



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

VICENTE CARLOS PEREZ ALVAREZ

**SOBRE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO
TIPO SCHRÖDINGER E COMPORTAMENTO
ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES**

Campinas
2019

Vicente Carlos Perez Alvarez

SOBRE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO TIPO SCHRÖDINGER E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Ademir Pastor Ferreira

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Vicente Carlos Perez Alvarez e orientada pelo Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira.

Campinas
2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P415s Perez Alvarez, Vicente Carlos, 1993-
Sobre um sistema de equações do tipo Schrödinger e comportamento assintótico de soluções / Vicente Carlos Perez Alvarez. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Ademir Pastor Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Schrödinger, Sistema de equações de. 2. Multi-soliton. 3. Comportamento assintótico de soluções. 4. Ondas viajantes. I. Ferreira, Ademir Pastor, 1982-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On a system of Schrödinger type equations and asymptotic behavior of solutions

Palavras-chave em inglês:

Schrödinger equations system

Multi-soliton

Asymptotic behavior of solutions

Traveling waves

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Ademir Pastor Ferreira [Orientador]

Mahendra Prasad Panthee

Thiago Pinguello de Andrade

Data de defesa: 09-08-2019

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0003-1030-0501>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4181464302275382>

**Dissertação de Mestrado defendida em 09 de agosto de 2019 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

Prof(a). Dr(a). ADEMIR PASTOR FERREIRA

Prof(a). Dr(a). MAHENDRA PRASAD PANTHEE

Prof(a). Dr(a). THIAGO PINGUELLO DE ANDRADE

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

É meu desejo, como simples gesto de gratidão, dedicar este trabalho a Deus por ser meu apoio constante, ao meu amado irmão Mateo Perez Alvarez e às minhas duas avós Irlene Marrugo e Irbelia Bautista.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar força em todos os momentos da minha vida, por ser meu sustento em tempos difíceis.

Agradeço ao professor Dr. Ademir Pastor, pela orientação neste trabalho, pelo conhecimento que sempre compartilhou comigo e pela boa disposição em me orientar da melhor maneira.

Agradeço aos meus pais Marceliano Perez e Gladys Alvarez por me apoiarem neste sonho que hoje em dia está prestes a ser realizado.

Agradeço aos meus queridos tios e tias por me darem as vozes de alento para realizar o meu sonho, especialmente, as minhas tias Lilia Perez e Ligia Perez por me terem dado a mão naquele momento de dificuldade que aconteceu quando comecei esta etapa.

Agradeço à Unicamp por abrir suas portas e me permitir obter conhecimento em diversas áreas da matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Finalmente quero agradecer a CNPQ porque também o presente trabalho foi realizado com seu apoio financeiro por meio do processo 169059/2018-9 que permitiu concluir este trabalho.

Resumo

Nesta dissertação estudamos o comportamento assintótico de soluções para um sistema de equações do tipo Schrödinger não-linear. O resultado principal a ser estudado exhibe explicitamente uma classe de ondas viajantes solitárias para a equação de Schrödinger e mostra que sempre existe uma solução do sistema que tem comportamento assintótico, no espaço de energia, semelhante a um par de ondas solitárias. Além disso, a convergência no infinito se dá de forma exponencial. Como requerimento prévio, será necessário um estudo das ferramentas básicas da teoria de equações diferenciais parciais dispersivas.

Palavras-chave: Sistema de equações de Schrödinger, ondas viajantes, multi-soliton, comportamento assintótico de soluções.

Abstract

In this dissertation we study the asymptotic behavior of solutions for a nonlinear system of Schrödinger type equations. The main result to be studied exhibits explicitly a class of solitary traveling waves for the standard Schrödinger equation and shows that there is a solution of the system that asymptotically behaves, in the energy space, like a pair of solitary waves. As previous requirements, it will be necessary a study about the basic tools of the theory of dispersive partial differential equations.

Keywords: System of Schrödinger equations, traveling waves, multi-soliton, asymptotic behavior of solutions.

Lista de símbolos

$q.t.p$	A menos de um conjunto de medida nula.
$\Re z$	Parte real do número complexo z .
$\Im z$	Parte imaginária do número complexo z .
$C(X, Y)$	Espaço das funções contínuas do espaço topológico X ao espaço topológico Y .
$\mathcal{L}(X, Y)$	Espaço de Banach dos operadores lineares e contínuos do espaço de Banach X para o espaço de Banach Y , equipado com a topologia da norma.
$\mathcal{L}(X)$	$\mathcal{L}(X, X)$.
$\mathbb{K}$	Espaço complexo ($\mathbb{C}$) ou Espaço euclidiano ($\mathbb{R}$).
$\mathbb{R}^d$	Espaço euclidiano d -dimensional.
$x \cdot y$	Produto interno entre dois elementos de $\mathbb{R}^d$.
$ \cdot $	Norma em $\mathbb{R}^d$.
$\ \cdot\ _X$	Norma do espaço X .
$\partial_i u$	$= u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.
∇u	$= (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_d u)$.
Δu	$\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
u_t	$= \partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt}$.
$D^\alpha u$	$= \frac{\partial^{\alpha_1} u}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d} u}{\partial x_d^{\alpha_d}}$.
$\hat{u}$	Transformada de Fourier de u .
$\check{u}$	Transformada de Fourier de inversa de u .
Ω	Subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$.
$C^k(\Omega)$	Espaço das funções com derivadas contínuas até ordem $k \geq 0$ em Ω .
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	Espaço de Schwartz.

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	Espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}^d$.
p'	Conjugado de $p \in [1, \infty]$ dado por $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
$L^p(\Omega)$	Espaços das funções de Lebesgue.
$L^p_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções $u \in L^p(B)$, com $B \subset \Omega$ limitado.
$W^{m,p}(\Omega)$	$(m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty)$ Espaço de Sobolev.
$H^m(\Omega)$	$= W^{m,2}(\Omega)$, com $m \in \mathbb{N}$.
$J^s u(x)$	$\left((1 + \xi ^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{u}(\xi) \right)^\vee(x)$.
$H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$	$(s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$ Espaço de Banach dos elementos $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tais que $J^s u \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
$H^s(\mathbb{R}^d)$	$= H^{s,2}(\mathbb{R}^d)$.
$\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$	$(s \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty)$ Versão homogênea do espaço de Sobolev $H^{s,p}$.
$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$	$= \dot{H}^{s,2}(\mathbb{R}^d)$.
$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$	$(s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty)$ Espaço de Besov.
$\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$	$(s \in \mathbb{R}, 1 \leq p, q \leq \infty)$ Versão homogênea de espaço de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$.
$L^p(I, X)$	Espaço de Banach das funções $u: I \rightarrow X$ tais que $u(t) \in L^p(X)$ q.t.p $t \in I$.
$e^{it\Delta} u_0$	$\left(e^{-4\pi^2 i t \xi ^2} \widehat{u}_0 \right)^\vee$.
C	Uma constante universal que pode variar conforme a linha.
X^l	Espaço produto $X \times X \times \cdots \times X$ (l -vezes).

Sumário

	Introdução	12
1	PRELIMINARES	15
1.1	Espaços de Sobolev	15
1.2	Espaços de Besov	18
1.3	Estimativas de Strichartz	20
1.4	O Problema de Cauchy	22
2	BOA COLOCAÇÃO LOCAL PARA UM SISTEMA NÃO-LINEAR DE EQUAÇÕES TIPO SCHRÖDINGER EM H^s	25
2.1	Boa colocação local em H^s quando $d/6 < s < \min\{1, d/2\}$	28
2.2	Boa colocação local em H^1	42
2.3	Leis de conservação.	48
3	EXISTÊNCIA DE MULTI-SOLITON PARA UM SISTEMA NÃO- LINEAR DO TIPO SCHRÖDINGER	55
3.1	Standing waves	55
3.2	Construção da solução multi-soliton	55
3.3	Estimativas uniformes	69
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE A – PROPRIEDADE DE COERCIVIDADE	90

Introdução

Sistemas de equações do tipo Schrödinger surgem em diversos contextos físicos. Quando o potencial de interação é quadrático, estes são colocados na forma

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \Delta u_1 + (\mu_1 |u_1|^2 + \beta |u_2|^2)u_1 = 0, \\ i\partial_t u_2 + \Delta u_2 + (\mu_2 |u_2|^2 + \beta |u_1|^2)u_2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, $u_1 = u_1(t, x)$ e $u_2 = u_2(t, x)$ são funções que tomam valores complexos, com $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mu_j > 0$ para $j = 1, 2$. Para exemplificar, quando $d = \mu_j = 1$ o sistema (1) pode ser derivado como um modelo de propagação de feixes de luz em uma fibra ótica, levando em consideração a polarização do feixe. Com esta escolha específica de parâmetros, o parâmetro β mede a força da interação XPM (modulação de fase cruzada) e varia dependendo da natureza da fibra (por exemplo, $\beta = 2$ para fibras de núcleo duplo ou $\beta = \frac{2}{3}$ para fibras de núcleo único) (veja (AGRAWAL, 2007)). Também, se $d = 3$ tal sistema pode modelar a interação de dois condensados de Bose-Einstein de átomos em diferentes estados de “spin” (veja (ESRY et al., 1997)).

Sistemas de tipo (1) também foram estudados a partir do ponto de vista matemático. Quando $\mu_1 = \mu_2 = \beta$, em dimensão 1, o sistema (1) tem a particularidade de ser completamente integrável. Portanto, cálculos explícitos de soluções são possíveis e pode-se exibir uma variedade de soluções não-lineares como solitons ou multi-solitons (veja (ABLOWITZ; PRINARI; TRUBATCH, 2004)).

Solitons e multi-solitons desempenham um papel crucial na compreensão da dinâmica das equações de evolução dispersivas não-lineares, como nas equações de Korteweg-de Vries ou nas equações não-lineares de Schrödinger (veja (TAO, 2009) para uma visão geral). O primeiro resultado de existência de multi-solitons em um ambiente não-integrável foi obtido por Merle em (MERLE, 1990) para multi-solitons compostos de *ground states* ou *excited states* para a equação de Schrödinger não-linear L^2 -crítica. Para multi-solitons compostos apenas de *ground states*, o caso L^2 -subcrítico foi tratado por (MARTEL; MERLE, 2006) (ver também (MARTEL, 2005) para a equação generalizada de Korteweg-de Vries) e o caso L^2 -supercrítico de (CÔTE; MARTEL; MERLE, 2011). Até onde vai nosso conhecimento, o primeiro resultado de construção de *excited multi-solitons*, em um ambiente não crítico, é devido a (IANNI; LE COZ, 2014). Este que será objeto principal de estudo ao longo desta dissertação.

Agora, devido às diversas aplicações e do interesse do ponto de vista matemático, o sistema (1) tem recebido muita atenção nos últimos anos. O interesse matemático ocorre em diversos aspectos tais como boa colocação local e global, comportamento assintótico de soluções, existência e estabilidade de ondas viajantes, existência e unicidade de soluções do tipo ground state, dentre outros. Nesse sentido, o objetivo de I. Ianni e L. Coz é fornecer

um novo ponto de vista sobre o estudo deste sistema. Mais precisamente, ao estudar este trabalho temos a intenção de entender a boa colocação global em alguns espaços de funções definidos em $\mathbb{R}^d$ e estudar o comportamento assintótico de soluções do sistema (1).

Observe que se $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$, o sistema (1) reduz à equação de Schrödinger escalar

$$i\partial_t u + \Delta u + \mu|u|^2 u = 0. \quad (2)$$

Portanto, o sistema (1) também pode ser visto como uma extensão natural de (2) no sentido que se u_1 ou u_2 é “pequena” em algum espaço de funções então a solução (u_1, u_2) deveria se comportar como as soluções de (2). É bem sabido que esta última equação satisfaz algumas propriedades de existência de solução em alguns espaços de funções. Motivados por isto, nossa intenção inicialmente é estender de certa forma todas essas propriedades da equação (2) para o sistema (1). As soluções da equação não linear de Schrödinger (2) satisfazem várias leis de conservação (veja (GINIBRE; VELO, 1982), (STRAUSS, 1978) e (WEINSTEIN, 1986) para um entendimento bastante completo dessas leis), em particular, a massa $\mathcal{M}$ e a energia $\mathcal{E}$ de uma solução de (1) (veja a definição em (2.57) e (2.58)) são conservadas no tempo. Assim, parece natural estudar as propriedades do problema (2.2) no espaço $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$. De fato, no segundo capítulo estudaremos a teoria de boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ no caso sub-crítico $2 < \frac{4}{d-2}$. O problema se dificulta em espaços de Sobolev do tipo $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$ para $s > 0$, onde a existência e regularidade das soluções depende da escolha da s . Como estudaremos existência local nestes espaços, precisamos de estimativas em espaços do tipo $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^d))$, com I um intervalo contendo o zero.

Contudo, para valores de s não inteiros as não linearidades não são bem comportadas entre espaços de Sobolev do tipo $H^{s,r}(\mathbb{R}^d)$. Assim, somos forçados a recorrer aos espaços de Besov $B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)$ e precisamos de estimativas lineares nos espaços do tipo $L^q(I, B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d))$. Nestas estimativas, os expoentes q e r sempre satisfazem uma certa relação (que consideraremos mais adiante). A ideia geral é entender a teoria de boa colocação local da equação (2) em (CAZENAVE, 2003) e estender esta teoria para o sistema (1).

Estudar a boa colocação global ou *blow up* é um pouco mais complicado, exigindo uma análise um pouco mais avançada. Por exemplo, para o caso $d = 3$, se considerarmos o par (P, Q) como sendo qualquer solução *ground states* de (1), e assumimos que

$$\mathcal{M}(u_1^0, u_2^0)\mathcal{E}(u_1^0, u_2^0) < \mathcal{M}(P, Q)\mathcal{E}(P, Q)$$

onde (u_1^0, u_2^0) é qualquer dado inicial do sistema (1). Então, (veja (PASTOR, 2015))

(i) Se

$$\mathcal{M}(u_1^0, u_2^0)(\|\nabla u_1^0\|_2^2 + \|\nabla u_2^0\|_2^2) < \mathcal{M}(P, Q)(\|\nabla P\|_2^2 + \|\nabla Q\|_2^2),$$

temos

$$\mathcal{M}(u_1^0, u_2^0)(\|\nabla u_1(t)\|_2^2 + \|\nabla u_2(t)\|_2^2) < \mathcal{M}(P, Q)(\|\nabla P\|_2^2 + \|\nabla Q\|_2^2),$$

e portanto a solução existe globalmente no tempo, pois o gradiente permanece uniformemente limitado.

(ii) Se

$$\mathcal{M}(u_1^0, u_2^0)(\|\nabla u_1^0\|_2^2 + \|\nabla u_2^0\|_2^2) > \mathcal{M}(P, Q)(\|\nabla P\|_2^2 + \|\nabla Q\|_2^2),$$

temos

$$\mathcal{M}(u_1^0, u_2^0)(\|\nabla u_1(t)\|_2^2 + \|\nabla u_2(t)\|_2^2) > \mathcal{M}(P, Q)(\|\nabla P\|_2^2 + \|\nabla Q\|_2^2).$$

Além disso, se u_1^0 e u_2^0 são radiais então a solução possui *blow up* em tempo finito (veja (PASTOR, 2015)). É importante ressaltar que no caso (i) acima, ainda ocorre o espalhamento da solução, ou seja, existem $\phi^+, \psi^+, \phi^-, \psi^- \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(u_1(t), u_2(t) - (e^{it\Delta}\phi^+, e^{it\Delta}\psi^+)\|_{H^1 \times H^1} = 0$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|(u_1(t), u_2(t) - (e^{it\Delta}\phi^-, e^{it\Delta}\psi^-)\|_{H^1 \times H^1} = 0,$$

onde, $e^{it\Delta}$ denota o grupo associado a (2) (veja (FARAH; PASTOR, 2017)). Note que as igualdades acima estabelecem o comportamento assintótico no infinito das soluções de (1), implicando que para t suficientemente grande o comportamento da solução do problema não linear é equivalente ao de uma solução do problema linear. Por outro lado, nosso principal interesse é justamente no comportamento assintótico das soluções de (1) que não satisfazem (i) e (ii) (no caso $d = 3$). Por isso estudaremos em detalhes o trabalho em (IANNI; LE COZ, 2014), o qual consiste em aplicar estimativas uniformes em soluções aproximadas do sistema (1) e usando as propriedades adquiridas por este sistema mostrar que existem soluções que se comportam como duas ondas solitárias no infinito.

Este trabalho está organizado da seguinte forma, o primeiro capítulo apresenta algumas ferramentas da análise que utilizamos nos capítulos seguintes, tendo como principais referências os livros (CAZENAVE, 2003), (LINARES; PONCE, 2015) e (BERGH; LÖFS-TRÖM, 1976). O segundo capítulo tem como propósito analisar a boa colocação local do sistema (1), usando como base para esse estudo (CAZENAVE, 2003) e (CAZENAVE; WEISSLER, 1990). Finalmente, no terceiro capítulo apresentamos a construção de uma solução do sistema (1) com cada componente se comportando, para tempos suficientemente grandes, como uma onda solitária da equação escalar de Schrödinger (2), usando como referências (IANNI; LE COZ, 2014).

1 Preliminares

Com o intuito de deixar este trabalho autocontido, neste capítulo vamos apresentar as definições básicas e resultados clássicos sobre a teoria de equações diferenciais dispersivas. Alguns resultados não serão demonstrados, eles se encontram nas referências indicadas ao longo do texto.

1.1 Espaços de Sobolev

Esta seção contém definições e resultados relacionados com os espaços de Sobolev, os quais nos darão suporte para o entendimento dos capítulos posteriores. Para obter uma maior quantidade de detalhes sobre este assunto o leitor poderá consultar as referências (CAZENAVE, 2003), (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976).

O primeiro passo para a construção do espaço de Sobolev será introduzir um novo conceito de derivada que generaliza a derivada usual.

Definição 1.1.1. *Sejam um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^d$ um multi-índice, dizemos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma α -ésima **derivada fraca** de u se*

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx, \text{ para toda } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Dizemos que u é fracamente diferenciável se todas as derivadas fracas de primeira ordem de u existem, e fracamente diferenciável k -vezes, quando $D^{\alpha}u$ existe para todos os multi-índices α tais que $0 \leq |\alpha| \leq k$.

Essencialmente, a Definição 1.1.1 diz que uma derivada fraca de uma função é uma função localmente integrável que nos permite fazer integração por partes. O Lema 1.1.2 abaixo estabelece, em certo sentido, a unicidade da derivada fraca.

Lema 1.1.2. *A α -ésima derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, quando existe, é única a menos de conjuntos de medida nula.*

Demonstração. Suponha que $v, \tilde{v}$ são α -ésimas derivadas fracas de u . Então

$$(-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx = \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \varphi dx, \text{ para toda } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

e portanto

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \varphi dx = 0, \text{ para todo } \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Daí, por Dubois Raymond segue que $v - \tilde{v} = 0$ q.t.p em Ω , e portanto $v = \tilde{v}$ q.t.p em Ω . □

Do Lema 1.1.2, se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ possui α -ésima derivada fraca v , podemos denotar simplesmente

$$v = D^\alpha u.$$

Motivados por este conceito de derivada fraca, definimos os espaços de Sobolev com os quais vamos trabalhar nos próximos capítulos.

Definição 1.1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}.$$

Observe que, se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ então $u \in L^p(\Omega)$, de modo que toda função de $W^{k,p}(\Omega)$ está em $L^1_{loc}(\Omega)$.

$W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma $\|\cdot\|_{W^{k,p}} = \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ definida por

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Quando $p = 2$, defina $W^{k,p}(\Omega) = H^k(\Omega)$, e equipamos $H^k(\Omega)$ com a norma equivalente

$$\|u\|_{H^k} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

O espaço $H^k(\Omega)$ é então um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u, v)_{H^k} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \Re \int_{\Omega} D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx.$$

Definimos a convergência fraca e convergência forte no espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como segue.

Definição 1.1.4. *Sejam $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$. Dizemos que u_m converge fracamente a u em $L^p(\Omega)$, se*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_m v dx = \int_{\Omega} u v dx \text{ para toda } v \in L^{p'}(\Omega),$$

em que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Neste caso escrevemos

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega).$$

Definição 1.1.5. *Sejam $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência em $W^{k,p}(\Omega)$ e $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

(i) *Dizemos que u_m converge fracamente a u em $W^{k,p}(\Omega)$, se*

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } L^p(\Omega)$$

e

$$D^\alpha u_m \rightharpoonup D^\alpha u \text{ em } L^p(\Omega) \text{ para cada } |\alpha| \leq k,$$

e escrevemos

$$u_m \rightharpoonup u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

(ii) Dizemos que u_m converge fortemente a u em $W^{k,p}(\Omega)$, se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0,$$

e escrevemos

$$u_m \rightarrow u \text{ em } W^{k,p}(\Omega).$$

Uma estratégia muito usada no Capítulo 3 é a seguinte.

Teorema 1.1.6. *Sejam $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado, $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ uma sequência em X e $x \in X$. Se $x_m \rightharpoonup x$ fracamente em X , então $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|x_m\|.$$

Demonstração. Veja (BREZIS, 2011, Pag. 58). □

Acima definimos os espaços H^k com $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mas em geral k pode não ser um número natural, portanto definimos H^s para $s \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.7. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

com norma

$$\|u\|_{H^s} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}\|_{L^2}.$$

Mais geralmente podemos definir os seguintes espaços.

Definição 1.1.8. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem s , denotado por $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$, como:*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : J^s u(x) = ((1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u}(\xi))^\vee(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)\},$$

com a norma

$$\|u\|_{H^{s,p}} = \|J^s u\|_{L^p}.$$

Algumas propriedades fundamentais do espaço $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ são dadas na seguinte proposição.

Proposição 1.1.9. *O espaço $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ verifica:*

(i) $H^{s,2}(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)$ e $H^{0,p}(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$ (mesmas normas).

(ii) $H^{s_1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s_2,p}(\mathbb{R}^d)$ se $s_1 \geq s_2$.

(iii) Se $p < \infty$ então $[H^{s,p}(\mathbb{R}^d)]^* = H^{-s,p'}(\mathbb{R}^d)$.

(iv) Se m é um inteiro não negativo e $1 < p < \infty$ então $W^{m,p}(\mathbb{R}^d) = H^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ com normas equivalentes.

(v) Imersão de Sobolev: $H^{s,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s_1,p_1}(\mathbb{R}^d)$ se

$$s - \frac{d}{p} = s_1 - \frac{d}{p_1} \quad e \quad 1 < p \leq p_1 < \infty, \quad s, s_1 \in \mathbb{R}.$$

Em particular, se $1 \leq p < \infty$ e $0 < s < \frac{d}{p}$, então

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{pd}{d-sp}}(\mathbb{R}^d).$$

Mais ainda, $H^{s,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ se $p > 1$ e $s > \frac{d}{p}$.

Demonstração. Veja (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976) Capítulo 6. □

Teorema 1.1.10. Se $s \geq d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right)$ com $p > 2$, então $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração. Basta combinar as propriedades (i), (ii) (v) da Proposição 1.1.9. □

1.2 Espaços de Besov

Mais adiante vamos precisar de espaços que servem para generalizar espaços de funções mais elementares, como os espaços de Sobolev, e são eficazes na medição das propriedades de regularidade das funções. Para que possamos prosseguir, vamos introduzir a noção de espaços de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ para $1 \leq p, q \leq \infty$ e $s \in \mathbb{R}$.

Consideremos a função $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que,

$$\eta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\xi| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |\xi| \geq 2, \end{cases}$$

e definimos a sequência $(\phi_j)_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ por

$$\phi_j(\xi) = \eta\left(\frac{\xi}{2^j}\right) - \eta\left(\frac{\xi}{2^{j-1}}\right).$$

Definição 1.2.1. Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Definimos o **espaço de Besov** $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ por

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) : \|u\|_{B_{p,q}^s} < \infty\},$$

com

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} = \|(\eta\hat{u})^\vee\|_{L^p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} (2^{sj} \|(\phi_j\hat{u})^\vee\|_{L^p})^q \right)^{1/q} \quad \text{se } q < \infty$$

e

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} = \|(\eta\hat{u})^\vee\|_{L^p} + \sup_{j \geq 1} 2^{sj} \|(\phi_j\hat{u})^\vee\|_{L^p} \text{ se } q = \infty.$$

Mostraremos a relação entre os espaços $H^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ e $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$. Mais precisamente.

Proposição 1.2.2. *As seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. Se $1 < p \leq 2$, então $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B_{p,2}^s(\mathbb{R}^d)$.
2. Se $2 \leq p < \infty$, então $B_{p,2}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d)$.
3. Em particular, $B_{2,2}^s(\mathbb{R}^d) = H^{s,2}(\mathbb{R}^d) = H^s(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração. Veja Teorema 6.4.5 em (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976). $\square$

Agora introduzimos os espaços homogêneos $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$. Na verdade, eles são bastante delicados de definir, já que podem ser considerados espaços semi-normados ou espaços quociente. Será suficiente para o nosso propósito definir apenas as semi-normas.

Definição 1.2.3. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $s \in \mathbb{R}$. Definimos a semi-norma do espaço $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ por: dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, temos que*

$$\|u\|_{\dot{H}^{s,p}} = \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|\xi|^s \phi_j \hat{u})^\vee \right\|_{L^p}$$

se $\sum_{j=-\infty}^{\infty} (|\xi|^s \phi_j \hat{u})$ converge em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ para uma função de $L^p(\mathbb{R}^d)$, e $\|u\|_{\dot{H}^{s,p}} = \infty$ de outra forma.

Dada $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definimos a semi-norma do espaço $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ por, $\|u\|_{\dot{H}^s} = \|u\|_{\dot{H}^{s,2}}$.

Finalmente, sejam $s \in \mathbb{R}$ e $1 \leq p, q \leq \infty$ e $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Definimos a semi-norma do espaço $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ por:

$$\|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{sj} \|(\phi_j \hat{u})^\vee\|_{L^p})^q \right)^{1/q} \text{ se } q < \infty$$

e

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{sj} \|(\phi_j \hat{u})^\vee\|_{L^p} \text{ se } q = \infty.$$

O seguinte teorema será muito importante no desenvolvimento do Capítulo 2.

Teorema 1.2.4. *Algumas propriedades fundamentais das seminormas $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ e $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^d)$ são:*

1. Se $s > 0$, então $\|u\|_{B_{p,q}^s} \approx \|u\|_{L^p} + \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$.

2. Se $0 < s < 1$, então

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} \approx \left(\int_0^\infty (t^{-s} \sup_{|y| \leq t} \|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^p})^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \quad \text{se } q < \infty$$

e

$$\|u\|_{B_{p,q}^s} \approx \sup_{|y| \leq t} \|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^p} \quad \text{se } q = \infty.$$

Demonstração. Veja Teoremas 6.3.1 e 6.3.2 em (BERGH; LÖFSTRÖM, 1976). $\square$

1.3 Estimativas de Strichartz

Algumas estimativas muito importantes nos permitirão garantir a existência de solução do sistema (1). Iniciamos introduzindo a noção de par admissível.

Definição 1.3.1. Dizemos que o par (q, r) é admissível se

$$\frac{2}{q} = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right)$$

e

$$2 \leq r \leq \frac{2d}{d-2} \quad \text{se } d \geq 3, \quad 2 \leq r \leq \infty \quad \text{se } d = 1, \quad 2 \leq r < \infty \quad \text{se } d = 2.$$

Observação 1.3.2. Se (q, r) é um par admissível, então $2 \leq q \leq \infty$. Além disso, note que $(\infty, 2)$ é um par admissível.

O teorema a seguir descreve as propriedades suavizantes globais do semigrupo $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$.

Teorema 1.3.3 (Estimativas de Strichartz). As seguintes propriedades são válidas:

1. Para cada $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, a função $t \mapsto e^{it\Delta}\varphi$ pertence a

$$L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^d)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$$

para cada par admissível (q, r) . Além disso, existe uma constante C tal que

$$\|e^{i(\cdot)\Delta}\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r)} \leq C \|\varphi\|_{L^2} \quad \text{para toda } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

2. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ (limitado ou não), $J = \bar{I}$, e $t_0 \in J$. Se (γ, ρ) é um par admissível e $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d))$, então para cada par admissível (q, r) , a função

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_{t_0}^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \quad \text{para } t \in I \quad (1.1)$$

pertence a

$$L^q(I, L^r(\mathbb{R}^d)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^d)).$$

Além disso, existe uma constante C , independente de I , tal que

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I, L^r)} \leq C \|f\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})} \quad \text{para toda } f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d)).$$

Demonstração. Veja Teorema 2.3.3 em (CAZENAVE, 2003). $\square$

As estimativas do Teorema 1.3.3 podem ser generalizadas a outros espaços envolvendo derivadas. Mais precisamente,

Teorema 1.3.4. *As seguintes propriedades são válidas:*

1. Para cada $\varphi \in H^m(\mathbb{R}^d)$, a função $t \mapsto e^{it\Delta}\varphi$ pertence a

$$L^q(\mathbb{R}, W^{m,r}(\mathbb{R}^d))$$

para cada par admissível (q, r) . Além disso, existe uma constante C tal que

$$\|e^{i(\cdot)\Delta}\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}, W^{m,r})} \leq C\|\varphi\|_{H^m} \text{ para toda } \varphi \in H^m(\mathbb{R}^d).$$

2. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ (limitado ou não) tal que $0 \in I$. Se (γ, ρ) é um par admissível e $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d))$, então para cada par admissível (q, r) , a função

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \text{ para } t \in I$$

pertence a

$$L^q(I, W^{m,r}(\mathbb{R}^d)).$$

Além disso, existe uma constante C , independente de I , tal que

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I, W^{m,r})} \leq C\|f\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d))} \text{ para toda } f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d)).$$

Demonstração. Veja (CAZENAVE, 2003, Pag. 38). $\square$

Corolário 1.3.5. *Seja $s \in \mathbb{R}$.*

1. Se (q, r) é um par admissível, então existe uma constante C tal que

$$\|e^{i(\cdot)\Delta}\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}, B_{r,2}^s)} \leq C\|\varphi\|_{B_{2,2}^s} \text{ para toda } \varphi \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

2. Se (q, r) é um par admissível, então existe uma constante C tal que

$$\|e^{i(\cdot)\Delta}\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}, \dot{B}_{r,2}^s)} \leq C\|\varphi\|_{\dot{B}_{2,2}^s}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|\varphi\|_{\dot{B}_{2,2}^s} < \infty$.

3. Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ (limitado ou não). Se (γ, ρ) é um par admissível, então para cada par admissível (q, r) existe uma constante C , independente de I , tal que

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq C\|f\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} \text{ para toda } f \in L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s(\mathbb{R}^d)),$$

onde Φ_f é definida como em (1.1).

4. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ (limitado ou não), $J = \bar{I}$, e $t_0 \in J$. Se (γ, ρ) é um par admissível, então para cada par admissível (q, r)

$$\Phi_f \in L^q(I, \dot{B}_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)) \cap C(J, \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)),$$

e existe uma constante C , independente de I , tal que

$$\|\Phi_f\|_{L^q(I, \dot{B}_{r,2}^s)} \leq C \|f\|_{L^{q'}(I, \dot{B}_{\rho',2}^s)} \quad \text{para toda } f \in L^{q'}(I, \dot{B}_{\rho',2}^s(\mathbb{R}^d)),$$

onde Φ_f é definida como em (1.1).

Demonstração. Veja (CAZENAVE; WEISSLER, 1990). □

1.4 O Problema de Cauchy

Seja X um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot\|_X$ e produto interior real $(\cdot, \cdot)_X$. Consideremos $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador $\mathbb{C}$ -linear, e assumamos que A é auto-adjunto, $D(A)$ denso em X e $(Ax, x) \leq 0$ para todo $x \in D(A)$. Suponhamos que A é o gerador infinitesimal do semigrupo de contrações $(U(t))_{t \geq 0}$ em X . Note que $D(A)$ um espaço de Hilbert equipado com o produto escalar $(x, y)_{D(A)} = (Ax, Ay)_X + (x, y)_X$, correspondente à norma $\|x\|_{D(A)}^2 = \|Ax\|_X^2 + \|x\|_X^2$.

Denotamos por X_A o completamento de $D(A)$ para a norma $\|x\|_{D(A)}^2 = \|x\|_X^2 - (Ax, x)_X$. Logo,

$$D(A) \hookrightarrow X_A \hookrightarrow X \hookrightarrow X_A^* \hookrightarrow (D(A))^*,$$

onde todas as imersões são densas.

Agora, vamos definir o que entenderemos por uma solução para nosso sistema (1), através de um argumento muito comum que consiste em estabelecer uma equivalência entre o problema de Cauchy e uma equação integral.

Com efeito, consideremos o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} iu_t + \bar{A}u + g(u) = 0, \\ u(0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde g é chamada de não-linearidade e $\bar{A}$ um operador auto-adjunto que estende A em $(D(A))^*$ com domínio em X .

Além disso, seja I um intervalo tal que $0 \in I$, e consideremos a seguinte equação integral

$$u(t) = e^{it\bar{A}}\varphi + i \int_0^t e^{(t-s)\bar{A}}g(u(s)) ds \quad \text{para } t \in I. \quad (1.3)$$

com $(e^{it\bar{A}})_{t \in \mathbb{R}}$ o grupo de isometrias gerado por $i\bar{A}$.

Agora, a teoria de semigrupos de operadores lineares (veja (CAZENAVE, 2003, Pag. 18)), estabelece que se $u_0 \in X$, $g \in L^1([0, T], X_A^*)$ e $u \in L^1((0, T), X_A)$, então u verifica (1.2) q.t.p $t \in [0, T]$ se e somente se u verifica (1.3) q.t.p $t \in [0, T]$.

Portanto, usando a teoria mencionada anteriormente com o operador $A = \Delta$ e os espaços de Sobolev $X = H^s(\mathbb{R}^d)$ com alguma escolha de $s \in \mathbb{R}$ temos o seguinte teorema, o qual vai estabelecer uma relação entre equações (1.2) e (1.3). Por conveniência, vamos usar a mesma notação para e^{itA} e $e^{it\bar{A}}$.

Teorema 1.4.1. *Sejam I um intervalo tal que $0 \in I$, $s, \sigma \in \mathbb{R}$, e $g : H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ contínua e limitada em conjuntos limitados. Se $u \in L^\infty(I, H^s(\mathbb{R}^d))$, então ambas equações (1.2) e (1.3) fazem sentido em $H^\mu(\mathbb{R}^d)$ para $\mu = \min\{s - 2, \sigma\}$. Além disso, u satisfaz a equação (1.2) q.t.p $t \in I$ se, e somente se, u satisfaz a equação integral (1.3) q.t.p $t \in I$.*

Demonstração. Como $u \in L^\infty(I, H^s(\mathbb{R}^d))$ e $\Delta \in \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^d), H^{s-2}(\mathbb{R}^d))$, então $\Delta u \in L^\infty(I, H^{s-2}(\mathbb{R}^d))$. Além disso, $g(u) : I \rightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^d)$ é mensurável pois temos que $g \in C(H^s(\mathbb{R}^d), H^\sigma(\mathbb{R}^d))$, e limitada já que g é limitada em conjuntos limitados, portanto $g(u) \in L^\infty(I, H^\sigma(\mathbb{R}^d))$. Consequentemente as equações (1.2) e (1.3) fazem sentido em $H^\mu(\mathbb{R}^d)$. Agora, como $\{e^{it\Delta}\}_{t \in \mathbb{R}}$ é um grupo de isometrias em $H^\mu(\mathbb{R}^d)$, então a equivalência entre (1.2) e (1.3) segue da observação feita acima. $\square$

Por último vamos mostrar um resultado que permite estender, sob certas condições, as soluções obtidas do problema (1.2). No que segue vamos assumir que para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, com $s \in \mathbb{R}$, existe $T = T(\|u_0\|_X) > 0$ dependendo somente de $\|u_0\|_{H^s}$ e uma única $u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$ solução de (1.2). Além disso suponha que T pode ser escolhido uniformemente no seguinte sentido: se $\|u(t)\|_{H^s} \leq M$ então u está definida em $[0, T_M]$, com $T_M = T(M)$.

Proposição 1.4.2. *Se $\|u(t)\|_{H^s} \leq M$ para todo $t \in [0, T]$, com $M > 0$ uma constante, então u pode ser estendida unicamente a $[0, \infty)$.*

Demonstração. Como $\|u(t)\|_{H^s} \leq M$, então sabemos que u está definida em $[0, T_M]$. Vamos a mostrar que podemos estender u ao intervalo $\left[0, \frac{3T_M}{2}\right]$. De fato, consideremos o seguinte PVI,

$$\begin{cases} i \tilde{u}_t + \Delta \tilde{u} + g(\tilde{u}) = 0, \\ \tilde{u}(0) = u(T_M/2). \end{cases}$$

Como $\|\tilde{u}(0)\|_{H^s} = \|u(T_M/2)\|_{H^s} \leq M$, então segue que $\tilde{u}$ está definida em $[0, T_M]$. Agora, defina

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } 0 \leq t \leq T_M/2 \\ \tilde{u}(t - T_M/2), & \text{se } T_M/2 \leq t \leq 3T_M/2. \end{cases}$$

Pela definição de w não é difícil obter que $w \in C([0, 3T_M/2], H^s)$. Para finalizar a demonstração devemos mostrar que w é a única solução de (1.2) em $[0, 3T_M/2]$, ou seja,

$$w(t) = e^{it\Delta}u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}g(w(s))ds, \quad \text{q.t.p } t \in [0, 3T_M/2]. \quad (1.4)$$

O resultado é claro para $t \in [0, T_M/2]$. Suponha que $t \in [T_M/2, 3T_M/2]$, então temos que

$$\begin{aligned}
w(t) &= \tilde{u}(t - T_M/2) \\
&= e^{i(t-T_M/2)\Delta} u(T_M/2) + i \int_0^{t-T_M/2} e^{i(t-T_M/2-s)\Delta} g(\tilde{u}(s)) ds \\
&= e^{i(t-T_M/2)\Delta} \left(e^{i(T_M/2)\Delta} u_0 + i \int_0^{T_M/2} e^{i(T_M/2-s)\Delta} g(u(s)) ds \right) \\
&\quad + i \int_0^{t-T_M/2} e^{i(t-T_M/2-s)\Delta} g(\tilde{u}(s)) ds \\
&= e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^{T_M/2} e^{i(t-s)\Delta} g(u(s)) ds + i \int_{T_M/2}^t e^{i(t-r)\Delta} g(\tilde{u}(r - T_M/2)) dr \\
&= e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^{T_M/2} e^{i(t-s)\Delta} g(w(s)) ds + i \int_{T_M/2}^t e^{i(t-s)\Delta} g(w(s)) ds \\
&= e^{it\Delta} u_0 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(w(s)) ds.
\end{aligned}$$

Fazendo este processo reiteradamente podemos mostrar o resultado desejado. $\square$

2 Boa Colocação local para um sistema não-linear de equações tipo Schrödinger em H^s

Neste capítulo vamos estudar a boa colocação local do problema de valor inicial associado a um sistema não-linear de equações tipo Schrödinger no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ para certos valores de $0 < s \leq 1$. Em princípio, um resultado de existência local pode ser estabelecido por um argumento de ponto fixo usando as estimativas de Strichartz nos espaços de Sobolev $H^{s,r}(\mathbb{R}^d)$ junto com estimativas de $\|\cdot\|_{H^{s,r}}$. Aqui, preferimos usar o espaço de Besov $B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)$ como um espaço auxiliar, porque as estimativas de $\|\cdot\|_{B_{r,2}^s}$ são muito mais simples de serem obtidas.

A noção de boa colocação local que adotaremos inclui existência, unicidade, persistência e dependência contínua com relação ao dado inicial. Mais precisamente,

Definição 2.0.1. *Sejam X, Y espaços de Banach e $F : Y \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(u(t)) \in X, \\ u(0) = \varphi \in Y, \end{cases} \quad (2.1)$$

*é localmente **bem colocado** (ou **bem posto**) em Y se*

1. *Existe $T > 0$ e uma função $u \in C([-T, T] : Y)$ tal que $u(0) = \varphi$ e a equação diferencial em (2.1) é satisfeita, no sentido que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(u(t)) \right\|_X = 0,$$

onde as derivadas em $t = -T$ e $t = T$ são calculadas a direita e a esquerda respectivamente.

2. *Essa solução é única em $C([-T, T] : Y)$.*
3. *A função $\varphi \mapsto u$ é contínua. Mais precisamente, sejam $\varphi_n \in Y$, $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$, tal que $\varphi_n \xrightarrow{Y} \varphi_\infty$ e $u_n \in C([-T_n, T_n] : Y)$ as soluções correspondentes. Seja $T \in (0, T_\infty)$. Então as soluções u_n podem ser estendidas ao intervalo $[-T, T]$, para todo n suficientemente grande, e*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[-T, T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Se alguma das condições acima não é verificada, o problema é dito **mal colocado** (ou **mal posto**). Se as condições são satisfeitas para todo $T > 0$, dizemos que o problema é **globalmente bem posto**.

Consideremos o sistema de equações não lineares de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \Delta u_1 + g_1(u_1, u_2) = 0, \\ i\partial_t u_2 + \Delta u_2 + g_2(u_1, u_2) = 0, \\ (u_1(0), u_2(0)) = (\varphi_1, \varphi_2), \end{cases} \quad (2.2)$$

onde para $j = 1, 2$, $g_j : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são as não linearidades, $u_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $d \leq 3$ e $\varphi_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Frequentemente escrevemos $u_j = u_j(t, x)$ e $u_j(t) = u_j(t, \cdot)$.

Nosso objetivo aqui será estudar a boa colocação local do sistema (2.2) nos espaços de Sobolev $Y = H^s(\mathbb{R}^d)$ para escolhas apropriadas de $s \in \mathbb{R}$ e g_j para $j = 1, 2$. O Capítulo 3 está orientado a trabalhar com não linearidades dadas por

$$g_1(u_1, u_2) = \mu_1 |u_1|^2 u_1 + \beta |u_2|^2 u_1 \quad \text{e} \quad g_2(u_1, u_2) = \mu_2 |u_2|^2 u_2 + \beta |u_1|^2 u_2,$$

onde $\mu_j > 0$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Neste sentido, é claro que para $j = 1, 2$,

$$|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)| \leq C (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2) (|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|). \quad (2.3)$$

Formalmente, obter uma solução (u_1, u_2) do sistema (2.2) com as duas não linearidades indicadas acima é equivalente a obter uma solução das seguintes equações integrais, no sentido do Teorema 1.4.1,

$$u_1(t) = e^{it\Delta} \varphi_1 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g_1(u_1(s), u_2(s)) ds \quad (2.4)$$

e

$$u_2(t) = e^{it\Delta} \varphi_2 + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g_2(u_1(s), u_2(s)) ds. \quad (2.5)$$

De fato, a seguinte observação mostra esta relação.

Observação 2.0.2. *Sejam $d/6 < s < \min\{1, d/2\}$, $\rho = \frac{4d}{d+2s}$ e $\gamma = \frac{8}{d-2s}$, com $1 \leq d \leq 3$. Considerando, as funções $g_1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por*

$$g_1(z_1, z_2) = (\mu_1 |z_1|^2 + \beta |z_2|^2) z_1,$$

e

$$g_2(z_1, z_2) = (\mu_2 |z_2|^2 + \beta |z_1|^2) z_2$$

para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Daí, para $j = 1, 2$, resulta que $g_j(0, 0) = 0$ e g_j verifica a desigualdade (2.3) para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Seja I um intervalo limitado com $0 \in I$ e suponha $(u_1, u_2) \in (L^\infty(I, H^s(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)))^2$.

Como $\rho \geq 2$, pela Proposição 1.2.2 temos $B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s,\rho}(\mathbb{R}^d)$. Como $2s < d$, obtemos $s\rho < d$, então a Proposição 1.1.9 diz que $H^{s,\rho}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{\rho d}{d-s\rho}}(\mathbb{R}^d)$.

Segue, aplicando interpolação, que $B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo $\rho \leq p \leq \frac{\rho d}{d-s\rho} = \frac{4d}{d-2s}$.

Assim, $(u_1, u_2) \in (L^\gamma(I, L^p(\mathbb{R}^d)))^2$ para todo $\rho \leq p \leq \frac{4d}{d-2s}$.

Além disso, como

$$\| |v|^3 \|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{3p} dx \right)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{3p} dx \right)^{3/3p} = \|v\|_{L^{3p}}^3,$$

e

$$\| |v|^2 |u| \|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{2p} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{4p} dx \right)^{1/2p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{2p} dx \right)^{1/2p} = \|v\|_{L^{4p}}^2 \|u\|_{L^{2p}},$$

então, dado que

$$|g_j(z_1, z_2)| \leq C(|z_1|^2 + |z_2|^2)(|z_1| + |z_2|) = C(|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_1|^2|z_2| + |z_2|^2|z_1|),$$

temos que $g_j(u_1, u_2) \in (L^\gamma(I, L^p(\mathbb{R}^d)))^2$ para todo $\max \left\{ 1, \frac{\rho}{2} \right\} \leq p \leq \frac{d}{d-2s}$, pois para $t \in I$

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1(t), u_2(t))\|_{L^p} \\ & \leq C(\| |u_1(t)|^3 \|_{L^p} + \| |u_2(t)|^3 \|_{L^p} + \| |u_1(t)|^2 |u_2(t)| \|_{L^p} + \| |u_2(t)|^2 |u_1(t)| \|_{L^p}) \\ & = C(\|u_1(t)\|_{L^{3p}}^3 + \|u_2(t)\|_{L^{3p}}^3 + \|u_1(t)\|_{L^{4p}}^2 \|u_2(t)\|_{L^{2p}} + \|u_2(t)\|_{L^{4p}}^2 \|u_1(t)\|_{L^{2p}}). \end{aligned}$$

Desta forma, se $\max \left\{ 1, \frac{\rho}{2} \right\} \leq p \leq \frac{d}{d-2s}$, obtemos $\|g_j(u_1, u_2)\|_{L^\gamma(I, L^p)} < \infty$.

Logo, como $\rho' = \frac{4d}{3d-2s}$, então $g_j(u_1, u_2) \in (L^\gamma(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d)))^2$.

Por outro lado, tomando $\sigma = \frac{(d-2s)}{4}$, temos $2\sigma < d$, de onde $H^\sigma(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$, e como $\frac{2d}{d-2s} = \rho$, resulta que, $H^\sigma(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^d)$, assim $L^{\rho'}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{-\sigma}(\mathbb{R}^d)$. Logo, $g_j(u_1, u_2) \in L^\gamma(I, H^{-\sigma}(\mathbb{R}^d))$. Consequentemente, $g_j(u_1, u_2) \in L^1(I, H^{-\sigma}(\mathbb{R}^d))$.

Por outro lado, como (veja (2.21))

$$\|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{\rho'}} \leq C(\|u_1 - v_1\|_{L^\rho} + \|u_2 - v_2\|_{L^\rho}),$$

$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^\sigma(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^d)$, pois $d/6 \leq s$, e $L^{\rho'}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{-\sigma}(\mathbb{R}^d)$, segue que $g_j \in C(H^s(\mathbb{R}^d), H^{-\sigma}(\mathbb{R}^d))$. Logo, como $(u_1, u_2) \in (L^\infty(I, H^s(\mathbb{R}^d)))^2$, o Teorema 1.4.1 garante que obter uma solução do sistema (2.2) é equivalente a obter uma solução dos sistemas de equações integrais (2.4) e (2.5).

Sendo assim, no que segue, entenderemos por solução do sistema (2.2), com as não linearidades satisfazendo (2.3), uma solução das equações integrais (2.4) e (2.5). Convém mencionarmos que, restringiremos o estudo da boa colocação local para dois casos: o primeiro quando $d/6 < s < \min \{1, d/2\}$ e o segundo quando $s = 1$. Para outros casos veja (CAZENAVE, 2003).

2.1 Boa colocação local em H^s quando $d/6 < s < \min\{1, d/2\}$

Vamos começar estabelecendo uma estimativa para a norma de $B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)$, a qual usaremos para mostrar a boa colocação local do sistema (2.2). Mais precisamente.

Proposição 2.1.1. *Seja $g \in C(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Assuma $g(0,0) = 0$ e*

$$|g(z_1, z_2) - g(x_1, x_2)| \leq C(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2)(|z_1 - x_1| + |z_2 - x_2|) \quad (2.6)$$

para $z_1, z_2, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Sejam $0 < s < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq p < r < \infty$. Se $\sigma = \frac{2pr}{r-p}$, então

$$\|g(u_1, u_2)\|_{\dot{B}_{r,q}^s} \leq C(\|u_1\|_{L^\sigma}^2 + \|u_2\|_{L^\sigma}^2)(\|u_1\|_{\dot{B}_{r,q}^s} + \|u_2\|_{\dot{B}_{r,q}^s})$$

e

$$\|g(u_1, u_2)\|_{B_{r,q}^s} \leq C(\|u_1\|_{L^\sigma}^2 + \|u_2\|_{L^\sigma}^2)(\|u_1\|_{B_{r,q}^s} + \|u_2\|_{B_{r,q}^s}), \quad (2.7)$$

para toda $(u_1, u_2) \in B_{r,q}^s(\mathbb{R}^d)$. Aqui, usamos a convenção que $\|u\|_{L^\sigma}^\sigma = \int_{\mathbb{R}^d} |u|^\sigma dx$ para $0 < \sigma < 1$.

Demonstração. Como $\sigma = \frac{2pr}{r-p}$ temos $1 = \frac{2p}{\sigma} + \frac{p}{r}$. Aplicando a desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned} \|(|u_1|^2 + |u_2|^2)v\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2)v^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2)^p |v|^p dx \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{p\sigma/2} dx \right)^{2p/\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^p dx \right)^{p/r} \\ &= C \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{\sigma/2} dx \right)^{2p/\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^r dx \right)^{p/r} \\ &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1| + |u_2|)^\sigma dx \right)^{2p/\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^r dx \right)^{p/r} \\ &= C \|(|u_1| + |u_2|)\|_{L^\sigma}^{2p} \|v\|_{L^r}^p. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Dessa maneira,

$$\|(|u_1|^2 + |u_2|^2)v\|_{L^p} \leq C \|(|u_1| + |u_2|)\|_{L^\sigma}^2 \|v\|_{L^r} \leq C(\|u_1\|_{L^\sigma}^2 + \|u_2\|_{L^\sigma}^2) \|v\|_{L^r}. \quad (2.9)$$

Além disso, se $y \in \mathbb{R}^d$, então das desigualdades (2.6) e (2.9) obtemos

$$\begin{aligned} &\|g(u_1, u_2)(\cdot - y) - g(u_1, u_2)(\cdot)\|_{L^p} \\ &\leq C \|(|u_1(\cdot - y)|^2 + |u_2(\cdot - y)|^2 + |u_1(\cdot)|^2 + |u_2(\cdot)|^2) \\ &\quad \cdot (|u_1(\cdot - y) - u_1(\cdot)| + |u_2(\cdot - y) - u_2(\cdot)|)\|_{L^p} \\ &\leq C(\|u_1\|_{L^\sigma}^2 + \|u_2\|_{L^\sigma}^2)(\|u_1(\cdot - y) - u_1(\cdot)\|_{L^r} + \|u_2(\cdot - y) - u_2(\cdot)\|_{L^r}). \end{aligned}$$

Nesse sentido, usando o Teorema 1.2.4 resulta que

$$\|g(u_1, u_2)\|_{\dot{B}_{r,q}^s} \leq C(\|u_1\|_{L^\sigma}^2 + \|u_2\|_{L^\sigma}^2)(\|u_1\|_{\dot{B}_{r,q}^s} + \|u_2\|_{\dot{B}_{r,q}^s}). \quad (2.10)$$

Por outro lado, por (2.6), temos $|g(u_1, u_2)| \leq C(|u_1|^2 + |u_2|^2)(|u_1| + |u_2|)$, assim, novamente usando a desigualdade (2.9), chegamos a

$$\|g(u_1, u_2)\|_{L^p} \leq C(\|u_1\|_{L^\sigma}^2 + \|u_2\|_{L^\sigma}^2)(\|u_1\|_{L^r} + \|u_2\|_{L^r}), \quad (2.11)$$

e pelo Teorema 1.2.4 sabemos que $\|u\|_{B_{p,q}^s} \approx \|u\|_{L^p} + \|u\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$. Logo combinando as desigualdades (2.10) e (2.11) segue (2.7). $\square$

A seguinte proposição diz respeito aos vários parâmetros que ocorrem no teorema principal.

Proposição 2.1.2. *Suponha*

$$2 < \frac{4}{d-2s}, \quad 0 < s < d/2, \quad \rho = \frac{4d}{d+2s} \quad e \quad \gamma = \frac{8}{d-2s}.$$

Seja

$$\frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{\rho} - \frac{s}{d},$$

então

$$(i) \quad 2 < \rho < \frac{2d}{d-2} \text{ se } d > 2 \text{ e } 2 < \rho < \infty \text{ se } d = 1, 2.$$

$$(ii) \quad \frac{2}{\gamma} = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho} \right). \text{ Em particular, } (\gamma, \rho) \text{ é um par admissível.}$$

$$(iii) \quad \rho < \frac{d}{s}. \text{ Em particular } \rho^* > \rho.$$

$$(iv) \quad \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{\rho^*} + \frac{1}{\rho}.$$

$$(v) \quad \frac{1}{\gamma'} > \frac{3}{\gamma}.$$

Demonstração. Suponha $2 < \frac{4}{d-2s}$ e $0 < s < d/2$.

1. Como $s < \frac{d}{2}$ obtemos $\frac{4s}{d} < 2$. Logo $2 + \frac{4s}{d} < 4$, isto é, $2 \left(1 + \frac{2s}{d} \right) < 4$, de onde $\frac{2(d+2s)}{d} < 4$, o que é equivalente a $2 < \frac{4d}{d+2s}$. Agora, como $2(d-2-2s) < 2(d-2s) < 4$ temos $2d-4-4 < 4s$ e assim $2d+2d-8 < 2d+4s$, o qual implica que $4(d-2) < 2d+4s$.

Portanto $\frac{4d}{d+2s} < \frac{2d}{d-2}$, se $d \neq 2$. Desta forma concluímos que $2 < \rho < \frac{2d}{d-2}$.

2. Note que

$$d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho} \right) = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1 + 2s/d}{4} \right) = \frac{d - 2s}{4} = \frac{2}{\gamma}.$$

Da parte 1 e a igualdade acima é claro que (γ, ρ) é um par admissível.

3. Novamente de $s < d/2$ segue que $d + 2s > 4s$, isto é, $\frac{4}{2 + d/s} < 1$. Daí,

$$\rho = \frac{4}{1 + 2s/d} = \frac{d}{s} \left(\frac{4}{2 + d/s} \right) < \frac{d}{s}.$$

4. Pela definição de ρ resulta que $1 + \frac{2s}{d} = \frac{4}{\rho}$, isto é, $1 - \frac{1}{\rho} = 2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{s}{d} \right) + \frac{1}{\rho}$.

$$\text{Portanto } \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{\rho^*} + \frac{1}{\rho}.$$

5. Como $2 < \frac{4}{d - 2s}$, a definição de γ implica que $\gamma > 4$, o que equivale a $\frac{4}{\gamma} < 1$, de onde, $\frac{1}{\gamma'} = 1 - \frac{1}{\gamma} > \frac{3}{\gamma}$.

□

O seguinte resultado garante a boa colocação local do sistema (2.2) no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ quando $d/6 < s < \min\{1, d/2\}$.

Teorema 2.1.3. *Suponha $d/6 < s < \min\{1, d/2\}$ e $2 < \frac{4}{d - 2s}$, com $1 \leq d \leq 3$. Para $j = 1, 2$ sejam $g_j \in C(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Assuma $g_j(0, 0) = 0$ e*

$$|g_j(z_1, z_2) - g_j(x_1, x_2)| \leq C(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2)(|z_1 - x_1| + |z_2 - x_2|) \quad (2.12)$$

para $z_1, z_2, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Seja (γ, ρ) o par admissível definido por

$$\rho = \frac{4d}{d + 2s}, \quad \gamma = \frac{8}{d - 2s}.$$

Dados $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, existem $T_{\max}, T_{\min} \in (0, \infty]$ e uma única solução maximal $(u_1, u_2) \in (C((-T_{\min}, T_{\max}), H^s(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (L_{loc}^\gamma((-T_{\min}, T_{\max}), B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)))^2$ do sistema (2.2), satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $(u_1, u_2) \in (L_{loc}^q((-T_{\min}, T_{\max}), B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)))^2$ para cada par admissível (q, r) .

2. Se $T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} < \infty$ (respectivamente $T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)} < \infty$) então

$$\|(u_1(t), u_2(t))\|_{H^s \times H^s} \rightarrow \infty,$$

quando $t \uparrow T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}$ (respectivamente $t \downarrow -T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)}$).

3. (u_1, u_2) depende continuamente de (φ_1, φ_2) , no seguinte sentido. Existe $0 < T < T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}, T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)}$ tal que se $(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$ e se (u_1^n, u_2^n) denota a solução de (2.2) com dado inicial $(\varphi_1^n, \varphi_2^n)$, então $0 < T < T_{\max(\varphi_1^n, \varphi_2^n)}, T_{\min(\varphi_1^n, \varphi_2^n)}$, para todo n suficientemente grande, e (u_1^n, u_2^n) é limitada em $L^q((-T, T), B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d))$ para todo (q, r) admissível. Além disso, $(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2)$ em $L^q((-T, T), L^r(\mathbb{R}^d))$ quando $n \rightarrow \infty$. Em particular, $(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2)$ em $C([-T, T], H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d))$ para todo $0 < \varepsilon < s$.

Demonstração. A demonstração deste resultado será feita em 5 passos.

Passo 1 (Existência) Inicialmente vamos mostrar a existência de uma solução para o sistema (2.2). A ideia para garantir a existência desta solução é encontrar soluções das equações integrais (2.4) e (2.5).

Definamos

$$X = \left\{ u \in L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)) : \|u\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \leq M \right\}, \quad (2.13)$$

onde $I = (-T, T)$ e T, M são constantes positivas que serão escolhidas posteriormente. Sem perda de generalidade suponha que $I = [0, T)$ para o caso $(-T, 0)$ procedemos de forma semelhante. O espaço $X \times X$ munido da métrica

$$d((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \|u_1 - v_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} + \|u_2 - v_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}$$

é um espaço métrico completo.

Com efeito, consideremos a sequência $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \times X$ tal que $(u_n, v_n) \rightarrow (u, v)$ em $L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d))$. Dessa maneira pelo Teorema 1.1.6 temos que

$$(u, v) \in L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d))$$

e

$$\|(u, v)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|(u_n, v_n)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \leq M.$$

Portanto $(u, v) \in X \times X$, o que mostra que $(X \times X, d)$ é completo. Por outro lado, consideremos a função $\mathcal{H} : E \times E \rightarrow E \times E$ definida por

$$\mathcal{H}(u_1, u_2) = (H_1(u_1, u_2), H_2(u_1, u_2)) \quad (2.14)$$

com

$$H_j(u_1, u_2)(t) := e^{it\Delta} \varphi_j + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g_j(u_1(s), u_2(s)) ds, \quad (2.15)$$

para $j = 1, 2$. Nosso objetivo é encontrar T, M tais que $\mathcal{H}$ esteja bem definida e além disso, que também seja uma contração, de onde, pelo Teorema de ponto fixo de Banach seguirá o resultado desejado.

De fato, consideremos $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in X \times X$. Daqui para frente trabalharemos com $j = 1, 2$. Tomando $p = \rho', r = \rho$ e $q = 2$, pela Proposição 2.1.1 temos que

$$\|g_j(u_1, u_2)\|_{B_{\rho',2}^s} \leq C \left(\|u_1\|_{L^{\frac{4d}{d-2s}}}^2 + \|u_2\|_{L^{\frac{4d}{d-2s}}}^2 \right) \left(\|u_1\|_{B_{\rho,2}^s} + \|u_2\|_{B_{\rho,2}^s} \right),$$

para cada $(u_1, u_2) \in B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d) \times B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)$.

A Proposição 1.1.9 estabelece que $B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{4d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)$, assim

$$\|g_j(u_1, u_2)\|_{B_{\rho',2}^s} \leq C \left(\|u_1\|_{B_{\rho,2}^s}^2 + \|u_2\|_{B_{\rho,2}^s}^2 \right) \left(\|u_1\|_{B_{\rho,2}^s} + \|u_2\|_{B_{\rho,2}^s} \right),$$

isto é,

$$\|g_j(u_1, u_2)\|_{B_{\rho',2}^s} \leq C \left(\|u_1\|_{B_{\rho,2}^s}^3 + \|u_2\|_{B_{\rho,2}^s}^3 + \|u_1\|_{B_{\rho,2}^s}^2 \|u_2\|_{B_{\rho,2}^s} + \|u_2\|_{B_{\rho,2}^s}^2 \|u_1\|_{B_{\rho,2}^s} \right). \quad (2.16)$$

Agora, pela Proposição 2.1.2 resulta que $\frac{1}{\gamma'} > \frac{3}{\gamma}$, então seja $\delta > 0$ tal que

$$\frac{1}{\gamma'} = \frac{3}{\gamma} + \delta. \quad (2.17)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder (no tempo) segue que

$$\begin{aligned} \left(\int_I \|u(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^{3\gamma'} dt \right)^{1/\gamma'} &\leq \left(\left(\int_I dt \right)^{\gamma'\delta} \left(\int_I \left(\|u(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^{3\gamma'} \right)^{\gamma/3\gamma'} dt \right)^{3\gamma'/\gamma} \right)^{1/\gamma'} \\ &= T^\delta \left(\int_I \|u(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^\gamma dt \right)^{3/\gamma} \\ &= T^\delta \|u\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

e

$$\begin{aligned} &\left(\int_I \|u(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^{2\gamma'} \|v(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^{\gamma'} dt \right)^{1/\gamma'} \\ &\leq \left(\left(\int_I dt \right)^{\gamma'\delta} \left(\int_I \left(\|u(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^{2\gamma'} \right)^{\gamma/2\gamma'} dt \right)^{2\gamma'/\gamma} \left(\int_I \left(\|v(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^{\gamma'} \right)^{\gamma/\gamma'} dt \right)^{\gamma'/\gamma} \right)^{1/\gamma'} \\ &= T^\delta \left(\int_I \|u(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^\gamma dt \right)^{2/\gamma} \left(\int_I \|v(t)\|_{B_{\rho,2}^s}^\gamma dt \right)^{1/\gamma} \\ &= T^\delta \|u\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|v\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Desse modo, aplicando a desigualdade de Minkowski em (2.16), e usando as desigualdades (2.18) e (2.19),

$$\begin{aligned} &\|g_j(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} \\ &\leq CT^\delta \left(\|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^3 + \|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^3 \right) \\ &\quad + CT^\delta \left(\|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} + \|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dessa forma, tomando ρ^* tal que $\frac{1}{\rho^*} = \frac{1}{\rho} - \frac{s}{d}$, pela Proposição 2.1.2 temos que

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{2}{\rho^*} + \frac{1}{\rho}, \text{ isto é, } 1 = \frac{2\rho'}{\rho^*} + \frac{\rho'}{\rho}.$$

Logo, usando a desigualdade (2.12) e aplicando a desigualdade de Hölder analogamente como na desigualdade (2.8), resulta que

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{\rho'}} \\ & \leq \|(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)\|_{L^{\rho'}} \\ & = C(\|u_1\|_{L^{\rho^*}}^2 + \|u_2\|_{L^{\rho^*}}^2 + \|v_1\|_{L^{\rho^*}}^2 + \|v_2\|_{L^{\rho^*}}^2)(\|u_1 - v_1\|_{L^{\rho}} + \|u_2 - v_2\|_{L^{\rho}}). \end{aligned}$$

Pela definição de ρ^* , obtemos que $\rho \leq \rho^*$. Logo dado que $\rho \geq 2$, pela Proposição 1.2.2 temos $B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^{s,\rho}(\mathbb{R}^d)$. Como $2s < d$, obtemos $s\rho < d$, então a Proposição 1.1.9 diz que $H^{s,\rho}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{\rho d}{d-s\rho}}(\mathbb{R}^d)$. Assim, $B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\rho^*}(\mathbb{R}^d)$ e consequentemente

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{\rho'}} \\ & \leq C(\|u_1\|_{B_{\rho,2}^s}^2 + \|u_2\|_{B_{\rho,2}^s}^2 + \|v_1\|_{B_{\rho,2}^s}^2 + \|v_2\|_{B_{\rho,2}^s}^2)(\|u_1 - v_1\|_{L^{\rho}} + \|u_2 - v_2\|_{L^{\rho}}). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por outro lado, pelo Corolário 1.3.5 resulta que para todo par admissível (q, r) ,

$$\|e^{it\Delta}\varphi_j\|_{L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq C\|\varphi_j\|_{B_{2,2}^s} = C\|\varphi_j\|_{H^s} \quad (2.22)$$

e

$$\|\Phi_{g_j}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq C\|g_j(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)}, \quad (2.23)$$

onde

$$\Phi_{g_j}(u_1, u_2)(t) = i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g_j(u_1(s), u_2(s)) ds. \quad (2.24)$$

Assim, da definição de H_j dada em (2.15), e as desigualdades (2.22) e (2.23) obtemos

$$\|H_j(u_1, u_2)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq C \left(\|\varphi_j\|_{H^s} + \|g_j(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} \right), \quad (2.25)$$

para todo par admissível (q, r) .

Logo, para o par admissível (γ, ρ) , usando a desigualdade (2.20) na desigualdade (2.25), obtemos

$$\begin{aligned} & \|H_j(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} \\ & \leq C\|\varphi_j\|_{H^s} + CT^{\delta} \left(\|u_1\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^3 + \|u_2\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^3 \right) \\ & \quad + CT^{\delta} \left(\|u_2\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_1\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} + \|u_1\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_2\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} \right). \end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{H}(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s) \times L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} \\ & = \|H_1(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} + \|H_2(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} \\ & \leq C(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}) + CT^{\delta} \left(\|u_1\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^3 + \|u_2\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^3 \right) \\ & \quad + CT^{\delta} \left(\|u_2\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_1\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} + \|u_1\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_2\|_{L^{\gamma}(I, B_{\rho,2}^s)} \right) \\ & \leq C_0(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}) + C_0 T^{\delta} M^3. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Consideremos

$$M = 2C_0(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}), \quad (2.27)$$

e tomemos T suficientemente pequeno tal que

$$C_0 T^\delta M^2 \leq \frac{1}{2}. \quad (2.28)$$

Então, como $(u_1, u_2) \in X \times X$ combinando as desigualdades (2.26)-(2.28) temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(u_1, u_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} &\leq C_0(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}) + C_0 T^\delta M^3 \\ &\leq M. \end{aligned} \quad (2.29)$$

O que mostra que $\mathcal{H}(X \times X) \subset X \times X$, ou seja, $\mathcal{H}$ está bem definida.

Por fim, só precisamos mostrar que $\mathcal{H}$ é uma contração.

Consideremos $p < \gamma$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{\gamma} + \delta$, então pela igualdade (2.17), $\frac{1}{p} + \frac{2}{\gamma} = \frac{1}{\gamma'}$, isto é,

$$1 = \frac{p}{\gamma} + p\delta \quad e \quad 1 = \frac{\gamma'}{p} + \frac{2\gamma'}{\gamma}.$$

Mais uma vez, aplicando duas vezes a desigualdade de Hölder (no tempo) na equação (2.21) de forma análoga como nas desigualdades (2.18) e (2.19), primeiro tomando $\tau_1 = \frac{p}{\gamma'}$ e $\tau'_1 = \frac{\gamma}{2\gamma'}$, e, em seguida, $\tau_2 = \frac{\gamma}{p}$ e $\tau'_2 = \frac{1}{p\delta}$, obtemos

$$\begin{aligned} &\|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho,2}^s)} \\ &\leq C \left(\|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|v_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|v_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \right) \\ &\quad \cdot (\|u_1 - v_1\|_{L^p(I, L^\rho)} + \|u_2 - v_2\|_{L^p(I, L^\rho)}) \\ &\leq C \left(\|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|v_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|v_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \right) \\ &\quad \cdot (T^\delta \|u_1 - v_1\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + T^\delta \|u_2 - v_2\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}) \\ &= CT^\delta \left(\|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|v_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|v_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \right) \\ &\quad \cdot (\|u_1 - v_1\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|u_2 - v_2\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}) \\ &\leq CT^\delta M^2 (\|u_1 - v_1\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|u_2 - v_2\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pela definição (2.15) e a desigualdade (2.30) temos

$$\begin{aligned} &d(\mathcal{H}(u_1, u_2), \mathcal{H}(v_1, v_2)) \\ &= \|H_1(u_1, u_2) - H_1(v_1, v_2)\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|H_2(u_1, u_2) - H_2(v_1, v_2)\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} \\ &\leq C \left(\|g_1(u_1, u_2) - g_1(v_1, v_2)\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})} + \|g_2(u_1, u_2) - g_2(v_1, v_2)\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})} \right) \\ &\leq C_1 T^\delta M^2 (\|u_1 - v_1\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|u_2 - v_2\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}) \\ &= C_1 T^\delta M^2 d((u_1, u_2), (v_1, v_2)). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Tomando T suficientemente pequeno tal que

$$C_1 T^\delta M^2 \leq \frac{1}{2}, \quad (2.32)$$

segue que

$$d(\mathcal{H}(u_1, u_2), \mathcal{H}(v_1, v_2)) \leq \frac{1}{2} d((u_1, u_2), (v_1, v_2)),$$

consequentemente, $\mathcal{H}$ é uma contração. Então tomando T satisfazendo (2.28) e (2.32) temos pelo Teorema de ponto fixo de Banach que, existe única $(u_1, u_2) \in E \times E$ tal que $(u_1, u_2) = \mathcal{H}(u_1, u_2)$, isto é, $(u_1, u_2) \in E \times E$ é solução do sistema (2.2).

Passo 2 (Item 1) Seja $T > 0$ dado pelo Passo 1. Suponha sem perda de generalidade que $I = [0, T)$, e consideremos (u_1, u_2) a solução dada pelo Passo 1, com dado inicial $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$.

Mostraremos que $(u_1, u_2) \in (L^q(I, B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (C([0, T], H^s(\mathbb{R}^d)))^2$. Por (2.14) e (2.15) sabemos que

$$\mathcal{H}(u_1, u_2) = (H_1(u_1, u_2), H_2(u_1, u_2)),$$

com

$$H_j(u_1, u_2)(t) := e^{it\Delta} \varphi_j + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g_j(u_1(s), u_2(s)) ds,$$

para $j = 1, 2$.

Pelo Teorema 1.3.3 e o Corolário 1.3.5 temos que $H_j(u_1, u_2) \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$ para $j = 1, 2$. Além disso, combinando o Corolário 1.3.5, a desigualdade (2.20) e a definição dada em (2.24), segue que para $j = 1, 2$,

$$\|e^{it\Delta} \varphi_j\|_{L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq C \|\varphi_j\|_{B_{2,2}^s} = C \|\varphi_j\|_{H^s} < \frac{M}{2}$$

e

$$\begin{aligned} & \|\Phi_{g_j}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s)} \\ & \leq C \|g_j(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} \\ & \leq CT^\delta \left(\|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^3 + \|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^3 \right) \\ & \quad + CT^\delta \left(\|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} + \|u_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \|u_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \right) \\ & \leq CT^\delta M^3 \\ & \leq \frac{M}{2}, \end{aligned}$$

para todo par admissível (q, r) e M dado em (2.27), satisfazendo (2.28)-(2.32).

Portanto, combinando as definições (2.14) e (2.15) com as duas desigualdades acima, obtemos

$$\|\mathcal{H}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s) \times L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq M,$$

o que implica $\mathcal{H}(u_1, u_2) \in L^q(I, B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)) \times L^q(I, B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d))$. Como (u_1, u_2) é tal que $(u_1, u_2) = \mathcal{H}(u_1, u_2)$, obtemos que

$$(u_1, u_2) \in (L^q(I, B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (C([0, T], H^s(\mathbb{R}^d)))^2.$$

Passo 3 (Unicidade) Sejam

$$(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in L^\gamma((-T, T), B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)) \times L^\gamma((-T, T), B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)),$$

soluções do sistema (2.2) e com igual dado inicial (φ_1, φ_2) , onde $T > 0$ e $[-T, T]$ é um intervalo comum de existência de (u_1, u_2) e (v_1, v_2) . Se $(u_1(t), u_2(t)) = (v_1(t), v_2(t))$ para todo $t \in [-T, T]$, então nada temos que demonstrar.

Mostraremos o resultado para o intervalo $[0, T]$ (a mesma análise poderá ser feita para $[-T, 0]$).

Suponhamos que $(u_1(t'), u_2(t')) \neq (v_1(t'), v_2(t'))$ para algum $t' \in [0, T]$. Logo, pela continuidade de $(u_1(t), u_2(t))$ e $(v_1(t), v_2(t))$ em $H^s(\mathbb{R}^d)$ para todo $t \in [0, T]$, existem $\epsilon > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$t_0 = \inf \{t \in [0, T] : (u_1(t), u_2(t)) \neq (v_1(t), v_2(t))\}, \quad (u_1(t_0), u_2(t_0)) = (v_1(t_0), v_2(t_0)).$$

e $(u_1(t), u_2(t)) \neq (v_1(t), v_2(t))$ para todo $t \in (t_0, t_0 + \epsilon) \subset [0, T]$.

Sem perda de generalidade assumamos que $(u_1(t_0), u_2(t_0)) = (v_1(t_0), v_2(t_0)) = (\varphi_1, \varphi_2)$, sendo (φ_1, φ_2) as condições iniciais do sistema (2.2).

Note que as curvas $(U_1(t), U_2(t)) = (u_1(t + t_0), u_2(t + t_0))$ e $(V_1(t), V_2(t)) = (v_1(t + t_0), v_2(t + t_0))$ para $t \in [0, T]$, satisfazem

$$(U_1(t), U_2(t)), (V_1(t), V_2(t)) \in (C([0, \epsilon], H^s(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (L^\gamma((0, \epsilon), B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)))^2$$

e

$$(w_1(t), w_2(t)) = \mathcal{H}(w_1, w_2)(t), \quad \text{para todo } t \in [0, \epsilon].$$

Consequentemente, considerando $f_j = g_j(U_1, U_2) - g_j(V_1, V_2)$, temos da igualdade (2.24) que

$$\begin{aligned} \Phi_{g_j}(U_1, U_2)(t) - \Phi_{g_j}(V_1, V_2)(t) &= i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (g_j(U_1(s), U_2(s)) - g_j(V_1(s), V_2(s))) ds \\ &= i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f_j(s) ds = \Phi_{f_j}(t). \end{aligned}$$

Logo, como $(U_1(0), U_2(0)) = (u_1(t_0), u_2(t_0)) = (\varphi_1, \varphi_2) = (v_1(t_0), v_2(t_0)) = (V_1(0), V_2(0))$, pelas definições de $\mathcal{H}$ e H_j para $j = 1, 2$, (2.14) e (2.15), e além disso usando o Corolário 1.3.5 e a desigualdade (2.30) segue que

$$\begin{aligned} &\|(U_1, U_2) - (V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \\ &= \|\mathcal{H}(U_1, U_2) - \mathcal{H}(V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \\ &= \|H_1(U_1, U_2) - H_1(V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} + \|H_2(U_1, U_2) - H_2(V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \\ &= \|\Phi_{g_1}(U_1, U_2) - \Phi_{g_1}(V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} + \|\Phi_{g_2}(U_1, U_2) - \Phi_{g_2}(V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
& \|(U_1, U_2) - (V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \\
& \leq \|\Phi_{g_1}(U_1, U_2) - \Phi_{g_1}(V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} + \|\Phi_{g_2}(U_1, U_2) - \Phi_{g_2}(V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \\
& \leq \|\Phi_{f_1}\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} + \|\Phi_{f_2}\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \\
& \leq C \left(\|f_1\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} + \|f_2\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} \right) \\
& = C \left(\|g_1(U_1, U_2) - g_1(V_1, V_2)\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} + \|g_2(U_1, U_2) - g_2(V_1, V_2)\|_{L^{\gamma'}(I, B_{\rho',2}^s)} \right) \\
& \leq C\epsilon^\delta \left(\|U_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|U_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|V_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|V_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \right) \\
& \quad \cdot (\|U_1 - V_1\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|U_2 - V_2\|_{L^\gamma(I, L^\rho)})
\end{aligned}$$

Tomemos ϵ suficientemente pequeno tal que

$$C\epsilon^\delta \left(\|U_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|U_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|V_1\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 + \|V_2\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)}^2 \right) < 1,$$

então

$$\|(U_1, U_2) - (V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} < \|(U_1, U_2) - (V_1, V_2)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)},$$

o que é uma contradição. Assim, devemos ter que $(u_1(t), u_2(t)) = (v_1(t), v_2(t))$ para todo $t \in [0, T]$, mostrando assim a unicidade da solução em $(C([-T, T], H^s(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (L^\gamma((-T, T), B_{\rho,2}^s(\mathbb{R}^d)))^2$.

Passo 4 (Blowup Alternativo) Consideremos $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$.

Sejam

$$T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} = \sup \{T > 0 : \text{Existe solução de (2.2) em } [0, T]\},$$

$$T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)} = \sup \{T > 0 : \text{Existe solução de (2.2) em } [-T, 0]\}.$$

Pela Proposição 1.4.2 e os Passos 2 e 3, temos que existe única solução do sistema (2.2),

$$(u_1, u_2) \in C((-T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)}, T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}), H^s(\mathbb{R}^d)) \times C((-T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)}, T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}), H^s(\mathbb{R}^d))$$

com dado inicial (φ_1, φ_2) .

Agora, suponha que $T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} < \infty$. Seja $0 < t < T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}$, e sem perda de generalidade suponha que $(u_1(t), u_2(t)) = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Fazendo o mesmo processo que no Passo 1, para uma translação do dado inicial, segue da equação (2.28) e o argumento de ponto fixo que se $M = 2C(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s})$ e

$$C(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}) + C(T - t)^\delta M^3 \leq M,$$

então $T < T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}$. Logo,

$$C(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}) + C(T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} - t)^\delta M^3 > M,$$

e como $M = 2C(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s})$, temos que

$$(T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} - t)^\delta M^3 > (\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}).$$

Por isso,

$$M^2 > \frac{1}{C(T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} - t)^\delta},$$

obtendo

$$\frac{1}{C(T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} - t)^\delta} < (\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s})^2 = (\|u_1(t)\|_{H^s} + \|u_2(t)\|_{H^s})^2,$$

de modo que

$$\frac{1}{C(T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} - t)^\delta} < (\|(u_1(t), u_2(t))\|_{H^s \times H^s})^2,$$

por conseguinte, como $t < T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}$ é tomado de forma arbitrário, se temos que $T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} < +\infty$, segue que

$$\|(u_1(t), u_2(t))\|_{H^s \times H^s} \rightarrow +\infty,$$

quando $t \uparrow T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}$. O caso em que $t \downarrow -T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)}$ é análogo.

Passo 5 (Dependência contínua) Seja $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$. Consideremos (u_1, u_2) solução do sistema (2.2) com dado inicial (φ_1, φ_2) . Suponha que existe uma sequência de dados iniciais tais que $(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Pela convergência temos que

$$\|\varphi_1^n\|_{H^s} + \|\varphi_2^n\|_{H^s} \leq 2(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}), \quad (2.33)$$

para $n \geq n_0$ suficientemente grande.

Fixemos $n \geq n_0$. Pelo Passo 1, a solução (u_1^n, u_2^n) está definida em algum intervalo de tempo $(-T_n, T_n)$ onde podemos considerar T_n tal que

$$T_n = \frac{1}{CM_n^\theta},$$

com C independente do dado inicial, $M_n = 2C_0(\|\varphi_1^n\|_{H^s} + \|\varphi_2^n\|_{H^s})$, e $\theta > 0$ uma constante escolhida de forma que T_n satisfaz as desigualdades (2.28)-(2.32). Seja $M = 4C_0(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s})$, onde C_0 satisfaz (2.29). Notar que, usando (2.33), obtemos que $M > C_0(\|\varphi_1^n\|_{H^s} + \|\varphi_2^n\|_{H^s}) = M_n$. Assim, também temos que o tempo de existência da solução (u_1, u_2) pode ser tomado da forma

$$T = \frac{1}{CM^\theta}.$$

Logo,

$$\frac{1}{T_n} = CM_n^\theta < CM^\theta = \frac{1}{T},$$

dessa forma $T < T_n$ para todo $n \geq n_0$. Logo, obtemos que $0 < T < T_{\max(\varphi_1^n, \varphi_2^n)}, T_{\min(\varphi_1^n, \varphi_2^n)}$.

Aplicando o mesmo processo que no Passo 1 para (u_1^n, u_2^n) obtemos as seguintes estimativas

$$\|\mathcal{H}(u_1^n, u_2^n)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} \leq C_0(\|\varphi_1^n\|_{H^s} + \|\varphi_2^n\|_{H^s}) + C_0 T_n^\delta M_n^3$$

e

$$d(\mathcal{H}(u_1^n, u_2^n), \mathcal{H}(v_1^n, v_2^n)) \leq C_1 T_n^\delta M_n^2 d((u_1^n, u_2^n), (v_1^n, v_2^n)).$$

Portanto, pela estimativa (2.33) e o fato de que $M_n < M$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(u_1^n, u_2^n)\|_{L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s) \times L^\gamma(I, B_{\rho,2}^s)} &\leq C_0(\|\varphi_1^n\|_{H^s} + \|\varphi_2^n\|_{H^s}) + C_0 T_n^\delta M_n^3 \\ &\leq 2C_0(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}) + C_0 T_n^\delta M^3 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(\mathcal{H}(u_1^n, u_2^n), \mathcal{H}(v_1^n, v_2^n)) &\leq C_1 T_n^\delta M_n^2 d((u_1^n, u_2^n), (v_1^n, v_2^n)) \\ &\leq C_1 T_n^\delta M^2 d((u_1^n, u_2^n), (v_1^n, v_2^n)). \end{aligned}$$

Então, usando a argumentação feita no Passo 1 segue que (u_1^n, u_2^n) pertence ao conjunto $X(T_n, M) \times X(T_n, M)$ com $X(T_n, M)$ definido em (2.13) (T_n e M definidos acima) para todo $n \geq n_0$. Como $T < T_n$, resulta que (u_1, u_2) e (u_1^n, u_2^n) pertencem ao mesmo conjunto $X(T, M) \times X(T, M)$ (M e T definidos acima) para $n \geq n_0$.

O Passo 2 garante que

$$\|(u_1, u_2)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s) \times L^q(I, B_{r,2}^s)} = \|\mathcal{H}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s) \times L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq M$$

e

$$\|(u_1^n, u_2^n)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s) \times L^q(I, B_{r,2}^s)} = \|\mathcal{H}(u_1^n, u_2^n)\|_{L^q(I, B_{r,2}^s) \times L^q(I, B_{r,2}^s)} \leq M$$

para $n \geq n_0$.

Desse modo, (u_1, u_2) e (u_1^n, u_2^n) são limitadas em $L^q(I, B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d)) \times L^q(I, B_{r,2}^s(\mathbb{R}^d))$.

Agora, mostraremos que $(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2)$ em

$$L^q((-T, T), L^r(\mathbb{R}^d)) \times L^q((-T, T), L^r(\mathbb{R}^d)) \text{ para todo par admissível } (q, r).$$

Seja (q, r) um par admissível. Aplicando as estimativas de Strichartz, o Corolário 1.3.5 e fazendo um processo semelhante ao feito nas desigualdades (2.30)-(2.31) temos que para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} &d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)) \\ &= d(\mathcal{H}(u_1^n, u_2^n), \mathcal{H}(u_1, u_2)) \\ &= \|H_1(u_1^n, u_2^n) - H_1(u_1, u_2)\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} + \|H_2(u_1^n, u_2^n) - H_2(u_1, u_2)\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} \\ &= \|(e^{it\Delta}\varphi_1^n + \Phi_{g_1}(u_1^n, u_2^n)) - (e^{it\Delta}\varphi_1 + \Phi_{g_1}(u_1, u_2))\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} \\ &\quad + \|(e^{it\Delta}\varphi_2^n + \Phi_{g_2}(u_1^n, u_2^n)) - (e^{it\Delta}\varphi_2 + \Phi_{g_2}(u_1, u_2))\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)}. \end{aligned}$$

De onde,

$$\begin{aligned}
& d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)) \\
& + \|(e^{it\Delta}\varphi_2^n + \Phi_{g_2}(u_1^n, u_2^n)) - (e^{it\Delta}\varphi_2 + \Phi_{g_2}(u_1, u_2))\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} \\
& \leq \|e^{it\Delta}\varphi_1^n - e^{it\Delta}\varphi_1\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} + \|\Phi_{g_1}(u_1^n, u_2^n) - \Phi_{g_1}(u_1, u_2)\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} \\
& + \|e^{it\Delta}\varphi_2^n - e^{it\Delta}\varphi_2\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} + \|\Phi_{g_2}(u_1^n, u_2^n) - \Phi_{g_2}(u_1, u_2)\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} \\
& \leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) \\
& + C\left(\|g_1(u_1^n, u_2^n) - g_1(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}((-T, T), L^{\rho'})} + \|g_2(u_1^n, u_2^n) - g_2(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}((-T, T), L^{\rho'})}\right) \\
& \leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) \\
& + CT^\delta M^2 (\|u_1^n - u_1\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)} + \|u_2^n - u_2\|_{L^\gamma((-T, T), L^\rho)}) \\
& = C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) + CT^\delta M^2 d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)) \leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) + CT^\delta M^2 d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)). \quad (2.34)$$

Como o tempo T é tal que (u_1^n, u_2^n) , e (u_1, u_2) pertence a $E(T, M)$ para n suficientemente grande, então pela escolha de T temos

$$CT^\delta M^2 < \frac{1}{2}.$$

Logo

$$d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)) \leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) + \frac{1}{2}d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)),$$

de onde resulta que

$$\begin{aligned}
d((u_1^n, u_2^n), (u_1, u_2)) & \leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) \\
& \leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{H^s}).
\end{aligned}$$

Mas como

$$(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2) \text{ em } H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d),$$

segue que

$$(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2) \text{ em } L^\gamma((-T, T), L^\rho(\mathbb{R}^d)) \times L^\gamma((-T, T), L^\rho(\mathbb{R}^d)).$$

Seguindo o mesmo procedimento que na desigualdade (2.34) obtemos

$$\begin{aligned}
& \|(u_1^n, u_2^n) - (u_1, u_2)\|_{L^q((-T, T), L^r) \times L^q((-T, T), L^r)} \\
& = \|\mathcal{H}(u_1^n, u_2^n) - \mathcal{H}(u_1, u_2)\|_{L^q((-T, T), L^r) \times L^q((-T, T), L^r)} \\
& = \|H_1(u_1^n, u_2^n) - H_1(u_1, u_2)\|_{L^q((-T, T), L^r)} + \|H_2(u_1^n, u_2^n) - H_2(u_1, u_2)\|_{L^q((-T, T), L^r)} \\
& = \|(e^{it\Delta}\varphi_1^n + \Phi_{g_1}(u_1^n, u_2^n)) - (e^{it\Delta}\varphi_1 + \Phi_{g_1}(u_1, u_2))\|_{L^q((-T, T), L^r)} \\
& + \|(e^{it\Delta}\varphi_2^n + \Phi_{g_2}(u_1^n, u_2^n)) - (e^{it\Delta}\varphi_2 + \Phi_{g_2}(u_1, u_2))\|_{L^q((-T, T), L^r)}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
& \| (u_1^n, u_2^n) - (u_1, u_2) \|_{L^q((-T, T), L^r) \times L^q((-T, T), L^r)} \\
&= \| (e^{it\Delta} \varphi_1^n + \Phi_{g_1}(u_1^n, u_2^n)) - (e^{it\Delta} \varphi_1 + \Phi_{g_1}(u_1, u_2)) \|_{L^q((-T, T), L^r)} \\
&\quad + \| (e^{it\Delta} \varphi_2^n + \Phi_{g_2}(u_1^n, u_2^n)) - (e^{it\Delta} \varphi_2 + \Phi_{g_2}(u_1, u_2)) \|_{L^q((-T, T), L^r)} \\
&\leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) \\
&\quad + C \left(\|g_1(u_1^n, u_2^n) - g_1(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})} + \|g_2(u_1^n, u_2^n) - g_2(u_1, u_2)\|_{L^{\gamma'}(I, L^{\rho'})} \right) \\
&\leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{L^2} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{L^2}) + CT^\delta M^2 (\|u_1^n - u_1\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|u_2^n - u_2\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}) \\
&\leq C(\|\varphi_1^n - \varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2^n - \varphi_2\|_{H^s}) + CT^\delta M^2 (\|u_1^n - u_1\|_{L^\gamma(I, L^\rho)} + \|u_2^n - u_2\|_{L^\gamma(I, L^\rho)}).
\end{aligned}$$

Logo como

$$(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2) \text{ em } H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$$

e

$$(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2) \text{ em } L^\gamma((-T, T), L^\rho(\mathbb{R}^d)) \times L^\gamma((-T, T), L^\rho(\mathbb{R}^d)),$$

então

$$(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2) \text{ em } L^q((-T, T), L^r(\mathbb{R}^d)) \times L^q((-T, T), L^r(\mathbb{R}^d)),$$

para todo par admissível (q, r) .

Em síntese, só resta mostrar a convergência em $(L^\infty((-T, T), H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)))^2$ para todo $\varepsilon > 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. Então aplicando interpolação com $\theta = \frac{\varepsilon}{s}$ e escrevendo $s - \varepsilon = (1 - \theta)s$, temos que

$$\begin{aligned}
\| (u_1^n, u_2^n) - (u_1, u_2) \|_{H^{s-\varepsilon} \times H^{s-\varepsilon}} &= \|u_1^n - u_1\|_{H^{s-\varepsilon}} + \|u_2^n - u_2\|_{H^{s-\varepsilon}} \\
&\leq \|u_1^n - u_1\|_{H^s}^{\frac{s-\varepsilon}{s}} \|u_1^n - u_1\|_{L^2}^{\frac{\varepsilon}{s}} + \|u_2^n - u_2\|_{H^s}^{\frac{s-\varepsilon}{s}} \|u_2^n - u_2\|_{L^2}^{\frac{\varepsilon}{s}}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned}
& \| (u_1^n, u_2^n) - (u_1, u_2) \|_{L^\infty((-T, T), H^{s-\varepsilon}) \times L^\infty((-T, T), H^{s-\varepsilon})} \\
&= \|u_1^n - u_1\|_{L^\infty((-T, T), H^{s-\varepsilon})} + \|u_2^n - u_2\|_{L^\infty((-T, T), H^{s-\varepsilon})} \\
&\leq \|u_1^n - u_1\|_{L^\infty((-T, T), H^s)}^{\frac{s-\varepsilon}{s}} \|u_1^n - u_1\|_{L^\infty((-T, T), L^2)}^{\frac{\varepsilon}{s}} \\
&\quad + \|u_2^n - u_2\|_{L^\infty((-T, T), H^s)}^{\frac{s-\varepsilon}{s}} \|u_2^n - u_2\|_{L^\infty((-T, T), L^2)}^{\frac{\varepsilon}{s}}.
\end{aligned}$$

Nesse sentido, pela limitação de (u_1^n, u_2^n) e (u_1, u_2) em $L^\infty((-T, T), H^s)$ e a convergência $(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2)$ em $L^\infty((-T, T), L^2)$ (tomando o par admissível $(q, r) = (\infty, 2)$), segue que, $(u_1^n, u_2^n) \rightarrow (u_1, u_2)$ em $L^\infty((-T, T), H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)) \times L^\infty((-T, T), H^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d))$ para todo $0 < \varepsilon < s$.

Isso completa a demonstração do teorema. $\square$

Observação 2.1.4. No teorema anterior mostramos como a solução depende continuamente do dado inicial. Por outro lado, é possível fazer um processo muito similar ao feito no Passo 5 na demonstração do Teorema 2.1.3 e mostrar o seguinte: Sejam $(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \in H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$, tal que $(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$ e $(u_1^n, u_2^n) \in C([-T_n, T_n] : H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d))$ as soluções correspondentes. Se $T \in (0, T_{(\varphi_1, \varphi_2)})$, então as soluções (u_1^n, u_2^n) podem ser estendidas ao intervalo $[-T, T]$, para todo n suficientemente grande, e para todo $0 < \epsilon < s$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[-T, T]} \|(u_1^n(t), u_2^n(t)) - (u_1(t), u_2(t))\|_{H^{s-\epsilon} \times H^{s-\epsilon}} = 0.$$

2.2 Boa colocação local em H^1

A seguir usaremos um método introduzido por T. Kato, (CAZENAVE, 2003, Pag. 90), baseado no argumento do ponto fixo de Banach e estimativas de Strichartz, por o qual podemos mostrar que o sistema (2.2) é bem posto em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ para certas classes de não linearidades g_1, g_2 .

Teorema 2.2.1. Para $j = 1, 2$ sejam $g_j \in C(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, \mathbb{C})$. Assuma $g_j(0, 0) = 0$ e

$$|g_j(z_1, z_2) - g_j(x_1, x_2)| \leq C(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |x_1|^2 + |x_2|^2)(|z_1 - x_1| + |z_2 - x_2|) \quad (2.35)$$

para $z_1, z_2, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

Dado $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq d \leq 3$,

1. Existem $T_{\max}, T_{\min} \in (0, \infty]$ e uma única solução maximal do sistema (2.2),

$$(u_1, u_2) \in (C((-T_{\min}, T_{\max}), H^1(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (L^q((-T_{\min}, T_{\max}), W^{1,r}(\mathbb{R}^d)))^2$$

com $r = 4$.

2. Se $T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)} < \infty$ (respectivamente $T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)} < \infty$) então

$$\|(u_1(t), u_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \rightarrow \infty,$$

quando $t \uparrow T_{\max(\varphi_1, \varphi_2)}$ (respectivamente $t \downarrow -T_{\min(\varphi_1, \varphi_2)}$).

3. (u_1, u_2) depende continuamente de (φ_1, φ_2) .

Demonstração. A demonstração deste teorema será feita em 3 passos.

Passo 1 (Existência) Primeiro vamos fazer algumas estimativas usando a desigualdade de Hölder. Fixemos $j = 1, 2$. Note que $1 = \frac{2r'}{r} + \frac{r'}{r}$, então temos que

$$\begin{aligned}
& \|(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)|u_1 - v_1|\|_{L^{r'}}^{r'} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)|u_1 - v_1|^{r'} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)^{r'/2} |u_1 - v_1|^{r'} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)^{r'/2} dx \right)^{2r'/\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1 - v_1|^{r'})^{r/r'} dx \right)^{r'/r}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \|(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)|u_1 - v_1|\|_{L^{r'}}^{r'} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)^{r'/2} dx \right)^{2r'/\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1 - v_1|^{r'})^{r/r'} dx \right)^{r'/r} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)^{r'/2} dx \right)^{2r'/r} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_1 - v_1|^r dx \right)^{r'/r} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} (|u_1| + |u_2| + |v_1| + |v_2|)^r dx \right)^{2r'/r} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_1 - v_1|^r dx \right)^{r'/r} \\
&= C \|(|u_1| + |u_2| + |v_1| + |v_2|)\|_{L^r}^{2r'} \|u_1 - v_1\|_{L^r}^{r'},
\end{aligned} \tag{2.36}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
& \|(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)|u_1 - v_1|\|_{L^{r'}} \\
&\leq C \|(|u_1| + |u_2| + |v_1| + |v_2|)\|_{L^r}^2 \|u_1 - v_1\|_{L^r} \\
&\leq C (\|u_1\|_{L^r}^2 + \|u_2\|_{L^r}^2 + \|v_1\|_{L^r}^2 + \|v_2\|_{L^r}^2) \|u_1 - v_1\|_{L^r}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Do mesmo modo

$$\begin{aligned}
& \|(|u_1|^2 + |u_2|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2)|u_2 - v_2|\|_{L^{r'}} \\
&\leq C \|(|u_1| + |u_2| + |v_1| + |v_2|)\|_{L^r}^2 \|u_2 - v_2\|_{L^r} \\
&\leq C (\|u_1\|_{L^r}^2 + \|u_2\|_{L^r}^2 + \|v_1\|_{L^r}^2 + \|v_2\|_{L^r}^2) \|u_2 - v_2\|_{L^r}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Por conseguinte, pelas desigualdades (2.35), (2.37) e (2.38) segue que

$$\|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{r'}} \leq C (\|u_1\|_{L^r}^2 + \|u_2\|_{L^r}^2 + \|v_1\|_{L^r}^2 + \|v_2\|_{L^r}^2) (\|u_1 - v_1\|_{L^r} + \|u_2 - v_2\|_{L^r}). \tag{2.39}$$

Agora, vamos definir o espaço no qual vamos aplicar o Teorema de ponto fixo de Banach.

Consideremos q tal que (q, r) é um par admissível e definamos

$$X = \{u \in L^\infty(I, H^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^q(I, W^{1,r}(\mathbb{R}^d)) : \|u\|_{L^\infty(I, H^1)} \leq M, \|u\|_{L^q(I, W^{1,r})} \leq M\},$$

onde $I = (-T, T)$ e T, M são constantes positivas que serão escolhidas posteriormente. Sem perda de generalidade suponha que $I = [0, T)$ para o caso $(-T, 0)$ procedemos de forma semelhante. Consideremos $X \times X$ munido da métrica

$$d((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \|u_1 - v_1\|_{L^q(I, L^r)} + \|u_2 - v_2\|_{L^q(I, L^r)}.$$

Note que $(X \times X, d)$ é um espaço métrico completo (veja Passo 1 do Teorema 2.1.3). Além disso, consideremos a função $\mathcal{H} : X \times X \rightarrow X \times X$ definida por

$$\mathcal{H}(u_1, u_2) = (H_1(u_1, u_2), H_2(u_1, u_2))$$

com

$$H_j(u_1, u_2)(t) := e^{it\Delta} \varphi_j + i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g_j(u_1(s), u_2(s)) ds \quad (2.40)$$

para $j = 1, 2$. Aqui também temos o propósito de encontrar T, M tais que $\mathcal{H}$ esteja bem definida e além disso também seja uma contração.

Sejam $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in X \times X$. Usando a estimativa (2.39) obtemos

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^q(I, L^{r'})} \\ & \leq C \left(\|u_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 \right) \\ & \quad \cdot \left(\int_I (\|u_1(t) - v_1(t)\|_{L^r} + \|u_2(t) - v_2(t)\|_{L^r})^q dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, aplicando a desigualdade de Minkowski

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^q(I, L^{r'})} \\ & \leq C \left(\|u_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 \right) \\ & \quad \cdot \left(\left(\int_I \|u_1(t) - v_1(t)\|_{L^r}^q dt \right)^{1/q} + \left(\int_I \|u_2(t) - v_2(t)\|_{L^r}^q dt \right)^{1/q} \right) \quad (2.41) \\ & \leq C \left(\|u_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 \right) \\ & \quad \cdot (\|u_1 - v_1\|_{L^q(I, L^r)} + \|u_2 - v_2\|_{L^q(I, L^r)}), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^q(I, L^{r'})} \\ & \leq C \left(\|u_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 \right) \quad (2.42) \\ & \quad \cdot (\|u_1 - v_1\|_{L^q(I, L^r)} + \|u_2 - v_2\|_{L^q(I, L^r)}), \end{aligned}$$

portanto $g_j(u_1, u_2) \in L^q(I, L^{r'}(\mathbb{R}^d))$.

Também, dado que $(u_1, u_2) \in X \times X$, temos que $(u_1(t), u_2(t)) \in W^{1,r}(\mathbb{R}^d)$ q.t.p $t \in I$. Logo, como $r > d$, segue pela imersão de Sobolev que o par $(u_1(t), u_2(t))$ é contínuo q.t.p $t \in I$. Assim, temos que para $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, pela desigualdade (2.35),

$$\begin{aligned} & |\partial_i g_j(u_1(t), u_2(t))(x)| \\ & = \left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{g_j(u_1(t), u_2(t))(x + ke_i) - g_j(u_1(t), u_2(t))(x)}{k} \right| \\ & = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{|g_j(u_1(t), u_2(t))(x + ke_i) - g_j(u_1(t), u_2(t))(x)|}{|k|} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& |\partial_i g_j(u_1(t), u_1(t))(x)| \\
& \leq C \lim_{k \rightarrow 0} (|u_1(t, x + ke_i)|^2 + |u_2(t, x + ke_i)|^2 + |u_1(t, x)|^2 + |u_2(t, x)|^2) \\
& \quad \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(|u_1(t, x + ke_i) - u_1(x)| + |u_2(t, x + ke_i) - u_2(x)|)}{|k|} \\
& = C(2|u_1(t, x)|^2 + 2|u_2(t, x)|^2)(|\partial_i u_1(t, x)| + |\partial_i u_2(t, x)|) \\
& = 2C(|u_1(t, x)|^2 + |u_2(t, x)|^2)(|\partial_i u_1(t, x)| + |\partial_i u_2(t, x)|),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\nabla g_j(u_1(t), u_2(t))| \leq C(|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2)(|\nabla u_1(t)| + |\nabla u_2(t)|), \text{ q.t.p } t \in I.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
& |\nabla g_j(u_1(t), u_2(t)) - \nabla g_j(v_1(t), v_2(t))| \\
& \leq C(|u_1(t)|^2 + |u_2(t)|^2 + |v_1(t)|^2 + |v_2(t)|^2)(|\nabla u_1(t)| + |\nabla u_2(t)| + |\nabla v_1(t)| + |\nabla v_2(t)|),
\end{aligned}$$

q.t.p $t \in I$. Daí, aplicando a desigualdade de Hölder como na desigualdade (2.36), resulta que

$$\begin{aligned}
\|\nabla g_j(u_1, u_2) - \nabla g_j(v_1, v_2)\|_{L^{r'}} & \leq C(\|u_1\|_{L^r}^2 + \|u_2\|_{L^r}^2 + \|v_1\|_{L^r}^2 + \|v_2\|_{L^r}^2) \\
& \quad \cdot (\|\nabla u_1\|_{L^r} + \|\nabla u_2\|_{L^r} + \|\nabla v_1\|_{L^r} + \|\nabla v_2\|_{L^r}).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Então, pelas desigualdades (2.39) e (2.43) obtemos

$$\begin{aligned}
& \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{W^{1,r'}} \\
& = \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{r'}} + \|\nabla g_j(u_1, u_2) - \nabla g_j(v_1, v_2)\|_{L^{r'}} \\
& \leq C(\|u_1\|_{L^r}^2 + \|u_2\|_{L^r}^2 + \|v_1\|_{L^r}^2 + \|v_2\|_{L^r}^2)(\|u_1\|_{L^r} + \|u_2\|_{L^r} + \|v_1\|_{L^r} + \|v_2\|_{L^r}) \\
& \quad + C(\|u_1\|_{L^r}^2 + \|u_2\|_{L^r}^2 + \|v_1\|_{L^r}^2 + \|v_2\|_{L^r}^2)(\|\nabla u_1\|_{L^r} + \|\nabla u_2\|_{L^r} + \|\nabla v_1\|_{L^r} + \|\nabla v_2\|_{L^r}) \\
& \leq C(\|u_1\|_{L^r}^2 + \|u_2\|_{L^r}^2 + \|v_1\|_{L^r}^2 + \|v_2\|_{L^r}^2)(\|u_1\|_{W^{1,r}} + \|u_2\|_{W^{1,r}} + \|v_1\|_{W^{1,r}} + \|v_2\|_{W^{1,r}}).
\end{aligned}$$

Agora, fazendo um processo análogo ao desenvolvido na desigualdade (2.41), e pelo fato de que $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ (Proposição 1.1.9), pois $r = 4$ e $d \leq 3$, segue que

$$\begin{aligned}
& \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^q(I, W^{1,r'})} \\
& \leq C(\|u_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2) \\
& \quad \cdot (\|u_1\|_{L^q(I, W^{1,r})} + \|u_2\|_{L^q(I, W^{1,r})} + \|v_1\|_{L^q(I, W^{1,r})} + \|v_2\|_{L^q(I, W^{1,r})}) \\
& \leq C(\|u_1\|_{L^\infty(I, H^1)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, H^1)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, H^1)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, H^1)}^2) \\
& \quad \cdot (\|u_1\|_{L^q(I, W^{1,r})} + \|u_2\|_{L^q(I, W^{1,r})} + \|v_1\|_{L^q(I, W^{1,r})} + \|v_2\|_{L^q(I, W^{1,r})}).
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Como $\frac{q'}{q} + \frac{(q - q')q'}{qq'} = 1$, aplicando a desigualdade de Hölder (no tempo) temos

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{q'}(I, W^{1, r'})} \\ &= \left(\int_I \|g_j(u_1(t), u_2(t)) - g_j(v_1(t), v_2(t))\|_{W^{1, r'}}^{q'} dt \right)^{1/q'} \\ &\leq \left(\left(\int_I dt \right)^{\delta q'} \left(\int_I \|g_j(u_1(t), u_2(t)) - g_j(v_1(t), v_2(t))\|_{W^{1, r'}}^q dt \right)^{q'/q} \right)^{1/q'} \\ &= T^\delta \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^q(I, W^{1, r'})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{q'}(I, L^{r'})} \\ &= \left(\int_I \|g_j(u_1(t), u_2(t)) - g_j(v_1(t), v_2(t))\|_{L^{r'}}^{q'} dt \right)^{1/q'} \\ &\leq \left(\left(\int_I dt \right)^{\delta q'} \left(\int_I \|g_j(u_1(t), u_2(t)) - g_j(v_1(t), v_2(t))\|_{L^{r'}}^q dt \right)^{q'/q} \right)^{1/q'} \\ &= T^\delta \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^q(I, L^{r'})}, \end{aligned}$$

onde $\delta = \frac{(q - q')}{qq'}$. Então, usando as duas desigualdades acima e as estimativas (2.42) e (2.44) obtemos

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{q'}(I, W^{1, r'})} \\ &\leq CT^\delta (\|u_1\|_{L^\infty(I, H^1)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, H^1)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, H^1)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, H^1)}^2) \\ &\quad \cdot (\|u_1\|_{L^q(I, W^{1, r})} + \|u_2\|_{L^q(I, W^{1, r})} + \|v_1\|_{L^q(I, W^{1, r})} + \|v_2\|_{L^q(I, W^{1, r})}) \\ &\leq CT^\delta M^3 \end{aligned} \tag{2.45}$$

e

$$\begin{aligned} & \|g_j(u_1, u_2) - g_j(v_1, v_2)\|_{L^{q'}(I, L^{r'})} \\ &\leq C (\|u_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|u_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_1\|_{L^\infty(I, L^r)}^2 + \|v_2\|_{L^\infty(I, L^r)}^2) \\ &\quad \cdot (\|u_1 - v_1\|_{L^q(I, L^r)} + \|u_2 - v_2\|_{L^q(I, L^r)}) \\ &\leq CT^\delta M^2 (\|u_1 - v_1\|_{L^q(I, L^r)} + \|u_2 - v_2\|_{L^q(I, L^r)}). \end{aligned}$$

Entretanto, pelo Teorema 1.3.3 e o Corolário 1.3.4, temos que para todo par admissível (q, r)

$$\|e^{it\Delta} \varphi_j\|_{L^q(I, L^r)} \leq C \|\varphi_j\|_{L^2}, \tag{2.46}$$

$$\|e^{it\Delta} \varphi_j\|_{L^q(I, W^{1, r})} \leq C \|\varphi_j\|_{H^1} \tag{2.47}$$

e

$$\|\Phi_{g_j}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, L^r)} \leq C \|g_j(u_1, u_2)\|_{L^{q'}(I, L^{r'})}, \tag{2.48}$$

$$\|\Phi_{g_j}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, W^{1,r})} \leq C \|g_j(u_1, u_2)\|_{L^{q'}(I, W^{1,r'})}, \quad (2.49)$$

onde

$$\Phi_{g_j}(u_1, u_2)(t) = i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g_j(u_1(s), u_2(s)) ds.$$

Pela definição de H_j dada em (2.40) e as desigualdades (2.47), (2.48) resulta que

$$\|H_j(u_1, u_2)\|_{L^q(I, W^{1,r})} \leq C \left(\|\varphi_j\|_{H^1} + \|g_j(u_1, u_2)\|_{L^{q'}(I, W^{1,r'})} \right), \quad (2.50)$$

para todo par admissível (q, r) . Logo, combinando as desigualdades (2.45) e (2.50), obtemos

$$\|H_j(u_1, u_2)\|_{L^q(I, W^{1,r})} \leq C \|\varphi_j\|_{H^1} + CT^\delta M^3$$

e por conseguinte

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, W^{1,r}) \times L^q(I, W^{1,r})} &= \|H_1(u_1, u_2)\|_{L^q(I, W^{1,r})} + \|H_2(u_1, u_2)\|_{L^q(I, W^{1,r})} \\ &\leq C_0(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}) + C_0 T^\delta M^3. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Nesse sentido, se consideramos

$$M = 2C_0(\|\varphi_1\|_{H^s} + \|\varphi_2\|_{H^s}), \quad (2.52)$$

e tomamos T suficientemente pequeno tal que

$$C_0 T^\delta M^2 \leq \frac{1}{2}, \quad (2.53)$$

então, combinando as desigualdades (2.51), (2.52) e (2.53) temos

$$\|\mathcal{H}(u_1, u_2)\|_{L^q(I, W^{1,r}) \times L^q(I, W^{1,r})} \leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M.$$

Como resultado $\mathcal{H}(u_1, u_2) \in L^q(I, W^{1,r}(\mathbb{R}^d)) \times L^q(I, W^{1,r}(\mathbb{R}^d))$, de onde segue que $\mathcal{H}$ está bem definida.

Além disso, o Teorema 1.3.3 combinado com o Corolário 1.3.5 implicam que $\mathcal{H}(u_1, u_2) \in (C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^d)))^2$, portanto temos que

$$\mathcal{H}(u_1, u_2) \in (C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (L^q(I, W^{1,r}(\mathbb{R}^d)))^2.$$

De maneira similar que no Teorema 2.1.3, combinando as desigualdades (2.46)-(2.49), podemos mostrar que $\mathcal{H}$ é uma contração. Assim, pelo Teorema de ponto fixo de Banach existe única $(u_1, u_2) \in X \times X$ tal que $(u_1, u_2) = \mathcal{H}(u_1, u_2) \in (C([-T, T], H^1(\mathbb{R}^d)))^2 \cap (L^q(I, W^{1,r}(\mathbb{R}^d)))^2$, o qual implica que (u_1, u_2) é a única solução do sistema (2.2) em $X \times X$.

Passo 2 (Unicidade e Blowup alternativo) Este passo é feito como nos Passos 2 e 3 do Teorema 2.1.3, basta mudar os espaços onde as normas são estimadas, por isso para evitar tecnicidades não faremos a sua demonstração (veja (CAZENAVE, 2003, pag. 93)).

Passo 3 (Dependência contínua) A demonstração deste passo é similar ao Passo 5 do Teorema 2.1.3, com uma nova estimativa que depende do gradiente de g_j para $j = 1, 2$, que não é difícil de obter procedendo da mesma forma que no Passo 5 (veja (CAZENAVE, 2003, pag. 96)).

□

2.3 Leis de conservação.

Mostraremos agora que o sistema (2.2) satisfaz as leis de conservação de energia, massa e momento. Para isto, assumiremos que o sistema (2.2) tem boa colocação local em $H^2(\mathbb{R}^d) \times H^2(\mathbb{R}^d)$, de fato, um processo semelhante ao feito nas seções anteriores mostra que o sistema (2.2) é bem posto no espaço $H^2(\mathbb{R}^d) \times H^2(\mathbb{R}^d)$ (CAZENAVE, 2003, Pag. 134).

Considere a equação escalar de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \mu_0 |u|^2 u = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

quando μ_0 é uma constante positiva.

Além disso, sejam a energia, a massa e o momento escalares associados ao problema de Cauchy acima, definidos por

$$E(u, \mu_0) := \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{\mu_0}{4} \|u\|_{L^4}^4, \quad (2.54)$$

$$M(u) := \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 \quad (2.55)$$

e

$$P(u) := \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla \bar{u} \, dx. \quad (2.56)$$

A seguir, observamos que o sistema (2.2) admite suas próprias leis de conservação. Mais precisamente, sejam a energia $\mathcal{E}$, a massa $\mathcal{M}$ e o momento total $\mathcal{P}$ definidos como segue

$$\mathcal{E}(u_1(t), u_2(t)) := E(u_1(t), \mu_1) + E(u_2(t), \mu_2) - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_1(t)|^2 |u_2(t)|^2 \, dx, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{M}(u_1(t), u_2(t)) := M(u_1(t)) + M(u_2(t)) \quad (2.58)$$

e

$$\mathcal{P}(u_1(t), u_2(t)) := P(u_1(t)) + P(u_2(t)) \quad (2.59)$$

Nosso objetivo é mostrar que qualquer solução (u_1, u_2) do sistema (2.2) definida num intervalo $[-T, T]$ com dado inicial $(u_1(0), u_2(0)) = (\varphi_1, \varphi_2)$ satisfaz as seguintes leis de conservação,

$$\mathcal{E}(u_1(t), u_2(t)) = \mathcal{E}(u_1(0), u_2(0)), \quad (2.60)$$

$$\mathcal{M}(u_1(t), u_2(t)) = \mathcal{M}(u_1(0), u_2(0)). \quad (2.61)$$

e

$$\mathcal{P}(u_1(t), u_2(t)) = \mathcal{P}(u_1(0), u_2(0)). \quad (2.62)$$

Primeiramente mostraremos que a energia total é conservada pelo fluxo de (2.2).

Suponha que $(u_1, u_2) \in H^2(\mathbb{R}^d) \times H^2(\mathbb{R}^d)$. Multiplicando a primeira igualdade de (2.2) por $\partial_t \bar{u}_1$ e a segunda igualdade por $\partial_t \bar{u}_2$ e integrando sobre $\mathbb{R}^d$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} i \partial_t u_1 \partial_t \bar{u}_1 dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u_1 \partial_t \bar{u}_1 dx - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \partial_t \bar{u}_1 dx - \beta \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_1 \partial_t \bar{u}_1 dx \quad (2.63)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^d} i \partial_t u_2 \partial_t \bar{u}_2 dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u_2 \partial_t \bar{u}_2 dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \partial_t \bar{u}_2 dx - \beta \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_2 \partial_t \bar{u}_2 dx. \quad (2.64)$$

Mas, do sistema (2.2) também segue que

$$-i \partial_t \bar{u}_1 \partial_t u_1 = -\Delta \bar{u}_1 \partial_t u_1 - \mu_1 |u_1|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1 - \beta |u_2|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1$$

e

$$-i \partial_t \bar{u}_2 \partial_t u_2 = -\Delta \bar{u}_2 \partial_t u_2 - \mu_2 |u_2|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2 - \beta |u_1|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2,$$

dessa maneira integrando sobre $\mathbb{R}^d$ resulta que

$$- \int_{\mathbb{R}^d} i \partial_t \bar{u}_1 \partial_t u_1 dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \bar{u}_1 \partial_t u_1 dx - \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1 dx - \beta \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1 dx \quad (2.65)$$

e

$$- \int_{\mathbb{R}^d} i \partial_t \bar{u}_2 \partial_t u_2 dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \bar{u}_2 \partial_t u_2 dx - \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2 dx - \beta \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2 dx. \quad (2.66)$$

Por consequência, somando as igualdades (2.63) e (2.65), também (2.64) e (2.66) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u_1 \partial_t \bar{u}_1 + \Delta \bar{u}_1 \partial_t u_1) dx + \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 u_1 \partial_t \bar{u}_1 + |u_1|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1) dx \\ &\quad + \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_2|^2 u_1 \partial_t \bar{u}_1 + |u_2|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1) dx, \end{aligned} \quad (2.67)$$

assim como também

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u_2 \partial_t \bar{u}_2 + \Delta \bar{u}_2 \partial_t u_2) dx + \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} (|u_2|^2 u_2 \partial_t \bar{u}_2 + |u_2|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2) dx \\ &\quad + \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 u_2 \partial_t \bar{u}_2 + |u_1|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2) dx. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Aplicando integração por partes nas igualdades (2.67) e (2.68) temos

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u_1 \partial_t \nabla \bar{u}_1 + \nabla \bar{u}_1 \partial_t \nabla u_1) dx + \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 u_1 \partial_t \bar{u}_1 + |u_1|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1) dx \\ & + \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_2|^2 u_1 \partial_t \bar{u}_1 + |u_2|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1) dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u_2 \partial_t \nabla \bar{u}_2 + \nabla \bar{u}_2 \partial_t \nabla u_2) dx + \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} (|u_2|^2 u_2 \partial_t \bar{u}_2 + |u_2|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2) dx \\ & + \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 u_2 \partial_t \bar{u}_2 + |u_1|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2) dx, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} |\nabla u_1|^2 dx + \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (u_1 \bar{u}_1)^2 \right) dx \\ & + \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_2|^2 u_1 \partial_t \bar{u}_1 + |u_2|^2 \bar{u}_1 \partial_t u_1) dx \end{aligned}$$

e

$$0 = - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} |\nabla u_2|^2 dx + \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (u_2 \bar{u}_2)^2 \right) dx + \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1|^2 u_2 \partial_t \bar{u}_2 + |u_1|^2 \bar{u}_2 \partial_t u_2) dx.$$

Em consequência, somando as igualdades acima segue que

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} |\nabla u_1|^2 dx + \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (u_1 \bar{u}_1)^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} |\nabla u_2|^2 dx \\ & + \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (u_2 \bar{u}_2)^2 \right) dx + \beta \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 (u_1 \partial_t \bar{u}_1 + \bar{u}_1 \partial_t u_1) dx \\ & + \beta \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 (u_2 \partial_t \bar{u}_2 + \bar{u}_2 \partial_t u_2) dx \\ = & - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} |\nabla u_1|^2 dx + \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (u_1 \bar{u}_1)^2 \right) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} |\nabla u_2|^2 dx \\ & + \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (u_2 \bar{u}_2)^2 \right) dx + \beta \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |u_1|^2 |u_2|^2 \right) dx, \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} 0 = & - \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_1|^2 dx + \mu_1 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} (u_1 \bar{u}_1)^2 \right) dx - \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_2|^2 dx \\ & + \mu_2 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} (u_2 \bar{u}_2)^2 \right) dx + \beta \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} |u_1|^2 |u_2|^2 \right) dx, \end{aligned}$$

portanto

$$0 = \frac{d}{dt} \mathcal{E}(u_1(t), u_2(t)),$$

o que mostra que $(u_1, u_2) \in H^2(\mathbb{R}^d) \times H^2(\mathbb{R}^d)$ satisfaz a igualdade (2.60).

Como $H^2(\mathbb{R}^d)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^d)$ segue que a igualdade também é válida para $(u_1, u_2) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$. Com efeito, suponha $(u_1, u_2) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ e $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$. Sejam $(\varphi_1^n, \varphi_2^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^2(\mathbb{R}^d) \times H^2(\mathbb{R}^d)$ uma sequência de funções tais que $\|(\varphi_1^n, \varphi_2^n) - (\varphi_1, \varphi_2)\|_{H^1 \times H^1} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Agora, pela boa colocação de (2.2) temos que existem $T > 0$ e $(u_1^n, u_2^n) \in (C([-T, T], H^2(\mathbb{R}^d)))^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ solução de (2.2) com dado inicial $(\varphi_1^n, \varphi_2^n)$.

Da dependência contínua temos que

$$\sup_{[-T, T]} \|(u_1^n(t), u_2^n(t)) - (u_1(t), u_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, como

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u_1^n(t), u_2^n(t)) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_1^n(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\mu_2}{4} \|u_1^n(t)\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \|\nabla u_2^n(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\mu_2}{4} \|u_2^n(t)\|_{L^4}^4 \\ &\quad - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_1^n(t)|^2 |u_2^n(t)|^2 dx \\ &= \mathcal{E}(\varphi_1^n, \varphi_2^n) \quad \text{para todo } t \in [-T, T], \end{aligned}$$

e pela Proposição 1.1.9 temos que $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^d)$ pois $d \leq 3$, então tomando limite na igualdade acima, temos que a convergência em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ implica que

$$\mathcal{E}(u_1(t), u_2(t)) = \mathcal{E}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathcal{E}(u_1(0), u_2(0)) \quad \text{para todo } t \in [-T, T].$$

Por conseguinte mostramos que a igualdade (2.60) se verifica para a solução dada pela boa colocação local.

Para mostrar a igualdade (2.62) consideremos inicialmente $(u_1, u_2) \in H^2(\mathbb{R}^d) \times H^2(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo (2.2) com dado inicial (φ_1, φ_2) . Multiplicamos (2.2) por $\nabla \bar{u}_1$ na primeira igualdade e por $\nabla \bar{u}_2$ na segunda igualdade, integramos sobre $\mathbb{R}^d$ e tomamos a parte real

$$\Re \int_{\mathbb{R}^d} i \partial_t u_1 \nabla \bar{u}_1 dx = -\Re \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u_1 \nabla \bar{u}_1 dx - \mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx$$

e

$$\Re \int_{\mathbb{R}^d} i \partial_t u_2 \nabla \bar{u}_2 dx = -\Re \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u_2 \nabla \bar{u}_2 dx - \mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx.$$

Logo,

$$-\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_1 \nabla \bar{u}_1 dx = -\Re \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u_1 \nabla \bar{u}_1 dx - \mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx \quad (2.69)$$

e

$$-\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_2 \nabla \bar{u}_2 dx = -\Re \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u_2 \nabla \bar{u}_2 dx - \mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx. \quad (2.70)$$

Além disso, do sistema (2.2) também segue que

$$-i\partial_t \bar{u}_1 \nabla u_1 = -\Delta \bar{u}_1 \nabla u_1 - \mu_1 |u_1|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1 - \beta |u_2|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1$$

e

$$-i\partial_t \bar{u}_2 \nabla u_2 = -\Delta \bar{u}_2 \nabla u_2 - \mu_2 |u_2|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2 - \beta |u_1|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2.$$

Logo fazendo o mesmo processo anterior,

$$\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_1 \nabla u_1 dx = -\Re \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \bar{u}_1 \nabla u_1 dx - \mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1 dx$$

e

$$\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_2 \nabla u_2 dx = -\Re \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \bar{u}_2 \nabla u_2 dx - \mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2 dx,$$

Assim usando integração por partes temos

$$\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_1 \nabla u_1 dx = \Re \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u}_1 \Delta u_1 dx - \mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1 dx \quad (2.71)$$

e

$$\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_2 \nabla u_2 dx = \Re \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u}_2 \Delta u_2 dx - \mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2 dx \quad (2.72)$$

dessa forma, somando (2.69) e (2.71), logo (2.70) e (2.72), segue que

$$\begin{aligned} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_1 \nabla u_1 dx - \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_1 \nabla \bar{u}_1 dx &= -\mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_1 \nabla u_1 dx \\ &\quad - \mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_2 \nabla u_2 dx - \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_2 \nabla \bar{u}_2 dx &= -\mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 \bar{u}_2 \nabla u_2 dx \\ &\quad - \mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx - \beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_1 \nabla \bar{u}_1 dx - \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_1 \nabla u_1 dx = 2\mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx + 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx.$$

e

$$\Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_2 \nabla \bar{u}_2 dx - \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \bar{u}_2 \nabla u_2 dx = 2\mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx + 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx.$$

Como

$$\begin{aligned}
 \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \bar{u}_1 \partial_t u_1 - \nabla u_1 \partial_t \bar{u}_1) dx &= \Im \left(\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u}_1 \partial_t u_1 dx - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u_1 \partial_t \bar{u}_1 dx \right) \\
 &= \Im \left(\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u}_1 \partial_t u_1 dx + \int_{\mathbb{R}^d} u_1 \nabla \partial_t \bar{u}_1 dx \right) \\
 &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla \bar{u}_1 \partial_t u_1 dx + u_1 \partial_t \nabla \bar{u}_1) dx \\
 &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} (u_1 \nabla \bar{u}_1) dx \\
 &= \frac{d}{dt} \Im \int_{\mathbb{R}^d} (u_1 \nabla \bar{u}_1) dx,
 \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d}{dt} \Im \int_{\mathbb{R}^d} (u_1 \nabla \bar{u}_1) dx = 2\mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx + 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx.$$

e

$$\frac{d}{dt} \Im \int_{\mathbb{R}^d} (u_2 \nabla \bar{u}_2) dx = 2\mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx + 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx.$$

Assim

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left(\Im \int_{\mathbb{R}^d} (u_1 \nabla \bar{u}_1) dx + \Im \int_{\mathbb{R}^d} (u_2 \nabla \bar{u}_2) dx \right) \\
 &= 2\mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx + 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx \\
 &+ 2\mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx + 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx \\
 &= 2\mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx + 2\mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx \\
 &+ 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} (|u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 + |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2) dx
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left(\Im \int_{\mathbb{R}^d} (u_1 \nabla \bar{u}_1) dx + \Im \int_{\mathbb{R}^d} (u_2 \nabla \bar{u}_2) dx \right) \\
 &= 2\mu_1 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_1|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 dx + 2\mu_2 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u_2|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2 dx \\
 &+ 2\beta \Re \int_{\mathbb{R}^d} (|u_2|^2 u_1 \nabla \bar{u}_1 + |u_1|^2 u_2 \nabla \bar{u}_2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} \nabla (|u_1|^2)^2 dx + \frac{1}{2} \mu_2 \int_{\mathbb{R}^d} \nabla (|u_2|^2)^2 dx \\
 &+ \beta \int_{\mathbb{R}^d} \nabla (|u_1|^2 |u_2|^2) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} (P(u_1(t)) + P(u_2(t))) = 0.$$

O que implica que

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}(u_1(t), u_2(t)) = 0.$$

Em consequência

$$\mathcal{P}(u_1(t), u_2(t)) = \mathcal{P}(u_1(0), u_2(0)),$$

para toda $(u_1, u_2) \in H^2(\mathbb{R}^d) \times H^2(\mathbb{R}^d)$.

Por analogia ao caso da energia, podemos mostrar que $\mathcal{P}(u_1(t), u_2(t)) = \mathcal{P}(u_1(0), u_2(0))$ para toda solução em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$. Finalmente a igualdade (2.61) pode ser obtida de forma similar como nos casos anteriores, multiplicando o sistema por $\bar{u}_1$ e $\bar{u}_2$, obtendo assim que as massas escalares respeito a u_1 e u_2 são quantidades conservadas, de onde segue o resultado.

Isto mostra que as soluções obtidas pela teoria local satisfazem as leis de conservação (2.60)-(2.62).

3 Existência de Multi-Soliton para um sistema não-linear do tipo Schrödinger

Este capítulo é dedicado ao estudo do artigo (IANNI; LE COZ, 2014), com o propósito de exibir uma solução particular de (2.2) e estudar seu comportamento para tempos suficientemente grandes. Primeiramente estabeleceremos alguns resultados da equação escalar de Schrödinger não-linear. Imediatamente depois, definiremos os tipos de soluções que vamos estudar junto com suas propriedades mais importantes, e em seguida fazemos a apresentação de algumas estimativas com as quais será demonstrado o teorema principal.

3.1 Standing waves

Consideremos a equação escalar de Schrödinger

$$i\partial_t u + \Delta u + \mu|u|^2 u = 0. \quad (3.1)$$

Uma **standing wave** é uma solução de (3.1) da forma $u(t, x) = \frac{e^{it}}{\sqrt{\mu}} \Phi(x)$, onde Φ é uma solução de

$$-\Delta \Phi + \Phi - |\Phi|^2 \Phi = 0. \quad (3.2)$$

A existência e propriedades de soluções para equações do tipo (3.2) são bem conhecidas (veja (BERESTYCKI; LIONS, 1983a), (BERESTYCKI; LIONS, 1983b)). De fato, todas as soluções de (3.2) são suaves e exponencialmente decrescentes, no seguinte sentido.

Proposição 3.1.1. *Sejam $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Se $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfaz*

$$-\Delta u + au = b|u|^2 u \text{ em } H^{-1}(\mathbb{R}^d),$$

então as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. $u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^d)$ para todo $2 \leq p < \infty$. Em particular, $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$ e $|D^\beta u(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$ para todo $|\beta| \leq 2$.
2. Para todo $0 < \epsilon < 1$ temos $e^{\epsilon|x|}(|u(x)| + |\nabla u(x)|) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração. Ver Teorema 8.1.1 de (CAZENAVE, 2003, Pag. 256). □

3.2 Construção da solução multi-soliton

Começamos definindo um tipo de solução da equação

$$i\partial_t u + \Delta u + \mu_j |u|^2 u = 0, \quad (3.3)$$

para $j = 1, 2$, as quais serão muito usadas no desenvolvimento desta seção.

Definição 3.2.1. Para $j = 1, 2$, sejam $\omega_j > 0$, $v_j \in \mathbb{R}^d$, $\gamma_j \in \mathbb{R}$, $x_j \in \mathbb{R}^d$ e $\Phi_j \in H^1(\mathbb{R}^d)$ uma solução de

$$-\Delta\Phi_j + \Phi_j - |\Phi_j|^2\Phi_j = 0. \quad (3.4)$$

Um soliton é uma solução de (3.3) viajando na reta $x = x_j + v_j t$, dada por

$$R_j(t, x) = \sqrt{\frac{\omega_j}{\mu_j}} \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j)) e^{i(\omega_j t - \frac{|v_j|^2}{4}t + \frac{1}{2}v_j \cdot x + \gamma_j)}.$$

Note que se R_1 denota um soliton para (3.3) então $(R_1, 0)$ é trivialmente uma solução do sistema (2.2). Se R_2 é outro soliton de (3.3), então devido à interação não-trivial $\beta \neq 0$, o par (R_1, R_2) não tem razão para ser solução do sistema (2.2). No entanto, nosso objetivo será exibir soluções do sistema (2.2) que se comportam como um par de solitons (R_1, R_2) no infinito, desde que a velocidade relativa dos solitons sejam suficientemente grandes. Chamamos tais soluções de multi-solitons, mais precisamente.

Definição 3.2.2. Um multi-soliton é uma solução (u_1, u_2) de (2.2) para a qual existem $T_0 \in \mathbb{R}$ e um par de solitons (R_1, R_2) da equação (3.3) tal que (u_1, u_2) esta definida em $[T_0, +\infty)$ e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|(u_1(t), u_2(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} = 0.$$

Sejam $\omega_0 > 0$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^d$ e Φ_0 solução da equação (3.4). Consideremos R_0 o soliton correspondente, isto é,

$$R_0(t, x) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} \Phi_0(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0)) e^{i(\omega_0 t - \frac{|v_0|^2}{4}t + \frac{1}{2}v_0 \cdot x + \gamma_0)}. \quad (3.5)$$

Seja $\mathcal{S}_0 : H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido por:

$$\mathcal{S}_0(u) := E(u, \mu_0) + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) M(u) + v_0 \cdot P(u), \quad (3.6)$$

para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, sendo E, M e P definidos como em (2.54), (2.55) e (2.56).

Agora, definamos a ação linear $\mathcal{H}_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, por

$$\mathcal{H}_0(t, v) := \langle \mathcal{S}_0''(R_0(t))v, v \rangle. \quad (3.7)$$

Observação 3.2.3. Usando a definição de derivada de Gateaux, temos que para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, (veja Teorema A.0.1)

$$\mathcal{S}_0'(u) = -\Delta u + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) u + i v_0 \cdot \nabla u - \mu_0 |u|^2 u.$$

Note que R_0 definido em (3.5) satisfaz

$$-\Delta R_0 + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) R_0 + i v_0 \cdot \nabla R_0 - \mu_0 |R_0|^2 R_0 = 0,$$

desse modo, para t fixo, temos que $R_0(t, \cdot)$ é um ponto crítico de $\mathcal{S}_0$.

Ademais, a segunda derivada de Gateaux é dada por, (veja Teorema A.0.1)

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{S}_0''(R_0)v, v \rangle \\ &= \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|v\|_{L^2}^2 + v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{v} - 2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |v|^2 - \mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} \Re(R_0 \bar{v})^2. \end{aligned}$$

O proximo lema mostra uma propriedade muito importante que satisfaz a ação $\mathcal{H}_0$, a qual chamaremos de propriedade de coercividade.

Lema 3.2.4. *Sejam $\omega_0 > 0$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $x_0, v_0 \in \mathbb{R}^d$, Φ_0 solução de (3.4) e R_0 solução de (3.3) dado por (3.5), e $\mathcal{S}_0, \mathcal{H}_0$ os funcionais dados em (3.6) e (3.7). Então existem $c_0 > 0$, $\nu_0 \in \mathbb{N}$, e uma família de funções $\{\xi_0^k \in L^2(\mathbb{R}^d) : \|\xi_0^k\|_{L^2} = 1$, para $k = 1, \dots, \nu_0\}$, tais que para todo $t \in \mathbb{R}$ e toda $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$,*

$$c_0 \|v\|_{H^1}^2 \leq \mathcal{H}_0(t, v) + \sum_{k=1}^{\nu_0} \left(v, \tilde{\xi}_0^k \right)_2^2. \quad (3.8)$$

onde $\tilde{\xi}_0^k(t)$ denota as funções definidas por

$$\tilde{\xi}_0^k(t)(x) := \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} \xi_0^k(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0)) e^{-i(\omega_0 t - \frac{|v_0|^2}{4}t + \frac{1}{2}v_0 \cdot x + \gamma_0)}.$$

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar o resultado para $v \in H^2(\mathbb{R}^d)$. Em seguida usando a densidade de $H^2(\mathbb{R}^d)$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$, estenderemos o resultado para $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Com efeito, sejam $t \in \mathbb{R}$ e $v \in H^2(\mathbb{R}^d)$. Consideremos $z \in H^2(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$v(x) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\omega_0 t - \frac{|v_0|^2}{4}t + \frac{1}{2}v_0 \cdot x + \gamma_0)} z(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Pela Observação 3.2.3 temos que

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{S}_0''(R_0)v, v \rangle \\ &= \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|v\|_{L^2}^2 + v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{v} dx - 2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |v|^2 dx - \mu_0 \Re \int_{\mathbb{R}^d} (R_0 \bar{v})^2 dx \end{aligned}$$

Logo, substituindo v na igualdade acima, segue que (veja Corolário A.0.2) $\mathcal{H}_0(t, v) = \tilde{\mathcal{H}}_0(z)$, onde

$$\tilde{\mathcal{H}}_0(z) := \frac{1}{(\sqrt{\omega_0})^d} \left(\frac{\omega_0^2}{\mu_0} \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \frac{\omega_0^2}{\mu_0} \|z\|_{L^2}^2 - \frac{2\omega_0^2}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |z|^2 dx - \frac{\omega_0^2}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\Phi_0 \bar{z})^2 dx \right).$$

Note que $\tilde{\mathcal{H}}_0(z) = \frac{a}{(\sqrt{\omega_0})^d} \langle Lz, z \rangle$, com L é o operador linear dado por

$$Lw = -\Delta w + w - 2|\Phi_0|^2 w - \Phi_0^2 \bar{w}, \quad (3.9)$$

para toda $w \in H^2(\mathbb{R}^d)$ e $a = \omega_0^2/\mu_0$ uma constante.

Usando integração por partes é fácil mostrar que L é um operador auto-adjunto. Além disso, pela Proposição 3.1.1, temos que Φ_0 decai exponencialmente. Logo, L é uma perturbação compacta de $-\Delta + 1$ (veja Teorema A.0.3). Portanto, como $\sigma_{ess}(-\Delta + 1) = [1, +\infty)$ (veja (REED; SIMON, 1980, Pag.117)), o Teorema de Weyl's (REED; SIMON, 1980, Pag. 113) diz que $\sigma_{ess}(L) = \sigma_{ess}(-\Delta + 1) = [1, +\infty)$.

Agora, como

$$\begin{aligned} \langle Lw, w \rangle &= \|\nabla w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |w|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\Phi_0 \overline{w})^2 dx \\ &\geq \|w\|_{L^2}^2 - 3 \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |w|^2 dx \\ &\geq \|w\|_{L^2}^2 - 3C \|w\|_{L^2}^2 \\ &= (1 - 3C) \|w\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

então L é limitado inferiormente, portanto $\sigma(L)$, o espectro de L , também é limitado inferiormente. Assim, como $\sigma(L) \setminus \sigma_{ess}(L)$ consiste de autovalores isolados de multiplicidade finita segue que L tem um número finito de autovalores em $(-\infty, w']$, para todo $w' < 1$.

Consideremos $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\nu_0} \in \mathbb{R}$ os autovalores não positivos de L (contando multiplicidades) e sejam $\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^{\nu_0} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ suas autofunções correspondentes, tais que $\|\xi_0^k\|_{L^2} = 1$ para todo $k = 1, \dots, \nu_0$.

Pelo Teorema espectral (KATO, 1995, Pag.178) temos que

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \langle \{\xi_0^1, \xi_0^2, \dots, \xi_0^{\nu_0}\} \rangle \oplus \mathcal{P}$$

com $\mathcal{P}$ a imagem da projeção espectral correspondente à parte positiva do espectro do operador L . Como $z \in H^2(\mathbb{R}^d)$, então

$$z = c_1 \xi_0^1 + c_2 \xi_0^2 + \dots + \xi_0^{\nu_0} + p_0, \quad (3.10)$$

com $c_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, \nu_0$. Além disso, como $\sigma(L|_{\mathcal{P}})$ é limitado inferiormente por 0, então existe $c > 0$ tal que $\langle Lp, p \rangle \geq c \|p\|_{L^2}^2$ para todo $p \in \mathcal{P} \cap H^2(\mathbb{R}^d)$ (veja (KATO, 1995, Pag.278)). Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras na igualdade (3.10) chegamos a

$$\begin{aligned} \langle Lz, z \rangle &= \langle L(c_1 \xi_0^1 + c_2 \xi_0^2 + \dots + \xi_0^{\nu_0} + p_0), c_1 \xi_0^1 + c_2 \xi_0^2 + \dots + \xi_0^{\nu_0} + p_0 \rangle \\ &= c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_{\nu_0}^2 \lambda_{\nu_0} + \langle Lp_0, p_0 \rangle \\ &\geq c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_{\nu_0}^2 \lambda_{\nu_0} + c \|p_0\|_{L^2}^2 \\ &= c_1^2 \lambda_1 + c_2^2 \lambda_2 + \dots + c_{\nu_0}^2 \lambda_{\nu_0} + c (\|z\|_{L^2}^2 - c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_{\nu_0}^2) \\ &= c \|z\|_{L^2}^2 + (\lambda_1 - c) c_1^2 + (\lambda_2 - c) c_2^2 + \dots + (\lambda_{\nu_0} - c) c_{\nu_0}^2 \\ &\geq c \|z\|_{L^2}^2 + (\lambda_1 - c) (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_{\nu_0}^2), \end{aligned}$$

pois L é auto-adjunto e $\langle \xi_0^j, \xi_0^k \rangle = 0$ para $j \neq k$.

Como $c_k = (z, \xi_0^k)_2$ para todo $k = 1, \dots, \nu_0$, obtemos

$$\langle Lz, z \rangle + C_1 \sum_{k=1}^{\nu_0} (z, \xi_0^k)_2^2 \geq c \|z\|_{L^2}^2,$$

com $C_1 = c - \lambda_1 > 0$. Além disso, sabemos que

$$\langle Lz, z \rangle = \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \|z\|_{L^2}^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |z|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\Phi_0 \bar{z})^2 dx.$$

Logo,

$$\langle Lz, z \rangle + 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |z|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\Phi_0 \bar{z})^2 dx = \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \|z\|_{L^2}^2.$$

Desse modo, como Φ_0 é limitada,

$$\begin{aligned} \|z\|_{H^1}^2 &= \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \|z\|_{L^2}^2 \\ &= \langle Lz, z \rangle + 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |z|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\Phi_0 \bar{z})^2 dx \\ &\leq \langle Lz, z \rangle + C \|z\|_{L^2}^2 \\ &\leq \langle Lz, z \rangle + C \left(\langle Lz, z \rangle + C_1 \sum_{k=1}^{\nu_0} (z, \xi_0^k)_2^2 \right) \\ &\leq C \left(\langle Lz, z \rangle + \sum_{k=1}^{\nu_0} (z, \xi_0^k)_2^2 \right), \end{aligned}$$

isto é,

$$\|z\|_{H^1}^2 \leq (\sqrt{\omega_0})^d C \tilde{\mathcal{H}}_0(z) + C \sum_{k=1}^{\nu_0} (z, \xi_0^k)_2^2.$$

Agora, usando mudança de variáveis temos

$$\|z\|_{H^1}^2 = (\sqrt{\omega_0})^d \left(\|\tilde{z}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\omega_0} \|\nabla \tilde{z}\|_{L^2}^2 \right),$$

onde $\tilde{z}(x) = z(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0))$. Como $\|\tilde{z}\|_{H^1}^2 \leq \max\{1, \omega_0\} \left(\|\tilde{z}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\omega_0} \|\nabla \tilde{z}\|_{L^2}^2 \right)$ temos

$$(\sqrt{\omega_0})^d \|\tilde{z}\|_{H^1}^2 \leq (\sqrt{\omega_0})^d C \tilde{\mathcal{H}}_0(z) + (\sqrt{\omega_0})^d C \sum_{k=1}^{\nu_0} (\tilde{z}, \bar{\xi}_0^k)_2^2, \quad (3.11)$$

onde $\bar{\xi}_0^k(x) = \xi_0^k(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0))$.

Agora, pela igualdade (A.1) temos

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|_{L^2}^2 &= \frac{\omega_0 |v_0|^2}{4\mu_0} \|\tilde{z}\|_{L^2}^2 - \frac{\omega_0^{3/2}}{\mu_0} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{z} \nabla \tilde{z} + \frac{\omega_0^2}{\mu_0} \|\nabla \tilde{z}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C (\|\tilde{z}\|_{L^2}^2 + \|\nabla \tilde{z}\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

Se denotamos por $e^{\pm i(\cdot)} := e^{\pm i(\omega_0 t - \frac{|v_0|^2}{4} t + \frac{1}{2} v_0 \cdot x + \gamma_0)}$, usando (3.11) temos que

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1}^2 &\leq C \|\tilde{z}\|_{H^1}^2 \\ &\leq C \tilde{\mathcal{H}}_0(z) + C \sum_{k=1}^{\nu_0} (\tilde{z}, \bar{\xi}_0^k)_2^2 \\ &\leq K_0 \mathcal{H}(t, v) + K_0 \sum_{k=1}^{\nu_0} \left(\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \mathbf{z}, \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\mu_0}} e^{-i(\cdot)} \bar{\xi}_0^k \right)_2^2 \\ &\leq K_0 \mathcal{H}(t, v) + K_0 \sum_{k=1}^{\nu_0} (v, \tilde{\xi}_0^k)_2^2. \end{aligned}$$

Tomando $c_0 = \frac{1}{K_0}$, obtemos

$$c_0 \|v\|_{H^1}^2 \leq \mathcal{H}(t, v) + \sum_{k=1}^{\nu_0} (v, \tilde{\xi}_0^k)_2^2.$$

Isso mostra a desigualdade desejada se $v \in H^2(\mathbb{R}^d)$. Vamos mostrar que

$$c_0 \|w\|_{H^1}^2 \leq \mathcal{H}(t, w) + \sum_{k=1}^{\nu_0} (w, \tilde{\xi}_0^k)_2^2,$$

para toda $w \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Com efeito, seja $w \in H^1(\mathbb{R}^d)$, então pela densidade de $H^2(\mathbb{R}^d)$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$, temos que existe $\{w_n\} \subset H^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $w_n \rightarrow w$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo,

$$c_0 \|w_n\|_{H^1}^2 \leq \mathcal{H}(t, w_n) + \sum_{k=1}^{\nu_0} (w_n, \tilde{\xi}_0^k)_2^2. \quad (3.12)$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ na desigualdade (3.12), obtemos

$$c_0 \|w\|_{H^1}^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(t, w_n) + \sum_{k=1}^{\nu_0} (w, \tilde{\xi}_0^k)_2^2.$$

Assim, só precisamos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(t, w_n) = \mathcal{H}(t, w)$. Lembremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, w_n) &= \|\nabla w_n\|_{L^2}^2 + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|w_n\|_{L^2}^2 + v_0 \Im \int_{\mathbb{R}^d} w_n \nabla \bar{w}_n - 2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |w_n|^2 - \mu_0 \Re \int_{\mathbb{R}^d} (R_0 \bar{w}_n)^2 \end{aligned}$$

Como $w_n \rightarrow w$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ quando $n \rightarrow \infty$, então é claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla w_n\|_{L^2}^2 = \|\nabla w\|_{L^2}^2 \quad (3.13)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|w_n\|_{L^2}^2 = \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|w\|_{L^2}^2. \quad (3.14)$$

Além disso, aplicando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Im \int_{\mathbb{R}^d} w_n \nabla \bar{w}_n dx &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \bar{w}_n \nabla w_n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Re i \int_{\mathbb{R}^d} \bar{w}_n \nabla w_n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (i \nabla w_n, w_n)_2 dx \\ &= (i \nabla w, w)_2 \\ &= \Re i \int_{\mathbb{R}^d} \bar{w} \nabla w dx \\ &= -\Re i \int_{\mathbb{R}^d} w \nabla \bar{w} dx \\ &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} w \nabla \bar{w} dx, \end{aligned}$$

de onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} w_n \nabla \bar{w}_n dx = v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} w \nabla \bar{w} dx. \quad (3.15)$$

Ainda mais, pela Proposição 3.1.1 temos que $R_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e dessa maneira

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |w_n|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |w|^2 dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 (|w_n|^2 - |w|^2) dx \right| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^d} ||w_n|^2 - |w|^2| dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^d} (|w_n| + |w|)(||w_n| - |w||) dx \\ &\leq C (\| |w_n| + |w| \|_{L^2}) (\|w_n - w\|_{L^2}) \\ &\leq C \|w_n - w\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Como $w_n \rightarrow w$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ quando $n \rightarrow \infty$, resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |w_n|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |w|^2 dx. \quad (3.16)$$

Similarmente, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} R_0^2 \bar{w}_n^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} R_0^2 \bar{w}^2 dx. \quad (3.17)$$

Combinando (3.13)-(3.17), segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}(t, w_n) = \mathcal{H}(t, w),$$

desse modo mostramos que a desigualdade (3.8) vale para toda $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, o que mostra o resultado. $\square$

Dadas as anteriores considerações procedemos para enunciar o principal teorema desta dissertação.

Teorema 3.2.5. *Para $j = 1, 2$, sejam $\omega_j > 0$, $x_j, v_j \in \mathbb{R}^d$, $\gamma_j \in \mathbb{R}$ e Φ_j solução de*

$$-\Delta \Phi_j + \Phi_j - |\Phi_j|^2 \Phi_j = 0, \quad \Phi_j \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Consideremos os solitons

$$R_j(t, x) = \sqrt{\frac{\omega_j}{\mu_j}} \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - vt - x_j)) e^{i(\omega_j t - \frac{|v_j|^2 t}{4} + \frac{1}{2} v_j \cdot x + \gamma_j)}, \text{ para } j = 1, 2.$$

Existe $v_\#$ tal que se $v_\star > v_\#$, então existem $T_0 \in \mathbb{R}$ e um multi-soliton (u_1, u_2) solução de (2.2) definida em $[T_0, +\infty)$ tal que, para todo $t \in [T_0, +\infty)$

$$\|(u_1(t), u_2(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \quad (3.18)$$

onde $v_\star := |v_1 - v_2|$ e $\omega_\star := \frac{1}{4} \min\{\omega_1, \omega_2\}$.

A estratégia para mostrar este resultado é resolver o problema de valor final associado ao sistema (2.2) com dado final sendo um par de solitons no tempo T_n , onde $\{T_n\}$ é uma sequência crescente convergindo ao infinito. Estas soluções são chamadas de soluções aproximadas. Em síntese, a demonstração depende de dois passos principais. Primeiro, mostramos que as soluções aproximadas satisfazem a estimativa (3.18) em $[T_0, T_n]$ com T_0 independente de n . Em seguida, mostramos que a sequência de dados iniciais, em T_0 , é compacta. Portanto, podemos extrair um dado inicial dando origem a uma solução do sistema (2.2) satisfazendo a conclusão do Teorema 3.2.5.

Por conseguinte, seja $\{T_n\}$ uma sequência crescente em $\mathbb{R}$ de tempos tais que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja (u_1^n, u_2^n) solução do sistema (2.2) definida no intervalo $(\tilde{T}_n, T_n]$ e tal que o dado final satisfaz que $(u_1^n(T_n), u_2^n(T_n)) = (R_1(T_n), R_2(T_n))$.

Proposição 3.2.6 (Estimativas Uniformes). *Existe $v_\sharp$ tal que se $v_\star > v_\sharp$, então o seguinte se verifica. Existem $T_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$ cada solução aproximada (u_1^n, u_2^n) está definida em $[T_0, T_n]$ e para todo $t \in [T_0, T_n]$*

$$\|(u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \quad (3.19)$$

Por enquanto vamos assumir a Proposição 3.2.6 para fazer a demonstração do Teorema 3.2.5, depois dedicaremos todos os esforços à demonstração dessa proposição e com isso teríamos provado a existência de uma solução do sistema (2.2) cujo comportamento no infinito é comparável com um par de solitons (R_1, R_2) .

Como T_n vai para $+\infty$, a sequência (u_1^n, u_2^n) fornece uma melhor aproximação do multi-soliton. O que falta mostrar é a convergência dessa sequência. De acordo com a boa colocação local do sistema (2.2) e as estimativas uniformes, a questão principal é obter a convergência da sequência de dados iniciais $(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0))$, o qual é o objetivo da seguinte proposição.

Proposição 3.2.7. *Existe $(u_1^0, u_2^0) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que, a menos de uma subsequência, $(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) \rightarrow (u_1^0, u_2^0)$ fortemente em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$ para todo $0 \leq s < 1$ quando $n \rightarrow +\infty$.*

Para demonstrar esta proposição precisamos do seguinte lema.

Lema 3.2.8 ($L_2(\mathbb{R}^d)$ - Compacidade). *Seja $\delta > 0$. Existe $r_\delta > 0$ tal que para todo n suficientemente grande,*

$$\int_{|x| > r_\delta} (|u_1^n(T_0)|^2 + |u_2^n(T_0)|^2) dx \leq \delta.$$

Demonstração. Consideremos n suficientemente grande tal que a estimativa (3.19) seja satisfeita. Seja $T_\delta \in [T_0, T_n]$ tal que $e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star T_\delta} \leq \frac{\delta}{8}$. Então, pela Proposição 3.2.6, temos

$$\|(u_1^n(T_\delta), u_2^n(T_\delta)) - (R_1(T_\delta), R_2(T_\delta))\|_{H^1 \times H^1}^2 \leq e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star T_\delta} \leq \frac{\delta}{8}. \quad (3.20)$$

A Proposição 3.1.1 implica que R_1 e R_2 decaem exponencialmente, assim podemos garantir a existência de $\rho_\delta > 0$ tal que

$$\int_{|x|>\rho_\delta} (|R_1(T_\delta)|^2 + |R_2(T_\delta)|^2) dx \leq \frac{\delta}{8}. \quad (3.21)$$

Também, da desigualdade (3.20) segue que

$$\|(u_1^n(T_\delta), u_2^n(T_\delta)) - (R_1(T_\delta), R_2(T_\delta))\|_{L^2(|x|>\rho_\delta) \times L^2(|x|>\rho_\delta)}^2 \leq \frac{\delta}{8}.$$

Assim a estimativa (3.21) implica que

$$\|(u_1^n(T_\delta), u_2^n(T_\delta))\|_{L^2(|x|>\rho_\delta) \times L^2(|x|>\rho_\delta)} \leq 2\sqrt{\frac{\delta}{8}},$$

isto é,

$$\int_{|x|>\rho_\delta} (|u_1^n(T_\delta)|^2 + |u_2^n(T_\delta)|^2) dx \leq \frac{\delta}{2}. \quad (3.22)$$

Nossa intenção é mostrar que a desigualdade acima se verifica com T_0 no lugar de T_δ .

Consideremos $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função de corte de classe $C^1(\mathbb{R})$ tal que $\tau(s) = 0$ para $s \leq 0$, $\tau(s) = 1$ para $s \geq 1$, $\tau(s) \in [0, 1]$ e $|\tau'(s)| \leq 2$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Seja $k_\delta > 0$ (a qual será definida mais para frente) e definimos a função

$$V(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1^n(t)|^2 + |u_2^n(t)|^2) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx.$$

Como, para $j = 1, 2$,

$$\frac{d}{dt} |u_j^n(t)|^2 = \bar{u}_j^n(t) \partial_t u_j^n(t) + \partial_t \bar{u}_j^n(t) u_j^n(t) = 2\Re(\bar{u}_j^n(t) \partial_t u_j^n(t)),$$

então diferenciando no tempo obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d}{dt} (|u_1^n(t)|^2 + |u_2^n(t)|^2) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (2\Re(\bar{u}_1^n(t) \partial_t u_1^n(t)) + 2\Re(\bar{u}_2^n(t) \partial_t u_2^n(t))) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (2\Re(\bar{u}_1^n(t) \partial_t u_1^n(t) + \bar{u}_2^n(t) \partial_t u_2^n(t))) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= \Re \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{u}_1^n(t) \partial_t u_1^n(t) + \bar{u}_2^n(t) \partial_t u_2^n(t)) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx. \end{aligned}$$

Agora, vamos estimar $\Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_1^n(t) \partial_t u_1^n(t) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx$. De fato, como (u_1^n, u_2^n) é solução do sistema (2.2), então

$$i \partial_t u_1^n + \Delta u_1^n + \mu_1 |u_1^n|^2 u_1^n + \beta |u_2^n|^2 u_1^n = 0. \quad (3.23)$$

Logo multiplicando a igualdade (3.23) por $i\bar{u}_1^n$ obtemos

$$-\bar{u}_1^n \partial_t u_1^n + i\bar{u}_1^n \Delta u_1^n + i\mu_1 |u_1^n|^4 + i\beta |u_2^n|^2 |u_1^n|^2 = 0.$$

Assim, fazendo integração por partes,

$$\begin{aligned} \Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_1^n \partial_t u_1^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx &= \Re \int_{\mathbb{R}^d} i(\bar{u}_1^n \Delta u_1^n) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &\quad + \Re \int_{\mathbb{R}^d} i\mu_1 |u_1^n|^4 \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &\quad + \Re \int_{\mathbb{R}^d} i\beta |u_2^n|^2 |u_1^n|^2 \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= -\Im \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{u}_1^n \Delta u_1^n) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &\quad - \Im \int_{\mathbb{R}^d} \mu_1 |u_1^n|^4 \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &\quad - \Im \int_{\mathbb{R}^d} \beta |u_2^n|^2 |u_1^n|^2 \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= -\Im \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{u}_1^n \Delta u_1^n) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u_1^n \cdot \nabla \left(\bar{u}_1^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Visto que

$$\begin{aligned} \nabla \left(\bar{u}_1^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \right) &= \nabla \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \bar{u}_1^n + \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \nabla \bar{u}_1^n \\ &= \frac{x}{k_\delta |x|} \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \bar{u}_1^n + \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \nabla \bar{u}_1^n, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_1^n \partial_t u_1^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_1^n|^2 \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{k_\delta} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u_1^n \cdot \bar{u}_1^n \frac{x}{|x|} \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= \frac{1}{k_\delta} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_1^n \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_1^n \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_1^n \partial_t u_1^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx = \frac{1}{k_\delta} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_1^n \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_1^n \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx. \quad (3.24)$$

repetindo o processo acima, mas trocando u_1^n por u_2^n , temos que

$$\Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_2^n \partial_t u_2^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx = \frac{1}{k_\delta} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_2^n \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_2^n \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx. \quad (3.25)$$

A Proposição 3.2.6 implica que $\|(u_1^n(T_\delta), u_2^n(T_\delta))\|_{H^1 \times H^1}$ é limitada independentemente de n e t , isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\sup_{n > n_0} \sup_{t \in [T_0, T_n]} \|(u_1^n(t), u_2^n(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq 1. \quad (3.26)$$

Então por (3.24) e (3.25) segue que, para $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \left| \Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_j^n \partial_t u_j^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \right| &= \left| \frac{1}{k_\delta} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_j^n \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_j^n \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{k_\delta} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \bar{u}_j^n \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_j^n \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{k_\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{u}_j^n| \left| \frac{x}{|x|} \cdot \nabla u_j^n \right| \left| \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{k_\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{u}_j^n| |\nabla u_j^n| \left| \tau' \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) \right| dx \\ &\leq \frac{2}{k_\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |\bar{u}_j^n| |\nabla u_j^n| dx \\ &\leq \frac{2}{k_\delta} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u_j^n|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u_j^n|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \frac{2}{k_\delta} \|u_j^n\|_{L^2} \|\nabla u_j^n\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{k_\delta} (\|u_j^n\|_{L^2}^2 + \|\nabla u_j^n\|_{L^2}^2) \\ &\leq \frac{1}{k_\delta} \|u_j^n\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Logo, usando a estimativa anterior e a desigualdade (3.26) segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} V(t) \right| &= \left| \Re \int_{\mathbb{R}^d} (\bar{u}_1^n \partial_t u_1^n + \bar{u}_2^n \partial_t u_2^n) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \right| \\ &\leq \left| \Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_1^n \partial_t u_1^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \right| + \left| \Re \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u}_2^n \partial_t u_2^n \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{k_\delta} (\|u_1^n\|_{H^1}^2 + \|u_2^n\|_{H^1}^2) \\ &= \frac{1}{k_\delta} \|(u_1^n, u_2^n)\|_{H^1 \times H^1}^2 \\ &\leq \frac{1}{k_\delta}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$ e $t \in [T_0, T_n]$. Agora, escolha k_δ tal que $\frac{T_\delta - T_0}{k_\delta} \leq \frac{\delta}{4}$. Então,

$$V(T_0) - V(T_\delta) = \int_{T_0}^{T_\delta} V'(t) dt \leq \frac{T_\delta - T_0}{k_\delta} \leq \frac{\delta}{4}. \quad (3.27)$$

Pela desigualdade (3.22) e a definição de τ temos

$$\begin{aligned} V(T_\delta) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1^n(T_\delta)|^2 + |u_2^n(T_\delta)|^2) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{|x| > \rho_\delta} (|u_1^n(T_\delta)|^2 + |u_2^n(T_\delta)|^2) dx \\ &\leq \frac{\delta}{4}. \end{aligned}$$

Desta forma, a estimativa (3.27) implica $V(T_0) \leq V(T_\delta) + \frac{\delta}{4} \leq \frac{\delta}{2}$. Por fim, seja $r_\delta := k_\delta + \rho_\delta$ (note que r_δ é independente de n), de onde, pela definição de τ ,

$$\begin{aligned} \int_{|x| > r_\delta} (|u_1^n(T_0)|^2 + |u_2^n(T_0)|^2) dx &= \int_{|x| > r_\delta} (|u_1^n(T_0)|^2 + |u_2^n(T_0)|^2) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1^n(T_0)|^2 + |u_2^n(T_0)|^2) \tau \left(\frac{|x| - \rho_\delta}{k_\delta} \right) dx \\ &= 2V(T_0) \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

mostrando o resultado. $\square$

Agora, faremos a demonstração da Proposição 3.2.7.

Demonstração da Proposição 3.2.7. Seja T_0 como na Proposição 3.2.6. Pela desigualdade (3.19) temos que $(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0))$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, e sendo este um espaço de Hilbert, segue que, a menos de uma subsequência, existe $(u_1^0, u_2^0) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) \rightharpoonup (u_1^0, u_2^0) \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d). \quad (3.28)$$

Nossa intenção é mostrar que além de convergir fracamente em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, a sequência $(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0))$, a menos de uma subsequência, converge fortemente no espaço $L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$. Com efeito, seja $\delta > 0$. Como $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_{loc}^2(\mathbb{R}^d) \times L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$, então temos que $(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0))$ (a menos de subsequência) converge fortemente em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d) \times L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$. Logo pela convergência fraca dada em (3.28) temos que o limite da sequência é o mesmo, isto é,

$$(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) \rightarrow (u_1^0, u_2^0) \quad \text{em} \quad L_{loc}^2(\mathbb{R}^d) \times L_{loc}^2(\mathbb{R}^d). \quad (3.29)$$

Consideremos $r_\delta > 0$ como no Lema 3.2.8. Então por (3.29) existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N_1$, obtemos

$$\int_{|x| \leq r_\delta} (|u_1^n(T_0) - u_1^0|^2 + |u_2^n(T_0) - u_2^0|^2) dx < \frac{\delta}{2}. \quad (3.30)$$

Por outro lado, o Lema 3.2.8 garante a existência de $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N_2$,

$$\int_{|x| > r_\delta} (|u_1^n(T_0)|^2 + |u_2^n(T_0)|^2) dx < \frac{\delta}{8}. \quad (3.31)$$

Além disso, como

$$(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) \rightharpoonup (u_1^0, u_2^0) \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d),$$

segue que

$$(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) \rightharpoonup (u_1^0, u_2^0) \quad \text{em} \quad L^2(|x| > r_\delta) \times L^2(|x| > r_\delta),$$

de tal forma que o Teorema 1.1.6 e a desigualdade (3.31) implicam

$$\begin{aligned} \|(u_1^0, u_2^0)\|_{L^2(|x| > r_\delta) \times L^2(|x| > r_\delta)} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0))\|_{L^2(|x| > r_\delta) \times L^2(|x| > r_\delta)} \\ &\leq \sqrt{\frac{\delta}{8}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ou seja,

$$\int_{|x| > r_\delta} (|u_1^0|^2 + |u_2^0|^2) dx < \frac{\delta}{8}. \quad (3.33)$$

Finalmente seja $N \in \mathbb{N}$ com $N > \max\{N_1, N_2\}$, então combinando (3.30)-(3.33) resulta

$$\begin{aligned} \|(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) - (u_1^0, u_2^0)\|_{L^2 \times L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1^n(T_0) - u_1^0|^2 + |u_2^n(T_0) - u_2^0|^2) dx \\ &= \int_{|x| \leq r_\delta} |u_1^n(T_0) - u_1^0|^2 dx + \int_{|x| \leq r_\delta} |u_2^n(T_0) - u_2^0|^2 dx \\ &\quad + \int_{|x| > r_\delta} |u_1^n(T_0) - u_1^0|^2 dx + \int_{|x| > r_\delta} |u_2^n(T_0) - u_2^0|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\|(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) - (u_1^0, u_2^0)\|_{L^2 \times L^2}^2 \\ &\leq 2 \int_{|x| > r_\delta} (|u_1^n(T_0)|^2 + |u_2^n(T_0)|^2) dx + 2 \int_{|x| > r_\delta} (|u_1^0|^2 + |u_2^0|^2) dx + \frac{\delta}{2} \\ &\leq 2 \left(\frac{\delta}{8} \right) + 2 \left(\frac{\delta}{8} \right) + \frac{\delta}{2} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) - (u_1^0, u_2^0)\|_{L^2 \times L^2} \rightarrow 0. \quad (3.34)$$

Como as sequências $(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0))$ e (u_1^0, u_2^0) são limitados em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, então usando interpolação e a convergência (3.34) temos que para cada $s \in [0, 1)$ existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$\|(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) - (u_1^0, u_2^0)\|_{H^s \times H^s} \leq C^\theta \|(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) - (u_1^0, u_2^0)\|_{L^2 \times L^2}^{1-\theta},$$

o que implica que

$$(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) \rightarrow (u_1^0, u_2^0) \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d), \quad 0 \leq s < 1.$$

□

Agora, mostraremos como as Proposições 3.2.6 e 3.2.7 implicam o teorema principal.

Demonstração do Teorema 3.2.5. A Proposição 3.2.6 garante a existência de $v_\sharp$ tal que se $v_\star > v_\sharp$, então existem $T_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$ e todo $t \in [T_0, T_n]$,

$$\|(u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \quad (3.35)$$

Seja (u_1^0, u_2^0) como obtido pela Proposição 3.2.7. A boa colocação local do sistema (2.2) em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, para $1/2 < s < 1$, garante a existência de uma solução (u_1, u_2) do sistema (2.2) com condição inicial $(u_1(T_0), u_2(T_0)) = (u_1^0, u_2^0)$ definida num intervalo $[T_0, T^\star]$, onde $T^\star$ é o tempo maximal de existência da solução.

Vamos mostrar que $T^\star = +\infty$ e que (u_1, u_2) verifica a estimativa do Teorema 3.2.5. De fato, suponha $T^\star < \infty$. Então, usando a Proposição 3.2.7 temos que

$$(u_1^n(T_0), u_2^n(T_0)) \rightarrow (u_1^0, u_2^0) \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d), \quad 0 \leq s < 1.$$

Como o sistema (2.2) é bem colocado em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, então pela dependência contínua em relação ao dado inicial temos que, para $t \in [T_0, T^\star]$,

$$(u_1^n(t), u_2^n(t)) \rightarrow (u_1(t), u_2(t)) \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d), \quad 1/2 < s < 1.$$

Agora, pela desigualdade (3.35) e a Proposição 3.1.1 obtemos (tomando n suficientemente grande tal que $T_n > T^\star$) que $(u_1^n(t), u_2^n(t))$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ para todo $t \in [T_0, T^\star]$, então a menos de uma subsequência temos que $(u_1^n(t), u_2^n(t))$ converge fracamente em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$. Mas como a sequência converge fortemente em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, para $1/2 < s < 1$, podemos concluir usando interpolação que para todo $t \in [T_0, T^\star]$,

$$(u_1^n(t), u_2^n(t)) \rightarrow (u_1(t), u_2(t)) \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d).$$

Logo

$$\begin{aligned} \|(u_1(t), u_2(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|(u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \\ &\leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t} \end{aligned}$$

Assim, existe $v_\sharp$ tal que se $v_\star > v_\sharp$, então existem $T_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$ e todo $t \in [T_0, T^\star]$,

$$\|(u_1(t), u_2(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \quad (3.36)$$

Como $T^* < +\infty$, então pela desigualdade (3.36) obtemos que $(u_1(t), u_2(t))$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ para todo $t \in [T_0, T^*)$.

Novamente como o sistema (2.2) é bem posto em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, então existe solução deste sistema satisfazendo as condições do Teorema 2.2.1, mas como $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d) \subset H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$ então temos que pela unicidade da solução em $H^s(\mathbb{R}^d) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, a solução dada em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, coincidem com (u_1, u_2) em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$. Portanto, como $T^* < +\infty$, a condição de blow up alternativo implica

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \|(u_1(t), u_2(t))\|_{H^1 \times H^1} = +\infty,$$

o que contradiz a limitação de $(u_1(t), u_1(t))$ em $H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ para todo $t \in [T_0, T^*)$. Portanto devemos ter que $T^* = +\infty$. Agora, precisamos mostrar que (u_1, u_2) verifica a estimativa do Teorema 3.2.5. De fato, seja $N \geq n_0$, então da mesma maneira como chegamos à desigualdade (3.36) para $t \in [T_0, T^*)$, podemos obter

$$\|(u_1(t), u_2(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_*} v_* t},$$

para todo $t \in [T_0, T_N]$. Da mesma forma obtemos que

$$\|(u_1(t), u_2(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_*} v_* t},$$

para todo $t \in [T_N, T_{N+1}]$. Seguindo este processo obtemos assim

$$\|(u_1(t), u_2(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_*} v_* t},$$

para todo $t \in [T_0, \infty)$.

□

3.3 Estimativas uniformes

Esta última parte é dedicada à demonstração da Proposição 3.2.6. Ela será baseada em um argumento de **bootstrap**. De fato, a partir da definição do dado final $(u_1^n(T_n), u_2^n(T_n))$ e a continuidade de (u_1^n, u_2^n) no tempo, segue que a desigualdade (3.19) se mantém em um intervalo $[t^\dagger, T_n]$ para $t^\dagger$ suficientemente próximo a T_n . Então a seguinte proposição mostra que podemos realmente melhorar a estimativa 3.19, deixando espaço suficiente para estender o intervalo no qual a estimativa original se verifica.

Proposição 3.3.1. *Existe $v_\sharp$ tal que se $v_* > v_\sharp$, então existem $T_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n \geq n_0$, toda solução aproximada (u_1^n, u_2^n) está definida em $[T_0, T_n]$. Além disso, sejam $t_0 \in [T_0, T_n]$ e $n \geq n_0$. Se, para todo $t \in [t_0, T_n]$, temos*

$$\|(u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_*} v_* t}, \quad (3.37)$$

então para todo $t \in [t_0, T_n]$,

$$\|(u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\omega_*} v_* t}.$$

Antes de prosseguir, indicamos como a Proposição 3.3.1 é usada para demonstrar a Proposição 3.2.6.

Demonstração da Proposição 3.2.6. Sejam T_0 , n_0 e $v_\#$ dados pela Proposição 3.3.1. Fixemos $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$ e assumamos que $v_\star > v_\#$. A Proposição 3.3.1 implica que as soluções aproximadas estão definidas em $[T_0, T_n]$, no seguinte sentido,

$$(u_1^n, u_2^n) \in C([T_0, T_n], H^1(\mathbb{R}^d)) \times C([T_0, T_n], H^1(\mathbb{R}^d)).$$

Além disso temos pela Proposição 3.1.1 que o par (R_1, R_2) é contínuo em relação ao tempo. Logo como $(u_1^n(T_n), u_2^n(T_n)) = (R_1(T_n), R_2(T_n))$, então para todo t suficientemente próximo de T_n (pela esquerda) segue que

$$\begin{aligned} & \| (u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t)) \|_{H^1 \times H^1} \\ & \leq \| (u_1^n(t), u_2^n(t)) - (u_1^n(T_n), u_2^n(T_n)) \|_{H^1 \times H^1} + \| (R_1(T_n), R_2(T_n)) - (R_1(t), R_2(t)) \|_{H^1 \times H^1} \\ & \leq \| u_1^n(t) - u_1^n(T_n) \|_{H^1} + \| u_2^n(t) - u_2^n(T_n) \|_{H^1} + \| R_1^n(t) - R_1^n(T_n) \|_{H^1} + \| R_2^n(t) - R_2^n(T_n) \|_{H^1} \\ & \leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \end{aligned}$$

Seja

$$t_\# := \inf \{ t_\dagger \in [T_0, T_n] : (3.19) \text{ é satisfeita para todo } t \in [t_\dagger, T_n] \}.$$

Pela escolha de $t_\#$ obtemos que $t_\# < T_n$. Assim para demonstrar a Proposição 3.2.6 só precisamos mostrar que $t_\# = T_0$. Assumamos que $t_\# > T_0$. Então pela Proposição 3.3.1 para todo $t \in [t_\#, T_n]$ temos que

$$\| (u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t)) \|_{H^1 \times H^1} \leq \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.$$

Consequentemente,

$$\| (u_1^n(t_\#), u_2^n(t_\#)) - (R_1(t_\#), R_2(t_\#)) \|_{H^1 \times H^1} \leq \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t_\#}.$$

Novamente pelo argumento acima, a continuidade de (u_1^n, u_2^n) implica que para t suficientemente próximo de $t_\#$ (pela esquerda),

$$\| (u_1^n(t), u_2^n(t)) - (R_1(t), R_2(t)) \|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t},$$

o que contradiz a minimalidade de $t_\#$. Assim, se deve ter que $t_\# = T_0$. $\square$

Antes de fazer a demonstração a Proposição 3.3.1, ainda precisamos de alguns resultados preliminares. Vamos considerar n fixo. No que segue denotaremos (u_1^n, u_2^n) por (u_1, u_2) . Por outro lado, seja $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$(u_1, u_2) = (R_1, R_2) + (\varepsilon_1, \varepsilon_2). \quad (3.38)$$

Consideremos $t_0 < T_n$ e assumamos a hipótese **bootstrap**

$$\| (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \|_{H^1 \times H^1} \leq e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \text{ para todo } t \in [t_0, T_n]. \quad (3.39)$$

Para $j = 1, 2$ denotamos por $\mathcal{S}_j$ e $\mathcal{H}_j$ os funcionais definidos a partir dos soliton R_j , do mesmo modo que $\mathcal{S}_0$ e $\mathcal{H}_0$ foram definidos para R_0 (veja (3.6)).

Agora, seja $\mathcal{S}$ o funcional definido para cada $(w_1, w_2) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ por:

$$\mathcal{S}(w_1, w_2) := \mathcal{S}_1(w_1) + \mathcal{S}_2(w_2) \quad (3.40)$$

e $\mathcal{H}$ o funcional definido para cada $(t, (w_1, w_2)) \in \mathbb{R} \times H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$ por

$$\mathcal{H}(t, (w_1, w_2)) := \mathcal{H}_1(t, w_1) + \mathcal{H}_2(t, w_2).$$

O próximo lema é consequência direta do Lema 3.2.4.

Lema 3.3.2. *Existe $c_\star > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $(w_1, w_2) \in H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)$, temos*

$$c_\star \|(w_1, w_2)\|_{H^1 \times H^1}^2 \leq \mathcal{H}(t, (w_1, w_2)) + \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^{\nu_j} (w_j, \tilde{\xi}_j^k(t))_2^2,$$

onde $(\tilde{\xi}_j^k)$ são dados para $j = 1, 2$ pelo Lema 3.2.4.

Para demonstrarmos a Proposição 3.3.1, além das considerações feitas acima, precisamos dos seguintes lemas.

Lema 3.3.3 ($L^2(\mathbb{R}^d)$ -Controle). *Seja $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dado por (3.38) e assuma a hipótese (3.39). Então existe $C > 0$, independente de $v_\star$, tal que, para todo $t \in [t_0, T_n]$,*

$$\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{L^2 \times L^2}^2 \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}.$$

Lema 3.3.4. *Assuma a hipótese (3.39). Então existe $T_0 > 0$ dependendo somente de v_1, v_2 , com v_1, v_2 como no Teorema 3.2.5, tal que se $t_0 > T_0$ existe $C > 0$ independente de n e $v_\star$ tal que, para todo $t \in [t_0, T_n]$,*

$$|\mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) - \mathcal{S}(u_1(T_n), u_2(T_n))| \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}.$$

Por enquanto vamos assumir os lemas acima para demonstrar a Proposição 3.3.1.

Demonstração da Proposição 3.3.1. Seja $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dado por (3.38), assuma a hipótese (3.39) e que $t_0 > T_0$, onde T_0 é dado pelo Lema 3.3.4. Então, para $n \in \mathbb{N}$ fixo, podemos assumir pela boa colocação do sistema (2.2) que (u_1, u_2) está definida para cada $t \in [T_0, T_n]$, pois o problema de dado final associado ao sistema (2.2)

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \Delta u_1 + (\mu_1 |u_1|^2 + \beta |u_2|^2) u_1 = 0, \\ i\partial_t u_2 + \Delta u_2 + (\mu_2 |u_2|^2 + \beta |u_1|^2) u_2 = 0, \\ (u_1(T_n), u_2(T_n)) = (R_1(T_n), R_2(T_n)), \end{cases}$$

é também bem posto (é equivalente a resolver nosso sistema para trás). Isso garante a existência das soluções (u_1, u_2) , as quais satisfazem

$$(u_1, u_2) \in C((\tilde{T}_n, T_n], H^1(\mathbb{R}^d)) \times C((\tilde{T}_n, T_n], H^1(\mathbb{R}^d)).$$

No Capítulo 2 mostramos que existe $M > 0$ tal que $\|(u_1(t), u_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq M$ para todo $t \in [\tilde{T}_n, T_n]$, onde $\tilde{T}_n = \tilde{T}_n(M)$. Portanto, pela Proposição 1.4.2 temos que (u_1, u_2) pode ser estendida unicamente a $[T_0, T_n]$. Daí que

$$(u_1, u_2) \in C([T_0, T_n], H^1(\mathbb{R}^d)) \times C([T_0, T_n], H^1(\mathbb{R}^d)).$$

Neste sentido (u_1, u_2) está definida em $[T_0, T_n]$.

Por outro lado fixemos $t \in [t_0, T_n]$ e seja $v_\#$ suficientemente grande tal que

$$\sqrt{\frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\#}} \leq \frac{1}{2},$$

onde C será determinado mais adiante. Suponha $v_\star > v_\#$. Do Lema 3.3.2 segue que existe $c_\star > 0$ tal que

$$c_\star \|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1 \times H^1}^2 \leq \mathcal{H}(t, (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))) + \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^{\nu_j} (\varepsilon_j(t), \tilde{\xi}_j^k(t))_2^2. \quad (3.41)$$

Agora, pelo desenvolvimento de Taylor do funcional $\mathcal{S}$ temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) &= \mathcal{S}(R_1(t) + \varepsilon_1(t), R_2(t) + \varepsilon_2(t)) \\ &= \mathcal{S}(R_1(t), R_2(t)) + \mathcal{S}'(R_1(t), R_2(t)) \cdot (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \\ &\quad + \langle \mathcal{S}''(R_1(t), R_2(t)) \cdot (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)), (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \rangle \\ &\quad + o\left(\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)}^3\right). \end{aligned}$$

Como R_1, R_2 são pontos criticos de $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ respectivamente, obtemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) &= \mathcal{S}(R_1(t), R_2(t)) + \mathcal{H}(t, (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))) \\ &\quad + o\left(\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \times H^1(\mathbb{R}^d)}^3\right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Do Lema 3.3.4 segue que

$$|\mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) - \mathcal{S}(u_1(T_n), u_2(T_n))| \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \quad (3.43)$$

Além disso, como $(u_1(T_n), u_2(T_n)) = (R_1(T_n), R_2(T_n))$ e os solitons R_1, R_2 satisfazem as leis de conservação então

$$\mathcal{S}(u_1(T_n), u_2(T_n)) = \mathcal{S}(R_1(T_n), R_2(T_n)) = \mathcal{S}(R_1(t), R_2(t)). \quad (3.44)$$

Por outro lado, da hipótese bootstrap (3.39) temos que existe $C > 0$ tal que

$$o\left(\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1 \times H^1}^3\right) \leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \quad (3.45)$$

Assim, usando as desigualdades (3.42)-(3.45) e tomando T_0 suficientemente grande tal que, para $t > t_0 > T_0$,

$$e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t} \leq \frac{1}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}(t, (\varepsilon_1, \varepsilon_2))| &= |\mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) - \mathcal{S}(R_1(t), R_2(t)) - o(\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1 \times H^1}^3)| \\
&\leq |\mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) - \mathcal{S}(R_1(t), R_2(t))| + o(\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1 \times H^1}^3) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t} + C e^{-3\sqrt{\omega_\star v_\star} t} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t},
\end{aligned}$$

isto é,

$$|\mathcal{H}(t, (\varepsilon_1, \varepsilon_2))| \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}, \text{ para todo } t > t_0 > T_0. \quad (3.46)$$

Também, para $j = 1, 2$, sejam $c_j := \max\{\|\xi_j^k\|_{L^2}^2 : k = 1, \dots, \nu_j\}$, e $c := \max\{c_j : j = 1, 2\}$. Então, pelo Lema 3.3.3,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^{\nu_j} (\varepsilon_j(t), \tilde{\xi}_j^k(t))_2^2 \right| &\leq \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^{\nu_j} |(\varepsilon_j(t), \tilde{\xi}_j^k(t))_2|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\nu_1} |(\varepsilon_1(t), \tilde{\xi}_1^k(t))_2|^2 + \sum_{k=1}^{\nu_2} |(\varepsilon_2(t), \tilde{\xi}_2^k(t))_2|^2 \\
&\leq (\nu_1)C \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2}^2 + (\nu_2)C \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2}^2 \\
&\leq C \|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{L^2 \times L^2}^2 \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}.
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\left| \sum_{j=1,2} \sum_{k=1}^{\nu_j} (\varepsilon_j(t), \tilde{\xi}_j^k(t))_2^2 \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}. \quad (3.47)$$

Portanto, usando as estimativas (3.41), (3.46) e (3.47) resulta que

$$\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1 \times H^1}^2 \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t},$$

para todo $t > t_0 > T_0$. Como $\sqrt{\frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}}} \leq \sqrt{\frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\sharp}}} \leq \frac{1}{2}$, temos que

$$\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{H^1 \times H^1} \leq \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\omega_\star v_\star} t}.$$

O que mostra o resultado desejado. $\square$

Antes de demonstrarmos os Lemas 3.3.3 e 3.3.4, precisamos da seguinte estimativa sobre a interação de dois solitons.

Lema 3.3.5. *Existe $C > 0$ dependente de $\Phi_1, \Phi_2, \omega_1, \omega_2, \mu_1, \mu_2$, como no Teorema 3.2.5, porém não de v_1, v_2 tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, temos que*

$$\| |R_1(t)| |R_2(t)| \|_{L^2} \leq C e^{-(\frac{3}{2})\sqrt{\omega_\star v_\star} t}$$

e

$$\|(|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|)(|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|)\|_{L^2} \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-(\frac{3}{2})\sqrt{\omega_*}v_*t},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $j \in \{1, 2\}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Como Φ_j decai exponencialmente (Proposição 3.1.1), sabemos que para $0 < \eta < 1$ existe $C = C(\Phi_j) > 0$ tal que

$$|\Phi_j(x)| + |\nabla \Phi_j(x)| \leq C e^{-\eta|x|}.$$

Pela Definição 3.2.1 temos

$$R_j(t, x) = \sqrt{\frac{\omega_j}{\mu_j}} \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j)) e^{i(\omega_j t - \frac{|v_j|^2}{4}t + \frac{1}{2}v_j \cdot x + \gamma_j)},$$

e

$$\begin{aligned} \nabla R_j(t, x) &= \frac{1}{2} v_j \sqrt{\frac{\omega_j}{\mu_j}} \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j)) e^{i(\omega_j t - \frac{|v_j|^2}{4}t + \frac{1}{2}v_j \cdot x + \gamma_j)} \\ &\quad + \frac{(\sqrt{\omega_j})^2}{\sqrt{\mu_j}} \nabla \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j)) e^{i(\omega_j t - \frac{|v_j|^2}{4}t + \frac{1}{2}v_j \cdot x + \gamma_j)}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |R_j(t, x)| + |\nabla R_j(t, x)| &\leq |C \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j))| \\ &\quad + |C v_j \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j))| \\ &\quad + |C \nabla \Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j))| \\ &\leq C(1 + |v_j|) e^{-\eta \sqrt{\omega_j}|x - v_j t - x_j|}, \end{aligned}$$

onde $C = C(\Phi_j, \omega_j, \mu_j)$. Logo

$$\begin{aligned} &(|R_1(t, x)| + |\nabla R_1(t, x)|)(|R_2(t, x)| + |\nabla R_2(t, x)|) \\ &\leq C(1 + |v_1|)(1 + |v_2|) e^{-\eta \sqrt{\omega_1}|x - v_1 t - x_1|} \cdot e^{-\eta \sqrt{\omega_2}|x - v_2 t - x_2|} \\ &\leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\eta \sqrt{\min\{\omega_1, \omega_2\}}(|x - v_1 t - x_1| + |x - v_2 t - x_2|)}. \end{aligned}$$

Seja $0 < \delta < \eta$. Como

$$|v_1 t - v_2 t| \leq |x - v_1 t| + |x - v_2 t|$$

e

$$|x - v_1 t| - |x_1| + |x - v_2 t| - |x_2| \leq |x - v_1 t - x_1| + |x - v_2 t - x_2|,$$

então

$$\begin{aligned} &(|R_1(t, x)| + |\nabla R_1(t, x)|)(|R_2(t, x)| + |\nabla R_2(t, x)|) \\ &\leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\delta \sqrt{\min\{\omega_1, \omega_2\}}(|x - v_1 t - x_1| + |x - v_2 t - x_2|)} \\ &\quad \cdot e^{-(\eta - \delta) \sqrt{\min\{\omega_1, \omega_2\}}(|x - v_1 t - x_1| + |x - v_2 t - x_2|)} \\ &\leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\delta \sqrt{\min\{\omega_1, \omega_2\}}(|x - v_1 t - x_1| + |x - v_2 t - x_2|)} e^{-(\eta - \delta) \sqrt{\min\{\omega_1, \omega_2\}}|v_1 t - v_2 t|} \end{aligned}$$

onde $C = C(\Phi_j, \omega_j, \mu_j, x_j) > 0$. Escolhendo $\eta = \frac{7}{8}$, $\delta = \frac{1}{8}$ e lembrando as definições de $\omega_\star = \frac{1}{4} \min\{\omega_1, \omega_2\}$ e $v_\star = |v_1 - v_2|$, obtemos

$$\begin{aligned} & (|R_1(t, x)| + |\nabla R_1(t, x)|)(|R_2(t, x)| + |\nabla R_2(t, x)|) \\ & \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\omega_\star}(|x-v_1t-x_1|+|x-v_2t-x_2|)} e^{-(\frac{3}{2})\sqrt{\omega_\star}v_\star t}, \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} & \|(|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|)(|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|)\|_{L^2}^2 \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} |(|R_1(t, x)| + |\nabla R_1(t, x)|)(|R_2(t, x)| + |\nabla R_2(t, x)|)|^2 dx \\ & \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-3\sqrt{\omega_\star}v_\star t} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\omega_\star}(|x-v_1t-x_1|+|x-v_2t-x_2|)} dx \\ & = C(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-3\sqrt{\omega_\star}v_\star t} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\omega_\star}|x|} dx \\ & = C(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-3\sqrt{\omega_\star}v_\star t} \|e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\omega_\star}|\cdot|}\|_{L^2}^2 \\ & \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-3\sqrt{\omega_\star}v_\star t}. \end{aligned}$$

Desta forma

$$\|(|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|)(|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|)\|_{L^2} \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\frac{3}{2}\sqrt{\omega_\star}v_\star t},$$

mostrando a segunda desigualdade. Agora, para demonstrar a primeira desigualdade, prosseguimos do mesmo modo acima, para obter

$$|R_j(t, x)| \leq C e^{-\eta\sqrt{\omega_j}|x-v_jt-x_j|}.$$

Novamente, tomando $\eta = \frac{7}{8}$ e $\delta = \frac{1}{8}$, temos

$$\begin{aligned} |R_1(t, x)||R_2(t, x)| & \leq C e^{-\eta\sqrt{\{\omega_1, \omega_2\}}(|x-v_1t-x_1|+|x-v_2t-x_2|)} \\ & \leq C e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\omega_\star}(|x-v_1t-x_1|+|x-v_2t-x_2|)} \cdot e^{-(\frac{3}{2})\sqrt{\omega_\star}v_\star t}, \end{aligned}$$

e daí,

$$\|R_1(t)||R_2(t)\|_{L^2} \leq C e^{-\frac{3}{2}\sqrt{\omega_\star}v_\star t}.$$

□

Por fim, vamos fazer a demonstração dos Lemas 3.3.3 e 3.3.4. Para obter o Lema 3.3.3 adotamos a seguinte estratégia. Primeiro escrevemos o sistema satisfeito por $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Então, diferenciamos no tempo as $L^2(\mathbb{R}^d)$ -massas de ε_1 e ε_2 , e limitamos o resultado com a expressão $e^{-\sqrt{\omega_\star}v_\star t}$. A integração no tempo finalmente nos permite ganhar o fator extra $\frac{1}{\sqrt{\omega_\star}v_\star}$.

Demonstração do Lema 3.3.3. Seja $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dado por (3.38) e assumamos a hipótese (3.39). Note que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ satisfaz a equação

$$i\partial_t(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \mathcal{L}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \mathcal{N}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \mathcal{F} = 0, \quad (3.48)$$

onde $\mathcal{L}$ denota a parte linear em $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\mathcal{N}$ a parte não-linear e $\mathcal{F}$ o termo forçante. Mais precisamente,

$$\mathcal{L}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := (L_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2), L_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)), \quad \mathcal{N}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := (N_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2), N_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)),$$

$$\mathcal{F} := \beta(|R_2|^2 R_1, |R_1|^2 R_2),$$

com

$$\begin{aligned} L_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \Delta \varepsilon_1 + (2\mu_1 |R_1|^2 + \beta |R_2|^2) \varepsilon_1 + \mu_1 R_1^2 \bar{\varepsilon}_1 + \beta(R_1 \bar{R}_2 \varepsilon_2 + R_1 R_2 \bar{\varepsilon}_2), \\ L_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \Delta \varepsilon_2 + (2\mu_2 |R_2|^2 + \beta |R_1|^2) \varepsilon_2 + \mu_2 R_2^2 \bar{\varepsilon}_2 + \beta(\bar{R}_1 R_2 \varepsilon_2 + R_1 R_2 \bar{\varepsilon}_1), \\ N_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \mu_1(\bar{R}_1 \varepsilon_1^2 + 2R_1 |\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_1|^2 \varepsilon_1) + \beta(R_2 \bar{\varepsilon}_2 \varepsilon_1 + \bar{R}_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + R_1 |\varepsilon_2|^2 + |\varepsilon_2|^2 \varepsilon_1) \end{aligned}$$

e

$$N_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mu_2(\bar{R}_2 \varepsilon_2^2 + 2R_2 |\varepsilon_2|^2 + |\varepsilon_2|^2 \varepsilon_2) + \beta(R_1 \bar{\varepsilon}_1 \varepsilon_2 + \bar{R}_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + R_2 |\varepsilon_1|^2 + |\varepsilon_1|^2 \varepsilon_2).$$

De fato, mostremos que

$$i\partial_t \varepsilon_1 + L_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + N_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \beta |R_2|^2 R_1 = 0.$$

Como R_1 é solução de

$$i\partial_t u + \Delta u + \mu_1 |u|^2 u = 0,$$

então

$$\begin{aligned} & i\partial_t \varepsilon_1 + L_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + N_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \beta |R_2|^2 R_1 \\ &= i\partial_t u_1 - i\partial_t R_1 + \Delta u_1 - \Delta R_1 + 2\mu_1 |R_1|^2 u_1 - 2\mu_1 |R_1|^2 R_1 + \beta |R_2|^2 u_1 \\ &\quad - \beta |R_2|^2 R_1 + \mu_1 R_1^2 \bar{u}_1 - \mu_1 R_1^2 \bar{R}_1 + \beta R_1 \bar{R}_2 u_2 - \beta |R_2|^2 R_1 + \beta R_1 R_2 \bar{u}_2 \\ &\quad - \beta |R_2|^2 R_1 + \mu_1 \bar{R}_1 u_1^2 - 2\mu_1 |R_1|^2 u_1 + \mu_1 |R_1|^2 R_1 + 2\mu_1 |u_1|^2 R_1 \\ &\quad - 2\mu_1 |R_1|^2 u_1 - 2\mu_1 R_1^2 \bar{u}_1 + 2\mu_1 |R_1|^2 R_1 + \mu_1 |u_1|^2 u_1 - \mu_1 |u_1|^2 R_1 \\ &\quad - \mu_1 u_1^2 \bar{R}_1 + \mu_1 |R_1|^2 u_1 - \mu_1 |u_1|^2 R_1 + \mu_1 R_1^2 \bar{u}_1 + \mu_1 |R_1|^2 u_1 - \mu_1 |R_1|^2 R_1 \\ &\quad + \beta R_2 \bar{u}_2 u_1 - \beta R_2 \bar{u}_2 R_1 - \beta |R_2|^2 u_1 + \beta |R_2|^2 R_1 + \beta \bar{R}_2 u_2 u_1 - \beta \bar{R}_2 u_2 R_1 \\ &\quad - \beta |R_2|^2 u_1 + \beta |R_2|^2 R_1 + \beta R_1 |u_2|^2 - \beta R_1 u_2 \bar{R}_2 - \beta R_1 R_2 \bar{u}_2 + \beta |R_2|^2 R_1 \\ &\quad + \beta |u_2|^2 u_1 - \beta |u_2|^2 R_1 - \beta u_2 \bar{R}_2 u_1 + \beta u_2 \bar{R}_2 R_1 - \beta R_2 \bar{u}_2 u_1 + \beta R_2 \bar{u}_2 R_1 \\ &\quad + \beta |R_2|^2 u_1 - \beta |R_2|^2 R_1 + \beta |R_2|^2 R_1 \\ &= -i\partial_t R_1 - \Delta R_1 - \mu_1 |R_1|^2 R_1 = 0. \end{aligned}$$

De forma semelhante se pode mostrar que

$$i\partial_t \varepsilon_2 + L_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + N_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \beta|R_1|^2 R_2 = 0.$$

O seguinte argumento consiste em estimar a derivada com respeito ao tempo da $L^2(\mathbb{R}^d)$ -massa de ε_1 . Com efeito, seja $t \in [t_0, T_n]$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} M(\varepsilon_1(t)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\|\varepsilon_1(t)\|_{L^2}^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1(t), \varepsilon_1(t))_{L^2} \\ &= (\partial_t \varepsilon_1(t), \varepsilon_1(t))_{L^2} \\ &= (iL_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) + iN_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) + i\beta|R_2(t)|^2 R_1(t), \varepsilon_1(t))_{L^2} \\ &= \Re \int_{\mathbb{R}^d} (L_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) + N_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) + \beta|R_2(t)|^2 R_1(t) \bar{\varepsilon}_1(t)) \, dx \\ &= -\Im \int_{\mathbb{R}^d} (L_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) + N_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) + \beta|R_2(t)|^2 R_1(t) \bar{\varepsilon}_1(t)) \, dx. \end{aligned}$$

A ideia é estimar cada um dos termos da igualdade acima. De fato, Pela definição de L_1 temos

$$\begin{aligned} & \Im \int_{\mathbb{R}^d} L_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) \, dx \\ &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta \varepsilon_1(t) \bar{\varepsilon}_1(t) + (2\mu_1|R_1(t)|^2 + \beta|R_2(t)|^2) \varepsilon_1(t) \bar{\varepsilon}_1(t)) \, dx \\ &\quad + \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_1 R_1(t)^2 \bar{\varepsilon}_1(t) + \beta(R_1(t) \bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t) + R_1(t) R_2(t) \bar{\varepsilon}_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t)) \, dx. \end{aligned}$$

Portanto fazendo integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} & \Im \int_{\mathbb{R}^d} L_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) \, dx \\ &= -\Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \varepsilon_1(t) \nabla \bar{\varepsilon}_1(t) \, dx + \Im \int_{\mathbb{R}^d} (2\mu_1|R_1(t)|^2 + \beta|R_2(t)|^2) \varepsilon_1(t) \bar{\varepsilon}_1(t) \, dx \\ &\quad + \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_1 R_1(t)^2 \bar{\varepsilon}_1(t) + \beta(R_1(t) \bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t) + R_1(t) R_2(t) \bar{\varepsilon}_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t)) \, dx \\ &= -\Im \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varepsilon_1(t)|^2 \, dx + \Im \int_{\mathbb{R}^d} (2\mu_1|R_1(t)|^2 + \beta|R_2(t)|^2) |\varepsilon_1(t)|^2 \, dx \\ &\quad + \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_1 R_1(t)^2 \bar{\varepsilon}_1(t) + \beta(R_1(t) \bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t) + R_1(t) R_2(t) \bar{\varepsilon}_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t)) \, dx \\ &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_1 R_1(t)^2 \bar{\varepsilon}_1(t)^2 + \beta(R_1(t) \bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t) \bar{\varepsilon}_1(t) + R_1(t) R_2(t) \bar{\varepsilon}_2(t) \bar{\varepsilon}_1(t))) \, dx. \end{aligned}$$

Assumindo a hipótese (3.39) e usando o fato de R_j decair exponencialmente para cada $j = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned}
& \left| \Im \int_{\mathbb{R}^d} L_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) dx \right| \\
&= \left| \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\mu_1 R_1(t)^2 \bar{\varepsilon}_1(t)^2 + \beta(R_1(t) \bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t) \bar{\varepsilon}_1(t) + R_1(t) R_2(t) \bar{\varepsilon}_2(t) \bar{\varepsilon}_1(t))) dx \right| \\
&\leq \mu_1 \int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t)^2 \bar{\varepsilon}_1(t)^2| dx + |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |(R_1(t) \bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t) \bar{\varepsilon}_1(t))| dx \\
&\quad + |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t) R_2(t) \bar{\varepsilon}_2(t) \bar{\varepsilon}_1(t)| dx \\
&\leq C \left(\|R_1(t)\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_1(t)|^2 dx + \|R_1(t)\|_{L^\infty} \|R_2(t)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)| |\varepsilon_1(t)| dx \right) \\
&\leq C (\|R_1(t)\|_{L^\infty}^2 \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2 + \|R_1(t)\|_{L^\infty} \|R_2(t)\|_{L^\infty} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2}) \\
&\leq C (\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2 + \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1} \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}) \\
&\leq C (\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2) \\
&\leq C e^{-2\sqrt{\omega_*} v_* t},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left| \Im \int_{\mathbb{R}^d} L_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) dx \right| \leq C e^{-2\sqrt{\omega_*} v_* t}, \text{ para todo } t \in [t_0, T_n]. \quad (3.49)$$

Além disso, como $d \leq 3$, $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^d)$ e $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^d)$, temos

$$\begin{aligned}
& \left| \Im \int_{\mathbb{R}^d} N_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) dx \right| \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t)| |\varepsilon_1(t)|^3 dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_1(t)|^4 dx + \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)| |\varepsilon_2(t)| |\varepsilon_1(t)|^2 dx \right) \\
&\quad + C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t)| |\varepsilon_2(t)|^2 |\varepsilon_1(t)| dx + \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 |\varepsilon_1(t)|^2 dx \right) \\
&\leq C (\|R_1(t)\|_{L^\infty} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^3}^3 + \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4}^4 + \|R_2(t)\|_{L^\infty} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4}^2) \\
&\quad + C (\|R_1(t)\|_{L^\infty} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^4}^2 + \|\varepsilon_2(t)\|_{L^4}^2 \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4}^2) \\
&\leq C (\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^3 + \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^4 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1} \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2) \\
&\quad + C (\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1} \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2 \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2) \\
&\leq C (\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^3 + \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^4 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2 + \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^4) \\
&\quad + C (\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^4 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^4 + \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^4) \\
&\leq C (\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^3 + \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^4 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2 + \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2 + \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^4) \\
&\leq C (e^{-3\sqrt{\omega_*} v_* t} + e^{-4\sqrt{\omega_*} v_* t} + e^{-2\sqrt{\omega_*} v_* t}) \\
&\leq C e^{-2\sqrt{\omega_*} v_* t}.
\end{aligned}$$

Dai,

$$\left| \Im \int_{\mathbb{R}^d} N_1(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)) \bar{\varepsilon}_1(t) dx \right| \leq C e^{-2\sqrt{\omega_*} v_* t}, \text{ para todo } t \in [t_0, T_n]. \quad (3.50)$$

Finalmente vamos estimar o termo forçante. Combinando o Lema 3.3.5 com a desigualdade (3.39) obtemos

$$\begin{aligned}
\left| \Im \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 R_1(t) \bar{\varepsilon}_1(t) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 |R_1(t)| |\varepsilon_1(t)| dx \\
&\leq \|R_2(t)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)| |R_1(t)| |\varepsilon_1(t)| dx \\
&\leq C \|R_1(t)\|_{L^2} \|R_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2} \\
&\leq C e^{-(\frac{5}{2})\sqrt{\omega_\star} v_\star t},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\left| \Im \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 R_1(t) \bar{\varepsilon}_1(t) dx \right| \leq C e^{-(\frac{5}{2})\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \text{ para todo } t \in [t_0, T_n]. \quad (3.51)$$

Dessa maneira, pelas desigualdades (3.49)-(3.51)

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} M(\varepsilon_1(t)) \right| \leq C e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t} \text{ para todo } t \in [t_0, T_n].$$

Integrando no tempo e lembrando que $\varepsilon_1(T_n) = u_1(T_n) - R_1(T_n) = 0$, chegamos a

$$\begin{aligned}
M(\varepsilon_1(t)) &\leq |M(\varepsilon_1(t))| \\
&= \left| \int_t^{T_n} \frac{\partial}{\partial s} M(\varepsilon_1(s)) ds \right| \\
&\leq \int_t^{T_n} \left| \frac{\partial}{\partial s} M(\varepsilon_1(s)) \right| ds \\
&\leq C \int_t^{T_n} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star s} ds \\
&\leq C \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star T_n} - \frac{1}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t} \right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$M(\varepsilon_1(t)) \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \text{ para todo } t \in [t_0, T_n].$$

Fazendo o mesmo processo anterior para ε_2 vemos que

$$M(\varepsilon_2(t)) \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t}$$

e conseqüentemente,

$$\|(\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \text{ para todo } t \in [t_0, T_n].$$

□

Para terminar esta seção só resta mostrar o Lema 3.3.4. A demonstração deste resultado é semelhante ao Lema 3.3.3, com a diferença que aqui vamos estimar três quantidades, a massa, o momento e a energia.

Demonstração do Lema 3.3.4. Suponha a condição (3.39) e seja $t \in [t_0, T_n]$.

Pela definição de $\mathcal{S}$ (veja (3.40)),

$$\begin{aligned} & |\mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) - \mathcal{S}(u_1(T_n), u_2(T_n))| \\ &= |(\mathcal{S}_1(u_1(t)) - \mathcal{S}_1(u_1(T_n))) + (\mathcal{S}_2(u_2(t)) - \mathcal{S}_2(u_2(T_n)))| \\ &\leq |(E(u_1(t), \mu_1) - E(u_1(T_n), \mu_1)) + (E(u_2(t), \mu_2) - E(u_2(T_n), \mu_2))| \\ &\quad + \left(\omega_1 + \frac{|v_1|^2}{4}\right) |M(u_1(t)) - M(u_1(T_n))| + \left(\omega_2 + \frac{|v_2|^2}{4}\right) |M(u_2(t)) - M(u_2(T_n))| \\ &\quad + |v_1(P(u_1(t)) - P(u_1(T_n))) + v_2(P(u_2(t)) - P(u_2(T_n)))|. \end{aligned}$$

Neste sentido, nosso objetivo é controlar cada termo na expressão acima.

Como as massas escalares são conservadas pelo fluxo de (2.2) (veja Capítulo 2) e (u_1, u_2) é solução de (2.2), então

$$\left(\omega_1 + \frac{|v_1|^2}{4}\right) |M(u_1(t)) - M(u_1(T_n))| + \left(\omega_2 + \frac{|v_2|^2}{4}\right) |M(u_2(t)) - M(u_2(T_n))| = 0. \quad (3.52)$$

Agora vamos estimar os termos que envolvem o momento. Como o momento total (2.59) é uma quantidade conservada (veja Capítulo 2), conseguimos que $\mathcal{P}(u_1(t), u_2(t)) = \mathcal{P}(u_1(T_n), u_2(T_n))$, de onde

$$P(u_1(t)) - P(u_1(T_n)) = P(u_2(T_n)) - P(u_2(t)).$$

Assim, só precisamos estimar

$$|(v_1 - v_2)P(u_1(t)) - P(u_1(T_n))| = v_\star |P(u_1(t)) - P(u_1(T_n))|. \quad (3.53)$$

Agora diferenciamos no tempo t o momento para u_1 .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} P(u_1(t)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Im \int_{\mathbb{R}^d} u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t) dx \\ &= \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} (u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t)) dx \\ &= \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u_1(t) \cdot \nabla \bar{u}_1(t) + u_1(t) \cdot \partial_t \nabla \bar{u}_1(t)) dx \\ &= \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_1(t) \cdot \nabla \bar{u}_1(t) dx - \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u_1(t) \cdot \partial_t \bar{u}_1(t) dx \\ &= \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_1(t) \cdot \nabla \bar{u}_1(t) dx + \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u}_1(t) \cdot \partial_t u_1(t) dx \\ &= \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_1(t) \cdot \nabla \bar{u}_1(t) dx \end{aligned}$$

Usando o fato de que (u_1, u_2) satisfaz (2.2) e fazendo integração por partes, Note que na oitava igualdade usamos o fato de que, fazendo integração por partes,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} P(u_1(t)) \\
&= \Im \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t u_1(t) \cdot \nabla \bar{u}_1(t) dx \\
&= \Im \int_{\mathbb{R}^d} i \Delta u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t) dx + \mu_1 \Im \int_{\mathbb{R}^d} i |u_1(t)|^2 u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t) dx \\
&\quad + \beta \Im \int_{\mathbb{R}^d} i |u_2(t)|^2 u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t) dx \\
&= \beta \Im \int_{\mathbb{R}^d} i |u_2(t)|^2 u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t) dx \\
&= \frac{\beta}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} i |u_2(t)|^2 \nabla (|u_1(t)|^2) dx \\
&= -\frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_2(t)|^2 \nabla (|u_1(t)|^2) dx.
\end{aligned}$$

Pois,

$$\Im \int_{\mathbb{R}^d} i \Delta u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t) dx = 0$$

e

$$\mu_1 \Im \int_{\mathbb{R}^d} i |u_1(t)|^2 u_1(t) \nabla \bar{u}_1(t) dx = 0.$$

Com o exposto acima, mostramos que

$$\frac{\partial}{\partial t} P(u_1(t)) = -\frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_2(t)|^2 \nabla (|u_1(t)|^2) dx. \quad (3.54)$$

Lembrando que $u_j = \varepsilon_j + R_j$ para $j = 1, 2$ substituindo na equação (3.54) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} P(u_1(t)) \\
&= -\frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u_2(t)|^2 \nabla (|u_1(t)|^2) dx \\
&= -\frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t) + R_2(t)|^2 \nabla (|\varepsilon_1(t) + R_1(t)|^2) dx \\
&= -\frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 \nabla (|R_1(t)|^2) dx - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2 |R_2(t)|^2 \nabla (\Re(R_1(t) \varepsilon_1(t))) dx \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 \nabla (|\varepsilon_1(t)|^2) dx - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2 \Re(\bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t)) \nabla (|R_1(t)|^2) dx \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 4 \Re(\bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t)) \nabla (\Re(\bar{R}_1(t) \varepsilon_1(t))) dx - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2 \Re(\bar{R}_2(t) \varepsilon_2(t)) \nabla (|\varepsilon_1(t)|^2) dx \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 \nabla (|R_1(t)|^2) dx - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2 |\varepsilon_2(t)|^2 \nabla (\Re(\bar{R}_1(t) \varepsilon_1(t))) dx \\
&\quad - \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 \nabla (|\varepsilon_1(t)|^2) dx.
\end{aligned}$$

Vamos estimar cada termo usando a desigualdade (3.39) e o Lema 3.3.5.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 \nabla(|R_1(t)|^2) dx \right| &\leq \frac{|\beta|}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 |\nabla(|R_1(t)|^2)| dx \\
&\leq \frac{|\beta|}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2|R_2(t)|^2 |\nabla R_1(t)| |R_1(t)| dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} (|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|)^2 (|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|)^2 dx \\
&= C \|(|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|)(|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&\leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-3\sqrt{\omega_*} v_* t}.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 \nabla|\varepsilon_1(t)|^2 dx \right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 |\nabla|\varepsilon_1(t)|^2| dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 |\nabla\varepsilon_1(t)| |\varepsilon_1(t)| dx \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 |\varepsilon_2(t)|^2 |\varepsilon_1(t)|^2 dx \right)^{1/2} \|\nabla\varepsilon_1(t)\|_{L^2} \\
&\leq C \|\varepsilon_2(t)\|_{L^6}^2 \|\varepsilon_1(t)\|_{L^6} \|\nabla\varepsilon_1(t)\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Como $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^d)$ temos

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 \nabla|\varepsilon_1(t)|^2 dx \right| \\
&\leq C \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2 \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1} \|\nabla\varepsilon_1(t)\|_{H^1} \\
&\leq C(\|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2 + \|\nabla\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2)(\|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2 + \|\nabla\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2) \\
&\leq C e^{-4\sqrt{\omega_*} v_* t}.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Para cada $j = 1, 2$, pelo fato de R_j decair exponencialmente, segue que

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2|R_2(t)|^2 \nabla(\Re(R_1(t)\varepsilon_1(t))) dx \right| + \left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2\Re(\overline{R_2}(t)\varepsilon_2(t)) \nabla(|R_1(t)|^2) dx \right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 |\nabla(\Re(R_1(t)\varepsilon_1(t)))| dx + C \int_{\mathbb{R}^d} |\Re(\overline{R_2}(t)\varepsilon_2(t))| |\nabla(|R_1(t)|^2)| dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 (|\nabla R_1(t)| |\varepsilon_1(t)| + |\nabla\varepsilon_1(t)| |R_1(t)|) dx \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)| |\varepsilon_2(t)| |\nabla R_1(t)| |R_1(t)| dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 (|\nabla R_1(t)| + |R_1(t)|) (|\varepsilon_1(t)| + |\nabla\varepsilon_1(t)|) dx \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)| |\varepsilon_2(t)| |\nabla R_1(t)| |R_1(t)| dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2|R_2(t)|^2 \nabla(\Re(R_1(t)\varepsilon_1(t))) dx \right| + \left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 2\Re(\overline{R}_2(t)\varepsilon_2(t)) \nabla(|R_1(t)|^2) dx \right| \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (|R_1(t)| + |R_2(t)|) (|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|) (|R_2(t)| (|\varepsilon_1(t)| + |\nabla \varepsilon_1(t)| + |\varepsilon_2(t)|)) dx \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|) (|R_2(t)|) (|\varepsilon_1(t)| + |\nabla \varepsilon_1(t)| + |\varepsilon_2(t)|) dx \\
& \leq C \|(|R_1(t)| + |\nabla R_1(t)|) R_2(t)\|_{L^2} (\|\varepsilon_1(t)\| + \|\nabla \varepsilon_1(t)\|_{L^2} + \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2}) \\
& \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\frac{3}{2}\sqrt{\omega_\star} v_\star t} e^{-\sqrt{\omega_\star} v_\star t} \\
& \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\frac{5}{2}\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Além disso como $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^d)$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} 4\Re(\overline{R}_2(t)\varepsilon_2(t)) \nabla(\Re(\overline{R}_1(t)\varepsilon_1(t))) dx \right| \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)| |\varepsilon_2(t)| (|\nabla R_1(t)| + |R_1(t)|) (|\nabla \varepsilon_1(t)| + |\varepsilon_1(t)|) dx \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^d} (|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|) (|\varepsilon_2(t)| + |\nabla \varepsilon_2(t)|) (|\nabla R_1(t)| + |R_1(t)|) (|\nabla \varepsilon_1(t)| + |\varepsilon_1(t)|) dx \\
& \leq C \|(|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|) (|\nabla R_1(t)| + |R_1(t)|)\|_{L^2} \|(|\varepsilon_2(t)| + |\nabla \varepsilon_2(t)|) (|\nabla \varepsilon_1(t)| + |\varepsilon_1(t)|)\|_{L^2} \\
& \leq C \|(|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|) (|\nabla R_1(t)| + |R_1(t)|)\|_{L^2} \|\varepsilon_2(t) + |\nabla \varepsilon_2(t)|\|_{L^4} \|\nabla \varepsilon_1(t) + |\varepsilon_1(t)|\|_{L^4} \\
& \leq C \|(|R_2(t)| + |\nabla R_2(t)|) (|\nabla R_1(t)| + |R_1(t)|)\|_{L^2} \|\varepsilon_2(t) + |\nabla \varepsilon_2(t)|\|_{H^1} \|\nabla \varepsilon_1(t) + |\varepsilon_1(t)|\|_{H^1} \\
& \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\frac{3}{2}\sqrt{\omega_\star} v_\star t} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t} \\
& \leq C(1 + |v_1| + |v_2|)^2 e^{-\frac{7}{2}\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\overline{R}_2(t)\varepsilon_2(t)) \nabla(|\varepsilon_1(t)|^2) dx \right| & \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)| |\varepsilon_1(t)| |\nabla \varepsilon_1(t)| dx \\
& \leq \|\varepsilon_2(t)\|_{L^4} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4} \|\nabla \varepsilon_1(t)\|_{L^2} \\
& \leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Fazendo integração por partes e por um processo similar ao anterior conseguimos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla(\Re(\overline{R}_1(t)\varepsilon_1(t))) |\varepsilon_2(t)|^2 dx \right| & = \left| \frac{\beta}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\overline{R}_1(t)\varepsilon_1(t)) \nabla(|\varepsilon_2(t)|^2) dx \right| \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_1(t)| |\varepsilon_2(t)| |\nabla \varepsilon_2(t)| dx \\
& \leq \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^4} \|\nabla \varepsilon_2(t)\|_{L^2} \\
& \leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Por outro lado, para $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}\nabla(|R_j(t, x)|^2) &= \nabla(R_j(t, x) \cdot \bar{R}_j(t, x)) \\ &= \nabla\left(\frac{\omega_j}{\mu_j}\Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j)) \cdot \bar{\Phi}_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j))\right) \\ &= \frac{2\omega_j^{3/2}}{\mu_j}\Re(\bar{\Phi}_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j))\nabla\Phi_j(\sqrt{\omega_j}(x - v_j t - x_j))).\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\|\nabla|R_j(t)|^2\|_{L^\infty} \leq C\|\Phi_j(t)\|_{L^\infty}\|\nabla\Phi_j(t)\|_{L^\infty} \leq C.$$

Por conseguinte, pelo Lema 3.3.3 segue,

$$\left|\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\varepsilon_2(t)|^2\nabla|R_1(t)|^2dx\right| \leq C\|\varepsilon_2(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}}e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t}. \quad (3.61)$$

O próximo termo é tratado de forma semelhante ao anterior, além de usar integração por partes,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|R_2(t)|^2\nabla|\varepsilon_1(t)|^2dx\right| &= \left|\frac{\beta}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\nabla(|R_2(t)|^2)|\varepsilon_1(t)|^2dx\right| \\ &\leq C\|\varepsilon_1(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}}e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t}.\end{aligned} \quad (3.62)$$

Consideremos T_0 suficientemente grande tal que

$$v_\star(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\omega_\star v_\star}T_0} < 1. \quad (3.63)$$

Suponha que $t > t_0 > T_0$, então combinando (3.55)-(3.62) segue que

$$\begin{aligned}\left|v_\star\frac{\partial}{\partial t}P(u_1(t))\right| &\leq Cv_\star\left(\frac{1}{\sqrt{\omega_\star v_\star}}e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t} + (1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-3\sqrt{\omega_\star v_\star}t}\right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star}}e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t} + Cv_\star(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-\sqrt{\omega_\star v_\star}t}e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t} \\ &\leq Ce^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t} + Cv_\star(1 + |v_1| + |v_2|)^4 e^{-\sqrt{\omega_\star v_\star}T_0}e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t} \\ &\leq Ce^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t},\end{aligned}$$

isto é,

$$\left|v_\star\frac{\partial}{\partial t}P(u_1(t))\right| \leq Ce^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star}t}, \quad (3.64)$$

onde $C = C(\Phi_j, \omega_j, \mu_j, \beta)$ para $j = 1, 2$.

Da equação (3.64) e de (3.53) obtemos o seguinte controle para o momento

$$\begin{aligned}
& |v_1(P(u_1(t)) - P(u_1(T_n))) + v_2(P(u_2(t)) - P(u_2(T_n)))| \\
&= |v_\star(P(u_1(t)) - P(u_1(T_n)))| \\
&= \left| \int_t^{T_n} v_\star \frac{\partial}{\partial s} P(u_1(s)) ds \right| \\
&\leq \int_t^{T_n} \left| v_\star \frac{\partial}{\partial s} P(u_1(s)) \right| ds \\
&\leq C \int_t^{T_n} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star s} ds \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Agora, vamos estimar a parte da energia. Como a energia total (2.57) é uma quantidade conservada (veja Capítulo 2), observamos que

$$\begin{aligned}
& |(E(u_1(t), \mu_1) - E(u_1(T_n), \mu_1)) + (E(u_2(t), \mu_2) - E(u_2(T_n), \mu_2))| \\
&= \left| \mathcal{E}(u_1(t), u_2(t)) - \mathcal{E}(u_1(T_n), u_2(T_n)) - \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1(t)|^2 |u_2(t)|^2 - |u_1(T_n)|^2 |u_2(T_n)|^2) dx \right| \\
&= \left| \beta \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1(t)|^2 |u_2(t)|^2 - |u_1(T_n)|^2 |u_2(T_n)|^2) dx \right| \\
&\leq |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} (|u_1(t)|^2 |u_2(t)|^2 + |u_1(T_n)|^2 |u_2(T_n)|^2) dx.
\end{aligned}$$

Novamente a ideia é estimar cada termo da desigualdade acima. Primeiro, usando o fato de que $(u_1(T_n), u_2(T_n)) = (R_1(T_n), R_2(T_n))$ e o Lema 3.3.5 temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |u_1(T_n)|^2 |u_2(T_n)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |R_1(T_n)|^2 |R_2(T_n)|^2 dx \\
&\leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star T_n} \\
&\leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t}.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Como antes, para o outro termo restante na estimativa da energia, substituímos $u_j = R_j + \varepsilon_j$ para $j = 1, 2$, consequentemente,

$$\begin{aligned}
& |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |u_1(t)|^2 |u_2(t)|^2 dx \\
&= |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t)|^2 |R_2(t)|^2 dx + 2|\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t)|^2 \Re(\overline{R_2(t)} \varepsilon_2(t)) dx \\
&\quad + |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t)|^2 |\varepsilon_2(t)|^2 dx + 2|\beta| \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\overline{R_1(t)} \varepsilon_1(t)) |R_2(t)|^2 dx \\
&\quad + 4|\beta| \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\overline{R_1(t)} \varepsilon_1(t)) \Re(\overline{R_2(t)} \varepsilon_2(t)) dx + 2|\beta| \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\overline{R_1(t)} \varepsilon_1(t)) |\varepsilon_2(t)|^2 dx \\
&\quad + |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |R_2(t)|^2 |\varepsilon_1(t)|^2 dx + |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\overline{R_2(t)} \varepsilon_2(t)) |\varepsilon_1(t)|^2 dx \\
&\quad + |\beta| \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_1(t)|^2 |\varepsilon_2(t)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

As seguintes estimativas são obtidas usando os mesmos argumentos que foram usados nas estimativas do momento. Logo pelo Lema 3.3.5 e a hipótese (3.39)

$$\left| \beta \int_{\mathbb{R}^d} |R_1(t)|^2 |R_2(t)|^2 dx \right| \leq C \|R_1(t)\| \|R_2(t)\|_{L^2} \leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \left| 2\beta \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\bar{R}_2(t)\varepsilon_2(t)) |R_1(t)|^2 dx \right| &\leq C \|R_1(t)\|_{L^\infty} \|R_1(t)\| \|R_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2} \\ &\leq C e^{-\frac{5}{2}\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \left| 2\beta \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\bar{R}_1(t)\varepsilon_1(t)) |R_2(t)|^2 dx \right| &\leq C \|R_2(t)\|_{L^\infty} \|R_1(t)\| \|R_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2} \\ &\leq C e^{-\frac{5}{2}\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \left| 4\beta \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\bar{R}_1(t)\varepsilon_1(t)) \Re(\bar{R}_2(t)\varepsilon_2(t)) dx \right| &\leq C \|R_1(t)\| \|R_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\| \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2} \\ &\leq C \|R_1(t)\| \|R_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^4} \\ &\leq C \|R_1(t)\| \|R_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1} \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1} \\ &\leq C e^{-\frac{7}{2}\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \left| 2\beta \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\bar{R}_1(t)\varepsilon_1(t)) |\varepsilon_2(t)|^2 dx \right| &\leq C \|R_1(t)\|_{L^\infty} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^4}^2 \\ &\leq C \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_2(t)\|_{H^1}^2 \\ &\leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

e

$$\begin{aligned} \left| \beta \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\bar{R}_2(t)\varepsilon_2(t)) |\varepsilon_1(t)|^2 dx \right| &\leq C \|R_2(t)\|_{L^\infty} \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4}^2 \\ &\leq C \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2} \|\varepsilon_1(t)\|_{H^1}^2 \\ &\leq C e^{-3\sqrt{\omega_\star} v_\star t}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \left| \beta \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_1(t)|^2 |\varepsilon_2(t)|^2 dx \right| &\leq C \|\varepsilon_1(t)\|_{L^4}^2 \|\varepsilon_2(t)\|_{L^4}^2 \\ &\leq C e^{-4\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Por outro lado, pelo Lema 3.3.3 segue,

$$\begin{aligned} \left| \beta \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_1(t)|^2 |R_2(t)|^2 dx \right| &\leq C \|R_2(t)\|_{L^\infty}^2 \|\varepsilon_1(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star} v_\star} e^{-2\sqrt{\omega_\star} v_\star t}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

e

$$\begin{aligned} \left| \beta \int_{\mathbb{R}^d} |\varepsilon_2(t)|^2 |R_1(t)|^2 dx \right| &\leq C \|R_1(t)\|_{L^\infty}^2 \|\varepsilon_2(t)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Combinando (3.66)-(3.76) e tomando T_0 suficientemente grande tal que, para $t > t_0 > T_0$,

$$e^{-\frac{5}{2}\sqrt{\omega_\star v_\star} t} \leq \frac{1}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}, \quad (3.77)$$

obtemos

$$\begin{aligned} &|(E(u_1(t), \mu_1) - E(u_1(T_n), \mu_1)) + (E(u_2(t), \mu_2) - E(u_2(T_n), \mu_2))| \\ &\leq C \left(e^{-\frac{5}{2}\sqrt{\omega_\star v_\star} t} + \frac{1}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Finalmente, consideremos T_0 suficientemente grande satisfazendo (3.63) e (3.77), segue de (3.52), (3.65) e (3.78) que se $t_0 > T_0$, existe $C > 0$ independente de n e de $v_\star$ tal que, para todo $t \in [t_0, T_n]$,

$$|\mathcal{S}(u_1(t), u_2(t)) - \mathcal{S}(u_1(T_n), u_2(T_n))| \leq \frac{C}{\sqrt{\omega_\star v_\star}} e^{-2\sqrt{\omega_\star v_\star} t},$$

o que mostra o resultado desejado. $\square$

Com a demonstração deste lema temos obtidos todos os requerimentos com os quais foi mostrado o teorema principal desta dissertação.

Referências

- ABLOWITZ, M.; PRINARI, B.; TRUBATCH, A. D. *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems*. London Mathematical Society Lecture Note Series 302, Cambridge University Press, 2004.
- AGRAWAL, G. P. *Nonlinear fiber optics*. Optics and Photonics, Academic Press, New York, 2007.
- BERESTYCKI, H.; LIONS, P.-L. Nonlinear scalar field equations, I existence of a ground state. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, v. 82, n. 4, p. 313–345, 1983.
- _____. Nonlinear scalar field equations, II existence of infinitely many solutions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, v. 82, n. 4, p. 347–375, 1983.
- BERGH, J.; LÖFSTRÖM, J. *Interpolation spaces*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- CAZENAVE, T. *Semilinear Schrödinger equations*. American Mathematical Soc., v. 10, 2003.
- CAZENAVE, T.; WEISLER, F. B. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s . *Nonlinear Anal.*, v. 14, n. 10, p. 807–836, 1990.
- CÔTE, R.; LE COZ, S. High-speed excited multi-solitons in nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pures Appl.*, v. 96, n. 2, p. 135–166, 2011.
- CÔTE, R.; MARTEL, Y.; MERLE, F. Construction of multi-soliton solutions for the L^2 -supercritical gKdV and NLS equations. *Rev. Mat. Iberoam*, v. 27, n. 1, p. 273–302, 2011.
- ESRY, B. D.; GREENE, C.; BURKE, J. J.; BOHN, J. Hartree-Fock theory for double condensates. *Physical Review Letters*, APS, v. 78, n. 19, p. 3594, 1997.
- FARAH, L. G.; PASTOR, A. Scattering for a 3d coupled nonlinear Schrödinger system. *J. Math. Phys.*, v. 58, n. 7, 2017.
- GINIBRE, J.; VELO, G. *Sur une équation de Schrödinger non linéaire avec interaction non locale*. Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. II, 1982.
- IANNI, I.; LE COZ, S. Multi-speed solitary wave solutions for nonlinear Schrödinger systems. *J. Lond. Math. Soc.*, v. 89, n. 2, p. 623–639, 2014.
- KATO, T. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- LINARES, F.; PONCE, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext. Springer, New York, 2015.

- MARTEL, Y. Asymptotic N-soliton-like solutions of the subcritical and critical generalized Korteweg-de Vries equations. *Amer. J. Math.*, v. 127, n. 5, p. 1103–1140, 2005.
- MARTEL, Y.; MERLE, F. Multi solitary waves for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, v. 23, n. 6, p. 849–864, 2006.
- MERLE, F. Construction of solutions with exactly k blow-up points for the Schrödinger equation with critical nonlinearity. *Comm. Math. Phys.*, v. 129, n. 2, p. 223–240, 1990.
- PASTOR, A. Weak concentration and wave operator for a 3D coupled nonlinear Schrödinger system. *J. Math. Phys.*, v. 56, n. 2, 2015.
- REED, M.; SIMON, B. *Methods of modern mathematical physics*. Academic Press, New York, v. 4, 1980.
- SCHUUR, P. C. *Asymptotic analysis of soliton problems. An inverse scattering approach*. Lecture Notes in Mathematics 1232, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- STRAUSS, W. A. Nonlinear invariant wave equations. Invariant wave equations. *Lecture Notes in Phys.*, 73, Springer, Berlin-New York, p. 197–249, 1978.
- TAO, T. Why are solitons stable? *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, v. 46, n. 1, p. 1–33, 2009.
- WEINSTEIN, M. I. On the structure and formation of singularities in solutions to nonlinear dispersive evolution equations. *Comm. Partial Differential Equations*, v. 11, n. 5, p. 545–565, 1986.

APÊNDICE A – PROPRIEDADE DE COERCIVIDADE

Nesta seção vamos mostrar alguns resultados usados no Lema 3.2.4 que não foram demonstradas.

Forma quadrática associada a $\mathcal{S}_0$

O seguinte teorema estabelece algumas propriedades da forma quadrática $\mathcal{H}_0$ (veja (3.7)). No que segue, para simplificar a notação, denotaremos $\int_{\mathbb{R}^d} f dx$ simplesmente por $\int_{\mathbb{R}^d} f$.

Teorema A.0.1. *Seja o operador $\mathcal{S}_0 : H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$\mathcal{S}_0(u) := E(u, \mu_0) + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) M(u) + v_0 \cdot P(u),$$

para toda $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Então

$$\mathcal{S}'_0(u) = -\Delta u + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) u + i v_0 \cdot \nabla u - \mu_0 |u|^2 u.$$

e

$$\langle \mathcal{S}''_0(R_0)v, v \rangle = \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|v\|_{L^2}^2 + v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{v} - 2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |v|^2 - \mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} \Re(R_0 \bar{v})^2$$

onde R_0 é definido como em (3.5).

Demonstração. Lembrando que

$$E(u, u_0) := \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{\mu_0}{4} \|u\|_{L^4}^4,$$

$$M(u) := \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2,$$

e

$$P(u) := \frac{1}{2} \Im \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla \bar{u},$$

obtemos

$$\mathcal{S}_0(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{\mu_0}{4} \|u\|_{L^4}^4 + \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{2} v_0 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla \bar{u}.$$

Agora, vamos calcular a derivada de Gateaux de $\mathcal{S}_0$.

Considere

$$S_1(u) = \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2$$

. Logo para $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \langle S'_1(u), v \rangle &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(u + tv)|^2 - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u + t \nabla v|^2 - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 + t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \bar{v} + t \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u} \nabla v + t^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 - \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u \nabla \bar{v} + \nabla \bar{u} \nabla v) + t^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla u \nabla \bar{v} + \nabla \bar{u} \nabla v) \\ &= \Re \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \bar{v} \\ &= -\Re \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u \bar{v} \\ &= \langle -\Delta u, v \rangle. \end{aligned}$$

Desse modo, no sentido das distribuições, temos que $S'_1(u) = -\Delta u$.

Ademais,

$$\begin{aligned} \langle S''_1(u)v, v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Re \int_{\mathbb{R}^d} \nabla(u + tv) \nabla \bar{v} - \Re \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla \bar{v}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \Re \int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \nabla \bar{v}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \Re \int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \nabla \bar{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 \\ &= \|\nabla v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja

$$S_2(u) = \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2.$$

Então, para $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} \langle S'_2(u), v \rangle &= \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |u + tv|^2 - \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 + t \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 + t \int_{\mathbb{R}^d} u \bar{v} + \int_{\mathbb{R}^d} \bar{u} v - \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2}{t} \\ &= \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \Re \int_{\mathbb{R}^d} u \bar{v}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, $S'_2(u) = \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4}\right) u$.

Também, temos que

$$\begin{aligned}\langle S''_2(u)v, v \rangle &= \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4}\right) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Re \int_{\mathbb{R}^d} (u + tv) \bar{v} - \Re \int_{\mathbb{R}^d} u \bar{v}}{t} \\ &= \Re \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 \\ &= \|v\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Agora, considere $S_3(u) = \frac{1}{2} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla \bar{u}$. Fazendo o mesmo processo acima obtemos

$$\begin{aligned}\langle S'_3(u), v \rangle &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} (u + tv) \nabla (\bar{u} + t\bar{v}) - v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla \bar{u}}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \left(v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} u \nabla \bar{v} + v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{u} \right)}{t} \\ &= \frac{1}{2} \left(-v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \bar{v} + v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \bar{u} \right) \\ &= v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{u} \\ &= -v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \bar{v} \nabla u \\ &= v_0 \cdot \Re \left(i \int_{\mathbb{R}^d} \bar{v} \nabla u \right)\end{aligned}$$

e assim $S'_3(u) = i v_0 \nabla u$. Também,

$$\begin{aligned}\langle S''_3(u)v, v \rangle &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla (\bar{u} + t\bar{v}) v - v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u} v}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u} v + t v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{v} v - v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{u} v}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{v} v \\ &= v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{v} v.\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle S''_3(u)v, v \rangle = v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{v} v.$$

Por ultimo, considere $S_4(u) = -\frac{\mu_0}{4} \|u\|_{L^4}^4 = -\frac{\mu_0}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^4$. Daí,

$$\begin{aligned}\langle S'_4(u), v \rangle &= -\frac{\mu_0}{4} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |u + tv|^4 - \int_{\mathbb{R}^d} |u|^4}{t} \\ &= -\frac{\mu_0}{4} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |u|^4 + 2t \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 u \bar{v} + 2t \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 v \bar{u} - \int_{\mathbb{R}^d} |u|^4}{t} \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 v \bar{u} + \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 u \bar{v} \right) \\ &= -\mu_0 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 u \bar{v}.\end{aligned}$$

e $S'_4(u) = -\mu_0|u|^2u$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\langle S''_4(u)v, v \rangle &= -\mu_0 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Re \int_{\mathbb{R}^d} |u + tv|^2 (u + tv) \bar{v} - \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 u \bar{v}}{t} \\ &= -\mu_0 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Re \int_{\mathbb{R}^d} (|u|^2 u \bar{v} + t|u|^2 \bar{v}^2 + t\bar{v}^2 u^2 + t|u|^2 |v|^2 - \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 u \bar{v})}{t} \\ &= -2\mu_0 \Re \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 |v|^2 - \mu_0 \Re \int_{\mathbb{R}^d} (u \bar{v})^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}'_0(u) &= S'_1(u) + S'_2(u) + S'_3(u) + S'_4(u) \\ &= -\Delta u + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) u + iv_0 \nabla u - \mu_0 |u|^2 u,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}''_0(R_0)v, v \rangle &= \langle S''_1(R_0)v, v \rangle + \langle S''_2(R_0)v, v \rangle + \langle S''_3(R_0)v, v \rangle + \langle S''_4(R_0)v, v \rangle \\ &= \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|v\|_{L^2}^2 + v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{v} - 2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |v|^2 - \mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} \Re(R_0 \bar{v})^2.\end{aligned}$$

□

No próximo corolário mostraremos uma propriedade de $\mathcal{H}_0$ que foi usada na demonstração do Lema 3.2.4.

Corolário A.0.2. Dado $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, considere z tal que

$$v(x) = \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\omega_0 t - \frac{|v_0|^2}{4} t + \frac{1}{2} v_0 \cdot x + \gamma_0)} z(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Então

$$\mathcal{H}_0(t, v) = \frac{1}{(\sqrt{\omega_0})^d} \left(\frac{\omega_0^2}{\mu_0} \|\nabla z\|_{L^2}^2 + \frac{\omega_0^2}{\mu_0} \|z\|_{L^2}^2 - \frac{2\omega_0^2}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |z|^2 - \frac{\omega_0^2}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} \Re(\Phi_0 \bar{z})^2 \right).$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0(t, v) &= \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|v\|_{L^2}^2 + v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{v} - 2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |v|^2 - \mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} \Re(R_0 \bar{v})^2.\end{aligned}$$

Nos cálculos abaixo denotaremos as expressões $e^{\pm i(\cdot)}$, $\tilde{z}$ e $\tilde{\Phi}_0$ respectivamente por $e^{\pm i(\cdot)} := e^{\pm i(\omega_0 t - \frac{|v_0|^2}{4} t + \frac{1}{2} v_0 \cdot x + \gamma_0)}$, $\tilde{z}(x) := z(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0))$ e $\tilde{\Phi}_0(x) := \Phi_0(\sqrt{\omega_0}(x - v_0 t - x_0))$.

Inicialmente, usando mudança de variáveis, temos

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \nabla \left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{z} \right) \right|^2 \\
&= \frac{\omega_0}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla (e^{i(\cdot)} \tilde{z}) \cdot \overline{\nabla (e^{i(\cdot)} \tilde{z})} \\
&= \frac{\omega_0}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|v_0|^2}{4} |\tilde{z}|^2 + \sqrt{\omega_0} \frac{i}{2} v_0 \cdot \tilde{z} \nabla \tilde{z} - \sqrt{\omega_0} \frac{i}{2} v_0 \cdot \tilde{z} \nabla \tilde{z} + \omega_0 |\nabla \tilde{z}|^2 \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{|v_0|^2}{4} |z|^2 + \sqrt{\omega_0} \frac{i}{2} v_0 \cdot z \nabla \bar{z} - \sqrt{\omega_0} \frac{i}{2} v_0 \cdot \bar{z} \nabla z + \omega_0 |\nabla z|^2 \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} \left(\frac{|v_0|^2}{4} \|z\|_{L^2}^2 - \sqrt{\omega_0} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \bar{z} z + \omega_0 \|\nabla z\|_{L^2}^2 \right).
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \|v\|_{L^2}^2 &= \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 \\
&= \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{z} \right|^2 \\
&= \frac{\omega_0}{\mu_0} \left(\omega_0 + \frac{|v_0|^2}{4} \right) \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{z}|^2 \\
&= \frac{\omega_0^2}{\mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} \|z\|_{L^2}^2 + \frac{\omega_0 |v_0|^2}{4 \mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} \|z\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} v \nabla \bar{v} &= v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{z} \cdot \nabla \left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{z} \right) \\
&= \frac{\omega_0}{\mu_0} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(\cdot)} \tilde{z} \left(-\frac{i}{2} v_0 e^{-i(\cdot)} \tilde{z} + \sqrt{\omega_0} e^{-i(\cdot)} \nabla \tilde{z} \right) \\
&= \frac{\omega_0 |v_0|^2}{\mu_0} \Im \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\frac{i}{2} |\tilde{z}|^2 \right) + \sqrt{\omega_0} \frac{\omega_0}{\mu_0} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{z} \nabla \tilde{z} \\
&= -\frac{\omega_0 |v_0|^2}{2 \mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{z}|^2 + \frac{\omega_0^{3/2}}{\mu_0} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{z} \nabla \tilde{z} \\
&= -\frac{\omega_0 |v_0|^2}{2 \mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} \|z\|_{L^2}^2 + \frac{\omega_0^{3/2}}{\mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} v_0 \cdot \Im \int_{\mathbb{R}^d} z \nabla \bar{z}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
-2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} |R_0|^2 |v|^2 &= -2\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{\Phi}_0 \right|^2 \left| \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{z} \right|^2 \\
&= -\frac{2\omega_0^2}{\mu_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{\Phi}_0|^2 |\tilde{z}|^2 \\
&= -\frac{2\omega_0^2}{\mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi_0|^2 |z|^2.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 -\mu_0 \int_{\mathbb{R}^d} \Re(R_0 \bar{v})^2 &= -\mu_0 \Re \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{\Phi}_0 \sqrt{\frac{\omega_0}{\mu_0}} e^{i(\cdot)} \tilde{z} \right)^2 \\
 &= -\frac{\omega_0^2}{\mu_0} \Re \int_{\mathbb{R}^d} (\tilde{\Phi}_0 \tilde{z})^2 \\
 &= -\frac{\omega_0^2}{\mu_0 (\sqrt{\omega_0})^d} \Re \int_{\mathbb{R}^d} (\Phi_0 \bar{z})^2.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Portanto, de (A.1)-(A.5) segue o resultado. $\square$

Perturbação compacta do Laplaciano

Esta seção é dedicada à demonstração de um resultado usado no Lema 3.2.4.

Teorema A.0.3. *Seja L o operador definido em (3.9). Então L é uma perturbação compacta de $L_0 := -\Delta + 1 : H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração. Da definição de perturbação compacta (REED; SIMON, 1980, Pag.113) precisamos mostrar que o operador linear $(L - L_0)(L_0 - \lambda I)^{-1}$ é compacto para algum $\lambda \in \rho(L_0)$. Como $\sigma(L_0) = [1, +\infty)$, isto garante que $\lambda = 0 \in \rho(L_0)$, de onde, só devemos mostrar que o operador $(L - L_0)L_0^{-1}$ é compacto.

Seja $v_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ limitada e denotemos por $T = (L - L_0)L_0^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$. Pela igualdade (3.9) temos que $(L - L_0)v = -2\omega_0|\Phi_0|^2v - \omega_0\Phi_0^2\bar{v}$ e como Φ_0 decai exponencialmente, então $L - L_0$ é um operador limitado. Logo, T é um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}^d)$, pois é composta de operadores limitados. Assim Tv_n é uma sequência limitada em $L^2(\mathbb{R}^d)$, portanto, existe $v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $Tv_n \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathbb{R}^d)$, e como $L^2(\mathbb{R}^d) \xhookrightarrow{c} L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$, então temos que $Tv_n \rightarrow v$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$. O decaimento exponencial de Φ_0 vai implicar que $Tv_n \rightarrow v$ em $L^2(\mathbb{R}^d)$, o que mostra que $(L - L_0)L_0^{-1}$ é um operador compacto.

De fato, seja $\delta > 0$. Consideremos $r_\delta > 0$ o qual vai ser definido mais para frente. Então,

$$\|Tv_n - v\|_{L^2}^2 = \|Tv_n - v\|_{L^2(|x|>r_\delta)}^2 + \|Tv_n - v\|_{L^2(|x|\leq r_\delta)}^2, \tag{A.6}$$

e dado que $Tv_n \rightarrow v$ em $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$, temos que, $\|Tv_n - v\|_{L^2(|x|\leq r_\delta)}^2 \rightarrow 0$. Logo só devemos estimar o termo $\|Tv_n - v\|_{L^2(|x|>r_\delta)}^2$. Para isso, escolha r_δ tal que, para $q = 2$,

$$\int_{|x|>r_\delta} |\Phi_0|^{4q'} dx \leq \frac{\delta^{q'}}{M}, \tag{A.7}$$

onde q' é o conjugado de q e M vai ser escolhido mais para frente.

Agora, $H^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^d)$, pois $d \leq 3$, e $(L_0^{-1}v_n)$ é uma sequência limitada em $H^2(\mathbb{R}^d)$ então aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
\|Tv_n\|_{L^2(|x|>r_\delta)}^2 &= \int_{|x|>r_\delta} \left| 2\omega_0|\Phi_0|^2 L_0^{-1}v_n + \omega_0\Phi_0^2 \overline{L_0^{-1}v_n} \right|^2 \\
&\leq C \int_{|x|>r_\delta} \left(|2\omega_0|\Phi_0|^2|^2 + |\omega_0\Phi_0^2|^2 \right) |L_0^{-1}v_n|^2 \\
&\leq C \int_{|x|>r_\delta} |\Phi_0|^4 |L_0^{-1}v_n|^2 \\
&\leq C \left(\int_{|x|>r_\delta} |\Phi_0|^{4q'} \right)^{1/q'} \left(\int_{|x|>r_\delta} |L_0^{-1}v_n|^{2q} \right)^{1/q} \\
&\leq \delta,
\end{aligned} \tag{A.8}$$

sendo $M = C_1^{q'}$ em (A.7), onde C_1 é tal que

$$C \left(\int_{|x|>r_\delta} |L_0^{-1}v_n|^{2q'} \right)^{1/q'} \leq C_1.$$

Além disso, pela convergência fraca em $L^2(\mathbb{R}^d)$, temos convergência fraca em $L^2(|x| > r_\delta)$. Logo,

$$\|v\|_{L^2(|x|>r_\delta)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|Tv_n\|_{L^2(|x|>r_\delta)}.$$

Assim,

$$\|v\|_{L^2(|x|>r_\delta)} \leq \delta. \tag{A.9}$$

Usando (A.8) e (A.9) em (A.6), segue que $\|Tv_n - v\|_{L^2} \rightarrow 0$. Com isto obtemos o resultado. $\square$