{kj}, \Gamma^s_{kmn}) \rightarrow dY^i = -\Gamma^i_{jl} Y^j dX^l - \Gamma^i_{jmn} Y^j \frac{1}{2} d[X^m, X^n]$$

Lembremos que uma 2-surconexão de TM é uma partição $\lambda_2 : TM \rightarrow J_2TM$ da seguinte sequência exata de fibrados vetoriais:

$$0 \longrightarrow J_2^0 TM \longrightarrow J_2 TM \longrightarrow TM \longrightarrow 0$$

Seja (U, x^i) uma carta local de M, $(\pi^{-1}_{TM}U, x^i, y^\alpha = dx^\alpha)$ e $(\pi^{-1}_{J_2TM}U, x^i, y^\alpha, y^\alpha_i, y^\alpha_{ij})$ as cartas induzidas para TM e J_2TM respectivamente, então nestas coordenadas locais

$$\lambda_2 : (x^i, y^j) \to (x^i, y^j, -a^j_{kr}(x^i)y^k, -a^j_{krs}(x^i)y^k)$$

Não é difícil de provar, que existe uma correspondência bijetora entre 1-conexões de H^2M e 2-surconexões de TM. Em coordenadas locais esta correspondência é dada por

$$\Gamma = (\Gamma^i_{kj}, \Gamma^s_{kmn}) \to \lambda_\Gamma : (x^i, y^j) \to (x^i, y^j, -\Gamma^j_{kr}y^k, -\Gamma^j_{krs}y^k)$$

Dos comentários anteriores, obtemos o seguinte resultado de natureza estritamente geométrica

proposição 4.1.5 *Existe uma correspondência bijetora entre 1-conexões de H^2M e 2-conexões de H^1M.*

4.2 O Prolongamento $\Gamma \to \Gamma^1$.

Nesta seção construimos e estudamos um prolongamento natural $\Gamma \to \Gamma^1$ de 1-conexões sem torsão de H^1M a 1-conexões de H^2M. A construção deste prolongamento é baseada no seguinte resultado de S. Kobayashi [20]. Existe uma correspondência bijetora entre as $Gl(n)$-estruturas de H^2M (isto é um subfibrado principal de H^2M com grupo estrutural $Gl(n)$) e as 1-conexões sem torsão de H^1M (conexões afines sem torsão de M). Começaremos por mostrar de uma maneira mais geométrica este resultado. Depois, calculamos as componentes locais de Γ^1e mostramos que Γ^1 coincide com o prolongamento $p(\Gamma)$ definido por I. Kolar [22]. Também, mostramos que este prolongamento tem uma interpretação natural em termos de transporte paralelo estocástico. É interessante notar que pela correspondência bijetora de 4.1.4 Γ^1 é associado com o transporte paralelo de Dorhn-Guerra em TM.

Lembremos da seguinte

Definição 4.2.1 *Sejam M e N variedades diferenciaveis providas de conexões sem torsão Γ_M e Γ_N respectivamente, $x \in M$ e $y \in N$ uma aplicação linear $F : \tau_xM \to \tau_yN$ é afim* *se*

$$\Gamma_N \circ F \;=\; F \circ \Gamma_M$$

Seja Γ uma conexão sem torsão de M, então definimos:

$$Q(\Gamma) = \left\{ j_0^2 s \in H^2M \,:\, s_* : \tau_0 \mathbb{R}^n \to \tau_{s(0)}M \text{ é afim para } \Gamma \right\}$$

onde $\mathbb{R}^n$ é considerado com a conexão "flat" usual.

Seja (U, x^α) um sistema de coordenadas local (U, x^α) para M. Então [8] $s_* : \tau_0 \mathbb{R}^n \to \tau_{s(0)}M$ é afim para Γ se e só se

$$D_{ij}s^\alpha \;=\; -D_i s^\beta D_j s^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$$

onde $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ são as componentes de Γ em (U, x^α).

Obviamente, se $j_0^2 s \in Q(\Gamma)$ e $j_0^2 f \in Gl(n) \leq Gl^2$ então $j_0^k s \circ f \in Q(\Gamma)$. De fato, como

$$D_{ij}(s \circ f)^\alpha = (D_{rt}s^\alpha) \circ f . D_j f^r \cdot D_i f^t + (D_r s^\alpha) \circ f \cdot D_{ij} f^r$$

e $D_{ij} f^r = 0$. Então

$$\begin{aligned} D_{ij}(s \circ f)^\alpha &= (D_{rt}s^\alpha) \circ f . D_j f^r \cdot D_i f^t \\ &= -D_r s^\beta D_t s^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \cdot D_j f^r \cdot D_i f^t \\ &= -D_i (s \circ f)^\beta D_j (s \circ f)^\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

E como $j_0^2 s \in Q(\Gamma)$ e $j_0^2 s \cdot g \in Q(\Gamma)$ implicam que $g \in Gl(n)$. Concluímos que $Q(\Gamma)$ é uma $Gl(n)$-estrutura de H^2M.

Teorema 4.2.2 *A aplicação*

$$Q : \{\textit{conexões sem torsão para } M\} \to \left\{ Gl(n)\textit{-estruturas de } H^2M \right\}$$

é bijetora.

Demonstração: Sejam Γ e Γ' conexões sem torsão para M. Não é difícil ver que $Q(\Gamma) \neq Q(\Gamma')$ se $\Gamma \neq \Gamma'$. Seja P uma $Gl(n)$-estrutura de H^2M e $j_0^2 s \in P$, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança U de $x = s(0) \in M$ tal que $(U, (x^i) = s^{-1})$ é um sistema de coordenadas local. Neste sistema de coordenadas $D_\alpha s^\theta = \delta_\alpha^\theta$. Definimos $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(x) = -D_{\beta\gamma}s^\alpha$ estas são as componentes locais de Γ uma conexão sem torsão para M. Obviamente, para esta conexão $P = \left\{ j_0^2 s \in H^2M : s_* : \tau_0/R^n \to \tau_{s(0)}M \text{ é afim para } \Gamma \right\}$. Isto é $P = Q(\Gamma)$. $\square$

Seja Γ uma conexão sem torsão de M. Definimos um monomorfismo de fibrados principais $i_\Gamma = i \circ [\pi_1^2/Q(\Gamma)]^{-1} : H^1M \to H^2M$ onde $i_\Gamma : Gl(n) \to Gl^2$ é a inclusão natural. Então [21, proposition 6.1] existe uma única conexão Γ^1 em H^2M tal que os subespaços horizontais de Γ são levados a subespaços horizontais de Γ^1 por i_Γ. Ainda mais, se ω_Γ é a forma de conexão de Γ, então $i_\Gamma^*\omega_{\Gamma^1} = (i_\Gamma)_*\omega_\Gamma$.

Seja Γ uma conexão sem torsão. Nosso próximo objetivo é achar as componentes locais de Γ^1.

Seja $p_1 = (x^i, \delta_j^i) \in H^1M$ e $p_2 = (x^i, \delta_j^i, 0) \in H^2M$. Como $i_\Gamma(p_1) = (x^i, \delta_j^i, -\Gamma_{jk}^i)$ temos que

$$\begin{aligned} i_{\Gamma*}(p_1)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} - x_j^r x_k^t \frac{\partial \Gamma_{rt}^l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_{jk}^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_{jk}^l} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i_{\Gamma*}(p_1)\left(\frac{\partial}{\partial x_j^r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_j^r} - \frac{\partial (x_n^l x_m^k)}{\partial x_j^r} \Gamma_{lk}^i \frac{\partial}{\partial x_{nm}^i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^r} - x_m^k \Gamma_{rk}^i \frac{\partial}{\partial x_{jm}^i} - x_n^l \Gamma_{lr}^i \frac{\partial}{\partial x_{nj}^i} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j^r} - 2\Gamma_{rk}^i \frac{\partial}{\partial x_{jk}^i} \end{aligned}$$

então

$$
\begin{aligned}
i_{\Gamma *}(p_1)(X^{H^1}) &= X^i\left(i_{\Gamma *}(p_1)(\frac{\partial}{\partial x^i}) - \Gamma^r_{ij} i_{\Gamma *}(p_1)(\frac{\partial}{\partial x^r_j})\right) \\
&= X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^r_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^r_{jk}} - \Gamma^r_{ij}(\frac{\partial}{\partial x^r_j} - 2\Gamma^s_{rk}\frac{\partial}{\partial x^s_{jk}})\right) \\
&\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ij}\frac{\partial}{\partial x^r_j} + (2\Gamma^r_{ij}\Gamma^l_{rk} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^l_{jk}}\right)
\end{aligned}
$$

Seja $g = (\delta^i_j, \Gamma^s_{mn}) \in Gl^2$ como $i_\Gamma(p_1) \cdot g = (x^i, \delta^i_j, -\Gamma^i_{jk}) \cdot (\delta^i_j, \Gamma^i_{jk}) = (x^i, \delta^i_j, 0)$ temos que

$$
\begin{aligned}
X^{H^2}(p_2) &= R_{g*} \circ i_{\Gamma *}(p_1)(X^{H^1}) \\
&= X^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ij}\frac{\partial}{\partial x^r_j} + (2\Gamma^r_{sn}\Gamma^s_{im} - \frac{\partial \Gamma^r_{mn}}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ij}\Gamma^j_{mn})\frac{\partial}{\partial x^r_{mn}}\right)
\end{aligned}
$$

Denotemos por $\overline{\Gamma}^i_{jk}$, $\overline{\Gamma}^i_{jkl} = \overline{\Gamma}^i_{jlk}$ as componentes locais de Γ^1. Então

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$$

$$\overline{\Gamma}^r_{imn} = (\frac{\partial \Gamma^r_{mn}}{\partial x^i} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^j_{mn} - (\Gamma^r_{sn}\Gamma^s_{im} + \Gamma^r_{sm}\Gamma^s_{in}))$$

Esta ultima fórmula implica a seguinte

proposição 4.2.3 *Seja (U, x^i) uma carta local de M e Γ uma conexão sem torsão para M com componentes locais Γ^i_{jk}. Então as componentes locais de Γ^1, $\overline{\Gamma}^i_{jk}$e $\overline{\Gamma}^r_{imn}$ são dadas por*

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$$

$$\overline{\Gamma}^r_{imn}X = (\frac{\partial \Gamma^r_{mn}}{\partial x^i} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^j_{mn} - (\Gamma^r_{sn}\Gamma^s_{im} + \Gamma^r_{sm}\Gamma^s_{in}))$$

Como estas são as componentes locais de $p(\Gamma)$ [19], onde p é o operador natural definido por I. Kolar em [22]. De onde segue-se o

Corolario 4.2.4 *Seja Γ uma conexão sem torsão para M, com as notações anteriores* *temos que*

$$p(\Gamma) \quad = \quad \Gamma^1$$

A seguir damos uma descrição de Γ^1 em termos de transporte paralelo estocástico. Seja Γ uma conexão sem torsão de M, se X_t é um semimartingale é conhecido que Γ determina um transporte paralelo estocástico em TM ao longo de X_t, $\mathrm{P}_{X_s X_t} : T_{X_s}M \to T_{X_t}M$. De [9, lemma 11] temos que existe uma única extensão afim $\mathrm{P}^{\Gamma}_{X_s X_t} : \tau_{X_s}M \to \tau_{X_t}M$. Não é difícil mostrar que $\mathrm{P}^{\Gamma}_{X_s X_t}$ determina o levantamento horizontal estocástico de X_t em H^2M associado com $(\Gamma^1)^S$ (o prolongamento de Stratonovich de Γ^1).

Lembremos que a equação diferencial estocástica associada com o transporte paralelo de Dorhn -Guerra em TM [30] tem a seguinte expressão nas coordenadas locais $(\pi^{-1}(U), x^i, y^j = dx^j)$:

$$dY_t^r \quad = \quad -\Gamma^r_{mn} Y_t^m dX_t^n + \left(-\frac{\partial \Gamma^r_{mn}}{\partial x^i} - \Gamma^r_{ij}\Gamma^j_{mn} + (\Gamma^r_{sn}\Gamma^s_{im} + \Gamma^r_{sm}\Gamma^s_{in})\right) Y_t^i \frac{1}{2} d[X^m, X^n]_t$$

da proposição anterior temos que

$$dY_t^r \quad = \quad -\overline{\Gamma}^r_{im} Y_t^i dX_t^m - \overline{\Gamma}^r_{imn} Y_t^i \frac{1}{2} d[X^m, X^n]_t$$

Obtemos assim o seguinte

Corolario 4.2.5 *Seja Γ uma conexão sem torsão de M. Então pela correspondência da proposição4.1.4 Γ^1 é associado com o transporte paralelo de Dorhn-Guerra.*

Referências

[1] .Ph. Blanchard, Ph. Combe, W. Zeng : Mathematical and Phisical Aspects of Stochastic Mechanics. Lecture Notes in Physics **281**. Springer 1987.

[2] J.M. Bismut : Mécanique Aléatorie.Lecture Notes in Mathematics **866**, Springer 1981.

[3] B. Cenkl : *On the Higher Order Connections*. Cahiers de Top. et Geom. Differ.IX,1 ,1966.

[4] L. Cordero, C. Dobson. M. de Léon : Differential Geometry of Frame Bundles. Kluwer Academic Publishers, 1989.

[5] E.B. Dynkin : *Diffusion of Tensor*. Soviet Math. Dokl. **9**.532-535. 1968.

[6] D. Dorhn. F. Guerra : *Nelson's Stochastic Mechanics on Riemannian Manifolds*. Lettere ao Nuovo Cimento **22**, 121-127. 1978.

[7] M. Emery : *En Marge de L 'expose de Meyer: Géométrie Différentielle Stochastique*. Séminaire de Probabilités XVI. Lecture Notes in Mathematics **921**, Springer 1982.

[8] M. Emery : Stochastic Calculus in Manifolds. Springer-Verlag. 1989.

[9] M. Emery : *On Two Transfer Principles in Stochastic Differential Geometry*.Séminaire de Probabilités XXIV. Lecture Notes in Mathematics **1426**, Springer 1990.

[10] C. Ehresmann : *Connexions Infinitésimales.* Collq. Topol. Alg. Bruxelles, 29-55, 1950.

[11] C. Ehresmann :*Connexions d 'ordre supérieur.* Atti del 5^0 Cong. della Unione Mat. Italiana,326-328. Ed. Cremonese. 1956.

[12] J. Gancarzewicz : *Connections of Order r.* Ann. Pol. Math. **34**, 70-83, 1977.

[13] H. Goldschmidt : *Integrability Criteria for Systems of Non-Linear Partial Differential Equations.* J. Differential Geometry **1**, 269-307. 1967.

[14] M. Hakim-Dowek. D. Lepingle : *L 'Exponentielle Stochastique des Groupes de Lie.* Séminaire de Probabilités XX. Lecture Notes in Mathematics **1204**, Springer 1986.

[15] S. Helgason : Differential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces. Academic Press, 1978.

[16] N. Ikeda, S. Watanabe : Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland 1981.

[17] K. Itô : *The Brownian Motion and Tensor Fields on Riemannian Manifolds*, Proc. Intern. Congr. Math.(Stockholm),536-539, 1962.

[18] K. Itô : *Stochastic Parallel Displacement.*Probabilistic Methods in Differential Equations. Lecture Notes in Mathematics **451**, Springer 1975.

[19] J. Janyska . I. Kolar : *On the Connections Naturally Induced on the Second Order Frame Bundle.* Archivum Mathematikum (Brno) **22**, 21-28, 1986.

[20] S. Kobayashi : *Canonical Forms on Frame Bundles of Higher Order Contact.* Proc.Symp. Pure Math. **3**, 186-193, 1961.

[21] S. Kobayashi, K. Nomizu :Foundations of Differential Geometry. Interscience. vol.**1** ,1963.vol. **2**, 1968.

[22] I. Kolar : *On some Operations with Connections*. Math. Nachr. **69**, 297-306, 1975.

[23] J.L. Koszul : Lecture on Fiber Bundles and Differential Geometry. Tata Inst. of Fund. Research, 1960.

[24] M. Kuranishi : Lectures on Involutive Systems. Publ. Soc. Mat. São Paulo, 1967.

[25] P. Liebermann : Connexions d 'ordre supérieur.3^0 Coloquio Brasileiro de Matematica, Fortaleza, 1961.

[26] P. Liebermann : *Sur la Géométrie des Prolongements des Espaces Fibrés Vectoriels*.Ann. Inst. Fourier, Grenoble **14**, 1, 145-172, 1964.

[27] P.A. Meyer : *Un Cours sur les Intégrales Stochastiques*.Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in Mathematics **511**. Springer 1976.

[28] P.A. Meyer : *Géométrie Différentielle Stochastique*.Séminaire de Probabilités XV. Lecture Notes in Mathematics **851**, Springer 1981.

[29] P.A. Meyer : *A Differential Geometric Formalism for the Itô Calculus*. Stochastic Integrals,Proc. of L.M.S. Durham Symposium. Lecture Notes in Mathematics **921**, Springer 1982.

[30] P.A. Meyer : *Géométrie Différentielle Stochastique (bis)*.Séminaire de Probabilités XVI. Lecture Notes in Mathematics **921**, Springer 1982.

[31] J.F. Pommaret : Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups. Gordon and Breach, 1978.

[32] P.Protter : Stochastic Integration and Differential Equations.Springer-Verlag 1990.

[33] L. Schwartz : Semimartingales sur des variétés et Martingales Conformes sur des Variétés Analytiques Complexes.Lecture Notes in Mathematics **780**, Springer 1980.

[34] L. Schwartz : *Géométrie Différentielle du 2^e ordre, Semimartingales et Équations Différentielle Stochastiques sur une Variété Différentielle.Séminaire de Probabilités XVI.* Lecture Notes in Mathematics **921**, Springer 1982.

[35] I. Shigekawa : *On Stochastic Horizontal Lifts.* Z. Wahrscheinlichkeitsheorie verw. Geviete **59**, 211-221. 1982.

[36] N. Van Que : *Du Prolongement des Espaces Fibres et des Structures Infinitésimales.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **17**, 1, 151-223, 1967.

[37] G. Warner : Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups I. Springer, 1972.