UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemáticas Estatística e Computação Científica

Funções Inteiras em Espaços de Banach com Dual Separável

Humberto Daniel Carrión Villarroel

Orientador Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui

Fevereiro- 2002

Funções Inteiras em Espaços de Banach com Dual Separável

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corregida e defendida por Humberto D. Carrión V. e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas 07 de Março do 2002.

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.
Orientador

Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui.

Prof. Dr. Mário Carvalho de Matos

Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar

Prof. Dra. Luiza Amália de Moraes

Prof. Dra. Mary Lilian Lourenço

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Carrión Villarroel, Humberto Daniel
C235f Funções Inteiras em Espaços de Banach com dual Separavel /
Humberto Daniel Carrión Villarroel– Campinas, [S.P.: s.n.], 2002.

Orientador: Jorge Tulio Mujica Ascui
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Banach, Espaços de. 2. Funções Inteiras. 3. Funções Analíticas. I. Mujica Ascui, Jorge Tulio. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 19 de fevereiro de 2002 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JORGE TÚLIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). RAYMUNDO LUIZ DE ALENCAR

Prof (a). Dr (a). LUIZA AMÁLIA DE MORAES

Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

Dedicatória

A minha familia

Ao povo peruano
Ao povo brasileiro

Ao Prof. Walter T. M.
A uma grande colega: Olga

Agradecimentos

A meu orientador pela sua paciência exemplar e denodo na correção deste manuscrito. Também a meu orientador e ao profesor M. Matos pelas sugestões. Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Sejam E e F espaços de Banach complexos. Denotamos por $H(E;F)$ o espaço das funções holomorfas de E em F.
Denotamos também por $H_w(E;F)$ (resp. $H_{wu}(E;F)$ o subespaço de $H(E;F)$ constituído pelas funções holomorfas que são fracamente contínuas (resp. fracamente uniformemente contínuas) nos limitados de E.
Em 1983 Aron, Hervés e Valdivia levantam a seguinte questão:

$$H_w(E;F) = H_{wu}(E;F), \text{ para quaisquer espaços de Banach } E \text{ e } F \text{ ?}$$

Seja $H_{wsc}(E;F)$ o espaço das funções inteiras que levam seqüências fracamente convergentes em seqüências convergentes em norma. Relacionado ao problema anterior Aron, Hervés e Valdivia propuseram também:

$$H_{wsc}(E;F) = H_{wu}(E;F), \text{ se } E \text{ tem dual separável é } F \text{ é arbitrário ?}$$

Denotando por $H_{bk}(E;F)$ o espaço das funções holomorfas limitadas nos subconjuntos fracamente compactos, e modificando as técnicas de Dineen [4] mostramos que se E tem dual separável então a relação

$$H_b(E;F) = H_{bk}(E;F)$$

é satisfeita. Isto responde parcialmente em forma afirmativa à primeira questão e completamente à segunda.

Abstract

Let E and F be complex Banach spaces, and let $H(E;F)$ be the space of all holomorphic functions from E into F.
We also denote by $H_w(E;F)$ (resp. $H_{wu}(E;F)$) the subspace of all $f \in H(E;F)$ which are weakly continuous on bounded sets (resp. weakly uniformly continuous on bounded sets)
In 1983 Aron, Herves and Valdivia raised the following question:

Does $H_w(E;F) = H_{wu}(E;F)$ for arbitrary E and F ?

Let $H_{wsc}(E;F)$ be the subspace of all $f \in H(E;F)$ which map weakly convergent sequences onto norm convergent sequences. Related to the preceding problems Aron, Herves and Valdivia raised also

Does $H_{wsc}(E;F) = H_{wu}(E;F)$ when E has separable dual and F is arbitrary ?

Denoting by $H_{bk}(E;F)$ (resp. $H_b(E;F)$) the subspace of all $f \in H(E;F)$ which are bounded on weakly compact sets (resp. bounded on bounded set) and modifying the techniques of Dineen [4] we show that if E has a separable dual then the relation

$$H_{bk}(E;F) = H_b(E;F)$$

is satisfied. This answers partially the first question and completely the second question.

Conteúdo

Lista de símbolos

- $\mathbb{N}$ — $\{1,2,....\}$.
- $\mathbb{N}_0$ — $\mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\mathbb{R}$ — Corpo dos números Reais.
- $\mathbb{C}$ — Corpo dos números complexos.
- E,F,G — Espaços de Banach complexos.
- E' — Dual topológico de E.
- $\sigma(E, E')$ — Topologia fraca de E.
- $B_r(E)$,$B_r(a)$ — Bolas fechadas de raio r e com centro na origem e a respectivamente.
- $S_r(E)$,$S_r(a)$ — Esferas de raio r e com centro na origem e a respectivamente.
- l_1 — Espaço das seqüências somáveis.
- c_0 — Espaço das seqüências que tendem a zero.
- q^n, q_n — Projeções canônicas.
- $A(^mE, F)$ — Espaço dos operadores m- lineares contínuos de E^m em F.
- $P(^mE, F)$ — Espaço dos polinômios m homogêneos contínuos de E em F.
- $H(E, F)$ — Espaço das funções inteiras de E em F.
- $H_b(E, F)$ — Espaço das funções inteiras de tipo limitado.
- $H_{bk}(E, F)$ — Espaço das funções inteiras limitadas nos fracamente compactos de E.
- $H_w(E, F)$ — Espaço das funções inteiras fracamente contínuas nos limitados de E.
- $H_{wu}(E, F)$ — Espaço das funções inteiras fracamente uniformemente contínuas nos limitados de E.
- $H_{wsc}(E, F)$ — Espaço das funções inteiras fracamente sequêncialmente contínuas.

Introdução

Sejam E e F espaços de Banach complexos. Denotamos por $H(E;F)$ o espaço das funções holomorfas de E em F.
Denotamos também por $H_w(E;F)$ (resp. $H_{wu}(E;F)$ o subespaço de $H(E;F)$ constituído pelas funções holomorfas que são fracamente contínuas (resp. fracamente uniformemente contínuas) nos limitados de E.
A maior parte de nosso trabalho foi motivado pelo estudo dos espaços acima mencionados, em particular pela seguinte questão proposta por Aron, Hervés e Valdivia, [1] em 1983

Problema 1. $H_w(E;F) = H_{wu}(E;F)$, para quaisquer espaços de Banach E e F ?

É conhecido que uma resposta afirmativa para $E = l_1$ resolve por completo o problema [1], razão pela qual hoje este é conhecido como **problema** l_1 e continua aberto [5].
No estudo dos espaços acima mencionados é introduzido o espaço $H_{wsc}(E;F)$ constituído pelas funções inteiras fracamente sequêncialmente contínuas. Aron, Hervés e Valdivia mostram que se E é separável e não possui copia de l_1 então $H_{wsc}(E;F) = H_w(E;F)$ e levantam a seguinte questão:

Problema 2. $H_{wsc}(E;F) = H_{wu}(E;F)$, se E tem dual separável e F é arbitrário ?

Se denotamos por $H_b(E;F)$ o espaço de funções holomorfas que são limitadas nos limitados de E, não é difícil mostrar que $H_{wu}(E;F) = H_w(E;F) \cap H_b(E;F)$. Assim o problema 1 e equivalente a mostrar a relação

$$H_w(E;F) \subset H_b(E;F).$$

É fácil ver que se E é reflexivo as igualdades nos problemas 1 e 2 são verdadeiras. No entanto Dineen [4], mostra que esta não é uma condição necessária em geral. De fato, denotando por $H_{bk}(E;F)$ o espaço das funções holomorfas limitadas nos fracamente compactos e $E = c_0$, o espaço das seqüências que tendem a zero, Dineen prova que

$$H_{bk}(E;F) = H_b(E;F). \tag{1}$$

Em [7] é mostrado que se a relacão (1) é verdadeira então E não possui copia de l_1. Não é conhecida se a recíproca é verdadeira.

Problema 3. $H_{bk}(E;F) = H_b(E;F)$, se E não tem copia de l_1 e F é arbitrario ?

Usando as técnicas de Dineen [4] mostramos no Capítulo 2 que se E tem uma base de Schauder contrátil e incondicional, então a relação (1) é satisfeita. Estendemos assim, o resultado obtido por Dineen.

No Capítulo 3, generalizamos este resultado mostrando que se E tem dual separável então a relação (1) é satisfeita. Grande parte deste capítulo é desenvolvido para mostrar a relação (1) para espaços de Banach com base contrátil. Nossa afirmação segue de um resultado de Davis, Fiegel,Johnson e Pelczynski [2], estabelecendo que todo espaço de Banach com dual separável é o quociente de um espaço de Banach com base contrátil. Os espaços de Asplund são espaços de Banach nos quais todo subespaço separável tem dual separável. Assim a relação anterior (1) se verifica também para estes espaços. O resultado principal deste capítulo da uma resposta parcial aos problemas 1 e 3 e responde completamente o problema 2.

Capítulo 1

Preliminares

Prov 1.3 e 1.4

1.1 Bases contráteis e incondicionais

Iniciamos a presente tese introduzindo algumas definições e mostrando alguns lemas preliminares.
Denotaremos por E, F espaços de Banach complexos, E' o dual topológico de E. Se $r > 0$ $B_r(E)$ e $S_r(E)$ denotarão a bola fechada e a esfera de raio $r > 0$ e centro 0 de E respectivamente. Se $r = 1$ dispensamos o símbolo r.
Para $\Omega \subset E$ e uma aplicação $f : E \to F$ denotamos $\|f\|_\Omega := \sup_{x\in\Omega} \|f(x)\|$.
Em particular se $\rho \in E'$ então temos que

$$\sup_{B_r(E)} |\rho(x)| = r\|\rho\|_{B(E)}$$

A topologia fraca de E será denotada por $\sigma(E, E')$. Se $(x_n) \subset E$ é fracamente convergente a $x \in E$ escreveremos $w \lim_n x_n = x$.

Definição 1.1. *Uma série convergente $\sum_{n\geq 1} x_n = x$ em um espaço de Banach E, é dita incondicionalmente convergente, se para toda permutação π de $\mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 1} x_{\pi(n)}$ converge a x.*

Proposição 1.2. *Seja (x_n) uma seqüência de vetores em um espaço de Banach E. Então as condições seguintes são equivalentes.*
(i) A serie $\sum_{n\geq 1} x_n$ é incondicionalmente convergente.
(ii) A série $\sum_{i\geq 1} x_{n_i}$ converge para toda escolha $n_1 < n_2 < \ldots$
(iii) A série $\sum_{n\geq 1} \theta_n x_n$ converge para toda escolha de sinais θ (i.e. $\theta = \pm 1$).
(iv) Para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro n tal que $\|\sum_{i\in\sigma} x_i\| < \epsilon$ para todo conjunto finito σ de inteiros que satisfazem $\min\{i \in \sigma\} > n$. (Veja[6,p.15]).

Seja E um espaço de Banach. Lembremos que uma seqüência (e_n) de E é dita *base de Schauder* de E se cada elemento $x \in E$ pode ser representado de maneira única na forma

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i.$$

Toda base de Schauder (e_n) do espaço de Banach E determina uma seqüência de projeções (q^n) em E, onde $q^n(\sum_{i\geq 1} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Estas projeções (que chamaremos canônicas) são operadores lineares limitados e $\sup_n \|q^n\| < \infty$. O número $sup_n \|q^n\|$ é chamado *constante básica* e denotaremos esta por Λ.

Sejam I a aplicação identidade de E e 0 a aplicação nula. Para $m < n$ em $\mathbb{N}$ definimos $q_n = I - q^n$, $q_m^n = q^n - q^m = q_m - q_n$. Observemos que para cada $x \in E$ $\lim_n q_m^n = q_m(x)$ e $\lim_{m,n\to\infty} q_m^n(x) = 0$. Também $\|q_m^n\| \leq 2\Lambda$

A base (e_n) é dita *incondicional* se para todo $x \in E$, a série $\sum \alpha_i e_i$, que representa x, converge incondicionalmente. Neste caso, para toda seqüência $\theta = (\theta_n)$ de sinais, o operador M_θ definido por $M_\theta(\sum_{n\geq 1} \alpha_n e_n) = \sum_{n\geq 1} \theta_n \alpha_n e_n$ é um operador linear limitado. A constante $\sup_\theta \|M_\theta\|$ é chamada *constante incondicional* e será denotada por Γ. (Veja [6]).

Lema 1.3 *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder incondicional (e_n). Se $x = \sum_{n\geq 1} \alpha_n e_n \in E$, então para todo (a_i) de l_∞ a série $\sum_{n\geq 1} a_n \alpha_n e_n$ converge.*

Prova.- De fato, definimos $y^m = \sum_{n=1}^{m} a_n \alpha_n e_n$. Então (y^m) é de Cauchy. Para ver isto, sejam $p \in \mathbb{N}$ fixo e $\rho_m \in B(E')$ tais que

$$\rho_m\left(\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \alpha_n e_n\right) = \left\|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \alpha_n e_n\right\|$$

Quando os escalares são reais, seja (θ_n) a seqüência de sinais definida por

$$\theta_n = \begin{cases} 1 & se \quad \rho_m(\alpha_n e_n) \geq 0 \\ -1 & se \quad \rho_m(\alpha_n e_n) < 0 \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
\|\sum_{m+1}^{m+p} a_n\alpha_n e_n\| &= \sum_{m+1}^{m+p} a_n\rho_m(\alpha_n e_n)\\
&\le \sum_{m+1}^{m+p} |a_n||\rho_m(\alpha_n e_n)|\\
&= \sum_{m+1}^{m+p} |a_n|\theta_n\rho_m(\alpha_n e_n)\\
&\le \sup_{m+1\le n\le m+p} |a_n| \sum_{m+1}^{m+p} \theta_n\rho_m(\alpha_n e_n)\\
&= \|a\|_{l_\infty}\rho_m(\sum_{m+1}^{m+p} \theta_n\alpha_n e_n)\\
&\le \|a\|_{l_\infty}\|\sum_{m+1}^{m+p} \theta_n\alpha_n e_n\|\\
&\le \Gamma\|a\|_{l_\infty}\|\sum_{m+1}^{m+p} \alpha_n e_n\|.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{n\ge1}\alpha_n e_n$ converge, fazendo $m\to\infty$ obtemos $\|y^{m+p}-y^m\| = \|\sum_{m+1}^{m+p} a_n\alpha_n e_n\| \to 0$ quando $m\to\infty$. Sendo $p\in\mathbb{N}$ arbitrário à afirmação esta mostrada. Quando os escalares são complexos, o resultado ainda é valido considerando separadamente as partes reais e imaginárias de $\rho_m(\alpha_n e_n)$. ■

Lema 1.4. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder incondicional (e_n) e $x=\sum\alpha_n e_n\in E$. Seja $T: l_\infty\to E$ definida por $T(a_n)=\sum a_n\alpha_n e_n$. Então T é um operador linear contínuo.*

Prova.- É óbvio do comentário anterior que T está bem definida e é linear. Para mostrar que é contínua sejam $a=(a_n)\in B(l_\infty)$ e $\rho_a\in E'$ dada por

$$\rho_a(\sum_{n\ge1} a_n\alpha_n e_n) = \|\sum_{n\ge1} a_n\alpha_n e_n\|.$$

Quando os escalares são reais escolhemos $\theta_n = sinal(\rho_a(\alpha_n e_n))$. Então

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n\geq 1} a_n\alpha_n e_n\| &= \sum_{n\geq 1} a_n\rho_a(\alpha_n e_n) \\
&\leq \sum_{n\geq 1} |a_n||\rho_a(\alpha_n e_n)| \\
&\leq \|a\|_{l_\infty}(\sum_{n\geq 1}\theta_n\rho_a(\alpha_n e_n)) \\
&= \|a\|_{l_\infty}\rho_a(\sum_{n\geq 1}\theta_n\alpha_n e_n) \\
&\leq \|a\|_{l_\infty}\|\sum_{n\geq 1}\theta_n\alpha_n e_n\| \\
&\leq \Gamma\|a\|_{l_\infty}\|\sum_{n\geq 1}\alpha_n e_n\|
\end{aligned}$$

Assim $\|T(a)\| \leq \Gamma\|a\|_{l_\infty}\|\sum_n \alpha_n e_n\|$ para todo $a \in l_\infty$ e logo T é contínuo. Quando os escalares são complexos, o resultado ainda é valido considerando separadamente as partes reais e imaginárias de $\rho_a(\alpha_n e_n)$. ■

Lembremos que um subconjunto $W \subset E$ é relativamente compacto ou precompacto se dado $\epsilon > 0$ existe um conjunto $K_\epsilon \subset E$ relativamente compacto, tal que $W \subset K_\epsilon + \epsilon B(E)$.

Corolário 1.5. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder incondicional, $\Omega \subset E$ limitado e $(\lambda_n) \in c_0$. Então o conjunto*

$$(\lambda_n)\bigotimes\Omega = \{\sum_{n\geq 1}\lambda_n\alpha_n e_n : x = \sum_{n\geq 1}\alpha_n e_n \in \Omega\}$$

é relativamente compacto.

Prova.- Sem perda de generalidade podemos supor que $\Omega = B_r(E)$. Consideremos a cauda $(\lambda_n)_{n\geq m}$ de $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. Temos pelo Lema anterior anterior $\|T(\lambda_n)_{n\geq m}\| \leq \Gamma r \sup_{n\geq m}|\lambda_n|$. Assim

$$T(\lambda_n)_{n\geq m} = \sum_{n\geq m}\lambda_n\alpha_n e_n \in \Gamma r \sup_{n\geq m}|\lambda_n| B(E).$$

Logo dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{n\geq m}|\lambda_n| < \epsilon/r\Gamma$ para todo $m \geq n_0$ e portanto $\sum_{n\geq m}\lambda_n\alpha_n e_n \in \epsilon B(E)$ para todo $m \geq n_0$. Por um comentário anterior

$$\sum_{n\geq 1}\lambda_n\alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{n_0-1}\lambda_n\alpha_n e_n + \sum_{n\geq n_0}\lambda_n\alpha_n e_n \in q^{n_0-1}(\Gamma\|\lambda\|_\infty\Omega) + \epsilon B(E)$$

e o Corolário segue. ■

Observação. É imediato da prova do Corolário anterior que $(\sum_{n\geq l}^{\infty} \lambda_n \alpha_n e_n)_{l\geq 1}$ converge a zero quando $l \to \infty$.

Seja (e_n) uma base de Schauder do espaço de Banach E. Para $m < n$ denotamos

$$\begin{aligned} E_n &= \overline{span\{e_i, i \geq n+1\}} = q_n(E) \\ E_m^n &= \overline{span\{e_i, m+1 \leq i \leq n\}} = q_m^n(E). \end{aligned}$$

Se $\rho \in E'$, $\|\rho\|_n$ será a norma do funcional ρ restrito ao subespaço E_n de E.
Uma base de Schauder (e_n) de E é dita *contrátil* se, para todo $\rho \in E'$ temos $\|\widetilde{q}^n\rho - \rho\| \to 0$, onde $\widetilde{q}^n\rho = \rho \circ q^n$.

Lema 1.6. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil. Então para todo $\rho \in E'$, $\|\rho\|_n$ converge a zero quando $n \to \infty$.*

Prova.- É suficiente observar que se $\rho \in E'$ entáo $\rho - \widetilde{q}^n\rho = \rho - \rho q^n = \rho_{/E_n}$. Assim

$$\|\rho\|_n = \|\rho_{/E_n}\| = \|\widetilde{q}^n\rho - \rho\| \to 0$$

quando $n \to \infty$ ■

Corolário 1.7. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil. Então*
(a) Para cada $\Omega \subset E$ limitado

$$\lim_n \|\rho\|_{q_n(\Omega)} = 0.$$

(b) $\lim_{m,n\to\infty} \|\rho\|_{B(E_m^n)} = 0$.
(c) Sejam $(x_n) \subset E$, $x \in E$ tais que $w\lim x_n = x$. Então para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo $w\lim q_m^n(x_n) = q_m(x)$.

Prova.- (a) Se $\Omega \subset E$ é limitado então existe uma bola $B_r(E)$ tal que $\Omega \subset B_r(E)$ e portanto $\|q_n(x)\| \leq 2\Lambda r$ para todo $x \in \Omega$ isto é $q_n(\Omega) \subset 2\Lambda r B(E_n)$ e logo para cada $\rho \in E'$, $\|\rho\|_{q_n(\Omega)} \leq 2\Lambda r \|\rho\|_{B(E_n)}$ e

$$\begin{aligned} \lim_n \|\rho\|_{q_n(\Omega)} &\leq 2\Lambda r \lim_n \|\rho\|_{B(E_n)} \\ &= 2\Lambda r \lim_n \|\rho\|_n = 0 \end{aligned}$$

(b) Também $B(E_m^n) \subset B(E_m)$ pois $E_m^n \subset E_m$. Assim se $\rho \in E'$ então

$$\lim_{m,n\to\infty} \|\rho\|_{B(E_m^n)} = 0$$

(c) De fato seja $\rho \in E'$. Temos $q_m^n(x_n - x) = q_m(x_n - x) - q_n(x_n - x)$. O conjunto $\Omega = \{x_n - x\}$ é limitado e segue de (a) $\lim_n |\rho(q_n(x_n - x))| \leq \lim_n \|\rho\|_{q_n(\Omega)} = 0$. Sendo m fixo $\lim_n \rho(q_m(x_n - x)) = 0$. Isto é $\lim_n \rho(q_m(x_n)) = \rho(q_m(x))$. Sendo $\rho \in E'$ arbitrário o Corolário segue. ■

1.2 Funções holomorfas

Nesta seção introduzimos algumas definições e fatos básicos conhecidos de holomorfia em dimensão infinita. Para as provas das afirmações ver [8].
Seja $B_r(a)$ a bola fechada do espaço de Banach E com centro em $a \in E$ e raio r.
Para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos por $L(^mE;F)$ o espaço das aplicações m-lineares contínuas $A : E^m \to F$. Se $F = \mathbb{C}$ escrevemos $L(^mE) = L(^mE;\mathbb{C})$. A forma m-linear A é dita simétrica se $A(x_1, x_2, ..., x_m) = A(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(m)})$ para toda permutação σ de $\{1, 2, ..., m\}$. $L^s(^mE;F)$ denotará o espaço constituído por estas aplicações.
Para cada multi-índice $k = (k_1, k_2, ..., k_j) \in \mathbb{N}_0^j$ denotamos $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_j$ e $k! = k_1!.k_2!...k_j!$. Assim definidas, dada $A \in L(^mE;F)$ com $|k| = m$, denotamos

$$A(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, ..., x_j^{k_j}) = A(\underbrace{x_1, ...x_1}_{k_1}, ..., \underbrace{x_j, ..., x_j}_{k_j}).$$

É conhecida a seguinte relação de *Leibniz* para $A \in L^s(^mE;F)$

$$A(x_1 + x_2 + ... + x_j)^m = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} A(x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, ..., x_j^{k_j})$$

Uma aplicação $P : E \to F$ é dita *polinômio m- homogêneo contínuo* se existir $A \in L^s(^mE;F)$ tal que $P(x) = Ax^m$. A forma m -linear A é dita *associada* a P. O espaço dos polinômios m- homogêneos contínuos é denotado por $P(^mE;F)$.
Os espaços $L(^mE;F)$ e $P(^mE;F)$ são espaços de Banach com as normas

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x)\| \\ \|A\| &= \sup\{\|A(x_1, x_2, ..., x_m)\| : x_j \in E, \max_j \|x_j\| \leq 1\} \end{aligned}$$

A desigualdade de Polarização estabelece uma relação entre as normas de $P \in P(^mE;F)$ e sua forma m-linear simétrica associada A:

$$\|P\| \leq \|A\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P\| \leq e^m \|P\|$$

Seja $U \subset E$ aberto. Uma aplicação $f : U \to F$ é dita *holomorfa* se para cada $a \in U$ existem uma bola $B_r(a) \subset U$ e uma seqüência de polinômios $P_m \in P(^mE;F)$ tais que

$$f(x) = \sum_{m\geq 0} P_m(x - a)$$

uniformemente em $B_r(a)$. O espaço das funções holomorfas em U é denotado por $H(U;F)$. Se $F = \mathbb{C}$ escrevemos $H(U) = H(U, \mathbb{C})$. A série anterior é dita *desenvolvimento de Taylor*

de f em a.
O *raio de convergência* $r_c f(a)$, ou raio de convergência uniforme da série $\sum_{m\geq 0} P_m(x-a)$ é o supremo de todos os $r \geq 0$ tais que a série converge uniformemente em $\overline{B_r}(a)$.
O raio de limitação $r_b f(a)$ de f em a é o supremo de todos os $r \geq 0$ tais que $B_r(a) \subset U$ e f é limitada em $B_r(a)$.
A fórmula de Cauchy Hadamard estabelece que o raio de convergência $r_c f(a)$, vem dado pela formula

$$\frac{1}{r_c f(a)} = \limsup_{m\to\infty} \|P_m\|^{1/m}.$$

Estamos interessados no caso em que $U = E$. Neste caso f é dita *inteira*. Toda função inteira é contínua. Todo polinômio m-homogêneo contínuo é uma função inteira. Para toda função inteira $f \in H(E;F)$ e $a \in E$ temos a seguinte relação

$$r_b f(a) = r_c f(a).$$

Na definição de função holomorfa os polinômios P_m dependem do ponto $a \in E$ e de f. Assim é útil escrever $P^m f(a)$ para denotar esta dependência.
Dados $r = (r_1, r_2, ..., r_j) \in \mathbb{R}^j$ com $r_i > 0$ $i = 1, 2, ..., j$ e $a = (a_1, ..., a_j) \in \mathbb{C}^j$, denotamos por $\overline{\Delta^j}(a, r)$ o multidisco fechado $\{z_i \in \mathbb{C} : |z_i - a_i| \leq r_i \ i = 1, 2, ..., j\}$ e por $\partial_0 \Delta^j(a, r)$ a sua fronteira distinguida, isto é $\partial_0 \Delta^j(a, r) = \{z_i \in \mathbb{C} : |z_i - a_i| = r_i \ i = 1, 2, ..., j\}$.
As Fórmulas de Cauchy para funcões holomorfas generalizam as já conhecidas para $H(\mathbb{C})$. Seja $f \in H(E;F)$ com desenvolvimento de Taylor $f = \sum_{m\geq 0} P^m f(a)(x-a)$ em torno de $a \in E$, então

$$\frac{m!}{k!} P^m f(a) x_1^{k_1}, ..., x_j^{k_j} = \frac{1}{(2\pi i)^j} \int_{\partial_0 \Delta^j(0,1)} \frac{f(a + \epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_j x_j)}{\epsilon_1^{k_1+1} ... \epsilon_j^{k_j+1}} d\epsilon_1 ... d\epsilon_j$$

Em particular da formula de Leibniz obtemos

$$\frac{m!}{k!} A x_1^{k_1}, ..., x_j^{k_j} = \frac{1}{(2\pi i)^j} \int_{\partial_0 \Delta^j(0,1)} \frac{P(a + \epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_j x_j)}{\epsilon_1^{k_1+1} ... \epsilon_j^{k_j+1}} d\epsilon_1 ... d\epsilon_j \tag{1.1}$$

Uma função inteira f é dita de *tipo limitado* se leva conjuntos limitados de E em conjuntos limitados de F. O espaço constituído por estas funções será denotado por $H_b(E;F)$. Assim $f \in H_b(E;F)$ se $\sup_{x\in\Omega} \|f(x)\| < \infty$ para todo limitado Ω de E.
Definimos também o espaço $H_{bk}(E;F)$ constituído por todas as funções inteiras limitadas nos conjuntos fracamente compactos $\Omega \subset E$. Isto é $f \in H_{bk}(E;F)$ se $\sup_{x\in\Omega} \|f(x)\| < \infty$ para todo $\Omega \subset E$ fracamente compacto. Observemos que sempre é verdadeira a seguinte relação

$$H_b(E;F) \subset H_{bk}(E;F)$$

para quaisquer espaços de Banach E e F.
O resultado seguinte aparece em [4, p. 206].

Teorema 1.8. *Seja $P_n \in P(^{\gamma_n}E;F)$ para todo n com (γ_n) estritamente crescente. Então:*
(a) $f = \sum P_n \in H(E;F)$ se e só se $\lim \|P_n\|_K^{1/\gamma_n} = 0$ para todo conjunto compacto $K \subset E$.
(b)$f = \sum P_n \in H_{bk}(E;F)$ se e só se $\lim \|P_n\|_W^{1/\gamma_n} = 0$ para todo conjunto $\sigma(E,E')$ - compacto $W \subset E$.
(c)$f = \sum P_n \in H_b(E;F)$ se e só se $\lim \|P_n\|^{1/\gamma_n} = 0$

1.3 Modificações de polinômios

Nesta seção introduzimos o conceito de modificação de um polinômio $P_n \in P(^{\gamma_n}E;F)$, $\gamma_n = deg(P_n)$. As modificações são fortemente usadas na demostração do Teorema principal deste capítulo. Mostramos com algum detalhe algumas propriedades das modificações. No que resta deste capítulo, E possui uma base de Schauder. q^n e q_n denotam as projeções canônicas definidas na secão 1.1.
Sejam $P_n \in P(^{\gamma_n}E;F)$ um polinômio γ_n- homogêneo, $A_n \in L(^{\gamma_n}E;F)$ sua forma γ_n linear simétrica associada e (m_i) uma seqüência estritamente crescente de inteiros positivos. Para cada multi-índice $k = (k_1, k_2, ..., k_{j+1})$ com $|k| := \sum_{i=1}^{j+1} k_i = \gamma_n$ e $k! = k_1!k_2!...k_{j+1}!$ definimos a aplicação $(P_n)_{k_1,k_2...k_{j+1}}^{m_1,m_2...m_j} : E \to F$ por

$$(P_n)_{k_1...k_{j+1}}^{m_1...m_j}(x) = \frac{\gamma_n!}{k!} A_n(q^{m_1}(x)^{k_1} ... q_{m_{j-1}}^{m_j}(x)^{k_j} q_{m_j}(x)^{k_{j+1}})$$

Então $(P_n)_{k_1...k_{j+1}}^{m_1...m_j}$ é dita modificação de P_n e pertence à $P(^{\gamma_n}E;F)$.
Da relação 1.1 obtemos imediatamente

Lema 1.9. (Estimativa E1) *Seja E um espaço de Banach com base Schauder. Sejam $(m_i) \subset \mathbb{N}$ estritamente crescente e $P_n \in P(^nE;F)$, então*

$$\|(P_n)_{k_1,k_2...k_{j+1}}^{m_1,...,m_j}(x)\| \leq \sup_{\partial_0 \Delta^{j+1}(0,1)} \|P_n(\sum_{i=1}^{j} \theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x) + \theta_{j+1} q_{m_j}(x))\|$$

para todo $j = 1, 2, ..$

Usaremos ás vezes as notações $\prod_{i=1}^{j+1} k_i = k_1!k_2!...k_{j+1}!$ e $A_n(x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_{j+1}^{k_{j+1}}) = A_n(\prod_{i=1}^{j+1} x_i^{k_i})$.
Sejam $m_0 = 0 < m_1 < m_2 < ... < m_j < ...$ inteiros positivos, $(\epsilon_i) \in c_0$ e $\Omega \subset E$. Para $l \in \mathbb{N}$ com $m_j < l$, definimos os conjuntos

$$\begin{aligned} \Omega((m_i)_{i=0}^{j}) &= \{\sum_{i=1}^{j} \theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x) + \theta_{j+1} q_{m_j}(x) : x \in \Omega; |\theta_i| = 1\} \\ \Omega((m_i)_{i=0}^{j}, l) &= \{\sum_{i=1}^{j} \theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x) + \theta_{j+1} q_{m_j}^{l}(x) + \theta_{j+2} q_l(x) : x \in \Omega; |\theta_i| = 1\} \end{aligned}$$

Se (x_n) é uma seqüência em E definimos para cada j

$$(\epsilon_i)\bigotimes((x_n),((m_i)_{i=0}^{j}))=\{\sum_{i=1}^{j}\epsilon_i\theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_j)+\theta_{j+1}q_{m_j}(x_j):|\theta_i|=1\}$$

Observemos que este ultimo conjunto é relativamente compacto.
Lembremos que o Teorema de Eberlein-Smulian afirma que um conjunto $M\subset E$ é relativamente $\sigma(E,E')$- compacto se e so se é relativamente $\sigma(E,E')$-seqüêncialmente compacto.

Lema 1.10. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder, $\Omega\subset E$ compacto. Então para cada j fixo, $\Omega((m_i)_{i=0}^{j})$ é relativamente compacto.*

Prova.- O conjunto $\Omega((m_i)_{i=0}^{j})$ é a imagem do conjunto $\partial_0\Delta^{j+1}(0,1)\times\Omega$ pela aplicação bilinear contínua $B:\mathbb{C}^{j+1}\times E\to E$ dada por $B((\theta_i)_{i=1}^{j+1},x)=\sum_{i=1}^{j}\theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x)+\theta_{j+1}q_{m_j}(x)$. Sendo $\partial_0\Delta^{j}(0,1)\times\Omega$ compacto na topologia produto o lema segue. ■

Lema 1.11. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil; $\Omega\subset E$ $\sigma(E,E')$ compacto. Então para cada j fixo,*

$$\cup_{l\geq m_j}\Omega((m_i)_{i=0}^{j},l)$$

é relativamente $\sigma(E,E')$- compacto.

Prova.- Seja $(a_n)\subset\cup_{l\geq 1}\Omega((m_i)_{i=0}^{j},l)$. Passando a subseqüênciaspodemos distinguir dois casos

Caso 1.- Existe l tal que

$$a_n\in\Omega((m_i)_{i=0}^{j},l)$$

para todo n. Sejam $m_{j+1}=l$ e

$$a_n=\sum_{i=0}^{j+1}\theta_i^n q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_n)+\theta_{j+2}^n q_{m_{j+1}}(x_n).$$

Neste caso, tomando subseqüênciasse for necessário, pela $\sigma(E,E')$- compacidade de Ω podemos supor que existe $x=w\lim x_n$. Também pela compacidade do circulo unitário do plano complexo e tomando novamente subseqüências, se for necessário, podemos supor que existem $\lim_n\theta_i^n=\theta_i$, $i=1,2,...,j+2$.. Usando a $\sigma(E,E')$- continuidade das projeções q_{m_i} $i=1,2,..,j+1$ temos que existe

$$w\lim_n a_n=\sum_{i=1}^{j+1}\theta_i q_{m_{i-1}}^{m_i}(x)+\theta_{j+2}q_{m_{j+1}}(x)$$

Caso 2.- Existem $l_1<l_2<...$ tal que

$$a_n\in\Omega((m_i)_{i=0}^{j},l_n)$$

$a_n \xrightarrow{w} y = ?$ $\subset \Omega((m_i)$

compacto U-limitado

para cada n. Seja

$$a_n = \sum_{i=0}^{j} \theta_i^n q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_n) + \theta_{j+1}^n q_{m_j}^{l_n}(x_n) + \theta_{j+2}^n q_{l_n}(x_n).$$

Como no caso anterior, pela compacidade fraca de Ω podemos supor sem perda de generalidade que existe $x = w \lim x_n$. Tomando subseqüências, se for necessário, podemos supor que existem $\theta_i = \lim_n \theta_i^n$, $i = 1, 2, ..., j+2$. Pela continuidade fraca de q_{m_j} e o Corolário 1.7 existe $w \lim \theta_{j+1}^n q_{m_j}^{l_n}(x_n) = \theta_{j+1} q_{m_j}(x)$ e também $w \lim_n \theta_{j+2}^n q_{l_n}(x_n) = 0$. Dos casos 1 e 2 segue que existe $w \lim_n a_n$. Portanto $\Omega((m_i)_{i=0}^j, l_n)$ é relativamente $\sigma(E, E')$-sequêncialmente compacto e portanto relativamente $\sigma(E, E')$- compacto. ■

Lema 1.12.- *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil e incondicional, $(x_n) \subset E$ uma seqüência limitada e seja $(\epsilon_i) \in c_0$. Então o conjunto*

$$\bigcup_{j \geq 1} (\epsilon_i) \bigotimes ((x_n), (m_i)_{i=1}^j)$$

é relativamente $\sigma(E, E')$- compacto.

Prova.- Seja $(a_n) \subset \bigcup_{j \geq 1} (\epsilon_i) \bigotimes ((x_n), (m_i)_{i=1}^j)$. Passando a subseqüências, se for necessário, temos os seguintes casos

Caso 1.- Existe um j tal que

$$a_n \in (\epsilon_i) \bigotimes ((x_n), (m_i)_{i=1}^j)$$

para todo $n \geq 1$. Sendo $(\epsilon_i) \bigotimes ((x_n), (m_i)_{i=1}^j)$ relativamente compacto, existe uma subseqüência (a_{n_l}) de (a_n) fracamente convergente. ¿

Caso 2.- Neste caso podemos supor sem perda de generalidade que

$$a_j = \sum_{i=1}^{l_j} \epsilon_i \theta_i^j q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_{l_j}) + \theta_{l_j+1}^j q_{m_{l_j}}(x_{l_j})$$

com (l_j) estritamente crescente.

Seja

$$\overline{a_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \theta_i^j q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_{l_j}).$$

Pelo Corolário 1.5 o conjunto $K = \{\overline{a_j} : j \geq 1\}$ é relativamente compacto. Logo passando a uma subseqüência se for necessário, podemos supor que existe $\lim \overline{a_j} = a \in \overline{K}$. Por outro lado, se $\rho \in E'$,

$$|\rho(a_j - \overline{a_j})| = |\rho(\sum_{i=l_j+1}^{\infty} \epsilon_i \theta_i^j q_{m_{i-1}}^{m_i}(x_{l_j})) - \theta_{l_j+1}^j q_{m_{l_j}}(x_{l_j})|.$$

Pelo corolário 1.7, $|\rho(\theta^j_{l_j+1} q_{m_{l_j}}(x_{l_j}))| \to 0$ quando $j \to \infty$. Pela observação que segue ao Corolário 1.5, $\rho(\sum_{i=l_j+1}^{\infty} \epsilon_i \theta_i^j q^{m_i}_{m_{i-1}}(x_{l_j})) \to 0$ quando $j \to \infty$, e assim $\lim_j \rho(a_j - \overline{a_j}) \to 0$. Logo da igualdade $a_j - a = a_j - \overline{a_j} + \overline{a_j} - a$ temos $\lim_j \rho(a_j) = \rho(a)$. Assim (a_j) é $\sigma(E, E')$-convergente.
Dos casos 1 e 2 segue que $\bigcup_{j \geq 1}(\epsilon_i) \bigotimes ((x_n), (m_i)_{i=1}^j)$ é relativamente $\sigma(E, E')$ -compacto. ■

No que segue a expressão $f = \sum P_n$ com $\gamma_n = deg(P_n)$, denotará o desenvolvimento de Taylor de $f \in H(E; F)$ na origem; (P_{n_l}) uma subseqüência de (P_n).

Lema 1.13. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder, $f = \sum P_n \in H(E; F)$ e $(P_{n_l}) \subset (P_n)$; então*
(a) Para cada $\Omega \subset E$

$$\|(P_{n_l})^{m_1, \ldots, m_j}_{k_1, k_2, \ldots, k_{j+1}}\|_{\Omega}^{1/\gamma_n} \leq \|P_{n_l}\|^{1/\gamma_{n_l}}_{\Omega((m_i)_{i=0}^j)}.$$

(b) Se $\Omega \subset E$ é compacto, então

$$\lim_{l \to \infty} \|(P_{n_l})^{m_1, \ldots, m_j}_{k_1, k_2, \ldots, k_{j+1}}\|_{\Omega}^{1/\gamma_{n_l}} = 0$$

Prova.- (a) Seja $x \in \Omega$. Então pelo Lema 1.9

$$\begin{aligned} \|(P_{n_l})^{m_1, \ldots, m_j}_{k_1, k_2, \ldots, k_{j+1}}(x)\| &\leq \sup_{(\theta_i) \in \partial_0 \Delta^{j+1}(0,1)} \|P_{n_l}(\sum_{i=1}^{j} \theta_i q^{m_i}_{m_{i-1}}(x) + \theta_{j+1} q_{m_j}(x))\| \\ &\leq \|P_{n_l}\|_{\Omega((m_i)_{i=0}^j)} \end{aligned}$$

Sendo $x \in \Omega$ arbitrário obtemos

$$\|(P_{n_l})^{m_1, \ldots, m_j}_{k_1, k_2, \ldots, k_{j+1}}\|_{\Omega}^{1/\gamma_{n_l}} \leq \|P_{n_l}\|^{1/\gamma_{n_l}}_{\Omega((m_i)_{i=0}^j)}$$

(b) aplicando o Teorema 1.8 e o Lema 1.10 à última desigualdade, o lema segue. ■

Lema 1.14. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil, $f = \sum_{n \geq 0} P_n \in H_{bk}(E; F)$ e $(P_{n_l}) \subset (P_n)$. Então*
(a) Para cada $\Omega \subset E$

$$\|(P_{n_l})^{m_1, m_2 \ldots, m_j, l}_{k_1, \ldots, k_{j+1}, k_{j+2}}\|_{\Omega} \leq \|P_{n_l}\|_{\cup_l \Omega((m_i)_{i=0}^j, l)}$$

(b) Se $j \in \mathbb{N}$ é fixo e $\Omega \subset E$ é $\sigma(E, E')$- compacto, então

$$\lim_{l \to \infty} \|(P_{n_l})^{m_1, m_2 \ldots, m_j, l}_{k_1, \ldots, k_{j+1}, k_{j+2}}\|_{\Omega}^{1/\gamma_{n_l}} = 0$$

Prova.- (a) Pelo Lema 1.9 para cada $x \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned}\|(P_{n_l})^{m_1,\dots,m_j,l}_{k_1,k_2,\dots,k_{j+2}}(x)\| &\leq \sup_{\partial_0\Delta^{j+2}(0,1)} \|P_{n_l}(\sum_{i=1}^{j}\theta_i q^{m_i}_{m_{i-1}}(x) + \theta_{j+1}q^{l}_{m_j}(x) + \theta_{j+2}q_l(x))\| \\ &\leq \|P_{n_l}\|_{\Omega((m_i)_0^j,l)} \\ &\leq \|P_{n_l}\|_{\cup_l\Omega((m_i)_0^j,l)}\end{aligned}$$

Sendo $x \in \Omega$ arbitrário à afirmação segue.
(b) Por (a), o Lema 1.11 e o Teorema 1.8

$$\lim_{l\to\infty} \|(P_{n_l})^{m_1,\dots,m_j,l}_{k_1,k_2,\dots,k_{j+2}}\|_{\Omega}^{1/\gamma_{n_l}} \leq \lim_{l\to\infty} \|P_{n_l}\|^{1/\gamma_{n_l}}_{\cup\Omega((m_i)_0^j,l)} = 0$$

■

Lema 1.15. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil e incondicional, $f = \sum_{n\geq 0} P_n \in H_{bk}(E;F)$, $(P_{n_l}) \subset (P_n)$, $(\epsilon_i) \in c_0$.*
(a) Se $(x_n) \subset E$ e $a_l = \sum_{i=1}^{l} \epsilon_i q^{m_i}_{m_{i-1}}(x_l) + q_{m_l}(x_l)$. Então

$$\|(P_{n_l})^{m_1,\dots,m_l}_{k_1,k_2,\dots,k_{l+1}}(a_l)\| \leq \|P_{n_l}\|_{\bigcup_{j\geq 1}(\epsilon_i)\otimes((x_n),(m_i)_{i=1}^j)}$$

(b) Se (x_n) é limitada

$$\lim_{l\to\infty} \|(P_{n_l})^{m_1,\dots,m_l}_{k_1,k_2,\dots,k_{l+1}}(a_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} = 0$$

Prova.-(a) Pelo Lema 1.9

$$\|(P_{n_l})^{m_1,\dots,m_l}_{k_1,k_2,\dots,k_{l+1}}(a_l)\| \leq \sup_{\theta\in\partial_0\Delta^{l+1}(0,1)} \|P_{n_l}(\sum_{i=1}^{l}\epsilon_i\theta_i q^{m_i}_{m_{i-1}}(x_l) + \theta_{l+1}q_{m_l}(x_l))\|,$$

onde

$$\sup_{\theta\in\partial_0\Delta^{l+1}(0,1)} \|P_{n_l}(\sum_{i=1}^{l}\epsilon_i\theta_i q^{m_i}_{m_{i-1}}(x_l) + \theta_{l+1}q_{m_l}(x_l))\| \leq \|P_{n_l}\|_{(\epsilon_i)\otimes((x_n),(m_i)_{i=1}^l)}.$$

Logo

$$\|(P_{n_l})^{m_1,\dots,m_l}_{k_1,k_2,\dots,k_{l+1}}(a_l)\| \leq \|P_{n_l}\|_{(\epsilon_i)\otimes((x_n),(m_i)_{i=1}^l)} \leq \|P_{n_l}\|_{\bigcup_{j\geq 1}(\epsilon_i)\otimes((x_n),(m_i)_{i=1}^j)}.$$

(b) Por (a), o Lema 1.12 e o Teorema 1.8

$$\lim_{l\to\infty} \|(P_{n_l})^{m_1,\dots,m_l}_{k_1,k_2,\dots,k_{l+1}}(a_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \leq \lim_{l\to\infty} \|P_{n_l}\|^{1/\gamma_{n_l}}_{\bigcup_{j\geq 1}(\epsilon_i)\otimes((x_n),(m_i)_{i=1}^j)} = 0.$$

■

Capítulo 2

Funções inteiras em espaços de Banach com base de Schauder contrátil e incondicional

Dineen [4] provou que

$$H_{bk}(E;F) = H_b(E;F)$$

quando $E = c_0$.
Neste capítulo mostraremos que se E tem uma base de Schauder contrátil e incondicional então uma cuidadosa reformulação da demonstração de Dineen permite provar que

$$H_{bk}(E;F) = H_b(E;F).$$

2.1 Observações iniciais

Lema 2.1. *Se $H_{bk}(E;F) \not\subset H_b(E;F)$, então existem $f = \sum_{n\geq 0} P_n \in H_{bk}(E;F) \setminus H_b(E;F)$, com $P_n \in P({}^{\gamma_n}E;F)$ para todo n, constantes $\theta, \rho > 0$ e uma seqüência $(x_n) \subset S(E)$ tais que*
(a)

$$\rho \leq \|P_n(x_n)\|^{1/\gamma_n} \leq \|P_n\|^{1/\gamma_n} \leq \theta$$

para todo $n \geq 1$ e
(b)

$$\frac{\gamma_n}{\ln(\gamma_n + 1)} \geq n$$

para todo $n \geq 1$.

Prova.- Como $H_{bk}(E;F) \not\subset H_b(E;F)$ existe $g \in H_{bk}(E;F) \setminus H_b(E;F)$. Seja $g = \sum Q_n$ a série de Taylor de g na origem, e seja R o raio de convergência. Como $g \notin H_b(E;F), R < \infty$. Usando a fórmula de Cauchy- Hadamard [8, Teorema 4.3] podemos achar uma subseqüência Q_{n_l} tal que

?

$$\lim_n \|Q_{n_l}\|^{1/\gamma_{n_l}} = \frac{1}{R}.$$

Esta ultima relação implica que dado $\epsilon = 1/2R > 0$ existe um $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2R} < \|Q_{n_l}\|^{1/\gamma_{n_l}} < \frac{3}{2R} \tag{2.1}$$

para todo $l \geq l_0$. Seja $\theta = 3/2R$ e $\rho = 1/2R$. Agora por continuidade; para todo $l \geq l_0$ existe um $y_l \in S(E)$ tal que

$$\|Q_{n_l}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} > \rho. \tag{2.2}$$

Por outro lado

$$\lim_l \frac{\gamma_{n_l}}{\ln(\gamma_{n_l}+1)} = \infty.$$

Assim se $i \in \mathbb{N}$ existe $l_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\gamma_{n_l}}{\ln(\gamma_{n_l}+1)} > i. \tag{2.3}$$

Definimos $P_i = Q_{n_{l_i}}$, $f = \sum_{i\geq 1} Q_{n_{l_i}}$ e $x_i = y_{l_i}$. Por (2.1) e (2.2) a seqüência P_i satisfaz (a) e portanto $f \in H_{bk}(E;F) \setminus H_b(E;F)$. Por (2.3) a seqüência γ_n satisfaz (b). ■

?

Assim se $H_{bk}(E;F) \not\subset H_b(E;F)$ existe uma $f = \sum_{n\geq 1} P_n \in H_{bk}(E;F) \setminus H_b(E;F)$ tal que $\gamma_n / \ln(\gamma_n + 1) \geq n$. Esta relação implica que $\exp(\gamma_n) \geq (\gamma_n+1)^r$ para todo $1 \leq r \leq n$. Logo

$$\frac{1}{(\gamma_n+1)^{r/\gamma_n}} \geq \frac{1}{\exp(\gamma_n)^{1/\gamma_n}} = 1/e \tag{2.4}$$

para $1 \leq r \leq n$.

Seja E um espaço de Banach com base de Schauder e sejam $q^n; q^n_m, q_n$ as projeções definidas na seção 1.1. Não é difícil verificar que se $j_1, j_2, ..., j_{i+1} \in \mathbb{N}$ com $\sum_{s=1}^{i+1} j_s = \gamma_n$, então

$$(P_n)^{m_1,m_2,...,m_i}_{j_1,j_2,...,j_{i+1}} = \sum_{j=0}^{j_{i+1}} (P_n)^{m_1,m_2,...,m_{i+1}}_{j_1,j_2,...,j_i,j,j_{i+1}-j} \tag{2.5}$$

onde (m_i) é uma seqüência estritamente crescente de inteiros positivos. De fato, para cada $x \in E$ temos:

$$
\begin{aligned}
&(P_n)^{m_1,m_2,\ldots,m_i}_{j_1,j_2,\ldots,j_{i+1}}(x) \\
= \ & \frac{\gamma_n!}{\prod_{s=1}^{i+1} j_s!} A_n\Big(\prod_{s=1}^{i} q^{m_s}_{m_{s-1}}(x)^{j_s} q_{m_i}(x)^{j_{i+1}}\Big) \\
= \ & \frac{\gamma_n!}{\prod_{s=1}^{i+1} j_s!} A_n\Big(\prod_{s=1}^{i} q^{m_s}_{m_{s-1}}(x)(q^{m_{i+1}}_{m_i}(x) + q_{m_{i+1}}(x))^{j_{i+1}}\Big) \\
= \ & \frac{\gamma_n!}{\prod_{s=1}^{i+1} j_s!} \sum_{j=0}^{j_{i+1}} \frac{j_{i+1}!}{j!(j_{i+1}-j)!} A_n\Big(\prod_{s=1}^{i} q^{m_s}_{m_{s-1}}(x)^{j_s} q^{m_{i+1}}_{m_i}(x)^{j} q_{m_{i+1}}(x)^{j_{i+1}-j}\Big) \\
= \ & \sum_{j=0}^{j_{i+1}} \frac{\gamma_n!}{j_1!, j_2!, \ldots, j_i!, j!(j_{i+1}-j)!} A_n\Big(\prod_{s=1}^{i} q^{m_s}_{m_{s-1}}(x)^{j_s} q^{m_{i+1}}_{m_i}(x)^{j} q_{m_{i+1}}(x)^{j_{i+1}-j}\Big) \\
= \ & \sum_{j=0}^{j_{i+1}} (P_n)^{m_1,m_2,\ldots,m_i,m_{i+1}}_{j_1,j_2,\ldots,j_i,j,j_{i+1}-j}(x)
\end{aligned}
$$

Lema 2.2. *Seja E um espaço de Banach com base de Scahuder. Sejam (P_n) e (x_n) as seqüências dadas pelo Lema 2.1. Então para cada seqüência estritamente crescente de inteiros positivos $(m_i)_{i=1}^{\infty}$, existem seqüências $(j_{n,m_i})_{n\geq i}$ $i = 1, 2, \ldots$ tais que*
(a)

$$0 \leq \sum_{s=1}^{i} j_{n,m_s} \leq \gamma_n$$

para cada $i \geq 1$ e cada $n \geq i$.
(b) Se $\gamma_{n,i} = \gamma_n - \sum_{s=1}^{i} j_{n,m_s}$, então

$$\|(P_n)^{m_1,m_1,\ldots,m_i}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},\ldots,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{\rho}{\prod_{s=0}^{i-1}(\gamma_{n,s}+1)^{1/\gamma_n}} \geq \frac{\rho}{e}.\ (\gamma_{n,0} = \gamma_n) \qquad (2.6)$$

para cada $i \geq 1$ e cada $n \geq i$.

Prova.- Seja A_n a forma γ_n- linear associada com P_n. Então para todo $n \geq 1$, da relação (2.5) obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|P_n(x_n)\| &= \|\sum_{j=0}^{\gamma_n} (P_n)^{m_1}_{j,\gamma_n-j}(x_n)\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\gamma_n} \|(P_n)^{m_1}_{j,\gamma_n-j}(x_n)\| \\
&\leq (\gamma_n+1)\|(P_n)^{m_1}_{j,\gamma_n-j}(x_n)\|
\end{aligned}
$$

para algum $j = j_{n,m_1}$ com $0 \leq j_{n,m_1} \leq \gamma_n$. Assim

$$\|(P_n)^{m_1}_{j,\gamma_n - j}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{1}{(\gamma_n+1)}^{1/\gamma_n} \|P_n(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{\rho}{(\gamma_n+1)^{1/\gamma_n}} \geq \frac{\rho}{e}.$$

Suponhamos dado o inteiro $i \geq 1$, existem $(m_s)_{s=1}^{i}$ e $(j_{n,m_s})_{n \geq s}$ $s = 1, 2, ..., i$, satisfazendo (a) e (b). Então usando (2.5) e a notação $\gamma_{n,i} = \gamma_n - \sum_{s=1}^{i} j_{n,m_i}$, para $m_{i+1} > m_i$ e $n \geq i+1$ temos que

$$\begin{aligned}
\|(P_n)^{m_1,m_2,...,m_i}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},...,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}}(x_n)\| &= \|\sum_{j=0}^{\gamma_{n,i}} (P_n)^{m_1,m_1,...,m_i,m_{i+1}}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},...,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}-j}(x_n)\| \\
&\leq \sum_{j=0}^{\gamma_{n,i}} \|(P_n)^{m_1,m_1,...,m_i,m_{i+1}}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},...,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}-j}(x_n)\| \\
&\leq (\gamma_{n,i}+1)\|(P_n)^{m_1,m_1,...,m_i,m_{i+1}}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},...,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}-j_{n,m_{i+1}}}(x_n)\|
\end{aligned}$$

para algum $j_{n,m_{i+1}}$ com $0 \leq j_{n,m_{i+1}} \leq \gamma_{n,i}$. Então

$$\begin{aligned}
&\|(P_n)^{m_1,m_1,...,m_i,m_{i+1}}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},...,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}-j_{n,m_{i+1}}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \\
\geq\ & \frac{1}{(\gamma_{n,i}+1)^{1/\gamma_n}} \|(P_n)^{m_1,m_2,...,m_i}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},...,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \\
\geq\ & \frac{1}{(\gamma_{n,i}+1)^{1/\gamma_n}} \frac{1}{\prod_{s=0}^{i-1}(\gamma_{n,s}+1)^{1/\gamma_n}} \\
=\ & \frac{1}{\prod_{s=0}^{i}(\gamma_{n,s}+1)^{1/\gamma_n}}.
\end{aligned}$$

Agora $\frac{1}{\prod_{s=0}^{i}(\gamma_{n,s}+1)^{1/\gamma_n}} \geq \frac{1}{\prod_{s=0}^{i}(\gamma_n+1)^{i+1/\gamma_n}}$, e por hipótese $\frac{1}{\prod_{s=0}^{i}(\gamma_n+1)^{i+1/\gamma_n}} \geq 1/e$. Assim (b) é satisfeita ■

As seqüências $(j_{n,m_i})_{n \geq i}$ $i = 1, 2, ...$, serão chamadas "associadas" a (m_i).
Mostramos neste capítulo que existem uma função $f \in H_{bk}(E; F)$ com desenvolvimento de Taylor $\sum P_n$ satisfazendo as condições do Lema 2.1 e uma seqüência (m_i) de inteiros positivos tais que as seqüências associadas (j_{n,m_i}) satisfazem certas propriedades. Derivaremos destas propriedades a existência de uma seqüência $(\delta_i) \in l_1$. Finalmente, mostraremos que a existência desta seqüência leva a uma contradição.
O seguinte Lema é importante pois também será usado no capítulo 3.

Lema 2.3. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil. Sejam (P_n) e (x_n) as seqüências dadas pelo Lema 2.1. Então existe uma seqüência estritamente crescente $(m_1(l))_{l \geq 1}$ de inteiros positivos tais que*
(a)

$$\|(P_n)^{m_1(l)}_{j_{n,m_1(l)},\gamma_n - j_{n,m_1(l)}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} > \frac{\rho}{e}$$

para todo $n \geq 2$ e $l \geq 1$

(b)

$$0 < \liminf_n \frac{j_{n,m_1(l)}}{\gamma_n}$$

para todo $l \geq 1$.

Prova.- Seja $K \in \mathbb{N}$. Provaremos que existe um $l > K$ tal que a seqüência associada $(j_{n,l})$ satisfaz $0 < \liminf_n \frac{j_{n,l}}{\gamma_n}$. Caso contrario se para todo $l > K$ temos

$$\liminf_n \frac{j_{n,l}}{\gamma_n} = 0$$

Então dado l existe um n_l tal que $\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} < 1/l$; assim $\lim_l \frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} = 0$. Podemos supor que $n_1 < n_2 < ....$ Temos dois casos.

Caso 1.- Se para infinitos indices n_l, $j_{n_l} = 0$ para todo $l > K$. Então

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{e} &< \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \|(P_{n_l})^l_{0,\gamma_{n_l}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \|P_{n_l}(q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}}\end{aligned}$$

para todo $l \geq K$. Como $w \lim_l q_l(x_{n_l}) = 0$ (pelo Corolário 1.7), o conjunto $\{q_l(x_{n_l}) : l > K\}$ é relativamente $\sigma(E; E')$ -compacto, então o Teorema 1.8 implica que

$$\lim_l \|P_{n_l}(q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} = 0$$

uma contradição.

Caso 2.- Se para infinitos índices n_l temos $j_{n_l} > 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $j_{n_l} > 0$ para todo $l > K$. Se definimos $\alpha_l = \exp(-\sqrt{\gamma_{n_l}/j_{n_l,l}})$, então $(\alpha_l) \in c_0$ e $\alpha_l^{j_{n_l,l}/\gamma_{n_l}} \to 1$ quando $l \to \infty$. Seja $y_l = \alpha_l q^l(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l})$. Então

$$\begin{aligned}&\|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ =\ & \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}}} \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ \geq\ & \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}}} \frac{\rho}{e}\end{aligned}$$

Por outro lado sendo o conjunto $W = \{y_l : l > K\}$ relativamente $\sigma(E, E')$ -compacto, o Lema 1.14 implica que

$$\lim_l \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \leq \lim_l \|(P_{n_l})^l_{j_{n_l,l},\gamma_{n_l}-j_{n_l,l}}\|_W^{1/\gamma_{n_l}} = 0$$

uma contradição. Assim existe um $l_1 > K$ satisfazendo $0 < \liminf_n \frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n}$.
Como $K \in \mathbb{N}$ era arbitrário podemos aplicar o argumento precedente com $K = l_1$ e assim obtemos l_2 tais que (a) e (b) são satisfeitas. Procedendo indutivamente achamos uma seqüência estritamente crescente $(l_t) \subset \mathbb{N}$ tal que $\liminf_n \frac{j_{n,m_1(t)}}{\gamma_n} > 0$ para todo t. A seqüência $(m_1(t)) = (l_t)$ tem as propriedades requeridas. ■

Definimos

$$\delta_1(t) = \liminf_n \frac{j_{n,m_1(t)}}{\gamma_n}.$$

2.2 O resultado principal

Lema 2.4. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil. Sejam $g = \sum P_n \in H_{bk}(E;F) \setminus H_b(E;F)$ e $(x_n) \subset S(E)$ dadas pelo Lema 2.1. Então existem uma seqüência estritamente crescente (m_s) de inteiros positivos, e seqüências $(j_{n,m_s})_{n \geq s}$ associadas a (m_s) tais que*
(a) Para cada $i \geq 1$ e cada $n \geq i$

$$0 \leq j_{n,m_i} \leq \gamma_n - \sum_{s=1}^{i-1} j_{n,m_s};$$

(b) para cada $i \geq 1$

$$\liminf_n \frac{j_{n,m_i}}{\gamma_n} > 0$$

(c) para cada $i \geq 1$ e cada $n \geq i$

$$\|(P_n)^{m_1,\ldots,m_i}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},\ldots,j_{n,m_i},\gamma_{n,i}}\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{\rho}{e}$$

onde

$$\gamma_{n,i} = \gamma_n - \sum_{s=1}^{i} j_{n,m_s};\ i \geq 1.\ (\gamma_{n,0} = \gamma_n)$$

Prova.- A prova é por indução. Procedemos a construir o inteiro m_1 e a seqüência $(j_{n,m_1})_n$. O Lema anterior fornece um $m_1 = m_1(1)$ e uma seqüência associada (j_{n,m_1}) tal que

$$\|(P_n)^{m_1}_{j_{n,m_1},\gamma_n - j_{n,m_1}}(x_n)\|^{\gamma_n} \geq \frac{\rho}{e}$$

para todo $n \geq 1$ e

$$0 < \liminf_n \frac{j_{n,m_1}}{\gamma_n}$$

Temos construído m_1 e a seqüência $(j_{n,m_1})_n$. Suponhamos que temos construído as seqüências $(m_i)_{i=1}^k$ e $(j_{n,m_i})_{n \geq k}$ com $i = 1, 2, \ldots k$. satisfazendo as condições do Lema.

Vamos construir m_{k+1} e $(j_{n,m_{k+1}})_{n\geq k+1}$.
Seja a familia $\{(P_n)^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},\ldots,j_{n,m_k},\gamma_{n,k}} : n \geq k\}$. Pela relação (2.5) dado $l > m_k$ existe uma seqüência $j_{n,l}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &\leq j_{n,l} \leq \gamma_n - \sum_{s=1}^{k} j_{n,m_s} \\ \frac{\rho}{e} &< \|(P_n)^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n,m_1},j_{n,m_2},\ldots,j_{n,m_k},j_{n,l},\gamma_{n,k+1}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \end{aligned}$$

para todo $n \geq k+1$.
Mostremos que existe um l_1 tal que

$$\liminf_n \frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n} > 0$$

De fato. Suponhamos que para cada $l > m_k$ temos $\liminf_n \frac{j_{n,l}}{\gamma_n} = 0$. Então dado $l > m_k$ existe um $n_l > k+1$ tal que

$$\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} < \frac{1}{l}$$

isto é $\lim \frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} = 0$. Podemos supor que $n_l < n_{l+1}$... para todo $l > m_k$. Temos os seguintes casos

Caso 1.- se para infinitos indices l, $\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} = 0$, isto é $j_{n,l} = 0$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{e} &\leq \|(P_{n_l})^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n_l,m_1},j_{n_l,m_2},\ldots,j_{n_l,m_k},0,\gamma_{n_l,k+1}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ &= \|(P_{n_l})^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n_l,m_1},j_{n_l,m_2},\ldots,j_{n_l,m_k},0,\gamma_{n_l,k+1}}(q^{m_k}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \end{aligned}$$

onde $\gamma_{n_l,k+1} = \gamma_{n_l} - \sum_{s=1}^{k} j_{n_l,m_s}$. Como o conjunto $W = \{q^{m_k}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l}) : l > m_k\}$ é relativamente $\sigma(E,E')$- compacto, o Lema 1.14 garante que

$$\begin{aligned} &\lim_l \|(P_{n_l})^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n_l,m_1},j_{n_l,m_2},\ldots,j_{n_l,m_k},0,\gamma_{n_l,k+1}}(q^{m_k}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l}))\|^{1/\gamma_{n_l}} \\ \leq\ &\lim_l \|(P_{n_l})^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n_l,m_1},j_{n_l,m_2},\ldots,j_{n_l,m_k},0,\gamma_{n_l,k+1}}\|_W^{1/\gamma_{n_l}} = 0 \end{aligned}$$

contradição.

Caso 2.- Suponhamos agora que para infinitos índices l, $\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} > 0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}} > 0$ para todo $l > m_k$. Definimos $\alpha_l = \exp(-\sqrt{\frac{\gamma_{n_l}}{j_{n_l,l}}})$. Então $(\alpha_l) \in c_0$ e $\alpha_l^{\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}}} \to 1$ quando $l \to \infty$. Seja $y_l = q^{m_k}(x_{n_l}) + \alpha_l q^l_{m_k}(x_{n_l}) + q_l(x_{n_l})$. Como o conjunto $W = \{y_l : l > m_k\}$ é relativamente $\sigma(E,E')$ compacto, o Lema 1.14 garante que

$$\lim_l \|(P_{n_l})^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n_l,m_1},j_{n_l,m_2},\ldots,j_{n_l,m_k},j_{n_l,l},\gamma_{n_l,k+1}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} = 0$$

Por outro lado

$$
\begin{aligned}
& \|(P_{n_l})^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n_l,m_1},j_{n_l,m_2},\ldots,j_{n_l,m_k},j_{n_l,l},\gamma_{n_l,k+1}}(y_l)\|^{1/\gamma_{n_l}} \\
= \; & \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}}} \|(P_{n_l})^{m_1,\ldots,m_k,l}_{j_{n_l,m_1},j_{n_l,m_2},\ldots,j_{n_l,m_k},j_{n_l,l},\gamma_{n_l,k+1}}(x_{n_l})\|^{1/\gamma_{n_l}} \\
\geq \; & \alpha_l^{\frac{j_{n_l,l}}{\gamma_{n_l}}} \frac{\rho}{e} \to \frac{\rho}{e}.
\end{aligned}
$$

quando $l \to \infty$, um absurdo.
Assim existe $l_1 > m_k$, tal que $\liminf_n \frac{j_{n,l_1}}{\gamma_n} > 0$. ■

Lema 2.5. *Seja E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil. Sejam $(j_{n,m_i})_{n\geq i}$ i=1,2,...; (m_i) as seqüências dadas pelo Lema anterior. Então existem seqüências estritamente crescentes $(r_k(n))_{n\geq 1}$ $k = 1, 2, \ldots$, e uma seqüência (δ_i) de reais positivos tais que*
(a) Para todo $k \geq 1$

$$r_k(k) \geq k \tag{2.7}$$
$$(r_k(n)) \subset (r_{k-1}(n)) \tag{2.8}$$

(b) Para todo $k \geq 1$

$$\lim_n \frac{j_{r_k(n),m_k}}{\gamma_{r_k(n)}} = \delta_k$$

(c) Para todo $n \geq k$

$$\frac{j_{r_k(n),m_k}}{\gamma_{r_k(n)}} \leq 2\delta_k$$

(d)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \leq 1$$

Prova.- Sejam $\delta_1 = \liminf_n \frac{j_{n,m_1}}{\gamma_n} > 0$, e $(r_1(n))$ uma subseqüência de $(n)_{n\geq 1}$ estritamente crescente tais que $r_1(1) \geq 1$ e

$$
\begin{aligned}
\lim_n \frac{j_{r_1(n),m_1}}{\gamma_{r_1(n)}} &= \delta_1 \\
\frac{j_{r_1(n),m_1}}{\gamma_{r_1(n)}} &< 2\delta_1, \text{ para todo } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Como $(r_1(n)) \subset (n)_{n\geq 1}$ temos

$$0 < \liminf_n \frac{j_{n,m_2}}{\gamma_n} \leq \liminf_n \frac{j_{r_1(n),m_2}}{\gamma_{r_1(n)}}$$

Sejam $\delta_2 = \liminf_n \frac{j_{r_1(n),m_2}}{\gamma_{r_1(n)}}$ e $(r_2(n)) \subset (r_1(n))$ uma subseqüência estritamente crescente tais que $r_2(2) \geq 2$ e

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{j_{r_2(n),m_2}}{\gamma_{r_2(n)}} &= \delta_2 \\ \frac{j_{r_2(n),m_2}}{\gamma_{r_2(n)}} &< 2\delta_2 \text{ para todo } n \geq 2 \end{aligned}$$

Procedendo indutivamente, dado k achamos uma seqüência estritamente crescente $(r_k(n))_{n\geq 1}$ tais que $(r_k(n)) \subset (r_{k-1}(n)) \subset ... \subset (r_1(n)) \subset (n), r_k(k) \geq k$ e

$$\begin{aligned} \delta_k &= \liminf_n \frac{j_{r_{k-1}(n),m_k}}{\gamma_{r_{k-1}(n)}} \\ &= \lim_n \frac{j_{r_k(n),m_k}}{\gamma_{r_k(n)}} > 0 \\ \frac{j_{r_k(n),m_k}}{\gamma_{r_k(n)}} &< 2\delta_k \end{aligned}$$

para todo $n \geq k$.
Mostremos que a seqüência (δ_s) assim definida satisfaz $\sum_{s=1}^{\infty} \delta_s \leq 1$. Sendo $(\sum_{s=1}^{i} \delta_s)$ uma seqüência não decrescente de termos positivos é suficiente mostrar que $(\sum_{s=1}^{i} \delta_s) \leq 1$ para todo i.
Seja $i \in \mathbb{N}$ arbitrário. Como $0 \leq j_{n,m_i} \leq \gamma_n - \sum_{s=1}^{i} j_{n,m_s}$ para todo $n \geq i$ então

$$\sum_{s=1}^{i} \frac{j_{n,m_s}}{\gamma_n} \leq 1, \text{ para todo } n \geq i$$

e portanto

$$\sum_{s=1}^{i} \frac{j_{r_i(n),m_s}}{\gamma_{r_i(n)}} \leq 1 \text{ para todo } n \geq i.$$

Logo

$$\liminf_n (\sum_{s=1}^{i} \frac{j_{r_i(n),m_s}}{\gamma_{r_i(n)}}) \leq 1.$$

Usando as propriedades do limite inferior obtemos

$$\sum_{s=1}^{i} \liminf_n \frac{j_{r_i(n),m_s}}{\gamma_{r_i(n)}} \leq \liminf_n (\sum_{s=1}^{i} \frac{j_{r_i(n),m_s}}{\gamma_{r_i(n)}}) \leq 1.$$

Como $(r_i(n))$ é uma subseqüência de $(r_s(n))$ para $1 \leq s \leq i$ temos

$$\delta_s = \lim_n \frac{j_{r_s(n),m_s}}{\gamma_{r_s(n)}} = \liminf_n \frac{j_{r_s(n),m_s}}{\gamma_{r_s(n)}} \leq \liminf_n \frac{j_{r_i(n),m_s}}{\gamma_{r_i(n)}}$$

e logo

$$\sum_{s=1}^{i}\delta_s \le \sum_{s=1}^{i}\liminf_n \frac{j_{r_i(n),m_s}}{\gamma_{r_i(n)}} \le \liminf_n\Big(\sum_{s=1}^{i}\frac{j_{r_i(n),m_s}}{\gamma_{r_i(n)}}\Big) \le 1$$

o que queríamos mostrar. ■

Observemos que se (P_n) e (x_n) são as seqüências dadas pelo Lema 2.1, o Lema 2.3 implica

$$\|(P_{r_n(n)})^{m_1,\dots,m_n}_{j_{r(n),m_1},\dots,j_{r(n),m_n};\gamma_{n,n}}(x_{r_n(n)})\|^{1/\gamma_{r_n(n)}} > \frac{\rho}{e} \text{ para todo } n \ge i$$

Também sendo $k \le r_k(k) \le r_n(n)$ para $1 \le k \le n$ temos $\frac{j_{r_n(n),m_k}}{\gamma_{r_n(n)}} \le 2\delta_k$ para $k = 1, 2, \dots n$.

Lema 2.6. *Dados* $(\delta_i) \in l_1$ *e* $a > 0$ *existe uma seqüência crescente* (ψ_i) *tal que*
(a) $\lim_i \psi_i = \infty$
(b) $\sum_{i\ge 1}\psi_i\delta_i = a$

Prova.- Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $p_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{p_k}^{\infty}\delta_i < 4^{-k}$$

Podemos supor que $p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$
Agora

$$\begin{aligned} s := \sum_{k=1}^{\infty} a2^k \sum_{p_k \le m < p_{k+1}} \delta_m &< \sum_{k=1}^{\infty} a2^k 4^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a2^{-k} \\ &= a \end{aligned}$$

Definimos

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{a-s}{\sum_{i=1}^{p_1-1}\delta_i} & \text{se } 1 \le i < p_1 \\ \\ a2^k & \text{se } p_k \le i < p_{k+1}, k \ge 1. \end{cases}$$

■

Teorema 2.7. *Seja* E *um espaço de Banach com base de Schauder, contrátil e incondicional. Então*

$$H_{bk}(E,F) = H_b(E,F).$$

Prova.- É óbvio que $H_b(E,F) \subset H_{bk}(E,F)$. Suponhamos que $H_{bk}(E,F) \not\subset H_b(E,F)$. Sejam $f = \sum P_n H_{bk}(E,F) \setminus H_b(E,F)$ e $(x_n) \subset S(E)$ dadas pelo Lema 2.1 . Consideremos

as seqüências $(m_i), (j_{n,m(i)})_{n\geq i}, (r_i(n))$ e δ_i dadas pelos Lemas 2.4 e 2.5.
Seja $(\psi_s) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como no Lema anterior tal que $\sum \psi_s\delta_s \leq \ln(2)$. Definimos $\epsilon_s = \exp(-\psi_s)$.
Então $(\epsilon_s) \in c_0$ e

$$\sum_{s=1}^{l} \delta_s \ln(\epsilon_s) = -\sum_{s=1}^{l} \psi_s\delta_s \geq -\ln(2) = \ln(1/2).$$

Assim

$$\ln(\prod_{s=1}^{l} \epsilon_s^{\delta_s}) = \sum_{s=1}^{l} \delta_s \ln(\epsilon_s) \geq \ln(1/2)$$

donde

$$\prod_{s=1}^{l} \epsilon_s^{\delta_s} \geq 1/2 \tag{2.9}$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Consideremos a seqüência (y_n) definida por $y_n = \sum_{s=1}^{n} \epsilon_s q_{m_{s-1}}^{m_s}(x_{r_n(n)}) + q_{m_n}(x_{r_n(n)})$. Sendo $(x_{r_n(n)})$ uma seqüência limitada o Lema 1.15 garante que

$$\lim_{l\to\infty} \|(P_{r_n(n)})^{m_1,m_2\dots m_n}_{j_{r_n(n),m_1}\dots j_{r_n(n),m_n},\gamma_{n,n}}(y_n)\|^{1/\gamma_{r_n(n)}} = 0.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
&\|(P_{r_n(n)})^{m_1,m_2\dots m_n}_{j_{r_n(n),m_1}\dots j_{r_n(n),m_n},\gamma_{n,n}}(y_n)\|^{1/\gamma_{r_n(n)}}\\
=\ &\|\frac{\gamma_{r_n(n)}!}{\prod_{s=1}^{i} j_{r_n(n),m_s}\gamma_{r_n(n),n}!}A_{r_n(n)}\prod_{s=1}^{n}\epsilon_s q_{m_{s-1}}^{m_s}(x_{r_n(n)})^{j_{r_n(n),m_s}}, q_{m_n}(x_{r_n(n)})^{\gamma_{n,n}}\|^{1/\gamma_{r_n(n)}}\\
=\ &\epsilon_1^{\frac{j_{r_n(n),m_1}}{\gamma_{r_n(n)}}}\epsilon_2^{\frac{j_{r_n(n),m_2}}{\gamma_{r_n(n)}}}\dots\epsilon_n^{\frac{j_{r_n(n),m_n}}{\gamma_{r_n(n)}}}\|(P_{r_n(n)})^{m_1,m_2,\dots,m_n}_{j_{r_n(n),m_1},\dots,j_{r_n(n),m_n},\gamma_{n,n}}(x_{r_n(n)})\|^{1/\gamma_{r_n(n)}}\\
\geq\ &\epsilon_1^{\frac{j_{r_n(n),m_1}}{\gamma_{r_n(n)}}}\epsilon_2^{\frac{j_{r_n(n),m_2}}{\gamma_{r_n(n)}}}\dots\epsilon_n^{\frac{j_{r_n(n),m_n}}{\gamma_{r_n(n)}}}\frac{\rho}{e}
\end{aligned}$$

Pelo comentário que segue ao Lema 2.5, $\frac{j_{r_n(n),m_k}}{\gamma_{r_n(n)}} \leq 2\delta_k$. Logo pela relação 2.9

$$\epsilon_1^{\frac{j_{r_n(n),m_1}}{\gamma_{r_n(n)}}}\epsilon_2^{\frac{j_{r_n(n),m_2}}{\gamma_{r_n(n)}}}\dots\epsilon_n^{\frac{j_{r_n(n),m_n}}{\gamma_{r_n(n)}}} \geq \epsilon_1^{2\delta_1}\epsilon_2^{2\delta_2}\dots\epsilon_l^{2\delta_l} \geq (1/2)^2$$

Isto é

$$\|(P_{r_n(n)})^{m_1,m_2,\dots,m_n}_{j_{r_n(n),m_1},\dots,j_{r_n(n),m_n},\gamma_{n,n}}(y_n)\|^{1/\gamma_{r_n(n)}} \geq \rho/4e > 0$$

e temos uma contradição fazendo $n \to \infty$ na ultima desigualdade. ■

Notemos que a hipótese de base incondicional foi usada apenas para aplicar o Lema 1.15.

Capítulo 3

Funções inteiras em espaços de Banach com base de Schauder contrátil.

Mostraremos neste capítulo que a igualdade

$$H_{bk}(E,F) = H_b(E,F)$$

é verificada quando E tem uma base de Schauder contrátil. Concluiremos por um resultado de Davis, Figiel, Johnson e Pelczynski [2] que esta relação é também verdadeira quando o espaço de Banach E tem dual topológico separável.

3.1 O resultado principal

Seja E um espaço de Banach com base de Schauder.

Lema 3.1. **(Estimativa E2)** *Sejam $P_n \in P(^{\gamma_n}E;F)$ e $\theta > 0$ tais que $\|P_n\|^{1/\gamma_n} \leq \theta$. Então*

$$\|(P_n)^{m_1,m_2\ldots m_j}_{k_1\ldots k_{j+1}}(x)\|^{1/\gamma_n} \leq e\theta(j+1)\prod_{s=1}^{j+1}\|q^{m_s}_{m_{s-1}}(x)\|^{k_s/\gamma_n} \tag{3.1}$$

Prova.- Da identidade $j^{\gamma_n} = \sum_{|k|=\gamma_n}\gamma_n!/\prod_{r=1}^{j}k_r!$ segue que $(\gamma_n!/\prod_{r=1}^{j}k_r!)^{1/\gamma_n} \leq j$. Por outro lado é conhecido que se $P_n \in P(^{\gamma_n}E;F)$ e A_n é sua aplicação γ_n -linear associada, então $\|A_n\|^{1/\gamma_n} \leq \|P_n\|^{1/\gamma_n}$ [8,Teorema 2.2]. Daqui

$$\begin{aligned} \|(P_n)^{m_1,m_2\ldots m_j}_{k_1\ldots k_{j+1}}(x)\|^{1/\gamma_n} &= \|\frac{\gamma_n!}{\prod_{r=1}^{j+1} k_r!} A_n(q^{m_1}(x)^{k_1}\ldots q^{m_j}_{k_{j-1}}(x)^{k_j} q_{m_j}(x)^{k_{j+1}})\|^{1/\gamma_n} \\ &\leq (\frac{\gamma_n!}{\prod_{r=1}^{j+1} k_r!})^{1/\gamma_n} \|A_n\|^{1/\gamma_n} \prod_{s=1}^{j+1} \|q^{m_s}_{m_{s-1}}(x)\|^{k_s/\gamma_n}, \ (m_{j+1} := \infty) \\ &\leq e\theta(j+1) \prod_{s=1}^{j+1} \|q^{m_s}_{m_{s-1}}(x)\|^{k_s/\gamma_n} \end{aligned}$$

■

Lema 3.2. *Sejam E um espaço de Banach com base de Schauder contrátil. Sejam $f = \sum P_n \in H_{bk}(E,F), (x_n) \subset S(E)$ e $\rho > 0$ tais que*

$$\|P_n(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \rho$$
$$\frac{1}{(\gamma_n + 1)^{r/\gamma_n}} > \frac{1}{e}, \ r = 1, 2$$

para todo $n \geq 2$. Então existem seqüências estritamente crescentes $(m_1(t))_{t\geq 1}$ e $(m_2(t))_{t\geq 1}$, tais que

(a) $m_1(t) < m_2(t)$ para todo $t \geq 1$.

(b) Dados $s_1 \leq s_2$ em $\mathbb{N}$, então

$$\|(P_n)^{m_1(s_1),m_2(s_2)}_{j_{n,m_1(t)},j_{n,m_2(t)},\gamma_{n,2}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{\rho}{e}$$

para todo $n \geq 2$; onde $\gamma_{n,2} = \gamma_n - \sum_{r=1}^{2} j_{n,m_r(s_r)}$.

(c)

$$0 < \delta_r(l) = \liminf_n \frac{j_{n,m_r(l)}}{\gamma_n} \quad r = 1, 2$$

para todo $l \geq 1$.

Prova.- Seja $(m_1(t))_t$ a seqüência dada pelo Lema 2.3. Procedemos a construir a seqüência $(m_2(t))$. Para isto precisaremos do seguinte Lema

Lema 3.3. *Seja $(m_1(t))$ a seqüência dada pelo lema 2.3. Sejam $s_1 \in \mathbb{N}$ fixo e $(m(t))$ uma seqüência de inteiros positivos com $\lim m(t) = \infty$. Então existe uma subseqüência estritamente crescente $(m(t_r)) \subset (m_(t))$ tais que*

(a) $m_1(s_1) < m(t_1)$.

(b)

$$\|(P_n)^{m_1(s_1),m(t_r)}_{j_{n,m_1(s_1)},j_{n,m(t_r)},\gamma_{n,2}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{\rho}{e}$$

para todo $n \geq 2$, e $r \geq 1$.

(c)

$$0 < \liminf_n \frac{j_{n,m(t_r)}}{\gamma_n}$$

para todo $r \geq 1$.

Prova.- Seja $K \geq m_1(s_1)$ um inteiro positivo fixo. Como $\lim_t m(t) = \infty$ podemos supor sem perda de generalidade que $m(t) > K > m_1(s_1)$ para todo $t \geq 1$. Assim (a) será verificada a priori.

Consideremos a família

$$\{(P_n)^{m_1(s_1)}_{j_{n,m_1(s_1)},\gamma_n - j_{n,m_1(s_1)}} : n \geq 2\}.$$

O Lema 2.2 implica que para cada $m(t) > K > m(s_1)$ sua seqüência associada $(j_{n,m(t)})$ verifica (b). Provaremos que existe $m(t_1) > K > m(s_1)$ tal que $\liminf_n \frac{j_{n,m(t_1)}}{\gamma_{n_t}} > 0$. Temos dois casos.

Caso 1.- Se para infinitos índices t, $j_{n,m(t)} = 0$, podemos assumir sem perda de generalidade , que $j_{n,m(t)} = 0$ para todo $t \geq 1$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{e} &< \|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},0,\gamma_{n_t,2}}(x_{n_t})\|^{1/\gamma_{n_t}} \\
&= \|\frac{\gamma_{n_t}!}{j_{n,m_1(s_1)}!0!\gamma_{n_t,2}!}A_{n_t}(q^{m_1(s_1)}(x_{n_t}))^{j_{n_t,m_1(s_1)}}(q^{m(t)}_{m_1(s_1)}(x_{n_t}))^0 q_{m(t)}(x_{n_t})^{\gamma_{n_t,2}}\|^{1/\gamma_{n_t}} \\
&= \|\frac{\gamma_{n_t}!}{j_{n,m_1(s_1)}!0!\gamma_{n_t,2}!}A_{n_t}(q^{m_1(s_1)}(x_{n_t}))^{j_{n_t,m_1(s_1)}} q_{m(t)}(x_{n_t})^{\gamma_{n_t,2}}\|^{1/\gamma_{n_t}} \\
&= \|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},0,\gamma_{n_t,2}}(q^{m(s_1)}(x_{n_t}) + q_{m(t)}(x_{n_t}))\|^{1/\gamma_{n_t}}
\end{aligned}$$

Agora o conjunto $W = \{q^{m(s_1)}(x_{n_t}) + q_{m(t)}(x_{n_t}) : t \geq 1\}$ é relativamente $\sigma(E, E')$ - compacto, pois s_1 é fixo e $w \lim_{m(t)}(x_{n_t}) = 0$. Pelo Lema 1.14

$$\begin{aligned}
&\lim_t \|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},0,\gamma_{n_t,2}}(q^{m(s_1)}(x_{n_t}) + q_{m(t)}(x_{n_t}))\|^{1/\gamma_{n_t}} \\
\leq\ &\|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},0,\gamma_{n_t,2}}\|^{1/\gamma_{n_t}}_W = 0
\end{aligned}$$

uma contradição.

Caso 2.- Se $j_{n_t,m(t)} > 0$ para infinitos indices t, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $j_{n_t,m(t)} > 0$ para todo $t \geq 1$. Definimos $\alpha_t = \exp(\sqrt{\gamma_{n_t}/j_{n_t,m(t)}})$. Então $(\alpha_t) \in c_0$ e $\alpha_t^{j_{n_t,m_t}/\gamma_{n_t}} \to 1$ para $t \to \infty$. Seja $y_t = q^{m_1(s_1)}(x_{n_t}) + \alpha_t q^{m(t)}_{m_1(s_1)}(x_{n_t}) + q_{m_t}(x_{n_t})$. Então

$$\begin{aligned}
&\|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},j_{n_t,m(t)},\gamma_{n_t,2}}(y_t)\|^{1/\gamma_{n_t}} \\
=\ &\alpha_t^{j_{n_t,m_t}/\gamma_{n_t}}\|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},j_{n_t,m(t)},\gamma_{n_t,2}}(x_{n_t})\|^{1/\gamma_{n_t}} \\
\geq\ &\alpha_t^{j_{n_t,m_t}/\gamma_{n_t}}\frac{\rho}{e} \to \frac{\rho}{e}
\end{aligned}$$

quando $t \to \infty$. Por outro lado o conjunto $W = \{y_l : l \geq 1\}$ é relativamente $\sigma(E; E')$ -compacto pois s_1 é fixo, $\lim \alpha_t q^{m(t)}_{m(s_1)}(x_{n_t}) = 0$ e $w \lim_{m(t)}(x_{n_t}) = 0$. Assim o Lema 1.14

implica que

$$\begin{aligned}
& \lim_t \|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},j_{n_t,m(t)},\gamma_{n_t},2}(y_t)\|^{1/\gamma_{n_t}} \\
\leq \ & \lim_t \|(P_{n_t})^{m_1(s_1),m(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},j_{n_t,m(t)},\gamma_{n_t},2}\|_W^{1/\gamma_{n_t}} = 0
\end{aligned}$$

uma contradição.
Logo, existe um t_1 satisfazendo $\liminf_n \frac{j_{n,m(t_1)}}{\gamma_n} > 0$.
Assim $m(t_1)$ verifica (b) do Lema. Para completar a prova observemos que $K > m_1(s_1)$ foi escolhido arbitrário; logo se substituimos K por $m(t_1)$ obtemos $m(t_2)$ satisfazendo o Lema. Por indução obtemos $m(t_r)$. ■

Prova do Lema 3.2. Construiremos a seqüência m_2 por um processo de diagonalização. Para $s_1 = 1$ o Lema 3.3 fornece uma seqüência estritamente crescente $l_1(t)$ de inteiros positivos tais que
(a) $m_1(1) < l_1(1)$.
(b)

$$\|(P_n)^{m_1(s_1),l_1(t)}_{j_{n,m_1(s_1)},j_{n,l_1(t)},\gamma_n,2}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{\rho}{e}$$

para todo $n \geq 2$, e $t \geq 1$.
(c)

$$0 < \liminf_n \frac{j_{n,l_1(t)}}{\gamma_n}$$

para $t = 1, 2, ...$
Procedendo indutivamente vemos que dado $k \in \mathbb{N}$ existem uma subseqüência $(l_k(t))_{t\geq 1}$ com $(l_k(t)) \subset (l_{k-1}(t) \subset ... \subset (l_1(t)))$, e $l_1(1) < l_2(1) < ... < l_k(1)$, tais que
(a) $m_1(k) < l_k(1)$.
(b)

$$\|(P_n)^{m_1(k),l_k(t)}_{j_{n,m_1(k)},j_{n,l_k(t)},\gamma_{n_t},2}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \geq \frac{\rho}{e}$$

para todo $n \geq 2$, $t \geq 1$.
(c)

$$0 < \liminf_n \frac{j_{n,l_k(t)}}{\gamma_n}$$

para todo $t \geq 1$.
Definimos $m_2(t) = l_t(1)$.
Observemos que se $t \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
m_1(t) &< l_t(1) \\
&= m_2(t)
\end{aligned}$$

Assim (a) é verificada. É imediato da construção das seqüências $(m_1(l))$ e $(m_2(l))$ que (b) e (c) são verificadas. Assim as condições (a)- (c) são satisfeitas. ■

Lema 3.4. *Sejam $(m_1(l))$ e $(m_2(l))$ as seqüências dadas pelo Lema 3.2. Seja*

$$\delta_2(t) = \liminf_n \frac{j_{n,m_2(t)}}{\gamma_n}.$$

Então existe $n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_2 > 2$ tal que

$$\sigma_2 = \inf_{l \geq 1}\{\frac{j_{n_2,m_2(l)}}{\gamma_{n_2}}\} > 0.$$

Prova.- Suponhamos que para todo $n > 2$ temos $\inf_{l\geq 1}\{\frac{j_{n_2,m_2(l)}}{\gamma_{n_2}}\} = 0$. Então para cada $n > 2$ existe l_n tal que $\frac{j_{n,m_2(l_n}}{\gamma_n} < 1/n$. Assim $\lim_n \frac{j_{n_2,m_2(l_n)}}{\gamma_n} = 0$. Temos dois casos:
Caso 1.-Se (l_n) é limitada, então existe n_0 e uma subseqüência $(n_t) \subset \{n \in \mathbb{N} : n > 3\}$ tais que $\lim_t \frac{j_{n_t,m_2(l_{n_0})}}{\gamma_{n_t}} = 0$. Esta relação implica

$$\begin{aligned} 0 < \delta_2(l_{n_0}) &= \liminf_n(\frac{j_{n,m_2(l_{n_0})}}{\gamma_n}) \\ &\leq \liminf_t(\frac{j_{n_t,m_2(l_{n_0})}}{\gamma_{n_t}}) \\ &= \lim_t(\frac{j_{n_t,m_2(l_{n_0})}}{\gamma_{n_t}}) = 0 \end{aligned}$$

uma contradição.
Caso 2.- Se (l_n) é não limitada, então podemos assumir que $l_1 < l_2 < \dots$. Temos dois subcasos.
Subcaso 2a.- Se para infinitos indices n, $j_{n,m_2(l_n)} = 0$ para $n > 2$. Então

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{e} \leq \|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},0,\gamma_{n,2}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \\ = \quad &\|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},0,\gamma_{n,2}}(q^{m_1(1)}(x_n) + q_{m_2(l_n)}(x_n))\|^{1/\gamma_n} \end{aligned}$$

Sendo o conjunto $W = \{q^{m_1(1)}(x_n) + q_{m_2(l_n)}(x_n) : n > 2\}$ relativamente $\sigma(E, E')$ - compacto, o Lema 1.14 implica

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{e} &\leq \lim_n \|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},0,\gamma_{n,2}}(q^{m_1(1)}(x_n) + q_{m_2}(l_n)(x_n)\|^{1/\gamma_n} \\ &\leq \lim_n \|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},0,\gamma_{n,2}}\|^{1/\gamma_n}_W = 0 \end{aligned}$$

uma contradição.
Subcaso 2b.- Se $j_{n,m_2(l_n)} > 0$ para infinitos índices, então, sem perda de generalidade podemos assumir que $j_{n,m_2(l_n)} > 0$ para todo $n > 2$. Seja $\alpha_n = \exp -\sqrt{\gamma_n/j_{n,m_2(l_n)}})$.

Então $(\alpha_n) \in c_0$ e $\alpha_n^{j_{n,m_2(l_n)}/\gamma_n} \to 1$ para $n \to \infty$. Seja $y_n = q^{m_1(1)}(x_n) + \alpha_n q_{m_1(1)}^{m_2(l_n)}(x_n) + q_{m_2(l_n)}(x_n)$. Então o Lema 3.2 implica que

$$\begin{aligned} & \|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},j_{n,m_2(l_n)},\gamma_{n,2}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} \\ = \quad & \alpha_n^{\frac{j_{n,m_2(l_n)}}{\gamma_n}} \|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},j_{n,m_2(l_n)},\gamma_{n,2}}(x_n)\|^{1/\gamma_n} \\ \geq \quad & \alpha_n^{\frac{j_{n,m_2(l_n)}}{\gamma_n}} \frac{\rho}{e} \to \frac{\rho}{e} \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Por outro lado, o conjunto $W = \{y_n : n \geq 2\}$ é $\sigma(E, E')$ - compacto, pois $m_1(1)$ é fixo, $\lim \alpha_n q_{m_1(1)}^{m_2(l_n)} = 0$, e sendo (l_n) infinita, $w \lim q_{m_2(l_n)}(x_n) = 0$, o Lema 1.14 implica que

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{e} \quad & \leq \quad \lim_n \|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},j_{n,m_2(l_n)},\gamma_{n,2}}(y_n)\|^{1/\gamma_n} \\ & \leq \quad \lim_n \|(P_n)^{m_1(1),m_2(l_n)}_{j_{n,m_1(1)},j_{n,m_2(l_n)},\gamma_{n,2}}\|_W^{1/\gamma_n} = 0 \end{aligned}$$

uma contradição. ■

Teorema 3.5. *Sejam E e F espaços de Banach, E com base de Schauder contrátil. Então*

$$H_{bk}(E; F) = H_b(E; F).$$

Prova.- É obvio que $H_b(E;F) \subset H_{bk}(E;F)$. Suponhamos que $H_{bk}(E;F) \not\subset H_b(E;F)$. Sejam $f \in H_{bk}(E;F) \setminus H_b(E;F)$, $(x_n), \rho, \theta > 0$ dados pelo Lema 2.1. Consideremos as seqüências $(m_i(s))_{s \geq 1}$ $i = 1, 2$. dadas pelo Lema 3.2 e $n_2, \sigma_2 > 0$ dados pelo Lema 3.4. Como

$$\lim_{s \to \infty} \|q_{m_1(s)}(x_{n_2})\| = 0$$

dado $l > 0$ podemos escolher s_l tal que

$$\|q_{m_1(s_l)}(x_{n_2})\| < 2^{-l/\sigma_2}.$$

Como $n_2 > 2$ o Lema 3.2 implica que

$$E(l) = \|(P_{n_2})^{m_1(s_l),m_2(s_l)}_{j_{n_2,m_1(s_l)},j_{n_2,m_2(s_l)},\gamma_{n_2,2}}(x_{n_2})\|^{1/\gamma_{n_2}} \geq \frac{\rho}{e}.$$

Por outro lado, usando o Lema 3.1 temos

$$\frac{\rho}{e} \leq E(l) \leq 3e\theta \|q^{m_1(s_1)}(x_{n_2})\|^{\frac{j_{n_2,m_1(s_l)}}{\gamma_{n_2}}} \|q_{m_1(s_l)}^{m_2(s_l)}(x_{n_2})\|^{\frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}}} \|q_{m_2(s_l)}(x_{n_2})\|^{\frac{\gamma_{n_2,2}}{\gamma_{n_2}}}.$$

Agora lembrando que $(x_n) \subset S(E)$ e que Λ é a constante básica, temos que

$$\begin{aligned} \|q^{m_1(s_1)}(x_{n_2})\|^{\frac{j_{n_2,m_1(s_l)}}{\gamma_{n_2}}} & \leq (2\Lambda)^{\frac{j_{n_2,m_1(s_l)}}{\gamma_{n_2}}}, \\ \|q_{m_2(s_l)}(x_{n_2})\|^{\frac{\gamma_{n_2,2}}{\gamma_{n_2}}} & \leq (2\Lambda)^{\frac{\gamma_{n_2,2}}{\gamma_{n_2}}}. \end{aligned}$$

Também $\|q_{m_1(s_l)}(x_{n_2})\| < 2^{-l/\sigma_2}$ e portanto

$$\|q_{m_1(s_l)}^{m_2(s_l)}(x_{n_2})\| \leq 2\Lambda\|q_{m_1(s_l)}(x_{n_2})\| < 2\Lambda(2^{-\frac{l}{\sigma_2}}).$$

Daqui

$$\|q_{m_1(s_l)}^{m_2(s_l)}(x_{n_2})\|^{\frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}}} \leq (2\Lambda(2^{-\frac{l}{\sigma_2}}))^{\frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}}}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{e} \leq E(l) &\leq 3e\theta((2\Lambda)^{\frac{j_{n_2,m_1(s_l)}}{\gamma_{n_2}}})((2\Lambda 2^{-\frac{l}{\sigma_2}})^{\frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}}})((2\Lambda)^{\frac{\gamma_{n_2,2}}{\gamma_{n_2}}}) \\ &= 3e\theta(2\Lambda)^{\frac{j_{n_2,m_1(s_l)}}{\gamma_{n_2}}+\frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}}+\frac{\gamma_{n_2,2}}{\gamma_{n_2}}}(2^{-\frac{l}{\sigma_2}})^{\frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}}}\end{aligned}$$

Para finalizar lembremos que

$$\begin{aligned}\gamma_{n_2,2} &= \gamma_{n_2} - j_{n_2,m_1(s_l)} - j_{n_2,m_2(s_l)}, \\ \frac{j_{n_2,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_2}} &\geq \inf_s\{\frac{j_{n_2,m_2(s)}}{\gamma_{n_2}}\} = \sigma_2 > 0\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\rho}{e} \leq E(l) \leq 6e\Lambda\theta(2^{-l/\sigma_2})^{\frac{j_{n_l,m_2(s_l)}}{\gamma_{n_l}}} \leq 6e\Lambda\theta(2^{-l/\sigma_2})^{\sigma_2}) = 6e\Lambda\theta\frac{1}{2^l}$$

Portanto $E(l) \to 0$ para $l \to \infty$, uma contradição. ∎

3.2 Conseqüências.

Corolário 3.6. *Se E é um espaço de Banach com dual separável, então $H_{bk}(E;F) = H_b(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

Prova.- Seja $f \in H_{bk}(E;F)$. Por um resultado de Davis, Fiegel Johnson e Pelczynski [2, Corolário 8], E é o quociente de um espaço de Banach Z com base contrátil. Seja $\pi : Z \to E$ a aplicação quociente. Então $f \circ \pi \in H_{bk}(Z;F)$ e portanto $f \circ \pi \in H_b(Z;F)$ pelo Teorema 3.5. Daqui $f \in H_b(E;F)$. ∎

Se $E = l_1$ então todo subconjunto fracamente compacto de E é compacto em norma, e portanto $H_{bk}(E;F) = H(E;F) \neq H_b(E;F)$. Assim a conclusão do Corolário 3.6 não é verdadeira para $E = l_1$. De fato Moraes [7] provou que $H_{bk}(E) \neq H_b(E)$ se E contém um subespaço isomorfo a l_1.

Diremos que E é um espaço de Asplund se cada subespaço separável de E tem um dual separável, ou seja se E' tem a propriedade de Radom Nikodym. Ver [3]. É imediato da definição de espaço de Asplund o seguinte corolário

Corolário 3.7. *Se E é um espaço de Asplund, então $H_{bk}(E;F) = H_b(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

$\blacksquare$

Corolário 3.8. *Se E é um espaço de Asplund, então $H_{wsc}(E;F) \subset H_b(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

Prova.- Claramente $H_{wsc}(E;F) \subset H_{bk}(E;F)$. Assim a conclusão segue do Corolário precedente. $\blacksquare$.

Corolário 3.9. *Se E é um espaço de Asplund, então $H_{wsc}(E;F) = H_w(E;F) = H_{wu}(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

Prova.- As inclusões $H_{wu}(E;F) \subset H_w(E;F) \subset H_{wsc}(E;F)$ são sempre verdadeiras. Por [1, Prop 3.3], $H_{wsc}(E;F) = H_w(E;F)$. Usando o Corolário precedente e a observação em [1, pagina 200] obtemos

$$H_{wsc}(E;F) \subset H_w(E;F) \cap H_b(E;F) = H_{wu}(E;F).$$

$\blacksquare$

O Corolário 3.9 responde parcialmente aos problemas 1 e 3 e completamente ao problema 2.

Referências

[1] R.M. Aron, C. Hervés, M. Valdivia, *"Weakly Continuous Mappings on Banach Spaces"*, J. Funct. Anal., 52 (1983), 189-203.

[2] W. Davis, T. Fiegel, W. Johnson, e A. Pelczynski *"Factoring Weakly Compact Operators"*, J. Funct. Anal. 17, (1974), 311-327.

[3] J. Diestel, J. Uhl, *"Vector Measures "*, Amer. Math. Soc., 1977.

[4] S. Dineen, *"Entire Functions on c_0"*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 205-218.

[5] S. Dineen, *"Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces"*, Springer Verlag, 1999.

[6] Lindenstrauss-L. Tzafriri, *"Classical Banach Spaces I"*, Springer Verlag, New York, 1977.

[7] L.A. Moraes, *"Weakly Continuous Holomorphic Mappings"*, Proc. of the Royal Irish Acad. Vol 97A, (1997), 139-144.

[8] J. Mujica *"Complex Analysis in Banach Spaces"*. North- Holland Mathematics Studies. 120, 1986.

–★–