Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Sobre um Par de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos Envolvendo o p-Laplaciano

Edson Alex Arrázola Iriarte
Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

19 de fevereiro de 2004

Sobre um Par Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos Envolvendo o p-Laplaciano

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Edson Alex Arrázola Iriarte** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 19 de fevereiro de 2004.

Djairo G. de Figueiredo

Prof. Dr.: Djairo Guedes de Figueiredo

(Orientador)

Banca Examinadora:

1. Profa. Dra. Celine Azizieh
2. Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
3. Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves
4. Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
5. Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, **UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de **Doutor em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Arrázola Iriarte, Edson Alex

Ar69s Sobre um par de soluções positivas para uma classe de problemas elípticos envolvendo o p-Laplaciano / Edson Alex Arrázola Iriarte -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Dirichlet, Problemas de. I. Figueiredo, Djairo Guedes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 19 de fevereiro de 2004 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

DG de Figueiredo

Prof. (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Prof. (a). Dr (a). CELINE AZIZIEH

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES

Prof. (a). Dr (a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

Prof. (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

A mis padres

Efraín Arrázola Sandóval y Orietta Iriarte Ballesteros

" Gracias por el apoyo incondicional, por la comprensión y por siempre haber creido en mi, apesar de todas las dificultades que encontre en este camino.

Gracias por el ejemplo de vida, por enseñarme a luchar por mis sueños y por enseñarme a levantarme después de cada caída."

Aos meus filhos

Leonardo Zanardi Arrázola e Isabella Zanardi Arrázola

" Obrigado pela inocência de seus ternos sorrisos,
por aqueles carinhosos abraços que foram a força que precisei para realizar este sonho.
Obrigado por, mesmo sem compreender, aguentar tantos momentos de ausência."

Agradecimentos

- A *Deus* por permitir este passo importante na minha vida.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.
- Ao Prof. Djairo, por toda a sua paciência, pela compreensão, e por todas as valiosas sugestões na elaboração deste trabalho.
- Ao Pedro Ubilla pelo estimulo para fazer o doutorado.
- A Nilza, por cuidar sozinha dos nossos filhos, nos muitos dias e longos finais de semana que fiquei ausente de casa.
- A mis hermanos Erick, Enna y Bruno, por el gran cariño y afecto, y por sus permanentes palabras de apoyo.
- Aos amigos e colegas da pos-graduação, Ilma, Amauri, Fabio Figueira, Fabio Pereira, Lucy, Yuri, Martha, Marlio, Evandro, Sofia, Simone, Odair, Isabella Tardim, Claudia Gentile, Marcelo Santos, Marcelo Senna, Miguelina Pardo, pela amizade e por sempre terem ficado na 'torcida'.
- A Profa. Celine Azizieh, e aos Profs. Olimpio Miyagaki, José Valdo, e Orlando Lopes, por gentilmente terem aceito o convite para compor a banca.
- A Tânia, Cidinha e Edinaldo por estarem sempre a disposição para dar uma força nas questões burocráticas.

Resumo

Provamos a existência de um par de soluções positivas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta_p u$ é o operador p-Laplaciano, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com fronteira de classe C^2. A não linearidade $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é Caratheodory, "sublinear"em zero, com crescimento subcrítico, e satisfaz a condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Na primeira parte do trabalho supomos a existência de uma super-solução estrita para provar a existência do par de soluções positivas. A existência da primeira solução é obtida via um processo de minimização clássico. A segunda solução é obtida via argumentos variacionais tais como o *Teorema do Passo da Montanha* e o *Principio Variacional de Ekeland.* Na segunda parte do trabalho, usamos técnicas de *Simetrização de Schwarz*, para determinar condições sobre a não-linearidade f que garantam a existência de uma super-solução estrita, primeiro no caso de uma bola e depois no caso do domínio geral Ω.

Abstract

We prove the existence of a pair of positive solutions for the problem

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Delta_p u$ is the p-Laplacian operator, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with a C^2 boundary. The non-linearity $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ is Caratheodory, "sublinear"in zero, with subcritical growth, and satisfies the Ambrosetti-Rabinowitz condition. At the first part of the work, we suppose the existence of a strict super-solution to prove the existence of a pair of positive solutions. We obtain the existence of the first positive solution using classical minimization. The second solution is obtained using variational arguments such that *The Mountain Pass Theorem* and the *Ekeland Variational Principle.* At the second part of the work, we use *Schwarz Symmetrization* techniques to obtain conditions about the non-linearity f such that, it guaranteed the existence of the strict super-solution, first in the case of the ball and then after in the case of the general domain Ω.

Notações

No que segue, Ω sempre denotará um domínio limitado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

$\blacksquare$: fim de uma demonstração

$u := u^+ - u^-, \quad$ onde $\quad u^+ := \max\{u, 0\} \quad$ e $\quad u^- := \max\{-u, 0\}$

$p^* := \dfrac{pN}{N-p}$, se $1 \leq p < N$

$\|u\|_{L^p(\Omega)}$: norma em $L^p(\Omega)$, onde $1 \leq p \leq \infty$.

$\|u\| := \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx\right)^{1/p}$, norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$\rightarrow$: convergência forte

$\rightharpoonup$: convergência fraca

$|u| := |u(x)|$

$|\nabla u| := |\nabla u(x)|$

$medA$: medida de Lebesgue do conjunto A.

B_1: bola aberta em $\mathbb{R}^N$ com centro na origem e raio 1, $\quad Vol(B_1) = w_N$

$B_\rho(x_0)$: bola aberta em $\mathbb{R}^N$ com centro x_0 e raio ρ, $\quad Vol(B_\rho(0)) = w_N \, \rho^N$.

$\|u\|_X$: norma da função u no espaço de Banach X

χ_A : função característica sobre o conjunto A.

$C_0^1(\overline{\Omega}) := \{u \in C^1(\overline{\Omega}) \, : \, u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega\}$

$C_c^1(\Omega)$: conjunto das funções de classe C^1 com suporte compacto em Ω

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

$\varphi_p(s) := |s|^{p-2}s$

$\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$: derivada de u na direção normal ν

$\nu(x_0)$: vetor unitário normal exterior em x_0

$(W_0^{1,p}(\Omega))'$: dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$

q.t.p. : quase toda parte

Imersões de Sobolev:

Imersão continua: $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $1 \leq q \leq p^*$

Imersão compacta: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, para $1 \leq q < p^*$

CONTEÚDO

Introdução

Em 1985, de Figueiredo e Lions [14] provam que o problema

$$(P_2)\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, e $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana satisfazendo as seguintes condições

- $\liminf_{s \to 0+} \dfrac{f(s)}{s} > \lambda_1 \quad$ e $\quad \liminf_{s \to +\infty} \dfrac{f(s)}{s} > \lambda_1$

  (i.e. sub-linear em zero e super-linear em infinito)

- $\lim_{s \to +\infty} \dfrac{f(s)}{s^\sigma} = 0 \quad$ com $\quad 1 < \sigma \leq (N+2)/(N-2) \quad$ se $\quad N \geq 3 \quad$ ou

  $1 < \sigma < \infty, \quad$ se $\quad N = 2$

- $\liminf_{s \to +\infty} \dfrac{sf(s) - \theta F(s)}{s^2 f(s)^{2/(N+1)}} \geq 0 \quad$ com $\theta > 2$,

possui um par de soluções positivas ordenadas. Aqui $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$. A suposição fundamental que se faz em [14] para provar a existência das duas soluções, seja por *métodos topológicos* ou por *métodos variacionais*, é que (P_2) possui uma super-solução estrita w. A sub-solução é obtida da sub-linearidade em zero. Para f satisfazendo as condições acima, o tratamento que se faz de (P_2), em [14], é variacional.

Usando um resultado de 1984, devido a de Figueiredo e Solimini [15], provam a existência de $u_1 \in [\underline{u}, w]$ tal que é um mínimo local do funcional $\Phi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(u)\,dx, \quad \text{onde } F(s) = \int_0^s f(\tau)\,d\tau.$$

A existência da segunda solução é obtida usando o Teorema do Passo da Montanha, no caso de u_1 ser um mínimo local estrito, e o Principio Variacional de Ekeland no caso de u_1 não ser um mínimo local estrito.

Uma das questões centrais do artigo de de Figueiredo e Lions [14], é garantir a existência de uma super-solução estrita. Nesse sentido, no caso de Ω ser uma bola, eles obtém uma condição sobre f que garante a existência de uma super-solução para (P_2) explorando o conhecimento explícito da solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u + 1 \quad \text{em } B_1 \\ u &= 0 \quad\quad\quad \text{sobre } \partial B_1, \end{cases}$$

onde $0 \leq \mu < \lambda_1(B_1)$. No caso de Ω ser um domínio geral eles usam técnicas de Simetrização de Schwarz para obter uma condição análoga a obtida no caso da bola.

Em 1988, Bhattacharya [7] -na sua tese de doutorado- estuda o problema de Dirichlet envolvendo o operador p-Laplaciano no caso de uma bola. Usando técnicas do grau topológico consegue provar que

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) \quad \text{em } B_R \\ u &= 0 \quad\quad \text{sobre } \partial B_R, \end{cases}$$

possui um par de soluções positivas ordenadas. Da mesma forma que em [14], para provar este resultado, ele supõe a existência de uma super-solução estrita, e as condições que assume sobre f são as seguintes:

- $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ localmente lipschitz crescente
- $\lim\limits_{s\to 0+} \dfrac{f(s)}{s^{p-1}} > \lambda_1(p, B_R)$
- $\lim\limits_{s\to +\infty} \dfrac{f(s)}{s^{p-1}} > \lambda_1(p, B_R)$

- $\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^\sigma} = 0$ algum $p - 1 < \sigma \leq p^* - 1$
- $sf(s) \leq \theta F(s)$ para $s \in (0, +\infty)$, onde $0 \leq \theta < p^*$.

Também consegue obter, uma condição sobre f que garante a existência da super-solução estrita w, explorando o conhecimento explicito da solução do seguinte problema

$$\begin{cases} |w'|^{p-2}\left\{(p-1)w'' + \frac{N-1}{r}w'\right\} + \left(\lambda^{\frac{1}{p-1}}\, w + C\right)^{p-1} = 0 & \text{em } 0 < r < R \\ w > 0 & \text{em } 0 < r < R \\ w'(0) = w(R) = 0 & \end{cases}$$

onde $0 < \lambda < \lambda_1(p, B_R)$ e C é uma constante positiva.

Ao extender os resultados em [14] para um operador mais geral, o p-Laplaciano ($p \neq 2$), vemos que surgem de forma natural inúmeras dificuldades de ordem bastante técnicas, essencialmente pelo fato de este operador não ser linear e não ter estrutura hilbertiana. Para salvar algumas das dificuldades nos temos a disposição, por exemplo, a Desigualdade de Díaz-Saa (1987) [12] para provar unicidade; o Princípio de Comparação Fraco, e o Principio de Comparação Forte de Guedda-Veron (1989) [19] para comparar duas funções; o Principio do Máximo de Vazquez (1984) [31] e o Lema de Hopf (1987-1988) [25], [26]; para obter positividade. Também usaremos os resultados, já clássicos, de Anane (1988) [2] para obter estimativas em L^∞, e os resultados de Liebermann (1988) [21] e Tolksdorff (1983) [30] para obter regularidade $C^{1,\alpha}$. Estes resultados serão apresentados no decorrer do trabalho como Lemas.

Mais especificamente, seguiremos as idéias de de Figueiredo e Lions, para provar a existência de duas soluções positivas -usando métodos variacionais- para o problema de Dirichlet

$$(P)\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x, u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad\quad\quad\; \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$-\Delta_p u := -div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right),$$

é o operador p-Laplaciano e Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira de classe C^2 e $1 \leq p < N$. A não-linearidade f será Caratheodory, "*sub-linear*" em zero, com crescimento sub-crítico e satisfazendo a condição de *Ambrosetti-Rabinowitz*, ou seja

$(f1)$ $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é Caratheodory

$(f2)$ $\displaystyle\liminf_{s\to 0+} \frac{f(x,s)}{s^{p-1}} > \lambda_1(p,\Omega)$

$(f3)$ $|f(x,s)| \leq C(1+|s|^{\sigma-1})$; para alguma constante $C > 0$, onde $1 \leq \sigma < p^*$

$(f4)$ Existem constantes $\theta > p$ e $M > 0$ tais que para $s \geq M$

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s).$$

É interessante notar que da condição de Ambrosetti-Rabinowitz temos que f é "*super-linear*" no infinito.

Este trabalho divide-se em 2 capítulos que estão distribuídos da seguinte forma:

No Primeiro Capítulo provamos a existência da primeira solução via o método da sub- e super-solução. Para isso, vamos supor a existência de uma super-solução estrita de (P), uma vez que a existência da sub-solução é garantida por $(f2)$. A seguir, provamos que esta solução é um mínimo local na topologia C^1, fazendo uso do Principio de Comparação Forte de Gueda-Veron [19]. É importante observar que para provar esse fato aparece a necessidade de acrescentar uma hipótese sobre f, a saber

$(f5)$ $\quad f(x,\cdot)$ é estritamente crescente no intervalo $[0, \max_{\overline{\Omega}} w]$

Usando o resultado de Garcia-Manfredi-Peral (2000) [18], concluiremos que esta função também é um mínimo local na topologia $W_0^{1,p}$. Vale lembrar que o resultado em [18] é uma extensão para o p-Laplaciano do conhecido resultado de Brezis-Niremberg (1993) [8] para o caso semilinear, ou seja quando $p = 2$, que diz que um mínimo local na topologia C^1 é um mínimo na topologia H_0^1. Para provar a existência da segunda solução, usaremos o Teorema do Passo da Montanha se a primeira solução é um mínimo local estrito, e o Principio Variacional de Ekeland se a primeira solução não é um mínimo local estrito.

O principal resultado de este capítulo é o seguinte:

Teorema 0.1. *Suponhamos que o problema (P) possui uma super-solução estrita $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, algum $\alpha \in (0,1)$ tal que $w > 0$ em Ω . Suponhamos ainda que, f satisfaz as hipóteses $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$, $(f4)$ e $(f5)$. Então (P) tem duas soluções positivas.*

No Segundo Capítulo, determinaremos uma condição sobre f que nos garanta a existência de uma super-solução estrita para o problema (P). Para isso, introduziremos primeiro o conceito e alguns resultados da *Simetrização de Schwarz.* Definiremos u^* como a *Simetrizada de Schwarz* da função u. A função u^* será positiva, radialmente simétrica e decrescente. Dado o domínio limitado Ω, o conjunto Ω^* será definido como uma bola com o mesmo volume que Ω. A condição que nos garante a existência da super-solução, como veremos no decorrer deste Capítulo, esta ligada a existência e unicidade da solução do problema

$$(P_\mu)\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu|u|^{p-2}u + 1 \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $0 \leq \mu < \lambda_1(p,\Omega)$. O problema (P_μ) é um caso particular do problema estudado por Fleckinger-Pellé, Hernández, Takáč e De Thélin [16], [17].

No caso de Ω ser um bola unitária, provaremos que a solução de (P_μ), é radialmente simétrica decrescente, então teremos que o seu máximo M_μ é atingido no centro da bola. Observemos que a diferença do caso $p = 2$, nós não conseguimos obter explicitamente a solução de (P_μ) e conseqüentemente de M_μ. Contudo, conseguimos provar que a condição

$$(f6) \qquad \begin{array}{c} \text{Existem números } s_0 > 0 \;\text{ e }\; 0 \leq \mu < \lambda_1(p, B_1) \;\text{ tais que :} \\ f(x,s) < \mu\varphi_p(s) + \left(\dfrac{s_0}{M_\mu}\right)^{p-1}, \quad \forall\, 0 \leq s \leq s_0 \end{array}$$

nos garante a existência da super-solução estrita para (P). Fazendo $p = 2$ em $(f6)$ temos a condição obtida em [14].

O caso de Ω ser um domínio geral é um pouco mais delicado. Precisaremos provar primeiro o seguinte resultado

Teorema 0.2. *Seja $f \in L^{p'}(\Omega)$, e sejam $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ soluções fracas de:*

$$(P_f)\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad e \qquad (P_{f^*})\begin{cases} -\Delta_p v &= f^* \quad \text{em } \Omega^* \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

respectivamente. Então $u^* \leq v \quad q.t.p$ *em* Ω^*.

Este resultado é uma extensão para o p-Laplaciano do resultado provado em 1976 por Talenti [28], para $p = 2$, usando as *Desigualdades Isoperimétricas.* Em 1981, Lions [23] apresenta uma demonstração mais simples que Talenti, prescindindo do uso das *Desigualdades Isoperimémetricas.* Nos seguiremos as idéias de Lions para demonstrar o Teorema acima.

Um dos principais resultados deste capítulo é o seguinte:

Teorema 0.3. *Sejam* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *soluções fracas de,*

$$(P_\mu)\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu|u|^{p-2}u + 1 \quad em\ \Omega \\ \qquad u &= 0 \qquad\qquad\qquad sobre\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$(P_\mu^*)\begin{cases} -\Delta_p v &= \mu|v|^{p-2}v + 1 \quad em\ \Omega^* \\ \qquad v &= 0 \qquad\qquad\qquad sobre\ \partial\Omega^* \end{cases}$$

onde $0 \leq \mu < \lambda_1(p, \Omega^*)$. *Então* $u^* \leq v \quad q.t.p.$ *em* Ω^*

Com auxilio deste Teorema provaremos que uma condição análoga a $(f6)$ nos garante a existência da super-solução estrita para (P).

Na parte final deste capítulo mostraremos como obter a existência de uma super-solução para o problema autônomo (Pa) em Ω, a partir do conhecimento da solução do problema autônomo (Pa^*) em Ω^*.

Finalmente, no apêndice A, apresentamos e provamos algumas desigualdades técnicas que serão usadas no decorrer deste trabalho, e no apêndice B, apresentamos as versões que usaremos de dois resultados clássicos na teoria das equações diferencias parciais elípticas.

CAPÍTULO 1

Existência de duas Soluções Positivas

1.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estabelecer a existência de duas soluções positivas para o problema quasilinear com condições de Dirichlet

$$(P)\begin{cases} -\Delta_p u &= f(x,u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, tal que a fronteira $\partial\Omega$ é de classe C^2, e f satisfaz um conjunto de condições que serão apresentadas no que segue.

Seja $\lambda_1(p,\Omega) > 0$ o primeiro autovalor de $-\Delta_p$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$. É bem conhecido (ver [2], [6], [22] e [25]) que $\lambda_1(p,\Omega)$ é simples, isolado, e que pode ser definido como segue

$$\lambda_1(p,\Omega) = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^p\, dx}, \tag{1.1}$$

ou também por

$$\lambda_1(p,\Omega) = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega |u|^p\, dx = 1 \right\}. \tag{1.2}$$

Daqui para frente, escreveremos indistintamente λ_1 ou $\lambda_1(p,\Omega)$.

Assumiremos as seguintes condições sobre a função f:

$(f1)$ $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é Caratheodory (i.e. $f(x,\cdot)$ é continua para quase todo $x \in \Omega$ e $f(\cdot, s)$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}^+$).

$(f2)$ $\liminf\limits_{s\to 0+} \dfrac{f(x,s)}{s^{p-1}} > \lambda_1(p,\Omega)$

$(f3)$ $|f(x,s)| \leq C(1+|s|^{\sigma-1})$; para alguma constante $C>0$, onde $1<\sigma<p^*$, onde

$$p^* = \frac{pN}{N-p}, \quad \text{se } 1 \leq p < N$$

$(f4)$ Existem constantes $\theta > p$ e $M > 0$ tais que para $s \geq M$

$$0 < \theta F(x,s) \leq s f(x,s).$$

Observemos que a condição $(f4)$ implica que $f(x,s) \geq C\, s^{\theta-1}$ para $s \geq M$, ou seja

$$\frac{f(x,s)}{s^{p-1}} \geq C s^{\theta-p},$$

então

$$\frac{f(x,s)}{s^{p-1}} \longrightarrow +\infty$$

pois $\theta > p$. No caso $p=2$ isto significa que f é super-linear em infinito.

As condições $(f1)$ a $(f4)$ não são suficientes para garantir a existência de uma solução positiva para (P). Por exemplo, se $f(x,s) \geq \alpha s^{p-1}$ para $\alpha > \lambda_1$ e $s \geq 0$, é possível provar que a única solução possível para (P) é a trivial. Assim, vemos que para ter solução positiva, o gráfico de f deve cortar o gráfico de $\lambda_1 s^{p-1}$. Porém, a pergunta é: quão abaixo de $\lambda_1 s^{p-1}$ deve estar o gráfico da função f ? É claro que se $f(s_0) = 0$ para algum $s_0 > 0$ o problema (P) tem uma solução positiva usando apenas as hipóteses $(f1)$, $(f2)$ e $(f3)$. Isto é possível, uma vez que da condição $(f2)$ temos garantida a existência da sub-solução e $w(x) = s_0$ será uma super-solução para o problema (P). A resposta para a pergunta acima motiva os resultados que serão estudados no Capítulo 2.

Definamos $f(x,s) = f(x,0)$ para s negativo, e consideremos o funcional $\Phi : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega F(x,u)\, dx, \tag{1.3}$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,\tau)d\tau$. De $(f1)$ e $(f3)$ o funcional Φ está bem definido e é de classe C^1 com derivada

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx - \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.4}$$

Assim, por *solução* entenderemos uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ que satisfaz (P) no sentido fraco, isto é

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.5}$$

Isto significa que u é um ponto crítico do funcional Φ. É claro que as soluções de (P) com a f estendida são as mesmas que as soluções do problema original (P).

Para obter a existência da primeira solução vamos supor que existe uma super-solução estrita w para o problema (P), uma vez que a sub-solução $\underline{u}$ será um múltiplo da primeira auto-função correspondente a $\lambda_1(p,\Omega)$, em virtude da hipótese $(f2)$. Truncando a função f usaremos minimização clássica para provar que o problema

$$(\tilde{P})\begin{cases} -\Delta_p u_1 &= \widetilde{f}(x,u_1) \quad \text{em } \Omega \\ u_1 &= 0 \qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma solução tal que

$$\underline{u} \le u_1 \le w.$$

Esta solução será em particular a primeira solução de (P).

Como nosso objetivo é provar a existência de uma segunda solução precisaremos de compacidade para nosso problema. A condição $(f4)$ vai nos garantir que Φ satisfaz a *Condição de Palais-Smale*. Porem precisaremos também acrescentar uma hipótese de motononicidade sobre f, a saber,

$(f5)$ $\quad f(x,\cdot)$ é estritamente crescente no intervalo $[0, \max\limits_{\overline{\Omega}} w]$, para quase todo $x \in \Omega$.

Esta hipótese nos permitirá usar o *Principio de Comparação Forte* de Guedda-Veron [19], para concluir que u_1 é um mínimo local no topologia C^1, e assim usar o resultado de Garcia-Manfredi-Peral [18] para garantir que é um mínimo local na topologia $W_0^{1,p}$. Supondo que u_1 é um mínimo local estrito, e usando $(f4)$ para provar que Φ não esta limitado por baixo, nos encontraremos com a geometria do *Passo da Montanha*, portanto teremos garantida a existência da segunda solução. Porém, u_1 pode não ser um mínimo local estrito, neste caso com o auxilio de um resultado análogo ao de Cuesta-de Figueiredo-Gossez [9], que usa o *Principio Variacional de Ekeland* na sua demonstração, concluiremos que (P) tem mais uma solução.

1.2 Existência da Primeira Solução Positiva

Lembremos que as soluções de (P) são pontos críticos do funcional Φ. Observemos que elas são positivas, de fato, fazendo $v = u^-$ em (1.5) temos que

$$-\int_{\{u\leq 0\}} |\nabla u^-|^p\,dx = \int_{\{u\leq 0\}} f(x,u)\,u^-\,dx = \int_{\{u\leq 0\}} f(x,0)\,u^-\,dx \geq 0.$$

Daí, $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u^-|^p\,dx = 0$ o que implica que $u^- = 0$ q.t.p. em Ω. Portanto,

$$u \geq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Definição 1.1. *A função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, algum $\alpha \in (0,1)$, é chamada sub-solução de (P) se*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\nabla v\,dx & \leq & \displaystyle\int_\Omega f(x,\underline{u})v\,dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad v \geq 0 \\ \underline{u} & \leq & 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Escrevemos $-\Delta_p \underline{u} \leq f(x,\underline{u})$.

Da mesma forma, a função $w \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, algum $\alpha \in (0,1)$, é chamada super-solução de (P) se

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w\nabla v\,dx & \geq & \displaystyle\int_\Omega f(x,w)v\,dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad v \geq 0 \\ w & \geq & 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Escrevemos $-\Delta_p w \geq f(x,w)$.

Definição 1.2. *A super-solução w é chamada super-solução estrita de (P) se*

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla v\, dx > \int_{\Omega} f(x,w)v\, dx, \quad \forall v \in C_c^1(\Omega), \quad v \geq 0, \quad v \neq 0$$

Escrevemos $-\Delta_p w > f(x,w)$

O seguinte Lema foi provado por Liebermann [21] e Tolksdorff [30].

Lema 1.3 (Estimativa $C^{1,\alpha}$, Tolksdorff, Liebermann). *Seja Ω um domínio limitado de classe $C^{2,\beta}$ para algum $\beta \in (0,1)$, e seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$. Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K_1$, para algum $\alpha \in (0,1)$ e uma constante $K_1 > 0$. As constantes α e K_1 só dependem de $N, \Omega, p, \|u\|_{L^\infty}$ e $\|\Delta_p u\|_{L^\infty}$*

O seguinte resultado foi provado por Anane [3].

Lema 1.4 (Estimativa L^∞, Anane, 1988 [3]). *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Suponhamos que existem números reais $a > 0$, $\sigma \in [1, p^*)$, $q \in [1, \frac{p^*}{p})$ e uma função $b \in L^{q'}(\Omega)$ $(b \geq 0)$ tais que*

$$-u\Delta_p u \leq a|u|^\sigma + b(x)|u| \qquad q.t.p.\ em\ \Omega.$$

Então $u \in L^\infty(\Omega)$ e $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$, onde C é uma constante que depende de a, σ, q, N, p, $\|b\|_{L^{q'}(\Omega)}$, e $\|u\|_{L^{p_0}(\Omega)}$, onde

$$p_0 = \begin{cases} p^* & se \quad p^* < \infty \\ 2\,max\{pq, \sigma\} & se \quad p^* = \infty. \end{cases}$$

Teorema 1.5. *Suponhamos que f satisfaz $(f1)$ e $(f3)$, e sejam $\underline{u}$ e w sub- e super-solução, respectivamente, de (P), tais que $\underline{u} \leq w$ em Ω. Então, (P) tem uma solução fraca $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que*

$$\underline{u} \leq u_1 \leq w.$$

Além do mais, $u_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Demonstração: Para provar o Teorema definamos a função $\widetilde{f} : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$\widetilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x, \underline{u}(x)); & s < \underline{u}(x) \\ f(x,s); & \underline{u}(x) \leq s \leq w(x) \\ f(x, w(x)); & s > w(x). \end{cases} \tag{1.6}$$

É imediato que $\widetilde{f}(x,\cdot)$ é continua. Usando $(f3)$ concluímos que ela é limitada, isto é,

$$|\widetilde{f}(x,s)| \leq M. \tag{1.7}$$

Agora, consideremos o funcional $\widetilde{\Phi} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widetilde{\Phi}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx - \int_\Omega \widetilde{F}(x,u) \, dx, \tag{1.8}$$

onde

$$\widetilde{F}(x,u) = \int_0^u \widetilde{f}(x,s) ds.$$

Continuaremos a demonstração do Teorema seguindo por passos:

Passo 1: Primeiro provaremos que $\widetilde{\Phi}$ é coercivo. Usando (1.7) e a imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ temos que

$$\widetilde{\Phi}(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \widetilde{C}\|u\|$$

Como $p > 1$,

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \tilde{\Phi}(u) = +\infty,$$

daí o resultado.

A seguir, provaremos que $\widetilde{\Phi}$ é fracamente semicontinuo inferior. Como $\|\cdot\|^p$, para $p > 1$, é fortemente continua e convexa, então é fracamente semicontinua inferior, portanto, só falta provar que o segundo termo de (1.8) é fracamente semicontinuo inferior. Para isso definamos o funcional

$$\begin{aligned} \Psi : L^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_\Omega \widetilde{F}(x,u(x)) \, dx, \end{aligned}$$

e provemos que ele é continuo. Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, então existem $h \in L^1(\Omega)$ e uma subseqüência $\{u_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ tais que

$$|u_{n_j}(x)| \leq h(x) \quad \text{q.t.p.},$$

$$u_{n_j}(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p.}$$

Usando a continuidade de $\widetilde{F}(x,\cdot)$ temos que

$$\widetilde{F}(x,u_{n_j}(x)) \longrightarrow \widetilde{F}(x,u(x)) \quad \text{q.t.p.},$$

e como

$$|\widetilde{F}(x,u_{n_j}(x))| \leq \tilde{h}(x), \qquad \text{onde} \qquad \tilde{h} = M\cdot h \in L^1(\Omega),$$

pelo *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue* concluímos que

$$\Psi(u_{n_j}) \longrightarrow \Psi(u).$$

Assim, se $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ é uma seqüência tal que $u_n \rightharpoonup u$, pela Imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^1(\Omega)$ temos que $u_n \longrightarrow u$ em $L^1(\Omega)$, então, usando a continuidade de Ψ resulta que

$$\int_\Omega \widetilde{F}(x,u_n(x))\,dx \longrightarrow \int_\Omega \widetilde{F}(x,u(x))\,dx,$$

e daí

$$\widetilde{\Phi}(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \widetilde{\Phi}(u_n).$$

Logo, existe $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\widetilde{\Phi}(u_1) = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} \widetilde{\Phi}(u),$$

isto é, u_1 é um mínimo global de $\widetilde{\Phi}$. Como $\widetilde{\Phi}$ é diferenciável, u_1 é um ponto crítico de (1.8), e assim solução do problema

$$(\tilde{P})\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_p u_1 & = & \widetilde{f}(x,u_1) & \text{em } \Omega \\ u_1 & = & 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Passo 2: $\underline{u} \leq u_1 \leq w$ em Ω.

Como $\underline{u}$ é sub-solução e u_1 é solução de $(\widetilde{P})$ temos que

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla\underline{u}\,\nabla v\,dx \leq \int_\Omega f(x,\underline{u})\,v\,dx$$

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\,\nabla v\,dx = \int_\Omega \widetilde{f}(x,u_1)\,v\,dx,$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \geq 0$. Então

$$\int_\Omega (|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1)\nabla v\, dx \leq \int_\Omega [f(x,\underline{u}) - \widetilde{f}(x,u_1)]v\, dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad v \geq 0.$$

Escolhendo $v = (\underline{u} - u_1)^+$, e substituindo na desigualdade acima temos que

$$\int_\Omega [f(x,\underline{u}) - \widetilde{f}(x,u_1)](\underline{u} - u_1)^+\, dx = \int_{\{\underline{u}-u_1 \geq 0\}} [f(x,\underline{u}) - \widetilde{f}(x,u_1)](\underline{u} - u_1)\, dx = 0,$$

pela definição de $\widetilde{f}$. Conseqüentemente

$$\begin{aligned} 0 \;&\geq\; \int_{\{\underline{u}-u_1 \geq 0\}} (|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1)\, \nabla(\underline{u} - u_1)\, dx \\ &\geq \begin{cases} c_p \displaystyle\int_{\{\underline{u}-u_1 \geq 0\}} |\nabla(\underline{u} - u_1)|^p\, dx & ; \quad \text{se} \quad p > 2 \\ c_p \dfrac{\left(\displaystyle\int_{\{\underline{u}-u_1 \geq 0\}} |\nabla(\underline{u} - u_1)|^p\, dx\right)^{2/p}}{\left(\displaystyle\int_{\{\underline{u}-u_1 \geq 0\}} (|\nabla \underline{u}| + |\nabla u_1|)^p\, dx\right)^{(2-p)/p}} & ; \quad \text{se} \quad 1 < p \leq 2, \end{cases} \end{aligned}$$

pela Proposição A.2. Logo, para qualquer $p > 1$ temos que

$$0 = \int_{\{\underline{u}-u_1 \geq 0\}} |\nabla(\underline{u} - u_1)|^p\, dx = \int_\Omega |\nabla(\underline{u} - u_1)^+|^p\, dx,$$

então

$$(\underline{u} - u_1)^+ = 0 \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja, $\underline{u} - u_1 \leq 0$, ou o que é a mesma coisa

$$\underline{u} \leq u_1.$$

Da mesma forma, podemos verificar que $u_1 \leq w$. Portanto, a solução u_1 de $(\widetilde{P})$ é tal que

$$\underline{u} \leq u_1 \leq w \quad \text{em } \Omega, \tag{1.9}$$

logo, $\widetilde{f}(x,u_1) = f(x,u_1)$, pela definição de $\widetilde{f}$, e assim u_1 é solução de (P).

Passo 3: Regularidade da solução $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

De (1.7) é imediato que $\widetilde{f}(\cdot, u_1(\cdot)) \in L^\infty(\Omega)$, então $\widetilde{f}(\cdot, u_1(\cdot)) \in L^1_{loc}(\Omega)$, logo $\Delta_p u_1 \in L^1_{loc}(\Omega)$. Por outro lado

$$-u_1 \Delta_p u_1 = u_1 \widetilde{f}(x, u_1) \leq M|u_1|, \quad M > 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Então $u_1 \in L^\infty(\Omega)$ pelo Lema 1.4, daí, $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Finalmente, como $\Delta_p u_1 \in L^\infty(\Omega)$, então

$$u_1 \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), \text{ para algum } \alpha \in (0,1),$$

pelo Lema 1.3. ■

O seguinte resultado foi provado por Vázquez [31].

Lema 1.6 (Principio do Máximo Forte, Vázquez, 1984 [31]). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio, e sejam $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ q.t.p. em Ω, $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$ e $\Delta_p u \leq \beta(u)$ q.t.p. em Ω, onde*

$$\beta : [0, +\infty) \to \mathbb{R},$$

é uma função continua, não-decrescente com $\beta(0) = 0$ e satisfaz uma das duas seguintes condições :

$$\beta(s_0) = 0 \quad \textit{para algum } s_0 > 0$$

ou $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e

$$\int_0^1 (s\beta(s))^{-\frac{1}{p}}\, ds = \infty.$$

Se $u \not\equiv 0$ em Ω, então $u > 0$ em Ω. Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ com $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da bola interior (i.e. existe uma bola $B \subset \Omega$ tal que $\widetilde{\Omega} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$), então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde ν é a normal unitária exterior em x_0.

Proposição 1.7. *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca não-trivial do seguinte problema de autovalor*

$$(PA) \begin{cases} -\Delta_p u &= \lambda_1 |u|^{p-2} u \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &\geq 0 \quad \text{em } \Omega \\ \quad u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, *para algum* $\alpha \in (0,1)$. *Além do mais verifica-se o Principio do Máximo Forte, isto é,*

$$u > 0 \quad em \quad \Omega \qquad e \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad sobre \quad \partial\Omega.$$

Demonstração: Seguiremos por passos:

Passo 1: Estudemos a regularidade de u. É imediato que $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$ pois $|u|^{p-2}u \in L^{p'}(\Omega)$ implica que $|u|^{p-2}u \in L^1_{loc}(\Omega)$, e como $-u\Delta_p u = \lambda_1 |u|^p$, com $\lambda_1 > 0$ e $1 \leq p < p^*$, então $u \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, pelo Lema 1.4. Daí, $|u|^{p-2}u \in L^\infty(\Omega)$, ou seja, $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$, então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ algum $\alpha \in (0,1)$, pelo Lema 1.3.

Passo 2: Definamos a função $\beta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $\beta(s) = \lambda_1 s^{p-1}$, é claro que ela é continua, crescente, com $\beta(0) = 0$, tal que $\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e

$$\int_0^1 (s\,\beta(s))^{-1/p}\, ds = \lambda_1^{-1/p} \int_0^1 \frac{ds}{s} = \lambda_1^{-1/p} \ln s \mid_0^1 = +\infty$$

Como $u \neq 0$, então $u > 0$ em Ω, pelo Lema 1.6. Por outro lado, como $\partial\Omega$ é de classe C^2, então a condição da bola interior é satisfeita em todos os pontos da fronteira, logo

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

■

Observação 1.1 (Notação). *Daqui para frente, escreveremos* ϕ_1 *para representar a primeira autofunção positiva de* $-\Delta_p$ *em* Ω *com condições de Dirichlet.*

Lema 1.8 (Lema de Hopf, 1987-1988). *Seja* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) + M u^{p-1}(x) & \geq & 0 & em\ \Omega\ (no\ sentido\ fraco),\ M \geq 0 \\ u & > & 0 & em\ \Omega \\ u & = & 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ *sobre* $\partial\Omega$.

Demonstração: Ver [25] e [26].

Teorema 1.9. *Suponhamos que (P) possui uma super-solução $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, algum $\alpha \in (0,1)$, tal que $w > 0$ em Ω e $f(x,w) \geq 0$. Suponhamos ainda que f satisfaz $(f1)$, $(f2)$ e $(f3)$. Então, (P) tem uma solução fraca $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$, tal que*

$$\varepsilon\phi_1 \leq u_1 \leq w,$$

para um $\varepsilon > 0$ apropriado.

Demonstração: De $(f2)$ temos que para um $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno a função $\varepsilon\phi_1$ é uma sub-solução de (P), ou seja,

$$-\Delta_p \underline{u} = \lambda_1 \underline{u}^{p-1} \leq f(x, \underline{u}), \quad \text{onde } \underline{u} := \varepsilon\phi_1$$

Da Proposição 1.7 temos que $\underline{u} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ é tal que

$$\underline{u} > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad e \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} < 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \tag{1.10}$$

Por outro lado, como $-\Delta_p w \geq f(x,w) \geq 0$, então

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} < 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \tag{1.11}$$

pelo Lema 1.8 (com $M = 0$). Assim, para um $\varepsilon > 0$ apropriado temos que $\underline{u} \leq w$ em Ω. Logo, o problema (P) tem uma solução $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\underline{u} \leq u_1 \leq w,$$

pelo Teorema 1.5. ■

Observação 1.2. *Se supomos que $f(x,\cdot)$ é estritamente crescente no intervalo $[0, \max_{\overline{\Omega}} w]$ temos que $f(x,w) \geq 0$, então $\frac{\partial w}{\partial \nu} < 0$, pelo Lema 1.8. Assim, podemos substituir a hipótese $f(x,w) \geq 0$ no Teorema 1.9, por uma hipótese apropriada de monotonicidade para $f(x,\cdot)$.*

Observação 1.3. *O fato de ter as derivadas normais de $\underline{u}$ e w, respectivamente, tais que*

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} < \frac{\partial w}{\partial \nu} < 0 \quad \textit{em } \partial\Omega,$$

nos garante que $\underline{u} \leq w$. Ver por exemplo, o caso das funções $\underline{u}(x) = \varepsilon\sqrt{x}$ e $w(x) = x$. Por menor que seja a escolha do ε, não temos como garantir que $\underline{u} \leq w$ em $(0, +\infty)$.

A seguir provaremos que as condições $(f1)$, $(f2)$ e $(f3)$ (inclusive $(f4)$) não são suficientes para garantir a existência de solução positiva para (P). Para provar este fato usaremos o seguinte resultado:

Lema 1.10 (Identidade de Picone, 1998 [1]). *Seja Ω um domínio limitado. Sejam $v > 0$, $u \geq 0$ diferenciáveis. Denotamos por*

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\frac{u^p}{v^p}|\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\nabla u|\nabla v|^{p-2}\nabla v, \\ R(u,v) &= |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v. \end{aligned}$$

Então

$$L(u,v) = R(u,v).$$

Mas ainda, $L(u,v) \geq 0$, e $L(u,v) = 0$ q.t.p. em Ω se e somente se $\nabla(u/v) = 0$ q.t.p. em Ω, isto é $u = kv$ para alguma constante k.

Demonstração: Ver [1].

Proposição 1.11. *Seja $f(x,s) \geq \alpha s^{p-1}$ para $\alpha > \lambda_1$ e $s \geq 0$. Suponha ainda que f satisfaz as condições $(f1)$ e $(f3)$. Então o problema (P) só tem a solução trivial.*

Demonstração: Por contradição. Suponhamos que (P) tem uma solução fraca não-trivial. Sabemos que neste caso, $u \geq 0$. Por $(f3)$ temos que $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e também $-u\Delta_p u \leq uf(x,u) \leq cu^\sigma + cu$ para $1 \leq \sigma < p^*$. Então $u \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, pelo Lema 1.4, logo $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$, então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, pelo Lema 1.3. Por outro lado , como $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$, $\Delta_p u \leq 0 = \beta(u)$ e $u \neq 0$ temos que $u > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$, pelo Lema 1.6. Como $\phi_1 > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$, ver Proposição 1.7 (ver também Observação 1.1) então $\dfrac{\phi_1^p}{u^{p-1}} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, logo, estamos em condições de aplicar o Lema 1.10 para as funções ϕ_1 e u, ou seja

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_\Omega R(\phi_1, u)\,dx &= \int_\Omega |\nabla \phi_1|^p\,dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\left(\frac{\phi_1^p}{u^{p-1}}\right) dx \\
&= \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^p\,dx - \int_\Omega f(x,u)\,\frac{\phi_1^p}{u^{p-1}}\,dx \\
&\le \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^p\,dx - \alpha \int_\Omega u^{p-1}\frac{\phi_1^p}{u^{p-1}}\,dx \\
&= (\lambda_1 - \alpha)\int_\Omega \phi_1^p\,dx < 0,
\end{aligned}
$$

o que é uma contradição.

■

Observação 1.4. *É possível provar o resultado acima, usando a Desigualdade de Díaz-Saa* [12].

Observação 1.5. *Observemos que se f satisfaz as condições $(f1)$, $(f2)$, $(f3)$ e:*

$$f(x, s_0) = 0 \quad \textit{para algum } s_0 > 0,$$

então $w(x) = s_0$ é uma super-solução de (P). Por outro lado, é imediato que para um $\varepsilon > 0$ apropriado $\underline{u} \le w$ em Ω, onde $\underline{u} = \varepsilon\phi_1$. Então o problema (P) tem uma solução $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$\underline{u} \le u_1 \le w,$$

por uma aplicação direta do Teorema 1.5.

1.3 A Condição de Palais-Smale

Para provar que o funcional Φ satisfaz a *Condição de Palais-Smale* provaremos primeiro que Φ' satisfaz a *Condição (S_+)*.

Definição 1.12. *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que o operador $T : X \longrightarrow X'$, satisfaz a condição (S_+) se para cada seqüência $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que*

$$
\left\{
\begin{array}{c}
u_n \rightharpoonup u \text{ em } X \\
\limsup\limits_{n\to+\infty} \langle Tu_n, u_n - u\rangle \le 0,
\end{array}
\right.
\tag{1.12}
$$

para algum $u \in X$, verifica-se que

$$u_n \to u \text{ em } X.$$

Lema 1.13. *$-\Delta_p$ satisfaz a condição (S_+).*

Demonstração: Seja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega) \\ \limsup\limits_{n \to +\infty} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle \leq 0, \end{cases} \tag{1.13}$$

para algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Observemos que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u)\, dx \\ &= \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot \nabla (u_n - u)\, dx \\ &\quad + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u)\, dx. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Afirmamos que o segundo termo de (1.14) converge para zero. De fato, fixemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e definamos

$$\begin{aligned} \varphi_u : W_0^{1,p}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v\, dx. \end{aligned}$$

Claramente φ_u é linear, a continuidade segue-se da *Desigualdade de Hölder*, pois $\nabla v \in (L^p(\Omega))^N$ e $|\nabla u|^{p-2} \nabla u \in \left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$. Portanto, $\varphi_u \in \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$. Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\varphi_u(u_n) \to \varphi_u(u),$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u_n\, dx \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla u\, dx,$$

logo

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla (u_n - u)\, dx \to 0 \tag{1.15}$$

Para estudar o primeiro termo de (1.14) consideremos dois casos:

Caso 1 : Se $p \geq 2$, pela Observação A.1 temos que

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot \nabla(u_n - u)\, dx \geq c_p \|u_n - u\|^p. \tag{1.16}$$

Usando (1.13), (1.16) e (1.15) em (1.14) temos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup \langle -\Delta_p u_n, u_n - u\rangle \\ &= \limsup \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u) \cdot \nabla(u_n - u)\, dx \\ &\quad + \lim \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla(u_n - u)\, dx \\ &\geq c_p \limsup \|u_n - u\|^p. \end{aligned}$$

Por outro lado, $u - u_n \rightharpoonup 0$ implica que $\liminf \|u - u_n\|^p \geq 0$, então

$$0 \leq \liminf \|u - u_n\|^p \leq \limsup \|u - u_n\|^p \leq 0,$$

ou seja,

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Caso 2 : Se $1 < p \leq 2$, pela Observação A.1 temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\, \nabla(u_n - u)\, dx &\geq c_p \frac{\|u_n - u\|^2}{(\|u_n\| + \|u\|)^{2-p}} \\ &\geq c_p \frac{\|u_n - u\|^2}{(C + \|u\|)^{2-p}}, \end{aligned}$$

pois $u_n \rightharpoonup u$ implica que $\|u_n\| \leq C$. Continuando da mesma forma que no Caso 1 concluímos que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

Proposição 1.14. *Φ' satisfaz a condição (S_+).*

Demonstração: Seja $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \,\text{em}\, W_0^{1,p}(\Omega) \\ \limsup\limits_{n\to+\infty} \langle \Phi'(u_n), u_n - u\rangle \leq 0, \end{cases} \tag{1.17}$$

para algum $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Sabemos que

$$\begin{aligned} \langle \Phi'(u_n), u_n - u \rangle &= \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u)\, dx - \int_\Omega f(x, u_n) \cdot (u_n - u)\, dx \\ &= \langle -\Delta_p u_n, u_n - u \rangle - \int_\Omega f(x, u_n) \cdot (u_n - u) dx. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Afirmamos que $\int_\Omega f(x, u_n) \cdot (u_n - u) dx \longrightarrow 0$. De fato, seja σ' tal que $\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma'} = 1$ e consideremos uma subseqüência de $\{u_n\}_{n=1}^{+\infty}$ que ainda chamaremos u_n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\int_\Omega |u_n|^{(\sigma-1)\sigma'}\, dx = \int_\Omega |u_n|^\sigma < \infty\, dx,$$

pela Imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\sigma(\Omega)$. Então $f(\cdot, u_n(\cdot)) \in L^{\sigma'}(\Omega)$, logo

$$\int_\Omega |f(x, u_n) \cdot (u_n - u)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x, u_n)|^{\sigma'} dx \right)^{1/\sigma'} \|u_n - u\|_{L^\sigma}, \tag{1.19}$$

pela *Desigualdade de Hölder*. Por outro lado, a Imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^\sigma(\Omega)$ nos garante que

$$u_n \to u \quad \text{em } L^\sigma(\Omega),$$

Então, existem $g \in L^\sigma(\Omega)$ e uma subseqüência $\{u_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ tais que

$$\begin{cases} |u_{n_j}(x)| \leq g(x) \\ u_{n_j}(x) \to u(x) \end{cases}$$

q.t.p. em Ω. Pela continuidade de $f(x, \cdot)$ é imediato que

$$f(x, u_{n_j}(x)) \longrightarrow f(x, u(x)), \text{ q.tp. em } \Omega,$$

e por $(f3)$

$$\begin{aligned} |f(x, u_{n_j}(x))| &\leq C(1 + |u_{n_j}(x)|^{\sigma-1}) \\ &\leq C(1 + [g(x)]^{\sigma-1}) := h(x) \end{aligned}$$

onde $h \in L^{\sigma'}(\Omega)$. Pelo *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue* concluímos que

$$f(x, u_{n_j}) \to f(x, u) \quad \text{em } L^{\sigma'}(\Omega),$$

logo, a seqüência $\{f(x, u_{n_j})\}$ é limitada em $L^{\sigma'}(\Omega)$. Aplicando limites em (1.19) para a subseqüência u_{n_j} temos que

$$\int_\Omega f(x, u_{n_j}) \cdot (u_{n_j} - u)\, dx \to 0, \tag{1.20}$$

e daí a afirmação.

Para finalizar a demonstração do Lema apliquemos limites em (1.18), então

$$\limsup \langle \Phi'(u_n), u_n - u\rangle = \lim\langle -\Delta_p u_n, u_n - u\rangle \le 0,$$

por (1.17) e (1.20), logo

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega),$$

pelo Lema 1.13 ∎

Definição 1.15. *Sejam X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1. Dizemos que Φ satisfaz a Condição de Palais-Smale (ou de forma mais breve, Φ satisfaz a Condição (PS)) se cada seqüência $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ tal que*

$$\begin{cases} |\Phi(u_n)| \le C, \quad C > 0 \\ \Phi'(u_n) \to 0, \quad \textit{para } n \to \infty, \textit{ em } X', \end{cases}$$

possui uma subseqüência convergente (na norma de X).

Lema 1.16. *Φ satisfaz a condição (PS).*

Demonstração: Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência tal que

$$\begin{cases} |\Phi(u_n)| \le C \\ \Phi'(u_n) \to 0, \end{cases}$$

então

$$|\Phi(u_n)| = \left| \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u_n|^p\, dx - \int_\Omega F(x, u_n)\, dx \right| \le C, \tag{1.21}$$

e também

$$|\langle \Phi'(u_n), v\rangle| \le \varepsilon_n \|v\|, \tag{1.22}$$

onde $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varepsilon_n \to 0$. Fazendo $v = u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ em (1.22) temos que

$$|\langle \Phi'(u_n), u_n\rangle| = \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^p\, dx - \int_\Omega f(x, u_n) u_n\, dx \right| \le \varepsilon_n \|u_n\|. \tag{1.23}$$

De (1.21) e (1.23) temos que

$$\begin{aligned}\theta\Phi(u_n) - \langle \Phi'(u_n), u_n\rangle &= \left(\frac{\theta}{p} - 1\right)\|u_n\|^p + \int_\Omega [f(x,u_n)u_n - \theta F(x,u_n)]\,dx \\ &\leq \widetilde{C} + \varepsilon_n \|u_n\|,\end{aligned}$$

onde $\widetilde{C} = C \cdot \theta$, então

$$\left(\frac{\theta}{p} - 1\right)\|u_n\|^p \leq \widetilde{C} + \varepsilon_n\|u_n\| + \int_\Omega [\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n]\,dx \tag{1.24}$$

Usando $(f4)$ temos que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega [\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n]\,dx &= \int_{\{x\in\Omega\,:\,u_n > M\}} [\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n]\,dx \\ &\quad + \int_{\{x\in\Omega\,:\,0\leq u_n \leq M\}} [\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n]\,dx \\ &\leq \int_{\{x\in\Omega\,:\,0\leq u_n \leq M\}} [\theta\ F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n]\,dx \\ &\leq C_1.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (1.24) temos

$$\left(\frac{\theta}{p} - 1\right)\|u_n\|^p \leq C_2 + \varepsilon_n\|u_n\|,$$

onde $C_2 = C_1 + \widetilde{C}$. Como $\left(\frac{\theta}{p} - 1\right) > 0$ e $p > 1$ é simples verificar que

$$\|u_n\| \leq C_3,$$

onde C_3 é uma constante positiva. Logo, usando que $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo temos que existe uma subseqüência $\{u_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

logo, a seqüência $\{\|u_{n_j} - u\|\}$ é limitada. Escolhendo $v = u_{n_j} - u$ em (1.22) temos que

$$|\langle \Phi'(u_{n_j}), u_{n_j} - u\rangle| \leq \varepsilon_{n_j}\|u_{n_j} - u\| \to 0,$$

pois em particular $\varepsilon_{n_j} \to 0$. Em resumo

$$\begin{cases} u_{n_j} \rightharpoonup u \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega) \\ \lim \langle \Phi'(u_{n_j}), u_{n_j} - u \rangle = 0. \end{cases}$$

Lembrando que Φ' satisfaz a condição (S_+) ,ver Proposição 1.14, concluímos que

$$u_{n_j} \to u \quad \text{em} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

1.4 Um Lema de Existência e Unicidade

Lema 1.17. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Seja $f \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$. Então, existe uma única solução fraca $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de*

$$(P_f) \begin{cases} -\Delta_p u &= f(x) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Demonstração: Seguiremos por passos:

Passo 1 (Existência): Consideremos o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \int_\Omega f \cdot u\,dx$$

Pela *Desigualdade de Young* e pela *Desigualdade de Poincaré* temos que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{\varepsilon}{\lambda_1 p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{C}{\varepsilon^{p'/p}} \\ &= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{C}{\varepsilon^{p'/p}}, \end{aligned}$$

onde $C = C(p', \|f\|_{L^{p'}})$. Escolhendo $0 < \varepsilon < \lambda_1$ temos que o funcional Φ é coercivo.

Seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

$$\int_\Omega f \cdot u_n \to \int_\Omega f \cdot u,$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla u_n|^p\,dx,$$

daí temos que Φ é fracamente semicontinua inferior.

Portanto, existe $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\Phi(u_0) = \inf\limits_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi(u)$, e como Φ é de classe C^1, u é um ponto crítico de Φ e assim solução fraca de (P_f).

Passo 2 (Unicidade): Definamos o operador

$$\begin{aligned} T: L^{p'}(\Omega) &\rightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \\ f &\rightarrow u \end{aligned}$$

onde u é solução fraca de (P_f), e sejam u_1 e u_2, duas soluções fracas de (P_f), ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(x)\cdot\varphi\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f(x)\cdot\varphi\,dx$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Tomando $\varphi = u_1 - u_2$ como função teste, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\,\nabla(u_1-u_2)\,dx \\ &\geq \begin{cases} c_p\|u_1-u_2\|^p & ; \text{ se } p \geq 2 \\ c_p\dfrac{\|u_1-u_2\|^2}{(\|u_1\|+\|u_2\|)^{2-p}} & ; \text{ se } p < 2, \end{cases} \end{aligned}$$

pela Observação A.1. Daí é imediato que $u_1 = u_2$. ∎

Observação 1.6. *Notemos que o operador T é injetor, pois para cada $f \in L^{p'}$, existe uma única $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $Tf = u$.*

Observação 1.7. *Se supusermos que $f \in L^\infty(\Omega)$, é possível obter a mesma conclusão de existência e unicidade.*

Observação 1.8. *Se $\partial\Omega$ é de classe C^2 podemos obter regularidade $C^{1,\alpha}$ para a solução de (P_f). De fato, como $f \in L^{p'}(\Omega)$ então $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $-u\Delta_p u \leq \|f\|_{L^\infty}|u|$, logo*

$$u \in L^\infty(\Omega),$$

pelo Lema 1.4, daí $u \in L^\infty(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Finalmente, como $\Delta_p u \in L^\infty(\Omega)$, pelo Lema 1.3 concluímos que

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \textit{para algum } \alpha \in (0,1).$$

Observação 1.9. *Se supusermos que $f \geq 0$ é imediato que $u \geq 0$ e como $f \neq 0$ então $u \neq 0$. Observemos que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$ e $\Delta_p u \leq 0 = \beta(u)$, então, Pelo Principio do Máximo de Vázquez, Lema 1.6, concluímos que*

$$u > 0 \quad em\ \Omega.$$

1.5 Princípios de Comparação

Proposição 1.18 (Princípio de Comparação Fraca). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Sejam $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que*

$$\begin{cases} -\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p u_2 & em\ \Omega \quad (no\ sentido\ fraco) \\ u_1 \leq u_2 & em\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Então

$$u_1 \leq u_2 \quad q.t.p.\ em\ \Omega.$$

Demonstração: Como $-\Delta_p u_1 \leq -\Delta_p u_2$ é uma desigualdade no sentido fraco, então

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\varphi\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla\varphi\, dx, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \varphi \geq 0 \tag{1.25}$$

Escolhendo $\varphi = (u_1 - u_2)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como função teste, em (1.25) temos que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2\right) \nabla(u_1 - u_2)^+\, dx \\ &= \int_{\{u_1 - u_2 \geq 0\}} \left(|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1\right) \nabla(u_1 - u_2)\, dx \end{aligned}$$

Usando a Proposição A.2 temos que, para qualquer $p > 1$

$$0 = \int_{\{u_1 - u_2 \geq 0\}} |\nabla(u_1 - u_2)|^p\, dx = \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)^+|^p\, dx$$

então

$$(u_1 - u_2)^+ = 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja

$$u_1 \leq u_2, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

■

Observação 1.10. *Alguns resultados de comparação, incluindo princípios de comparação fraca e forte, para um operador que em particular é o p-Laplaciano, foram provados por Damascelli* [11].

Agora enunciamos o *Princípio de Comparação Forte* de Guedda-Veron [19].

Lema 1.19 (Principio de Comparação Forte, Guedda-Veron, 1989). *Suponha que* $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^2, $f, g \in L^\infty(\Omega)$, u *e* v *duas funções em* $C^1(\overline{\Omega})$ *tais que satisfazem as equações*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & ; \text{em } \Omega \\ u = 0 & ; \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} -\Delta_p v = g & ; \text{em } \Omega \\ v = 0 & ; \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Suponha também que $0 \leq f \leq g$ *q.t.p. em* Ω, *e que o conjunto*

$$C = \{x \in \Omega : f(x) = g(x)\}$$

tem interior vazio, então

$$0 < u < v \quad \text{em } \Omega \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{1.26}$$

Observação 1.11. *Para obter o Principio de Comparação Forte, Guedda-Veron impõem a condição de que o conjunto* $C = \{x \in \Omega : f(x) = g(x)\}$ *tenha interior vazio. Supondo que* $f \neq g$ *num conjunto de medida de Lebesgue positiva, Cuesta e Takǎc [10] provaram* (1.26) *impondo uma restrição sobre o domínio* Ω, *a saber, que sua fronteira* $\partial\Omega$ *seja uma variedade conexa de classe* $C^{2,\alpha}$, *para algum* $\alpha \in (0, 1)$.

Proposição 1.20. *Suponha que* $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^2 *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função continua crescente. Sejam* u *e* v *duas funções em* $C^1(\overline{\Omega})$, *onde* $u \geq 0$ *e* $u \neq 0$, *tais que*

$$0 < -\Delta_p u < f(u) \leq f(v) < -\Delta_p v \quad \text{em} \quad \Omega \tag{1.27}$$

$$u = v = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

Então

$$0 < u < v \quad \text{em } \Omega \qquad e \qquad \frac{\partial v}{\partial \nu} < \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad \text{em } \partial\Omega.$$

Demonstração: Observemos primeiro que, as desigualdades em (1.27) são consideradas no sentido fraco, isto é,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\, dx < \int_{\Omega} f(u)\varphi\, dx \leq \int_{\Omega} f(v)\varphi\, dx < \int_{\Omega} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla\varphi\, dx \tag{1.28}$$

para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ e $\varphi \neq 0$.

Pelo *Princípio do Máximo de Vasquez*, Lema 1.6, temos que $u > 0$. De fato, é imediato que $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$. Escolhendo a função $\beta(s) = 0$ temos que $\Delta_p u < 0$ e como $u \geq 0$ e $u \neq 0$ concluímos a afirmação.

Por outro lado, de (1.27) temos que $u \leq v$, pelo *Principio de Comparação Fraca.* Como $f(u), f(v) \in L^\infty(\Omega)$, então os seguintes problemas

$$(P_u)\begin{cases} -\Delta_p\widetilde{u} &= f(u) \quad \text{em } \Omega \\ \quad\ \widetilde{u} &= 0 \qquad\ \ \text{em } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (P_v)\begin{cases} -\Delta_p\widetilde{v} &= f(v) \quad \text{em } \Omega \\ \quad\ \widetilde{v} &= 0 \qquad\ \ \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

tem soluções únicas $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ respectivamente, pelo Lema 1.17. Agora consideremos o seguinte conjunto

$$C = \{x \in \Omega : f(u(x)) = f(v(x))\}.$$

Afirmamos que $int\, C = \emptyset$. Provaremos esta afirmação por contradição. Seja $x_0 \in int\, C$ então, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(x_0) \subset int\, C$ e

$$f(u) = f(v) \quad \text{em}\, B_\rho(x_0), \tag{1.29}$$

logo

$$u = v \quad \text{em} \quad B_\rho(x_0). \tag{1.30}$$

Caso contrario, existe $x_1 \in B_\rho(x_0)$ tal que $u(x_1) < v(x_1)$, e pela continuidade de u e de v existe uma bola $B_r(x_1) \subset B_\rho(x_0)$, com $r < \rho$, tal que $u < v$ em $B_r(x_1)$. Então $f(u) < f(v)$ em $B_r(x_1) \subset B_\rho(x_0)$, pois f é crescente, contradição com (1.29).

Seja $\varphi_0 \in C_c^1(\Omega)$ tal que $\varphi_0 \geq 0$ e $supp\, \varphi_0 \subset B_\rho(x_0)$. De (1.27) temos que

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi_0\, dx < \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi_0\, dx \tag{1.31}$$

Porém, $\nabla u = \nabla v$ em $B_\rho(x_0)$, logo

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi_0\, dx = \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla\varphi_0\, dx,$$

contradição com (1.31). Portanto, $int\, C = \emptyset$.

Aplicando o *Princípio de Comparação Forte* (Lema 1.19) aos problemas (P_u) e (P_v) concluímos que

$$0 < \widetilde{u} < \widetilde{v} \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \nu} < \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{em } \partial\Omega. \tag{1.32}$$

Finalmente, observemos que (1.27) pode ser escrito como

$$0 < -\Delta_p u < f(u) = -\Delta_p \widetilde{u} \leq -\Delta_p \widetilde{v} = f(v) < -\Delta_p v \quad \text{em } \Omega, \tag{1.33}$$

logo, usando o *Princípio de Comparação Fraca* e (1.32) temos que

$$0 < u \leq \widetilde{u} < \widetilde{v} \leq v \quad \text{em } \Omega$$

e como

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \leq \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \nu} < \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \nu} \leq \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

então, a conclusão da Proposição é imediata. ■

Observação 1.12. *Na demonstração do Lema, em* (1.31), *usamos que*

$$-\Delta_p u < -\Delta_p v \tag{1.34}$$

no sentido da desigualdade (1.28). *Porém, se em lugar de* (1.27) *temos que*

$$0 < -\Delta_p u = f(u) \leq f(v) < -\Delta_p v$$

(*isto é, a função v é uma super-solução estrita*) *ou*

$$0 < -\Delta_p u < f(u) \leq f(v) = -\Delta_p v$$

a condição (1.34) *também é satisfeita.*

1.6 Existência da Segunda Solução Positiva

Lema 1.21. *De* ($f4$) *o funcional* Φ *não é limitado por baixo.*

Demonstração: De $(f4)$ temos que

$$\frac{d(\theta \ln t)}{dt} \leq \frac{d(\ln F(x,t))}{dt} \quad \text{para } t \geq M,$$

integrando de M a s temos que

$$\theta \ln\left(\frac{s}{M}\right) \leq \ln\left[\frac{F(x,s)}{F(x,M)}\right] \quad \text{para } s \geq M.$$

Fazendo $C(x) = \dfrac{F(x,M)}{M^\theta}$ temos que

$$C(x)s^\theta \leq F(x,s) \quad \text{para } s \geq M \tag{1.35}$$

e daí $F(x,s) \geq Cs^\theta - C_1$ para $s \geq 0$ e alguma constante $C_1 > 0$. Assim, para $t > 0$ temos que

$$\begin{aligned} \Phi(t\phi_1) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(t\phi_1)|^p - \int_\Omega F(x,t\phi_1) \\ &\leq \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla\phi_1|^p - Ct^\theta \int_\Omega \phi_1^\theta + C_1\, med(\Omega). \end{aligned}$$

Como $\theta > p$ concluímos que

$$\lim_{t\to+\infty} \Phi(t\phi_1) = -\infty.$$

■

Observação 1.13. *Usando (1.35) em $(f4)$ temos que $f(x,s) \geq \widetilde{C}s^{\theta-1}$ para $s \geq M$, então*

$$\frac{f(x,s)}{s^{p-1}} \geq \widetilde{C}s^{\theta-p},$$

e como $\theta > p$ concluímos que

$$\frac{f(x,s)}{s^{p-1}} \longrightarrow +\infty \quad \textit{quando } s \longrightarrow +\infty. \tag{1.36}$$

Definição 1.22. *Seja $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional sobre o espaço de Banach X. Dizemos que $u_0 \in X$ é um mínimo local de Φ se existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u); \quad \forall u \in X \quad \textit{onde} \quad \|u - u_0\| \leq \varepsilon_0.$$

Proposição 1.23 (Resultado análogo ao de Cuesta, de Figueiredo, Gossez [9]). *Seja u_0 um mínimo local estrito do funcional Φ (i.e. existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$\Phi(u_0) < \Phi(u); \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{onde} \quad 0 < \|u - u_0\| < \varepsilon_0).$$

Então, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos que

$$\inf\{\Phi(u) : \|u - u_0\| = \varepsilon\} > \Phi(u_0). \tag{1.37}$$

Demonstração: Na demonstração do Lema usamos idéias encontradas em [9]. Seguiremos por contradição. Suponhamos que

$$\inf\{\Phi(u) : \|u - u_0\| = \alpha\} = \Phi(u_0)$$

para algum α tal que $0 < \alpha < \varepsilon_0$. Então, existe uma seqüência minimizante $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \|u_n - u_0\| = \alpha \\ \Phi(u_n) \le \Phi(u_0) + \dfrac{1}{2n^2}. \end{cases} \tag{1.38}$$

Consideremos agora o seguinte anel

$$\mathcal{R} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \alpha - \delta \le \|u - u_0\| \le \alpha + \delta\},$$

onde δ é escolhido de tal forma que

$$0 < \alpha - \delta \quad \text{e} \quad \alpha + \delta < \varepsilon_0.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, aplicamos o *Princípio Variacional de Ekeland* (ver Proposição B.1) ao funcional Φ sobre $\mathcal{R}$, então existe $v_n \in \mathcal{R}$ tal que

$$\Phi(v_n) \le \Phi(u_n), \tag{1.39}$$

$$\|v_n - u_n\| \le \frac{1}{n}, \tag{1.40}$$

$$\Phi(v_n) \le \Phi(u) + \frac{1}{n}\|u - v_n\| \quad \forall u \in \mathcal{R}. \tag{1.41}$$

Afirmamos que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência (PS) para Φ, ou seja,

$$|\Phi(v_n)| \le C$$

$$\Phi'(v_n) \to 0.$$

De fato, como u_0 é mínimo local estrito, usando (1.38) e (1.39) temos que

$$\begin{aligned} \Phi(u_0) < \Phi(v_n) &\leq \Phi(u_0) + \frac{1}{n} && (1.42)\\ &\leq \Phi(u_0) + 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, && (1.43) \end{aligned}$$

logo $|\Phi(v_n)| \leq C$, assim temos a primeira parte da afirmação. Para provar que $\Phi'(v_n) \to 0$ seguiremos por passos:

Passo 1: Para n grande temos que $n > \frac{1}{\delta}$ (ou $\delta > \frac{1}{n}$), usando (1.40) temos que

$$\alpha - \delta < \alpha - \frac{1}{n} < \|v_n - u_0\| < \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + \delta, \tag{1.44}$$

ou seja,

$$v_n \in int\mathcal{R}.$$

Passo 2: Seja $t > 0$ e $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma função tal que $\|w\| = 1$. Consideremos então, a função

$$u_t = v_n + tw,$$

e observemos que para, t suficientemente pequeno, $u_t \in \mathcal{R}$. De fato,

$$\lim_{t \to 0^+} \|u_t - u_0\| = \|v_n - u_0\|,$$

onde o lado direito é

$$\leq \|v_n - u_n\| + \|u_n - u_0\| \leq \frac{1}{n} + \alpha < \delta + \alpha$$

e também

$$\geq \|u_n - u_0\| - \|v_n - u_n\| \geq \alpha - \frac{1}{n} > \alpha - \delta.$$

Passo 3: Substituindo u por u_t em (1.41) temos que

$$\Phi(v_n) \leq \Phi(v_n + tw) + \frac{1}{n}t. \tag{1.45}$$

Usando a *Formula de Taylor* para Φ em torno de u_t junto com a desigualdade (1.45) temos que

$$\begin{aligned} \Phi(v_n + tw) &= \Phi(v_n) + t\langle \Phi'(v_n), w\rangle + o(t)\\ &\leq \Phi(v_n + tw) + \frac{1}{n}t + t\langle \Phi'(v_n), w\rangle + o(t), \end{aligned}$$

onde $\lim_{t \to 0^+} \frac{o(t)}{t} = 0$. Então

$$0 \leq \frac{1}{n} + \langle \Phi'(v_n), w \rangle + \frac{o(t)}{t}.$$

Fazendo $t \to 0^+$ resulta que

$$0 \leq \frac{1}{n} + \langle \Phi'(v_n), w \rangle,$$

e como esta expressão é verdade em particular para $-w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ temos que

$$|\langle \Phi'(v_n), w \rangle| \leq \frac{1}{n}, \text{ para todo } w \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \|w\| = 1,$$

ou seja

$$\|\Phi'(v_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

e daí $\Phi'(v_n) \to 0$ em $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$.

Agora, como $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência (PS) para Φ então, pelo Lema 1.16 existe uma subseqüência tal que

$$v_{n_j} \to v \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

então

$$\alpha - \frac{1}{n_j} < \|v_{n_j} - u_0\| < \alpha + \frac{1}{n_j},$$

pois em particular (1.44) é válida para a subseqüência v_{n_j}. Daí $\lim \|v_{n_j} - u_0\| = \alpha$, e pela continuidade da norma

$$\|v - u_0\| = \alpha,$$

ou seja $v \neq u_0$. Por outro lado, como (1.42) é verdade também para a subseqüência v_{n_j} temos que $\Phi(u_0) < \Phi(v_{n_j}) \leq \Phi(u_0) + \frac{1}{n_j}$, então

$$0 < \Phi(v_{n_j}) - \Phi(u_0) \leq \frac{1}{n_j},$$

logo $\Phi(v_{n_j}) \to \Phi(u_0) = \Phi(v)$, pela continuidade de Φ. Contradição com o fato de u_0 ser mínimo local estrito. ■

O seguinte Lema é uma extensão para $W_0^{1,p}(\Omega)$ do conhecido resultado de Brezis-Niremberg [8].

Lema 1.24 (Garcia-Manfredi-Peral, 2000, [18]). *Se $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é um minimizador local de Φ em $C^1(\Omega)$, então u_0 é um minimizador local em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [18].

Teorema 1.25. *Suponhamos que o problema (P) possui uma super-solução estrita $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, algum $\alpha \in (0,1)$, tal que $w > 0$ em Ω. Suponhamos ainda que f satisfaz as hipóteses $(f1), (f2), (f3), (f4)$ e a hipótese adicional*

$(f5)$ $\quad$ *$f(x,\cdot)$ é estritamente crescente no intervalo $[0, \max_{\overline{\Omega}} w]$, para quase todo $x \in \Omega$*

Então (P) tem duas soluções positivas.

Demonstração: Pelo Teorema 1.9 sabemos que (P) tem uma solução $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que

$$0 < \underline{u} \leq u_1 \leq w,$$

onde $\underline{u} = \varepsilon\phi_1$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então, usando $(f5)$ temos que

$$0 < f(x, \underline{u}) \leq f(x, u_1) \leq f(x, w) \tag{1.46}$$

Agora, estudaremos (1.46) por partes:

Parte 1: $\quad 0 < -\Delta_p \underline{u} = \lambda_1 \underline{u}^{p-1} < f(x, \underline{u}) \leq f(x, u_1) = -\Delta_p u_1$

Consideremos os seguintes problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p \underline{u} &= \lambda_1 \underline{u}^{p-1} \quad \text{em } \Omega \\ \underline{u} &= 0 \qquad\quad\ \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} -\Delta_p u_1 &= f(x, u_1) \quad ; \text{em } \Omega \\ u_1 &= 0 \qquad\qquad ; \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Sejam $\hat{f}(x) = \lambda_1 \underline{u}(x)^{p-1}$ e $\hat{g}(x) = f(x, u_1(x))$, então $\hat{f}, \hat{g} \in L^\infty(\Omega)$ são tais que $\hat{f} < \hat{g}$ em Ω. Então, o conjunto

$$C = \{x \in \Omega : \hat{f}(x) = \hat{g}(x)\}$$

tem interior vazio. Portanto

$$0 < \underline{u} < u_1 \qquad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} < \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} < 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{1.47}$$

pelo *Princípio de Comparação Forte* (Lema 1.19).

Parte 2: $\quad -\Delta_p u_1 = f(x, u_1) \leq f(x, w) < -\Delta_p w$

Pela Proposição 1.20 (ver também a Observação 1.12) temos que

$$u_1 < w \qquad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu} < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{1.48}$$

Juntando (1.47) e (1.48) temos que

$$0 < \underline{u} < u_1 < w \quad \text{em } \Omega \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu} < \frac{\partial u_1}{\partial \nu} < \frac{\partial \underline{u}}{\partial \nu} < 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Logo, se $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $\|v - u_1\|_{C^1} \leq r$, para $r > 0$ suficientemente pequeno temos que

$$\underline{u} \leq v \leq w \quad \text{em } \Omega.$$

Então

$$\begin{aligned} F(x, v(x)) - \widetilde{F}(x, v(x)) &= \int_0^{v(x)} f(x,\tau)\, d\tau - \int_0^{\underline{u}(x)} \widetilde{f}(x,\tau)\, d\tau - \int_{\underline{u}(x)}^{v(x)} \widetilde{f}(x,\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^{v(x)} f(x,\tau)\, d\tau - f(x, \underline{u}(x))\underline{u}(x) - \int_{\underline{u}(x)}^{v(x)} f(x,\tau) d\tau \\ &= F(x, \underline{u}(x)) - f(x, \underline{u}(x)) \cdot \underline{u}(x), \end{aligned}$$

só depende de x, isto é, $F(x, v(x)) - \widetilde{F}(x, v(x))$ é uma função independente de v. Mas ainda,

$$\begin{aligned} \Phi(v) - \widetilde{\Phi}(v) &= \int_\Omega [\widetilde{F}(x, v(x)) - F(x, v(x))]\, dx \\ &= \int_\Omega [f(x, \underline{u}(x))\underline{u}(x) - F(x, \underline{u}(x)]\, dx = C, \end{aligned}$$

é constante para $\|v - u_1\|_{C^1} \leq r$, logo

$$\Phi(u_1) = C + \widetilde{\Phi}(u_1) \leq C + \widetilde{\Phi}(v) = \Phi(v),$$

pois u_1 é um mínimo global de $\widetilde{\Phi}$. Assim, u_1 é um mínimo local de Φ na topologia C^1. Então, usando o Lema 1.24 concluímos que

$$u_1 \quad \text{é mínimo local de } \Phi \text{ na topologia} \quad W_0^{1,p}.$$

Logo, existe $\hat{r}_0 > 0$ tal que

$$\Phi(u_1) \leq \Phi(v), \quad \text{para todo } v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } \|v - u_1\| < \hat{r}_0.$$

Notemos que o mínimo local u_1 pode ser estrito ou não, assim consideraremos a seguir essas duas alternativas:

Alternativa 1: u_1 é um mínimo local estrito

Neste caso, para cada $0 < \rho < \hat{r}_0$ temos que

$$\inf\{\Phi(v) : \|v - u_1\| = \rho\} = \inf_{v \in \partial B_\rho(u_1)} \Phi(v) > \Phi(u_1),$$

pela Proposição 1.23. Logo, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf_{u \in \partial B_\rho(u_1)} \Phi(u) \geq b > \Phi(u_1).$$

Por outro lado, como Φ não é limitado por baixo, Lema 1.21, existe $e \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus B_\rho(u_1)$ tal que $\Phi(e) < b$, então

$$\max\{\Phi(u_1), \Phi(e)\} < b.$$

Mas ainda, Φ satisfaz a condição (PS), Lema 1.16, conseqüentemente pelo *Teorema do Passo da Montanha* temos um ponto crítico u_2 de Φ (i.e. $\Phi'(u_2) = 0$) no nível

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} \Phi(u) \geq b,$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; W_0^{1,p}(\Omega)) : \gamma(0) = u_1, \gamma(1) = e\}$$

é a classe de caminhos que juntam u_1 a e.

Alternativa 2: u_1 é um mínimo local, sem ser estrito.

Então, existe $0 < \rho < \hat{r}_0$, tal que

$$\inf\{\Phi(u) : \|u - u_1\| = \rho\} = \Phi(u_1).$$

Neste caso, pela demonstração da Proposição 1.23 temos que existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\|v - u_1\| = \rho \quad \text{e} \quad \Phi(v) = \Phi(u_1),$$

ou seja, v é um mínimo local de Φ, e assim um ponto critico de Φ. Portanto, $u_2 = v$ é a segunda solução de (P), que esta no mesmo nível de $\Phi(u_1)$. ■

Observação 1.14. *Quando $p = 2$ em [14] provaram que esta segunda solução é estritamente maior que a primeira.*

CAPÍTULO 2

Existência da Super-solução

2.1 Introdução

Como já foi mencionado anteriormente, neste capítulo, determinaremos uma condição sobre a função f que nos garanta a existência de uma super-solução estrita para o problema (P). É importante observar que esta condição esta relacionada, como veremos no decorrer do capítulo, com a solução do problema

$$(P_\mu)\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu|u|^{p-2}u+1 \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde μ é um número tal que $0 \leq \mu < \lambda_1(p,\Omega)$. A unicidade da solução de (P_μ) será provada usando a bem conhecida *Desigualdade de Díaz-Saa* [12]. A regularidade, e o fato de ela satisfazer o Principio do Máximo Forte, será provada -como já foi feito no capítulo anterior - usando os resultados clássicos de Anane, Liebermann, Tolksdorff, e Vasquez, respectivamente.

A estratégia que seguiremos, será usar o conceito, e algumas propriedades clássicas da Simetrização de Schwarz. Com o auxílio desta ferramenta provaremos que no caso da bola, a solução de (P_μ) é radialmente simétrica decrescente. Assim, seu máximo, que chamaremos M_μ, será atingido no centro da bola. Aqui devemos lembrar que a existência da super-solução esta relacionada com o fato de f se encontrar suficientemente por baixo da função $\lambda_1\, s^{p-1}$. Provaremos então, que se existem $s_0 > 0$ e $0 \leq \mu < \lambda_1(p, B_1)$ tais que

$$f(x,s) < \mu\varphi_p(s) + \left(\frac{s_0}{M_\mu}\right)^{p-1}, \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq s_0$$

a existência da super-solução, no caso da bola, está garantida. É interessante observar que esta condição implica que o ponto onde o gráfico da função f corta $\lambda_1 s^{p-1}$ é menor que o ponto s_0, o que nos permitirá compreender melhor o comportamento de M_μ.

Fazendo $p = 2$ em (P_μ) temos o problema estudado em [14], onde os autores obtém uma expressão explicita da solução u_μ e do seu máximo M_μ. Para $p \neq 2$ e só quando $\mu = 0$, nos obtemos por integração direta uma expressão para u_0 e M_0 respectivamente. Para $0 < \mu < \lambda_1$ obtemos uma expressão 'integral' de u_μ e M_μ. Diferentemente do que nos faremos aqui, em [7] o autor consegue uma expressão explicita para a solução do problema

$$(\widetilde{P_\mu})\begin{cases} -\Delta_p u &= \left(\mu^{\frac{1}{p-1}} u^{p-1} + 1\right)^{p-1} \quad \text{em } B_1 \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

e conseqüentemente para o seu máximo M_μ. No entanto, nos consideramos que o problema (P_μ) que nos estudaremos aqui, é uma extensão natural para o p-Laplaciano do problema estudado em [14].

No caso de Ω ser um domínio geral, estabeleceremos primeiro, uma relação entre as soluções dos seguintes problemas

$$(P_\mu)\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu|u|^{p-2}u + 1 \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(P_\mu^*)\begin{cases} -\Delta_p v &= \mu|v|^{p-2}v + 1 \quad \text{em } \Omega^* \\ v &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

onde $0 \leq \mu < \lambda_1(p, \Omega^*)$ e Ω^* é uma bola com o mesmo volume que Ω. Provaremos então que $u^* \leq v$ em Ω^*, onde u^* é a Simetrizada de Schwarz de u. Usando que o máximo de v é $\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}$, onde ρ é o raio da bola Ω^*, e como $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u^*\|_{L^\infty(\Omega^*)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega^*)}$, obteremos uma cota superior para u, ou seja, $0 < u \leq \rho^{p'} M_{\mu\rho^p}$. Daí, seguindo de forma análoga ao caso da bola unitária, provaremos que se existem $s_0 > 0$ e $0 \leq \mu < \lambda_1(p, \Omega^*)$ tais que

$$f(x,s) < \mu\varphi_p(s) + \left(\frac{s_0}{\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}}\right)^{p-1}, \quad \text{para todo } 0 \leq s \leq s_0$$

a existência da super-solução, no caso de um domínio geral, também está garantida.

Na parte final do capítulo, usaremos os resultados acima, para mostrar como obter a existência de uma super-solução para o problema autônomo (Pa), o denotaremos assim para diferencia-lo do problema não autônomo (P), a partir do conhecimento da existência da solução do problema

$$(Pa^*)\begin{cases} -\Delta_p v &= f(u) & \text{em } \Omega^* \\ v &> 0 & \text{em } \Omega^* \\ v &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

2.2 Simetrização de Schwarz

O objetivo de definir o rearrangamento de uma função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, é substituir u por uma outra função u^* cujos conjuntos de nível $\{x \in \Omega^* : u^*(x) > t\}$ são bolas que tem a mesma medida que os conjuntos de nível $\{x \in \Omega : u(x) > t\}$ de u. A seguir, lembraremos algumas definições e alguns resultados bem conhecidos na literatura, ver por exemplo, Bandle [5], Kahwol [20], Mossino [24], e Talenti [28].

Definição 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. A função $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\mu(t) = med\{x \in \Omega : |u(x)| > t\},$$

é chamada função de distribuição de u (ou de $|u|$).

Observemos que $\mu(t)$ é uma função é continua a direita em t, decrescendo de $\mu(0) = med\{\text{suporte de } u\}$ a $\mu(+\infty) = 0$, quando t cresce de 0 a $+\infty$. Seja $\mu(t^-)$ o limite a esquerda de μ num ponto $t > 0$, então $\mu(t^-) = med\{x \in \Omega : |u(x)| \geq t\}$. A função μ pula no nível t se e somente se $|u|$ assume o valor t em cada ponto de algum subconjunto de Ω com medida positiva:

$$med\{x \in \Omega : |u(x)| = t\} = \mu(t^-) - \mu(t).$$

Definição 2.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado, o domínio simetrizado Ω^* é a bola com centro na origem $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < \rho\}$, e com a mesma medida (volume) que Ω.*

Definição 2.3. *Seja $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função em L^1, a Simetrizada de Schwarz ou Rearrangamento Simétrico Decrescente de u, denotada por u^*, é a função $u^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ positiva, radialmente simétrica e decrescente, tal que*

$$med\{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| > t\} = med\{x \in \mathbb{R}^N : u^*(x) > t\}, \quad \textit{para todo } t > 0.$$

Mas precisamente, u^* pode ser definido por

$$u^*(x) = \inf[t \geq 0 : med\{x \in \mathbb{R}^N : |u(x)| > t\} < w_N |x|^N],$$

onde w_N é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$.

Observemos que se u^* é radialmente simétrica decrescente temos que

$$u^*(x) = u^*(y) \qquad \text{se } |x| = |y|$$

e

$$u^*(x) \geq u^*(y) \qquad \text{se } |x| \leq |y|.$$

Como nosso interesse é simetrizar funções em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se $u \in L^1(\Omega)$ então u^* está definida sobre Ω^* por

$$u^* = (\tilde{u})^* \mid_{\Omega^*},$$

onde

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u & ; \ \text{se } x \in \Omega \\ 0 & ; \ \text{se } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

As seguir resumiremos algumas das propriedades da *Simetrização de Schwarz* que usaremos no que segue e decorrem-se diretamente da definição.

Proposição 2.4. *Verificam-se as seguintes propriedades:*

(i) Se $0 \leq u \leq v$ em Ω, então $u^* \leq v^*$ em Ω^* (a função $u \mapsto u^*$ preserva a ordem).

(ii) Se $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, então $(u + c)^* = u^* + c$.

(iii) Para cada $t \geq 0$, $(tu)^* = tu^*$ (a função $u \mapsto u^*$ é homogênea positiva de grau 1).

(iv) $(u^*)^* = u^*$ *(a função $u \mapsto u^*$ é idempotente).*

Para outras propriedades da *Simetrização de Schwarz* ver [5], [20], [24].

Proposição 2.5. *Sejam $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ e, $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função continua crescente. Então*

$$(h(u))^* = h(u^*).$$

Demonstração: Ver [24].

A seguir, apresentamos alguns resultados clássicos do *Rearrangamento Simétrico Decrescente* que usaremos no resto do capítulo.

Teorema 2.6. *Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função integravel, então*

(i) Para cada função real F continua em $\mathbb{R}^+$ e positiva, temos

$$\int_\Omega F(|u|)\, dx = \int_{\Omega^*} F(u^*)\, dx.$$

Em particular, se $u \in L^s(\Omega)$ então $u^* \in L^s(\Omega^*)$ para $1 \leq s \leq \infty$, e

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} = \|u^*\|_{L^s(\Omega^*)} \quad \left(ou \quad \int_\Omega |u(x)|^s\, dx = \int_{\Omega^*} (u^*(x))^s\, dx \right).$$

(ii) Para cada $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$,

$$\int_\Omega uv\, dx \leq \int_{\Omega^*} u^* v^*\, dx.$$

(iii) (Desigualdade de Polya-Segö) Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ então $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ e

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx.$$

Demonstração: Ver [5], [24], [20].

Corolário 2.7. *Seja $\lambda_1(p, \Omega^*)$ o primeiro autovalor do $-\Delta_p$ em Ω^* com condições de Dirichlet, então*

$$\lambda_1(p, \Omega^*) \leq \lambda_1(p, \Omega).$$

Demonstração: Lembremos que

$$\lambda_1(p,\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_\Omega |u|^p\,dx = 1\right\},$$

e que $\phi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é a primeira autofunção positiva do $-\Delta_p$ em Ω com condições de Dirichlet. Sem perda de generalidade podemos supor que $\|\phi_1\|_{L^p(\Omega)} = 1$. Usando o Teorema 2.6 temos que $\phi_1^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ é tal que

$$\int_{\Omega^*} |\phi_1^*|^p\,dx = \int_\Omega |\phi_1|^p\,dx = 1$$

$$\int_{\Omega^*} |\nabla\phi_1^*|^p\,dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi_1|^p\,dx.$$

Então

$$\lambda_1(p,\Omega^*) \leq \int_{\Omega^*} |\nabla\phi_1^*|^p\,dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi_1|^p\,dx = \lambda_1(p,\Omega),$$

daí o resultado. ∎

2.3 Super-solução na Bola

Começaremos estudando a existência e unicidade de solução para o seguinte problema de Dirichlet,

$$(P_\mu)\begin{cases} -\Delta_p u = \mu|u|^{p-2}u + 1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde μ é um número tal que $0 \leq \mu < \lambda_1(p,\Omega)$ e $1 < p < \infty$. Para nossos objetivos suporemos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira de classe C^2. Provaremos unicidade, positividade e regularidade da solução, seguindo as mesmas idéias encontradas no artigo de Fleckinger-Pellé, Hernández,Takáč,De Thélin [16], onde eles consideram um problema de Dirichlet envolvendo o p-Laplaciano bem mais geral, num domínio limitado com fronteira $C^{1,\alpha}$. Para provar a existência usaremos minimização clássica, uma outra demonstração de existência para (P_μ) pode ser encontrada em [17].

Lema 2.8 (Desigualdade de Díaz-Saa). *Sejam $w_i \in L^\infty(\Omega)$, para $i = 1,2$, tais que $w_i \geq 0$ q.t.p. em Ω, $w_i \in W^{1,p}(\Omega)$, $\Delta_p w_i \in L^\infty(\Omega)$ e $w_1 = w_2$ em $\partial\Omega$. Suponhamos que*

$\left(\dfrac{w_i}{w_j}\right) \in L^\infty(\Omega)$ *para* $i \neq j$, *onde* $i, j = 1, 2$. *Então*

$$\int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p w_1}{w_1^{p-1}} - \frac{-\Delta_p w_2}{w_2^{p-1}}\right)(w_1^p - w_2^p) \geq 0. \tag{2.1}$$

Demonstração: Ver [12].

Observação 2.1. *Em* (2.1) *temos igualdade se e somente se* $w_1 = tw_2$ *ou* $w_2 = tw_1$, *para algum* $t \in (0, +\infty)$. *Ver* [2], *Proposição 1, pag* 726 *ou* [3], *Proposição 3.1,* pag 19 .

Teorema 2.9. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado com fronteira de classe* C^2. *Seja* μ *um numero tal que* $0 \leq \mu < \lambda_1(p, \Omega)$. *Então, o problema* (P_μ) *tem uma única solução fraca* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Mas ainda,* $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$ *e verifica-se o principio do máximo forte, isto é,*

$$u > 0 \quad em\ \Omega \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad sobre\ \partial\Omega.$$

Demonstração: Se $\mu = 0$ o resultado segue-se do Lema 1.17 e das observações contidas na seção 1.4. Suponhamos então que $0 < \mu < \lambda_1(p, \Omega)$.

Passo 1 (Existência): O funcional associado ao problema (P_μ) é dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \frac{\mu}{p}\int_\Omega |u|^p\, dx - \int_\Omega u\, dx. \tag{2.2}$$

As soluções de (P_μ) são pontos críticos de Φ. Usando a *Desigualdade de Poincaré* e a *Imersão de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ temos que

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\|u\|^p - C\|u\|,$$

e como $1 - \dfrac{\mu}{\lambda_1} > 0$, concluímos que Φ óercivo, isto é:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \Phi(u) = +\infty.$$

Agora, seja $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma seqüência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, então

(i) $\|u\|^p \leq \liminf \|u_n\|^p$

(ii) $\displaystyle\int_\Omega |u_n|^p\,dx \longrightarrow \int_\Omega |u|^p\,dx$

De fato, seja

$$\int_\Omega \big||u|^p - |u_n|^p\big|\,dx \le \int_\Omega |\varphi_p(u)\cdot(u-u_n)|\,dx + \int_\Omega |(\varphi_p(u)-\varphi_p(u_n))\cdot u_n|\,dx$$

Usando a *Desigualdade de Hölder* temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\varphi_p(u)\cdot(u-u_n)|\,dx &\le \left(\int_\Omega |\varphi_p(u)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'}\left(\int_\Omega |u-u_n|^p\,dx\right)^{1/p} \\ &= \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\|u-u_n\|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0,\end{aligned} \tag{2.3}$$

pois a *Imersão de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ garante que $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Por outro lado, usando o Corolário A.4 temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |(\varphi_p(u)-\varphi_p(u_n))\cdot u_n|\,dx &\le \|u_n\|_{L^p(\Omega)}\left(\int_\Omega |\varphi_p(u)-\varphi_p(u_n)|^{p'}\,dx\right)^{1/p'} \\ &\le M\cdot\|\varphi_p(u)-\varphi_p(u_n)\|_{L^{p'}(\Omega)} \longrightarrow 0,\end{aligned} \tag{2.4}$$

pois $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \le M$. De (2.3) e (2.4) temos a afirmação.

(iii) $\displaystyle\int_\Omega u_n\,dx \longrightarrow \int_\Omega u\,dx$

Esta afirmação é imediata pela *Imersão de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^1(\Omega)$.

Portanto, de (i), (ii) e (iii) temos que

$$\Phi(u) \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n),$$

ou seja, Φ é fracamente semicontinuo inferior. Logo, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\Phi(u) = \inf_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi(v),$$

isto é, u é um mínimo global de Φ, e como Φ é de classe C^1, u é um ponto crítico de (2.2), e assim solução de (P_μ).

Passo 2 (Regularidade): Como $\mu|u|^{p-2}u + 1 \in L^{p'}(\Omega)$ então $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Por outro lado

$$-u\Delta_p u \leq \mu|u|^p + |u| \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

onde $\mu > 0$, $1 < p < p^*$ e $b(x) = 1$, então $u \in L^\infty(\Omega)$, pelo Lema 1.4, daí $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Assim

$$|\mu\varphi_p(u) + 1| \leq \mu\|u\|_{L^\infty}^{p-1} + 1,$$

então

$$\Delta_p u \in L^\infty(\Omega).$$

Usando o Lema 1.3, concluímos que

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \text{algum } \alpha \in (0,1).$$

Passo 3 (Positividade): Multiplicando a primeira equação de (P_μ) por u^- e integrando sobre Ω obtemos,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |\nabla u^-|^p\,dx &= -\mu\int_\Omega (u^-)^p\,dx + \int_\Omega u^-\,dx \\ &\geq -\frac{\mu}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u^-|^p\,dx + \int_\Omega u^-\,dx \\ &\geq -\frac{\mu}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u^-|^p\,dx, \end{aligned}$$

usando que $\displaystyle\int_\Omega u^-\,dx \geq 0$ e a *Desigualdade de Poincaré.* Então,

$$0 \geq \left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |\nabla u^-|\,dx,$$

logo $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u^-|^p\,dx = 0$, o que implica $u^- \equiv 0$ q.t.p. em Ω, daí

$$u \geq 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Como $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$ e $\Delta_p u \leq 0 = \beta(u)$ então

$$u > 0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

pelo Lema 1.6.

Passo 4 (Unicidade): Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ duas soluções fracas de (P_μ), pelo Passo 3 sabemos que $u_i > 0$ e $\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu} < 0$, para $i = 1, 2$, então

$$\frac{u_1}{u_2} \quad \text{e} \quad \frac{u_2}{u_1} \in L^\infty(\Omega) \tag{2.5}$$

Se $u_1 = u_2$ não temos nada que provar. Suponhamos então que $u_1 \neq u_2$, logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p u_1}{u_1^{p-1}} - \frac{-\Delta_p u_2}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p)\, dx &= \int_\Omega \left(\frac{\mu u_1^{p-1} + 1}{u_1^{p-1}} - \frac{\mu u_2^{p-1} + 1}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p)\, dx \\ &= \int_\Omega \left(\frac{1}{u_1^{p-1}} - \frac{1}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p)\, dx. \end{aligned}$$

Como a função $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(s) = \dfrac{1}{s^{p-1}}$ é decrescente concluímos que

$$\int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p u_1}{u_1^{p-1}} - \frac{-\Delta_p u_2}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p)\, dx \leq 0 \tag{2.6}$$

Por outro lado, como u_1 e u_2 satisfazem (2.5) a *Desigualdade de Díaz-Saa*, Lema 2.8, nos garante que

$$\int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p u_1}{u_1^{p-1}} - \frac{-\Delta_p u_2}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p)\, dx \geq 0 \tag{2.7}$$

Juntando (2.6) e (2.7) temos que

$$\int_\Omega \left(\frac{-\Delta_p u_1}{u_1^{p-1}} - \frac{-\Delta_p u_2}{u_2^{p-1}} \right)(u_1^p - u_2^p)\, dx = 0,$$

o que é possível, se e somente se $u_1 = tu_2$ para $t > 0$ (ver Observação ao Lema 2.8). Substituindo esta informação em (P_μ) resulta que

$$-\Delta_p u_2 = \mu \varphi_p u_2 + (\frac{1}{t})^{p-1},$$

daí $(\frac{1}{t})^{p-1} = 1$, logo $t = 1$, portanto $u_1 = u_2$. ■

Nesta seção determinaremos uma condição sobre f que nos garanta a existência da super-solução do problema (P) no caso de $\Omega = B_1$. Para isso, usaremos as propriedades da solução do problema (P_μ) em B_1, que são análogas as determinadas no Teorema acima.

A seguir, provaremos que no caso da bola, esta solução tem uma propriedade adicional muito importante, ela é *radialmente simétrica decrescente*. Para tal fim, usaremos os conceitos apresentados na seção anterior sobre a *Simetrização de Schwarz*.

Corolário 2.10. *Seja $u \in W_0^{1,p}(B_1)$ solução fraca de (P_μ), então $u = u^*$, isto é, u é uma função decrescente radialmente simétrica.*

Demonstração: Como $B_1 = B_1^*$ temos que $u^* \in W_0^{1,p}(B_1)$, pelo Teorema 2.6, então,

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\leq \Phi(u^*), \qquad \text{pois } u \text{ é um minimo global de } \Phi \text{ (ver Teorema 2.9)}\\
&= \frac{1}{p}\int_{B_1} |\nabla u^*|^p\, dx - \frac{\mu}{p}\int_{B_1} |u^*|^p\, dx - \int_{B_1} u^*\, dx\\
&\leq \frac{1}{p}\int_{B_1} |\nabla u|^p\, dx - \frac{\mu}{p}\int_{B_1} |u|^p\, dx - \int_{B_1} u\, dx, \qquad \text{usando o Teorema 2.6}\\
&= \Phi(u),
\end{aligned}$$

ou seja $\Phi(u) = \Phi(u^*)$. Pela unicidade de u (ver Teorema 2.9) concluímos que $u = u^*$. ■

Denotemos por u_μ a solução de (P_μ) em $\Omega = B_1$. Sabemos que u_μ é positiva, decrescente, radialmente simétrica, então seu máximo M_μ é atingido no centro da bola, isto é:

$$M_\mu = u_\mu(0) = max\{u_\mu(x) | \, x \in B_1\},$$

logo,

$$0 < u_\mu \leq M_\mu \quad \text{em } B_1.$$

Como $u(x)$ é uma função que depende somente do raio $r = |x|$, a denotaremos novamente por $u(r)$, ela é solução do seguinte problema

$$(P_R)\begin{cases} -\left(r^{N-1}\varphi_p(u')\right)' = r^{N-1}\left(\mu\varphi_p(u) + 1\right) & \text{em } (0,1)\\ u'(0) = 0 = u(1) \end{cases}$$

Integrando a equação acima e observando que $u'(0) = 0$ e que $\varphi_q \circ \varphi_p = id$ temos que

$$-u'(t) = \varphi_q\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}(\mu\varphi_p(u) + 1)\, ds\right).$$

Integrando mais uma vez temos que

$$u(r) = u(0) - \int_0^r \varphi_q\left(\frac{1}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}(\mu\varphi_p(u) + 1)\, ds\right) dt. \tag{2.8}$$

Fazendo $r = 1$ em (2.8) e lembrando que $u(1) = 0$ e $u(0) = M_\mu$ temos uma expressão para M_μ,

$$M_\mu = u_\mu(0) = \int_0^1 \varphi_q\left[\frac{t}{N} + \frac{\mu}{t^{N-1}}\int_0^t s^{N-1}\,\varphi_p(u)\, ds\right] dt. \tag{2.9}$$

Se $\mu = 0$, por integração direta temos que a solução de (P_R) é

$$u_0(r) = \frac{1}{qN^{q-1}}\left(1 - r^q\right), \tag{2.10}$$

conseqüentemente

$$M_0 = u_0(0) = \frac{1}{N^{q-1}} \qquad \text{ou} \qquad M_0 = \frac{p-1}{pN^{1/p-1}}. \tag{2.11}$$

No caso particular em que $p = 2$ é possível, ver [14], obter uma expressão explícita da função $u_\mu(r)$ em termos da função de Bessel de ordem $k = (N-2)/2$, ou seja,

$$u_\mu(r) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{J_k(\sqrt{\mu}\, r)}{r^k\, J_k(\sqrt{\mu})} - 1\right]$$

e daí uma expressão explícita para M_μ,

$$M_\mu = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\mu^{k/2}}{2^k\, \Gamma(k+1)\, J_k(\sqrt{\mu})} - 1\right]$$

Em [7], o autor consegue obter uma expressão explícita para a solução do problema

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}\varphi_p(u')\right)' = r^{N-1}\left(\mu^{\frac{1}{p-1}}\, u + 1\right)^{p-1} & \text{em } (0,1) \\ u'(0) = 0 = u(1) \end{cases}$$

a saber,

$$u_\mu(r) = \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p-1}}}\left[\frac{\phi(\sqrt[p]{\mu}\, r)}{\phi(\sqrt[p]{\mu})} - 1\right],$$

e assim uma expressão para M_μ

$$M_\mu = u_\mu(0) = \frac{1}{\mu^{\frac{1}{p-1}}}\left[\frac{1}{\phi(\sqrt[p]{\mu})} - 1\right],$$

onde ϕ é solução do problema

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}\varphi_p(u')\right)' = r^{N-1}\, \varphi_p(u) & \text{em } (0,+\infty) \\ u'(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(0) = 1 \end{cases}$$

Proposição 2.11. *Suponhamos que $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfaz a seguinte condição:*

Existem números $s_0 > 0$ *e* $0 \le \mu < \lambda_1(p,\Omega)$ *tais que*

$(f6)$
$$f(x,s) < \mu s^{p-1} + \left(\frac{s_0}{M_\mu}\right)^{p-1} \quad ; \quad \forall s \in [0, s_0].$$

Então, o problema (P) com $\Omega = B_1$, tem uma super-solução estrita.

Demonstração: Consideremos o seguinte problema de Dirichlet

$$(P_c)\begin{cases} -\Delta_p w &= \mu|w|^{p-2}w + c^{p-1} \quad \text{em } B_1 \\ w &= 0 \quad \text{sobre } \partial B_1 \end{cases}$$

onde $c > 0$ é uma constante e $0 \leq \mu < \lambda_1(p, B_1)$. Como a solução w de (P_c) é tal que

$$-\Delta_p\left(\frac{1}{c}w\right) = \mu\left(\frac{1}{c}w\right)^{p-1} + 1$$

então $\frac{1}{c}w$ é solução de (P_μ), logo $0 < w \leq c\,M_\mu$ em B_1. Escolhendo $c = \dfrac{s_0}{M_\mu}$ temos que $0 < w \leq s_0$, então

$$f(x,w) < \mu w^{p-1} + \left(\frac{s_0}{M_\mu}\right)^{p-1},$$

daí

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w\,\nabla\varphi\,dx \geq \int_\Omega f(x,w)\,\varphi\,dx \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \varphi \geq 0,$$

ou seja w é super-solução de (P). Agora, seja $\psi \in C_c^1(\Omega)$ tal que $\psi \geq 0$ e $\psi \not\equiv 0$, então

$$\begin{aligned} \int_{\{\psi>0\}} |\nabla w|^{p-2}\nabla w\,\nabla\psi\,dx &= \int_{\{\psi>0\}} [\mu\,w^{p-1} + c^{p-1}]\,\psi\,dx \\ &> \int_{\{\psi>0\}} f(x,w)\,\psi\,dx \end{aligned}$$

isto é, w é uma super-solução estrita de (P). ■

Observação 2.2. *Seja u_μ solução de (P_μ) em $\Omega = B_\rho$, é possível provar que*

$$u_\mu(0) = \max\{u_\mu(x) : x \in \Omega\} = \rho^{p'} M_{\mu\rho^p}.$$

logo,

$$0 < u_\mu(x) \leq \rho^{p'} M_{\mu\rho^p}, \quad \text{em } \Omega,$$

pois $0 \leq \rho^p\mu < \rho^p\lambda_1(p, B_\rho) \leq \lambda_1(p, B_1)$. Assim, temos uma condição análoga a $(f6)$, a saber:

$$(f6') \quad \begin{aligned} &\textit{Existem números } s_0 > 0 \ \ e \ \ 0 \leq \mu < \lambda_1(p, B_\rho) \ \ \textit{tais que}: \\ &f(x,s) < \mu s^{p-1} + \left(\frac{s_0}{\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}}\right)^{p-1}, \quad \forall s \in [0, s_0] \end{aligned}$$

Observação 2.3. *Como $w(0) = M_\mu \cdot c = s_0$ a existência de s_0 é garantida pela existência da solução do problema (P_c).*

Seja $s_c > 0$ um número real tal que

$$\lambda_1 s_c^{p-1} = \mu\, s_c^{p-1} + c^{p-1}, \tag{2.12}$$

onde $\lambda_1 = \lambda_1(p, B_1)$, pela Proposição 2.11 temos que $0 < s_c \leq s_0$, ou seja, f intercepta ao menos duas vezes o gráfico de $\lambda_1 s^{p-1}$. Então

$$s_c = \frac{s_0}{M_\mu \cdot (\lambda_1 - \mu)^{1/p-1}} \leq s_0,$$

logo,

$$M_\mu \geq \frac{1}{(\lambda_1 - \mu)^{1/p-1}}. \tag{2.13}$$

Se $\mu = 0$ em (2.13) temos que $M_0 \geq \dfrac{1}{\lambda_1}$ e por (2.11) resulta que

$$\lambda_1(p, B_1) \geq \frac{p}{p-1} N^{1/p-1}.$$

De (2.13) temos que

$$\lim_{\mu \to \lambda_1^-} M_\mu = +\infty.$$

2.4 Um Teorema Importante

Seja $f \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $f \neq 0$, pela parte (i) do Teorema 2.6 temos que $f \in L^{p'}(\Omega^*)$. Consideremos então os seguintes problemas de Dirichlet

$$(P_f)\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (P_{f^*})\begin{cases} -\Delta_p v = f^* & \text{em } \Omega^* \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

Pelo Lema 1.17 temos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ são soluções fracas únicas de (P_f) e (P_{f^*}) respectivamente. Além do mais

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \qquad \text{algum } \alpha \in (0,1).$$

Observemos que se $f \geq 0$ pode-se concluir ainda que $u > 0$ em Ω e que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega$. Por outro lado, como Ω^* é uma bola e $f^* \geq 0$ temos que

$$v \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^*}) \quad \text{algum} \quad \alpha \in (0,1)$$

$$v > 0 \quad \text{em } \Omega^* \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} < 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega^*$$

Ver Observações 1.8 e 1.9 respectivamente.

A seguir enunciaremos um Teorema que será muito usado no decorrer do capítulo, e diferentemente do que foi feito nas seções anteriores, aqui enunciaremos e demonstraremos primeiro os lemas necessários para sua demonstração, que só será feita no final da seção.

Teorema 2.12. *Seja $f \in L^{p'}(\Omega)$, e sejam $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ soluções fracas de (P_f) e (P_{f^*}) respectivamente. Então*

$$u^* \leq v \qquad \textit{q.t.p em } \Omega^*$$

No caso $p = 2$, o Teorema 2.12, foi provado por Talenti [28] e por Lions [23]. A demonstração de Lions dispensa o uso das *Desigualdades Isoperimétricas* usadas por Talenti na sua demonstração. Aqui nos seguiremos as ideias usadas por Lions.

Sem perca de generalidade podemos supor que, $f \geq 0$. De fato, seja $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \widetilde{u} &= |f| \qquad \text{em } \Omega \\ \quad \widetilde{u} &= 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

A existência de $\widetilde{u}$ é garantida pelo lema 1.16. É claro que

$$-\Delta_p u = f \leq |f| = -\Delta_p \widetilde{u},$$

então $u \leq \widetilde{u}$ em Ω, pelo *Principio de Comparação Fraca*, logo

$$u^* \leq (\widetilde{u})^* \qquad \text{em } \Omega^*, \tag{2.14}$$

pela parte (i) da Proposição 2.4. Assim, provando que $(\widetilde{u})^* \leq v$ em Ω^*, de (2.14) temos que

$$u^* \leq v \qquad \text{em } \Omega^*.$$

A seguir demonstraremos alguns resultados preliminares que nos auxiliaram na demonstração do Teorema 2.12.

Proposição 2.13. *A solução $v \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ do problema (P_{f^*}) é radialmente simétrica estritamente decrescente.*

Demonstração: Lembremos que v é o mínimo global do funcional Φ associado ao problema (P_{f^*}). Pela parte (iii) do Teorema 2.6 temos que $v^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$, e pela parte (iv) da Proposição 2.4 $(f^*)^* = f^*$, então usando (ii) e (iii) do Teorema 2.6

$$\begin{aligned}
\Phi(v) &\leq \Phi(v^*), \\
&= \frac{1}{p}\int_{\Omega^*} |\nabla v^*|^p\, dx - \int_{\Omega^*} f^* \cdot v^*\, dx \\
&\leq \frac{1}{p}\int_{\Omega^*} |\nabla v|^p\, dx - \int_{\Omega^*} f^* \cdot v\, dx \\
&= \Phi(v),
\end{aligned}$$

ou seja, $\Phi(v) = \Phi(v^*)$. Pela unicidade da solução de (P_{f^*}) concluímos que $v = v^*$. Como $v(x)$ é uma função que depende somente do raio $r = |x|$ (a denotaremos por $v(r)$) será solução do seguinte problema

$$\begin{cases} -\left(r^{N-1}\varphi_p(v')\right)' = r^{N-1}f^* & \text{em } (0,\rho) \\ v'(0) = 0 = v(\rho) \end{cases}$$

onde ρ é o raio da bola Ω^*. Como $f^* > 0$ temos que $r^{N-1}\varphi_p(v')$ é estritamente decrescente, conseqüentemente $\varphi_p(v') < 0$ para todo $r \in (0,\rho)$, daí concluímos que

$$v'(r) < 0 \qquad \text{para todo } r \in (0,\rho).$$

■

Lembremos que o volume da bola de raio ρ é $Vol(B_\rho) = \rho^N w_N$ e sejam,

$$\mu(t) = med\{x \in \Omega : u(x) > t\} \quad \text{e} \quad \nu(t) = med\{x \in \Omega^* : v(x) > t\},$$

as funções de distribuição de u e v respectivamente. Estas funções são monótonas decrescentes, então μ e ν são funções diferenciáveis q.t.p. em $\mathbb{R}^+$. No que segue, e para simplificar omitiremos nas derivadas a notação q.t.p.

Lema 2.14. *Sejam u e v soluções fracas de (P_f) e (P_{f^*}) respectivamente, então verificam-se, as seguintes desigualdades* *(a)* $-\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p \, dx\right) \leq \displaystyle\int_{\{u>t\}} f(x)\, dx \leq \displaystyle\int_{\{u^*>t\}} f^*(x)\, dx.$

(b) $-\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_{\{u^*>t\}} |\nabla u^*| \, dx\right) \leq \left(-\dfrac{d\mu}{dt}\right)^{1/p'} \left[-\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p \, dx\right)\right]^{1/p}.$

(c) $-\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_{\{u^*>t\}} |\nabla u^*| \, dx\right) = N\, w_N^{1/N}\, \mu(t)^{1-1/N}.$

(d) $(N\, w_N^{1/N}\, \nu(t)^{1-1/N})^{p'} = \left(-\dfrac{d\nu}{dt}\right)\left(\displaystyle\int_{\{v>t\}} f^*(x)\, dx\right)^{p/p'}.$

Demonstração: Dados $t, h > 0$, consideremos a função $F_{t,h} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$F_{t,h}(s) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < s \leq t \\ s - t & ; \quad t < s \leq t + h \\ h & ; \quad s > t + h. \end{cases}$$

Como $f \geq 0$ temos que $u > 0$ em Ω, então $F_{t,h}(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e também

$$\nabla F_{t,h}(u) = \begin{cases} \nabla u & ; \quad t < u \leq t + h \\ 0 & ; \quad \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Parte (a): Multiplicando a equação em (P_f) por $F_{t,h}(u)$ e integrando por partes temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla F_{t,h}(u)\, dx = \int_{\{t<u\leq t+h\}} |\nabla u|^p \, dx, \tag{2.15}$$

e

$$\int_\Omega f(x) F_{t,h}(u(x))\, dx = \int_{\{t<u\leq t+h\}} f(x)(u(x) - t)\, dx + h \int_{\{u>t+h\}} f(x)\, dx. \tag{2.16}$$

Então, de (2.15) e (2.16) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\int_{\{t<u\leq t+h\}} |\nabla u|^p \, dx &= \int_{\{t<u\leq t+h\}} f(x)\left(\frac{u(x)-t}{h}\right) dx + \int_{\{u>t+h\}} f(x)\, dx \\ &\leq \int_{\{t<u\leq t+h\}} f(x)\, dx + \int_{\{u>t+h\}} f(x)\, dx \qquad (2.17) \\ &= \int_{\{u>t\}} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}}|\nabla u|^p\,dx\right) &= -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\{u>t+h\}}|\nabla u|^p\,dx - \int_{\{u>t\}}|\nabla u|^p\,dx\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{\{t<u\le t+h\}}|\nabla u|^p\,dx\right),
\end{aligned}$$

então, usando (2.17) temos que:

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}}|\nabla u|^p\,dx\right) \le \int_{\{u>t\}} f(x)\,dx. \tag{2.18}$$

Observemos que, pela parte (ii) do Teorema 2.6

$$\begin{aligned}
\int_{\{u>t\}} f(x)\,dx &= \int_\Omega f(x)\chi_{\{u>t\}}(x)\,dx,\\
&\le \int_\Omega f^*(x)\left(\chi_{\{u>t\}}\right)^*(x)\,dx\\
&= \int_\Omega f^*(x)\chi_{\{u^*>t\}}(x)\,dx\\
&= \int_{\{u^*>t\}} f^*(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Finalmente, de (2.18) e (2.19) temos o resultado.

Parte (b): Primeiro observemos que

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u^*>t\}}|\nabla u^*|\,dx\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_{\{t<u^*\le t+h\}}|\nabla u^*|\,dx\right).$$

Agora, como $F_{t,h}$ é crescente temos que $(F_{t,h}(u))^* = F_{t,h}(u^*)$, pela Proposição 2.5. Então

$$\int_{\Omega^*}|\nabla F_{t,h}(u^*)|^p\,dx \le \int_\Omega |\nabla F_{t,h}(u)|^p\,dx, \tag{2.20}$$

pela parte (iii) do Teorema 2.6. Usando a *Desigualdade de Hölder* e (2.20) temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\{t<u^*\leq t+h\}} |\nabla u^*|\,dx &\leq \left(\int_{\{t<u^*\leq t+h\}} dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\{t<u^*\leq t+h\}} |\nabla u^*|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\{u^*>t\}} dx - \int_{\{u^*>t+h\}} dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\Omega^*} |\nabla F_{t,h}(u^*)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&\leq [\mu(t)-\mu(t+h)]^{1/p'} \left(\int_{\Omega} |\nabla F_{t,h}(u)|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= [\mu(t)-\mu(t+h)]^{1/p'} \left(\int_{\{t<u\leq t+h\}} |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p},
\end{aligned}
$$

daí

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u^*>t\}} |\nabla u^*|\,dx\right) &\leq \left(-\frac{d\mu}{dt}\right)^{1/p'} \left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\{t<u\leq t+h\}} |\nabla u|^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(-\frac{d\mu}{dt}\right)^{1/p'} \left[-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p\,dx\right)\right]^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Parte (c): Lembremos que para cada $t \geq 0$, o conjunto

$$\{x \in \Omega^* : u^*(x) > t\} = B_{z(t)}(0),$$

é a bola de centro na origem e raio $z = z(t)$. Seja $u^*(x) = w(r)$ com $r = |x|$, então

$$\int_{\{u^*>t\}} |\nabla u^*(x)|\,dx = Nw_N \int_0^{z(t)} \left(-\frac{dw}{dr}(r)\right) r^{N-1}\,dr, \tag{2.21}$$

pois w é decrescente em $(0,+\infty)$, isto é, $\dfrac{dw}{dr} \leq 0$.

Por outro lado, observemos que para cada $t \geq 0$, $w(z(t)) = t$ e $\mu(t) = w_N(z(t))^N$. Assim, fazendo a mudança de variável $r = z(s)$ em (2.21) resulta que

$$\int_{\{u^*>t\}} |\nabla u^*(x)|\,dx = Nw_N \int_t^{+\infty} [z(s)]^{N-1}\,ds \tag{2.22}$$

logo, como $\mu(t) = w_N[z(t)]^N$ implica que $z(t) = \left[\dfrac{\mu(t)}{w_N}\right]^{1/N}$ temos

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u^*>t\}} |\nabla u^*(x)|\,dx\right) &= -\frac{d}{dt}\left(N w_N \int_t^{+\infty} [z(s)]^{N-1}\,ds\right) \\
&= N w_N [z(t)]^{N-1} \\
&= N\,\mu(t)\frac{1}{z(t)} \\
&= N \mu(t)^{1-1/N} w_N^{1/N}.
\end{aligned}$$

Parte (d): Seguiremos por Passos

Passo 1 Trocando u por v na desigualdade em (a) obtemos igualdade. De fato,

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v|^p\,dx\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\{t<v\leq t+h\}} |\nabla v|^p\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\int_{\{t<v\leq t+h\}} f^*(x)\left(\frac{v(x)-t}{h}\right) + \int_{\{v>t+h\}} f^*(x)\right) \\
&= \int_{\{v>t\}} f^*(x)\,dx,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

pois

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\{t<v\leq t+h\}} f^*(x)\left(\frac{v(x)-t}{h}\right)\,dx\right| &\leq \int_{\{t<v\leq t+h\}} |f^*(x)|\,dx \\
&\leq |f^*(0)|\int_{\{t<v\leq t+h\}} dx \to 0.
\end{aligned}$$

Passo 2 Trocando u^* por v na desigualdade em (b) obtemos

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v|\,dx\right) = \left(-\frac{d\nu}{dt}\right)^{1/p'}\left[-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v|^p\,dx\right)\right]^{1/p}. \tag{2.24}$$

De fato, fazendo a mesma mudança de variável que em (2.22) temos que

$$\int_{\{v>t\}} |\nabla v(x)|\,dx = N w_N \int_t^{+\infty} [z(s)]^{N-1}\,ds, \tag{2.25}$$

e

$$\int_{\{v>t\}} |\nabla v(x)|^p\,dx = N w_N \int_t^{+\infty} |v'(z(s))|^{p-1}[z(s)]^{N-1}\,ds. \tag{2.26}$$

Derivando (2.25) e (2.26) temos

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v(x)|\, dx\right) = Nw_N[z(t)]^{N-1} \tag{2.27}$$

e

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v(x)|^p\, dx\right) = Nw_N|v'(z(t))|^{p-1}[z(t)]^{N-1} \tag{2.28}$$

respectivamente. Por outro lado, como $\nu(t) = w_N[z(t)]^N$ então

$$\frac{d\nu}{dt}(t) = Nw_n[z(t)]^{N-1}z'(t). \tag{2.29}$$

Daí

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{d\nu}{dt}\right)^{1/p'}\left[-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v(x)|^p\, dx\right)\right]^{1/p} = \\
&= \left\{-Nw_N[z(t)]^{N-1}z'(t)\right\}^{1/p'}\left\{Nw_N|v'(z(t))|^{p-1}[z(t)]^{N-1}\right\}^{1/p} \\
&= Nw_N[z(t)]^{N-1}|z'(t)|^{1/p'}|v'(z(t))|^{1/p'} \\
&= Nw_N[z(t)]^{N-1}, \qquad \text{pois } v'(z(t))\cdot z'(t) = 1 \\
&= -\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v(x)|\, dx\right),
\end{aligned}$$

que é o que nos queríamos provar.

Passo 3 Trocando u^* por v em (c) é imediato que

$$-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v|\, dx\right) = N\, w_N^{1/N}\nu(t)^{1-1/N}. \tag{2.30}$$

Passo 4 Substituindo (2.30) em (2.24) temos que

$$N\, w_N^{1/N}\nu(t)^{1-1/N} = \left(-\frac{d\nu}{dt}\right)^{1/p'}\left[-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{v>t\}} |\nabla v|^p\, dx\right)\right]^{1/p},$$

e usando (2.23) resulta que

$$\left(N\, w_N^{1/N}\nu(t)^{1-1/N}\right)^{p'} = \left(-\frac{d\nu}{dt}\right)\left(\int_{\{v>t\}} f^*(x)\, dx\right)^{p'/p}.$$

■

Lema 2.15. *Verifica-se a seguinte igualdade*

$$\int_{\{u^*>t\}} f^*(x)\,dx = \int_0^{\mu(t)} f^*\left(\left(\frac{s}{w_N}\right)^{1/N}\right) ds. \tag{2.31}$$

Demonstração: Como $\{x \in \Omega : u^*(x) > t\} = B_{z(t)}(0)$ então

$$\int_{\{u^*>t\}} f^*(x)\,dx = N w_N \int_0^{z(t)} f^*(r) r^{N-1}\,dr.$$

Fazendo $r = \left(\frac{s}{w_N}\right)^{1/N}$ e lembrando que $\mu(t) = w_N(z(t))^N$ temos o resultado. ■

Observação 2.4. *Fazendo $\phi(s) = f^*((\frac{s}{w_N})^{1/N})$ em (2.31) temos que*

$$\int_{\{u^*>t\}} f^*(x)\,dx = \int_0^{\mu(t)} \phi(s)\,ds.$$

Substituindo u^* por v na igualdade acima obtemos

$$\int_{\{v>t\}} f^*(x)\,dx = \int_0^{\nu(t)} \phi(s)\,ds.$$

Demonstração do Teorema 2.12 :

Seja $\varepsilon > 0$ um número suficientemente pequeno, e definamos a função $F : [\varepsilon, med(\Omega)] \to \mathbb{R}$ por

$$F(\lambda) = \frac{1}{(N\, w_N^{1/N}\, \lambda^{1-1/N})^{p'}} \left(\int_0^{\lambda} \phi(s)\,ds\right)^{p'/p}.$$

É claro que F é positiva e continua em $[\varepsilon, med(\Omega)]$.

Substituindo $(c)^{p'}$ em $(b)^{p'}$ do Lema 2.14, depois usando $(a)^{p'/p}$ e a Observação 2.4 temos

$$\begin{aligned}
(N\, w_N^{1/N}\, \mu(t)^{1-1/N})^{p'} &\leq \left(-\frac{d\mu}{dt}\right)\left[-\frac{d}{dt}\left(\int_{\{u>t\}} |\nabla u|^p\,dx\right)\right]^{p'/p} \\
&\leq \left(-\frac{d\mu}{dt}\right)\left(\int_{\{u^*>t\}} f^*(x)\,dx\right)^{p'/p} \\
&= \left(-\frac{d\mu}{dt}\right)\left(\int_0^{\mu(t)} \phi(s)\,ds\right)^{p'/p}.
\end{aligned}$$

Então
$$1 \leq \left(-\frac{d\mu}{dt}\right) F(\mu(t)).$$
Por outro lado, da parte (d) do Lema 2.14 e da Observação 2.4 temos que
$$1 = \left(-\frac{d\nu}{dt}\right) F(\nu(t)).$$
Portanto
$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right) F(\mu(t)) \leq \left(\frac{d\nu}{dt}\right) F(\nu(t)). \tag{2.32}$$
Agora seja $\tilde{F}$ uma função tal que $\dfrac{d\tilde{F}}{dt} = F$ em $(\varepsilon, med(\Omega))$, então

(i) $\tilde{F} \in C^1((0, med(\Omega)])$,

(ii) $\tilde{F}$ é estritamente crescente, pois $F > 0$.

Então, de (2.32) temos que
$$\frac{d}{dt}(\tilde{F} \circ \mu) \leq \frac{d}{dt}(\tilde{F} \circ \nu). \tag{2.33}$$
Integrando (2.33) de 0 a t temos que
$$\tilde{F}(\mu(t)) - \tilde{F}(\mu(0)) \leq \tilde{F}(\nu(t)) - \tilde{F}(\nu(0)),$$
e como $\mu(0) = \nu(0) = med(\Omega)$ resulta que
$$\tilde{F}(\mu(t)) \leq \tilde{F}(\nu(t)).$$
Daí concluímos que $\mu(t) \leq \nu(t)$ (pois $\tilde{F}$ é estritamente crescente), isto é
$$\mu(t) = med\{x \in \Omega^* : u^*(x) > t\} \leq med\{x \in \Omega^* : v(x) > t\} = \nu(t) \quad \forall t \geq 0. \tag{2.34}$$
Afirmamos que a desigualdade em (2.34) implica que $u^*(x) \leq v(x)$ em Ω^*. De fato, suponhamos que existe $x_0 \in \Omega^*$ tal que $u^*(x_0) > v(x_0)$. Se $v(x_0) = t_0$ então $u^*(x_0) > t_0$. Como u^* é decrescente, existe $x_1 > x_0$ tal que $u^*(x_0) > u^*(x_1) = t_0$, logo
$$\nu(t_0) < \mu(t_0),$$
contradição com (2.34). ■

2.5 Super-solução num Domínio Geral

Nesta seção determinaremos a condição sobre f que garanta a existência da super-solução estrita para o problema (P), com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2.

Teorema 2.16. *Sejam $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ soluções fracas de,*

$$(P_\mu)\begin{cases} -\Delta_p u &= \mu|u|^{p-2}u + 1 \quad \textit{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(P_\mu^*)\begin{cases} -\Delta_p v &= \mu|v|^{p-2}v + 1 \quad \textit{em } \Omega^* \\ v &= 0 \quad \textit{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

onde $0 \leq \mu < \lambda_1(p, \Omega^*)$. Então

$$u^* \leq v \quad \textit{q.t.p. em } \Omega^*$$

Demonstração: Se $\mu = 0$ o resultado é imediato por uma aplicação direta do Teorema 2.12. Suponhamos então, que $0 < \mu < \lambda_1(p, \Omega^*)$. Observemos primeiro que $u_0 = 0$ e $v_0 = 0$ são sub-soluções de (P_μ) e (P_μ^*) respectivamente, e a seguir consideremos os seguintes problemas de Dirichlet:

$$(P_1)\begin{cases} -\Delta_p u_1 &= 1 \quad \text{em } \Omega \\ u_1 &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad (P_1^*)\begin{cases} -\Delta_p v_1 &= 1 \quad \text{em } \Omega^* \\ v_1 &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

onde u_1 e v_1 são soluções fracas únicas e positivas de (P_1) e (P_1^*) respectivamente (ver Lema 1.17), então

$$u_1^* \leq v_1 \quad \text{q.t.p. em } \Omega^*, \tag{2.35}$$

pelo Teorema 2.12. Lembremos que $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$. Agora, seja w_2 solução fraca do problema

$$(\tilde{P}_2)\begin{cases} -\Delta_p w_2 &= (\mu\varphi_p(u_1) + 1)^* \quad \text{em } \Omega^* \\ w_2 &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^*, \end{cases}$$

e seja v_2 solução fraca do problema

$$(P_2^*)\begin{cases} -\Delta_p v_2 &= \mu\varphi_p(v_1) + 1 \quad \text{em } \Omega^* \\ w_2 &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega^*. \end{cases}$$

Por (ii) e (iii) da Proposição 2.4, pela Proposição 2.5, e por (2.35) temos que

$$(\mu\varphi_p(u_1)+1)^* = \mu\varphi_p(u_1^*)+1 \leq \mu\varphi_p(v_1)+1,$$

ou seja, $-\Delta_p w_2 \leq -\Delta_p v_2$ em Ω^* então

$$w_2 \leq v_2 \quad \text{q.t.p. em } \Omega^*, \tag{2.36}$$

pelo *Princípio de Comparação Fraca*(Lema 1.18). Por outro lado, consideremos o seguinte problema

$$(P_2)\begin{cases} -\Delta_p u_2 &= \mu\varphi_p(u_1)+1 \quad \text{em } \Omega \\ u_2 &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

aplicando o Teorema 2.12 a (P_2) e $(\tilde{P}_2)$ temos que $u_2^* \leq w_2$ q.t.p. em Ω^*, então, usando (2.36) concluímos que

$$u_2^* \leq v_2 \quad \text{q.t.p. em } \Omega^*.$$

Continuando com este processo de forma indutiva construímos as seqüências $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, cujos elementos são soluções fracas dos problemas:

$$(P_n)\begin{cases} -\Delta_p u_n &= \mu\varphi_p(u_{n-1})+1 \quad \text{em } \Omega \\ u_n &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$$(P_n^*)\begin{cases} -\Delta_p v_n &= \mu\varphi_p(v_{n-1})+1 \quad \text{em } \Omega^* \\ v_n &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

respectivamente, tais que:

$$u_n^* \leq v_n \quad \text{q.t.p. em } \Omega^*.$$

Daqui para frente, para simplificar, escreveremos $h(\cdot) = \mu\varphi_p(\cdot)+1$. É claro que $h(\cdot)$ é uma função crescente. Observemos que a existência e a unicidade das soluções de (P_n) e (P_n^*) são garantidas pelo Lema 1.17.

Continuaremos a demonstração do teorema por passos:

Passo 1: $0 < v_1 \leq v_2 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq v$ em Ω^*.

Como $v_0 = 0$, é claro que $h(v_0) = 1$. Pelas observações ao Lema 1.17 temos que $v_1 > 0$, então $-\Delta_p v_1 = h(v_0) < h(v_1) = -\Delta_p v_2$, daí pelo *Principio de Comparação Fraca*

$$0 < v_1 \leq v_2 \quad \text{q.t.p. em } \Omega^*.$$

Continuando com este processo de forma indutiva concluímos que

$$0 < v_1 \leq v_1 \leq v_2 \leq ... \leq v_n \leq ...$$

Por outro lado, sabemos que $v > 0$ em Ω^* então

$$-\Delta_p v_1 = h(v_0) < h(v) = -\Delta_p v,$$

daí, pelo *Principio de Comparação Fraca*

$$0 < v_1 \leq v \quad \text{q.t.p. em } \Omega^*$$

Continuando com este processo de forma indutiva concluímos que

$$0 < v_n \leq v, \quad \text{q.t.p. em } \Omega^*, \forall n \in \mathbb{N},$$

daí a afirmação.

Passo 2: $\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega^*)} \leq C$.

Seja $v_n \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ solução fraca de (P_n^*), então

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega^*} h(v_{n-1}) \cdot \varphi \, dx; \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega^*) \tag{2.37}$$

Fazendo $\varphi = v_n$ em (2.37) temos que:

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^p \, dx = \int_{\Omega^*} h(v_{n-1}) \cdot v_n \, dx \leq \int_{\Omega^*} h(v_n) \cdot v_n \, dx = \mu \int_{\Omega^*} |v_n|^p \, dx + \int_{\Omega^*} v_n \, dx$$

pois $h(\cdot)$ é crescente. Por outro lado, como $\int_{\Omega^*} |v_n|^p \, dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^p \, dx$, onde $\lambda_1^* = \lambda_1^*(p, \Omega^*)$, temos que

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^p \, dx \leq \mu \int_{\Omega^*} |v_n|^p \, dx + \int_{\Omega^*} v_n \, dx \leq \frac{\mu}{\lambda_1^*} \int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^p \, dx + \int_{\Omega^*} v_n \, dx,$$

então

$$\left(1-\frac{\mu}{\lambda_1^*}\right)\int_{\Omega^*}|\nabla v_n|^p\,dx \le \int_{\Omega^*} v_n\,dx \le \int_{\Omega^*} v\,dx \le \|v\|_{L^\infty(\Omega^*)}\cdot med(\Omega^*)\,dx$$

Daí

$$\int_{\Omega^*}|\nabla v_n|^p\,dx \le \frac{\lambda_1^*}{\lambda_1^*-\mu}\|v\|_{L^\infty(\Omega^*)}\cdot med(\Omega^*),$$

portanto

$$\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega^*)} \le \left(\frac{\lambda_1^*}{\lambda_1^*-\mu}\|v\|_{L^\infty(\Omega^*)}\cdot med(\Omega^*)\right)^{1/p},$$

ou seja,

$$\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega^*)} \le C, \quad \text{onde} \quad C = C(p,\lambda_1^*,\mu,\|v\|_{L^\infty(\Omega^*)}, med(\Omega^*))$$

Passo 3: $v_n \to V$ em $W_0^{1,p}(\Omega^*)$, algum $V \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$.

Pelo Passo 2 existe uma subseqüência v_{n_k} que chamaremos v_n, tal que $v_n \rightharpoonup V$ em $W_0^{1,p}(\Omega^*)$. A *Imersão de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega^*) \subset\subset L^p(\Omega^*)$ nos garante que $v_n \to V$ em $L^p(\Omega^*)$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p v_n, v_n - V\rangle &= \int_{\Omega^*}|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\cdot\nabla(v_n-V)\,dx\\
&= \int_{\Omega^*} h(v_{n-1})\cdot(v_n-V)\,dx\\
&\le \int_{\Omega^*} h(v_n)\cdot(v_n-V)\,dx\\
&\le \|h(v_n)\|_{L^{p'}(\Omega^*)}\|v_n-V\|_{L^p(\Omega^*)},
\end{aligned}$$

e como $\|h(v_n)\|_{L^{p'}(\Omega^*)} \le C_1$, onde $C_1 = (\mu\|v\|^{p-1}_{L^\infty(\Omega^*)}+1)\cdot med(\Omega^*)$, temos que

$$\langle -\Delta_p v_n, v_n - V\rangle \le C_1\,\|v_n - V\|_{L^p(\Omega^*)},$$

portanto

$$\limsup\langle -\Delta_p v_n, v_n - V\rangle \le 0.$$

Usando o fato de que $-\Delta_p$ satisfaz a condição (S_+), Lema 1.13, obtemos que

$$v_n \to V \quad \text{em } W_0^{1,p}(\Omega^*).$$

Passo 4: V é solução de (P_{μ^*}).

Sabemos que v_n é solução fraca de (P_n^*), então

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega^*} h(v_{n-1})\cdot\varphi\, dx\,, \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega^*) \tag{2.38}$$

Como $v_n \to V$ em $L^p(\Omega^*)$ então $\varphi_p(v_{n-1}) \to \varphi_p(V)$ em $L^{p'}(\Omega^*)$, ver Corolário A.4, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega^*} h(V)\cdot\varphi\, dx - \int_{\Omega^*} h(v_{n-1})\cdot\varphi\, dx\right| &\leq \mu\int_{\Omega^*} |\varphi_p(V) - \varphi_p(v_{n-1})|\cdot|\varphi|\, dx \\ &\leq \mu\|\varphi_p(V) - \varphi_p(v_{n-1})\|_{L^{p'}(\Omega^*)}\|\varphi\|_{L^p(\Omega^*)} \to 0,\end{aligned}$$

ou seja

$$\int_{\Omega^*} h(v_{n-1})\varphi\, dx \to \int_{\Omega^*} h(V)\varphi\, dx \tag{2.39}$$

Por outro lado, como $\nabla v_n \to \nabla V$ em $(L^p(\Omega^*))^N$ implica que $\varphi_p(\nabla V) \to \varphi_p(\nabla v_n)$ em $(L^{p'}(\Omega^*))^N$, ver Observação A.2, então

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\Omega^*} |\nabla V|^{p-2}\nabla V\cdot\nabla\varphi\, dx - \int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\cdot\nabla\varphi\, dx\right| \leq \\ &\leq \int_{\Omega^*} |\varphi_p(\nabla V) - \varphi_p(\nabla v_n)|\,|\nabla\varphi|\, dx \\ &\leq \|\varphi_p(\nabla V) - \varphi_p(\nabla v_n)\|_{(L^{p'})^N}\|\nabla\varphi\|_{(L^p)^N} \to 0,\end{aligned}$$

ou seja

$$\int_{\Omega^*} \varphi_p(\nabla v_n)\nabla\varphi\, dx \to \int_{\Omega^*} \varphi_p(\nabla v)\nabla\varphi\, dx \tag{2.40}$$

Finalmente usando (2.39) e (2.40) em (2.38) temos que

$$\int_{\Omega^*} |\nabla V|^{p-2}\nabla V\cdot\nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega^*} (\mu|V|^{p-2}V + 1)\varphi\, dx,$$

ou seja, V é solução fraca de (P_μ^*). Pela unicidade da solução, ver Teorema 2.9, concluímos que $V = v$.

Passo 5: $u_n^* \to u^*$ em $W_0^{1,p}(\Omega^*)$

Esta afirmação prova-se seguindo os mesmos passos acima para a solução u_n do problema (P_n), e observando que:

(i) $0 < u_1^* \leq u_2^* \leq ... \leq u_n^* \leq ... \leq u^*$ em Ω^*, usando (i) da Proposição 2.4.

(ii) $\|u_n^*\| \leq C$, para $C = C(p, \lambda_1^*, \mu, \|u^*\|_{L^\infty(\Omega^*)}, med(\Omega^*))$, usando (i) e (iii) do Teorema 2.6.

Passo 6: $u^* \leq v$ q.t.p. em Ω^*.

Como $v_n \to v$ em $W_0^{1,p}(\Omega^*)$, pela imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega^*) \hookrightarrow L^p(\Omega^*)$ temos que $v_n \to v$ em $L^p(\Omega^*)$, daí, existe um subseqüência v_{n_k} tal que $v_{n_k} \to v$ q.t.p. em Ω^*. Portanto

$$v_n \to v \qquad \text{q.t.p. em } \Omega^*.$$

Da mesma forma concluímos que

$$u_n^* \to u^* \qquad \text{q.t.p. em } \Omega^*.$$

Finalmente, como $u_n^* \leq v_n$ q.t.p. em Ω^* é imediato que

$$u^* \leq v \qquad \text{q.t.p. em } \Omega^*.$$

■

Proposição 2.17. *Suponhamos que $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, satisfaz a seguinte condição:*

$$\textit{Existem números } s_0 > 0 \quad e \quad 0 \leq \mu < \lambda_1(p, \Omega^*) \quad \textit{tais que}:$$

$$f(x,s) < \mu s^{p-1} + \left(\frac{s_0}{\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}}\right)^{p-1}, \quad \forall\, s \in [0, s_0]$$

onde ρ é o raio da bola Ω^*. Então, o problema (P) tem uma super-solução estrita.

Demonstração: Consideremos os seguintes problemas de Dirichlet,

$$\begin{cases} -\Delta_p w &= \mu |w|^{p-2} w + c^{p-1} \quad \text{em } \Omega \\ w &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta_p v &= \mu |v|^{p-2} v + c^{p-1} \quad \text{em } \Omega^* \\ v &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

onde $c > 0$ é uma constante. Como u e w são soluções de (P_c) e (P_{c^*}) respectivamente, temos que

$$-\Delta_p\left(\frac{1}{c}w\right) = \mu\varphi_p\left(\frac{1}{c}w\right) + 1 \qquad \text{em } \Omega$$

$$-\Delta_p\left(\frac{1}{c}v\right) = \mu\varphi_p\left(\frac{1}{c}v\right) + 1 \qquad \text{em } \Omega^*.$$

Pelo Teorema 2.16 temos que

$$\left(\frac{1}{c}w\right)^* \leq \left(\frac{1}{c}v\right) \qquad \text{q.t.p. em } \Omega^*.$$

Usando (iii) da Proposição 2.4 junto com a Observação 2.2 resulta que

$$0 < \frac{1}{c}w^* \leq \frac{1}{c}v \leq \rho^{p'} M_{\mu\rho^p} \qquad \text{q.t.p. em } \Omega^*,$$

daí

$$0 < w^* \leq c\,\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}.$$

Por outro lado, como $\|w^*\|_{L^\infty(\Omega^*)} = \|w\|_{L^\infty(\Omega)}$, (parte (i) do Teorema 2.6) temos que

$$0 \leq w \leq c\,\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}.$$

Escolhendo $c = \dfrac{s_0}{\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}}$ temos que

$$f(x,w) < \mu w^{p-1} + \left(\frac{s_0}{\rho^{p'} M_{\mu\rho^p}}\right)^{p-1}$$

daí w é super-solução de (P). Prova-se que w é uma super-solução estrita seguindo as mesmas idéias que na prova da Proposição 2.11. ■

A seguir mostraremos como uma solução de

$$(Pa)\begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

pode ser obtida a partir da solução de

$$(Pa^*)\begin{cases} -\Delta_p v &= f(v) \quad \text{em } \Omega^* \\ v &> 0 \qquad \text{em } \Omega^* \\ v &= 0 \qquad \text{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

Aqui vamos a supor as seguintes condições sobre f

$(f1')$ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ localmente lipschitziana

$(f2')$ $\liminf_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s^{p-1}} > \lambda_1(p, \Omega)$

Teorema 2.18. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente que satisfaz $(f1')$ e $(f2')$. Suponhamos que o problema (Pa^*) tem uma solução $v \in W_0^{1,p}(\Omega^*) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^*})$, algum $\alpha \in (0,1)$. Então o problema (Pa) tem uma solução minimal $\underline{u}$ e*

$$\underline{u}^* \leq \underline{v} \qquad em \quad \Omega,$$

onde $\underline{v}$ é solução minimal de (Pa^*).

Demonstração: Seja $\hat{\phi}_1$ a autofunção correspondente a $\lambda_1(p, \Omega^*)$ tal que

$$\hat{\phi}_1 > 0 \quad \text{em } \Omega^* \qquad \text{e} \qquad \int_{\Omega^*} \hat{\phi}_1^{\,p}\, dx = 1$$

Usando $(f2')$ temos que $u_0 = \varepsilon\phi_1$ é sub-solução de (Pa) e $v_0 = \eta\hat{\phi}_1$ é sub-solução de (Pa^*), então

$$u_0^* \leq v_0 \qquad \text{em } \Omega^*. \tag{2.41}$$

Agora consideremos os seguintes Problemas de Dirichlet

$$(Pa_1)\begin{cases} -\Delta_p u_1 &= f(u_0) \quad \Omega \\ \quad u_1 &= 0 \qquad \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (\widetilde{Pa_1})\begin{cases} -\Delta_p w_1 &= (f(u_0))^* \quad \Omega^* \\ \quad w_1 &= 0 \qquad \partial\Omega^* \end{cases}$$

onde u_1 e w_1 são soluções fracas únicas e positivas de (Pa_1) e $(\widetilde{Pa_1})$ respectivamente. Então,

$$u_1^* \leq w_1 \quad \text{em} \quad \Omega^*,$$

pelo Teorema 2.12. Consideremos agora o seguinte problema de Dirichlet

$$(Pa_1^*)\begin{cases} -\Delta_p v &= f(v_0) \quad \Omega^* \\ \quad v_1 &= 0 \qquad \partial\Omega^* \end{cases}$$

onde v_1 é a única solução positiva de (Pa_1^*). Como f é crescente usando a Proposição 2.5 temos que $(f(u_0))^* = f(u_0^*) \leq f(v_0)$ em Ω^* ou seja

$$-\Delta_p w_1 = (f(u_0))^* \leq f(v_0) = -\Delta_p v_1$$

Pelo *Principio de Comparação Fraca* concluímos que

$$u_1^* \leq v_1 \quad \text{e} \quad \Omega^*.$$

Continuando este processo de forma indutiva construímos as seqüências $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ cujos elementos são soluções fracas dos problemas

$$(Pa_n)\begin{cases} -\Delta_p u_n &= f(u_{n-1}) \quad \Omega \\ u_n &= 0 \qquad\qquad \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad (Pa_n^*)\begin{cases} -\Delta_p v_n &= f(v_{n-1}) \quad \Omega^* \\ v_n &= 0 \qquad\qquad \partial\Omega^* \end{cases}$$

respectivamente, tais que

$$u_n^* \leq v_n \quad \text{em} \quad \Omega^*$$

Seguiremos a demonstração por passos:

Passo 1: $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq ... \leq v_n \leq ... \leq v$ em Ω^*.

Como $-\Delta_p v_0 < f(v_0) = -\Delta_p v_1$ então $v_0 \leq v_1$ em Ω^*. Agora, usando que f é crescente temos que $-\Delta_p v_1 = f(v_0) \leq f(v_1) = -\Delta_p v_2$ então $v_1 \leq v_2$ em Ω^*. Continuando este processo de forma indutiva temos que

$$0 \leq v_0 \leq v_1 \leq ... \leq v_n \leq ... \quad \text{em} \quad \Omega^*.$$

Como $-\Delta_p v \geq 0$ em Ω^*, então $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} < 0$ sobre $\partial\Omega^*$, pelo Lema de Hopf, assim para um $\eta > 0$ apropriado temos que $v_0 \leq v$. Observemos que v é em particular uma super-solução de (Pa^*). Usando que f é não-decrescente temos que $-\Delta_p v_1 = f(v_0) \leq f(v) = -\Delta_p v$, então $v_0 \leq v_1 \leq v$ em Ω^*. Continuando de forma indutiva com este processo temos o resultado.

Passo 2: $v_n \to V$ em $W_0^{1,p}(\Omega^*)$, algum $V \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$.

Como v_n é solução de (Pa_n^*) e f é crescente então

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^p \, dx = \int_{\Omega^*} f(v_{n-1}) v_n \, dx \leq f(k_0) \cdot k_0 \cdot med(\Omega^*),$$

onde $k_0 = \max\limits_{x \in \overline{\Omega^*}} v(x)$. Logo

$$\|v_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega^*)} \leq [k_0 \cdot f(k_0) \cdot med(\Omega^*)]^{1/p} = ctte.$$

Daí existe uma subseqüência v_{n_k} que chamaremos v_n tal que $v_n \rightharpoonup V$ em $W_0^{1,p}(\Omega^*)$. Pela *Imersão de Sobolev* $v_n \to V$ em $L^1(\Omega^*)$. Como

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta_p v_n, v_n - V\rangle &= \int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \cdot \nabla(v_n - V)\, dx \\
&= \int_{\Omega^*} f(v_{n-1}) \cdot (v_n - V)\, dx \\
&\leq f(k_0) \cdot \|v_n - V\|_{L^1(\Omega^*)},
\end{aligned}$$

então

$$\limsup \langle -\Delta_p v_n, v_n - V\rangle \leq 0.$$

Finalmente, usando que $-\Delta_p$ satisfaz a condição (S_+) temos o resultado.

Passo 3: V é solução de (Pa^*)

Lembremos que

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n\, \nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega^*} f(v_{n-1})\, \varphi\, dx.$$

Como f é continua e $v_n \to V$ q.t.p. em Ω^* então

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega^*} f(V)\varphi\, dx - \int_{\Omega^*} f(v_{n-1})\varphi\, dx\right| &\leq \int_{\Omega^*} |f(V) - f(v_{n-1})| \cdot |\varphi|\, dx \\
&\leq \|f(V) - f(v_{n-1})\|_{L^\infty(\Omega^*)} \int_{\Omega^*} |\varphi|\, dx \to 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\int_{\Omega^*} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \cdot \nabla\varphi\, dx \to \int_{\Omega^*} |\nabla V|^{p-2}\nabla V \cdot \nabla\varphi\, dx$$

(ver Passo 4 da demonstração do Teorema 2.16) então a afirmação é imediata.

Passo 4: V é uma solução minimal de (Pa^*)

Esta afirmação é imediata pois para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $v_0(x) \leq v_n(x) \leq v(x)$ q.t.p. em Ω^* implica que

$$v_0(x) \leq (\lim v_n(x) = V(x)) \leq v(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega^*.$$

Passo 5: U é solução minimal de (Pa)

Seguindo as mesmas ideias que no Passo 2 temos que

$$0 < u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq \ldots \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Observemos que neste caso não temos uma super-solução para (Pa), porém pela parte (i) do Teorema 2.6 temos que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u_n^*\|_{L^\infty(\Omega^*)} \leq \|v_n\|_{L^\infty(\Omega^*)} \leq k_0$$

Usando esta estimativa resulta que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \, dx = \int_\Omega f(u_{n-1}) \cdot u_n \, dx \leq f(k_0) \cdot k_0 \cdot med(\Omega)$$

ou seja $\|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq ctte$. Continuando da mesma forma que no Passo 3 e no Passo 4 concluímos o resultado.

Passo 6: $U^* \leq V$ q.t.p. em Ω^*

A prova desta afirmação segue as mesmas idéias que no Passo 6 na demostração do Teorema 2.16. ∎

Corolário 2.19. *Seja $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente satisfazendo as hipóteses $(f1')$ e $(f2')$, tal que*

$$f_1(s) > f(s) \quad \textit{para todo } s \in \mathbb{R}^+.$$

Suponhamos que o problema

$$(Pa_{f_1}^*) \begin{cases} -\Delta_p v &= f_1(v) \quad \textit{em } \Omega^* \\ v &= 0 \quad\quad\;\; \textit{sobre } \partial\Omega^* \end{cases}$$

tem uma solução $v \in W_0^{1,p}(\Omega^*) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega^*})$. Então o problema (Pa) tem uma super-solução estrita w.

Demonstração: Como f_1 é crescente e satisfaz $(f1')$ e $(f2')$, pelo Teorema 2.18 temos que o seguinte problema

$$(Pa_{f_1}) \begin{cases} -\Delta_p z &= f_1(z) \quad \text{em } \Omega \\ z &= 0 \quad\quad\;\; \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma solução minimal w tal que $w^* \leq \underline{v}$ em Ω^*, onde $\underline{v}$ é a solução minimal de $(Pa^*_{f_1})$. Isto é possível pois $v > 0$ em Ω^*, pelo *Princípio do Máximo de Vazquez.* É imediato que w é uma super-solução de (Pa). Afirmamos que w é uma super-solução estrita. De fato, seja $\psi \in C^1_c(\Omega)$ tal que $\psi \geq 0$ e $\psi \neq 0$, então

$$\int_\Omega |\nabla w|^{p-2}\nabla w \cdot \nabla\psi \, dx = \int_\Omega f_1(w)\psi \, dx > \int_\Omega f(w)\psi \, dx$$

daí a afirmação. ■

APÊNDICE A

Uma Desigualdade Importante

Lema A.1. *Seja $p > 1$. Existe uma constante $c_p > 0$ tal que, para todo $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^N$,*

$$(|s_2|^{p-2}s_2 - |s_1|^{p-2}s_1, s_1 - s_2) \geq \begin{cases} c_p|s_2 - s_1|^p & ; \quad se \quad p \geq 2 \\ c_p \dfrac{|s_2 - s_1|^2}{|s_2| + |s_1|)^{2-p}} & ; \quad se \quad p \leq 2, \end{cases}$$

onde $(\cdot, \cdot)$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração: A demonstração deste lema pode ser encontrada em [27].

Proposição A.2. *Sejam $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $p > 1$, então*

$$\int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1)\nabla(u_2 - u_1) \geq \begin{cases} c_p \displaystyle\int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)|^p & ; \quad p \geq 2 \\ c_p \dfrac{\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla(u_2 - u_1)|^p\right)^{2/p}}{\left(\displaystyle\int_\Omega (|\nabla u_2| + |\nabla u_1|)^p\right)^{2-p/p}} & ; \quad p \leq 2, \end{cases}$$

Demonstração: Dividiremos a prova em dois casos:

Caso $p \geq 2$: Neste caso, o resultado é uma aplicação imediata do Lema acima.

Caso $1 < p \leq 2$: Usando a *Desigualdade de Hölder* temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^p &= \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{p(p-2)/2}} (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{p(p-2)/2} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}}\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p\right)^{(2-p)/2}.\end{aligned}$$

Então, usando o lema acima temos que

$$\begin{aligned}\frac{\left(\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\right)^{2/p}}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p\right)^{(2-p)/p}} &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^{2-p}} \\ &\leq \int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2),\end{aligned}$$

daí o resultado. ■

Observação A.1. *A desigualdade acima, pode ser escrita em termos da norma em* $W_0^{1,p}(\Omega)$. *De fato, como*

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p\right)^{1/p} &= \||\nabla u_1| + |\nabla u_2|\|_{L^p} \\ &\leq \|u_1\| + \|u_2\|,\end{aligned}$$

então

$$\frac{1}{\left(\int_\Omega (|\nabla u_1| + |\nabla u_2|)^p\right)^{1/p}} \geq \frac{1}{\|u_1\| + \|u_2\|}.$$

Logo,

$$\int_\Omega (|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 - |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1)\nabla(u_2-u_1) \geq \begin{cases} c_p\|u_2-u_1\|^p & ; \quad se \quad p \geq 2 \\ c_p\dfrac{\|u_2-u_1\|^2}{(\|u_2\| + \|u_1\|)^{2-p}} & ; \quad se \quad p \leq 2. \end{cases}$$

Definamos a função $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$. Observemos que $\varphi_p \circ \varphi_q = id$ e $\varphi_q \circ \varphi_p = id$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proposição A.3. *Seja $p > 1$. Existe uma constante $\widetilde{c}_p > 0$ tal que, para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^N$,*

$$|\varphi_p(t_2) - \varphi_p(t_1)| \leq \begin{cases} \widetilde{c}_p |t_2 - t_1|^{p-1} & ; \quad se \quad p \leq 2 \\ \widetilde{c}_p |t_2 - t_1| (|t_2| + |t_1|)^{p-2} & ; \quad se \quad p \geq 2, \end{cases}$$

onde $\widetilde{c}_p = min\{1/c_q, 1/c_q^{p-1}\}$.

Demonstração: Usando a desigualdade triangular no Lema A.1 para $1 < q < +\infty$ temos que

$$|\varphi_p(s_2) - \varphi_p(s_1)| \geq \begin{cases} c_q |s_2 - s_1|^{q-1} & ; \quad q \geq 2 \\ c_q \dfrac{|s_2 - s_1|}{(|s_2| + |s_1|)^{2-q}} & ; \quad q \leq 2 \end{cases}$$

para $s_1 \neq s_2$. Para $i = 1, 2$ seja

$$t_i = \varphi_q(s_i) \quad \text{então} \quad \varphi_p(t_i) = s_i. \tag{A.1}$$

A conclusão do Lema é obtida pela consideração dos seguintes casos:
Caso 1 ($q \geq 2$): Usando (A.1) e o fato de $p - 1 = \dfrac{1}{q-1}$ temos que

$$|t_2 - t_1|^{p-1} \geq c_q^{p-1} |\varphi_p(t_2) - \varphi_p(t_1)|.$$

Caso 2 ($q \leq 2$): Usando (A.1) temos que

$$|t_2 - t_1|(|t_2|^{p-1} + |t_1|^{p-1})^{2-q} \geq c_q |\varphi_p(t_2) - \varphi_p(t_1)|.$$

Usando a desigualdade

$$a^p + b^p \leq (a+b)^p \quad \forall a, b \geq 0, \quad \text{e } p \geq 1,$$

temos que

$$\begin{aligned} c_q |\varphi_p(t_2) - \varphi_p(t_1)| &\leq |t_2 - t_1|(|t_2|^{p-1} + |t_1|^{p-1})^{2-q} \\ &\leq |t_2 - t_1|(|t_2| + |t_1|)^{(p-1)(2-q)} \\ &= |t_2 - t_1|(|t_2| + |t_1|)^{p-2}. \end{aligned}$$

■

Corolário A.4. *Sejam $u_1, u_2 \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, então vale a desigualdade*

$$\|\varphi_p(u_1) - \varphi_p(u_2)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \begin{cases} c_p \|u_1 - u_2\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} & ; \quad p \leq 2 \\ c_p \|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)} \left(\|u_1\|_{L^p(\Omega)} + \|u_2\|_{L^p(\Omega)}\right)^{p-2} & ; \quad p \geq 2. \end{cases}$$

Demonstração: Seja p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pela Proposição A.3 temos que

$$\int_\Omega |\varphi_p(u_1) - \varphi_p(u_2)|^{p'} \leq \begin{cases} c_p^{p'} \displaystyle\int_\Omega |u_1 - u_2|^{p'(p-1)} = c_p^{p'} \|u_1 - u_2\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} & ; \quad p \leq 2 \\ c_p^{p'} \displaystyle\int_\Omega |u_1 - u_2|^{p'} \left(|u_1| + |u_2|\right)^{(p-2)p'} & ; \quad p \geq 2. \end{cases}$$

Da desigualdade acima temos que o caso $p \leq 2$ esta provado, assim, só nos resta provar o caso $p \geq 2$. Pela *Desigualdade de Hölder* temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_1 - u_2|^{p'} \left(|u_1| + |u_2|\right)^{(p-2)p'} &\leq \left(\int_\Omega |u_1 - u_2|^{p'(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\int_\Omega (|u_1| + |u_2|)^{(p-2)p'(p-1)'}\right)^{\frac{1}{(p-1)'}} \\ &= \left(\int_\Omega |u_1 - u_2|^{p}\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{(p-1)}} \left(\int_\Omega (|u_1| + |u_2|)^{p}\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{(p-1)'}} \\ &= \|u_1 - u_2\|^{p'}_{L^p(\Omega)} \||u_1| + |u_2|\|^{p'(p-2)}_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|u_1 - u_2\|^{p'}_{L^p(\Omega)} \left(\|u_1\|_{L^p(\Omega)} + \|u_2\|_{L^p(\Omega)}\right)^{p'(p-2)}. \end{aligned}$$

■

Observação A.2. *Sejam $\nabla u_1, \nabla u_2 \in (L^p(\Omega))^N$, isto é, para cada $1 \leq i \leq N$ tem-se que $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$. Então*

$$\|\varphi_p(\nabla u_2) - \varphi_p(\nabla u_1)\|_{(L^{p'}(\Omega))^N} \leq$$

$$\begin{cases} c_p \|\nabla u_2 - \nabla u_1\|^{p-1}_{(L^p(\Omega))^N} & ; \quad p \leq 2 \\ c_p \|\nabla u_2 - \nabla u_1\|_{(L^p(\Omega))^N} (\|\nabla u_1\|_{(L^p(\Omega))^N} + \|\nabla u_2\|_{(L^p(\Omega))^N})^{p-2} & ; \quad p \geq 2. \end{cases}$$

APÊNDICE B

Alguns Resultados Importantes

Proposição B.1 (Principio Variacional de Ekeland). *Seja X um espaço métrico completo e $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um função semicontinua inferior que é limitada por baixo. Seja $\epsilon > 0$ e $\bar{u} \in X$ dado, tal que*

$$\Phi(\bar{u}) \leq \inf_X \Phi + \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, dado $\lambda > 0$ existe $u_\lambda \in X$ tal que

$$\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(\bar{u})$$

$$d(u_\lambda, \bar{u}) \leq \lambda$$

$$\Phi(u_\lambda) < \Phi(u) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda), \quad \forall u \neq u_\lambda.$$

Demonstração: Ver [13].

Proposição B.2 (Teorema do Passo da Montanha, Ambrosetti-Rabinowitz [4]). *Seja X um espaço de Banach e $\Phi : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 que satisfaz a condição de (PS). Seja S um subconjunto fechado de X que o disconecta. Sejam $x_0, x_1 \in X$ que estão em componentes conexas distintas de X. Suponhamos que Φ é limitado por baixo em S, isto é,*

$$\inf_S \Phi \geq b \quad e \quad \max\{\Phi(x_0), \Phi(x_1)\} < b.$$

Seja o conjunto

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; X) \quad | \quad \gamma(0) = x_0 \quad e \quad \gamma(1) = x_1\},$$

então

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

é tal que $c > -\infty$ *e é um valor crítico. Isto é,*

$$\exists\, \tilde{x}_0 \in X \quad tal \quad que \quad \Phi(\tilde{x}_0) = c \quad e \quad \Phi'(\tilde{x}_0) = 0.$$

Demonstração: Ver [13].

BIBLIOGRAFIA

[1] ALLEGRETTO W., HUANG Y.X., *A Picone's identity for the p-Laplacian and Applicattions*, Nonlinear Analysis TMA, **32 (7)**, 1998, 819-830.

[2] ANANE A., *Simplicité et isolation de la primière valeur propre du p-laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **305**, 1987, 725-728.

[3] ANANE A., *Etude des valeurs propers et de la résonance pour l'opérator p-Laplacien*, Thèse de doctorat, 1988, Université Libre de Bruxelles, Brussels.

[4] AMBROSETTI A., RABINOWITZ P.H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Anal, **14**, 1973, 349-381.

[5] BANDLE C., *Isoperimetric inequalities and applicattions*, Pitman, London, 1980.

[6] BARLES, G., *Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the p-Laplacian*, Annales Faculté des Sciences de Toulosse, **IX (1)**, 1998, 65-75.

[7] BHATTACHARYA, T., *On some non-linear problems involving the p-Laplacian*, Ph.D Thesis, 1988, Purdue University.

[8] BREZIS H., NIREMBERG L., *H^1 versus C^1 local minimizers*, C. R. Acad. Sci., Paris **317**, 1993, 465-472.

[9] CUESTA M., DE FIGUEIREDO D. G., GOSSEZ J-P., *The beginning of the Fucik spectrum for the p-Laplacian*, J. Differential Equations, **159 (1)**, 1999, 212-238.

[10] CUESTA M., TAKÁČ P.,*A Strong Comparison principle for the Dirichlet p-Laplacian*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **194**, 1998, 79-87.

[11] DAMASCELLI, L.,*Comparison theorems for some quasilinear degenerate elliptic operators and applications to symmetry and monotonicity results*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **15** (**4**), 1998, 493-516.

[12] DÍAZ J.I., SAA J. E., *Existence et unicité de solutions positives pour certaine é quations elliptiques quasilinéaires*, C.R. Acad. Sci. Paris, **t. 305**, 1987, 521-524.

[13] DE FIGUEIREDO D. G., *Lecture on the variational principle with applications and détours*, TATA Institute, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1989.

[14] DE FIGUEIREDO, D.G., LIONS, P.L., *On pairs of positive solutions for a class of semilinear elliptic problems*, Ind. Univ. Math. J., **34** (**3**), 1985, 591-606.

[15] DE FIGUEIREDO, D.G., SOLIMINI S., *A variational approach to superlinear elliptic problems*, Comm. Partial Differential Equations, **9**, 1984, 699-717.

[16] FLECKINGER-PELLÉ J., HERNÁNDEZ J.,TAKÁČ P.,DE THÉLIN F., *Uniqueness and positivity for solutions of equations with the p-Laplacian*, Reaction Diffusion Systems (Trieste, 1995), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **194**, Dekker, New York, 1998.

[17] FLECKINGER-PELLÉ J., HERNÁNDEZ J.,TAKÁČ P.,DE THÉLIN F., *On maximum principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems*, Diff. and Int. Equations, **8**, 1995, 69-85.

[18] GARCIA A. J., MANFREDI J. J., PERAL I., *Sobolev versus Holder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Commun. Contemp. Math, **2** (**3**), 2000, 385-404.

[19] GUEDDA M., VERON L., *Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Analysis T.M.A. **13** (**8**), 1989, 879-902.

[20] KAWHOL B., *Rearrangementes and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics **1150**, 1985, Springer-Verlag, Berlin.

[21] LIEBERMANN, G.M., *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis TMA, **12**, 1988, 1203-1219.

[22] LINDQVIST, P., *On the equation* $div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$, Proc. Am. Math. Soc, **109 (1)**, 1990, 157-164.

[23] LIONS, P.-L., *Quelques remarques sur la symmetrization de Schwarz*, Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar, **vol 1**, Pitman, London, 1981, 308-319.

[24] MOSSINO J., *Inégalités isopérimétriques et applications en physique*, Hermann, Paris, 1984.

[25] OTÂNI M. & TESHIMA T., *On the first eigenvalue of some quasilinear elliptic equations*, Proc. Japan Acad., Ser A, **64 (A)**, 1988, 8-10.

[26] SAKAGUCHI, S., *Convavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet Problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **14 (3)**, 1987, 403-421.

[27] SIMON, J., *Regularité de la solucão d'une équation non linéaire dans* $\mathbb{R}^N$, J. d'Analyse non linéarie, Proceedings, Besançon, France, 1977, Lecture Notes in Mathematics, **665**, Springer-Verlag, Berlin.

[28] TALENTI, G., *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **4 (3)**, 1976, 697-718.

[29] DE THÉLIN F., *Sur l'espace propre associé à la première valeur propre du pseudo-Laplacien*, C. R. Acad. Sci. Series I, **303**, 1986, 355-358.

[30] TOLKSDORFF, P., *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domain with conical boundary points*, Comm. in P.D.E., **8 (7)**, 1983, 773-817.

[31] VASQUEZ, J. L., *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim., **12**, 1984, 191-202.