

TOPOLOGIAS MISTAS DE ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS
E ÁLGBRAS TOPOLÓGICAS

Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

Orientador: *Prof. Dr. João Bosco Prolla*

Tese apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

ERRATA

Pag.	Linha	Onde se Lê:	Leia:
2	-8	F-convexo fechado	F-convexo, equilibrado e fechado
2	-4	EVT não arquimediano	EVT
3	4	B também é	B_1 também é
3	8	EVT normado não arquimediano	EVT normado
6	3	Se $g \in B$,	Se $g \in V$,
7	6	$\epsilon/k+1$	$\epsilon/k+1$
9	9	$i = 1, \dots, n$	$i = 1, \dots, n-1$
9	10	Tomemos $f_{n+1} = g_{k_{n+1}}$ sobre K e consideremos	Consideremos
15	-6	$\xi \in \mathcal{G}$	$\xi \in \mathcal{G}_1$
18	-1	(ver Prolla [17])	(ver Prolla [16])
19	3	(ver Prolla [17])	(ver Prolla [16])
27	7	$\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$	$\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$ (ver Prop. 1.22)
41	4	$\mu \in \mathcal{G}_{sc}$	$\sigma \in \mathcal{G}_{sc}$
43	3	$x \in T^{-1}(x) \in T^{-1}(\lambda V) = T^{-1}(V)$	$x \in T^{-1}(\lambda V) = \lambda T^{-1}(V)$
47	-5	localmente F-convexo	normado não arquimediano
49	-7	$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k)$	$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k)$
51	-6	$x \in \sum_{k=1}^p (V_k \cap B_k) + \sum_{k=1}^m \dots$	$x \in \sum_{k=1}^p (V_k \cap B_k) + \sum_{k=1}^m \dots$
63	-5	Seja (E, τ) um espaço normado. Se existir ...	Se existir ...
64	6	$U = \{U_n; n \in 0, 1, \dots\}$	$U = \{U_n; n = 0, 1, \dots\}$
64	9	página 46	página 48
69	3	$V_n + V_n \subset U_{n+2}$	$V_n + V_n \subset U_{n+2} \cap V_{n-1}$
70	8	$+(U_{n_0} \cap B_{n_0}) + \dots + (U_{n_0+2} \cap B_{n_0+2})$	$\dots + (U_{n_0+2} \cap U_{n_0+2})$
74	-9	Portanto, se $\ \cdot\ $ for n.a., então $(E; \eta, \tau) \dots$	Portanto $(E; \eta, \tau) \dots$
76	-1	2.5(iii)	2.4(iii)
77	3	$\tilde{p}_n(x)$	$\tilde{p}(x)$
80	6	$k=1$	$k=0$

<u>Pag.</u>	<u>Linha</u>	<u>Onde se Lê:</u>	<u>Leia:</u>
96	2	$B_n B_{n+1}$	$B_k B_{n+1}$
96	5	$(V_k \cap B_k) \cap (V_{n+1} \cap B_{n+1})$	$(V_k \cap B_k) \cdot (V_{n+1} \cap B_{n+1})$
96	-7	$\bigcup_{j=1}^n \bigcap_{j=1}^m (V_j \cap B_j)$	$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^n (V_j \cap B_j)$
98	-2	a_n	λ_n
98	-3	a_n	λ_n
99	2	$p_n(x, y) \leq p_{j_n}(x) p_n(y)$	$p_n(x, y) \leq p_{j_n}(x) p_{j_n}(y)$
101	9	$p(xy) \leq p(x)q(x)$	$p(xy) \leq p(x)q(y)$
101	-4	$b \in \mathbb{L}(\tau)$	$B \in \mathbb{L}(\tau)$
101	-7	Definição 4.8	Definição 4.3
102	10	U_n	V_n
103	-2	$x \in E$	$x \in U$
104	5	localmente m-bornívora	topológica
104	6	4.18	4.18; e portanto é localmente m-bornívora
110	-7	$US \cup SU$.	$US \cup SU$ onde S é a bola unitária de (E, η)
112	-1	$p(g_1, g_2)$	$p(g_1 \cdot g_2)$
122	1	Se $x_1 \neq x_2$	Se $x_1 = x_2$

Para Gilberto

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos ao Prof. Dr. João Bosco Prolla, pela orientação e incentivo recebidos.

Agradeço também a todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

TOPOLOGIAS MISTAS DE ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS
E ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

INTRODUÇÃO.....	i
0 - Preliminares.....	1
1 - A Topologia Mista $\gamma[\eta, \tau]$	12
2 - Bases de Vizinhanças de $\gamma[\eta, \tau]$	47
3 - Espaços de Saks.....	73
4 - Topologias Mistas de Álgebras.....	90
5 - O Espectro de $(C_b(X;E), \gamma[\kappa, \sigma])$	117
REFERÊNCIAS.....	131

INTRODUÇÃO

Se E é um espaço vetorial munido de duas topologias de espaço vetorial topológico, digamos η e τ , a noção de γ -convergência é introduzida da seguinte maneira: diz-se que a rede $\{x_\alpha\}$ γ -converge para $x \in E$, e escreve-se $x_\alpha \xrightarrow{\gamma} x$, se $\{x_\alpha\}$ é τ -limitado e $x_\alpha \rightarrow x$ na topologia η . Surge então o problema de caracterizar a γ -convergência por meio de uma topologia de EVT sobre E , isto é, obter uma topologia de EVT sobre E de tal maneira que $x_\alpha \xrightarrow{\gamma} x$ se e somente se $x_\alpha \rightarrow x$ nessa topologia.

A noção de γ -convergência no caso real ou complexo foi introduzida e estudada por Fichtenholz, Alexiewicz e Semadeni no caso em que as topologias η e τ provêm de normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$, respectivamente (Ver [1], [2], [3], e [8]). A solução do problema acima citado foi obtida por Wiweger [20] e [21] e Persson [15], que batizaram a mais fina das topologias de EVT que fornece a γ -convergência de "topologia mista". Tanto Wiweger como Persson consideraram topologias η e τ localmente convexas (E real ou complexo). O caso real ou complexo não localmente convexo foi estudado por Iyahan [10].

A utilização de uma noção de "limite-indutivo" foi introduzida por Garling [9].

Nesta tese estendemos o estudo das topologias mistas para o contexto dos espaços vetoriais topológicos sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$.

No § 1 caracterizamos a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$ como um exemplo de limite indutivo generalizado e estudamos alguns casos particulares, como por exemplo aquele em que (E, η) e (E, τ) são espaços localmente F-convexos no sentido de Monna [11], Van Tiel [19].

No § 2 caracterizamos sistemas fundamentais de vizinhanças da origem para a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$.

Os espaços de Saks reais ou complexos foram originariamente estudados por Orlicz [12] e [13] e Orlicz e Pták [14]. Neste caso τ é induzida por uma pseudo-norma ou F-norma (isto é, a condição de homogeneidade é substituída por outra mais fraca mas que garante continuidade da multiplicação por escalares), e portanto a topologia mista associada não é localmente convexa. Em sua monografia [7], Cooper adota em sua definição de espaços de Saks o ponto de vista localmente convexo: um espaço de Saks é uma terna $(E; \eta, \|\cdot\|)$ onde E é um espaço vetorial (real ou complexo), η é uma topologia localmente convexa em E , e $\|\cdot\|$ é uma verdadeira norma sobre E tal que a bola unitária $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ é fechada e limitada na topologia η . No § 3 fazemos um breve estudo no presente contexto, e caracterizamos um sistema fundamental de seminormas que define a sua topologia mista $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$. Um dos principais exemplos é o de $C_b(X; E)$, espaço de todas as funções contínuas e limitadas, definidas num espaço localmente compacto e 0-dimensional X e com valores num espaço normado E , η é a topologia compacto-aberta e $\|\cdot\|$ é a norma do supremo. Mostramos que nestas circunstâncias $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ coincide com a topologia estrita

β definida em Soares [18] por meio de pesos induzidos por funções nulas no infinito.

Uma questão que naturalmente se põe é a seguinte: se E é uma álgebra sobre $(F, |\cdot|)$ e η e τ são topologias de álgebras topológicas, em que circunstâncias a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$ é uma topologia de álgebra topológica. Esta questão e outras correlatas são estudadas no § 4.

Finalmente no § 5 estudamos o espectro da topologia mista de $C_b(X; E)$ mencionada acima, quando E é uma álgebra normada sobre $(F, |\cdot|)$. O caso real ou complexo foi estudado por Prolla [17] no contexto das álgebras de Nachbin.

§0 - PRELIMINARES

Em todo este trabalho, consideraremos espaços vetoriais sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$.

DEFINIÇÃO 0.1: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito *F-convexo* se para quaisquer x, y e z em A e para quaisquer α, β e γ em F com $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$ e $|\gamma| \leq 1$, ocorrer $\alpha x + \beta y + \gamma z \in A$. Se (E, τ) é um EVT que possui uma base de vizinhanças *F-convexas* de origem, então (E, τ) é chamado um EVT *localmente F-convexo*.

DEFINIÇÃO 0.2: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito *semiconvexo* se existir um escalar $\lambda \in F^*$ tal que $A + A \subset \lambda A$. Se (E, τ) é um EVT que possui um sistema fundamental de vizinhanças *semiconvexas* da origem, dizemos que (E, τ) é um EVT *localmente semiconvexo*.

PROPOSIÇÃO 0.3: Se (E, τ) é um EVT *localmente F-convexo*, então (E, τ) é *localmente semiconvexo*.

DEMONSTRAÇÃO: Seja \mathcal{U} uma base de vizinhanças *F-convexas* da origem em E e seja $U \in \mathcal{U}$. Vamos mostrar que U é *semiconvexa*. Como $0 \in U$, se x e y estão em U , temos $x + y = 1 \cdot x + 1 \cdot y - 1 \cdot 0 \in U$. Logo $U + U \subset U$ e portanto (E, τ) é *localmente semiconvexo*.

DEFINIÇÃO 0.4: Dizemos que um EVT (E, τ) é *quase-convexo* se existir um conjunto F de partes equilibradas, semiconvexas e τ -limitadas de E formando um sistema fundamental de subconjuntos τ -limitados de E .

Observamos que existindo F como acima, é possível ser encontrada uma família F' cujos elementos são também τ -fechados.

PROPOSIÇÃO 0.5: Se (E, τ) é um EVT localmente F -convexo, então (E, τ) é *quase-convexo*.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \in \mathcal{IL}(\tau)$ e seja $B_1 \subset E$ sua envoltória F -convexa e equilibrada. Seja V uma vizinhança fechada e F -convexa da origem em (E, τ) .

Então existe $\delta > 0$ tal que $B \subset \lambda V$ sempre que $\lambda \in F^*$ com $|\lambda| \geq \delta$.

Como λV é F -convexo, fechado e contém B , temos $B_1 \subset \lambda V$. Portanto $B_1 \in \mathcal{IL}(\tau)$.

Além disso, como B_1 é F -convexo, é também semiconvexo. Concluimos então que (E, τ) é *quase convexo*.

PROPOSIÇÃO 0.6: Se (E, τ) é um EVT não arquimédiano localmente limitado, então (E, τ) é *quase convexo*.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $B \in \mathcal{IL}(\tau)$ e V uma vizinhança limitada, fechada e equilibrada da origem em (E, τ) . Então existe $\delta > 0$ tal

que $B \subset \lambda V$ sempre que $|\lambda| \geq \delta$, $\lambda \in F^*$. Seja $\lambda_0 \in F^*$ com essa propriedade e seja $B_1 = \lambda_0 V$. Temos $B \subset B_1$, $B_1 \subset \mathbb{L}(\tau)$, pois V é τ -limitada, e B_1 é fechado e equilibrado.

Como V é uma vizinhança da origem em (E, τ) , B também é, e $B_1 + B_1 \in \mathbb{L}(\tau)$. Logo existe $\delta_1 > 0$ tal que para qualquer $\mu \in F^*$ com $|\mu| \geq \delta_1$, $B_1 + B_1 \subset \mu B_1$. Portanto B_1 é semiconvexo. Assim, (E, τ) é um EVT quase-convexo.

COROLÁRIO 0.7: Se (E, τ) é um EVT normado não arquimediano então (E, τ) é quase-convexo.

DEFINIÇÃO 0.8: Uma sequência $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos não vazios de um espaço vetorial E é uma *corda* em E se:

- a) para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é equilibrado;
- b) para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é absorvente;
- c) $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;
- d) para algum $\lambda \in F$, com $0 < |\lambda| < 1$ (e portanto para todo $\lambda \in F^*$), dado $U_n \in U$, existe $U_m \in U$, $m > n$, tal que $U_m \subset \lambda U_n$.

U_n é chamado o n -ésimo nó de U .

DEFINIÇÃO 0.9: Uma corda $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um EVT (E, τ) é dita τ -topológica se para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é uma τ -vizinhança da origem em E .

DEFINIÇÃO 0.10: Uma corda $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um EVT (E, τ) é dita τ -bornívora se, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é um subconjunto τ -bornívoro de E .

DEFINIÇÃO 0.11: Seja E um espaço vetorial e sejam τ e μ duas topologias de EVT sobre E . Dizemos que a topologia μ é τ -fechada se μ admite um sistema fundamental de vizinhanças τ -fechadas da origem.

DEFINIÇÃO 0.12: Um espaço topológico (X, τ) é chamado 0-dimensional se cada ponto de X possui uma base de τ -vizinhanças abertas e fechadas.

DEFINIÇÃO 0.13: Seja X um espaço localmente compacto e 0-dimensional. Denotaremos por $C_b(X; F)$ o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em X com valores em F . Definiremos sobre $C_b(X; F)$ as seguintes topologias, que serão eventualmente abordadas no decorrer deste trabalho:

1) a topologia da convergência uniforme sobre X , definida pela norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ e denotada por σ ;

2) a topologia da convergência uniforme sobre as partes compactas de X , definida pelas seminormas $\|f\|_{K, \infty}$ ou seja, $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$ onde K percorre a família de todos os subconjuntos compactos de X , denotada por κ ;

3) a topologia estrita, denotada por β , definida pelas seminormas $p_\phi(f) = \sup_{x \in X} |\phi(x)f(x)|$, onde ϕ percorre o espaço $C_0(X; F)$ das funções de $C_b(X; F)$ nulas no infinito.

As topologias κ , β e σ satisfazem: (a) $\kappa \subset \beta \subset \sigma$.

Para mostrarmos que $\kappa \subset \beta$, consideremos a κ -vizinhança da origem. $W = \{f \in C_b(X; F); \sup_{x \in K} |f(x)| < \varepsilon\}$. Mas dado o compacto K de X ,

existe um compacto-aberto V tal que $K \subset V$. A função característica φ de V pertence a $C_0(X;F)$ e é tal que $\varphi(x) = 1$, se $x \in K$ e $\varphi(x) = 0$ se $x \notin V$. Seja $\Phi = \{\varphi\}$. Considerando a β -vizinhança da origem dada por

$$U_{\Phi, \varepsilon} = \{f \in C_b(X;F) : p_{\Phi}(f) < \varepsilon\},$$

temos que se $g \in U_{\Phi, \varepsilon}$, então

$$\sup_{x \in K} |\varphi(x)g(x)| < \varepsilon.$$

Portanto, se $x \in K$,

$$|g(x)| = |\varphi(x)g(x)| < \varepsilon,$$

do que segue que $g \in W$.

Vamos mostrar agora que $\beta \subset \sigma$. Seja

$$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset C_0(X;F).$$

Consideremos a β -vizinhança da origem dada por

$$U_{\Phi, \varepsilon} = \{f \in C_b(X;F) : \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in X} |\varphi_i(x)f(x)| < \varepsilon\}$$

e consideremos a σ -vizinhança da origem dada por

$$V = \{f \in C_b(X;F) : \|f\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{M}\},$$

onde

$$M = \max \{ \|\varphi_1\|_\infty, \dots, \|\varphi_n\|_\infty \}.$$

Se $g \in B$, temos, para todo $x \in X$,

$$|\varphi_i(x)g(x)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Logo $g \in U_{\Phi, \varepsilon}$

(b) β e κ coincidem sobre os conjuntos σ -limitados.

Com efeito, seja

$$B = \{f \in C_b(X; F) : \|f\|_\infty \leq M\} \in \mathcal{IL}(\sigma).$$

Por (a), temos $\kappa \subset \beta$ sobre B . Falta mostrar que sobre B , $\beta \subset \kappa$. Seja $A \subset B$ um conjunto $\hat{\beta}$ -aberto não vazio e seja $f \in A$. Então existe uma β -vizinhança $U_{\Phi, \varepsilon}$ da origem tal que

$$(f + U_{\Phi, \varepsilon}) \cap B \subset A \subset B,$$

onde

$$\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset C_0(X; F).$$

Seja $k \geq 1$ tal que $\|\varphi_i\| \leq k$, $i = 1, \dots, n$.

Para cada $i = 1, \dots, n$, consideremos o conjunto compacto

$$K_i = \{x \in X : |\varphi_i(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M+k}\}.$$

Seja $K = K_1 \cap \dots \cap K_n$, que é um conjunto compacto, onde temos,

para todo $x \in K$, $|\varphi_i(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M+k}$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Seja

$$V = \{f \in C_D(X; F) : \sup_{x \in K} |f(x)| < \frac{\varepsilon}{k+1}\}.$$

Se $h \in (f + V) \cap B$, temos

$$g = h - f \in V \quad \text{e} \quad \|g\|_\infty = \|h - f\|_\infty \leq 2M,$$

pois h e f pertencem a B .

Vamos mostrar que $g \in U_{\phi, \varepsilon}$. Seja $x \in X$. Para todo $i = 1, \dots, n$, temos

$$|\varphi_i(x)g(x)| \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{k+1} < \varepsilon, \quad \text{se} \quad x \in K;$$

e

$$|\varphi_i(x)g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M+k} \cdot 2M < \varepsilon, \quad \text{se} \quad x \notin K.$$

Logo, $h \in (f + U_{\phi, \varepsilon}) \cap B$, o que completa a prova.

DEFINIÇÃO 0.14: Se um corpo não arquimediano não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$ for um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff, então será chamado um *corpo local*.

TEOREMA 0.15: Seja $(F, |\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado não arquimediano. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach sobre $(F, |\cdot|)$. Sejam X um espaço T_1 0-dimensional e K um subconjunto compacto de X . Então, para toda função contínua $f: K \rightarrow E$, existe uma função $\tilde{f} \in C_b(X; E)$ tal que $\tilde{f}|_K = f$ e $\|f\|_\infty = \|\tilde{f}\|_{K, \infty}$.

Para uma demonstração deste teorema, precisaremos dos seguintes lemas:

LEMA 0.16: Sejam F , E , X e K como no Teorema 0.15. Então $C_b(X; E)/K$ é fechado em $C(K; E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja g uma função de $C_b(K; E)$ pertencente ao fecho uniforme de $C_b(X; E)/K$ e seja $\{g_n; n \in \mathbb{IN}\}$ uma sequência de funções em $C_b(X; E)/K$ que converge uniformemente para g sobre K . Para cada $n \in \mathbb{IN}$, consideremos a função $\tilde{g}_n \in C_b(X; E)$ tal que $\tilde{g}_n|_K = g_n$. Queremos mostrar que existe $f \in C_b(X; E)$ tal que $f|_K = g$.

Consideremos uma subsequência de funções g_{k_n} de $\{g_n; n \in \mathbb{N}\}$ tais que $\|g_{k_{n+1}} - g_{k_n}\| < \|\mu_n\|$, onde $\{\mu_n\}$ é uma sequência em E convergente a zero. Afirmamos que existe sequência $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ em $C_b(X; E)$ satisfazendo:

$$(1) f_n/K = g_{k_n}$$

$$(2) \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \|\mu_n\|, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Vamos supor encontradas f_1, \dots, f_n em $C_b(X; E)$ satisfazendo (1) e (2), isto é, $f_i/K = g_{k_i}$, $i = 1, \dots, n$ e

$$\|f_{i+1} - f_i\|_\infty \leq \|\mu_i\|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tomemos $f_{n+1} = g_{k_{n+1}}$ sobre K e consideremos o conjunto aberto e fechado

$$G_n = (\tilde{g}_{k_{n+1}} - f_n)^{-1}(B(0, \|\mu_n\|))$$

em X .

É claro que $K \subset G_n$, pois, sobre K ,

$$\|\tilde{g}_{k_{n+1}} - f_n\| = \|g_{k_{n+1}} - g_{k_n}\| \leq \|\mu_n\|$$

Vamos definir então a função f_{n+1} de X em E por

$$f_{n+1}(x) = \tilde{g}_{k_{n+1}}(x), \quad \text{se } x \in G_n;$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \mu_n, \quad \text{se } x \in X \setminus G_n,$$

que é contínua, porque G_n é aberto e fechado, e é limitada.

Em G_n , temos

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \|\mu_n\|$$

pela definição.

Em $X \setminus G_n$, temos

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x) + \mu_n - f_n(x)\| = \|\mu_n\|.$$

Disto e da construção de f_{n+1} decorre que f_{n+1} satisfaz as condições (1) e (2). Como $C_b(X; E)$ é completo, a série

$$f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n),$$

converge uniformemente a uma função $f \in C_b(X; E)$.

Para cada $x \in K$, temos:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_{n+1}(x) = g(x).$$

Logo $f/K = g/K$, o que mostra que f é a função procurada.

LEMA 0.17: Sejam F , E , X e K como no Teorema 0.15. Então $C_b(X; E)/K$ é denso em $C(K, E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Chamando $W = C_b(X; E)/K$, temos que $W(x) = E$, pa

ra todo $x \in K$, pois W contém as constantes. Além disso, o fato de X ser T_1 e 0-dimensional, implica que a subálgebra W de $C(K;E)$ separa pontos em K . Estamos pois nas condições do Teorema 3.5 [18] de onde segue o resultado.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 0.15: Consideremos uma função $f : K \rightarrow E$ contínua. Dos Lemas 0.16 e 0.17 segue que existe uma função $h \in C_b(X;E)$ tal que $h|_K = f$.

O conjunto $Y = h^{-1}(B(0, \|f\|_\infty))$ é aberto e fechado, por ser h contínua e $(E, \|\cdot\|)$ não arquimediano e temos claramente $K \subset Y$.

Tomando então

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in Y \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus Y, \end{cases}$$

temos $\tilde{f} \in C_b(X;E)$, $\tilde{f}|_K = f$ e $\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_{K,\infty}$, como queríamos.

DEFINIÇÃO 0.18: Seja E um espaço vetorial e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E . A terna $(E;\eta,\tau)$ é um espaço vetorial bitopológico (EVBT) se $\mathcal{IL}(\tau) \subset \mathcal{IL}(\eta)$.

OBSERVAÇÃO: Esta nomenclatura foi introduzida por Iyehen [10].

EXEMPLO 0.19: Se $\eta \subset \tau$ então $(E;\eta,\tau)$ é um EVBT. Em particular, $(C_b(X;F);\kappa,\sigma)$ é um EVBT. Outros exemplos serão vistos nos parágrafos 1 e 2.

§1 - A TOPOLOGIA MISTA $\gamma[\eta, \tau]$

Seja $\{(E_\lambda, \tau_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ uma família de espaços vetoriais topológicos sobre o mesmo anel de divisão não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$. Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $i_\lambda : E_\lambda \rightarrow E$ uma transformação linear. A topologia limite indutivo τ sobre E com respeito à família $\{(E_\lambda, \tau_\lambda, i_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$, (ver Balbi [4]) é a mais fina topologia de EVT sobre E tal que cada transformação i_λ é contínua. O limite indutivo desta família será denotado por $\varinjlim\{(E_\lambda, \tau_\lambda, i_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$. Como em Garling [9], generalizando esta definição, temos:

DEFINIÇÃO 1.1: Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja M_λ um subconjunto de E_λ . Seja j_λ a restrição de i_λ a M_λ . A topologia limite indutivo generalizado induzida sobre E pela família

$$\{(E_\lambda, \tau_\lambda, i_\lambda, M_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$$

é a mais fina das topologias de EVT sobre E para a qual cada uma das transformações j_λ , de $(M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda)$ em E , é contínua, onde $\hat{\tau}_\lambda$ denota a topologia induzida sobre M_λ por τ_λ .

Para construir essa topologia, consideremos o conjunto

$$\mathcal{S} = \{\tau_\alpha; \alpha \in I\}$$

de todas as topologias de EVT sobre E para as quais cada

transformação j_λ é contínua. Se (E, τ) é o limite indutivo

$$(E, \tau) = \lim_{\rightarrow} \{(E_\lambda, \tau_\lambda, i_\lambda); \lambda \in \Lambda\},$$

então para cada $\lambda \in \Lambda$, i_λ é contínua e portanto $j_\lambda = i_\lambda/M_\lambda$ é contínua também, isto é, $\tau \in \mathcal{G}$ e portanto $\mathcal{G} \neq \emptyset$.

Seja $\xi = \sup \{\tau_\alpha; \alpha \in I\}$. Por Bourbaki [5] ξ é uma topologia de EVT sobre E , já que todas as τ_α o são. Afirmamos que $\xi \in \mathcal{G}$. Com efeito, seja V um aberto básico em ξ , isto é,

$$V = \cap \{V_\alpha; \alpha \in J\},$$

onde J é um subconjunto finito de I e para cada $\alpha \in J$, V_α é um τ_α -aberto. Para cada $\lambda \in \Lambda$ temos

$$j_\lambda^{-1}(V) = \cap_{\alpha \in J} j_\lambda^{-1}(V_\alpha).$$

Agora, cada conjunto $j_\lambda^{-1}(V_\alpha)$ é $\hat{\tau}_\lambda$ -aberto, pois $\tau_\alpha \in \mathcal{G}$. Então, para cada $\lambda \in \Lambda$, $j_\lambda^{-1}(V)$ é aberto em M_λ na topologia $\hat{\tau}_\lambda$ e portanto j_λ é contínua. Logo $\xi \in \mathcal{G}$.

OBSERVAÇÃO 1.2: Como já observamos acima, a topologia limite indutivo τ está em \mathcal{G} . Isto mostra que

$$\tau \subset \xi.$$

OBSERVAÇÃO 1.3: Consideremos (G, μ) um EVT e E um espaço vetorial

sobre o mesmo anel de divisão $(F, |\cdot|)$. Consideremos a aplicação $f : E \rightarrow (G, \mu)$. A topologia imagem inversa de μ pela função f em E , denotada por $f^{-1}(\mu)$ é aquela cujos abertos são os subconjuntos $f^{-1}(A)$, $A \in \mu$. É claro que a topologia $f^{-1}(\mu)$ torna f contínua e é a menos fina das topologias em E para as quais isso acontece.

Considerando agora a transformação

$$j_\lambda : M_\lambda \rightarrow (E, \xi),$$

temos, pelo precedente, que

$$j_\lambda : (M_\lambda, j_\lambda^{-1}(\xi)) \rightarrow (E, \xi)$$

é contínua e portanto

$$j_\lambda^{-1}(\xi) \subset \hat{\tau}_\lambda.$$

EXEMPLO 1.4: Seja (E, η) um espaço vetorial topológico. Para cada $\lambda \in \Lambda$ seja M_λ um subconjunto de E e seja $\tau_\lambda = \eta$. Consideremos a transformação identidade i_λ em E e j_λ a inclusão de $(M_\lambda, \hat{\eta})$ em E . Neste caso, se ξ é a topologia limite indutivo generalizado sobre E com respeito à família

$$\{(E, \eta, i_\lambda, M_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$$

temos as seguintes propriedades:

$$(1) \quad \eta \subset \xi$$

DEMONSTRAÇÃO: Esta propriedade é claramente satisfeita, pois ξ é o supremo de \mathcal{G} e $\eta \in \mathcal{G}$.

$$(2) \quad (M_\lambda, \hat{\xi}) = (M_\lambda, \hat{\eta}) \quad \text{para cada } \lambda \in \Lambda.$$

DEMONSTRAÇÃO: Por (1), temos $\hat{\eta} \subset \hat{\xi}$.

Reciprocamente, se A é $\hat{\xi}$ -aberto em M_λ , então $A = V \cap M_\lambda$, onde V é um ξ -aberto em E . Então $\hat{\xi} \subset j_\lambda^{-1}(\xi)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. De (B), vem que $\hat{\xi} \subset \hat{\eta}$.

(3) ξ é a mais fina topologia de EVT sobre E tal que (2) é verdadeira.

DEMONSTRAÇÃO: Seja \mathcal{G}_1 o conjunto de todas as topologias τ de EVT sobre E tais que

$$(M_\lambda, \hat{\tau}) = (M_\lambda, \hat{\eta}), \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda \quad (*).$$

Por (2), $\xi \in \mathcal{G}_1$. Logo $\mathcal{G}_1 \neq \emptyset$.

Seja $\xi' = \sup \mathcal{G}_1$. É claro que $\xi \subset \xi'$.

Suponhamos agora que $\tau \in \mathcal{G}_1$. Então

$$(M_\lambda, \hat{\tau}) = (M_\lambda, \hat{\eta}),$$

para cada $\lambda \in \Lambda$, donde

$$j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \tau)$$

é contínua para cada $\lambda \in \Lambda$. De fato, seja A um subconjunto τ -aberto de E . Para cada $\lambda \in \Lambda$, $j_\lambda^{-1}(A) = A \cap M_\lambda$ é um subconjunto $\hat{\tau}$ -aberto em M_λ e por (*), $j_\lambda^{-1}(A)$ é $\hat{\eta}$ -aberto em M_λ . Assim, $\tau \in \mathcal{G}$ e portanto $\tau \subset \xi$.

Logo, $\xi' \subset \xi$.

DEFINIÇÃO 1.5: Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E . A *topologia mista* definida em E por η e τ , indicada por $\gamma[\eta, \tau]$, é a topologia limite indutivo generalizado induzida sobre E pela família

$$\{(E_B, \tau_B, i_B, M_B); B \in \mathcal{IL}(\tau)\}$$

onde, para cada $B \in \mathcal{IL}(\tau)$, $E_B = E$, $\tau_B = \eta$, i_B é a identidade em E e $M_B = B$.

OBSERVAÇÃO 1.6: Da Definição 1.5 e do Exemplo 1.4 segue-se que a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $\eta \subset \gamma[\eta, \tau]$
- (b) $\gamma[\eta, \tau]$ e η coincidem nos conjuntos τ -limitados de E .
- (c) $\gamma[\eta, \tau]$ é a mais fina das topologias de EVT sobre E que gozam da propriedade (b), isto é, se μ é uma topologia de EVT sobre E que coincide com η nos conjuntos τ -limitados, então $\mu \subset \gamma[\eta, \tau]$.

Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E e $\mathcal{B} = \{B_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{IL}(\tau)$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sejam $E_\lambda = E$ e $\tau_\lambda = \eta$. Seja ainda $i_\lambda : E_\lambda \rightarrow E$ a aplicação identidade e j_λ a restrição de i_λ a B_λ . Indicaremos por $\gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}]$ a topologia limite indutivo generalizado induzida em E pela família $\{(E_\lambda, \tau_\lambda, i_\lambda, B_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$. Claramente, temos

$$\gamma[\eta, \tau; \mathcal{IL}(\tau)] = \gamma[\eta, \tau].$$

PROPOSIÇÃO 1.7: Nas notações acima, se $F = \{L_\delta; \delta \in \Delta\}$ é um sistema fundamental de subconjuntos τ -limitados de E , então

$$\gamma[\eta, \tau; F] \subset \gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}].$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela definição de $\gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}]$, basta mostrar que $j_\lambda : (B_\lambda, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \gamma[\eta, \tau; F])$ é contínua para cada $B_\lambda \in \mathcal{B}$. Como F é um sistema fundamental de τ -limitados, dado $B_\lambda \in \mathcal{B}$, existe $L_\delta \in F$ tal que $B_\lambda \subset L_\delta$. Pela definição de $\gamma[\eta, \tau; F]$, a transformação $j_\delta : (L_\delta, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \gamma[\eta, \tau; F])$ é contínua e portanto $j_\lambda = j_\delta/B$ também é.

Logo $\gamma[\eta, \tau; F] \subset \gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}]$.

COROLÁRIO 1.8: Se F e F' são dois sistemas fundamentais de subconjuntos τ -limitados de E , então

$$\gamma[\eta, \tau; F] = \gamma[\eta, \tau; F'] = \gamma[\eta, \tau].$$

Em particular, $\gamma[\eta, \tau; F] = \gamma[\eta, \tau]$ para todo sistema fundamental F de τ -limitados.

OBSERVAÇÃO 1.9: Mostramos acima que a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$ está determinada por qualquer sistema fundamental F de subconjuntos τ -limitados de E , no sentido de que $\gamma[\eta, \tau; F] = \gamma[\eta, \tau]$.

PROPOSIÇÃO 1.10: Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Sejam η, τ e ξ topologias de EVT sobre E . Se $\mathbb{I}(\tau) \subset \mathbb{I}(\xi)$ então $\gamma[\eta, \xi] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Por definição, a topologia $\gamma[\eta, \xi]$ coincide com η nos elementos de $\mathbb{I}(\xi)$ e portanto nos elementos de $\mathbb{I}(\tau)$. Mas $\gamma[\eta, \tau]$ é a mais fina das topologias de EVT sobre E que coincidem com η nos elementos de $\mathbb{I}(\tau)$. Logo $\gamma[\eta, \xi] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

COROLÁRIO 1.11: Se $\mathbb{I}(\tau) = \mathbb{I}(\xi)$ então $\gamma[\eta, \tau] = \gamma[\eta, \xi]$.

COROLÁRIO 1.12: Se $\xi \subset \tau$, então $\gamma[\eta, \xi] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Do fato de $\xi \subset \tau$ segue que $\mathbb{I}(\tau) \subset \mathbb{I}(\xi)$, e o resultado segue da Proposição 1.10.

COROLÁRIO 1.13: Se τ^t denota a topologia tonelada associada a τ em E (ver Prolla [17]) então $\gamma[\eta, \tau] \subset \gamma[\eta, \tau^t]$.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é verdadeiro, pois $\tau \subset \tau^t$.

COROLÁRIO 1.14: Seja τ^β a topologia bornológica associada a τ (ver Prolla [17]). Se σ é uma topologia de EVT sobre E tal que $\tau \subset \sigma \subset \tau^\beta$, então $\gamma[\eta, \sigma] = \gamma[\eta, \tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\tau \subset \sigma \subset \tau^\beta$, então $\mathbb{I}(\tau^\beta) \subset \mathbb{I}(\sigma) \subset \mathbb{I}(\tau)$. Mas da construção de τ^β (ver Prolla [16]), $\mathbb{I}(\tau) = \mathbb{I}(\tau^\beta)$. Logo $\mathbb{I}(\sigma) = \mathbb{I}(\tau)$, e portanto $\gamma[\eta, \sigma] = \gamma[\eta, \tau]$.

COROLÁRIO 1.15: Se τ^{qt} é a topologia quase-tonelada associada a τ em E (ver Balbi [4]), então $\gamma[\eta, \tau^{qt}] = \gamma[\eta, \tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Da Proposição 6.6 Balbi [4], segue que $\tau \subset \tau^{qt} \subset \tau^\beta$. O resultado segue então do Corolário 1.14.

PROPOSIÇÃO 1.16: Nas notações da Definição 1.1, seja ξ a topologia limite indutivo generalizado induzida em E pela família

$$\{(E_\lambda, \tau_\lambda, i_\lambda, M_\lambda); \lambda \in \Lambda\}.$$

Seja (G, ν) um EVT sobre o mesmo anel de divisão $(F, |\cdot|)$. Uma transformação linear $T: E \rightarrow G$ pertence ao espaço $\mathcal{L}((E, \xi), (G, \nu))$ se, e somente se, para cada $\lambda \in \Lambda$, a aplicação

$$T \circ j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (G, \nu)$$

$\bar{\xi}$ é contínua. Mais ainda, entre todas as topologias de EVT sobre E , $\bar{\xi}$ é a única com essa propriedade.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a transformação $T \in \mathcal{L}((E, \xi); (G, \nu))$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, temos $(M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) = (M_\lambda, \hat{\xi})$, o que torna a aplicação $j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (E, \xi)$ contínua. Disto e da continuidade de T , decorre que a aplicação $T \circ j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (G, \nu)$ é contínua.

Seja agora $T : E \rightarrow G$ uma transformação linear tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, a aplicação $T \circ j_\lambda$ é contínua. Como T leva (E, ξ) em (G, ν) , T é contínua se, e somente se, tivermos $\mu \subset \xi$, onde $\mu = T^{-1}(\nu)$. Logo basta provarmos que $\mu \in \mathcal{C}$ isto é, que

$$j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (E, \mu)$$

é contínua. Isto segue do fato que todo subconjunto μ -aberto de E é do tipo $T^{-1}(A)$, onde A é ν -aberto em G .

Vamos mostrar a segunda parte. Para isso consideremos o conjunto \mathcal{C} de todas as topologias τ de EVT sobre E tais que para cada $\lambda \in \Lambda$, a aplicação $j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (E, \tau)$ é contínua. Seja \mathcal{C}' o conjunto de todas as topologias τ' de EVT sobre E tais que para todo EVT (G, ν) e para toda aplicação linear $T : E \rightarrow G$, $T \in \mathcal{L}((E, \tau'), (G, \nu))$ se, e somente se, a aplicação

$$T \circ j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (G, \nu)$$

é contínua.

Observemos inicialmente que $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$. Com efeito, seja $\tau' \in \mathcal{G}'$. Tomando $G = E$, $v = \tau'$ e considerando T a identidade sobre E , T pertence então a $\mathcal{L}((E, \tau'), (G, v))$. Resulta que

$$T \circ j_\lambda = j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (E, \tau')$$

é contínua, para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo $\tau' \in \mathcal{G}$.

Como $\xi = \sup \mathcal{G}$, resulta então que

$$(1) \quad \tau' \subset \xi, \text{ para todo } \tau' \in \mathcal{G}'.$$

Afirmamos agora que para qualquer $\tau' \in \mathcal{G}'$ e qualquer $\tau \in \mathcal{G}$, temos $\tau \subset \tau'$, ou seja $\text{Id} : (E, \tau') \rightarrow (E, \tau)$ é contínua. Com efeito, seja $\tau' \in \mathcal{G}'$ e $\tau \in \mathcal{G}$. Como $\tau \in \mathcal{G}$, temos que

$$\text{Id} \circ j_\lambda = j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \rightarrow (E, \tau)$$

é contínua. Mas $\tau' \in \mathcal{G}'$, logo decorre daí que $\text{Id} : (E, \tau') \rightarrow (E, \tau)$ é contínua e portanto $\tau \subset \tau'$.

Aplicando a observação anterior à topologia $\xi = \sup \mathcal{G}$, temos

$$(2) \quad \xi \subset \tau', \text{ para todo } \tau' \in \mathcal{G}'.$$

De (1) e (2) vem que $\mathcal{G}' = \{\xi\}$, como queríamos.

COROLÁRIO 1.17: *Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E e (G, v) um EVT sobre*

$(F, |\cdot|)$. Uma transformação linear $T : E \rightarrow G$ pertence ao espaço $\mathcal{L}((E, \gamma[\eta, \tau]), (G, \nu))$ se, e somente se, sua restrição a cada elemento de $\mathcal{H}(\tau)$ é contínua. Ainda mais, entre todas as topologias de EVT sobre E , $\gamma[\eta, \tau]$ é a única com essa propriedade.

Observamos que, na verdade, o resultado acima continua verdadeiro se tomarmos apenas um sistema fundamental $\mathcal{B} \subset \mathcal{H}(\tau)$.

COROLÁRIO 1.18: Sejam (E, τ) e (G, ν) como no Corolário 1.17. Se $\mathcal{H}(\tau)$ possui um sistema fundamental de conjuntos η -metrizáveis, então T é $\gamma[\eta, \tau]$ -contínua se, e somente se, T é $\gamma[\eta, \tau]$ -seqüencialmente contínua.

DEMONSTRAÇÃO: Se T é $\gamma[\eta, \tau]$ -contínua, claramente T é $\gamma[\eta, \tau]$ -seqüencialmente contínua.

Reciprocamente, suponhamos que T é $\gamma[\eta, \tau]$ -seqüencialmente contínua. Por hipótese existe sistema fundamental \mathcal{B} de subconjuntos τ -limitados que são η -metrizáveis. Se $B \in \mathcal{B}$, segue que T/B é $\hat{\eta}$ -seqüencialmente contínua. Como B é $\hat{\eta}$ -metrizável, T/B é $\hat{\eta}$ -contínua, o que implica, pelo Corolário 1.17 que T é $\gamma[\eta, \tau]$ -contínua.

PROPOSIÇÃO 1.19: Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E . Então

$$\gamma[\eta, \tau] = \gamma[\gamma[\eta, \tau], \tau].$$

DEMONSTRAÇÃO: Por definição, $\gamma[\eta, \tau]$ é a mais fina topologia de EVT sobre E tal que, para cada $B \in \mathcal{L}(\tau)$, $(B, \hat{\gamma}[\eta, \tau]) = (B, \hat{\eta})$. Por outro lado, $\gamma[\gamma[\eta, \tau], \tau]$ é a mais fina topologia de EVT sobre E tal que para cada $B \in \mathcal{L}(\tau)$, $(B, \hat{\gamma}[\gamma[\eta, \tau], \tau]) = (B, \hat{\gamma}[\eta, \tau])$. Então $(B, \hat{\gamma}[\gamma[\eta, \tau], \tau]) = (B, \hat{\eta})$ para cada $B \in \mathcal{L}(\tau)$. Portanto $\gamma[\gamma[\eta, \tau], \tau] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

Consideremos agora a aplicação identidade

$$I : (E, \gamma[\gamma[\eta, \tau], \tau]) \rightarrow (E, \gamma[\eta, \tau]).$$

Para cada $B \in \mathcal{L}(\tau)$, a restrição

$$I/B : (B, \hat{\gamma}[\eta, \tau]) \rightarrow (E, \gamma[\eta, \tau])$$

é claramente contínua. Logo, pelo Corolário 1.17, I é contínua, donde $\gamma[\eta, \tau] \subset \gamma[\gamma[\eta, \tau], \tau]$.

LEMA 1.20: Sejam E e G dois espaços vetoriais topológicos sobre $(F, |\cdot|)$ e $T : E \rightarrow G$ uma transformação linear. Seja M um subconjunto equilibrado e semiconvexo de E . A transformação $S = T/M$ é uniformemente contínua em M se, e somente se, é contínua na origem em M .

DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor inicialmente S contínua na origem. Como M é semiconvexo, existe $\lambda \in F^*$ tal que $M + M \subset \lambda M$.

Seja V uma vizinhança equilibrada da origem em G . Da

continuidade da aplicação $x \mapsto \lambda x$, segue que existe uma vizinhança equilibrada W da origem em G tal que $\lambda W \subset V$.

Como S é contínua na origem, existe uma vizinhança U da origem em E tal que $S(U \cap M) \subset W$. Consideremos a vizinhança U' da origem em E dada por $U' = \lambda U$ e seja $a \in M$.

Se $x \in (a + U') \cap M$, então

$$(x - a) \in U' \cap (M - M) \subset \lambda U \cap \lambda M \subset \lambda(U \cap M),$$

desde que M é semiconvexo e equilibrado. Então

$$S(x - a) \in S[\lambda(U \cap M)] \subset \lambda W \subset V.$$

Assim $S(x) \in S(a) + V$ e portanto S é uniformemente contínua em M . Claramente temos a recíproca.

PROPOSIÇÃO 1.21: *Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$ e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E . Seja B um sistema fundamental de subconjuntos τ -limitados de E que são semiconvexos e equilibrados e seja F o conjunto de todas as cordas $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E tais que para cada $B \in B$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B . Então o conjunto A de todos os nós de todas as cordas de F é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\gamma[\eta, \tau]$ em E .*

DEMONSTRAÇÃO: F é um conjunto dirigido. De fato, sejam $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

e $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas cordas de F . Seja $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ corda em E tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n = U_n \cap V_n$. Seja $B \in \mathcal{B}$. Como $U_n \cap B$ e $V_n \cap B$ são $\hat{\eta}$ -vizinhanças da origem em B segue que

$$W_n \cap B = (U_n \cap V_n) \cap B = (U_n \cap B) \cap (V_n \cap B)$$

é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B . Logo $W \in F$. O conjunto A é então um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia τ_F de EVT sobre E .

Afirmamos que $\gamma_F = \gamma[\eta, \tau]$.

Conforme Observação 1.9, a topologia $\gamma[\eta, \tau]$ está determinada pelo sistema fundamental de τ -limitados \mathcal{B} , isto é,

$$\gamma[\eta, \tau] = \gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}].$$

1) Vamos provar inicialmente que $\tau_F \subset \gamma[\eta, \tau]$.

Conforme a definição de $\gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}]$, basta provarmos que para cada $B \in \mathcal{B}$, a inclusão $i_B : (B, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \tau_F)$ é contínua. Seja $U \in F$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap B = i_B^{-1}(U_n)$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B . Assim i_B é contínua na origem. Como B é se miconvexo e equilibrado, segue do Lema 1.20 que i_B é contínua.

2) Para provarmos que $\gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}] \subset \tau_F$, consideremos a aplicação identidade I de (E, τ_F) em $(E, \gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}])$. Seja V uma $\gamma[\eta, \tau; \mathcal{B}]$ -vizinhança da origem.

Seja $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma corda $\gamma[\eta, \tau; B]$ -topológica em E com $W_1 \subset V$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n é uma $\gamma[\eta, \tau; B]$ -vizinhança da origem.

Agora pela definição de $\gamma[\eta, \tau; B]$, para cada $B \in \mathcal{B}$ a inclusão $I_B : (B, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \gamma[\eta, \tau; B])$ é contínua. Assim,

$$I_B^{-1}(W_n) = W_n \cap B$$

é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B e portanto $W \in F$, ou seja, W é τ_F -topológica. Mas então W_1 é τ_F -vizinhança da origem e portanto, o mesmo é verdadeiro para V . Logo I é contínua.

COROLÁRIO 1.22: *Sejam E, η, τ, B e F como na Proposição 1.21. Se $(E; \eta, \tau)$ for um EVT bitopológico e m o conjunto formada pelas cordas pertencentes a F que são τ -bornívoras, então $\tau_m = \gamma[\eta, \tau]$.*

DEMONSTRAÇÃO: m é um conjunto dirigido, pois se as cordas $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ estão em m então a corda

$$W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}} = (U_n \cap V_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

é também τ -bornívora; além disso, se para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap B$ e $V_n \cap B$ são $\hat{\eta}$ -vizinhanças da origem em B , então

$$W_n \cap B = (U_n \cap B) \cap (V_n \cap B)$$

também o é. Logo $W \in m$.

Vamos mostrar agora que a topologia τ_m gerada por m é a topologia mista $\gamma[\eta, \tau] = \gamma[\eta, \tau; \beta]$. Pela Proposição 1.21, basta demonstrar que $\tau_m = \tau_F$.

A inclusão $\tau_m \subset \tau_F$ é evidente, pois $m \subset F$.

Reciprocamente, seja $U \in F$. Pela Proposição 1.21, U é $\gamma[\eta, \tau]$ -topológica e portanto $\gamma[\eta, \tau]$ -bornívora. Como $(E; \eta, \tau)$ é um EVT bitopológico, temos $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$. Assim sendo, U é τ -bornívora, logo $U \in m$.

PROPOSIÇÃO 1.23: Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Então $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT se, e somente se, $\eta \subset \tau^\beta$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $(E; \eta, \tau)$ um EVBT. Então $\mathbb{L}(\tau^\beta) = \mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\eta)$. Decorre disto que a aplicação identidade $I : (E, \tau^\beta) \rightarrow (E, \eta)$ é limitada. Como (E, τ^β) é bornológico, I é contínua. Portanto $\eta \subset \tau^\beta$.

Reciprocamente, seja $\eta \subset \tau^\beta$. Então $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\tau^\beta) \subset \mathbb{L}(\eta)$ o que mostra que $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT.

PROPOSIÇÃO 1.24: Seja E um espaço vetorial sobre $(F, |\cdot|)$. Sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E . Então $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT se, e somente se, $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos inicialmente que $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT. Seja $B \in \mathbb{L}(\tau)$ e consideremos as sequências $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ de

elementos de B e $\{\lambda_n; n \in \mathbb{IN}\}$ de elementos de F^* tal que $|\lambda_n| \rightarrow 0$. Como $B \in \mathbb{IL}(\tau)$, a sequência $\{\lambda_n x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ é τ -convergente a zero. Segue-se daí que o conjunto

$$L = \{\lambda_n x_n; n \in \mathbb{IN}\} \cup \{0\}$$

é τ -limitado. Portanto, pela definição de $\gamma[\eta, \tau]$, temos

$$(L, \hat{\gamma}[\eta, \tau]) = (L, \hat{\eta}) \quad (1).$$

Agora, como $B \in \mathbb{IL}(\eta)$ por ser $(E; \eta, \tau)$ um EVBT, a sequência $\{\lambda_n x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ converge a zero também na topologia η . De (1), a sequência $\{\lambda_n x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ converge a zero na topologia $\gamma[\eta, \tau]$. Logo $B \subset \mathbb{IL}(\gamma[\eta, \tau])$.

Consideremos agora $\mathbb{IL}(\tau) \subset \mathbb{IL}(\gamma[\eta, \tau])$. Como da definição de $\gamma[\eta, \tau]$ temos $\eta \subset \gamma[\eta, \tau]$, segue que $\mathbb{IL}(\gamma[\eta, \tau]) \subset \mathbb{IL}(\eta)$.

Logo $\mathbb{IL}(\tau) \subset \mathbb{IL}(\eta)$ e portanto $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT.

COROLÁRIO 1.25: Se $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT, então $(E; \gamma[\eta, \tau], \tau)$ também o é.

COROLÁRIO 1.26: Se $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT, então temos $\gamma[\eta, \tau] \subset \tau^\beta$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 1.24, temos $\mathbb{IL}(\tau^\beta) = \mathbb{IL}(\tau) \subset \mathbb{IL}(\gamma[\eta, \tau])$. Logo a aplicação identidade $I : (E, \tau^\beta) \rightarrow (E, \gamma[\eta, \tau])$ é limitada. Como (E, τ^β) é bornológico, I é contínua. Portanto $\gamma[\eta, \tau] \subset \tau^\beta$.

COROLÁRIO 1.27: Se $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT, então temos

$$\gamma[\eta, \gamma[\eta, \tau]] \subset \gamma[\eta, \tau].$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $(E; \eta, \tau)$ é EVBT, temos $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$. Então, pela Proposição 1.10, temos $\gamma[\eta, \gamma[\eta, \tau]] \subset \gamma[\eta, \tau]$, como queríamos.

A proposição 1.24 nos mostra que em todo espaço vetorial bi-topológico $(E; \eta, \tau)$ se tem $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$. Gostaríamos de saber sob que condições sobre E , η e τ é válida a igualdade.

Vale o seguinte resultado:

TEOREMA 1.28: Seja $(E; \eta, \tau)$ um EVBT. Se (E, τ) é um EVT quase convexo cuja topologia é η -fechada, então $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$.

Para uma demonstração deste teorema precisaremos do seguinte lema:

LEMA 1.29: Sejam E , η e τ como no Teorema 1.28. Se uma sequência $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ de elementos de E converge a zero na topologia $\gamma[\eta, \tau]$, então o conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ é τ -limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ sequência $\gamma[\eta, \tau]$ -convergente a zero em E e seja V uma τ -vizinhança η -fechada da origem em E .

Se o conjunto $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ não é τ -limitado, então existe uma subsequência $\{x_{k(n)}; n \in \mathbb{IN}\}$ de $\{x_n\}$ tal que para todo

$n \in \mathbb{IN}$, existe $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_n| \geq n$, mas $x_{k(n)} \notin \lambda_n V$.

Para cada $n \in \mathbb{IN}$, $\lambda_n V$ é η -fechada, logo existe uma sequência $\{U^n; n \in \mathbb{IN}\}$ de η -vizinhanças da origem tal que

$$x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U^n. \quad (A).$$

Seja $\lambda \in F^*$ fixado com $0 < |\lambda| < 1$. Seja $V = (V_m)_{m \in \mathbb{IN}}$ uma corda τ -topológica tal que $V_1 \subset V$ e $V_{m+1} \subset \lambda V_m$ para todo $m \geq 1$. Consideremos também uma corda η -topológica $U^n = (U_m^n)_{m \in \mathbb{IN}}$ satisfazendo $U_1^n \subset U^n$ e $U_{m+1}^n \subset \lambda U_m^n$ para todo $m \geq 1$. Vamos definir, para cada $m \in \mathbb{IN}$, o conjunto

$$W_m = \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} (\lambda_n V_m + U_m^n).$$

Afirmamos que $W = (W_m)_{m \in \mathbb{IN}}$ é uma corda $\gamma[\eta, \tau]$ -topológica em E . Para verificarmos, vamos mostrar inicialmente que W é uma corda:

(1) a) Para cada $m \in \mathbb{IN}$, W_m é equilibrado.

Com efeito, seja $\lambda \in F^*$ com $0 < |\lambda| < 1$ e seja $m \in \mathbb{IN}$.
Então

$$\lambda W_m \subset \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} \lambda (\lambda_n V_m + U_m^n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} (\lambda_n V_m + U_m^n) = W_m,$$

porque para todo $n, m \in \mathbb{IN}$, $\lambda_n V_m$ e U_m^n são equilibradas. Assim,

W_m é equilibrado.

(1) b) Para cada $m \in \mathbb{IN}$, W_m é absorvente.

Basta observarmos que, para cada $m \in \mathbb{IN}$, temos

$$W_m \supset \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} \lambda_n V_m \supset V_m,$$

e V_m é absorvente.

(2) Para cada $m \in \mathbb{IN}$, $W_{m+1} + W_{m+1} \subset W_m$.

De fato, se $x \in W_{m+1} + W_{m+1}$, então

$$\begin{aligned} x &\in \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} (\lambda_n V_{m+1} + U_{m+1}^n) + \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} (\lambda_n V_{m+1} + U_{m+1}^n) \subset \\ &\subset \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} [\lambda_n (V_{m+1} + V_{m+1}) + (U_{m+1}^n + U_{m+1}^n)] \subset \\ &\subset \bigcap_{n \in \mathbb{IN}} (\lambda_n V_m + U_m^n), \end{aligned}$$

porque U^n e V são cordas.

Portanto $x \in W_m$.

(3) Para algum $\lambda \in F$, $0 < |\lambda| < 1$ (e daí para todo $\lambda \in F^*$),
dado $m \in \mathbb{IN}$, existe $p > m$ tal que $W_p \subset \lambda W_m$.

Isto é claro, pois, da construção de U_m^n e de V_m , dado $m \in \mathbb{IN}$,

temos $U_{m+1}^n \subset \lambda U_m^n$ e $V_{m+1} \subset \lambda V_m$. Assim, temos

$$W_{m+1} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n V_{m+1} + U_{m+1}^n) \subset \\ \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda \lambda_n V_m + \lambda U_m^n) = \lambda W_m.$$

Portanto W é uma corda em E .

Consideremos agora um sistema fundamental $\mathcal{B} \subset \mathbb{I}(\tau)$ cujos elementos são semiconvexos e equilibrados. Sejam $B \in \mathcal{B}$ e $m \in \mathbb{N}$. Como B é τ -limitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset \lambda V_m$ sempre que $|\lambda| \geq n_0$. Assim,

$$W_m \cap B = \bigcap_{n=1}^{n_0} [(\lambda_n V_m + U_m^n) \cap B]$$

é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem, pois para cada $m \in \mathbb{N}$, $(\lambda_n V_m + U_m^n) \cap B$ contém o conjunto $U_m^n \cap B$, que é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem.

Logo, pela Proposição 1.21, a corda W é $\gamma[\eta, \tau]$ -topológica.

Agora, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\lambda_n V + U^n$ contém W_1 e de (A) vem que $x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $x_{k(n)} \notin W_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como W_1 é $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem, isto contradiz o fato de $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ convergir a zero na topologia $\gamma[\eta, \tau]$.

Logo $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{I}(\tau)$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.28: Da Proposição 1.24, temos

$$\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau]).$$

Vamos mostrar a segunda inclusão. Para isso consideremos um subconjunto $\gamma[\eta, \tau]$ -limitado B de E , uma seqüência $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de B e uma seqüência $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ em F^* com $|\lambda_n| \rightarrow 0$.

Seja $\mu \in F^*$ tal que $|\mu| < 1$. Vamos construir uma seqüência $\{\mu_n; n \in \mathbb{N}\}$ em F^* da seguinte maneira: para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\mu^{2k_n-2}| < |\lambda_n| \leq |\mu^{2k_n}|;$$

tomemos então $\mu_n = \mu^{2k_n}$ e vamos provar que $|\mu_n| \rightarrow 0$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $|\lambda_n| \rightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, temos $|\lambda_n| < \varepsilon$. Seja $n \geq n_0$. Como

$$|\mu^{2k_n-2}| < |\lambda_n|,$$

temos

$$|\mu^{2k_n}| \cdot |\mu^{-2}| < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$|\mu_n| < \varepsilon |\mu|^2 < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$.

Mostramos então que $|\mu_n| \rightarrow 0$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $v_n \in F$ tal que $\sqrt{\mu_n} = v_n$ e a sequência $\{|v_n|; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero.

Como $B \in \mathcal{IL}(\gamma[\eta, \tau])$ e $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é sequência em B , $\{v_n x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia $\gamma[\eta, \tau]$. Pelo Lema 1.29, o conjunto $\{v_n x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é τ -limitado. Logo, $\{\mu_n x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia τ e portanto, dada uma τ -vizinhança equilibrada V da origem em E , existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$, temos $\mu_n x_n \in V$. Da construção da sequência $\{\mu_n; n \in \mathbb{N}\}$ vem que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| \leq |\mu_n|$, ou seja, $|\lambda_n \mu_n^{-1}| \leq 1$. Logo $\lambda_n x_n = (\lambda_n \mu_n^{-1}) \mu_n x_n \in V$ para todo $n \geq n_1$, o que implica que $\{\lambda_n x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia τ .

Isto mostra que B é τ -limitado.

TEOREMA 1.30: *Sejam E , η e τ como no Teorema 1.28. Uma sequência em E é $\gamma[\eta, \tau]$ -convergente a zero se, e somente se, é τ -limitada e η -convergente a zero.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência $\gamma[\eta, \tau]$ -convergente a zero em E . Pelo Lema 1.29, ela é τ -limitada. Ainda mais, como $\eta \subset \gamma[\eta, \tau]$, segue que $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia η .

A recíproca segue imediatamente do fato de η e $\gamma[\eta, \tau]$ coincidirem nos subconjuntos τ -limitados de E .

EXEMPLO 1.31: Seja $(F, |\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente

valorizado não arquimediano. Um exemplo de uma terna que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.28 pode ser dado por $(C_b(X;F); \kappa, \sigma)$ onde X é um espaço topológico localmente compacto, κ denota a topologia da convergência uniforme sobre as partes compactas de X e σ a topologia da norma $\sup\|\cdot\|_\infty$, onde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

para toda função f pertencente ao espaço $C_b(X;F)$ das funções contínuas e limitadas de X em F .

Com efeito, sabemos que $\kappa \subset \sigma$, o que torna a terna

$$(C_b(X;F); \kappa, \sigma)$$

um EVBT. Como $(C_b(X;F), \sigma)$ é normado, segue do Corolário 0.7 que é um EVT quase convexo.

Além disso, se S denota a família de seminormas $\{p_K : K \subset X \text{ compacto}\}$ que define a topologia κ , vale $\|\cdot\|_\infty = \sup S$. Logo a bola unitária B de $(C_b(X;F), \|\cdot\|_\infty)$ é κ -fechada do que segue que a topologia definida pela norma $\|\cdot\|_\infty$ em $(C_b(X;F))$ é κ -fechada.

Do Teorema 1.28 concluímos que σ e $\gamma[\kappa, \sigma]$ possuem os mesmos limitados.

Vamos dar agora uma caracterização de uma topologia relacionada com $\gamma[\eta, \tau]$ no caso em que (E, η) é localmente semiconvexa.

Seja \mathcal{B} um sistema fundamental de subconjuntos τ -limitados de

E que são equilibrados. Consideremos a coleção \mathcal{W} de todos os subconjuntos não vazios, equilibrados, absorventes e semiconvexos W de E tais que para todo $B \in \mathcal{B}$, o conjunto $W \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B . Vamos mostrar que \mathcal{W} constitui um sistema fundamental de vizinhanças da origem para alguma topologia de EVT sobre E que é localmente semiconvexa. Para isso, temos:

(0) $\mathcal{W} \neq \emptyset$, pois $E \cap B = B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B e E é semiconvexo, equilibrado e absorvente. Além disso, $\emptyset \notin \mathcal{W}$, pois $0 \notin \emptyset$.

(1) Dados W_1 e W_2 em \mathcal{W} , existe $W \in \mathcal{W}$ tal que

$$W \subset W_1 \cap W_2 .$$

O conjunto $W = W_1 \cap W_2$ é claramente equilibrado, absorvente e não vazio. Vamos mostrar que é também semiconvexo. Como W_1 e W_2 são semiconvexos, existem $\alpha_1 \in F^*$ e $\alpha_2 \in F^*$ tais que

$$W_1 + W_1 \subset \alpha_1 W_1$$

e

$$W_2 + W_2 \subset \alpha_2 W_2 .$$

Sejam x e y elementos de W . Então $x + y \in \alpha_1 W_1$ porque x e y estão em W_1 e $x + y \in \alpha_2 W_2$ porque x e y estão em W_2 .

Seja $\alpha_0 \in F$ tal que $|\alpha_0| = \max \{ |\alpha_1|, |\alpha_2| \}$. Assim,

$$x + y \in \alpha_0 W_1 \cap \alpha_0 W_2 = \alpha_0 (W_1 \cap W_2) = \alpha_0 W,$$

o que mostra que W é semiconvexo.

Além disso, para todo $B \in \mathcal{B}$, temos que

$$(W_1 \cap W_2) \cap B = (W_1 \cap B) \cap (W_2 \cap B)$$

é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B como intersecção de duas delas.

Logo $W \subset \mathcal{W}$.

(2) a) *Todo elemento $W \in \mathcal{W}$ é equilibrado e absorvente.*

Isto vem da definição de \mathcal{W} .

(2) b) *Dado $W \in \mathcal{W}$, existe $V \in \mathcal{W}$ tal que $V + V \subset W$.*

Com efeito, como W é semiconvexo, existe $\alpha \in F^*$ tal que $W + W \subset \alpha W$. Tomando $V = \alpha^{-1}W$, temos claramente $V + V \subset W$ e V é equilibrado e absorvente. De $W + W \subset \alpha W$ vem que

$$\alpha^{-1}W + \alpha^{-1}W \subset \alpha^{-1}(\alpha W) = \alpha(\alpha^{-1}W),$$

porque W é equilibrado. Logo temos $V + V \subset \alpha V$ e portanto V é semiconvexo.

Resta-nos mostrar que para todo $B \in \mathcal{B}$, o conjunto $V \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B . Com efeito, se $B \in \mathcal{B}$, então $W \cap \alpha B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em αB . Logo existe uma η -vizinhança U da origem em E tal que $U \cap (\alpha B) \subset W \cap (\alpha B)$, ou seja,

$(\alpha^{-1}U) \cap B \subset (\alpha^{-1}W) \cap B$, isto é, $V \cap B = (\alpha^{-1}W) \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B .

Logo $V \in \mathcal{W}$.

(2) c) Para algum $\lambda \in F$, com $0 < |\lambda| < 1$, dado $W \in \mathcal{W}$, existe $V \in \mathcal{W}$ tal que $V \subset \lambda W$.

Consideremos $\lambda_0 \in F$ com $0 < |\lambda_0| < 1$ fixo e tomemos $V = \lambda_0 W$. É claro que V é equilibrado, absorvente e não vazio. Além disso, existe $\alpha \in F^*$ tal que $W + W \subset \alpha W$. Logo

$$V + V = \lambda_0 W + \lambda_0 W = \lambda_0 (W + W) \subset \lambda_0 (\alpha W) = \alpha (\lambda_0 W) = \alpha V$$

porque $|\lambda_0 \alpha| = |\alpha \lambda_0|$ e W é equilibrado. Logo V é semiconvexo.

Vamos mostrar que para todo $B \in \mathcal{B}$, $V \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B . De fato, se $B \in \mathcal{B}$, $W \cap (\lambda_0^{-1}B)$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em $\lambda_0^{-1}B \in \mathcal{B}$. Logo existe uma η -vizinhança U da origem em E tal que $U \cap (\lambda^{-1}B) \subset W \cap (\lambda_0^{-1}B)$, ou seja,

$$(\lambda_0 U) \cap B \subset (\lambda_0 W) \cap B = V \cap B.$$

Com isso mostramos que $V \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B .

Logo $V \in \mathcal{W}$.

De (0), (1) e (2) e usando o Teorema 2.15, Prolla [17], concluímos que a família \mathcal{W} forma um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT localmente semiconvexa

sobre E , a qual denotaremos por $\gamma'[\eta, \tau]$.

PROPOSIÇÃO 1.32: Se $B \in \mathcal{B}$ for semiconvexo, então a inclusão

$$j_B : (B, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \gamma'[\eta, \tau])$$

é contínua.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado segue claramente da definição de \mathcal{W} e do Lema 1.20.

Observamos que se (E, τ) for um EVT quase convexo, da Proposição 1.32 e da definição de \mathcal{G} , obtemos $\gamma'[\eta, \tau] \in \mathcal{G}$, isto é, $\gamma'[\eta, \tau] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

Denotemos por \mathcal{G}_{sc} a família de todas as topologias de EVT localmente semiconvexas μ sobre E tais que para cada $B \in \mathcal{B}$ a inclusão $j_B : (B, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \mu)$ é contínua.

PROPOSIÇÃO 1.33: Se (E, τ) for um EVT quase-convexo então

$$\gamma'[\eta, \tau] = \sup \mathcal{G}_{sc}$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que os elementos de \mathcal{B} sejam semiconvexos. Da Proposição 1.32 segue que $\gamma'[\eta, \tau] \in \mathcal{G}_{sc}$. Consideremos agora $\mu \in \mathcal{G}_{sc}$. Se V é uma μ -vizinhança equilibrada e semiconvexa de origem em E , da definição de \mathcal{G}_{sc} segue que para todo $B \in \mathcal{B}$, o conjunto $V \cap B = j_B^{-1}(V)$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem

em B . Logo, da definição de W segue que $V \in \mathcal{W}$ e portanto V é uma $\gamma'[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem em E . Portanto $\mu \subset \gamma'[\eta, \tau]$. Isto completa a demonstração.

COROLÁRIO 1.34: *Suponhamos que os elementos de \mathcal{B} são semiconvexos e que (E, τ) é um EVT localmente semiconvexo. Então:*

- (a) $\eta \subset \gamma'[\eta, \tau]$
- (b) η e $\gamma'[\eta, \tau]$ coincidem sobre os conjuntos τ -limitados de E
- (c) $\gamma'[\eta, \tau]$ é a mais fina das topologias de EVT localmente semiconvexas que coincidem com η sobre os conjuntos τ -limitados de E .

DEMONSTRAÇÃO: (a) Segue imediatamente da Proposição 1.32 e da Proposição 1.33.

(b) Seja $B \in \mathcal{IL}(\tau)$. Então existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset B_1$. De (a), temos $\hat{\eta} \subset \hat{\gamma}'[\eta, \tau]$ em B_1 , portanto em B .

Para mostrarmos a segunda inclusão, consideremos uma $\gamma'[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem em $B_1 \in \mathcal{B}$, que é do tipo $V \cap B_1$, onde V é uma $\gamma'[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem em E . Mas então existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $W \subset V$. Logo, $V \cap B_1 \supset W \cap B_1$ e portanto $V \cap B_1$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B_1 . Logo $(\gamma'[\eta, \tau])^\wedge \subset \hat{\eta}$ em B .

(c) Se σ é outra topologia de EVT localmente semiconvexa sobre E que coincide com η nos elementos de $\mathbb{I}(\tau)$, temos

$$j_B : (B, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \sigma)$$

contínua para cada $B \in \mathcal{B}$. Logo $\mu \in \mathcal{G}_{sc}$, o que implica que $\sigma \subset \gamma'[\eta, \tau]$.

Se \mathcal{B} é um sistema fundamental de subconjuntos τ -limitados semiconvexos equilibrados de E da construção de $\gamma'[\eta, \tau]$, indicaremos tal topologia por $\gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}]$ e vamos mostrar que $\gamma'[\eta, \tau]$ independe do sistema fundamental de τ -limitados equilibrados \mathcal{B} .

PROPOSIÇÃO 1.35: Se \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são dois sistemas fundamentais de subconjuntos semiconvexos equilibrados e τ -limitados de E , então $\gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}_1] = \gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}_2] = \gamma'[\eta, \tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B_1 \in \mathcal{B}_1$ e consideremos a inclusão

$$j_{B_1} : (B_1, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}_2]).$$

Dado $B_1 \in \mathcal{B}_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $B_1 \subset B_2$. Da definição de $\gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}_2]$, a inclusão $j_{B_2} : (B_2, \hat{\eta}) \rightarrow (E, \gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}_2])$ é contínua. Logo $j_{B_1} = j_{B_2} / B_1$ é contínua, o que implica que

$$\gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}_2] \subset \gamma'[\eta, \tau; \mathcal{B}_1].$$

Analogamente mostramos que

$$\gamma'[\eta, \tau; B_1] \subset \gamma'[\eta, \tau; B_2].$$

PROPOSIÇÃO 1.36: Suponhamos que todo elemento de \mathcal{B} é semiconvexo, que (E, η) é um EVT localmente semiconvexo e seja (G, ν) outro EVT localmente semiconvexo sobre $(F, |\cdot|)$. Uma transformação linear $T : E \rightarrow G$ é $\gamma'[\eta, \tau]$ -contínua se e somente se $T|_B$ é $\hat{\eta}$ -contínua para todo $B \in \mathcal{B}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \in \mathcal{B}$. Se T é uma transformação linear $\gamma'[\eta, \tau]$ -contínua, como $\hat{\eta} = \hat{\gamma}'[\eta, \tau]$ sobre B , segue que $T|_B$ é $\hat{\eta}$ -contínua.

Suponhamos agora que para cada $B \in \mathcal{B}$, $T|_B$ é $\hat{\eta}$ -contínua. Seja V uma ν -vizinhança equilibrada e semiconvexa da origem em G . Por hipótese existe uma η -vizinhança U da origem em E tal que $U \cap B \subset (T|_B)^{-1}(V) = T^{-1}(V) \cap B$, isto é, $T^{-1}(V) \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B . Pela definição de ω , para que $T^{-1}(V)$ seja uma $\gamma'[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem em E falta mostrar que $T^{-1}(V)$ é equilibrado, absorvente e semiconvexo.

Se $\lambda \in F$ é tal que $0 < |\lambda| < 1$, como V é equilibrada, segue que

$$\lambda T^{-1}(V) = T^{-1}(\lambda V) \subset T^{-1}(V)$$

o que implica que $T^{-1}(V)$ é equilibrado.

Seja $x \in E$. Como V é absorvente, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| > \delta$, $T(x) \in \lambda V$. Logo

$$x \in T^{-1}(x) \subset T^{-1}(\lambda V) = T^{-1}(V).$$

Portanto $T^{-1}(V)$ é absorvente.

Como V é semiconvexa, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\alpha \in F$ com $|\alpha| \geq \delta$, temos $V + V \subset \alpha V$. Seja $x + y \in T^{-1}(V) + T^{-1}(V)$. Fixando um tal $\alpha = \alpha_0$, temos $T(x) + T(y) \in V + V \subset \alpha_0 V$ donde $T(x + y) = \alpha_0 z$ com $z \in V$, isto é $x + y = T^{-1}(\alpha_0 z) = \alpha_0 T^{-1}(z)$. Logo, $x + y \in \alpha_0 T^{-1}(V)$, o que implica que

$$T^{-1}(V) + T^{-1}(V) \subset \beta T^{-1}(V)$$

para todo $\beta \in F$ com $|\beta| \geq |\alpha_0|$, por ser $T^{-1}(V)$ equilibrado. Portanto $T^{-1}(V)$ é semiconvexo.

Assim, $T^{-1}(V)$ é uma $\gamma'[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem em E e portanto T é $\gamma'[\eta, \tau]$ -contínua.

Suponhamos agora que $(F, |\cdot|)$ é não arquimediano e (E, η) é um EVT localmente F -convexo. Uma análise da construção da topologia $\gamma'[\eta, \tau]$ mostra que, tomando a coleção \mathcal{W}_0 de todos os subconjuntos não vazios, equilibrados, absorventes e F -convexos W de E tais que para todo $B \in \mathcal{B}$, $W \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B , \mathcal{W}_0 é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT sobre E que naturalmente é localmente F -convexa.

Denotaremos esta topologia por $\gamma_F[\eta, \tau]$.

Claramente temos $\eta \subset \gamma_F[\eta, \tau]$ e ambas coincidem nos elementos de $\mathbb{L}(\tau)$. Mais ainda, $\gamma_F[\eta, \tau]$ é a mais fina das topologias localmente F-convexas sobre E com essa propriedade.

TEOREMA 1.37: *Seja $(E; \eta, \tau)$ um EVBT tal que (E, η) e (E, τ) são EVT's localmente F-convexos e τ é η -fechada. Então*

$$\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\gamma_F[\eta, \tau]).$$

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração deste teorema é análoga à do Teorema 1.28, onde é usado o seguinte resultado:

LEMA 1.38: *Sob as hipóteses do Teorema 1.37 se $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ é uma sequência em E que converge a zero na topologia $\gamma_F[\eta, \tau]$, então $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ é τ -limitada.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ sequência $\gamma_F[\eta, \tau]$ -convergente a zero. Vamos mostrar que ela é τ -limitada. Para isso, consideremos uma τ -vizinhança equilibrada, F-convexa e η -fechada V da origem em E. Se $\{x_n; n \in \mathbb{IN}\}$ não fosse τ -limitado, existiria uma subsequência $\{x_{k(n)}; n \in \mathbb{IN}\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{IN}$, existiria $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_n| \geq n$, mas $x_{k(n)} \notin \lambda_n V$ para todo $n \in \mathbb{IN}$.

Seja $\{U_n; n \in \mathbb{IN}\}$ uma sequência de η -vizinhanças equilibradas e F-convexas da origem tal que $x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U_n$, para cada $n \in \mathbb{IN}$.

Seja

$$W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n V + U_n)$$

e seja \mathcal{B} um sistema fundamental de conjuntos r -limitados de E .

Se $B \in \mathcal{B}$, então $B \subset \lambda_{n_0} V$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Logo

$$W \cap B = \bigcap_{n=1}^{n_0} (U_n \cap B),$$

do que segue que $W \cap B$ é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B .

Como $|\lambda_n| \geq n$, segue que

$$W \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n V) \supset V$$

que é absorvente. Logo W é absorvente.

Vamos mostrar que W é equilibrado. Para isso consideremos $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$ e temos:

$$\lambda W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda \lambda_n V + \lambda U_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n V + U_n),$$

porque, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n V$ e U_n são equilibrados.

Observamos também que W é F -convexo. De fato, se

$$x + y \in W + W, \text{ então } x \in \lambda_n V + U_n \text{ e } y \in \lambda_n V + U_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$x + y \in \lambda_n (V + V) + (U_n + U_n) \subset \lambda_n V + U_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, porque V e U_n são F -convexas para cada $n \in \mathbb{N}$.

Logo $x + y \in W$, o que mostra que W é F -convexo.

Da construção de $\gamma_F[\eta, \tau]$ segue que W é uma $\gamma_F[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem em E . Mas por hipótese, $x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $x_{k(n)} \notin W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz o fato de $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ convergir a zero na topologia $\gamma_F[\eta, \tau]$.

TEOREMA 1.39: *Sejam E , η e τ como no Teorema 1.37. Uma sequência em E é $\gamma_F[\eta, \tau]$ -convergente a zero, se e somente se é τ -limitada e η -convergente a zero.*

DEMONSTRAÇÃO: Este resultado segue do Lema 1.38 e sua demonstração é análoga à do Teorema 1.30.

§2 - BASES DE VIZINHANÇAS DE $\gamma[\eta, \tau]$

Sejam (E, τ) um EVT sobre $(F, |\cdot|)$ e $\mathcal{L}(\tau)$ a família de todos os subconjuntos τ -limitados de E . Se η é outra topologia de EVT sobre E , vimos no §1 que a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$ tem as seguintes propriedades:

- (1) $\gamma[\eta, \tau]$ coincide com η nos elementos de $\mathcal{L}(\tau)$;
- (2) $\gamma[\eta, \tau]$ é a mais fina de todas as topologias que gozam da propriedade (1).

Vimos também que a topologia $\gamma[\eta, \tau]$ pode ser determinada por um sistema fundamental de subconjuntos τ -limitados de E . Ainda mais, $\gamma[\eta, \tau]$ independe do sistema fundamental de τ -limitados escolhido para sua construção, [ver Obs. 1.9].

Estamos interessados agora em encontrar um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta, \tau]$. Se η for localmente F -convexo e $\mathcal{L}(\tau)$ possuir um sistema fundamental de conjuntos que são F -convexos (e isto ocorre, em particular, sempre que (E, τ) for localmente F -convexo), gostaríamos que $\gamma[\eta, \tau]$ também fosse localmente F -convexa.

Vamos caracterizar então um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta, \tau]$ no caso em que $\mathcal{L}(\tau)$ possui um sistema fundamental enumerável \mathcal{B} . Sem perda de generalidade, podemos

escolher $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ e $\lambda_0 \in F$ com $0 < |\lambda_0| < 1$, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam satisfeitas:

(a) $B_n + B_n \subset B_{n+1}$

(b) $B_n \subset \lambda_0 B_{n+1}$

(c) B_n é equilibrado.

Para isso, seja $\mathcal{C} = \{C_n ; n \in \mathbb{N}\}$ um sistema fundamental de τ -limitados equilibrados de E . Vamos construir o sistema fundamental enumerável $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ da seguinte maneira: tomemos $B_1 = C_1$ e suponhamos escolhidos B_1, \dots, B_k tais que (a) e (b) estejam satisfeitas para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Como o conjunto $B_n + B_n + \lambda_0^{-1} B_n + C_{n+1}$ é τ -limitado, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que C_p contém tal conjunto. Pondo $B_{n+1} = C_p$ temos (a) e (b) verificadas para $k = n$.

Com o sistema fundamental $\mathcal{B} \subset \mathcal{IL}(\tau)$ assim definido, vamos construir uma base de vizinhanças da origem para uma nova topologia a qual denotaremos por $\gamma^*[\eta, \tau]$ e mostraremos, no Corolário 2.6 que ela coincide com a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$ definida inicialmente, no caso em que $\mathcal{IL}(\tau)$ possui um sistema fundamental enumerável. Em seguida mostraremos algumas propriedades que são satisfeitas pela topologia $\gamma^*[\eta, \tau]$.

Para obtermos $\gamma^*[\eta, \tau]$, consideremos a família Λ de todos os conjuntos da forma

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k),$$

onde $U = \{U_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ é uma sequência arbitrária de η -vizinhanças de origem em E e $B = \{B_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ é uma sequência fundamental crescente de τ -limitados não vazios satisfazendo (a), (b) e (c).

Vamos mostrar que a família A determina um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT que será indicada por $\gamma^*[\eta, \tau]$. Temos:

(0) A origem pertence a $\gamma(U)$, logo $\gamma(U) \neq \phi$; $\phi \notin \gamma(U)$.

(1) Dados

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k) \quad \text{e} \quad \gamma(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (V_k \cap B_k)$$

existe um conjunto $\gamma(W) \in A$ tal que

$$\gamma(W) \subset \gamma(U) \cap \gamma(V).$$

Com efeito, tomemos a sequência $\{W_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ de η -vizinhanças da origem com $W_n = U_n \cap V_n$ para cada $n \in \mathbb{IN}$. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma(W) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (W_k \cap B_k) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n ((U_k \cap B_k) \cap (V_k \cap B_k)) \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (V_k \cap B_k) = \gamma(U) \cap \gamma(V). \end{aligned}$$

(2) a) Cada conjunto $\gamma(U)$ é equilibrado.

Para verificarmos, consideremos $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$. Temos:

$$\begin{aligned}\lambda\gamma(U) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (\lambda U_k \cap \lambda B_k) \subset \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k) = \gamma(U),\end{aligned}$$

pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n e B_n são equilibrados.

Cada $\gamma(U)$ é absorvente.

De fato, seja $x \in E$. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{k_0}$. Como U_{k_0} é absorvente, existe $\delta_0 > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in F^*$ com $|\lambda| \geq \delta_0$, $x \in \lambda U_{k_0}$. Seja um tal λ com $|\lambda| > 1$ e tomemos $\delta = |\lambda|$. Então para qualquer $\mu \in F^*$, $|\mu| \geq \delta$,

$$x \in \mu(U_{k_0} \cap B_{k_0}),$$

pois B_{k_0} é equilibrado. Assim,

$$x \in \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k) = \mu\gamma(U).$$

(2) b) Se $\gamma(U) \in \Lambda$, então existe $\gamma(V) \in \Lambda$ com

$$\gamma(V) + \gamma(V) \subset \gamma(U).$$

Seja

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k).$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja V_k uma η -vizinhança da origem tal que

$V_k + V_k \subset U_{k+1}$. Consideremos

$$\gamma(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (V_k \cap B_k).$$

Assim, se $x \in \gamma(V) + \gamma(V)$,

$$x \in \sum_{k=1}^p (V_k \cap B_k) + \sum_{k=1}^m (V_k \cap B_k)$$

para algum p e para algum m em \mathbb{N} . Logo $x = y + z$ onde

$$y = y_1 + \dots + y_p \quad \text{com} \quad y_k \in V_k \quad \text{e} \quad y_k \in B_k$$

e

$$z = z_1 + \dots + z_m \quad \text{com} \quad z_k \in V_k \quad \text{e} \quad z_k \in B_k.$$

Suponhamos $m \leq p$. Temos:

$$\begin{aligned}
 x &= (x_1 + y_1) + \dots + (x_m + y_m) + y_{m+1} + \dots + y_p \in \\
 &\in (V_1 + V_1) \cap (B_1 + B_1) + \dots + (V_m + V_m) \cap (B_m + B_m) \\
 &+ V_{m+1} \cap B_{m+1} + \dots + V_p \cap B_p \\
 &\subset U_2 \cap B_2 + \dots + U_{m+1} \cap B_{m+1} \subset U_{m+2} \cap B_{m+2} + \dots + V_{p+1} \cap B_{p+1} \\
 &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k) = \gamma(U).
 \end{aligned}$$

(2) c) Para algum $\lambda \in F^*$ com $0 < |\lambda| < 1$, dado $\gamma(U) \in \Lambda$,
 existe $\gamma(V) \in \Lambda$ com $\gamma(V) \subset \lambda\gamma(U)$.

Seja $\gamma(U)$ dado e escolhamos $\lambda_0 \in F^*$ como na definição de \mathcal{B} .
 Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma η -vizinhança V_k da origem tal que
 $V_k \subset \lambda_0 U_{k+1}$.

Se $x \in \gamma(V)$, então $x \in \sum_{k=1}^n (V_k \cap B_k)$, para algum $n \in \mathbb{N}$.
 Então

$$x \in \sum_{k=1}^n (\lambda_0 U_{k+1} \cap \lambda_0 B_{k+1}) = \lambda_0 \sum_{k=2}^n (U_k \cap B_k).$$

Portanto, $\lambda_0^{-1} x \in \sum_{k=2}^n (U_k \cap B_k) \subset \gamma(U)$, e então $x \in \lambda_0 \gamma(U)$.

De (0), (1) e (2), e usando o Teorema 2.15 Prolla [17], concluimos que a família Λ de todos os conjuntos $\gamma(U)$ definidos como acima forma um sistema fundamental de vizinhanças da origem para

uma topologia de EVT sobre E.

DEFINIÇÃO 2.1: Como já observamos, a topologia acima obtida será então denotada por $\gamma^*[\eta, \tau]$.

EXEMPLO 2.2: No caso particular em que τ é proveniente de uma norma $\|\cdot\|$ em E, podemos tomar $\mathcal{B} = \{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ da seguinte maneira: escolhamos $\lambda_0 \in F$ com $0 < |\lambda_0| < \frac{1}{2}$ e chamemos $\rho = |\lambda_0|$. Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{x \in E : \|x\| \leq \rho^{-n}\}$, \mathcal{B} satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$ as condições:

(a) $B_n + B_n \subset B_{n+1}$

(b) $B_n \subset \lambda_0 B_{n+1}$

(c) B_n é equilibrado

(d) $B_n = \lambda_0^{-n} B$, onde $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Se $x \in B_n + B_n$, então $x = y + z$ com y e z em B_n e

$$\|x\| \leq \|y\| + \|z\| \leq 2\rho^{-n} < \rho^{-1} \rho^{-n} = \rho^{-(n+1)},$$

e portanto $x \in B_{n+1}$. Logo $B_n + B_n \subset B_{n+1}$.

(b) Se $x \in B_n$, então $\|x\| \leq \rho^{-n}$, donde

$$\|\lambda_0^{-1}x\| = \rho^{-1} \|x\| \leq \rho^{-1} \rho^{-n} = \rho^{-(n+1)}.$$

Assim, $\lambda_0^{-1}x \in B_{n+1}$, e portanto $x \in \lambda_0 B_{n+1}$. Logo $B_n \subset \lambda_0 B_{n+1}$.

(c) É evidente.

(d) Se $x \in \lambda_0^{-n}B$, então $\lambda_0^n x \in B$, donde $\rho^n \|x\| = \|\lambda_0^n x\| \leq 1$.
Portanto, $\|x\| \leq \rho^{-n}$. Logo $x \in B_n$.

Se, por outro lado, $x \in B_n$, façamos $x = \lambda_0^{-n} \lambda_0^n x = \lambda_0^{-n} v$ com $v = \lambda_0^n x$ e obtemos

$$\|v\| = \rho^n \|x\| \leq \rho^n \rho^{-n} = 1.$$

Assim, $v \in B$ e portanto $x \in \lambda_0^{-n}B$.

Isso mostra que $B_n = \lambda_0^{-n}B$.

EXEMPLO 2.3: Se (E, τ) possui uma vizinhança τ -limitada U da origem, então a sequência fundamental B pode ser escolhida tomando-se $B_n = a_n U$, onde $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de elementos de F^* satisfazendo $|a_n| \rightarrow +\infty$.

Para isso, escolhamos $\lambda_0 \in F$ com $0 < |\lambda_0| < 1$ e dada uma sequência $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ em F^* com $|b_k| \rightarrow +\infty$, escolhamos a sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ da seguinte maneira. Seja $a_1 = b_1$.

Seja $B_1 = a_1 U$. O conjunto $A_1 = B_1 + B_1 + \lambda_0^{-1} B_1$ é τ -limitado. Decorre daí que existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com

$|\lambda| \geq \delta$, $A_1 \subset \lambda U$. Como $|b_k| \rightarrow +\infty$ existe $k_2 > k_1 = 1$ tal que $|b_{k_2}| \geq \delta$ e portanto $A_1 \subset b_{k_2} U$. Chamando $a_2 = b_{k_2}$ e $B_2 = a_2 U$, temos:

$$(a) \quad B_1 + B_1 \subset B_2 \quad e$$

$$(b) \quad B_1 \subset \lambda_0 B_2 .$$

Suponhamos escolhidos $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ tais que

$$B_{n-1} + B_{n-1} \subset B_n \quad e \quad B_{n-1} \subset \lambda_0 B_n$$

para todo $n = 1, \dots, p$.

O conjunto $A_p = B_p + B_p + \lambda_0^{-1} B_p$ é τ -limitado e pelo mesmo raciocínio anterior, existe $k_{p+1} > k_p$ tal que $A_p \subset b_{k_{p+1}} U$. Chamando analogamente $a_{p+1} = b_{k_{p+1}}$ e $B_{p+1} = a_{p+1} U$, temos:

$$(a) \quad B_p + B_p \subset B_{p+1} \quad e$$

$$(b) \quad B_p \subset \lambda_0 B_{p+1} .$$

Uma vez escolhido $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ como a subsequência $\{b_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, temos que $|a_n| \rightarrow +\infty$ e claramente a família $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de subconjuntos τ -limitados de E .

Desde que tenhamos escolhido U como uma vizinhança τ -limitada

e equilibrada da origem, temos também satisfeita a condição (c) da página 46. Assim, se $\{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de vizinhanças da origem para uma topologia η de EVT sobre E, os conjuntos do tipo

$$U^\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap a_i U)$$

formam um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\gamma^* [\eta, \tau]$ sobre E.

PROPOSIÇÃO 2.4:

- (i) η é menos fina que $\gamma^* [\eta, \tau]$.
- (ii) $\gamma^* [\eta, \tau]$ e η coincidem nos subconjuntos τ -limitados de E.
- (iii) $\gamma^* [\eta, \tau]$ é a mais fina topologia de EVT que coincide com η nos subconjuntos τ -limitados de E.

DEMONSTRAÇÃO: (i) Seja U uma η -vizinhança da origem em E. Existe sequência $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$ de η -vizinhanças da origem tais que $U_1 + U_2 + \dots + U_n \subset U$. Tomemos

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k).$$

Se $x \in \gamma(U)$, então

$$x \in \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k)$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$x \in \sum_{k=1}^n U_k \subset U.$$

- (ii) Como $\eta \subset \gamma^* [\eta, \tau]$, basta mostrarmos que $\gamma^* [\eta, \tau] \subset \eta$

nos τ -limitados não vazios de E . Sejam $B \in \mathbb{I}(\tau)$ e $x_0 \in B$.

Seja

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k).$$

Escolhamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B - B \subset B_{k_0}$. Consideremos $W = U_{k_0}$, que é η -vizinhança da origem. Vamos mostrar que

$$(x_0 + W) \cap B \subset (x_0 + \gamma(U)) \cap B.$$

Se $x \in (x_0 + W) \cap B$, então $x \in B$ donde $x - x_0 \in B - B \subset B_{k_0}$ e $x \in x_0 + W$ donde $x - x_0 \in W = U_{k_0}$. Assim,

$$x \in x_0 + (W \cap B_{k_0}) \subset x_0 + (U_{k_0} \cap B_{k_0}) \subset x_0 + \gamma(U).$$

Portanto,

$$x \in (x_0 + \gamma(U)) \cap B.$$

(iii) Seja v uma topologia de EVT sobre E que satisfaz (ii) e seja V uma v -vizinhança da origem em E . Consideremos uma sequência $\{V_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de v -vizinhanças da origem em E tal que

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n \subset V,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\eta \subset v$ nos elementos de \mathcal{B} , escolhamos uma sequência de

η -vizinhanças U_1, \dots, U_n, \dots da origem tais que

$$U_k \cap B_k \subset V_k \cap B_k,$$

para todo $k = 1, 2, \dots$.

Assim sendo, temos

$$U_1 \cap B_1 + \dots + U_n \cap B_n \subset V_1 + \dots + V_n \subset V.$$

Então $\gamma(U) \subset V$, o que completa a demonstração.

COROLÁRIO 2.5: Se existir sequência fundamental enumerável $B \subset \mathbb{I}(\tau)$, satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) da página 48 temos:

- (1) $\gamma^*[\eta, \tau]$ independe da escolha de B .
- (2) Se η_1 e η_2 são duas topologias de EVT sobre E , então $\gamma^*[\eta_1, \tau] = \gamma^*[\eta_2, \tau]$ se e somente se η_1 e η_2 coincidirem nos conjuntos τ -limitados de E .
- (3) $\gamma^*[\eta, \tau]$ coincide com a topologia mista $\gamma[\eta, \tau]$.

TEOREMA 2.6: Se existir sequência fundamental $B \subset \mathbb{I}(\tau)$ em E formada por conjuntos η -fechados, então temos $\mathbb{I}(\gamma[\eta, \tau]) \subset \mathbb{I}(\tau)$.

Para uma demonstração deste teorema precisaremos do seguinte

lema.

LEMA 2.7: Sob a hipótese do Teorema 2.6, uma sequência $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero em $(E, \gamma[\eta, \tau])$ se e somente se $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{IL}(\tau)$ e converge a zero em (E, η) .

DEMONSTRAÇÃO: Se $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia $\gamma[\eta, \tau]$, então converge a zero também na topologia η , por ser η menos fina que $\gamma[\eta, \tau]$.

Suponhamos agora que $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{IL}(\tau)$. Então existe sub-sequência $\{x_{n_k}; n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_{n_k} \notin B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como por hipótese B_k é η -fechado, existe uma sequência

$$\{U_k; k = 1, \dots, n\}$$

de η -vizinhanças da origem em E tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \notin B_k + U_k$.

Consideremos uma sequência $\{V_k; k \in \mathbb{N}\}$ de η -vizinhanças da origem tal que:

$$V_1 = U_1$$

$$V_k + V_k \subset U_k \cap V_{k-1}, \quad k > 1.$$

Então para cada $k > 1$,

$$\begin{aligned}\gamma(V) &= \bigcup_{p=1}^{\infty} (V_1 \cap B_1 + \dots + V_{k+p} \cap B_{k+p}) \\ &= \bigcup_{p=1}^{\infty} (V_1 \cap B_1 + \dots + V_{k-1} \cap B_{k-1} + V_k \cap B_k + \dots + V_{k+p} \cap V_{k+p}) \\ &= \bigcup_{p=1}^{\infty} (B_1 + \dots + B_{k-1} + V_k + \dots + V_{k+p}) \\ &\subset \bigcup_{p=1}^{\infty} (B_k + V_k + V_k) \subset B_k + V_k + V_k \subset B_k + U_k.\end{aligned}$$

Assim, $x_{n_k} \notin \gamma(V)$ para cada $k \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese de $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ ser convergente a zero na topologia $\gamma[\eta, \tau]$.

Reciprocamente, seja $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{IL}(\tau)$. Por Proposição 2.4.(ii), η e $\gamma[\eta, \tau]$ coincidem neste conjunto. Assim, do fato de $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ convergir a zero na topologia η , segue o resultado.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.6: Seja $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{IL}(\tau)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, B_n é η -fechado. Consideremos um conjunto $B \in \mathbb{IL}(\gamma[\eta, \tau])$ em E . Se $B \notin \mathbb{IL}(\tau)$, então existe uma sequência $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ em B tal que $x_n \notin \lambda_n B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F^* , com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$. Mas então $|\lambda_n^{-1}| \rightarrow 0$ e como $B \in \mathbb{IL}(\gamma[\eta, \tau])$, a sequência $\{\lambda_n^{-1} x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é $\gamma[\eta, \tau]$ -convergente a zero. Pelo Lema 2.7, o conjunto $\{\lambda_n^{-1} x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é τ -limitado, logo existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n^{-1} x_n \in B_{k_0}$. Mas então $x_{k_0} \in \lambda_{k_0} B_{k_0}$, o que é uma contradição.

TEOREMA 2.8: Se existir uma sequência fundamental $B \subset \mathbb{I}L(\tau)$ formada por conjuntos η -limitados e η -fechados, então

$$\mathbb{I}L(\gamma[\eta, \tau]) = \mathbb{I}L(\tau).$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 2.6 temos que $\mathbb{I}L(\gamma[\eta, \tau]) \subset \mathbb{I}L(\tau)$.

Por outro lado, segue da hipótese feita que $\mathbb{I}L(\tau) \subset \mathbb{I}L(\eta)$. Pela Proposição 1.24, temos $\mathbb{I}L(\tau) \subset \mathbb{I}L(\gamma[\eta, \tau])$, como queríamos.

Se A for um subconjunto η -compacto e τ -limitado de E , como η e $\gamma[\eta, \tau]$ coincidem nos τ -limitados, temos que A é $\gamma[\eta, \tau]$ -compacto. Vamos ver agora que sob as hipóteses do Teorema 2.7 a recíproca é verdadeira.

PROPOSIÇÃO 2.9: Se existir em E uma sequência fundamental $B \subset \mathbb{I}L(\tau)$ formada por conjuntos η -fechados, então todo subconjunto $\gamma[\eta, \tau]$ -compacto de E é η -compacto e τ -limitado.

DEMONSTRAÇÃO: Se $A \subset E$ é $\gamma[\eta, \tau]$ -compacto, então é $\gamma[\eta, \tau]$ -limitado. Pelo Teorema 2.6, A é também τ -limitado. Pela Proposição 2.4.(ii), η e $\gamma[\eta, \tau]$ coincidem em A . Logo A é também η -compacto.

DEFINIÇÃO 2.10: Um espaço vetorial topológico (E, τ) é chamado *semi-Montel* se seus limitados são relativamente compactos.

PROPOSIÇÃO 2.11: Se $(E; \eta, \tau)$ é EVBT e $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é *semi-Montel*, então todo subconjunto τ -limitado η -fechado de E é η -compacto.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \in \mathcal{IL}(\tau)$ um subconjunto η -fechado de E . Pela Proposição 1.24, B é $\gamma[\eta, \tau]$ -limitado e como $\eta \subset \gamma[\eta, \tau]$, B é também $\gamma[\eta, \tau]$ -fechado. Como por hipótese $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é *semi-Montel*, segue que B é $\gamma[\eta, \tau]$ -compacto. Logo B é η -compacto.

PROPOSIÇÃO 2.12: Se existir sequência fundamental $B \subset \mathcal{IL}(\tau)$ em E formada por conjuntos η -compactos então $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é *semi-Montel*.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{B} = \{B_n; n \in \mathbb{IN}\}$ sequência fundamental de τ -limitados que são η -compactos. Seja $B \in \mathcal{IL}(\gamma[\eta, \tau])$ e seja \bar{B} seu fecho em $(E, \gamma[\eta, \tau])$. Pelo Teorema 2.6, \bar{B} é τ -limitado. Logo existe $n \in \mathbb{IN}$ tal que $\bar{B} \subset B_n$, onde B_n é compacto. Pela Proposição 2.4.(ii), B_n é $\gamma[\eta, \tau]$ -compacto. Assim sendo, \bar{B} é $\gamma[\eta, \tau]$ -compacto, o que completa a demonstração.

COROLÁRIO 2.13: Se existir sequência fundamental $B \subset \mathcal{IL}(\tau)$ formada por conjuntos η -limitados e η -fechados e se (E, η) for *semi-Montel*, então $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é *semi-Montel*.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ sequência fundamental de τ -limitados tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n é η -fechado e η -limitado. Como (E, η) é semi-Montel, B_n é η -compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Estamos, pois, nas condições da Proposição 2.12, de onde segue que $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é semi-Montel.

COROLÁRIO 2.14: Se $(E; \eta, \tau)$ for EVBT e se existir sequência fundamental $B \subset \mathcal{IL}(\tau)$ formada por subconjuntos η -compactos de E , então $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é semi-Montel se e somente se todo subconjunto τ -limitado η -fechado de E é η -compacto.

LEMA 2.15: Se $(E; \eta, \tau)$ e EVBT e se (E, τ) é bornológico (em particular se (E, τ) é normado) então $\gamma[\eta, \tau] \subset \tau$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a identidade $I : (E, \tau) \rightarrow (E, \gamma[\eta, \tau])$ e $B \subset E$ um subconjunto τ -limitado. Como $(E; \eta, \tau)$ é EVBT segue, pela Proposição 1.24, que B é $\gamma[\eta, \tau]$ -limitado e como (E, τ) é bornológico, I é contínua, do que segue o resultado.

PROPOSIÇÃO 2.16: Seja (E, τ) um espaço normado. Se existir uma sequência fundamental $B \subset \mathcal{IL}(\tau)$ formada por conjuntos que são η -fechados e se $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é bornológico (em particular metrizável), então $\tau \subset \gamma[\eta, \tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 2.6, $\mathcal{IL}(\gamma[\eta, \tau]) \subset \mathcal{IL}(\tau)$. Logo, a

identidade $I : (E, \gamma[\eta, \tau]) \rightarrow (E, \tau)$ é contínua pelo fato de $(E, \gamma[\eta, \tau])$ ser bornológico. Decorre daí que $\tau \subset \gamma[\eta, \tau]$.

Vamos apresentar uma nova descrição das vizinhanças da origem para $\gamma[\eta, \tau]$ no caso em que $\mathbb{I}L(\tau)$ possui um sistema fundamental enumerável.

Para isso, consideremos uma sequência $U = \{U_n ; n \in 0, 1, \dots\}$ de η -vizinhanças equilibradas da origem em E e $B = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência fundamental crescente de subconjuntos τ -limitados de E , satisfazendo (a), (b) e (c) da página 46. A família Λ'' de todos os conjuntos do tipo

$$\gamma''(B) = U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$$

constitue um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia $\gamma''[\eta, \tau]$ de EVT sobre E , pois

(0) $\phi \notin \Lambda''$ e $\Lambda'' \neq \phi$, pois B é crescente.

(1) Dados $\gamma''(U) = U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$ e

$$\gamma''(V) = V_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n),$$

existe $\gamma''(W) \in \Lambda''$ tal que $\gamma''(W) \subset \gamma''(U) \subset \gamma''(V)$.

Com efeito, se tomarmos a sequência $\{W_n ; n = 0, 1, \dots\}$ de

η -vizinhanças da origem tal que $W_n = U_n \cap V_n$, temos

$$\begin{aligned} \gamma''(W) &= W_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (W_n + B_n) = (U_0 \cap V_0) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap V_n + B_n) \subset \\ &\subset (U_0 \cap V_0) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} [(U_n + B_n) \cap (V_n + B_n)] \\ &\subset [U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)] \cap [V_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n)] = \\ &= \gamma''(U) \cap \gamma''(V). \end{aligned}$$

(2) a) Cada $\gamma''(U)$ é equilibrado e absorvente.

Seja $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$. Então

$$\begin{aligned} \lambda\gamma''(U) &= \lambda U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda U_n + \lambda B_n) \\ &\subset U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n), \end{aligned}$$

pois, para cada $n = 0, 1, \dots$, U_n e B_n são equilibrados.

Logo $\lambda\gamma''(U) \subset \gamma''(U)$ e portanto $\gamma''(U)$ é equilibrado.

Consideremos agora $x \in E$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{n_0}$.

Como a sequência B é crescente, para todo $n \geq n_0$, temos

$$x \in B_n \subset U_n + B_n.$$

Como cada U_n é absorvente, para cada $i = 0, 1, \dots, n_0 - 1$, existe $\delta_i > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda_i| \geq \delta_i$,

$$x \in \lambda_i U_i \subset \lambda_i (U_i + B_i).$$

Tomemos

$$\delta = \max\{\delta_0, \dots, \delta_{n_0-1}, 1\}.$$

Assim, para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, ocorre que $x \in \lambda U_i$ para todo $i = 0, 1, \dots$. Segue-se então que

$$x \in \lambda U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \lambda (U_n + B_n) = \lambda \gamma''(U).$$

(2) b) Se $\gamma''(U) \in \Lambda''$, então existe $\gamma''(V) \in \Lambda''$ com

$$\gamma''(V) + \gamma''(V) \subset \gamma''(U).$$

Se

$$\gamma''(U) = U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n),$$

escolhamos uma sequência $\{V_n; n = 0, 1, \dots\}$ de η -vizinhanças da origem tal que

$$V_0 + V_0 \subset U_0 \cap U_1$$

e

$$V_n + V_n \subset U_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e seja

$$\gamma''(V) = V_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n).$$

Se $x \in \gamma''(V) + \gamma''(V)$, então $x = y + z$ com y e z em V_0 e y e z em $V_n + B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$x = y + z \in V_0 + V_0 \subset U_0 \cap U_1 \subset U_0 \cap (U_1 + B_1)$$

e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x = y + z \in V_n + B_n + V_n + B_n \subset U_{n+1} + B_{n+1}.$$

Logo

$$x \in U_0 \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n + B_n) = \gamma''(U).$$

- (2) c) Para algum $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$ (e daí para todo $\lambda \in F^*$), dado $\gamma''(U) \in \Lambda''$, existe $\gamma''(V) \in \Lambda''$ tal que $\gamma''(V) \subset \lambda \gamma''(U)$.

Seja

$$\gamma''(U) = U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$$

dado e seja $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$ escolhido da definição de B . Por hipótese, para cada $n = 0, 1, \dots$, existe uma η -vizinhança

V_n da origem tal que $V_n \subset \lambda U_{n+1}$ e existe uma η -vizinhança V_0 da origem tal que

$$V_0 \subset \lambda(U_0 \cap U_1) \subset \lambda[U_0 \cap (U_1 + B_1)].$$

Assim, como para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset \lambda B_{n+1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma''(U) &= V_0 \cap (V_1 + B_1) \cap (V_2 + B_2) \cap \dots \subset \\ &\subset \lambda U_0 \cap \lambda(U_1 + B_1) \cap \lambda(U_2 + B_2) \cap \dots = \\ &= \lambda \gamma''(U). \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2.17: *Sob as condições acima, $\gamma''[\eta, \tau] = \gamma^*[\eta, \tau]$.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar inicialmente que $\gamma''[\eta, \tau] \subset \gamma^*[\eta, \tau]$, em cada conjunto $B_k \in \mathcal{B}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \gamma''(U) \cap B_k &= [U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n + U_n)] \cap B_k = \\ &= U_0 \cap \bigcap_{n=1}^k (B_n + U_n) \cap B_k, \end{aligned}$$

que é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B_k . Segue então da Proposição 2.4.(iii) que $\gamma''[\eta, \tau] \subset \gamma^*[\eta, \tau]$.

Consideremos agora uma $\gamma^*[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem dada por

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap B_i).$$

Para cada $n = 2, 3, \dots$, consideremos uma η -vizinhança V_n da origem tal que $V_n + V_n \subset U_{n+2}$. Se $x \in \gamma(U)$ então

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n)$$

o que implica que para cada $n \geq 1$, x possui uma decomposição $x = y_n + z_n$ com $y_n \in V_n$ e $z_n \in B_n$.

Vamos definir $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2 - z_1, \dots, x_n = z_n - z_{n-1}, \dots$ e temos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_n &= z_1 + z_2 - z_1 + \dots + z_n - z_{n-1} + y_n = \\ &= z_n + y_n = x \end{aligned}$$

e portanto $y_{n-1} - y_n = x_n$.

Logo,

$$x_n = y_{n-1} - y_n \in V_n + V_{n-1} \subset V_{n-1} + V_{n-1} \subset U_{n+1}$$

e

$$x_n = z_n - z_{n-1} \in B_n + B_{n-1} \subset B_n + B_n \subset B_{n+1}.$$

Assim temos $x_n \in U_{n+1} \cap B_{n+1}$. (1)

Seja agora n_0 escolhido tal que $x \in B_{n_0}$. Então

$$y_{n_0} = x - z_{n_0} \in B_{n_0} + B_{n_0} \subset B_{n_0+1} \subset B_{n_0+2}$$

e

$$y_{n_0} \in V_{n_0} \subset U_{n_0+2}.$$

Logo,

$$y_{n_0} \in U_{n_0+2} \cap B_{n_0+2}. \quad (2)$$

De (1) e (2), temos

$$\begin{aligned} x = x_1 + \dots + x_{n_0} + y_{n_0} &\in (U_2 \cap B_2) + \dots + (U_{n_0} \cap B_{n_0}) + \\ &+ \dots + (U_{n_0+2} \cap B_{n_0+2}) \subset \gamma(U). \end{aligned}$$

Isto mostra que $\gamma^*[\eta, \tau] \subset \gamma''[\eta, \tau]$.

TEOREMA 2.18: Se $\mathbb{I}L(\tau)$ possui uma sequência fundamental formada por conjuntos η -fechados, então a topologia $\gamma[\eta, \tau]$ é η -fechada.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos tomar um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\gamma''[\eta, \tau]$ formado por conjuntos do tipo

$$\gamma''(U) = U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$$

onde $B \subset \mathbb{I}L(\tau)$ é formado por conjuntos η -fechados, e

$$U = \{U_n ; n = 0, 1, \dots\}$$

é uma seqüência de η -vizinhanças η -fechadas da origem.

Como cada conjunto $\gamma''(U)$ desse tipo é claramente η -fechado, segue que $\gamma''[\eta, \tau]$ é η -fechada e conseqüentemente, $\gamma[\eta, \tau]$ é η -fechada.

PROPOSIÇÃO 2.19: Se η for localmente F-convexa e a seqüência fundamental $B = \{B_n ; n \in \mathbb{I}N\}$ puder ser escolhida tal que para todo $n \in \mathbb{I}N$, B_n é F-convexo, então $\gamma[\eta, \tau]$ é localmente F-convexa.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos uma $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n (U_k \cap B_k),$$

onde, para cada $n \in \mathbb{I}N$, B_n é F-convexo. Como η é localmente F-convexa, existe uma seqüência $U' = \{U'_k ; k \in \mathbb{I}N\}$ de η -vizinhanças F-convexas da origem tal que $U'_k \subset U_k$ para cada $k \in \mathbb{I}N$. A vizinhança $\gamma(U')$ da origem é F-convexa visto que para cada $n \in \mathbb{I}N$ o conjunto $U'_n \cap B_n$ é F-convexo. Ainda mais, temos $\gamma(U') \subset \gamma(U)$ do que segue que $\gamma[\eta, \tau]$ é localmente F-convexa.

PROPOSIÇÃO 2.20: Sejam E , η e τ como na Proposição 2.19. Então

$$\gamma[\eta, \tau] = \gamma_F[\eta, \tau].$$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar inicialmente que $\gamma_F[\eta, \tau] \subset \gamma[\eta, \tau]$. Mas $\gamma_F[\eta, \tau] = \eta$ nos subconjuntos γ -limitados. Então pela Observação 1.6, temos $\gamma_F[\eta, \tau] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

Para mostrarmos a segunda inclusão, lembramos que, $\gamma_F[\eta, \tau]$ é a mais fina topologia de EVT localmente F-convexa que coincide com η nos subconjuntos τ -limitados de E . Além disso, $\gamma[\eta, \tau]$ coincide com η nos subconjuntos τ -limitados e pela Proposição 2.19, é localmente F-convexa. Logo $\gamma[\eta, \tau] \subset \gamma_F[\eta, \tau]$.

§ 3 - ESPAÇOS DE SAKS

Seja E um espaço vetorial sobre F e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E . Se η é determinada por uma família de seminormas, gostaríamos de encontrar uma família de seminormas que define a topologia $\gamma[\eta, \tau]$. Para isso vamos pedir que E , η e τ satisfaçam a propriedade:

- (*) A topologia τ é definida por uma norma $\|\cdot\|$; a topologia η é determinada por uma família S de seminormas p tais que

$$\|f\| = \sup \{p(f); p \in S\},$$

para todo $f \in E$.

Quando a norma $\|\cdot\|$ é não-arquimediana suporemos que a família S acima pode ser encontrada de modo que cada seminorma $p \in S$ é não-arquimediana. Diremos então que vale a propriedade (*) n.a.

Observamos que numa terna $(E; \eta, \tau)$ como acima são verdadeiras as seguintes propriedades:

- (1) Para todo número real $r > 0$, a bola fechada \bar{B}_r de raio r em (E, τ) é η -limitada.

Isto é verificado imediatamente, pois para qualquer $x \in \bar{B}_r$,

com $r > 0$ fixado, temos $p(x) \leq \|x\| \leq r$, do que segue que $\eta \subset \tau$.

(2) As bolas \overline{B}_r são η -fechadas.

Com efeito, consideremos o net $\{x_\delta ; \delta \in \Delta\}$ em \overline{B}_r , η -convergente a um elemento x de E . Como para qualquer $\delta \in \Delta$, $x_\delta \in \overline{B}_r$, temos, para todo $p \in S$, $p(x_\delta) \leq \|x_\delta\| \leq r$ e portanto $p(x) \leq r$. Logo,

$$\|x\| = \sup \{p(x) : p \in S\} \leq r$$

e portanto $x \in \overline{B}_r$.

Segue da propriedade (1) que $(E; \eta, \tau)$ é um EVBT, e da propriedade (2) que a topologia τ , dada pela norma $\|\cdot\|$, é η -fechada. Portanto, se $\|\cdot\|$ for não arquimediana, então $(E; \eta, \tau)$ satisfaz as condições do Teorema 1.28, e portanto $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\gamma[\eta, \tau])$.

DEFINIÇÃO 3.1: Se $(E; \eta, \tau)$ satisfaz a propriedade (*) (respectivamente (*) não arquimediana) diremos que $(E; \eta, \tau)$ é um espaço de Saks (respectivamente espaço de Saks não arquimediano).

Se a topologia τ for proveniente da norma $\|\cdot\|$, poderemos denotar a terna $(E; \eta, \tau)$ por $(E; \eta, \|\cdot\|)$.

EXEMPLO 3.2: Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado sobre $(F, |\cdot|)$. Seja Φ um conjunto de funcionais lineares contínuos sobre E tais que

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in \Phi} |\varphi(x)|.$$

Seja η a topologia definida em E pela família S de seminormas $x \rightarrow |\varphi(x)|$ quando φ percorre Φ . Então $(E; \eta, \|\cdot\|)$ é um espaço de Saks. Como exemplo, seja $E = \ell_\infty$ o espaço de todas as sequências $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ com $x_n \in F$ tais que

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty.$$

Neste caso, Φ será o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO 3.3: Consideremos a terna $(E; \eta, \|\cdot\|)$, onde E é o espaço vetorial de todas as sequências $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ com $x_n \in F$ tais que

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

η é a topologia definida pela família S de seminormas

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \text{e} \quad \|x\| = \|x\|_1.$$

Temos:

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sup_n \sum_{i=1}^n |x_i| = \sup_n p_n(x),$$

o que implica que a terna $(E; \eta, \|\cdot\|)$ é um espaço de Saks.

Consideremos agora um espaço de Saks $(E; \eta, \|\cdot\|)$ e S uma família de seminormas η -contínuas que definem a topologia η , fechada por supremo finito e tal que $\|\cdot\| = \sup S$. Observamos aqui que S é um conjunto dirigido.

Para cada par de seqüências $\{p_n; n \in \mathbb{N}\}$ e $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in S$ e $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$, a aplicação

$$\tilde{p} : x \rightarrow \sup \{ |\lambda_n|^{-1} p_n(x); n \in \mathbb{N} \}$$

é uma seminorma sobre E .

Seja $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$ a topologia definida sobre E pela família \tilde{S} de todas as seminormas \tilde{p} assim definidas.

Observamos que a família \tilde{S} é um conjunto dirigido.

PROPOSIÇÃO 3.4: Se $(E; \eta, \|\cdot\|)$ é um espaço de Saks e $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$ é a topologia definida pela família \tilde{S} acima, então

$$\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|] \subset \gamma[\eta, \|\cdot\|].$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B = \{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ uma seqüência fundamental de subconjuntos $\|\cdot\|$ -limitados de E satisfazendo (a), (b) e (c) da definição de B .

Usando a Proposição 2.5.(iii), basta mostrarmos que

$\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|] \subset \eta$ em cada elemento $B' \in \mathcal{B}$. Seja \tilde{V} uma $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$ -vizinhança da origem em B' dada por

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= B' \cap \{x \in E : \tilde{p}_n(x) \leq 1\} = \\ &= B' \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},\end{aligned}$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in S$ e $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é sequência em F^* com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$.

Como $B \in \mathcal{U}(\|\cdot\|)$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in F^*$, com $|\lambda| \geq \delta$, temos $B' \subset \lambda B$, onde por B denotaremos a bola unitária fechada de $(E, \|\cdot\|)$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$B' \subset \lambda_n B \subset \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},$$

visto que $\|\cdot\| = \sup S$ e $p_n \in S$.

Assim,

$$B' \subset \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\}$$

e portanto

$$B' \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\} = B' \cap \bigcap_{n=1}^{n_0} \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},$$

que é uma $\hat{\eta}$ -vizinhança da origem em B' .

Logo, $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

PROPOSIÇÃO 3.5: Seja $(E; \eta, \|\cdot\|)$ um espaço de Saks. Consideremos as seguintes condições:

(a) para cada $x \in E$, para cada $\varepsilon > 0$ e para cada $p \in S$ existem elementos y e z em E tais que

$$x = y + z, \quad p(z) = 0 \quad e \quad \|y\| \leq p(x) + \varepsilon.$$

(b) a bola unitária B de $(E, \|\cdot\|)$ é η -compacta.

Se (a) ou (b) estiver verificada, então

$$\gamma[\eta, \|\cdot\|] \subset \tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|].$$

DEMONSTRAÇÃO: (a) Vamos supor inicialmente que está satisfeita a condição (a) e vamos provar que

$$\gamma''[\eta, \|\cdot\|] \subset \tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|], \text{ onde } \gamma''[\eta, \|\cdot\|]$$

é a topologia definida em 2.17, supondo-se que η é dada por uma família S de seminormas e $B = \{B_n; n \in \mathbb{N}\}$, com $B_n = \mu_n B$, sendo $\mu_n = \lambda^{-n}$, para algum $\lambda \in F^*$, com $0 < |\lambda| < \frac{1}{2}$.

Consideremos então a $\gamma''[\eta, \|\cdot\|]$ -vizinhança da origem dada por

$$\gamma''(U) = U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + \mu_n B),$$

onde para cada $n = 0, 1, \dots$, $U_n = \{x \in E : p_n(x) \leq \epsilon_n\}$, $\epsilon_n > 0$ e $p_n \in S$.

Seja $\lambda_0 \in F^*$ tal que $|\lambda_0| \leq \epsilon_0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\lambda_n \in F^*$ tal que $\epsilon_n + |\lambda_n| \leq |\mu_n|$. Seja $x \in E$ tal que

$$\tilde{p}(x) = \sup\{|\lambda_n|^{-1} p_n(x); n = 0, 1, \dots\} \leq 1.$$

Por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem y_n e z_n em E tais que $x = y_n + z_n$, $p_n(z_n) = 0$ e

$$\|y_n\| \leq p_n(x) + |\lambda_n| \leq \epsilon_n + |\lambda_n| \leq |\mu_n|.$$

Assim, para todo $n = 1, 2, \dots$, temos $z_n \in U_n$ e $y_n \in \mu_n B$, o que implica que $x \in U_n + \mu_n B$.

Para $n = 0$, se

$$\tilde{p}(x) = \sup\{|\lambda_n|^{-1} p_n(x); n = 0, 1, \dots\} \leq 1,$$

então $p_0(x) \leq |\lambda_0|$, do que segue que $x \in U_0$.

Logo, $x \in \gamma''(U)$ e portanto $\{x; \tilde{p}(x) \leq 1\} \subset \gamma''(U)$ o que implica que $\gamma''(U)$ é uma $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$ -vizinhança da origem em E .

Logo, $\gamma[\eta, \tau] \subset \tilde{\gamma}[\eta, \tau]$.

(b) Suponhamos agora que B é η -compacta.

Seja U uma $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ -vizinhança aberta da origem em E . Como $\gamma[\eta, \tau]$ e η coincidem sobre os $\|\cdot\|$ -limitados de E , existem $p_0 \in S$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\{x : p_0(x) < \varepsilon\} \cap B \subset U \cap B$.

Suponhamos encontradas $p_1, \dots, p_n \in S$ tais que

$$\bigcap_{k=1}^n \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \cap \mu_n B \subset U \cap \mu_n B,$$

onde $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_0| < \varepsilon$ e $|\lambda_k| \geq k - 1$, $k = 2, \dots, n$ e $\mu_n \in F^*$ com

$$k \leq |\mu_k| \leq |\mu_{k+1}|, \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

Queremos provar que existe $p_{n+1} \in S$ tal que

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \cap \mu_{n+1} B \subset U \cap \mu_{n+1} B.$$

Vamos supor, por absurdo, que não existe uma seminorma nestas condições. Então para qualquer $q \in S$, o conjunto

$$C_q = \bigcap_{k=1}^n \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \cap \{x : q(x) \leq n\} \cap (\mu_{n+1} B \setminus U)$$

é não vazio. Como o conjunto $\mu_{n+1} B \setminus U$ é $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ -compacto e portanto η -compacto, pela propriedade da intersecção finita existe um ponto x_0 em $(\mu_{n+1} B \setminus U) \cap \bigcap_{q \in S} C_q$ e portanto

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^n \{x : p_k(x) \leq |\lambda_n|\}.$$

Temos então $q(x_0) \leq n \leq |\mu_n|$ para cada $q \in S$, o que implica $\|x_0\| \leq |\mu_n|$.

Logo $x_0 \in U \cap \mu_n B$ e portanto $x \in U \cap \mu_{n+1} B$, o que é uma contradição.

Assim foi construída, por indução, uma sequência $\{p_n; n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas de S tal que

$$\bigcap_{k=1}^n \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \subset U$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\{x : |\lambda_n|^{-1} p_n(x) \leq 1\} \subset U.$$

Portanto existe uma $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$ -vizinhança \tilde{U} da origem dada por $\tilde{U} = \{x : \tilde{p}(x) \leq 1\}$ que está contida em U .

Logo $\gamma[\eta, \|\cdot\|] \subset \tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$, como queríamos.

OBSERVAÇÃO 3.6: Por este resultado e por 3.4 vimos que se $(E; \eta, \|\cdot\|)$ é um espaço de Saks onde uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 é satisfeita, então uma base de vizinhanças da origem para a topologia $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},$$

onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ é uma seqüência em F^* com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ e $\{p_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ é uma seqüência de seminormas η -contínuas pertencentes a S .

EXEMPLO 3.7: Vamos dar um exemplo de um espaço de Saks não arquimediano onde está satisfeita a condição (a) da Proposição 3.5. É fácil ver que a terna $(\ell_\infty; \eta, \|\cdot\|_\infty)$ do Exemplo 3.2 onde η é a topologia localmente F -convexa definida pela família de seminormas não arquimedianas $\{p_i ; i \in \mathbb{IN}\}$, onde $p_i(x) = |x_i|$ é um espaço de Saks não arquimediano.

Sejam $\varepsilon > 0$, $x \in E$ e $i \in \mathbb{IN}$ fixados. Se tomarmos

$$y = (x_1, \dots, x_i, 0, \dots) \text{ e } z = (0, \dots, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots)$$

em ℓ_∞ temos:

$$x = y + z, \quad p_i(z) = |z_i| = 0$$

e

$$\|y\| = \sup_i |y_i| = \max_{1 \leq j \leq i} |x_j| \leq \|x\| \leq \|x\| + \varepsilon.$$

Logo $(\ell_\infty; \eta, \|\cdot\|_\infty)$ satisfaz a condição (a) da Proposição 3.5 e portanto uma base de vizinhanças da origem para a topologia mista $\gamma[\eta, \|\cdot\|_\infty]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{x : |x_i| \leq |\lambda_i|\},$$

onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ é uma sequência em F^* com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$.

EXEMPLO 3.8: Já vimos que a terna $(\ell_1; \eta, \|\cdot\|_1)$ do Exemplo 3.3 é um espaço de Saks. Vamos mostrar que aqui também a condição (a) da Proposição 3.5 está satisfeita e vamos apresentar uma base de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta, \|\cdot\|_1]$ em ℓ_1 . Da mesma forma, fazendo, para cada $x \in \ell_1$, $\epsilon > 0$ e $i \in \mathbb{IN}$,

$$y = (x_1, \dots, x_i, 0, 0, \dots) \quad \text{e} \quad z = (0, 0, \dots, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots)$$

obtemos $x = y + z$, $p_i(z) = \sum_{k=1}^i |x_k| = 0$ e

$$\|y\| = \sup_i \sum_{k=1}^i |y_k| = \sum_{k=1}^i |x_k| \leq \|x\| \leq \|x\| + \epsilon.$$

Assim, $(\ell_1; \eta, \|\cdot\|_1)$ satisfaz a condição (a) da Proposição 3.5 e portanto uma base de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta, \|\cdot\|_1]$ é dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^i |x_k| \leq |\lambda_i|\},$$

onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ é sequência em F^* com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$.

EXEMPLO 3.9: Daremos agora um exemplo de um espaço de Saks no qual

é satisfeita a condição (b) da Proposição 3.5. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado sobre um corpo local não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$ tal que $\|E\| \subset |F|$ e seja E^* seu dual.

Para cada $\varphi \in E^*$, definamos a norma

$$\|\varphi\| = \inf \{r > 0; |\varphi(x)| < r \|x\|\}.$$

Seja η a topologia fraca ω^* que é definida em E^* pela família de seminormas $p_x : \varphi \rightarrow |\varphi(x)|$, $x \in E$.

Vamos mostrar que

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Se $\|x\| \leq 1$, temos $|\varphi(x)| \leq r$, do que segue que

$$\sup \{|\varphi(x)|; \|x\| \leq 1\} \leq r$$

para todo número real positivo r . Logo,

$$\sup \{|\varphi(x)|; \|x\| \leq 1\} \leq \|\varphi\|. \quad (1)$$

Tomemos agora $r = \sup \{|\varphi(x)|; \|x\| \leq 1\}$ e $x \in E$ arbitrário. Seja $\lambda \in F$ tal que $|\lambda| = \|x\|$. Então

$$\|\lambda^{-1} x\| = |\lambda|^{-1} \|x\| = 1$$

e portanto $|\varphi(\lambda^{-1}x)| \leq r$, ou seja $|\lambda|^{-1}|\varphi(x)| \leq r$, o que implica

$$\|\varphi(x)\| \leq r \|x\|.$$

Da definição, segue que

$$\|\varphi\| \leq r = \sup \{ |\varphi(x)| : \|x\| \leq 1 \}. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Isto mostra que a terna $(E^*; \omega^*, \|\cdot\|)$ é um espaço de Saks.

Como $(F, |\cdot|)$ é localmente compacto, pelo Teorema de Alaoglu, para todo $r > 0$ a bola fechada de raio r em $(E^*, \|\cdot\|)$ é ω^* -compacta. Logo $(E^*; \omega^*, \|\cdot\|)$ satisfaz a condição (b) da Proposição 3.5.

Assim uma base de vizinhanças da origem para a topologia mista $\gamma[\omega^*; \|\cdot\|]$ em E pode ser dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{ \varphi \in E^* : |\varphi(x_i)| \leq |\lambda_i| \},$$

onde $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F^* com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ e $x_i \in E$ com $\|x_i\| \leq 1$.

EXEMPLO 3.10: Vamos dar outro exemplo de espaço de Saks onde a condição (a) da Proposição 3.5 é satisfeita. Consideremos o espaço

$C_b(X;F)$ das funções contínuas e limitadas definidas sobre um espaço topológico localmente compacto e 0-dimensional X e consideremos sobre $C_b(X;F)$ a topologia compacto-aberta κ e a topologia σ da convergência uniforme sobre X , proveniente da norma $\|\cdot\|_\infty$.

Para cada $f \in C_b(X;F)$, temos $\|f\|_\infty = \sup_K p_K(f)$, onde K percorre a família de todos os subconjuntos compacto de X . Assim,

$$\|f\|_\infty = \sup \{p_K(f); p_K \in S\},$$

onde S é uma família de seminormas que define a topologia κ sobre $C_b(X;F)$. Isto mostra que $(C_b(X;F), \kappa, \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Saks.

Para mostrarmos que esta terna satisfaz a condição (a) da Proposição 3.5, consideremos dados $f \in C_b(X;F)$, $\epsilon > 0$ e $K \subset X$ compacto. Seja A um subconjunto compacto-aberto de X tal que $K \subset A$ e

$$\sup_{x \in A} |f(x)| \leq p_K(f) + \epsilon.$$

Seja $\varphi \in C_b(X;F)$ a função característica de A . Então $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in K$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \notin A$.

Definindo as funções $h(x) = [1 - \varphi(x)]f(x)$ e $g(x) = \varphi(x)f(x)$, temos: $f = g + h$; $p_K(h) = 0$ e

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in X} |g(x)| = \sup_{x \in A} |f(x)| \leq p_K(f) + \epsilon.$$

Assim a condição (a) está satisfeita e portanto uma base de vizinhanças da origem para $\gamma[\kappa, \sigma]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \in C_b(X; F); p_{K_n}(f) \leq |\lambda_n|\}$$

onde $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência em F com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ e $\{K_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência estritamente crescente de compacto-abertos de X .

TEOREMA 3.11: Se κ e σ são topologias definidas sobre $C_b(X; F)$ como no Exemplo 3.10, então $\beta = \gamma[\kappa, \sigma]$.

DEMONSTRAÇÃO: Vimos em 0.13 que β e κ coincidem sobre os σ -limitados. Logo $\beta \subset \gamma[\kappa, \sigma]$.

Vamos mostrar que $\gamma[\kappa, \sigma] \subset \beta$. Seja U uma $\gamma[\kappa, \sigma]$ -vizinhança da origem. Pelo Exemplo 3.10, existe uma $\gamma[\kappa, \sigma]$ -vizinhança da origem $U_1 \subset U$ do tipo

$$U_1 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f \in C_b(X; F); p_{K_n}(f) \leq |\lambda_n|\}$$

e as seqüências $\{K_n; n \in \mathbb{N}\}$ e $\{\lambda_n; n \in \mathbb{N}\}$ satisfazem as propriedades lá enunciadas.

Vamos definir uma função limitada $\phi : X \rightarrow F$ pondo

$$\phi(x) = \begin{cases} \lambda_1^{-1}, & \text{se } x \in K_1 \\ \lambda_n^{-1}, & \text{se } x \in K_n - K_{n-1} \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \end{cases}$$

que é contínua. Com efeito, seja $x_0 \in X$. Se $x_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, então $x_0 \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, onde $H_1 = K_1$ e $H_n = K_n - K_{n-1}$, para $n > 1$.

Logo, para algum $j \in \mathbb{N}$, temos $\phi(x_0) = \lambda_j^{-1}$. Dada uma vizinhança W do ponto λ_j^{-1} em $(F, |\cdot|)$, podemos escolher uma vizinhança W' de λ_j^{-1} tal que $W' \subset W$ e $\lambda_n^{-1} \notin W'$, para todo $n \neq j$. Assim sendo, $\phi^{-1}(W') = H_j$, que é um subconjunto aberto e fechado de X e contém o ponto x_0 . Portanto $\phi(H_j) \subset W$.

Se $x_0 \in X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, então $\phi(x_0) = 0$. Seja então V uma vizinhança do zero em $(F, |\cdot|)$. Como $\lambda_n^{-1} \rightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\lambda_n^{-1} \in V$. Seja

$$A = X \setminus \bigcup_{n=1}^{n_0} K_n,$$

que é um conjunto aberto e fechado e contém x_0 . Se $x \in A$ e $x \neq x_0$, temos $\phi(x) = \lambda_n^{-1}$ para algum $n \geq n_0$. Portanto $\phi(x) \in V$, ou seja, $\phi(A) \subset V$.

Logo ϕ é contínua.

Da construção de ϕ decorre imediatamente que $\phi \in C_0(X;F)$. Assim a aplicação

$$f \rightarrow p_\phi(f) = \sup_{x \in X} |\phi(x)f(x)|$$

é uma seminorma para a topologia β . Considerando então a β -vizinhança da origem $U_\phi = \{f \in C_b(X;F) : p_\phi(f) \leq 1\}$, temos que se $g \in U_\phi$, então

$$p_\phi(g) = \sup_{x \in X} |\phi(x)g(x)| \leq 1.$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} p_{K_n}(f) &= \sup_{x \in K_n} |g(x)| = \sup_{x \in K_n} |\lambda_n \lambda_n^{-1} g(x)| = \\ &= |\lambda_n| \sup_{x \in K_n} |\lambda_n^{-1} g(x)| \leq \\ &\leq |\lambda_n| \sup_{x \in K_n} |\phi(x)g(x)| \leq |\lambda_n|. \end{aligned}$$

Logo $g \in U$.

Mostramos assim que a topologia estrita definida no §0 é a topologia mista $\gamma[\kappa, \sigma]$.

Na verdade este resultado continua verdadeiro mesmo quando β estiver definida sobre o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em X e com valores em um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$, em lugar do anel de divisão $(F, |\cdot|)$.

§4- TOPOLOGIAS MISTAS DE ÁLGBRAS

DEFINIÇÃO 4.1: Seja F um anel de divisão. Uma *álgebra* E sobre F é um conjunto que possui uma estrutura de espaço vetorial sobre F , no qual está definida uma aplicação $(x,y) \rightarrow x \cdot y$ de $E \times E \rightarrow E$ satisfazendo, para quaisquer elementos x, y e z em E e α em F , as propriedades:

$$(1) \quad (x + y)z = xz + yz \quad \text{e} \quad x(y + z) = xy + xz$$

$$(2) \quad \alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

Uma álgebra E é dita *associativa* se a multiplicação satisfizer também a propriedade:

$$(3) \quad x(yz) = (xy)z \quad \text{para quaisquer elementos } x, y \text{ e } z \text{ em } E.$$

Dizemos que E é *comutativa* se for satisfeita:

$$(4) \quad xy = yx \quad \text{para quaisquer elementos } x \text{ e } y \text{ em } E.$$

E é uma *álgebra com identidade* se existir um elemento não nulo e em E chamado *elemento identidade* de E tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in E$.

DEFINIÇÃO 4.2: Uma *álgebra topológica* sobre $(F, |\cdot|)$ é um par (E, τ) onde E é uma álgebra sobre F e τ é uma topologia de EVT sobre E tal que a aplicação $(x,y) \rightarrow x \cdot y$ de $E \times E$ em E é contínua.

DEFINIÇÃO 4.3: Uma álgebra E é dita uma *álgebra normada* se E é um espaço normado cuja norma $\|\cdot\|$ satisfaz, para quaisquer elementos x e y em E , $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Se E for uma álgebra com identidade, suporemos que $\|e\| = 1$.

Claramente, toda álgebra normada é uma álgebra topológica. Mais geralmente, (E, τ) é uma álgebra topológica se E for uma álgebra e τ for uma topologia de EVT sobre E dada por uma família de seminormas Γ tal que dada $p \in \Gamma$ existe $q \in \Gamma$ satisfazendo

$$p(xy) \leq q(x)q(y),$$

para todo par x e y em E .

Com efeito, se U é uma vizinhança arbitrária da origem, existe $\varepsilon > 0$ e $p_1, \dots, p_n \in \Gamma$ tais que

$$U \supset \{x \in E; p_i(x) < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, seja $q_i \in \Gamma$ satisfazendo a propriedade acima. Então

$$V = \{x \in E : q_i(x) < \sqrt{\varepsilon}\}$$

é tal que $V \cdot V \subset U$.

Seja E uma álgebra sobre F e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E com $\eta \subset \tau$. Como vimos no §1, as topologias η e τ dão origem a uma nova topologia $\gamma[\eta, \tau]$ de EVT sobre E , a qual foi chamada topologia mista determinada em E por η e τ .

Veremos a seguir algumas condições sobre E , η e τ que tornam $(E; \gamma[\eta, \tau])$ uma álgebra topológica.

LEMA 4.4: *Seja E uma álgebra sobre $(F, |\cdot|)$. Se τ é uma topologia de EVT tal que a multiplicação $(x, y) \rightarrow xy$ é contínua na origem, então (E, τ) é uma álgebra topológica.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $(x_0, y_0) \in E \times E$ e U uma τ -vizinhança da origem em E . Seja V outra vizinhança da origem tal que

$$V + V + V \subset U$$

e consideremos uma τ -vizinhança equilibrada W da origem satisfazendo $WW \subset V$.

Como W é absorvente, existe $\delta > 0$ tal que se $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, temos $\{x_0, y_0\} \subset \lambda W$. Escolhido e fixado $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$ e $|\lambda| \geq 1$, temos que $\lambda^{-1}x_0 \in W$ e $\lambda^{-1}y_0 \in W$. Consideremos $x \in x_0 + \lambda^{-1}W$ e $y \in y_0 + \lambda^{-1}W$. Então existem w e w' em W tais que $x = x_0 + \lambda^{-1}w$ e $y = y_0 + \lambda^{-1}w'$.

Logo,

$$xy = x_0y_0 + \lambda^{-1}wy_0 + x_0\lambda^{-1}w' + \lambda^{-1}w\lambda^{-1}w'.$$

Mas $\lambda^{-1}wy_0 = w(\lambda^{-1}y_0) \in WW \subset V$;

$$x_0\lambda^{-1}w' = (\lambda^{-1}x_0)w' \in WW \subset V;$$

e

$$\lambda^{-1}W\lambda^{-1}W' \in \lambda^{-1}W\lambda^{-1}W \subset WW \subset V,$$

pois W é equilibrada e $|\lambda^{-1}| < 1$.

Concluimos que $xy \in x_0y_0 + U$, e portanto $(x,y) \rightarrow xy$ é contínua no ponto (x_0, y_0) .

LEMA 4.5: *Seja (E, τ) uma álgebra topológica. Se U é uma τ -vizinhança da origem e B é τ -limitado, então existe uma τ -vizinhança V da origem tal que $VB \subset U$ e $BV \subset U$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $(x,y) \rightarrow xy$ é contínua, existe uma τ -vizinhança W da origem tal que $WW \subset U$. Como B é τ -limitado, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, temos $B \subset \lambda W$. Seja λ_0 um deles fixado e seja $V = \lambda_0^{-1}W$. Então

$$VB \subset (\lambda_0^{-1}W)(\lambda_0 W) = WW \subset U$$

e

$$BV \subset (\lambda_0 W)(\lambda_0^{-1}W) = WW \subset U,$$

como queríamos.

TEOREMA 4.6: *Seja E uma álgebra sobre $(F, |\cdot|)$ e η e τ duas topologias de EVT sobre E . Suponhamos que τ é definida por uma norma submultiplicativa $\|\cdot\|$ e que $B = \{B_n; n \in \mathbb{IN}\}$ é um sistema*

fundamental de subconjuntos τ -limitados de E satisfazendo as propriedades (a)-(d) do Exemplo 2.2. Suponhamos que para cada η -vizinhança U da origem e para cada $n \in \mathbb{N}$ exista uma η -vizinhança V da origem satisfazendo $(V \cap B_n)B_n \subset U$. Então $(E; \gamma[\eta, \tau])$ é uma álgebra topológica.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 4.4, basta provarmos a continuidade da multiplicação na origem.

Seja

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap B_i)$$

uma $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem (ver 2.1). Lembramos que da propriedade (d), $B_i = \lambda_0^{-i}B$, onde $\lambda_0 \in F$ com $0 < |\lambda_0| < \frac{1}{2}$ e $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Consideremos a aplicação injetora $v : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$v(i, j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j,$$

para cada par $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Queremos encontrar η -vizinhanças V_1, \dots, V_n da origem tais que

$$(V_i \cap B_i)(V_j \cap B_j) \subset U_{v(i, j)} \cap B_{v(i, j)}. \quad (A)$$

Usando o Lema 4.5 para B_1 e $U_{v(1, 1)}$, obtemos uma η -vizinhança

V_1 da origem tal que

$$(V_1 \cap B_1)(V_1 \cap B_1) \subset (V_1 \cap B_1)B_1 \subset U_{V(1,1)} .$$

Além disso, como $\|\cdot\|$ é submultiplicativa, temos

$$B_1 B_1 = \lambda_0^{-1} B \lambda_0^{-1} B = \lambda_0^{-2} B B \subset \lambda_0^{-2} B = B_2 \subset B_{V(1,1)}$$

pois B é equilibrado e $v(1,1) = 4 > 2$.

Logo,

$$(V_1 \cap B_1)(V_1 \cap B_1) \subset U_{V(1,1)} \cap B_{V(1,1)} .$$

Suponhamos escolhidos V_1, \dots, V_n satisfazendo (A), para cada par $i, j \leq n$. Seja

$$\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^{n+1} U_{V(i,n+1)}$$

uma η -vizinhança da origem. Pelo Lema 4.5, existe uma η -vizinhança V_{n+1} da origem tal que $(V_{n+1} \cap B_{n+1})B_{n+1} \subset \tilde{U}$.

Assim, para cada $k, 1 \leq k \leq n+1$, temos:

$$\begin{aligned} (V_k \cap B_k)(V_{n+1} \cap B_{n+1}) &\subset B_k (V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset \\ &\subset B_{n+1} (V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset \tilde{U} \subset U_{V(i,n+1)} , \end{aligned}$$

para todo $i, 1 \leq i \leq n+1$.

Além disso,

$$\begin{aligned} (V_k \cap B_k) (V_{n+1} \cap B_{n+1}) &\subset B_n B_{n+1} \subset B_{k+(n+1)} \subset \\ &\subset B_{V(k,n+1)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(V_k \cap B_k) \cap (V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset U_{V(k,n+1)} \cap B_{V(k,n+1)}.$$

Tomando

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (V_i \cap B_i),$$

temos:

$$\begin{aligned} VV &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (V_i \cap B_i) \cdot \bigcup_{j=1}^n \sum_{j=1}^n (V_j \cap B_j) \subset \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n (V_i \cap B_i) (V_j \cap B_j) \subset \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n (U_{V(i,j)} \cap B_{V(i,j)}), \end{aligned}$$

por (A).

Logo, $VV \subset U$.

EXEMPLO 4.7: Seja X um espaço topológico localmente compacto e $\beta = \gamma[\kappa, \sigma]$ a topologia estrita sobre $C_b(X; F)$. Por exemplo,

quando X é 0-dimensional, vide Exemplo 1.31. Vamos mostrar que $(C_b(X;F), \beta)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.6.

Se $f, g \in C_b(X;F)$, temos

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

Portanto $\|\cdot\|_\infty$ é submultiplicativa.

Agora, seja $B_n = \{f \in C_b(X;F) : \|f\|_\infty \leq \rho^{-n}\}$, onde $\rho = |\lambda_0|$ e $\lambda_0 \in F$ tal $0 < |\lambda_0| < \frac{1}{2}$ é escolhido para a definição do sistema fundamental $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de σ -limitados de $C_b(X;F)$. Consideremos a κ -vizinhança da origem dada por

$$U = \{f \in C_b(X;F) : p_K(f) \leq \varepsilon\},$$

onde K é um subconjunto compacto de X e $\varepsilon > 0$ dado. Escolhamos $\delta > 0$ tal que $\delta\rho^{-n} < \varepsilon$ e $V = \{f \in C_b(X;F) : p_K(f) \leq \delta\}$.

Se $f \in V \cap B_n$ e $g \in B_n$, então

$$\sup_{x \in K} |f(x)| < \delta$$

e

$$\sup_{x \in K} |g(x)| \leq \sup_{x \in X} |g(x)| < \rho^{-n},$$

o que implica que para todo $x \in K$, $|f(x)g(x)| \leq \delta\rho^{-n}$, e portanto $fg \in U$.

Pelo Teorema 4.5 $(C_b(X;F), \beta)$, é então, uma álgebra topológica.

DEFINIÇÃO 4.8: Seja $(E, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada sobre $(F, |\cdot|)$ e seja η uma topologia de álgebra topológica sobre E tais que existe um conjunto S de seminormas η -contínuas que define a topologia η satisfazendo $\|\cdot\| = \sup S$. Sob essas condições, o espaço de Saks $(E; \eta, \|\cdot\|)$ será chamada uma álgebra de Saks.

TEOREMA 4.9: Seja $(E; \eta, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Saks tal que η está definida por um conjunto $S = \{p_i ; i \in I\}$ de seminormas tais que para todo $i \in I$, existe $j \in I$ satisfazendo $p_i(xy) \leq p_j(x) p_j(y)$ para todo par x e y de elementos de E . Se uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 estiver satisfeita, então existe um sistema fundamental de seminormas Γ que define a topologia $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ tal que dada $p \in \Gamma$, existe $q \in \Gamma$ satisfazendo $p(xy) \leq q(x)q(y)$, para todo par $x, y \in E$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 3.5, uma família de seminormas que define $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ pode ser dada pelas aplicações $x \rightarrow \tilde{p}(x)$ onde $\tilde{p}(x) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(x)$ onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência em F com $|\lambda_n| \rightarrow +\infty$ e $\{p_n ; n \in \mathbb{N}\} \subset S$.

Seja $\mu \in F$ tal que $|\mu| > 1$. Vamos definir uma seqüência $\{\mu_n ; n \in \mathbb{N}\}$ em F pondo $\mu_n = \mu^{2n}$ e tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|\mu|^{2n} \leq |\lambda_n| < |\mu|^{2n+2}$. Como $|\mu_n| = |\mu|^{2n} \geq |a_n| \cdot |\mu|^{-2}$ e como $|a_n| \cdot |\mu|^{-2} \rightarrow +\infty$ segue que $|\mu_n| \rightarrow +\infty$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu^n = \sqrt{\mu_n}$ e $|\mu^n| \rightarrow +\infty$.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $j_n \in I$ tal que

$$p_n(xy) \leq p_{j_n}(x)p_n(y).$$

Assim, dada

$$\tilde{p}(x) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(x),$$

temos, para quaisquer x e y em E ,

$$\begin{aligned} \tilde{p}(xy) &= \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(xy) \leq \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_{j_n}(x)p_{j_n}(y) \leq \\ &\leq \sup_n |\mu^n|^{-1} p_{j_n}(x) \cdot \sup_n |\mu^n|^{-1} p_{j_n}(y) = \\ &= \tilde{q}(x)\tilde{q}(y). \end{aligned}$$

COROLÁRIO 4.10: *Sob as hipóteses do Teorema 4.9, $(E; \gamma[\eta, \|\cdot\|])$ é uma álgebra topológica.*

Sejam dadas agora E uma álgebra sobre F , τ uma topologia de EVT sobre E e $m : E \times E \rightarrow E$ a aplicação dada por $m(x,y) = xy$, para todo $(x,y) \in E \times E$.

Consideremos as seguintes propriedades:

- (1) m é separadamente contínua.
- (2) m é hipocontínua, isto é, para cada τ -vizinhança U da origem e para cada subconjunto τ -limitado B de E , existe

uma τ -vizinhança V da origem em E tal que $VB \cup BV \subset U$.

(3) m é contínua.

Claramente $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$.

Numa álgebra topológica, a condição (3) está satisfeita por definição. Vamos introduzir, seguindo [6], uma classe de álgebras para as quais (2) está automaticamente verificada e que contém propriamente a subclasse das álgebras topológicas constituída pelas álgebras normadas.

Se $(E, \|\cdot\|)$ é uma álgebra normada e η é uma topologia de EVT sobre E passaremos a estudar algumas propriedades da topologia $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ que são herdadas da topologia η .

Inicialmente veremos algumas definições:

DEFINIÇÃO 4.11: Chamamos de *álgebra s-topológica* a uma álgebra E munida de uma topologia de EVT que torna a multiplicação em E , separadamente contínua.

Claramente, toda álgebra topológica é s-topológica.

DEFINIÇÃO 4.12: Um subconjunto A de uma álgebra s-topológica (E, τ) é *m-bornívoro à esquerda* se para todo subconjunto limitado B de E existir $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, tivermos $BA \subset \lambda A$. Analogamente define-se *conjunto m-bornívoro à direita*.

DC/4752

DEFINIÇÃO 4.13: Uma álgebra s -topológica (E, τ) é chamada *localmente m -bornívora à esquerda* (respectivamente *à direita*) se possuir um sistema fundamental de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos m -bornívoros à esquerda (respectivamente à direita). Diremos que (E, τ) é *localmente m -bornívora* se possui um sistema fundamental de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos m -bornívoros à esquerda e à direita.

OBSERVAÇÃO 4.14: Seja (E, τ) uma álgebra topológica cuja topologia é dada por uma família Γ de seminormas tal que dada $p \in \Gamma$ existe $q \in \Gamma$ satisfazendo, para todo x, y em E , $p(xy) \leq p(x)q(x)$. Então (E, τ) é localmente m -bornívora. Com efeito sejam $B \in \mathcal{IL}(\tau)$ e U uma vizinhança da origem. Então existe $p_1, \dots, p_n \in \Gamma$ e $\varepsilon > 0$ tal que $U \supset \{x \in E : p_i(x) < \varepsilon\}$, $i=1, \dots, n$. Para cada $i=1, \dots, n$, existe $q_i \in \Gamma$ tal que $p_i(xy) \leq p_i(x)q_i(y)$. Mas dados $0 < \delta < 1$ e $V = \{x \in E : q_i(x) \leq \delta\}$, existe $\mu > 0$ tal que $B \subset \lambda V$ sempre que $|\lambda| \geq \mu$. Disto temos $BU \subset \lambda U$ para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \mu$. Logo U é m -bornívoro à esquerda. Analogamente mostra-se que U é m -bornívoro a direita, do que segue o resultado.

OBSERVAÇÃO 4.15: Se $(E, \|\cdot\|)$ é uma álgebra normada então é localmente m -bornívora. Isto segue claramente de 4.14 e da Definição 4.8.

OBSERVAÇÃO 4.16: Em uma álgebra localmente m -bornívora (E, τ) a multiplicação é hipocontínua.

De fato, sejam $b \in \mathcal{IL}(\tau)$ e U uma τ -vizinhança da origem em E . Por hipótese existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, tem-se $BU \subset \lambda U$. Fixando um tal λ e tomando a τ -vizinhança da origem dada por $V = \lambda^{-1}U$, temos $BV = B(\lambda^{-1}U) \subset U$ o que implica que a multiplicação é

hipocontínua à esquerda. Analogamente provamos que a multiplicação é hipocontínua à direita.

PROPOSIÇÃO 4.17: *Sejam (E, η) e (E, τ) duas álgebras s-topológicas tal que $\Pi(\tau)$ possui um sistema fundamental enumerável. Então $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é uma álgebra s-topológica.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap B_i)$$

uma $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem dada como em 2.1, e seja $x_0 \in E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $j_n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 B_n \subset B_{j_n}$. Como (E, η) é s-topológica, dada U_{j_n} existe uma η -vizinhança V_n da origem tal que $x_0 V_n \subset U_{j_n}$. Considerando a $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem dada por

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (V_i \cap B_i),$$

temos

$$\begin{aligned} x_0 V &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (x_0 V_i \cap x_0 B_i) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_{j_i} \cap B_{j_i}) \subset \\ &\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m (U_k \cap B_k) \end{aligned}$$

onde $m = \max \{j_1, \dots, j_n\}$.

Logo $x_0 V \subset U$. (1)

Analogamente mostra-se que dado $y_0 \in E$ e U , existe uma $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança W da origem tal que $Wy_0 \subset U$. (2)

De (1) e (2) decorre que $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é s -topológica.

TEOREMA 4.18: Se $(E; \eta, \tau)$ é uma álgebra de Saks tal que as seminormas de S são submultiplicativas e se uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 estiver satisfeita, então $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é uma álgebra localmente m -bornivora.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 4.17, $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é uma álgebra s -topológica. Pela Proposição 3.5, uma base de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta, \tau]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : p_n(x) \leq |a_n|\}$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in F^*$, $|a_n| \rightarrow +\infty$ e $p_n \in S$.

Seja U uma $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem deste tipo e seja $L \in \mathcal{IL}(\gamma[\eta, \tau])$. Como $(E; \eta, \tau)$ é um espaço de Saks, $\mathcal{IL}(\tau)$ possui uma sequência fundamental de conjuntos η -fechados. Portanto, pelo Teorema 2.6, $L \in \mathcal{IL}(\tau)$. Seja B a bola unitária de (E, τ) . Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, temos $L \subset \lambda B$.

Se $x \in E$ e $b \in L$, temos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(xb) \leq p_n(x)p_n(b) \leq p_n(x)\|b\| \leq |a_n| \cdot |\lambda|,$$

isto é, $xb \in \lambda U$. Logo U é m -bornívoro à esquerda. Analogamente mostra-se que U é m -bornívoro à direita, de onde segue o resultado.

Já vimos no Exemplo 4.7 que $(C_D(X;F), \beta)$ com X localmente compacto é uma álgebra localmente m -bornívora. Observamos aqui que $(C_D(X;F); \kappa, \|\cdot\|_\infty)$ satisfaz também as hipóteses do Teorema 4.18.

TEOREMA 4.19: Seja $(E; \eta, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Saks para a qual está satisfeita uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 e suponhamos que a família S de seminormas η -contínuas com $\|\cdot\| = \sup S$ satisfaz a seguinte propriedade: (*) existe $q \in S$ tal que para toda $p \in S$, e para todo par x e y em E , $p(xy) \leq p(x)q(y)$. Seja Γ a correspondente família de seminormas que define $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$. Então existe uma seminorma $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ -contínua \tilde{q} tal que $\tilde{p}(xy) \leq \tilde{p}(x)\tilde{q}(y)$ para todo $\tilde{p} \in \Gamma$ e para todo par x e y em E .

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 3.5, as seminormas de Γ são do tipo

$$x \rightarrow \tilde{p}(x) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(x)$$

onde $\{p_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em S e $\lambda_n \rightarrow +\infty$ em F . Seja S' a família das seminormas η -contínuas dada pelos múltiplos escalares positivos dos elementos de S . É claro que cada seminorma

de S' é η -contínua e S' satisfaz a propriedade (*).

Consideremos a seminorma

$$x \rightarrow \tilde{q}(x) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} (|\lambda_n| q(x)),$$

onde q é dada por hipótese. É claro que \tilde{q} é $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ -contínua por ser η -contínua e tem-se, para toda $\tilde{p} \in \Gamma$ e para quaisquer x e y em E ,

$$\tilde{p}(xy) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(xy) \leq \tilde{p}(x)\tilde{q}(y).$$

Isto completa a prova do teorema.

COROLÁRIO 4.20: *Sob as hipóteses do Teorema 4.19, $(E, \gamma[\eta, \|\cdot\|])$ é uma álgebra localmente m -bornivora.*

TEOREMA 4.21: *Seja (E, τ) uma álgebra normada e seja (E, η) uma álgebra s -topológica tal que a bola unitária B de (E, τ) é η -fechada e satisfaz, para todo conjunto U de uma base \mathcal{U} de η -vizinhanças da origem, a condição $UB \cup BU \subset U$. Então $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é uma álgebra localmente m -bornivora.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 4.17, $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é uma álgebra s -topológica. Por Proposição 2.17, uma base de vizinhanças da origem para a topologia $\gamma[\eta, \tau]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$U = U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap a_n B),$$

onde $\{U_n ; n = 0, 1, \dots\}$ é uma seqüência de η -vizinhanças da origem e $\{a_n ; n = 0, 1, \dots\}$ é uma seqüência em F^* com $|a_n| \rightarrow +\infty$.

Seja U uma vizinhança da origem desse tipo e seja L um subconjunto $\gamma[\eta, \tau]$ -limitado de E . Como B é η -fechada, pelo Teorema 2.6, L é τ -limitado. Então, para algum $\lambda \in F^*$, temos $L \subset \lambda B$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} LU &= LU_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (LU_n \cap La_n B) \subset \lambda BU_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda BU_n \cap \lambda a_n B) \subset \\ &\subset \lambda [U_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap a_n B)] \subset \lambda U, \end{aligned}$$

pois para todo $n = 0, 1, \dots$, $BU_n \subset U_n$.

Analogamente mostra-se que $UL \subset U$.

Segue-se então que $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é uma álgebra localmente m -bornívora.

EXEMPLO 4.22: Vamos dar exemplo de uma álgebra E e duas topologias η e τ definidas sobre E , satisfazendo as condições do Teorema 4.21, tornando portanto $(E, \gamma[\eta, \tau])$ uma álgebra localmente m -bornívora.

Seja $(E, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada e (E, η) uma álgebra s -topológica definida por uma família Γ de seminormas satisfazendo

(1) existe $p \in \Gamma$ tal que $\|x\| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

(2) $q(xy) \leq \|x\| q(y)$ para todo x, y em E e $q \in \Gamma$.

De (1) segue imediatamente que a bola unitária B de $(E, \|\cdot\|)$ é η -fechada e de (2), que $UB \cup BU \subset U$ para todo conjunto U de um sistema fundamental \mathcal{U} de η -vizinhanças da origem. Logo as hipóteses do Teorema 4.21 estão verificadas e portanto $(E, \gamma[\eta, \|\cdot\|])$ é uma álgebra localmente m -bornívora.

EXEMPLO 4.23: Um exemplo concreto da situação anterior é o seguinte: tomemos $E = C_b(X; F)$, onde

$$X = \{t \in F : |t| \leq 1\};$$

τ a topologia em E dada pela norma $\|\cdot\|_\infty$ o que torna (E, τ) uma álgebra normada; e η a topologia em E dada pela família de seminormas

$$\Gamma = \{p_n : p_n(f) = \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |x|^n\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Observamos que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |x|^0 = p_\infty(f).$$

Assim, $\tau \subset \eta$, do que segue que a bola unitária τ -fechada de (E, τ) é η -fechada.

Afirmamos agora que para cada U pertencente a um sistema fundamental de η -vizinhanças da origem em E , se B denota a bola unitária de (E, τ) , então $B \cup U \subset U$. Com efeito, seja

$$U = U_n = \{f \in E : \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |x|^n < \varepsilon\}.$$

Se $f \in B$ e $g \in U$, temos

$$\begin{aligned} p_n(fg) &= \sup_{x \in X} |f(x)g(x)| \cdot |x|^n \leq \\ &\leq \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)| \cdot |x|^n \leq \\ &\leq \|f\|_{\infty} p_n(x) < 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Além disso, (E, η) é uma álgebra s -topológica, ou seja fixado $f_0 \in E$, a aplicação $(f_0, g) \rightarrow f_0 g$ é contínua na origem. De fato, dada

$$U = \{h \in E : \sup_{x \in X} |h(x)| \cdot |x|^n \leq \varepsilon\},$$

seja

$$V = \left\{ h \in E : \sup_{x \in X} |h(x)| \cdot |x|^n \leq \frac{\varepsilon}{\|f_0\|_{\infty}} \right\}$$

Se $g \in V$, temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} |(f_0 g)(x)| \cdot |x|^n &\leq \sup_{x \in X} |f_0(x)| \cdot \sup_{x \in X} |g(x)| \cdot |x|^n \leq \\ &\leq \|f_0\|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\|f_0\|_\infty} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 4.21, $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é então uma álgebra localmente m -bornívora.

DEFINIÇÃO 4.24: Seja E um espaço vetorial sobre F e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E . Consideremos a família N de todos os conjuntos da forma

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap a_i U),$$

onde $\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência arbitrária de η -vizinhanças da origem e $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F com $|a_n| \rightarrow +\infty$. É fácil ver que N constitui um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT sobre E . Vamos denotar essa topologia por ω .

PROPOSIÇÃO 4.25: Sejam E, η e τ como na Definição 4.24. Então $\eta \subset \omega$.

DEMONSTRAÇÃO: Dada uma η -vizinhança V da origem, existe uma η -vizinhança U_1 da origem tal que $U_1 + U_1 \subset V$. Da mesma forma, existe uma η -vizinhança U_2 da origem tal que $U_2 + U_2 \subset U_1$. Assim,

para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma η -vizinhança U_n da origem tal que $U_n + U_n \subset U_{n-1}$. Concluimos, então que existe uma sequência $\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ de η -vizinhanças da origem tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(U_n \cap a_n U) + (U_{n-1} \cap a_{n-1} U) + \dots + (U_1 \cap a_1 U) \subset V.$$

Logo

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap a_i U) \subset V$$

e portanto $\eta \subset \omega$.

TEOREMA 4.26: Seja (E, η) uma álgebra normada e (E, τ) uma álgebra s -topológica para a qual existe uma base $U(\tau)$ de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos U que absorvem os conjuntos $US \cup SU$. Então (E, ω) é uma álgebra localmente m -bornivora.

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap a_i U)$$

uma ω -vizinhança da origem onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha_n S$ para algum $\alpha_n \in F^*$ sendo S a bola unitária de (E, η) .

Seja L um subconjunto ω -limitado de E . Como $\eta \subset \omega$, L é também η -limitado e portanto existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$

com $|\lambda| \geq \delta_1$, $L \subset \lambda S$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$LU_n \subset \lambda S \alpha_n S \subset \lambda \alpha_n S = \lambda U_n.$$

Por hipótese existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $\mu \in F$ com $|\mu| \geq \delta_2$, $US \cup SU \subset \mu U$. Assim, $LU \subset \lambda SU \subset \lambda \mu U$ para todo λ e para todo μ em F com $|\lambda| \geq \delta_1$ e $|\mu v| \geq \delta_1 \delta_2$.

Se $\delta = \max\{\delta_1, \delta_1 \delta_2\}$, temos

$$\begin{aligned} L[U_n \cap a_n U] &= LU_n \cap La_n U \subset \\ &\subset vU_n \cap a_n vU = \\ &= v[U_n \cap a_n U], \end{aligned}$$

para todo $v \in F$ com $|v| \geq \delta$.

Logo,

$$LW = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (LU_i \cap La_n U) \subset v \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap a_i U) = vW.$$

Analogamente mostramos que $WL \subset vW$ para todo $v \in F$ com $|v| \geq \delta$.

Logo W é um conjunto m -bornívoro e portanto (E, ω) é uma álgebra localmente m -bornívora.

COROLÁRIO 4.27: Sejam E , η e τ como no Teorema 4.26. Então a multiplicação em (E, ω) é hipocontínua.

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Teorema 4.26 e da Observação 4.16.

EXEMPLO 4.28: Vamos dar um exemplo da situação do Teorema 4.26. Consideremos a álgebra $C_b(F)$ das funções contínuas e limitadas definidas em F e com valores em F . Seja $f \in C_b(F)$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in F$. Consideremos também a subálgebra

$$E = \{g \in C_b(F); g = fh, h \in C_b(F)\}$$

de $C_b(F)$.

Seja η uma topologia em E induzida pela norma

$$\|g\| = \sup_{x \in F} |g(x)|.$$

É claro que (E, η) é uma álgebra normada.

Seja τ a topologia definida sobre E pela seminorma

$$p(g) = \sup_{x \in F} |h(x)|.$$

Se $g_1 = fh_1$ e $g_2 = fh_2$, temos

$$p(g_1, g_2) = \sup_{x \in F} |h_1(x)g_2(x)| \leq \|g_2\| p(g_1).$$

Analogamente obtemos $p(g_1, g_2) \leq \|g_1\|p(g_2)$. Com isto acabamos de provar que (E, τ) é uma álgebra s-topológica.

Observamos ainda que dada uma τ -vizinhança U da origem e considerando a bola unitária S de (E, η) , se $g_1 \in U$ e $g_2 \in S$, temos $p(g_1, g_2) \leq \|g_2\|p(g_1) \leq p(g_1)$, o que implica $US \subset U$.

Analogamente temos $SU \subset U$.

Então, pelo Teorema 4.26 se ω é a topologia correspondente a η e τ como na Definição 4.24, (E, ω) é uma álgebra localmente m-bornívora.

EXEMPLO 4.29: Seja $(F, |\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado não arquimediano. Já mostramos, no Exemplo 4.28, que (E, τ) é uma álgebra s-topológica. Vamos mostrar que a multiplicação em (E, τ) não é hipocontínua. Para isso vamos definir uma sequência $\{g_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ de funções dadas por

$$g_n = \begin{cases} a_n^{-1} x, & \text{se } x \in B(0, |a_n|^2) \\ a_n, & \text{se } x \notin B(0, |a_n|^2) \end{cases}$$

onde $\{a_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ é uma sequência em F com $1 < |a_n| \rightarrow +\infty$.

Claramente temos $g_n \in C_b(F)$, para cada $n \in \mathbb{IN}$ e $p(g_n) = |a_n|^{-1}$.

Assim, $\{g_n ; n \in \mathbb{IN}\}$ converge a zero na topologia τ . Mas

$\{g_n^2; n \in \mathbb{N}\}$ não é τ -convergente a zero, pois para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(g_n^2) = 1$.

Consideremos uma τ -vizinhança U da origem dada por

$$U = \{g \in E : p(g) < 1\}$$

e o conjunto

$$B = \{g_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{I}(\tau).$$

Para qualquer τ -vizinhança V da origem, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $g_n \in V$, mas $g_n g_n \notin U$, pois $p(g_n^2) = 1$.

Isto contradiz o fato da multiplicação ser hipocontínua em (E, τ) .

Este é um exemplo de uma álgebra s -topológica que não é topológica.

TEOREMA 4.30: *Seja (E, η) uma álgebra s -topológica cuja multiplicação é hipocontínua e seja (E, τ) uma álgebra normada cuja bola unitária é η -fechada. Então a multiplicação em $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é hipocontínua.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap a_i U)$$

uma $\gamma[\eta, \tau]$ -vizinhança da origem em E onde U é uma τ -vizinhança limitada da origem em E e seja B um subconjunto $\gamma[\eta, \tau]$ -limitado de E .

Como $\eta \subset \gamma[\eta, \tau]$, B é também η -limitado e como (E, η) tem multiplicação hipocontínua, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma η -vizinhança V_n da origem tal que $BV_n \cup V_n B \subset U_n$.

Agora, dada a τ -vizinhança U da origem em E , como (E, τ) é uma álgebra normada, existe uma τ -vizinhança W da origem em E tal que $WW \subset U$. Ainda do fato de (E, τ) ser normada e de possuir a bola unitária η -fechada, segue do Teorema 2.6 que B é também τ -limitado. Logo para algum $\lambda \in F$, temos $B \subset \lambda W$. Escolhendo uma τ -vizinhança da origem $V = \lambda^{-1}W$, temos

$$BV \subset \lambda W \lambda^{-1}W = WW \subset U$$

e

$$VB \subset \lambda^{-1}W \lambda W = WW \subset U.$$

Logo, tomando,

$$\gamma(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (V_i \cap a_i V),$$

temos:

$$B\gamma(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (BV_i \cap a_i BV) \subset$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n (U_i \cap a_i U) = \gamma(U)$$

e, analogamente, $\gamma(V)B \subset \gamma(U)$.

Assim sendo, a multiplicação em $(E, \gamma[\eta, \tau])$ é hipocontínua.

§5 - O ESPECTRO DE $(C_b(X;E), \gamma[\kappa, \sigma])$

DEFINIÇÃO 5.1: Seja $(F, |\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado. Um espaço topológico (X, τ) é dito *F-ultra-regular* se dados um ponto x em X e um subconjunto τ -fechado M em X não contendo x , existir uma função $f \in C_b(X;F)$ tal que $f(x) = 0$ e $f(M) = \{1\}$.

PROPOSIÇÃO 5.2: Seja X um espaço topológico. São equivalentes:

- (a) X é 0-dimensional;
- (b) X é *F-ultra-regular*, qualquer que seja o anel de divisão valorizado $(F, |\cdot|)$.
- (c) X é *F-ultra-regular*, para algum anel de divisão valorizado e não-arquimédiano $(F, |\cdot|)$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) \Rightarrow (b):

Suponhamos que o espaço topológico (X, τ) seja 0-dimensional. Seja $x \in X$ e seja M um subconjunto fechado de X que não contém o ponto x . Seja M' o complementar de M . Por hipótese, existe um conjunto aberto e fechado $U \subset M'$ tal que $x \in U$. Seja $(F, |\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado e seja f a função *F*-característica do complementar U' de U . Então $f \in C_b(X;F)$ pois U' é aberto e fechado, $f(M) = \{1\}$, porque $M \subset U'$, e $f(x)=0$,

pois $x \notin U'$. Logo (X, τ) é ultra-regular.

(b) \Rightarrow (c): É óbvio

(c) \Rightarrow (a): Consideremos um ponto $x_0 \in X$ e uma τ -vizinhança aberta U de x_0 em X . Como (X, τ) é F -ultra-regular e o complementar U' de U é τ -fechado, existe uma função $f \in C_b(X; F)$ tal que $f(x_0) = 0$ e $f(U') = 1$.

Consideremos a bola unitária aberta $V = B(0, 1)$ de $(F, |\cdot|)$. Como $(F, |\cdot|)$ é não arquimediano, V é uma vizinhança aberta e fechada do zero. O conjunto $W = f^{-1}(V)$ é aberto e fechado em (X, τ) e $W \subset U$, o que prova que (X, τ) possui um sistema fundamental de vizinhanças da origem abertas e fechadas.

OBSERVAÇÃO: Em vista da Proposição 5.2, diremos que um espaço topológico é ultra-regular se ele for 0-dimensional.

PROPOSIÇÃO 5.3: Se (E, τ) é um espaço topológico ultra-regular, então τ é a topologia fraca gerada por $C_b(X; F)$, para todo anel de divisão $(F, |\cdot|)$ não trivialmente valorizado.

DEMONSTRAÇÃO: Seja η a topologia fraca sobre X gerada por $C_b(X; F)$. Pela própria definição, temos $\eta \subset \tau$.

Vamos provar agora que $\tau \subset \eta$. Para isso, consideremos um subconjunto τ -fechado M de X , $M \neq X$ e x um ponto do complementar

M' de M . Por (X, τ) ser 0-dimensional, existe uma vizinhança τ -aberta e τ -fechada U de x contida em M' . Seja f a função característica de U , que é τ -contínua e portanto η -contínua pela definição de η . Logo $U = f^{-1}(\{1\})$ é η -fechado e, sendo também U a imagem inversa do complementar do conjunto $\{0\}$, segue que U é η -aberto. Assim M' é aberto e portanto M é fechado.

De agora em diante, neste parágrafo, (X, τ) será um espaço topológico T_1 e 0-dimensional e $(E, \|\cdot\|)$ uma álgebra associativa normada não arquimediana sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$.

Observamos que do fato de (X, τ) ser T_1 e 0-dimensional segue que $C_b(X; E)$ separa pontos em X .

DEFINIÇÃO 5.4: Seja A uma álgebra sobre $(E, |\cdot|)$. Um ideal à esquerda I de A é dito *regular* se A possuir uma identidade à direita módulo I , isto é, se existir um elemento $u \in A$ tal que para qualquer $x \in A$, $xu - x \in I$.

Analogamente definimos quando um ideal à direita em A é regular.

LEMA 5.5: Todo ideal (à direita ou à esquerda) regular de $C_b(X; E)$ é um $C_b(X; F)$ -módulo.

DEMONSTRAÇÃO: É análoga à do Lema 3.1 de Prolla [17].

LEMA 5.6: Seja $W \subset C_b(X;E)$ um $C_b(X;F)$ -módulo. Então para toda função $f \in C_b(X;E)$, f pertence à $\gamma[\kappa, \sigma]$ -aderência de W se e somente se, para cada $x \in X$, $f(x)$ pertence à aderência de $W(x)$ em $(E, \|\cdot\|)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x \in X$ e $\epsilon > 0$. Se f está na $\gamma[\kappa, \sigma]$ aderência de W , segue-se que f está na κ -aderência de W , pois $\kappa \subset \gamma[\kappa, \sigma]$. Portanto, dados o compacto $K = \{x\}$ e $\epsilon > 0$, existe $g \in W$ tal que $\|g(x) - f(x)\| < \epsilon$. Assim $f(x)$ pertence à aderência de $W(x)$ em $(E, \|\cdot\|)$.

Consideremos agora uma função $f \in C_b(X;F)$ tal que para cada $x \in X$, $f(x)$ está na aderência de $W(x)$ em $(E, \|\cdot\|)$.

Consideremos também o subconjunto σ -limitado $B = B(0, 1 + \|f\|)$ de $C_b(X;E)$. É claro que $f \in B$. Sejam K um subconjunto compacto de X e $0 < \epsilon < 1$ dado. Pelo Teorema 3.5 [18], f/K está na κ -aderência de W/K . Então existe $\tilde{g} \in W$ tal que $p_K(\tilde{g} - f) < \epsilon$. Temos claramente $p_K(\tilde{g}) \leq \|f\| + \epsilon < \|f\| + 1$.

Seja

$$A = (\tilde{g} - f)^{-1}(B(0, 1))$$

que é um conjunto aberto e fechado e contém K . Tomando $g \in C_b(X;E)$ dada por $g = \chi_A \cdot \tilde{g}$, temos $g \in W$, $g(x) = \tilde{g}(x)$, se $x \in A$ e $g(x) = 0$ se $x \notin A$.

Logo $\|g\| \leq 1 + \|f\|$, ou seja, $g \in B$.

Concluimos então que $g \in W \cap B$ e $p_K(g - f) < \varepsilon$. Logo

$$f \in \overline{W \cap B}^K.$$

Como as topologias κ e $\gamma[\kappa, \sigma]$ coincidem sobre B , segue que f está na $\gamma[\kappa, \sigma]$ -aderência de $W \cap B$ e portanto está na $\gamma[\kappa, \sigma]$ -aderência de W .

DEFINIÇÃO 5.7: Seja (A, τ) uma álgebra topológica sobre um anel de divisão $(F, |\cdot|)$. O espectro de A \bar{e} , por definição, o conjunto $\Delta(A, \tau)$ de todos os homomorfismos de álgebra definidos em A e sobre F , contínuos e não nulos, equipado com a topologia $\sigma(A^*, A)$.

TEOREMA 5.8: Seja X um espaço localmente compacto e 0-dimensional. Existe um homeomorfismo entre os espaços $X \times \Delta(E, \|\cdot\|)$ e

$$\Delta(C_b(X; E), \gamma[\kappa, \sigma]).$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a aplicação

$$G : X \times \Delta(E, \|\cdot\|) \rightarrow \Delta(C_b(X; E), \gamma[\kappa, \sigma])$$

definida por $G(x, h) = h \circ \delta_x$, para cada par $(x, h) \in X \times \Delta(E)$.

(a) G é injetora.

Com efeito, consideremos os pares $(x_1, h_1) \neq (x_2, h_2)$ em $X \times \Delta(E)$.

Se $x_1 \neq x_2$, então $h_1(v) \neq h_2(v)$ para algum $v \in E$. Escolhamos $f \in C_b(X;E)$ tal que $f(x_1) = v$. Temos, então

$$(h_1 \circ \delta_{x_1})(f) = h_1(f(x_1)) = h_1(v) \neq h_2(v) = (h_2 \circ \delta_{x_2})(f).$$

Se $x_1 \neq x_2$, como X é ultra-regular, escolhamos $\varphi \in C_b(X;E)$ com $\varphi(x_1) = 0$ e $\varphi(x_2) = 1$. Seja $u \in E$ tal que $u \notin \text{Kern}(h_2)$ e seja $f \in C_b(X;E)$ tal que $f(x_2) = u$. Tomando

$$g = \varphi f \in C_b(X;E),$$

temos

$$(h_1 \circ \delta_{x_1})(g) = h_1(g(x_1)) = h_1(0) = 0$$

e,

$$(h_2 \circ \delta_{x_2})(g) = h_2(g(x_2)) = h_2(f(x_2)) = h_2(u) \neq 0.$$

Assim sendo, G é injetora.

(b) G é sobrejetora.

Seja $H \in \Delta(C_b(X;E), \gamma[\kappa, \sigma])$. Por ser $H \neq 0$ um homomorfismo contínuo, o conjunto $M = \text{Kern } H \subset C_b(X;E)$, que é um ideal maximal regular, é próprio e fechado. Pelo Lema 5.6 existe $x \in X$ tal que $\overline{M(x)} \neq E$, ou seja, $\overline{M(x)} \subset E$ é próprio.

Seja $f \in C_b(X;E)$ uma função tal que $H(f) = 1$. Então f é

uma identidade módulo M , pois, para todo $g \in C_b(X;E)$, temos

$$H(fg - g) = H(f)H(g) - H(g) = 1 \cdot H(g) - H(g) = 0$$

e portanto $fg - g \in M$.

Para cada $u \in E$, seja $u^* = uf \in C_b(X;E)$ e vamos definir uma função $h : E \rightarrow F$ como $h(u) = H(u^*)$, para todo $u \in E$.

Se u_1 e u_2 são elementos de E , temos:

$$\begin{aligned} h(u_1 u_2) &= H(u_1 u_2 f) = H(f)H(u_1 u_2 f) = \\ &= H(fu_1 u_2 f) = H(fu_1)h(u_2) = \\ &= H(fu_1 f)h(u_2) = h(u_1)h(u_2), \end{aligned}$$

o que mostra que h é multiplicativa.

Seja $I = \text{Kern } h$.

Se $u \in I$, então $H(u^*) = h(u) = 0$, o que implica que $u^* \in M$. Escolhamos $g \in C_b(X;E)$ tal que $g(x) = u$. É claro que $gf - g \in M$ e então $uf(x) - u \in M(x)$.

Agora, $(uf)(x) = u^*(x) \in M(x)$. Segue-se então que

$$u = u^*(x) - [uf(x) - u] \in M(x) \subset \overline{M(x)}.$$

Como $\overline{M(x)} \subset E$ é próprio, temos que $h \neq 0$. Disto, e do facto de $h \in E'$ ser multiplicativa, segue que $h \in \Delta(E, \|\cdot\|)$.

Consideremos agora $W = \text{kern}(h \circ \delta_x)$. Queremos mostrar que $M \subset W$. Se $g \in C_b(X;E)$ é tal que $g \notin W$, então $h(g(x)) \neq 0$, donde $g(x) \notin I$. Além disso, temos $I \subset M(x) \subset \overline{M(x)}$, $\overline{M(x)}$ é próprio e I é maximal. Decorre daí que $I = \overline{M(x)}$. Mas então $g(x) \notin \overline{M(x)}$ e pelo lema 5.6 $g \notin M$. Logo, $M \subset W$. Como M é maximal e W é um ideal próprio fechado, segue que $M = W$. Logo $H = h \circ \delta_x$, ou seja, $G(x,h) = H$.

(c) G é contínua.

Para provarmos, consideremos um par (x_0, h_0) em $X \times \Delta(E, \|\cdot\|)$. Dados $\varepsilon > 0$ e uma função $g \in C_b(X;E)$, escolhamos uma vizinhança V de h_0 em $\Delta(E, \|\cdot\|)$ tal que para qualquer $h \in V$,

$$|(h - h_0)(g(x_0))| < \varepsilon.$$

Seja W uma vizinhança de $g(x_0)$ em E tal que

$$|h(w - g(x_0))| < \varepsilon,$$

para todo $w \in W$ e $h \in V$.

Consideremos também uma vizinhança U de x_0 em X tal que $g(x) \in W$ para todo $x \in U$. Então, se $(x,h) \in U \times V$, temos que $g(x) \in W$ e $h \in V$, donde

$$|h(g(x) - g(x_0))| < \varepsilon.$$

Assim sendo, para todo par $(x, h) \in U \times V$, temos:

$$\begin{aligned} |G(x, h)(g) - G(x_0, h_0)(g)| &= |h(g(x)) - h_0(g(x_0))| \leq \\ &\leq |h(g(x) - g(x_0)) + (h - h_0)g(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

(d) G^{-1} é contínua.

Com efeito, consideremos o net $[H_\alpha]$ de funções de

$$\Delta(C_b(X; E), \gamma[\kappa, \sigma])$$

que é convergente a $H \in \Delta(C_b(X; E), \gamma[\kappa, \sigma])$.

Como G é sobrejetora, existe um net $[x_\alpha]$ em X e um net $[h_\alpha]$ em $\Delta(E)$ tais que $H_\alpha = G(x_\alpha, h_\alpha)$ e existe um par (x, h) em

$$X \times \Delta(E, \|\cdot\|)$$

tal que $H = G(x, h)$.

Seja $f \in C_b(X; E)$ tal que $H(f) = 1$ e seja $\alpha_0 \in \Lambda$ tal que, para todo $\alpha > \alpha_0$, $|H_\alpha(f)| \neq 0$.

Se φ é uma função em $C_b(X; F)$, temos

$$\varphi f \in C_b(X; E)$$

e, para todo $\alpha > \alpha_0$,

$$\begin{aligned} \varphi(x_\alpha) &= \varphi(x_\alpha)h_\alpha(f(x_\alpha))[h_\alpha(f(x_\alpha))]^{-1} = \\ &= h_\alpha(\varphi(x_\alpha)f(x_\alpha))[H_\alpha(f)]^{-1} = H_\alpha(\varphi f)[H_\alpha(f)]^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto.

$$\varphi(x_\alpha) = H_\alpha(\varphi f)[H_\alpha(f)]^{-1}$$

converge a

$$\begin{aligned} H(\varphi f)[H(f)]^{-1} &= H(\varphi f) = h(\varphi(x)f(x)) = \varphi(x)h(f(x)) = \\ &= \varphi(x)H(f) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Como X é ultra-regular e $\varphi \in C_b(X;F)$ é arbitrária, pela Proposição 5.3 segue que $x_\alpha \rightarrow x$.

Consideremos agora $u \in E$. É claro que $uf \in C_b(X;E)$, e, para todo $\alpha > \alpha_0$, temos

$$\begin{aligned} h_\alpha(u) &= h_\alpha(u)h_\alpha(f(x_\alpha))[h_\alpha(f(x_\alpha))]^{-1} = \\ &= h_\alpha(uf(x_\alpha))[H_\alpha(f)]^{-1} = H_\alpha(uf)[H_\alpha(f)]^{-1}, \end{aligned}$$

o que implica que $h_\alpha(u) \rightarrow H(uf) \cdot 1 = h(u)$.

Logo $(x_\alpha, h_\alpha) \rightarrow (x, h)$ e portanto G^{-1} é uma função contínua do espectro de $(C_b(X;E), \gamma[\kappa, \sigma])$, sobre o produto cartesiano

$X \times \Delta(E, \|\cdot\|)$.

COROLÁRIO 5.9: *Seja X um espaço localmente compacto e 0-dimensional. Existe um homeomorfismo entre X e o espaço*

$$\Delta(C_b(X;F), \gamma[\kappa, \sigma]),$$

dados pela transformação $h(x) = \delta_x$.

Aqui (X, τ) será um espaço topológico localmente compacto e 0-dimensional e $(F, |\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado não arquimediano completo.

TEOREMA 5.10: *Seja I um ideal de $C_b(X;F)$ e seja $Z(I)$ o conjunto de todos os elementos x de X para os quais $g(x) = 0$ para toda função g de I . Então uma função f de $C_b(X;F)$ está na $\gamma[\kappa, \sigma]$ -aderência de I se, e somente se, $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(I)$.*

Para uma demonstração deste teorema veremos inicialmente o seguinte lema:

LEMA 5.11: *Sejam I e $Z(I)$ como no Teorema 5.10, mas considere-mos X um espaço compacto. Se uma função $f \in C(X;F)$ é tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(I)$, então f está na aderência de I .*

DEMONSTRAÇÃO: *Seja $f \in C(X;F)$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(I)$ e seja $0 < \varepsilon < 1$. Consideremos o subconjunto compacto*

$A = \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ de X . É claro que $A \cap Z(I) = \emptyset$.

Para cada $x \in A$, escolhamos $h_x \in I$ tal que $h_x(x) = 1$. A família $\{V_x\}_{x \in X}$ formada pelos conjuntos abertos e fechados $V_x = \{x \in A : |h_x(x) - 1| < \varepsilon\}$ é uma cobertura para A . Como A é compacto, existem x_1, \dots, x_n em A tais que $A \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$, onde V_i denota o conjunto V_{x_i} , $i = 1, \dots, n$.

Consideremos a família $\{W_i, i = 1, \dots, n\}$ de conjuntos abertos e fechados dada por $W_1 = V_1$,

$$W_2 = V_2 \setminus W_1,$$

$$W_k = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^k W_{i-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

que é disjunta e ainda cobre A . Consideremos também a função $h'(x) = \chi_{W_1} h_1(x) + \dots + \chi_{W_n} h_n(x)$, para todo $x \in X$, onde por h_i estamos denotando a função h_{x_i} , $i = 1, \dots, n$.

Obtivemos assim uma função h' em I , pois para cada $i = 1, \dots, n$, $h_i \in I$ e $\chi_{W_i} \in C_b(X; F)$. Além disso, $h'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Pelo Teorema 0.15, existe $k' \in C(X, F)$, com $k'(x) = [h'(x)]^{-1}$ para todo $x \in A$ e $0 < |k'(x)| \leq |h'(x)|^{-1}$ para todo $x \in X$.

Se $h = h'k'$, temos que $h \in I$, $h(x) = 1$ para todo $x \in A$ e $\|h\| \leq 1$.

Tomando a função $g = fh$ em I , temos

$$|f(x) - g(x)| = |f(x)| \cdot |1 - h(x)| = 0,$$

se $x \in A$ e $|f(x)-g(x)| < \varepsilon.1 = \varepsilon$, se $x \notin A$, ou seja, $|f-g| < \varepsilon$, do que segue que f pertence à aderência de I .

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.10: Seja $f \in C_b(X;F)$ uma função pertencente à $\gamma[\kappa, \sigma]$ -aderência de I . Do fato de $\kappa \subset \gamma[\kappa, \sigma]$, segue que f está na κ -aderência de I . Para cada elemento a do conjunto τ -fechado

$$Z(I) = \bigcap_{g \in I} g^{-1}(0),$$

consideremos a função $\delta_a : C_b(X;F) \rightarrow F$ definida por $\delta_a(f) = f(a)$.

Seja $V_\varepsilon = \{\lambda \in F : |\lambda| < \varepsilon\}$ e consideremos uma κ -vizinhança W da origem em $C_b(X;F)$ dada por

$$W = \{f \in C_b(X;F) : P_{\{a\}}(f) = |f(a)| < \varepsilon\}.$$

Se $f \in W$, então $|\delta_a(f)| = |f(a)| < \varepsilon$, o que implica que $\delta_a(f) \in V_\varepsilon$. Isto mostra que δ_a é κ -contínua e portanto é $\gamma[\kappa, \sigma]$ -contínua. Agora, se $a \in Z(I)$, então $\delta_a(g) = 0$ para todo $g \in I$. Logo, da $\gamma[\kappa, \sigma]$ -continuidade de δ_a , temos $\delta_a(f) = 0$ para toda função f pertencente à $\gamma[\kappa, \sigma]$ -aderência de I . Assim $f(a) = 0$, para todo $a \in Z(I)$.

Suponhamos agora que $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(I)$ e vamos provar que f está na $\gamma[\kappa, \sigma]$ -aderência de I .

Seja $B = B(0, \|f\|_\infty)$ e seja κ um subconjunto compacto de X . Como I é um ideal de $C_b(X;F)$, o conjunto I/K é um ideal de

$C(K;F)$. Com efeito, sejam $f \in I/K$ e $g \in C(K,F)$. Da definição, existe $\tilde{f} \in C_b(X;F)$ tal que $\tilde{f}/K = f$ e pelo Teorema 0.15, existe uma função $\tilde{g} \in C_b(X;F)$ que é a extensão de g a X . Mas I é ideal de $C_b(X;F)$, logo $\tilde{g}\tilde{f} \in I$, do que segue que

$$gf = \tilde{g}/K \cdot \tilde{f}/K \in I/K.$$

Como $f/K = 0$ para todo $x \in Z(I/K)$, vem, pelo Lema 5.11, que f/K pertence à aderência de I/K . Então existe $\tilde{h} \in I$ tal que $p_K(\tilde{h}-f) < \varepsilon$. Além disso, temos claramente $p_K(\tilde{h}) \leq \|f\|+1$.

Seja $H = (\tilde{h}-f)^{-1}(B(0,1))$, que é um conjunto aberto e fechado e contém K . Tomando $h \in C_b(X;F)$ dada por $h = \chi_H \cdot \tilde{h}$, temos $h \in I$, $h(x) = \tilde{h}(x)$, se $x \in H$ e $h(x) = 0$ se $x \notin H$.

Logo $\|h\| \leq 1+\|f\|$ isto é, $h \in B$.

Concluimos daí que $h \in I \cap B$ e $p_K(h-f) < \varepsilon$ o que implica que f está na κ -aderência de $I \cap B$.

Como κ e $\gamma[\kappa,\sigma]$ coincidem sobre B , concluimos que f está na $\gamma[\kappa,\sigma]$ -aderência de $I \cap B$ e portanto está na $\gamma[\kappa,\sigma]$ -aderência de I .

REFERÊNCIAS

- [1] A. ALEXIEWICZ, On sequences of operations (II); *Studia Math.* 11, (1950), 200-236.
- [2] A. ALEXIEWICZ, On the two-norm convergence; *Studia Math.* 14, (1954), 49-56.
- [3] A. ALEXIEWICZ and Z. SEMADENI, A generalization of two-norm spaces; *Bull. Pol. Acad. Sci.* 6, (1958), 135-139.
- [4] M.T. BALBI, *Espaços Vetoriais Topológicos sobre Corpos não Comutativos*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1982.
- [5] N. BOURBAKI, *Élémentes de Mathématiques*, Livre V: *Espaces Vectoriels Topologiques*; Hermann, Paris, 1973.
- [6] A.K. CHILANA and S. SHARMA, The locally boundedly multiplicatively convex algebras; *Math. Nachr.* 77 (1977), 139-161.
- [7] J.B. COOPER, *Saks Spaces and Applications to Functional Analysis*; North-Holland Mathematics Studies, vol.28, Amsterdam, 1977.
- [8] G. FICHTENHOLZ, Sur les fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé; *Mat. Sbornik* 4, (1938), 193-214.
- [9] D.J.H. GARLING, A generalized form of inductive-limit topology for vector spaces; *Proc. London Math. Soc.*, 14, (1964), 1-28.
- [10] S.O. IYHAEN, On certain classes of linear topological spaces; *Proc. London Math. Soc.* 18, (1968), 285-307.
- [11] A.F. MONNA, *Analyse non-archimédienne*; *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Band 56, Springer Verlag ,

Berlin, 1970.

- [12] W. ORLICZ, Linear operations in Saks spaces (I); *Studia Math.* 11, (1950), 237-272.
- [13] W. ORLICZ, Linear operations in Saks spaces (II); *Studia Math.* 15, (1956), 1-25.
- [14] W. ORLICZ and V. PTÁK, Some remarks on Saks spaces; *Studia Math.* 16, (1957), 56-58.
- [15] A. PERSSON, A generalization of two-norm spaces; *Ark. Mat.* 5, (1963), 27-36.
- [16] J.B. PROLLA, *Topics in Functional Analysis over Valued Division Rings*; North-Holland Mathematics Studies vol.77, Amsterdam (1982).
- [17] J.B. PROLLA, Topological algebras of vector-valued continuous functions, *Advances in Math. Suppl. Studies* 7, Academic Press, N.Y., 1981.
- [18] M.Z.M.C. SOARES, *Tópicos em Teoria da Aproximação sobre Anéis Valorizados*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1982.
- [19] J. VAN TIEL, Espaces localement K-convexes; *Indagationes Mathematicae*, vol. XXVII, (1965), 250-289.
- [20] A. WIWEGER, A topologization of Saks spaces; *Bull. Pol. Acad. Sci.* 5 (1957), 773-777.
- [21] A. WIWEGER, Linear spaces with mixed topology, *Studia Math.* 20 (1961), 47-68.