

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

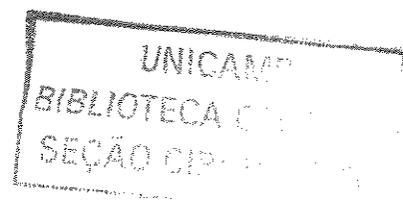
**Aplicações Harmônicas, Estruturas-f,  
Toros e Superfícies de Riemann nas  
Variedades Homogêneas**

**Autora: Cleusiane Vieira da Silva**

**Orientador: Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros**

25 de fevereiro de 2002

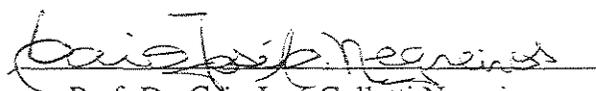
UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL



# Aplicações Harmônicas, estruturas— $f$ , Toros e Superfícies de Riemann nas variedades Homogêneas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Cleusiane Vieira da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de Fevereiro de 2002.

  
Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros.

Orientador

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Caio José Colletti Negreiros.
2. Prof. Dr. Luiz Antônio Barrera San Martin.
3. Prof. Dr. Marlio Paredes Gutierrez

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática.

2002.17.907

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Silva, Cleusiane Vieira da

Si38a      Aplicações harmônicas, estruturas-f, toros e superfícies de Riemann nas variedades homogêneas / Cleusiane Vieira da Silva -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Caio José Colletti Negreiros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria diferencial. 2. Variedades complexas. 3. Torneios. 4. Aplicações holomorfas. I. Negreiros, Caio José Colletti. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 25 de fevereiro de 2002 e aprovada pela  
Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



---

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS



---

Prof (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



---

Prof (a). Dr (a). MARLIO PAREDES GUTIERREZ

# Agradecimentos

---

- A Deus
- Ao Professor Caio José Colletti Negreiros pelo apoio e importantes ensinamentos.
- Ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
- A amiga Adélia C. Diniz pela amizade e apoio que me ofereceu nessa caminhada.
- Ao amigo Fernando dos Santos Silva pela ajuda com o Latex e apoio durante todo o mestrado.
- Ao pessoal do predinho que alegraram os meus dias mais felizes.
- À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES.

Aos meus pais,  
minhas irmãs  
e meu marido  
João.

# Conteúdo

Resumo	1
Abstract	2
Introdução	3
<b>1 Aplicações Harmônicas e Holomorfas entre Variedades Quase Kähler</b>	<b>6</b>
1.1 Aplicações Harmônicas . . . . .	6
1.2 Aplicações Holomorfas . . . . .	9
<b>2 Toros Equiharmônicos em Variedades Bandeira</b>	<b>19</b>
2.1 Estruturas-f em variedades bandeira complexas . . . . .	19
2.2 $\varepsilon$ -matriz e curvas f-holomorfas . . . . .	28
2.3 Equações Harmônicas de Superfícies Fechadas em Variedades Ban- deira Não-degeneradas . . . . .	33
2.4 Toros Equiharmônicos Não-f-holomorfos . . . . .	40
<b>3 Estabilidade do Referencial de Frenet das aplicações holomorfas</b>	<b>46</b>
3.1 Segunda variação de Energia para aplicações em $F(N)$ . . . . .	46
3.2 Estabilidade em $F(N)$ . . . . .	51
<b>4 Torneios e Geometria das Variedades Bandeira Não-Degeneradas</b>	<b>54</b>
4.1 Torneios e Estruturas Quase-complexas . . . . .	54
4.2 As formas de Maurer-Cartan de $U(N)$ . . . . .	57
4.3 Métricas Invariantes à Esquerda . . . . .	59
4.4 Formas de Kähler e suas diferenciações exteriores . . . . .	60

CONTEÚDO

iv

Bibliografía

67

# Resumo

---

Neste trabalho, estudamos a geometria das estruturas-f invariantes e curvas f-holomorfas em variedades bandeira, a construção de toros equiharmônicos em variedades bandeira complexas não-degeneradas que não são f-holomorfos para qualquer estrutura-f invariante.

Calculamos a segunda variação da energia para superfícies harmônicas riemannianas fechadas em variedades bandeira munidas com métricas do tipo Borel daí discutimos a estabilidade para o referencial de Frenet de aplicações holomorfas com respeito a uma grande classe de métricas invariantes em  $F(N)$  obtidas via perturbação de métricas Kähler. Além disso relacionamos a teoria de torneios com as estruturas quase complexas de uma variedade bandeira.

Finalmente mostramos que a métrica Killing em  $F(N)$  é (1,2)-simplética se e somente se  $N \leq 3$ .

# Abstract

---

In this work we study the geometry of invariant  $f$ -structures and  $f$ -holomorphic curves on flag manifolds, and the construction of the equiharmonic tori on full complex flag manifolds which are not  $f$ -holomorphic for any invariant  $f$ -structure. Moreover we relate the tournament theory with the almost-complex on a flag manifolds.

We compute the second variation of energy for harmonic closed Riemann surfaces into flag manifolds equipped with the Borel type metrics then we discuss stability for Frenet frames of holomorphic maps with respect to a very large class of invariant metrics  $F(N)$  obtained via perturbation of the Kähler ones.

Finally we prove that the metric Killing on  $F(N)$  is  $(1,2)$ -symplectic if and only if  $N \leq 3$ .

# Introdução

---

Uma aplicação  $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$  onde  $(M, g)$  e  $(N, h)$  são variedades Riemannianas é harmônica se ela é um ponto crítico do funcional energia

$$E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M \|d\phi\|^2 v_g$$

onde  $\|d\phi\|$  é a norma de Hilbert-Schmidt (ou da soma) da aplicação linear  $d\phi$ . De forma equivalente  $\phi$  é harmônica se e somente se satisfaz a equação de Euler-Lagrange:

$$\left. \frac{d}{dt} E(\phi_t) \right|_{t=0} = 0$$

para toda variação  $(\phi_t), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  de  $\phi$ . Uma referência para um estudo mais detalhado de aplicações harmônicas é o livro de Eells e Lemaire [5].

**Definição 0.0.1** Usando as estruturas quase hermitianas de  $M$  e  $N$ , definimos a densidade de energia parcial de  $\phi$ , como os seguintes quadrados de normas complexas,  $e'$  e  $e'' : C(M, N) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$e'(\phi) = \|\partial\phi\|^2$$

$$e''(\phi) = \|\bar{\partial}\phi\|^2$$

**Definição 0.0.2** Considerando  $M$  uma variedade compacta definimos:

$$E'(\phi) = \int_M e'(\phi) v_g \text{ e } E''(\phi) = \int_M e''(\phi) v_g$$

então obtemos  $E(\phi) = E'(\phi) + E''(\phi)$ .

Um importante resultado de Lichnerowicz que será demonstrado no capítulo 1 é :

**Teorema 0.0.3** *Se  $M$  e  $N$  são variedades quase-Kähler então  $K(\phi)$  é um invariante homotópico, isto é, constante sobre componentes conexas de  $C(M, N)$ ; onde  $K(\phi) = E'(\phi) - E''(\phi)$ .*

Este teorema continua válido no caso em que a variedade  $N$  é (1,2)-simplética.

**Definição 0.0.4** *Uma variedade bandeira é um espaço homogêneo  $G/T$  onde  $G$  é um grupo de Lie compacto e  $T$  é qualquer toro maximal. Denotamos por  $F(N)$  a variedade bandeira com  $G = U(N)$  e  $T = \underbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}_{N\text{-vezes}}$ .*

O estudo das métricas invariantes sobre  $F(N)$  envolve as estruturas quase-complexas. Burstall e Salamon [4] mostraram que existe uma identificação natural entre estruturas quase-complexas invariantes sobre  $F(N)$  e torneios com  $N$  vértices (ver cap 3, seção 3.1). O resultado de Borel e Hirzerbruch [3] mostra que existem  $\binom{N}{2}$  estruturas quase complexas  $U(N)$ -invariantes na variedade complexa  $F(N)$ .

Quando as variedades alvo são variedades bandeira complexas, um método é estudar as estruturas quase complexas horizontais mais geralmente, estruturas-f horizontais, já que as aplicações holomorfas horizontais são harmônicas para toda métrica invariante [1].

Este trabalho esta organizado como segue:

O capítulo 1 contém conceitos básicos e, alguns resultados importantes sobre aplicações harmônicas e holomorfas entre duas variedades riemannianas que precisaremos nos capítulos posteriores.

No capítulo 2 estudamos a geometria das estruturas-f invariantes, curvas holomorfas em variedades bandeira e a construção de um exemplo de uma aplicação equiharmônica que não é f-holomorfa.

No capítulo 3 calculamos a fórmula da segunda variação da energia para superfícies harmônicas riemannianas fechadas em variedades bandeira munidas com métricas do tipo Borel e as condições de estabilidade para o referencial de Frenet de aplicações holomorfas .

No capítulo 4 relacionamos o estudo da geometria complexa das variedades bandeira não degeneradas  $F(N)$ , aplicações harmônicas e a teoria de torneios. Finalmente mostramos o resultado:

**Teorema 0.0.5** *A métrica de Killing sobre  $F(N)$  é (1,2)-simplética se e somente se  $N \leq 3$ .*

# Capítulo 1

## Aplicações Harmônicas e Holomorfas entre Variedades Quase Kähler

Neste capítulo introduziremos os conceitos de aplicações harmônicas, holomorfas e variedades quase Kähler e demonstraremos um importante teorema devido a Lichnerowicz.

### 1.1 Aplicações Harmônicas

Sejam  $(M, g)$  e  $(N, h)$  duas variedades riemannianas diferenciáveis, as quais supomos conexas, compactas, orientadas e sem bordo, de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente.

Seja  $\phi : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável (ou seja  $C^\infty$ ) e  $\eta : W \rightarrow N$  um fibrado vetorial, denotamos por  $\phi^{-1}W$  o fibrado pull-back, cuja fibra sobre  $x \in M$  é  $w_{\phi(x)}$ , a fibra de  $W$  sobre  $\phi(x)$ .

Portanto, a diferencial  $d\phi$  de uma aplicação diferenciável  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ , pode considerar-se como uma seção do fibrado,

$$\Lambda^1(\phi^{-1}TN) = TM^* \otimes \phi^{-1}TN,$$

de fato:  $d\phi_x \in \text{Hom}(T_xM, T_{\phi(x)}N) \cong T_xM^* \otimes \phi_x^{-1}TN$ ; logo

$$d\phi \in C(TM^* \otimes \phi^{-1}TN),$$

Denotamos  $\|d\phi_x\|$  como a norma de Hilbert-Schmidt da diferencial de  $\phi$  no ponto  $x$  de  $M$ . Isto é a norma induzida pelas métricas  $g$  e  $h$  da seguinte forma:

$$\|d\phi_x\|^2 = h(d\phi_x(e_1), d\phi_x(e_1)) + \dots + h(d\phi_x(e_n), d\phi_x(e_n)).$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_xM$  com respeito à métrica  $g$ .

Se  $(x^i)$  e  $(u^\alpha)$  são coordenadas locais ao redor de  $x$  e  $\phi(x)$  respectivamente, temos que:

$$\|d\phi_x\|^2 = g^{ij}h_{\alpha\beta}(\phi)\phi_i^\alpha\phi_j^\beta$$

onde  $\phi_i^\alpha = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}$  é a representação local de  $d\phi$ .

**Definição 1.1.1** A densidade de energia de  $\phi$  é a função diferenciável

$$e(\phi) : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$e(\phi(x)) = \frac{1}{2}\|d\phi_x\|^2.$$

**Definição 1.1.2** A energia de  $\phi$  é o número

$$E(\phi) = \int_M e(\phi)(x)v_g,$$

onde  $v_g$  é a medida de volume em  $M$ .

**Definição 1.1.3** A aplicação  $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$  é harmônica se e somente se  $\phi$  é um ponto crítico do funcional energia.

Seja  $v \in C(\phi^{-1}TN)$  definimos a derivada da energia,  $D_vE(\phi)$  como segue: consideremos uma família de aplicações  $\phi_t$  tal que  $\phi_0 = \phi$  e  $\frac{\partial\phi_t}{\partial t} = v$  (tomando por exemplo a família  $\phi_t(x) = \exp_{\phi(x)}tv$ ). Então,

$$D_vE(\phi) = \left. \frac{dE(\phi_t)}{dt} \right|_{t=0}$$

assim  $\phi$  é harmônica se e somente se  $D_vE(\phi) = 0$ , para todo  $v \in C(\phi^{-1}TN)$ . Denotamos por  $\Phi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow N$  a aplicação definida por  $\Phi(x, t) = \phi_t(x)$ .

**Proposição 1.1.4** [5] Uma aplicação  $\phi : (M, g) \longrightarrow (N, h)$  é harmônica se e somente se esta satisfaz a equação de Euler-Lagrange  $\tau(\phi) = 0$ , onde  $\tau(\phi) = \text{tr}(\nabla d\phi)$  é chamado o campo de tensão de  $\phi$ .

**Demonstração:**

Para qualquer família  $\phi_t$  com  $\phi_0 = \phi$  e  $\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = v$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dE(\phi_t)}{dt} \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \int_M e(\phi_t) v_g \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{1}{2} \int_M \frac{\partial}{\partial t} \langle d\phi_t, d\phi_t \rangle v_g \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{1}{2} \int_M \left( \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi_t, d\phi_t \right\rangle + \left\langle d\phi_t, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi_t \right\rangle \right) v_g \right|_{t=0} \\
 &= \left. \int_M \left\langle d\phi_t, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi_t \right\rangle v_g \right|_{t=0}
 \end{aligned}$$

onde  $d\phi_t$  é a diferencial de  $\Phi$  ao longo de  $M$  e com  $t$  fixo (i.e  $d\phi_t = d\Phi(., t)$ );  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}$  é a derivada covariante no fibrado  $T^*(M \times \mathbb{R} \otimes \phi^{-1}TN)$  sobre  $M \times \mathbb{R}$ .

Agora considerando os campos independentes  $X \in TM$  e  $\frac{\partial}{\partial t}$ , e usando a fórmula ([5] página 5) obtemos que:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\phi_t)X &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi^{-1}TN} d\phi_t.X - d\phi_t. \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{T(M \times \mathbb{R})} X \\
 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi^{-1}TN} d\Phi_t.X - 0 \\
 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi^{-1}TN} d\Phi_t. \frac{\partial}{\partial t} + d\Phi \left[ \frac{\partial}{\partial t}, X \right] \\
 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\phi^{-1}TN} d\Phi_t. \frac{\partial}{\partial t} + 0.
 \end{aligned}$$

Logo observando que  $\nabla$  e  $d$  (operador diferencial exterior) coincidem sobre  $\Lambda^0(\phi^{-1}TN) = C(\phi^{-1}TN)$  e integrando por partes, temos que:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} E(\phi_t) \right|_{t=0} &= \left. \int_M \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_t, d\Phi_t \right\rangle v_g \right|_{t=0} \\
 &= \left. \int_M \langle dv, d\phi \rangle v_g \right|_{t=0} \\
 &= \left. \int_M \langle v, d^* d\phi \rangle v_g \right|_{t=0} \\
 &= \left. - \int_M \langle v, \tau_\phi \rangle v_g \right|_{t=0}.
 \end{aligned}$$

Portanto  $\phi$  é harmônica se e só se  $\int_M \langle v, \tau_\phi \rangle v_g = 0$  se e só se  $\tau_\phi = 0$ . ■

## 1.2 Aplicações Holomorfas

**Definição 1.2.1** *Uma estrutura quase complexa sobre uma variedade diferenciável real  $M$  é um campo tensorial  $J$ , o qual em cada ponto  $x$  de  $M$ , é associado um endomorfismo do espaço tangente  $T_x M$ , tal que  $J_x^2 = -I$ , onde  $I$  denota a transformação identidade de  $T_x M$ .*

Uma variedade com uma estrutura quase complexa é chamada uma variedade quase complexa.

**Observação 1.2.2** *Se  $M$  é uma variedade quase complexa de dimensão  $K$ , então  $K$  é par.*

Com efeito, seja  $x \in M$ , como  $\dim_{\mathbb{R}}(T_x M)$  é finita temos:

$$J_x : (T_x M) \longrightarrow (T_x M)$$

é representado por um elemento de  $M(K \times K, \mathbb{R})$  donde  $0 < (\det J_x)^2 = \det J_x \cdot \det J_x = \det(J_x)^2 = (-1)^K$ . Logo  $K$  é par.

Seja  $T^{\mathbb{C}}M$  o fibrado tangente complexificado, cuja fibra em  $x$  é  $T_x M \otimes \mathbb{C}$  (i.e.  $T_x M \otimes \sqrt{-1}T_x M$ ). Dada uma estrutura quase complexa sobre  $M$ , estendemos sua definição linearmente para  $J^{\mathbb{C}}$  definindo:

$$J_x^{\mathbb{C}} : \begin{cases} T_x^{\mathbb{C}}M & \longrightarrow & T_x^{\mathbb{C}}M \\ u + \sqrt{-1}v & \longrightarrow & J_x u + \sqrt{-1}J_x v \end{cases}$$

onde  $u, v \in T_x M$ .

A partir de agora identificaremos  $J$  com  $J^{\mathbb{C}}$ . Seja  $\lambda \in \mathbb{C}$  um autovalor de  $J$ , i.e.,  $J(z) = \lambda z$ . Logo  $J^2(z) = \lambda Jz \Rightarrow \lambda Jz = -z \Rightarrow \lambda(\lambda z) = -z \Rightarrow \lambda^2 z = -z \Rightarrow \lambda^2 = -1$  então  $\lambda = \pm\sqrt{-1}$ ; denotemos por  $T'M$  e  $T''M$  os auto-espacos associados a estes autovalores.

$$T'_x M = \{v - \sqrt{-1}Jv; v \in T_x M\} \text{ e } T''_x M = \{v + \sqrt{-1}Jv; v \in T_x M\}.$$

Então  $T^{\mathbb{C}}M = T'M \oplus T''M$ .  $T'M$  é chamado fibrado tangente holomorfo e  $T''M$  é chamado fibrado tangente anti-holomorfo.

**Observação 1.2.3**  $T''M = \overline{T'M}$  o conjugado complexo. Esta decomposição induz uma decomposição no espaço dual  $T^{*\mathbb{C}}M = T^{*'}M \oplus T^{*''}M$ , com  $T_x^{*'}M = (T'_x M)^*$  e  $T_x^{*''}M = (T''_x M)^*$ .

**Definição 1.2.4** Uma métrica  $g$  sobre  $(TM, J)$  é dita métrica quase hermitiana se  $g(u, v) = g(Ju, Jv)$ . Uma variedade quase complexa  $M$  com métrica quase hermitiana  $g$ , é dita uma variedade quase hermitiana e a denotamos por  $(M, J, g)$ .

Podemos estender  $g$  a uma forma bilinear complexa em  $T^{\mathbb{C}}M$  que será também denotada por  $g$ :

$$g : T^{\mathbb{C}}M \times T^{\mathbb{C}}M \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g(u_1 + \sqrt{-1}v_1, u_2 + \sqrt{-1}v_2) = g(u_1, u_2) + g(v_1, v_2) + \sqrt{-1}(g(v_1, u_2) + g(u_1, v_2))$$

**Proposição 1.2.5** 1. é  $\mathbb{C}$ -linear;

$$2. g(z, \bar{w}) = \overline{g(z, w)}$$

$$3. g(z, \bar{z}) > 0, \forall z \in T^{\mathbb{C}}M,$$

$$4. g(z, \bar{w}) = 0, \text{ para } z \in T'M \text{ e } w \in T''M.$$

Além disso,  $g$  induz uma forma hermitiana em  $T'M$  dada por:  $g(x, \bar{y}) = \langle x, y \rangle$ ,  $x, y \in T'M$

Considere  $g_{j\bar{k}} = \langle z_j, z_{\bar{k}} \rangle$ , onde  $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$  é base de  $T'M$  sobre  $\mathbb{C}$  e considere  $\{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m\}$  base dual para  $T^*M$ .

**Proposição 1.2.6** Sejam  $g$  uma métrica quase hermitiana sobre  $(TM, J)$  e  $(\theta^j)_{j=1}^m$  uma base de campos coordenados locais em  $T^*M$ , podemos escrever  $g = \sum_{j,k} g_{j\bar{k}} \theta^j \bar{\theta}^k$ .

**Demonstração:**

Dados  $z$  e  $w \in T^{\mathbb{C}}M$  temos que:

$$z = \sum_j (\theta^j(z) z_j + \bar{\theta}^j(z) \bar{z}_j) \text{ e } w = \sum_k (\theta^k(w) z_k + \bar{\theta}^k(w) \bar{z}_k)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g(z, w) &= \left\langle \sum_j (\theta^j(z) z_j + \bar{\theta}^j(z) \bar{z}_j), \sum_k (\theta^k(w) z_k + \bar{\theta}^k(w) \bar{z}_k) \right\rangle \\ &= \sum_{j,k} \theta^j(z) \theta^k(w) g_{jk} + \sum_{j,k} \theta^j(z) \bar{\theta}^k(w) g_{j\bar{k}} \\ &\quad + \sum_{j,k} \bar{\theta}^j(z) \theta^k(w) g_{\bar{j}k} + \sum_{j,k} \bar{\theta}^j(z) \bar{\theta}^k(w) g_{\bar{j}\bar{k}} \\ &= \sum_{j,k} (\theta^j(z) \bar{\theta}^k(w) g_{j\bar{k}} + \theta^j(w) \bar{\theta}^k(z) g_{j\bar{k}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j,k} (\theta^j(z) \bar{\theta}^k(w) + \theta^j(w) \bar{\theta}^k(z)) g_{j\bar{k}} \\
 &= \sum_{j,k} g_{j\bar{k}} \theta^j \otimes \bar{\theta}^k(z, w) \\
 &= \sum_{j,k} g_{j\bar{k}} \theta^j \bar{\theta}^k(z, w)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$g = \sum_{j,k} g_{j\bar{k}} \theta^j \bar{\theta}^k$$

pois

$$g_{jk} = \langle z_j, z_k \rangle = \langle x_j - iJx_j, x_k - iJx_k \rangle$$

$$g_{jk} = \langle x_j, x_k \rangle - i \langle x_j, Jx_k \rangle - i \langle Jx_j, x_k \rangle - \langle x_j, x_k \rangle$$

$$g_{jk} = i(\langle J^2x_j, Jx_k \rangle - \langle Jx_j, x_k \rangle)$$

$$g_{jk} = i(\langle Jx_j, x_k \rangle - \langle Jx_j, x_k \rangle) = 0 \quad \blacksquare$$

**Definição 1.2.7** A forma Kähler  $\Omega$  é definida em  $TM$  por  $\Omega(x, y) = \langle x, Jy \rangle$ . Ela é uma 2-forma que nos campos coordenados acima tem componentes  $\Omega_{j\bar{k}} = -ig_{j\bar{k}}$ . A variedade quase hermitiana  $(M, J, g)$  é chamada quase Kähler se  $d\Omega = 0$ .

Seja  $\phi : (M, J, g) \rightarrow (N, J, h)$  uma aplicação diferenciável entre variedades quase hermitianas. Estendendo linearmente a definição de  $d\phi : TM \rightarrow TN$  obtemos a diferencial complexificada

$$d^{\mathbb{C}}\phi : \begin{cases} T^{\mathbb{C}}M & \longrightarrow & T^{\mathbb{C}}N \\ u + \sqrt{-1}v & \longrightarrow & d\phi(u) + \sqrt{-1}d\phi(v) \end{cases}$$

a qual determina várias diferenciais parciais pela composição com as inclusões de  $T'M$  e  $T''M$  em  $T^{\mathbb{C}}M$  e as projecões de  $T^{\mathbb{C}}N$  em  $T'N$  e  $T''N$ . Deste modo definimos:

$$\partial\phi : T'M \rightarrow T'N$$

$$\bar{\partial}\phi : T''M \rightarrow T'N$$

$$\partial\bar{\phi} : T'M \rightarrow T''N$$

$$\bar{\partial}\bar{\phi} : T''M \rightarrow T''N$$

Verifica-se que  $\bar{\partial}\phi = \bar{\partial}\bar{\phi}$ . Por construção,  $d^{\mathbb{C}}\phi|_{T'M} = \partial\phi + \bar{\partial}\bar{\phi}$  e  $d^{\mathbb{C}}\phi|_{T''M} = \bar{\partial}\phi + \partial\bar{\phi}$

**Definição 1.2.8** Uma aplicação  $\phi$  é chamada holomorfa se e somente se  $J \circ d\phi = d\phi \circ J$ .

**Proposição 1.2.9**  $\phi$  é holomorfa se e somente se  $\bar{\partial}\phi = 0$  (ou seja, satisfaz as equações de Cauchy-Riemann)

**Demonstração:**

Supondo primeiro que  $\phi$ , é holomorfa, logo  $z \in T'M$ , isto é,  $z = x - \sqrt{-1}Jx$  como  $x \in TM$ , obtemos  $d^{\mathbb{C}}\phi(x - \sqrt{-1}Jx) = d\phi(x) - \sqrt{-1}d\phi(Jx) = d\phi(x) - \sqrt{-1}Jd\phi(x)$  donde  $d^{\mathbb{C}}\phi|_{T'_{\phi(x)}M} \subset T'_{\phi(x)}N$ , como  $d^{\mathbb{C}}\phi|_{T'_{\phi(x)}M} = \partial\phi + \bar{\partial}\phi$ . Assim  $\bar{\partial}\phi = 0$  e portanto  $\bar{\partial}\phi = 0$ .

Inversamente, assumimos que  $\bar{\partial}\phi = 0$ , logo para  $z \in T'M$  resulta que  $d\phi^{\mathbb{C}}(x - \sqrt{-1}Jx) = d\phi(x) - \sqrt{-1}d\phi(Jx) \in T'N$ . Assim  $d\phi(x) - \sqrt{-1}d\phi(Jx) = \alpha - \sqrt{-1}J\alpha$ , para  $\alpha \in T_xN$  donde  $d\phi(x) = \alpha$  e  $d\phi(Jx) = J(\alpha)$ . Portanto,  $d\phi(Jx) = Jd\phi(x)$ . ■

**Definição 1.2.10** Usando as estruturas quase hermitianas de  $M$  e  $N$ , definimos a densidade de energia parcial de  $\phi$ , como os seguintes quadrados de normas complexas,  $e'$  e  $e''$ :  $C(M, N) \rightarrow \mathbb{C}$

$$e'(\phi) = \|\partial\phi\|^2$$

$$e''(\phi) = \|\bar{\partial}\phi\|^2.$$

**Proposição 1.2.11**

$$e'(\phi) = g^{i\bar{j}} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_i^\alpha \overline{\phi_j^\beta}$$

$$e''(\phi) = g^{i\bar{j}} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_j^\alpha \overline{\phi_i^\beta}$$

onde  $\phi_i^\alpha$  (respectivamente  $\phi_j^\alpha$ ) é a matriz que representa  $\partial\phi$  (respectivamente  $\bar{\partial}\phi$ ) numa base local de campos coordenados.

**Demonstração:**

Sejam  $\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^m}\}$  base complexa de campos coordenados para  $T'M$  e  $\{\frac{\partial}{\partial w^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial w^n}\}$  base complexa de campos coordenados para  $T'N$ .

$$\partial\phi : T'M \rightarrow T'N$$

$$\frac{\partial}{\partial z^k} \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z^k} = \phi_k = \sum_{\alpha=1}^n \phi_k^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$$

Mas  $\partial \phi = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi}{\partial z^k} = \sum_{\alpha,k} \phi_k^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$

$$\begin{aligned} e'(\phi) &= \|\partial \phi\|^2 = \langle \partial \phi, \overline{\partial \phi} \rangle_h \\ &= \left\langle \sum_{k,\alpha} \phi_k^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \sum_{L,\beta} \overline{\phi_L^\beta} \frac{\partial}{\partial w^\beta} \right\rangle_h g^{k\bar{L}} \\ &= \sum_{k,L,\alpha,\beta} g^{k\bar{L}} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_k^\alpha \overline{\phi_L^\beta}. \end{aligned}$$

Seja  $\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^m}\}$  base complexa de campos coordenados para  $T''M$ .

$$\bar{\partial} \phi : T''M \longrightarrow T'N$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \longrightarrow \frac{\bar{\partial} \phi}{\partial \bar{z}^k} = \phi_{\bar{k}} = \sum_{\alpha=1}^n \phi_{\bar{k}}^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$$

Mas  $\bar{\partial} \phi = \sum_{k,\alpha} \phi_{\bar{k}}^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}$  e  $\overline{\bar{\partial} \phi} = \partial \bar{\phi} = \sum_{k,\alpha} \overline{\phi_{\bar{k}}^\alpha} \frac{\bar{\partial}}{\partial w^\alpha}$

$$\begin{aligned} e'' &= \|\bar{\partial} \phi\|^2 = \langle \bar{\partial} \phi, \partial \bar{\phi} \rangle_h \\ &= \left\langle \sum_{k,\alpha} \phi_{\bar{k}}^\alpha \frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \sum_{L,\beta} \overline{\phi_L^\beta} \frac{\bar{\partial}}{\partial w^\beta} \right\rangle_h g^{k\bar{L}} \\ &= \sum_{k,L,\alpha,\beta} g^{k\bar{L}} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_{\bar{k}}^\alpha \overline{\phi_L^\beta}. \end{aligned}$$

Temos:  $e(\phi) = e'(\phi) + e''(\phi)$ , pois :

$$\begin{aligned} e'(\phi) + e''(\phi) &= \sum_{k,L,\alpha,\beta} (g^{k\bar{L}} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_k^\alpha \overline{\phi_L^\beta} + g^{k\bar{L}} h_{\alpha\bar{\beta}} \phi_{\bar{k}}^\alpha \overline{\phi_L^\beta}) \\ &= \sum_{k,L,\alpha,\beta} g^{k\bar{L}} h_{\alpha\bar{\beta}} (\phi_k^\alpha \overline{\phi_L^\beta} + \phi_{\bar{k}}^\alpha \overline{\phi_L^\beta}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{\alpha,\bar{\beta}} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial w^\beta}, \frac{\bar{\partial}}{\partial w^\beta} \right\rangle_h = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + i \frac{\partial}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta} - i \frac{\partial}{\partial v^\beta} \right\rangle \\ &= h_{\alpha\beta} - i \left\langle \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial v^\beta} \right\rangle + i \left\langle \frac{\partial}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right\rangle + h_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Assim temos:  $\sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} = 2 \sum_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha\beta} (i \langle \frac{\partial}{\partial v^\alpha}, \frac{\partial}{\partial u^\beta} \rangle - i \langle \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \frac{\partial}{\partial v^\beta} \rangle)$

Logo:  $h_{\alpha,\bar{\beta}} = 2 \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta}$

Analogamente,  $\sum_{k,L} g^{k\bar{L}} = 2 \sum_{k,L} g^{kL}$

$$\phi_k^\alpha \bar{\phi}_L^\beta = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} + i \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y^k} - i \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial y^L} + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial y^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y^k}.$$

$$\phi_k^\alpha \bar{\phi}_L^\beta = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} + i \frac{\partial \phi^\beta}{\partial y^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} - i \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y^k} \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^L} + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial y^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y^k}$$

$$\phi_k^\alpha \bar{\phi}_L^\beta + \phi_k^\alpha \bar{\phi}_L^\beta = 2 \left( \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^k} + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial y^L} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial y^k} \right) = 2 \phi_k^\alpha \phi_L^\beta.$$

Logo

$$e'(\phi) + e''(\phi) = 2 \sum_{k,L,\alpha,\beta} g^{kL} h_{\alpha\beta} \phi_k^\alpha \phi_L^\beta$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \|d\phi\|^2 &= \sum_{k,L=1}^{2m} \sum_{\alpha,\beta=1}^{2n} g^{kL} h_{\alpha\beta} \phi_k^\alpha \phi_L^\beta = 2 \sum_{k,L=1}^m 2 \sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{kL} h_{\alpha\beta} \phi_k^\alpha \phi_L^\beta \\ &= 4 \sum_{k,L=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{kL} h_{\alpha\beta} \phi_k^\alpha \phi_L^\beta \end{aligned}$$

Então:

$$e'(\phi) + e''(\phi) = \frac{1}{2} \|d\phi\|^2 = e(\phi) \quad \blacksquare$$

**Definição 1.2.12** Considerando  $M$  uma variedade compacta definimos:

$$E'(\phi) = \int_M e'(\phi) v_g \text{ e } E''(\phi) = \int_M e''(\phi) v_g$$

então obtemos  $E(\phi) = E'(\phi) + E''(\phi)$ .

Observe que  $\phi$  é holomorfa se e somente se  $E''(\phi) = 0$  e antiholomorfa se e somente se  $E'(\phi) = 0$ .

**Definição 1.2.13** Definimos as aplicações  $k(\phi) = e'(\phi) - e''(\phi)$  e  $K(\phi) = E'(\phi) - E''(\phi)$ .

Demonstraremos agora o teorema de Lichnerowicz, que é muito importante no estudo das aplicações harmônicas. Vamos precisar de dois lemas.

**Lema 1.2.14** *Se  $\Omega^M$  e  $\Omega^N$  representam as formas de Kähler em  $M$  e  $N$ , então  $k(\phi) = \langle \Omega^M, \phi^* \Omega^N \rangle$ .*

**Demonstração:**

Sejam  $\{z_1, \dots, z_m\}$  uma base de campos coordenados para  $T^*M$  e  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$  a base dual de campos coordenados para  $T^*M$ .

$$\Omega^M(\bar{z}_k, z_j) = g(\bar{z}_k, z_j) = ig_{j\bar{k}} \Rightarrow -\Omega^M(z_j, \bar{z}_k) = ig_{j\bar{k}} \Rightarrow (\Omega^M)_{j\bar{k}} = -ig_{j\bar{k}}.$$

Portanto  $(\Omega^M)^{j\bar{k}} = ig^{j\bar{k}}$ , analogamente vemos que  $\Omega^N_{\alpha\bar{\beta}} = -ih_{\alpha\bar{\beta}}$

$$\Omega^N = \sum_{\alpha, \beta} (\Omega^N)_{\alpha\beta} \varepsilon^\alpha \wedge \bar{\varepsilon}^\beta$$

$$\phi^* \Omega^N = \Omega^N(\phi_*, \phi_*)$$

$$\varepsilon^\alpha \wedge \bar{\varepsilon}^\beta \left( \sum_{j, \alpha} \phi_j^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \sum_{k, \beta} \phi_k^\beta \frac{\partial}{\partial u^\beta} \right) = \sum_{j, \alpha, k, \beta} (\phi_j^\alpha \phi_k^{\bar{\beta}} - \phi_k^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}})$$

Logo

$$\phi^* \Omega^N = \sum_{j, \alpha, k, \beta} (\Omega^N)_{\alpha\beta} (\phi_j^\alpha \phi_k^{\bar{\beta}} - \phi_k^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}})$$

$$\langle \Omega^M, \phi^* \Omega^N \rangle = \sum_{j, \alpha, k, \beta} (\Omega^M)^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_k^{\bar{\beta}} (\Omega^N)_{\alpha\beta} - \sum_{j, \alpha, k, \beta} (\Omega^M)^{j\bar{k}} \phi_k^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} (\Omega^N)_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_{j, \alpha, k, \beta} ig^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_k^{\bar{\beta}} (-ih_{\alpha\bar{\beta}}) - \sum_{j, \alpha, k, \beta} ig^{j\bar{k}} \phi_k^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} (-ih_{\alpha\bar{\beta}})$$

$$= \sum_{j, \alpha, k, \beta} g^{j\bar{k}} \phi_j^\alpha \phi_k^{\bar{\beta}} (h_{\alpha\bar{\beta}}) - \sum_{j, \alpha, k, \beta} g^{j\bar{k}} \phi_k^\alpha \phi_j^{\bar{\beta}} (h_{\alpha\bar{\beta}})$$

Portanto

$$\langle \Omega^M, \phi^* \Omega^N \rangle = e'(\phi) + e''(\phi) = k(\phi) \quad \blacksquare$$

**Lema 1.2.15** Seja  $\phi_t : M \rightarrow N$  uma família de aplicações diferenciáveis  $M$  e  $N$  parametrizada pelo número real  $t$  e seja  $\Omega$  uma dois forma fechada em  $N$ . Então,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\Omega) = d\left(\phi_t^*i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right),$$

onde  $i(x)\Omega$  denota o produto interior do vetor  $x$ , com a 2-forma  $\Omega$ .

**Demonstração:**

Como  $d\Omega = 0$  em  $M$  segue que  $d(\phi_t^*\Omega) = \phi_t^*(d\Omega) = \phi_t^*(0) = 0$  para todo  $t$ . Considere  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  definida por  $\Phi(t, x) = \phi_t(x)$ . Denotando por  $\underline{d}$  a diferencial exterior em  $\mathbb{R} \times M$  obtemos  $\underline{d}(\phi_t^*\Omega) = \Phi^*(d\Omega) = 0$ .

Agora,

$$\Phi^*(d\Omega) = \phi_t^*(\Omega) + \underline{dt} \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right)$$

pois para todo  $X, Y \in C(TM)$ , temos:

$$\begin{aligned}\Phi^*\Omega(X, Y) &= \Omega(d\Phi.X, d\Phi.Y) \\ &= \Omega(d\phi_t.X, d\phi_t.Y) \\ &= \phi_t^*(\Omega(X, Y))\end{aligned}$$

$$e(\underline{dt})(X) = \frac{\partial X}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned}\Phi^*\Omega\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) &= \Omega\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}, d\Phi.X\right) = i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega(d\phi_t.X) \\ &= \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right)(X) \\ &= \left[\underline{dt} \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right)\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\left[\underline{dt} \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) &= \frac{\partial t}{\partial t} \cdot \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right)(X) \\ &\quad - \underline{dt}(X) \wedge \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}, X\right) \\ &= \phi_t^*\left(i\left(\frac{\partial\phi_t}{\partial t}\right)\Omega\right)(X)\end{aligned}$$

Finalmente temos:

$$\begin{aligned}
 0 = \underline{d}(\Phi^*\Omega) &= \underline{d}(\phi_t^*\Omega) + \underline{d}t(X) \wedge \phi_t^* \left( i \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \Omega \right) \\
 &= \underline{d}(\phi_t^*\Omega) + \underline{d}^2t(X) \wedge \phi_t^* \left( i \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \Omega \right) - \underline{d}t \wedge d(\phi_t^* \left( i \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \Omega \right)) \\
 &= \bar{d}t \wedge \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\Omega) + \underline{d}(\phi_t^*\Omega) - \underline{d}t \wedge d(\phi_t^* \left( i \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \Omega \right)) \\
 &= \underline{d}t \wedge \left( \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\Omega) \right) - \underline{d} \left( \phi_t^* \left( i \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \Omega \right) \right).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\Omega) = \underline{d} \left( \phi_t^* \left( i \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) \Omega \right) \right).$$

■

**Teorema 1.2.16** (Lichnerowicz) *Se  $M$  e  $N$  são variedades quase Kähler, então  $K(\phi)$  é um invariante homotópico, isto é,  $K(\phi)$  é constante ao longo das componentes conexas de  $C(M, N)$ .*

**Demonstração:**

Denotemos  $*$  pelo operador de Hodge sob formas então temos:

$$k(\phi)v_g = \langle \Omega^M, \phi^*\Omega^N \rangle v_g = \Omega^M \wedge *\phi^*\Omega^N = \phi^*\Omega^N \wedge *\Omega^M$$

pois por definição:  $\sigma \wedge *\rho = \langle \sigma, \rho \rangle$ .

Seja  $\phi_0$  e  $\phi_1$  duas aplicações de  $M$  em  $N$  homotópicas, pela família  $\phi_t, t \in [0, 1]$ .

Uma vez que  $\Omega$  é fechada, o teorema fundamental do cálculo e o lema 1.2.13 dá:

$$\begin{aligned}
 \phi_1^*\Omega^N - \phi_0^*\Omega^N &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}(\phi_t^*\Omega) dt \\
 &= d \int_0^1 \phi_t^* i \left( \frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right) dt \\
 &= d\alpha
 \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é uma 1-forma em  $M$ .

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
 (k(\phi_1) - k(\phi_0))v_g &= (\langle \Omega^M, \phi_1^* \Omega^N \rangle - \langle \Omega^M, \phi_0^* \Omega^N \rangle)v_g \\
 &= (\langle \Omega^M, \phi_1^* \Omega^N - \phi_0^* \Omega^N \rangle)v_g \\
 &= \langle \Omega^M, (\phi_1^* - \phi_0^*) \Omega^N \rangle v_g \\
 &= d\alpha \wedge * \Omega^M \\
 &= d(\alpha \wedge * \Omega^M)
 \end{aligned}$$

pois  $d(\alpha \wedge * \Omega^M) = d\alpha \wedge * \Omega^M - (\alpha \wedge d(* \Omega^M))$  e  $d(* \Omega^M) = d\left(\frac{\Omega^{m-1}}{(m-1)!}\right) = 0$  já que  $d\Omega = 0$  onde  $m = \dim M$ . Portanto,

$$K(\phi_1) - K(\phi_0) = \int_M (k(\phi_1) - k(\phi_0))v_g = \int_M d(\alpha \wedge * \Omega^M)v_g = 0$$

pelo teorema de Stokes pois  $M^m$  é uma variedade compacta e orientável. ■

**Corolário 1.2.17** (i) *Toda aplicação holomorfa ou antiholomorfa entre variedades quase-Kähler é uma aplicação de energia mínima na classe de homotopia a que pertence.*

ii) *Segundo as mesmas hipóteses do teorema 1.2.16 temos que  $\phi$  é harmônica se e só se  $\phi$  é um ponto crítico de  $E'$  e se e só se é ponto crítico de  $E''$ .*

# Capítulo 2

## Toros Equiharmônicos em Variedades Bandeira

### 2.1 Estruturas-f em variedades bandeira complexas

Nesta seção estabelecemos uma correspondência um a um entre estruturas-f invariantes e matrizes anti-simétricas com valores  $\{-1, 0, 1\}$ .

**Definição 2.1.1** *Uma variedade bandeira é um espaço homogêneo  $G/T$  onde  $G$  é um grupo de Lie compacto e  $T$  é qualquer toro maximal. Denotamos por  $F(N)$  a variedade bandeira com  $G = U(N)$  e  $H = \underbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}_{N\text{-vezes}}$ .*

Considere a variedade bandeira complexa

$$F(r_1, \dots, r_N; N) = \frac{U(N)}{U(r_1) \times \dots \times U(r_N)}$$

onde  $r_1 + \dots + r_N = N$ .

**Proposição 2.1.2**  *$F(N)$  é um espaço homogêneo completamente redutível com redução,*

$$u(N) = [u(r_1) + \dots + u(r_N)] \oplus \left[ \bigoplus_{i < j} m_{ij} \right] \quad (2.1)$$

onde  $m_{ij} = \{A = (a_{kl}) \in u(N) \mid a_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j) \text{ e } (j, i)\}$ .

**Demonstração:**

Sabemos que  $U(N) = \{A \in Gl(N, \mathbb{C}); AA^* = I\}$  e a sua álgebra de Lie é  $u(N) = \{A \in gl(N, \mathbb{C}); A + A^* = 0\}$ . Seja  $H = U(1) \times \dots \times U(1)$ . Temos que

$$u(N) = \left\{ A = \begin{pmatrix} ia_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ -\bar{\alpha}_{12} & ia_{22} & \dots & \alpha_{2N} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -\bar{\alpha}_{1n} & -\bar{\alpha}_{2n} & \dots & ia_{NN} \end{pmatrix} \in gl(N, \mathbb{C}); a_{jj} \in \mathbb{R} \right\}$$

$h = u(1) + \dots + u(1) \subset u(N)$ , onde

$$u(1) = \left\{ \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in u(N); a_{11} \in \mathbb{R} \right\}$$

então,

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ia_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & ia_{NN} \end{pmatrix} \in u(N); a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow u(N) = \left\{ \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ia_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & ia_{NN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ -\bar{\alpha}_{12} & 0 & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\alpha}_{1N} & -\bar{\alpha}_{2N} & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Portanto,

$$u(N) = h \oplus m \text{ onde } m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1N} \\ -\bar{\alpha}_{12} & 0 & \dots & \alpha_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\bar{\alpha}_{1N} & -\bar{\alpha}_{2N} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i \neq j \right\}.$$

$$\Rightarrow m = \bigoplus_{i < j} m_{ij}.$$

Agora é fácil ver que cada  $m_{ij}$  é  $H$ -invariante, isto é,  $[h, m_{ij}] \subset m_{ij}$  e  $m_{ij}$  é irredutível. ■

**Exemplo 2.1.3** Para  $N = 3$ ,  $u_3 = \{A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}) | \bar{A} + A^t = 0\}$  é a álgebra de Lie de  $U(3)$ .

$$F(1, 1, 1, 3) = \frac{U(3)}{U(1) \times U(1) \times U(1)}$$

$$u(3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} ia_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\bar{\alpha}_{12} & ia_{22} & \alpha_{23} \\ -\bar{\alpha}_{13} & -\bar{\alpha}_{23} & ia_{33} \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}), a_{jj} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Como } h = u(1) + u(1) + u(1) \text{ então } h = \left\{ \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ia_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ia_{33} \end{pmatrix} \in u(3), a_{jj} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$h \oplus m = \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ia_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ia_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\bar{\alpha}_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ -\bar{\alpha}_{13} & -\bar{\alpha}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{onde } m = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\bar{\alpha}_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ -\bar{\alpha}_{13} & -\bar{\alpha}_{23} & 0 \end{pmatrix} \in u(3) \right\} \implies m = m_{12} \oplus m_{13} \oplus m_{23} \text{ onde}$$

$$m_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 \\ -\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in u(3) \right\}$$

$$m_{13} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\alpha}_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in u(3) \right\}$$

$$m_{23} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & -\bar{\alpha}_{23} & 0 \end{pmatrix} \in u(3) \right\}$$

Cada  $m_{ij}, i < j$  é  $H$ -invariante, isto é  $[h, m_{ij}] \subset m_{ij}$  e  $m_{ij}$  é irredutível.

De fato, dados  $A \in \mathfrak{h}$  e  $B \in m_{12}$ , temos:

$$\begin{aligned}
[A, B] &= \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ia_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 \\ -\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 \\ -\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ia_{33} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ia_{11}\alpha_{12} & 0 \\ -ia_{22}\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & ia_{22}\alpha_{12} & 0 \\ -ia_{11}\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & ia_{11}\alpha_{12} - ia_{22}\alpha_{12} & 0 \\ -ia_{22}\bar{\alpha}_{12} + ia_{11}\bar{\alpha}_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\in m_{12}$  pois

$$\begin{aligned}
-\overline{(-ia_{11}\alpha_{12} + ia_{22}\alpha_{12})} &= -(-ia_{11}\bar{\alpha}_{12} + ia_{22}\bar{\alpha}_{12}) \\
&= -ia_{22}\bar{\alpha}_{12} + ia_{11}\bar{\alpha}_{12}
\end{aligned}$$

Analogamente para  $m_{13}$  e  $m_{23}$ . Mas cada  $m_{ij}$  é irredutível, pois os únicos subespaços de  $m_{ij}$ , invariantes por  $H$ , são  $\{0\}$  e  $m_{ij}$ .

Vamos considerar a versão complexificada de  $u(N)$  temos:

$$u(N)^{\mathbb{C}} = u(N) + \sqrt{-1}u(N) \cong \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$$

De fato, sabemos que  $u(N)^{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ , provemos então que  $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) \subseteq u(N, \mathbb{C})$ . Se  $A \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  tomamos  $A = \frac{A - A^*}{2} + \sqrt{-1} \frac{A + A^*}{2\sqrt{-1}}$ , onde

$$\frac{A - A^*}{2} + \left(\frac{A - A^*}{2}\right)^* = \frac{A - A^*}{2} + \frac{A^* - A}{2} = 0$$

$$\frac{A + A^*}{2\sqrt{-1}} + \left(\frac{A + A^*}{2\sqrt{-1}}\right)^* = \frac{A + A^*}{2\sqrt{-1}} + \frac{A^* + A}{-2\sqrt{-1}} = 0$$

Então,  $\frac{A - A^*}{2}$  e  $\frac{A + A^*}{2\sqrt{-1}} \in u(N)$ . Portanto,  $A \in u(N)^{\mathbb{C}}$  e  $m_{ij}^{\mathbb{C}} = m_{ij} + \sqrt{-1}m_{ij} \subset u(N)^{\mathbb{C}}$ .

$$m_{ij} = \{A = (a_{kl}) \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}); a_{kl} = 0, \text{ se } (k, l) \neq (i, j) \text{ e } (j, i)\} = E_{ij} \oplus E_{ij}^*$$

onde

$$E_{ij} = \{A = (a_{kl}) \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}); a_{kl} = 0, \text{ se } (k, l) \neq (i, j)\}.$$

Observe que  $E_{ij}^* = E_{ji}$  e  $E_{ij}$  é H-invariante e irredutível.

$[\oplus m_{ij}]^{\mathbb{C}} = \oplus_{i < j} m_{ij}^{\mathbb{C}} = \oplus_{i < j} (E_{ij} \oplus E_{ij}^*) = \oplus_{i < j} (E_{ij} \oplus E_{ji}) = \oplus_{i \neq j} E_{ij}$ , temos então:

**Proposição 2.1.4**  $A = (A_{kl}) \in E_{ij}$  temos  $A = (A_{kl}^1) + \sqrt{-1}(A_{kl}^2)$  onde

$$(A_{kl}^1) = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{2}, & \text{se } (i, j) = (k, l) \\ \frac{-\overline{A_{ij}}}{2}, & \text{se } (i, j) = (k, l) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (A_{kl}^2) = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{2\sqrt{-1}}, & \text{se } (i, j) = (k, l) \\ \frac{-\overline{A_{ij}}}{2\sqrt{-1}}, & \text{se } (i, j) = (k, l) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

**Demonstração:** Segue das definições acima. ■

**Exemplo 2.1.5** Para  $N = 3$  temos  $u(3)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}); m_{12}^{\mathbb{C}} = m_{12} + \sqrt{-1}m_{12}$ . Sejam  $A, B \in m_{12}$ , então

$$A + \sqrt{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 \\ -\overline{\alpha_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\beta_{12} & 0 \\ -i\overline{\beta_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$m_{12} = \{A = (a_{kl}) \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}); a_{kl} = 0, \text{ se } (k, l) \neq (1, 2) \text{ e } (2, 1)\} = E_{12} \oplus E_{21}$$

onde

$$E_{12} = \{A = (a_{kl}) \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}); a_{kl} = 0, \text{ se } (k, l) \neq (1, 2)\}.$$

$$E_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; c_{12} \in \mathbb{C} \right\} \text{ e } E_{21} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; c_{21} \in \mathbb{C} \right\}$$

$E_{12}$  é H-invariante e irredutível.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ia_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ia_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ia_{11} & 0 & 0 \\ 0 & ia_{22} & 0 \\ 0 & 0 & ia_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ia_{22}c_{12} - ia_{11}c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Mas } \begin{pmatrix} 0 & ia_{22}c_{12} - ia_{11}c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in E_{12}$$

Analogamente para  $m_{13}^{\mathbb{C}}$  e  $m_{23}^{\mathbb{C}}$ .

**Definição 2.1.6** Uma estrutura-f invariante sobre  $F = F(N)$  é uma seção  $f$  de  $END(T(F(N)))$ , tal que  $f^3 + f = 0$ .

**Definição 2.1.7** Uma  $\varepsilon$ -matriz, denotada por  $(\epsilon_{ij})$  é uma matriz anti-simétrica com valores  $\{-1, 0, 1\}$ .

$$\text{Exemplo 2.1.8 } (\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Uma estrutura-f sobre  $F(N)$  pode ser indentificada com um endomorfismo  $H$ -equivariante  $f$  de  $m = \bigoplus_{i < j} m_{ij}$ , tal que  $f^3 + f = 0$ , onde  $H = \underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{N\text{-vezes}}$ .

Usando o lema de Schur ([1], pag 15), todas as estruturas-f  $U(N)$ -invariantes, podem ser construídas como segue :

$$f : m^{\mathbb{C}} \longrightarrow m^{\mathbb{C}}; f^3 + f = 0$$

Se  $x \in m^{\mathbb{C}}$  é um autovetor associado a um autovalor  $\lambda$  de  $f$ , temos

$$f(x) = \lambda x \Rightarrow f^2(x) = \lambda f(x) \Rightarrow f^3(x) = \lambda^2 f(x) \Rightarrow (\lambda^2 + 1)f(x) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 1)x = 0$$

como  $x \neq 0$  então  $\lambda(\lambda^2 + 1)x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$  ou  $\lambda = \pm\sqrt{-1}$ . Seja  $(\epsilon_{ij})$  uma  $\varepsilon$ -matriz então definimos:

$$\begin{aligned}
m^{1,0} &= [\sqrt{-1} \text{ auto-espaço de } f] = \{x \in \bigoplus_{i \neq j} E_{ij}; f(x) = \sqrt{-1}x\} = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} E_{ij} \\
m^{0,1} &= [-\sqrt{-1} \text{ auto-espaço de } f] = \{x \in \bigoplus_{i \neq j} E_{ij}; f(x) = -\sqrt{-1}x\} = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} E_{ij} \\
m^{0,0} &= [0 \text{ auto-espaço de } f] = \{x \in \bigoplus_{i \neq j} E_{ij}; f(x) = 0\} = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=0} E_{ij} \\
\text{E conseqüentemente } m^{\mathbb{C}} &= m^{1,0} \oplus m^{0,1} \oplus m^{0,0}
\end{aligned}$$

**Lema 2.1.9** (Schur) *Seja  $m$  espaço completamente redutível sobre um corpo  $K$  algebricamente fechado cujos somandos irredutíveis são distintos. Seja  $\phi$  um endomorfismo  $H$ -equivariante de  $m$ , com autovalores em  $K$ . Então,*

$$\phi = \sum_{\alpha \in A} \phi_{\alpha} P_{\alpha}, \phi_{\alpha} \in K, \forall \alpha \in A,$$

onde  $P_{\alpha} : m \rightarrow m_{\alpha}$  é a projeção sobre o somando irredutível  $m_{\alpha}$  de  $m$ .

**Exemplo 2.1.10** Para  $u(3)^{\mathbb{C}}$  temos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & ia_{12} & ia_{13} \\ -ia_{21} & 0 & ia_{23} \\ -ia_{31} & -ia_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

logo  $f(A) = if_{12}(A) + if_{13}(A) - if_{21}(A) + if_{23}(A) - if_{31}(A) - if_{32}(A)$  tal que

$$f_{ij} : \bigoplus_{i \neq j} E_{ij} \rightarrow E_{ij}$$

$$\begin{aligned}
m^{1,0} &= E_{12} \oplus E_{13} \oplus E_{23} = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} E_{ij} \\
m^{0,1} &= E_{21} \oplus E_{31} \oplus E_{32} = \bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} E_{ij} \\
m^{0,0} &= \{0\}
\end{aligned}$$

Determinando os auto-espaços desta maneira, podemos definir um endomorfismo  $H$ -equivariante  $f : \bigoplus_{i \neq j} E_{ij} \rightarrow \bigoplus_{i \neq j} E_{ij}$  que é visto como uma extensão  $\mathbb{C}$ -linear de um endomorfismo  $H$ -equivariante de  $\bigoplus_{i < j} m_{ij}$ , pois  $\bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} E_{ij}$  e  $\bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} E_{ij}$  são conjugados e  $[\bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} E_{ij}] \cap [\bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} E_{ij}] = \{0\}$ .

**Exemplo 2.1.11** Tomando a  $\varepsilon$ -matriz  $(\epsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  temos:

$$\begin{aligned}
m^{1,0} &= E_{12} \oplus E_{13} \oplus E_{23} \\
m^{0,1} &= E_{21} \oplus E_{31} \oplus E_{32}
\end{aligned}$$

$$m^{0,0} = \{0\}.$$

Portanto  $m = m^{1,0} \oplus m^{0,1} \oplus m^{0,0}$ . Defina  $f : m \rightarrow m$ , como segue

$$f = i(f_{12} \oplus f_{13} \oplus f_{23}) - (f_{21} \oplus f_{31} \oplus f_{32})$$

onde  $f_{ij} : m \rightarrow E_{ij}$  é a projeção sobre  $E_{ij}$ .

**Definição 2.1.12** A dimensão complexa do auto-espço de  $f$  associado ao autovalor  $\sqrt{-1}$  é chamada o posto de  $f$ .

Suponha que uma estrutura-f  $f$  é definida por  $\epsilon(f) = (F_{ij})$ . Então,

$$\begin{aligned} \text{posto}(f) &= \dim_{\mathbb{C}} m^{1,0} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \bigoplus_{f_{ij}=1} E_{ij} \\ &= \sum_{f_{ij}=1} \dim_{\mathbb{C}} E_{ij} \\ &= \sum_{f_{ij}=1} r_i r_j \end{aligned}$$

pois  $E_{ij} = \{A = (a_{kl}) \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}); a_{kl} = 0 \text{ se } (k, l) \neq (i, j), \text{ onde } a_{kl} \in \mathfrak{gl}(r_k \times r_l; \mathbb{C})\}$ .  
Então  $\dim F(r_1, \dots, r_N; N) = N^2 - r_1^2 - \dots - r_N^2$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} TF(r_1, \dots, r_N; N) = m &= \bigoplus_{i \neq j} E_{ij} \\ &= \left( \bigoplus_{\epsilon_{ij}=1} E_{ij} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\epsilon_{ij}=-1} E_{ij} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\epsilon_{ij}=0} E_{ij} \right) \end{aligned}$$

Portanto,  $\dim F(r_1, \dots, r_N; N) = 2\text{posto}(f) + \dim_{\mathbb{C}} m^{0,0}$

Se  $\dim F(r_1, \dots, r_N; N) = 2\text{posto}(f)$ , temos que  $m^{0,0} = \{0\}$  e que  $f$  é uma estrutura quase complexa vejamos isto:

$$f : m^{1,0} \oplus m^{0,1} \oplus m^{0,0} \rightarrow m^{1,0} \oplus m^{0,1} \oplus m^{0,0}$$

$$x \in m^{0,1} \Rightarrow f(x) = -ix \Rightarrow f^2(x) = -if(x) \Rightarrow f^2(x) = -i(-ix) \Rightarrow f^2(x) = -x$$

$$\text{Se } x \in m^{1,0} \Rightarrow f(x) = ix \Rightarrow f^2(x) = if(x) \Rightarrow f^2(x) = i(ix) \Rightarrow f^2(x) = -x$$

$$\text{Se } x \in m^{0,0} \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0 \text{ pois } m^{0,0} = \text{Ker } f = \{0\}$$

Logo,  $\forall x \in m^{\mathbb{C}}$ , temos que  $x = x^- + x^+$ , onde  $x^- \in m^{0,1}$  e  $x^+ \in m^{1,0}$  e, como  $f$  é  $\mathbb{C}$ -linear, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x^-) + f(x^+) \\ &= -ix^- + ix^+ \\ &= -i(x^- - x^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^2(x) &= -i(f(x^-) - f(x^+)) \\ &= -i(-ix^- - ix^+) \\ &= -x^- - x^+ \\ &= -(x^- + x^+) = -x \end{aligned}$$

Assim  $f^2 = -I$  em  $m^{\mathbb{C}}$ , isto é,  $f$  é uma estrutura quase complexa em  $m^{\mathbb{C}}$ . Reciprocamente, se  $f : m^{\mathbb{C}} \rightarrow m^{\mathbb{C}}$  é uma estrutura quase complexa, temos que  $f^2 = -I \Rightarrow f \circ f = -I \Rightarrow f \circ (-f) = I \Rightarrow f$  é inversível, Logo  $\ker f = \{0\} \Rightarrow m^{0,0} = \{0\}$ . Então  $\text{posto}(f) = \frac{1}{2} \sum_{f_{ij}=0} r_i r_j$ . Isto nos leva ao:

**Teorema 2.1.13** *Existe uma correspondência um a um entre as estruturas-f  $U(N)$ -invariantes sobre  $F(r_1, \dots, r_N; N)$  e  $\varepsilon$ -matrizes  $\varepsilon(f) = (f_{ij})$ , tais que*

$$\text{posto}(f) = \sum_{f_{ij}=1} r_i r_j = \sum_{f_{ij}=-1} r_i r_j = \frac{1}{2} \sum_{f_{ij} \neq 0} r_i r_j$$

e  $f$  é quase complexa se e só se  $f_{ij} \neq 0, \forall i \neq j$ .

**Corolário 2.1.14** *Existem  $3^{\binom{N}{2}}$  estruturas-f  $U(N)$ -invariante sobre uma variedade bandeira complexa  $F(r_1, \dots, r_N; N)$ , obtida pela escolha dos  $\varepsilon_{ij}$ , para cada  $(i < j)$ .*

**Demonstração:**

Dada uma matriz  $A_{N \times N}$ , temos que acima (ou abaixo) da diagonal principal existem  $\binom{N}{2}$  elementos pois:  $\binom{N}{2} + \binom{N}{2} = 2\binom{N}{2} = 2 \frac{N!}{2!(N-1)!} = N^2 - N = \{\text{número de elementos da matriz}\} - \{\text{número de elementos da diagonal principal}\}$ .

Como cada  $\varepsilon$ -matriz é uma matriz anti-simétrica, para determinarmos uma  $\varepsilon$ -matriz, basta escolhermos os  $\binom{N}{2}$  elementos que aparecem acima da diagonal principal, isto é, basta escolher os  $\varepsilon_{ij}$  para  $i < j$ . Mas  $\varepsilon_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ , logo temos três possibilidades de escolha de um  $\varepsilon_{ij}$  para cada uma das  $\binom{N}{2}$  entradas da matriz. Então temos  $3^{\binom{N}{2}}$   $\varepsilon$ -matriz e conseqüentemente, temos  $3^{\binom{N}{2}}$  estruturas-f  $U(N)$ -invariantes. ■

## 2.2 $\varepsilon$ -matriz e curvas f-holomorfas

Nesta seção vamos considerar o conceito de f-holomorphicidade para uma aplicação diferenciável de uma superfície Riemanniana em uma variedade bandeira complexa, em termos de  $\varepsilon$ -matriz.

Seja  $M$  uma superfície Riemanniana, vamos considerar o fibrado vetorial trivial  $\underline{\mathbb{C}}^N$  sobre  $M$ , isto é,  $\underline{\mathbb{C}}^N = \begin{cases} M^2 \times \mathbb{C}^N & \mathbb{C}^N \\ \downarrow & \downarrow \\ M^2 & x \end{cases}$  cuja fibra  $\mathbb{C}^N$  continua sendo munida

com o produto interno hermitiano canônico.

Considere uma coleção  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq j}$  de subfibrados dois a dois ortogonais de  $\underline{\mathbb{C}}^N$ , com fibras  $\mathbb{C}^{r_i}$ , tais que  $r_1 + \dots + r_N = N$ .

Consequentemente,  $\underline{\mathbb{C}}^N = \bigoplus_{i=1}^N \varepsilon_i$  e temos simplesmente definida uma aplicação  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_N; N)$ , pois cada subfibrado  $(\varepsilon_i)$  de  $\underline{\mathbb{C}}^N$ , determina uma aplicação  $\phi_i : M \rightarrow G(r_i, \mathbb{C}^N)$  em uma grassmanniana complexa de maneira tauológica, isto é, fazemos  $\phi_i(x)$  igual a fibra  $E_i(x)$ , a qual é um  $r_i$ -plano passando pela origem em  $\mathbb{C}^N$ .

$$\begin{aligned} \phi_i : M &\rightarrow G(r_i, \mathbb{C}^N) \\ x &\rightarrow \phi_i(x) = E_i(x) \approx \mathbb{C}^N \end{aligned}$$

Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , seja  $\pi_i : \underline{\mathbb{C}}^N \rightarrow \varepsilon_i$  a projeção ortogonal sobre o subfibrado  $\varepsilon_i$ , isto é,

$$\pi_i : C(\underline{\mathbb{C}}^N) \rightarrow C(\varepsilon_i)$$

onde

$$C(\underline{\mathbb{C}}^N) = \{s : M \rightarrow \mathbb{C}^N; s(x) \in \mathbb{C}^N, \forall x \in M\}$$

e

$$C(\varepsilon_i) = \{s : M \rightarrow E_i; s(x) \in E_i \approx \mathbb{C}^{r_i}, \forall x \in M\}.$$

**Proposição 2.2.1**  $u(N)^{\mathbb{C}} \approx [u(r_1) \oplus \dots \oplus u(r_N)]^{\mathbb{C}} \oplus [\bigoplus_{i \neq j} \text{Hom}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)]$ .

**Demonstração:**

Sabemos que  $\mathbb{C}^N = \bigoplus_{i=1}^N E_i$

$$\begin{aligned} u(N)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}) &= \text{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N) \\ &\approx \overline{\mathbb{C}^N} \otimes \mathbb{C}^N \\ &\approx (\overline{E}_1 \oplus \dots \oplus \overline{E}_n) \otimes (E_1 \oplus \dots \oplus E_n) \\ &= [(\overline{E}_1 \otimes E_1) \oplus \dots \oplus (\overline{E}_n \otimes E_n)] \oplus [\bigoplus_{i \neq j} \overline{E}_i \otimes E_j] \\ &= [u(r_1) + \dots + u(r_N)]^{\mathbb{C}} \oplus [\bigoplus_{i \neq j} \overline{E}_i \otimes E_j] \end{aligned}$$

Pois  $\overline{E}_i \otimes E_i \approx \text{Hom}(\mathbb{C}^{r_i}, \mathbb{C}^{r_i}) = \mathfrak{gl}(r_i, \mathbb{C}) = u(r_i)^{\mathbb{C}}$  e  $\overline{E}_i \otimes E_j \approx \text{Hom}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$  ■

Portanto temos que:

$$\phi^{-1}TF(r_1, \dots, r_N; N)^{\mathbb{C}} \approx \bigoplus_{i \neq j} \text{Hom}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } d\phi : \begin{cases} TM' & \longrightarrow \bigoplus_{i \neq j} \text{Hom}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \\ \frac{\partial}{\partial z} & \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} \in \text{Hom}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \oplus \text{Hom}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \oplus \dots \\ \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} = \sum_{i \neq j} \pi_j \frac{\partial}{\partial z} \pi_i = \sum_{i \neq j} A'_{ij} \end{aligned}$$

**Definição 2.2.2** Uma aplicação  $\phi : M \longrightarrow F(r_1, \dots, r_N; N)$  é dita subordinada a uma  $\varepsilon$ -matriz se  $\varepsilon_{ij} \neq 1$ , e  $i \neq j \Rightarrow A'_{ij} = 0$ .

**Observação 2.2.3**  $J : TM^{\mathbb{C}} \longrightarrow TM^{\mathbb{C}}$  é a estrutura complexa dada por  $z = x + iy$  a coordenada complexa de  $M$ , então  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned} \text{Defina } J \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \text{ e } J \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \text{ então } J \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} - i \left( -\frac{\partial}{\partial x} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} = i \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = i \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

**Proposição 2.2.4** Uma aplicação  $\phi : M \longrightarrow F(r_1, \dots, r_N; N)$  é f-holomorfa relativa a uma estrutura-f invariante  $f$  se e somente se é subordinada a  $\varepsilon(f)$ .

**Demonstração:**

Uma aplicação  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_N; N)$  é f-holomorfa se e somente se  $d\phi \circ J = f \circ d\phi$ , onde  $J$  é a estrutura quase complexa canônica sobre  $M$ .

Mas  $d\phi J = f d\phi \Leftrightarrow d\phi \left( J \frac{\partial}{\partial z} \right) = f d\phi \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \Leftrightarrow d\phi \left( i \frac{\partial}{\partial z} \right) = f \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Leftrightarrow f \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = i \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} \in m^{1,0} \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} \in \bigoplus_{f_{ij}=1} \text{Hom}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ , pois a cada matriz  $A \in E_{ij}$ , está associada a uma única transformação linear  $T : \varepsilon_i \rightarrow \varepsilon_j$ .

Portanto,  $\phi$  é holomorfa com relação a  $f \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial z} \in \bigoplus_{f_{ij}=1} \text{Hom}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} A'_{ij} \in$

$\bigoplus_{f_{ij}=1} \text{Hom}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \Leftrightarrow f_{ij} \neq 1, i \neq j \Leftrightarrow A'_{ij} = 0 \Leftrightarrow \phi$  é subordinada a  $\varepsilon(f)$ . ■

**Definição 2.2.5** Dizemos que uma estrutura-f  $f$  é horizontal se satisfaz  $[f_+, f_-] \subset h$ , onde  $f_{\pm} = \bigoplus_{\varepsilon_{ij}=\pm 1} E_{ij}$  e  $h = u(r_1) + \dots + u(r_N)$ .

Um resultado básico que será utilizado é:

**Teorema 2.2.6** (Black[1]) Se  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_N; N)$  é f-holomorfa com relação a uma f-estrutura horizontal, então  $\phi$  é equiharmônica, isto é,  $\phi$  é harmônica para todas as métricas invariantes.

Como consequência temos:

**Corolário 2.2.7** Suponha que  $\phi : M \rightarrow F(r_1, \dots, r_N; N)$  é subordinada a uma estrutura-f horizontal. Então,  $\Phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N)$  é uma aplicação equiharmônica e cada  $\Pi_i : M^2 \rightarrow G(r_j, \mathbb{C}^N)$  é uma aplicação harmônica, para  $j = 1, \dots, N$ .

Vamos agora aplicar este teorema em conexão com o estudo de Eells-Wood [6].

Seja  $f : M^2 \rightarrow CP^{N-1}$  uma curva holomorfa não-degenerada, isto é,  $\forall p \in M, \exists U \subset M$  e  $\exists u : U \rightarrow \mathbb{C}^N; f(z) = [u_0(z), \dots, u_{N-1}(z)]$ . Um famoso teorema devido a Eells-Wood diz que  $\Phi = \Pi_r = f_{r-1}^\perp \cap f_r$  é uma aplicação harmônica não degenerada em  $CP^{N-1}, \forall r \in \{0, 1, \dots, N\}$  onde  $f_\alpha : \begin{cases} M^2 & \rightarrow G(\alpha + 1, \mathbb{C}^N) \\ z & \rightarrow u(z) \wedge u'(z) \wedge \dots \wedge u^\alpha(z) \end{cases}$  é a  $\alpha$ -ésima curva associada a  $f$  e  $z$  é a coordenada complexa local sobre  $M^2$ . Assim  $\Pi, \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_N$  e  $\Phi = (\Pi, \Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_N)$  são chamadas aplicações isotrópicas de Eells-Wood respectivamente ou referencial de Frenet.

**Observação 2.2.8**  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \left( \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right)$

**Demonstração:**

$$v = v_1 + \sqrt{-1}v_2 \text{ onde } v \in V^{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(v_1 + \sqrt{-1}v_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right) (v_1 + \sqrt{-1}v_2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial v_2}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} - \sqrt{-1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(v_1 + \sqrt{-1}v_2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial v_2}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Então  $\left( \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} - \sqrt{-1} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right]$  ■

Usando o resultado de Black [1] iremos dar uma nova prova do seguinte fato:

**Teorema 2.2.9** [16] *O referencial de Frenet (aplicações de Eells-Wood)*

$$\Phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : M^2 \longrightarrow F(N)$$

é equiharmônico.

**Demonstração:**

Seja  $\Phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : M^2 \longrightarrow F(N)$  um referencial de Frenet, então vemos

que  $\Phi$  é subordinada a  $\varepsilon$ -matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & & 0 \end{pmatrix}$$

De fato:

Sabemos que se  $f : M^2 \longrightarrow CP^{N-1}$  é holomorfa e não-degenerada então

$$\exists u : U \subset M \longrightarrow \mathbb{C}^N; f(z) = [u_1(z), \dots, u_N(z)]$$

$$\text{logo } f_r : \begin{cases} M^2 & \longrightarrow & G(r, \mathbb{C}^N) \\ z & \longrightarrow & u(z) \wedge u'(z) \wedge \dots \wedge u^{(r-1)}(z) \end{cases} \text{ onde } r = \{1, \dots, N\},$$

é a  $r$ -ésima curva associada a  $f$ . Portanto:

$$\Pi_1 := u \in f_1 = [u]$$

$$\Pi_2 := f_1^\perp \cap f_2 \Rightarrow \Pi_2 \in u \wedge u' \text{ e } \Pi_2 \perp u$$

$$\Pi_3 := f_2^\perp \cap f_3 \Rightarrow \Pi_3 \in u \wedge u' \wedge u'' \text{ e } \Pi_3 \perp \{u, u'\}$$

:

$$\Pi_r := f_{r-1}^\perp \cap f_r \Rightarrow \Pi_r \in u \wedge u' \wedge u'' \wedge \dots \wedge u^{(r-1)} \text{ e } \Pi_r \perp \{u, u', \dots, u^{(r-2)}\} \Rightarrow$$

$\{\Pi_1, \dots, \Pi_N\}$  são ortogonais.

Então temos que provar:

$$1) A'_{r1} = A'_{r2} = \dots = A'_{rr-1} = 0 \quad \forall r \in \{2, \dots, N\}$$

$$2) A'_{r(r+2)} = A'_{r(r+3)} = \dots = A'_{rrN} = 0 \quad \forall r \in \{1, \dots, N\}$$

1) Provemos então que  $A'_{rj} = \Pi_j(\Pi'_r)$ ,  $\forall r \in \{1, \dots, N-1\}$ , basta provar que  $\Pi_j \perp \Pi'_r$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, r-1\}$ , ou seja, basta que  $\Pi'_r \perp \{\Pi_1, \dots, \Pi_{r-1}\}$ .

Usando o processo de ortogonalização de Gram Schimidt temos:

$$\Pi_j = u^{j-1} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle u^{j-1}, \Pi_i \rangle}{\|\Pi_i\|^2} \Pi_i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Em  $\Pi'_j$  aparece  $\{u^j, u, u', \Pi_2, \Pi'_2, \Pi_3, \Pi'_3, \dots, \Pi_{j-1}, \Pi'_{j-1}\}$  isto é,  $\Pi'_j$  é combinação linear de  $\{u, u', u^j, \Pi_2, \dots, \Pi_{j-1}, \Pi'_2, \dots, \Pi'_{j-1}\}$ .

Sabemos que  $\Pi_r \perp \{u, u', \dots, u^{(r-2)}\} \Rightarrow \langle \Pi_r, u^{(k)} \rangle = 0, k \in \{1, \dots, r-2\} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \langle \Pi_r, u^{(k)} \rangle = 0$  mas,  $\frac{\partial}{\partial z} \langle \Pi_r, u^{(k)} \rangle = \left\langle \frac{\partial \Pi_r}{\partial z}, u^{(k)} \right\rangle + \left\langle \Pi_r, \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} \right\rangle$  então  $\left\langle \Pi_r, \frac{\partial u^{(k)}}{\partial z} \right\rangle = 0$  pois  $u$  é holomorfa logo  $u, u', \dots, u^{(k)}$  também serão, portanto  $u^{(k)} \perp \Pi'_r$ .

Mas  $\Pi_j \in u \wedge u' \wedge \dots \wedge u^{j-1}$  e  $j \leq r-1 \Rightarrow j-1 \leq r-2 \Rightarrow u, u', \dots, u^{j-1} \in \{u, u', \dots, u^{r-2}\} \Rightarrow \Pi_r \perp \Pi'_j, \forall j \in \{1, \dots, r-1\}$ .

Agora mostremos que  $\Pi_k \perp \Pi'_i, \forall k \geq i+2$ , onde  $i \in \{1, 2, \dots, N-2\}$ . Assim para:

$$i = 1 \Rightarrow k - 2 \geq 1 \Rightarrow \Pi_k \perp \{u, u'\} \Rightarrow \Pi_k \perp \{u, u', \Pi_2\}$$

$$i = 2 \Rightarrow k - 2 \geq 2 \Rightarrow \Pi_k \perp \{u, u', u''\} \Rightarrow \Pi_k \perp \{u, u', u'', \Pi_2, \Pi'_2\}$$

$$i = 3 \Rightarrow k - 2 \geq 3 \Rightarrow \Pi_k \perp \{u, u', u'', u'''\} \Rightarrow \Pi_k \perp \{u, u', u'', u''', \Pi_2, \Pi'_2, \Pi_3, \Pi'_3\}$$

⋮

$$\Rightarrow \forall k \geq i + 2 \Rightarrow \Pi_k \perp \{u, u', \dots, u^{(i)}, \Pi_2, \dots, \Pi_i, \Pi'_2, \dots, \Pi'_i\} \Rightarrow \Pi_k \perp \Pi'_i$$

Portanto temos que mostrar que  $A'_{r(r+j)} = \Pi_{r+j}(\Pi'_r) = 0, j \in \{2, \dots, N - r\}$

De fato:  $\Pi_{r+j} \perp \Pi'_r, \forall j \in \{2, \dots, N - r\}$  pois  $r + j = r + 2 + (j - 2) \geq r + 2$  e fazendo  $k = r + j, i = r \Rightarrow k \geq i + 2$  por 2)  $\Pi_{r+j} \perp \Pi'_r, \forall j \in \{2, \dots, N - r\}$

Por outro lado usando um cálculo direto temos

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \begin{cases} 0, & \text{se } i, j, k, l \text{ são distintos ou } j \neq l \\ E_{il}, & \text{se } j = k, i \neq l \\ E_{ii} - E_{jj}, & j = k, i = l \end{cases}$$

Segue de que a  $\varepsilon$ -matriz é associada a  $f$ -estrutura horizontal, e  $\Phi$  é equiharmônica.

■

## 2.3 Equações Harmônicas de Superfícies Fechadas em Variedades Bandeira Não-degeneradas

Nesta seção, nós restringiremos a variedades bandeira não degeneradas, isto é,  $F(N) = F(1, 1, \dots, 1, N)$ . Seja  $\phi : M \rightarrow F(N)$  uma aplicação diferenciável de uma superfície Riemanniana  $M$  com bandeira móvel  $(\varepsilon_i)$  e  $\tilde{\phi} : M \rightarrow U(N)$  sua aplicação levantamento, i.é,  $\phi = \pi \circ \tilde{\phi}$  onde  $\pi : U(N) \rightarrow F(N)$  é a projeção natural.

Seja  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$  uma base ortogonal em  $\mathbb{C}^N$ , i.e,  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$  denotamos  $\Pi_j : M \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  a matriz da projeção ortogonal sobre  $E_j$  com respeito a  $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ . Então  $\Pi_j \frac{\partial \Pi_j}{\partial z}$ , denotado por  $A_z^{ij}$ , são as matrizes da segunda forma fundamental  $A'_{ij}$ , i.é,

$$A'_{ij}\{e_1, e_2, \dots, e_N\} = \{e_1, e_2, \dots, e_N\}A_z^{ij}. \tag{2.2}$$

Para  $V \in C(\phi^*TF(N))$  consideremos  $q = \phi^*\beta(V), \phi^*\beta : F(N) \rightarrow M \times u(N)$  é o pull-back da forma de Maurer-Cartan Defina a variação  $\phi$  por:

$$\phi_t(x) = \pi(\exp(-tq)\tilde{\phi}) \tag{2.3}$$

Denote os objetos associado por  $\Pi_j(t), A_z^{ij}(t)$ , etc. Defina

$$\Pi_j(t) = \tilde{\phi}_t E_j \tilde{\phi}_t^*, \tag{2.4}$$

onde  $E_j$  denota a matriz que tem 1 na posição  $(j, j)$  e zero nas outras posições.

**Proposição 2.3.1** 1.  $\Pi_i^2 = \Pi_i$

2.  $\Pi_i \Pi_j = 0, i \neq j$

3.  $\Pi_i^* = \Pi_i$  e  $(\Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_N) = I$ .

**Demonstração:** 1)  $\Pi_i^2 = \tilde{\phi} E_i \tilde{\phi}^* \tilde{\phi} E_i \tilde{\phi}^* = \tilde{\phi} E_i^2 \tilde{\phi}^* = \Pi_i$

2)  $\Pi_i \Pi_j = \tilde{\phi} E_i \tilde{\phi}^* \tilde{\phi} E_j \tilde{\phi}^* = \tilde{\phi} E_i E_j \tilde{\phi}^* = 0, i \neq j$

3)  $\Pi_i^* = (\tilde{\phi} E_i \tilde{\phi}^*)^* = \tilde{\phi} E_i^* \tilde{\phi}^* = \tilde{\phi} E_i \tilde{\phi}^* = \Pi_i$  e

$$\begin{aligned} (\Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_N) &= \tilde{\phi} E_1 \tilde{\phi}^* + \dots + \tilde{\phi} E_n \tilde{\phi}^* \\ &= \tilde{\phi} (E_1 + \dots + E_n) \tilde{\phi}^* \\ &= \tilde{\phi} I \tilde{\phi}^* = I \end{aligned}$$

■

**Lema 2.3.2** 1.  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \Pi_j(t) = [\Pi_j, q]$ .

2.  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} A_z^j(t) = [A_z^j, q] - \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j$ .

**Demonstração:**

1) Sabemos que  $\phi(x) = \pi \circ \tilde{\phi}(x), \forall x \in M$  e a variação  $\phi_t(x) = \pi(\exp(-tq)\tilde{\phi})$  então  $\exists \tilde{\phi}_t : M \rightarrow U(N); \phi_t(x) = \pi \circ \tilde{\phi}_t(x) \Rightarrow \tilde{\phi}_t(x) = \exp(-tq)\tilde{\phi}$ . Logo

$$\begin{aligned} \Pi_j(t) &= \tilde{\phi}_t E_j \tilde{\phi}_t^* \\ &= e^{-tq} \tilde{\phi} E_j \tilde{\phi}^* e^{tq} \\ &= e^{-tq} \Pi_j e^{tq} \end{aligned}$$

Consequentemente:  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \Pi_j(t) = -q \Pi_j + \Pi_j q = [\Pi_j, q]$

2)  $\frac{\partial}{\partial z} [\Pi_j, q] = \left[ \frac{\partial \Pi_j}{\partial z}, q \right] + \left[ \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right]$ .

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} [\Pi_j, q] &= \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_j q - q \Pi_j) \\ &= \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} q + \Pi_j \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j - q \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} \\ &= \left[ \frac{\partial \Pi_j}{\partial z}, q \right] + \left[ \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right]. \end{aligned}$$

Combinando com (1) temos:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} A_z^{ij}(t) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left[ \Pi_i(t) \frac{\partial \Pi_j}{\partial z}(t) \right] \\
&= \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \Pi_i(t) \right) \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} + \Pi_i \frac{\partial}{\partial z} \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \Pi_j(t) \right) \\
&= [\Pi_i, q] \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} + \Pi_i \frac{\partial}{\partial z} [\Pi_j, q] \\
&= [A_z^{ij}, q] - \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j
\end{aligned}$$

■

O produto interno em  $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$  é definido por:

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(AB^*) \quad \forall A, B \in (N, \mathbb{C}) \quad (2.5)$$

**Proposição 2.3.3**

$$1) \langle A, B \rangle = \overline{\langle B, A \rangle} \quad (2.6)$$

$$2) \langle A, [B, C] \rangle = \langle [B^*, A], C \rangle \quad (2.7)$$

$$3) \langle A, B \rangle + \langle B, A \rangle = 2\text{Re} \langle A, B \rangle \quad (2.8)$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
1) \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*) &= \text{tr}(\overline{B})^t (A^t)^t \\
&= \text{tr}((A^t \overline{B})^t) \\
&= \text{tr}(A^t \overline{B}) = \overline{\langle B, A \rangle}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \langle A, [B, C] \rangle &= \text{tr} A[B, C]^* = \text{tr} A(BC - CB)^* \\
&= \text{tr}(A(C^* B^* - B^* C^*)) \\
&= \text{tr}(AC^* B^*) - \text{tr}(AB^* C^*) \\
&= \text{tr}(B^* AC^* - AB^* C^*) \\
&= \text{tr}((B^* A - AB^*) C^*) \\
&= \text{tr}[B^*, A] C^* = \langle [B^*, A], C \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \langle A, B \rangle + \langle B, A \rangle &= \langle A, B \rangle + \overline{\langle A, B \rangle} \\ &= 2\operatorname{Re} \langle A, B \rangle \end{aligned}$$

■

Sejam  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{N1} & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{N1} & \cdots & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix}$  com  $a_{ij}$  e  $b_{ij} \in \mathbb{C}$

Então  $A\overline{B}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{N1} & \cdots & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \overline{b_{21}} & \cdots & \overline{b_{N1}} \\ \overline{b_{21}} & \overline{b_{22}} & \cdots & \overline{b_{N2}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \overline{b_{1N}} & \cdots & \cdots & \overline{b_{NN}} \end{pmatrix}$  Isto é:

$$A\overline{B}^t = \begin{pmatrix} a_{11}\overline{b_{11}} + \cdots + a_{1N}\overline{b_{1N}} & * & \cdots & * \\ * & a_{21}\overline{b_{21}} + \cdots + a_{2N}\overline{b_{2N}} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & * \\ * & * & \cdots & a_{N1}\overline{b_{1N}} + \cdots + a_{NN}\overline{b_{NN}} \end{pmatrix}$$

Como  $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr} A\overline{B}^t$  temos  $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}\overline{b_{ij}}$ . Seja

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_{12} & \cdots & \cdots & \lambda_{1N} \\ \lambda_{12} & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \lambda_{(N-1)(N-1)} \\ \lambda_{1N} & \lambda_{2N} & \cdots & \lambda_{(N-1)(N-1)} & 0 \end{pmatrix}; \lambda_{ij} > 0, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}$$

Então definimos  $ds_\Lambda^2(A, B) := \langle \Lambda A, B \rangle$  fazendo aqui o produto de Hadamard, ou seja, coeficiente por coeficiente. Temos assim as métricas do tipo Borel:

$$\langle \Lambda A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^N \lambda_{ij} a_{ij} \overline{b_{ij}}.$$

Observe que o conjunto  $\mathcal{C} = \{\Lambda = (\lambda_{ij}); \lambda_{ij} > 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } \lambda_{ij} = 0 \text{ se } i = j\}$  com o produto de Hadamard é um grupo, cuja identidade é a métrica de Cartan-Killing, i.e.,

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a inversa de cada elemento de  $\mathcal{C}$  é

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_{12}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{1N}} \\ \frac{1}{\lambda_{12}} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{\lambda_{(N-1)(N-1)}} \\ \frac{1}{\lambda_{1N}} & \cdots & \frac{1}{\lambda_{(N-1)(N-1)}} & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de agora vamos supor que  $M$  é uma superfície Riemanniana fechada e  $g$  a sua métrica. Então, com respeito a  $ds_\Lambda^2$  a energia de  $\phi_t$  é definida por:

$$E(\phi_t) := \int_M \sum \lambda_{ij} \|A_z^{ij}(t)\|^2 v_g \tag{2.9}$$

onde  $v_g = \sqrt{-1} dz \wedge d\bar{z}$

**Proposição 2.3.4**

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) = 2Re \left( \int_M \sum \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, [A_z^{ij}, q] \rangle v_g + \int_M \sum \lambda_{ij} \left\langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \right\rangle v_g \right)$$

**Demonstração:**

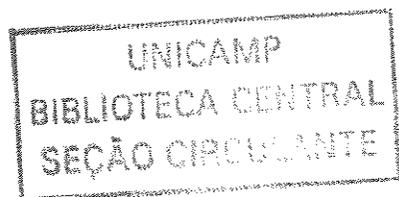
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) &= \int_M \sum \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \|A_z^{ij}(t)\|^2 v_g \\ &= \int_M \sum \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \langle A_z^{ij}(t), A_z^{ij}(t) \rangle v_g \\ &= \int_M \sum \lambda_{ij} \left( \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} A_z^{ij}(t), A_z^{ij}(t) \right\rangle v_g + \left\langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} A_z^{ij}(t) \right\rangle v_g \right) \\ &= 2Re \int_M \sum \lambda_{ij} \left\langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} A_z^{ij}(t) \right\rangle v_g \\ &= 2Re \int_M \sum \lambda_{ij} \left\langle A_z^{ij}(t), [A_z^{ij}, q] - \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \right\rangle v_g \end{aligned}$$

■

Então temos que:  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) = I + II$  onde  $I = Re \int_M \sum \lambda_{ij} \langle A_z^{ij}, [A_z^{ij}, q] \rangle v_g$  e  $II = -Re \int_M \sum \lambda_{ij} \left\langle A_z^{ij}, \pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \pi_j \right\rangle v_g$

**Proposição 2.3.5** 1.  $(\frac{\partial \Pi_i}{\partial z})^* = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \bar{z}}$

2.  $(A_z^{ij})^* = -A_{\bar{z}}^{ji}$



$$3. (A_z^{ji})^* = -A_z^{ij} \text{ e conseqüentemente } [A_z^{ji}, A_z^{ij}]^* = [A_z^{ji}, A_z^{ij}]$$

**Demonstração:**

$$1) \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial \Pi_i}{\partial y} \right), \text{ portanto } \frac{\partial \Pi_i}{\partial z}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial \Pi_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial \Pi_i}{\partial \bar{z}}$$

$$\begin{aligned} 2) (A_z^{ij})^* &= \left( \Pi_i \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} \right)^* \\ &= \frac{\partial \Pi_j}{\partial \bar{z}} \Pi_i^* = \frac{\partial \Pi_j}{\partial \bar{z}} \Pi_i \\ &= -\Pi_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial \bar{z}} = -A_z^{ji} \end{aligned}$$

$$\text{pois } \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_i \Pi_j) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} \Pi_j + \Pi_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} \Pi_j = -\frac{\partial \Pi_i}{\partial z} \Pi_j$$

$$\begin{aligned} 3) [A_z^{ji}, A_z^{ij}]^* &= (A_z^{ji} A_z^{ij} - A_z^{ij} A_z^{ji})^* \\ &= (A_z^{ij})^* (A_z^{ji})^* - (A_z^{ij})^* (A_z^{ji})^* \\ &= A_z^{ji} A_z^{ij} - A_z^{ij} A_z^{ji} = [A_z^{ji}, A_z^{ij}]. \end{aligned}$$

■

**Lema 2.3.6** 1.  $\text{Re} \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle = 0$

$$2. \langle A_z^{ij}, \Pi_i B \Pi_j \rangle = \langle A_z^{ij}, B \rangle$$

**Demonstração:**

Usando 2.3.7 e proposição 2.3.5 temos:

$$\begin{aligned} 1) 2\text{Re} \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle &= \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle + \langle q, [A_z^{ji}, A_z^{ij}] \rangle \\ &= \text{tr}([A_z^{ji}, A_z^{ij}] q^* + q [A_z^{ji}, A_z^{ij}]^*) \\ &= -\text{tr}([A_z^{ji}, A_z^{ij}] q) + \text{tr}(q [A_z^{ji}, A_z^{ij}]) = 0 \end{aligned}$$

2) Usando a proposição 2.3.1 temos :

$$\begin{aligned}
\langle A_z^{ij}, \Pi_i B \Pi_j \rangle &= \text{tr}(A_z^{ij} \Pi_j^* B^* \Pi_i^*) \\
&= \text{tr}(\Pi_i \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} \Pi_j B^* \Pi_i) \\
&= \text{tr}(\Pi_i \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} \Pi_j B^*) \\
&= -\text{tr}(\frac{\partial \Pi_i}{\partial z} \Pi_j B^*) \\
&= \text{tr}(\Pi_i \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} B^*) = \langle A_z^{ij}, B \rangle
\end{aligned}$$

■

Agora é fácil ver que da equação 2.7, proposição 2.3.4 e lema 2.3.5 que

$$I = -2\text{Re} \int_M \sum \lambda_{ij} \langle [A_z^{ji}, A_z^{ij}], q \rangle v_g = 0.$$

Usando lema 2.3.5 e o Teorema de Stokes é fácil ver que:

$$\begin{aligned}
II &= - \int_M \sum \lambda_{ij} \left\langle A_z^{ij}, \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \\
&= -\text{Re} \int_M \sum \lambda_{ij} \left\langle A_z^{ij}, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g \\
&= \text{Re} \int_M \sum \lambda_{ij} \left\langle \frac{\partial A_z^{ij}}{\partial \bar{z}}, q \right\rangle v_g - \text{Re} \int_M \sum \lambda_{ij} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle A_z, q \rangle v_g \\
&= \text{Re} \int_M \left\langle \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}}, q \right\rangle v_g
\end{aligned}$$

Onde  $A_z^\Lambda = \sum_{i,j} \lambda_{ij} A_z^{ij}$  e  $\frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}} : M \rightarrow u(N)$ . Daí temos:

**Proposição 2.3.7**  $\phi : (M, g) \rightarrow (F(N), ds_\Lambda^2)$  é harmônica se e somente se

$$\frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y} = 0$$

onde  $A_x^\Lambda := \sum \lambda_{ij} \Pi_i \frac{\partial \Pi_j}{\partial x}$ ,  $A_y^\Lambda := \sum \lambda_{ij} \Pi_i \frac{\partial \Pi_j}{\partial y}$ .

**Demonstração:**

Sabemos que  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi) = II$  pois  $I = 0$ . Onde  $II = \text{Re} \int_M \left\langle \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}}, q \right\rangle v_g$ ,

como  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right)$  e  $A_z^\Lambda = \frac{1}{2}(A_x^\Lambda + \sqrt{-1}A_y^\Lambda)$  então

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (A_x^\Lambda + \sqrt{-1}A_y^\Lambda) - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial y} (A_x^\Lambda + \sqrt{-1}A_y^\Lambda) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \sqrt{-1} \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial y} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y} + \sqrt{-1} \left( \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial x} - \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

Portanto:  $4\text{Re} \left( \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y}$

Suponha primeiro que  $\frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y} = 0$ , como  $\left( \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}} \right) \in u(N)^\mathbb{C} \Rightarrow \left( \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}} \right) = A + \sqrt{-1}B$ , onde  $A, B \in u(N)$  então  $\text{Re} \left( \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}} \right) = A$ , tome  $A = \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y}$  e como  $q \in u(N)$  então  $\text{Re}(q) = q$ . Logo  $\text{Re} \left\langle \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial \bar{z}}, q \right\rangle = \left\langle \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y}, q \right\rangle = 0$ . Portanto

$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) = 0 \Rightarrow \phi$  é harmônica. Por outro lado suponha que  $\phi$  é harmônica,

i.e.,  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\phi_t) = 0$  isto é  $\text{Re} \int_M \left\langle \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y}, q \right\rangle v_g = 0$ , para todo  $q \in u(N)$

tome  $q = \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y}$ . Portanto:

$$\int_M \left\| \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y} \right\|^2 v_g = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x^\Lambda}{\partial x} + \frac{\partial A_y^\Lambda}{\partial y} = 0.$$

■

## 2.4 Toros Equiharmônicos Não-f-holomorfos

Somos levados a pensar que equiharmonicidade e subordinação a uma estrutura-f horizontal são conceitos equivalentes. Mas os exemplos abaixo mostram que isto não é verdadeiro.

Nesta seção nosso objetivo é construir  $\psi : T^2 \longrightarrow F(N)$  tal que  $\psi$  é equiharmônica mas não f-holomorfa para nenhuma estrutura-f (em particular as estruturas-f horizontais).

Suponha que  $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow F(N)$  é definida por:

$$\phi = \pi\tilde{\phi}, \tilde{\phi}(x, y) = e^{Ax+By} \Rightarrow \tilde{\phi}^*(x, y) = e^{\overline{Ax+By}} = e^{-Ax-By} \quad (2.10)$$

onde  $A, B \in u(N)$ ,  $[A, B]=0$ . Então  $\tilde{\phi}(x, y) = e^{By}e^{Ax}$  e daí temos:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} = e^{Ax+By} A = \tilde{\phi}A, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}^*}{\partial x} = -Ae^{-Ax-By} = -A\tilde{\phi}^*$$

**Proposição 2.4.1**  $A_x^{ji} = \tilde{\phi}E_jAE_i\tilde{\phi}^*$  e  $A_y^{ji} = \tilde{\phi}E_jBE_i\tilde{\phi}^*$

**Demonstração:**

Sabemos de (2.4) que  $\Pi_i = \tilde{\phi}E_i\tilde{\phi}^*$  então segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\phi}E_i\tilde{\phi}^*) \\ &= \tilde{\phi}AE_i\tilde{\phi}^* - \tilde{\phi}E_iA\tilde{\phi}^* = \tilde{\phi}[A, E_i]\tilde{\phi}^*. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \Pi_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} &= \tilde{\phi}E_i\tilde{\phi}^* \tilde{\phi}[A, E_j]\tilde{\phi}^* = \tilde{\phi}E_j[A, E_i]\tilde{\phi}^* \\ &= \tilde{\phi}E_jAE_i\tilde{\phi}^* - \tilde{\phi}E_jE_iA\tilde{\phi}^* \\ &= \tilde{\phi}E_jAE_i\tilde{\phi}^*, i \neq j \end{aligned}$$

Similarmente temos que  $A_y^{ji} = \tilde{\phi}E_jBE_i\tilde{\phi}^*$ . ■

Consequentemente a matriz da segunda forma fundamental de  $\phi$  satisfaz:

$$A_z^{ji} = \tilde{\phi}E_jXE_i\tilde{\phi}^* \quad \text{onde } X = \frac{1}{2}(A - \sqrt{-1}B) \quad (2.11)$$

De fato:  $\frac{\partial \Pi_i}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} - \sqrt{-1} \frac{\partial \Pi_i}{\partial y} \right)$  então:

$$\begin{aligned} \Pi_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \Pi_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} - \sqrt{-1} \Pi_j \frac{\partial \Pi_i}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\phi}E_jAE_i\tilde{\phi}^* - \sqrt{-1} \tilde{\phi}E_jBE_i\tilde{\phi}^*) \\ &= \tilde{\phi}E_j \left[ \frac{1}{2}(A - \sqrt{-1}B) \right] E_i\tilde{\phi}^* = \tilde{\phi}E_jXE_i\tilde{\phi}^* \end{aligned}$$

Agora seja  $F$  uma estrutura-f invariante com  $\varepsilon$ -matriz associada  $(F_{ij})$ . Colocando  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ . Usando as equações 2.2, 2.11 e a proposição 2.2.9 é claro que  $\phi$  é  $f$ -holomorfa com respeito a  $F$  se e somente se

$$i \neq j, F_{ij} \neq 1 \Rightarrow b_{ij} = a_{ij} \quad (2.12)$$

Desse fato temos uma forte condição como segue:

**Proposição 2.4.2** *Uma condição equivalente para que  $\phi$  seja  $f$ -holomorfa com respeito a estrutura-f  $F$  é:*

1.  $a_{ij} = b_{ij} = 0$  se  $F_{ij} = 0, i \neq j$
2.  $b_{ij} = -\sqrt{-1}a_{ij}$  se  $F_{ij} = 1$
3.  $b_{ij} = \sqrt{-1}a_{ij}$  se  $F_{ij} = -1$

**Demonstração:**

Suponha  $\phi$   $f$ -holomorfa

1) Se  $F_{ij} = 0 \Rightarrow F_{ji} = 0 \Rightarrow A'_{ij} = A'_{ji} = 0$ . Pela equação 2.11 como  $\phi$  é inversível  $E_j A E_i = \sqrt{-1} E_j B E_i \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} b_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} a_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} b_{ji} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Portanto  $\begin{cases} a_{ij} = \sqrt{-1}b_{ij} \\ \bar{a}_{ji} = \sqrt{-1}\bar{b}_{ji} \end{cases} = \begin{cases} a_{ij} = \sqrt{-1}b_{ij} \\ -a_{ji} = \sqrt{-1}b_{ji} \end{cases} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = a_{ji} = b_{ji} = 0$

2) Se  $F_{ij} = 1 \Rightarrow F_{ji} = -1 \Rightarrow A'_{ji} = 0 \Rightarrow A_z^{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = \sqrt{-1}b_{ij} \Rightarrow b_{ij} = -\sqrt{-1}a_{ij}$

3) Se  $F_{ij} = -1 \Rightarrow A'_{ij} = 0 \Rightarrow A_z^{ji} = 0 \Rightarrow a_{ji} = \sqrt{-1}b_{ji} \Rightarrow \bar{a}_{ji} = (\sqrt{-1})\bar{b}_{ji} \Rightarrow b_{ij} = \sqrt{-1}a_{ij}$  ■

**Lema 2.4.3**

$$\frac{\partial A_x^{ij}}{\partial x} = \tilde{\phi}[A, E_i A E_j] \tilde{\phi}^* \text{ e } \frac{\partial A_y^{ij}}{\partial y} = \tilde{\phi}[B, E_i B E_j] \tilde{\phi}^* \quad (2.13)$$

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x^{ij}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\phi} E_i A E_j \tilde{\phi}^*) \\ &= (\tilde{\phi} A E_i A E_j \tilde{\phi}^*) - (\tilde{\phi} E_i A E_j A \tilde{\phi}^*) \\ &= \tilde{\phi}[A, E_i A E_j] \tilde{\phi}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_y^{ij}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\phi} E_i B E_j \tilde{\phi}^*) \\
&= (\tilde{\phi} B E_i B E_j \tilde{\phi}^*) - (\tilde{\phi} E_i B E_j B \tilde{\phi}^*) \\
&= \tilde{\phi} [B, E_i B E_j] \tilde{\phi}^*
\end{aligned}$$

■

Substituindo as equações (2.13) na proposição (2.3.7) temos:

**Proposição 2.4.4** *Suponha que  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow F(N)$  definida em 2.10 tem duplo período. Então  $\psi : T^2 \rightarrow F(N)$  é harmônica com respeito a  $ds_\lambda^2$  se e somente se:*

$$[A, \sum \lambda_{ij} E_i A E_j] + [B, \sum \lambda_{ij} E_i B E_j] = 0 \quad (2.14)$$

**Observação 2.4.5** *Observe que  $\phi$  precisa ser duplamente periódica para garantir que o domínio de  $\psi$  é  $T^2$ .*

Iremos agora generalizar os exemplos obtidos em [13] para o nosso estudo. Vamos construir duas classes de toros equiharmônicos não-f-holomorfos em variedades bandeiras complexas não-degeneradas. Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  (onde  $\mathbb{Q}$  denota o conjunto dos números racionais)  $j = 1, \dots, k \leq \frac{n}{4}$  consideremos:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j X & 0 \\ 0 & \beta_j X \end{pmatrix}, \beta_j = \begin{pmatrix} \beta_j X & 0 \\ 0 & \alpha_j X \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$$A = \sqrt{-1} \text{diag}(A_1, \dots, A_k, 0, \dots, 0), B = \sqrt{-1} \text{diag}(B_1, \dots, B_k, 0, \dots, 0) \quad (2.16)$$

Daí temos o seguinte:

**Teorema 2.4.6** 1.  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow F(N)$  dada por  $\phi(x, y) = \pi(e^{Ax+By})$  tem duplo período.

2.  $\psi : T^2 \rightarrow F(N)$  dada  $\psi \circ p = \phi$  é equiharmônica mas não é f-holomorfa com respeito a cada estrutura-f invariante em  $F(N)$ , onde  $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$  é a projeção natural.

**Demonstração:**

$$A^l = \sqrt{-1} \text{diag}(\alpha_1^l X^l, \beta_1^l X^l, \dots, \alpha_k^l X^l, \beta_k^l X^l, 0, \dots, 0) \text{ para } l \in \{1, 2, \dots\} \text{ onde } X^l = \begin{cases} X & \text{se } l = \text{impar} \\ I_2 & \text{se } l = \text{par} \end{cases} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= I + Ax + \frac{A^2 X^2}{2!} + \frac{A^3 X^3}{3!} + \dots \\ &= \text{diag}(1, 1, \dots, 1) + i \text{diag}(\alpha_1 x X, \beta_1 x X, \dots, \alpha_k x X, \beta_k x X, 0, \dots, 0) \\ &\quad - \frac{1}{2!} \text{diag}(\alpha_1^2 x^2 I_2, \beta_1^2 x^2 I_2, \dots, \alpha_k^2 x^2 I_2, \beta_k^2 x^2 I_2, 0, \dots, 0) \\ &\quad - \frac{1}{3!} \text{diag}(\alpha_1^3 x^3 X^3, \beta_1^3 x^3 X^3, \dots, \alpha_k^3 x^3 X^3, \beta_k^3 x^3 X^3, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \frac{1}{4!} \text{diag}(\alpha_1^4 x^4 I_2, \beta_1^4 x^4 I_2, \dots, \alpha_k^4 x^4 I_2, \beta_k^4 x^4 I_2, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \frac{i}{5!} \text{diag}(\alpha_1^5 x^5 X^5, \beta_1^5 x^5 X^5, \dots, \alpha_k^5 x^5 X^5, \beta_k^5 x^5 X^5, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= \text{diag}(1 - \frac{1}{2!} \alpha_1^2 x^2 I_2 + \frac{1}{4!} \alpha_1^4 x^4 I_2 - \dots, 1 - \frac{1}{2!} \beta_1^2 x^2 I_2 + \frac{1}{4!} \beta_1^4 x^4 I_2 - \dots, 0, \dots, 0) \\ &\quad + i \text{diag}(\alpha_1 x X - \frac{1}{3!} \alpha_1^3 x^3 X^3 + \frac{i}{5!} \alpha_1^5 x^5 X^5, \dots, \beta_1 x X - \frac{1}{3!} \beta_1^3 x^3 X^3 + \frac{i}{5!} \beta_1^5 x^5 X^5, \\ &\quad , \dots, 0, \dots, 0) \\ &= \text{diag}(\cos \alpha_1 x I_2, \cos \beta_1 x I_2, \dots, \cos \alpha_k x I_2, \cos \beta_k x I_2, 0, \dots, 0) \\ &\quad + i \text{diag}(\sin \alpha_1 x X, \sin \beta_1 x X, \dots, \sin \alpha_k x X, \sin \beta_k x X, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Combinando com  $[A, B] = 0$ , e  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ , existe um  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tal que  $\phi(x + 2\pi nr, y + 2\pi mr) = \phi(x, y)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . De fato:

Sejam  $\alpha_j = \frac{p_j}{q_j}$  e  $\beta_j = \frac{p'_j}{q'_j}$  onde  $p_j, q_j, p'_j, q'_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , defina  $r := q_1 \dots q_j \dots q_k q'_1 \dots q'_j q'_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Então:

$$\begin{aligned} \phi(x + 2\pi nr, y + 2\pi mr) &= \cos \alpha_j (x + r 2\pi n) \cos \beta_j (y + r 2\pi m) \\ &= \cos \frac{p_j}{q_j} (x + q_1 \dots q_j \dots q_k q'_1 \dots q'_j 2\pi n) \\ &\quad \cdot \cos \frac{p'_j}{q'_j} (y + q_1 \dots q_k q'_1 \dots q'_j \dots q'_k 2\pi m) \\ &= \cos p_j (q_1 \dots \widehat{q_j} \dots q_k q'_1 \dots q'_k) \alpha x 2\pi n \\ &\quad \cdot \cos p'_j (q_1 \dots q_k q'_1 \dots \widehat{q'_j} \dots q'_k) \beta y 2\pi m \\ &= \phi(x, y). \end{aligned}$$

Consequentemente temos

$$\psi : T^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{2\pi r(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})} \longrightarrow F(N).$$

2) Para qualquer métrica invariante a esquerda  $ds_\Lambda^2$  em  $F(N)$ , de 2.15 e 2.16 temos:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \sum \lambda_{ij} E_i A E_j = \text{diag}(\alpha_1 \lambda_{12} X, \beta_1 \lambda_{34} X, \dots, \alpha_k \lambda_{4k-3, 4k-2} X, \beta_k \lambda_{4k-1, 4k} X, 0, \dots, 0)$$

Então:

$$\begin{aligned} A. \sum \lambda_{ij} E_i A E_j &= \text{diag}(\alpha_1^2 \lambda_{12} X^2, \beta_1^2 \lambda_{34} X^2, \dots, \alpha_k^2 \lambda_{4k-3, 4k-2} X^2, \beta_k^2 \lambda_{4k-1, 4k} X^2, 0, \dots, 0) \\ &= \sum \lambda_{ij} E_i A E_j \cdot A \end{aligned}$$

Daí segue que:

$$[A, \sum \lambda_{ij} E_i A E_j] = 0$$

Similarmente temos:

$$[B, \sum \lambda_{ij} E_i B E_j] = 0.$$

Assim,

$$[A, \sum \lambda_{ij} E_i A E_j] + [B, \sum \lambda_{ij} E_i B E_j] = 0$$

e  $\psi$  é equiharmônica.

3) Suponha que  $\phi$  é f-holomorfa para a estrutura-f  $F$ , e  $(F_{ij})$  é a  $\varepsilon$ -matriz de  $F$ . Da proposição 2.4.2 uma das seguintes afirmativas é verdadeira:

1.  $\sqrt{-1}\alpha_1 = \sqrt{-1}\beta_1 = 0$
2.  $\sqrt{-1}\beta_1 = \alpha_1$
3.  $\sqrt{-1}\beta_1 = -\alpha_1$ .

Entretanto isto é impossível, pois  $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . ■

# Capítulo 3

## Estabilidade do Referencial de Frenet das aplicações holomorfas

É muito natural de considerar o seguinte problema:

Encontrar para cada métrica do tipo Borel quando uma aplicação

$$\Phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : (M^2, g) \longrightarrow (F(N), ds_\lambda^2)$$

é estável, ou pelo menos para um grande número delas e neste caso o resultado é melhor ainda.

Veremos que esta é uma questão muito difícil e nós somente teremos uma resposta interessante no caso que  $\Phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : (M^2, g) \longrightarrow (F(N), J, ds_\lambda^2)$  é um referencial de Frenet de uma aplicação holomorfa, o qual será harmônico para toda métrica  $ds_\lambda^2$ .

### 3.1 Segunda variação de Energia para aplicações em $F(N)$

Nesta seção vamos calcular a segunda variação da energia e combinando com um lema técnico, obteremos famílias de métricas do tipo Borel em que os referenciais de Frenet são estáveis.

#### Lema 3.1.1

$$1) \langle A_z^{ij}, [q, [q, A_z^{ij}]] \rangle = - \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle \quad (3.1)$$

$$2) \left\langle A_z^{ij}, \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j q \right\rangle = - \left\langle A_z^{ij} q, \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle \quad (3.2)$$

$$3) \left\langle A_z^{ij}, q \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle = - \left\langle q A_z^{ij}, \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle \quad (3.3)$$

**Demonstração:**

Usando a equação 2.7 temos:

$$\begin{aligned} 1) \langle A_z^{ij}, [q, [q, A_z^{ij}]] \rangle &= \langle [q^*, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle \\ &= - \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \left\langle A_z^{ij}, \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j q \right\rangle &= \text{tr} \left( A_z^{ij} \left( \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j q \right)^* \right) \\ &= \text{tr} \left( A_z^{ij} q^* \Pi_j^* \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)^* \Pi_i^* \right) \\ &= -\text{tr} \left( A_z^{ij} q \Pi_j \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)^* \Pi_i \right) \\ &= - \left\langle A_z^{ij} q, \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \left\langle A_z^{ij}, q \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle &= \text{tr} \left( A_z^{ij} \left( q \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right)^* \right) \\ &= \text{tr} \left( A_z^{ij} \Pi_j^* \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)^* \Pi_i^* q^* \right) \\ &= -\text{tr} \left( q A_z^{ij} \Pi_j \left( \frac{\partial q}{\partial z} \right)^* \Pi_i \right) \\ &= - \left\langle q A_z^{ij}, \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle. \end{aligned}$$

■

**Lema 3.1.2**  $\left. \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = [[\Pi_i, q], q]$ .

**Demonstração:**

Por definição  $\Pi_i(t) = e^{-tq} \Pi_i e^{tq}$ . Então

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_i(t) = q e^{-tq} \Pi_i e^{tq} + e^{-tq} \Pi_i q e^{tq} = e^{-tq} [\Pi_i, q] e^{tq}.$$

Consequentemente:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi_i(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = -q[\Pi_i, q] + [\Pi_i, q]q = [[\Pi_i, q], q]$$

■

**Teorema 3.1.3** (segunda variação de energia)

Seja  $\Phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : (M^2, q) \longrightarrow (F(N), ds_\Lambda^2)$  uma aplicação harmônica arbitrária. Então:

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t) \right|_{t=0} = I_\Lambda^\phi(q) = 4Re \int_M \left\langle q A_z^\Lambda, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g + 2Re \sum_{i,j} \lambda_{ij} \int_M \left\langle \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g.$$

**Demonstração:**

Usando a definição 2.9 vemos que :

$$\frac{d}{dt} E(\phi_t) = 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial}{\partial t} A_z^{ij}(t) \right\rangle v_g.$$

Então:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t) &= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (A_z^{ij}(t)), \frac{\partial}{\partial t} (A_z^{ij}(t)) \right\rangle v_g \\ &+ 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z^{ij}(t) \right\rangle v_g. \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t) \right|_{t=0} &= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_z^{ij}, \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} A_z^{ij} \right\rangle v_g \\ &+ 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}(t), \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right|_{t=0} A_z^{ij}(t) \right\rangle v_g = I + II. \end{aligned}$$

Analizemos I e II separadamente. Estudando primeiro II temos:

$$\begin{aligned}
II &= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} A_z^{ij}(t) \right\rangle v_g \\
&= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \Pi_i(t) \frac{\partial(\Pi_j(t))}{\partial z} \right) \right) \right\rangle v_g \\
&= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}(t), \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left[ \frac{\partial \Pi_i(t)}{\partial t} \frac{\partial(\Pi_j(t))}{\partial z} + \Pi_i(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\Pi_j(t)) \right) \right] \right\rangle v_g \\
&= Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \Pi_i(t) \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \Pi_i(t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \Pi_j(t) \right) \right. \\
&+ \left. \Pi_i \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big|_{t=0} \Pi_j(t) \right) + \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \Pi_i \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \Pi_j(t) \right) \right\rangle v_g \\
&= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, [[\Pi_i, q], q] \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} + 2[\Pi_i, q] \frac{\partial}{\partial z} ([\Pi_j, q]) \right. \\
&+ \left. \Pi_i \frac{\partial}{\partial z} ([[\Pi_j, q], q]) \right\rangle v_g \\
&= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \langle A_z^{ij}, A + B + C \rangle v_g
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
A &= [[\Pi_i, q], q] \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} = [\Pi_i q - q \Pi_i, q] \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} \\
&= \Pi_i q^2 \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} - 2q \Pi_i q \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} + q^2 A_z^{ij}.
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
B &= 2[\Pi_i, q] \frac{\partial}{\partial z} ([\Pi_j, q]) \\
&= 2(\Pi_i q - q \Pi_i) \left( \left[ \frac{\partial \Pi_j}{\partial z}, q \right] + \left[ \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right] \right) \\
&= 2\Pi_i q \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} q - 2\Pi_i q^2 \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} + 2\Pi_i q \Pi_j \frac{\partial q}{\partial z} - 2\Pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j - 2q A_z^{ij} q \\
&+ 2q \Pi_i q \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} + 2q \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pi_i \frac{\partial}{\partial z} ([[\Pi_j, q], q]) &= A_z^{ij} q^2 - 2\Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j q - 2\Pi_i q \frac{\partial \Pi_j}{\partial z} q - 2\Pi_i q \Pi_j \frac{\partial q}{\partial z} \\
&+ \Pi_j \frac{\partial}{\partial z} (q^2) \Pi_i + \Pi_i q^2 \frac{\partial \Pi_j}{\partial z}
\end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\begin{aligned} A + B + C &= q^2 A_z^{ij} - 2q A_z^{ij} q + A_z^{ij} q^2 + \Pi_i \frac{\partial}{\partial z} (q^2) \Pi_j - 2\Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j q - 2\Pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \\ &\quad + 2q \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \\ &= [q, [q, A_z^{ij}]] + \Pi_i \frac{\partial q^2}{\partial z} \Pi_j - 2\Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j q - 2\Pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j + 2q \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} II &= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, [q, [q, A_z^{ij}]] + \Pi_i \frac{\partial q^2}{\partial z} \Pi_j - 2\Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j q - 2\Pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right. \\ &\quad \left. + 2q \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \end{aligned}$$

Então aplicando o lema 3.1.1 obtemos:

$$\begin{aligned} II &= -2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle v_g + 4Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle [q, A_z^{ij}], \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \\ &\quad + -2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, \frac{\partial q^2}{\partial z} \right\rangle v_g - 4Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, \Pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \end{aligned}$$

Mas como  $\phi$  é harmônica, podemos usar a proposição 2.3.7 e consequentemente:

$$\begin{aligned} Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, \frac{\partial q^2}{\partial z} \right\rangle v_g &= Re \int_M \left\langle A_z^\Lambda, \frac{\partial q^2}{\partial z} \right\rangle v_g \\ &= -Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \frac{\partial A_z^\Lambda}{\partial z}, q^2 \right\rangle v_g = 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} II &= -2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [q, A_z^{ij}], [q, A_z^{ij}] \rangle v_g + 4Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle [q, A_z^{ij}], \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \\ &\quad - 4Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, \Pi_i q \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \end{aligned}$$

Por outro lado usando novamente lema 2.3.2 temos:

$$\begin{aligned} I &= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A_z^{ij}, \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} A_z^{ij} \right\rangle v_g \\ &= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle [A_z^{ij}, q] - \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j, [A_z^{ij}, q] - \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \\ &= 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \langle [A_z^{ij}, q], [A_z^{ij}, q] \rangle v_g - 4Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle [A_z^{ij}, q], \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j \right\rangle v_g \\ &\quad + 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} E(\phi_t)|_{t=0} &= I_{\Lambda}^{\phi}(q) = I + II \\
&= -4Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle A_z^{ij}, q \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g + 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g \\
&= 4Re \int_M \left\langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g + 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g
\end{aligned}$$

■

## 3.2 Estabilidade em $F(N)$

Borel em [2] provou que as métricas de Kähler invariantes  $ds_{\Lambda}^2$ , salvo permutações são dadas pela matriz simétrica:

$$\begin{pmatrix}
0 & \lambda_{12} & \lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{12} + \lambda_{23} + \cdots + \lambda_{(N-1)N} \\
\lambda_{12} & 0 & \lambda_{23} & \lambda_{23} + \lambda_{34} & \cdots & \lambda_{23} + \lambda_{43} + \cdots + \lambda_{(N-1)N} \\
\lambda_{12} + \lambda_{23} & \lambda_{23} & 0 & \lambda_{34} & \ddots & \vdots \\
* & * & * & 0 & \cdots & \lambda_{(N-2)(N-1)} + \lambda_{(N-1)N} \\
* & * & * & * & \cdots & \lambda_{(N-1)N} \\
* & * & * & * & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

**Definição 3.2.1**  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  é dita uma perturbação de  $\Lambda = (\lambda_{ij})$  associada a uma aplicação  $\Phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : M^2 \longrightarrow F(N)$  se:

1.  $\lambda'_{ij} = \lambda_{ij}$  se  $(i, j) \neq (i_1, j_1), (j_1, i_1), \dots, (i_r, j_r)$  e  $(j_r, i_r)$
2.  $\lambda'_{i_k j_k} = \lambda_{i_k j_k} + \varepsilon_k > 0$  para  $1 \leq k \leq r$ .
3.  $A_z^{i_1 j_1} = A_z^{j_1 i_1} = \dots = A_z^{i_r j_r} = A_z^{j_r i_r} = 0$ , onde  $ds_{\Lambda}^2$  são métricas do tipo Borel.

Agora deduziremos a propriedade chave da fórmula da segunda variação de energia.

**Lema 3.2.2** Seja  $\phi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : M^2 \longrightarrow F(N)$  uma aplicação equiharmônica. Então,

$$\begin{aligned}
I_{\Lambda'}^{\phi}(q) &= I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M 2\varepsilon_1 \left( \left| \Pi_{i_1} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{j_1} \right|^2 + \left| \Pi_{j_1} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{i_1} \right|^2 \right) v_g + \cdots \\
&+ \cdots + 2Re \int_M \varepsilon_r \left( \left| \Pi_{i_r} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{j_r} \right|^2 + \left| \Pi_{j_r} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{i_r} \right|^2 \right) v_g
\end{aligned}$$

**Demonstração:**

$$I_{\Lambda'}^{\phi}(q) = 4Re \int_M \left\langle q A_z^{\Lambda'}, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g + 2Re \sum \lambda'_{ij} \int_M \left\langle \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g$$

Mas  $A_z^{\Lambda'} = A_z^{\Lambda}$  pois  $A_z^{i_1 j_1} = A_z^{j_1 i_1} = \dots = A_z^{i_r j_r} = A_z^{j_r i_r} = 0$ . Consequentemente:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda'}^{\phi}(q) &= 4Re \int_M \left\langle q A_z^{\Lambda}, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g + 2Re \sum \lambda_{ij} \int_M \left\langle \Pi_i \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_j, \frac{\partial q}{\partial z} \right\rangle v_g \\ &+ 2Re \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \int_M \left( \left| \Pi_{i_k} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{j_k} \right|^2 + \left| \Pi_{j_k} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{i_k} \right|^2 \right) v_g \\ &= I_{\Lambda}^{\phi}(q) + 2Re \sum_{k=1}^r \varepsilon_k \int_M \left( \left| \Pi_{i_k} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{j_k} \right|^2 + \left| \Pi_{j_k} \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_{i_k} \right|^2 \right) v_g. \end{aligned}$$

■

**Definição 3.2.3** Uma aplicação harmônica  $\phi : (M^2, q) \longrightarrow (F(N), J, ds_{\Lambda}^2)$  é dita estável se  $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$  para qualquer variação  $q : M^2 \longrightarrow u(N)$ .

**Teorema 3.2.4** Seja  $\phi : (M^2, J_1, q) \longrightarrow (F(N), J, ds_{\Lambda}^2)$  uma aplicação holomorfa onde a variedade de chegada é Kälher. Então  $\phi$  é harmonica e estável.

Agora estudaremos a estabilidade das aplicações de Eells-Wood com respeito a um conjunto muito grande de métricas do tipo Borel.

**Teorema 3.2.5** Seja  $\psi = (\Pi_1, \dots, \Pi_N) : M^2 \longrightarrow (F(N), J, ds_{\Lambda}^2)$  um referencial de Frenet de uma aplicação holomorfa. Consideremos  $\Lambda' = (\lambda'_{ij})$  a seguinte perturbação da métrica Kälher ( $\Lambda = (\lambda_{ij})$ ):

$$\lambda'_{ij}(i < j) : \begin{cases} \lambda_{ij} \text{ se } (i, j) \neq (i_1, j_1), (j_1, i_1), \dots, (i_r, j_r) \text{ e } (j_r, i_r) \\ \lambda_{ij} + \varepsilon_k, \text{ se } \varepsilon_k \geq 0 \text{ para } 1 \leq k \leq \frac{(N-1)(N-2)}{2}, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Então,  $\psi$  é estável.

**Demonstração:**

Seja  $J$  uma estrutura quase complexa na qual  $\psi : (M, J_1) \longrightarrow (F(N), J)$  é holomorfa. Então de acordo com o Lema 3.2.2 temos:

$$\begin{aligned} I_{\Lambda'}^{\phi}(q) &= I_{\Lambda}^{\phi}(q) + \int_M 2\varepsilon_1 \left( \left| \Pi_1 \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_3 \right|^2 + \left| \Pi_3 \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_1 \right|^2 \right) v_g + \dots \\ &+ \dots + 2Re \int_M \varepsilon_l \left( \left| \Pi_1 \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_N \right|^2 + \left| \Pi_N \frac{\partial q}{\partial z} \Pi_1 \right|^2 \right) v_g \end{aligned}$$

Portanto, de acordo com o teorema de Lichnerowicz 3.2.4  $I_{\Lambda}^{\phi}(q) \geq 0$ , e todo  $\varepsilon_k \geq 0$ , para  $1 \leq k \leq \binom{N}{2} - (N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$ . ■

**Definição 3.2.6** Uma métrica quase-hermitiana sobre  $F(N)$  é dita  $(1,2)$ -simplética se  $(d\Omega)^{1,2} = 0$ , onde  $(d\Omega)^{1,2}$  denota a componente  $(1,2)$  de  $d\Omega$ .

**Observação 3.2.7** Foi provado por Paredes em [8] que a métrica dada pela matriz simétrica:

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{2}+1}{2} & \frac{2\sqrt{2}+3}{2} & 8 \\ \frac{1}{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & \frac{17}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}+1}{2} & \sqrt{2} & 0 & 1 & 1+\pi \\ \frac{2\sqrt{2}+3}{2} & \sqrt{2}+1 & 1 & 0 & \pi \\ 8 & \frac{17}{2} & 1+\pi & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

é  $(1,2)$ -simplética em  $F(5)$ .

Observemos que esta métrica é uma perturbação de métrica Kähler

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{2}+1}{2} & \frac{2\sqrt{2}+3}{2} & \frac{2\sqrt{2}+3}{2} + \pi \\ \frac{1}{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 + \pi \\ \frac{2\sqrt{2}+1}{2} & \sqrt{2} & 0 & 1 & 1+\pi \\ \frac{2\sqrt{2}+3}{2} & \sqrt{2}+1 & 1 & 0 & \pi \\ \frac{2\sqrt{2}+3}{2} + \pi & \sqrt{2}+1 + \pi & 1+\pi & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

na qual  $\varepsilon_{15} = 8 - (\frac{2\sqrt{2}-3}{2} + \pi)$ ,  $\varepsilon_{25} = \frac{17}{2} - (\sqrt{2} + 1 + \pi)$  e os  $\varepsilon_{ij}$  restantes são nulos.

# Capítulo 4

## Torneios e Geometria das Variedades Bandeira Não-Degeneradas

Neste capítulo vamos relacionar o estudo da geometria complexa das variedades bandeira não-degeneradas  $F(N)$ , aplicações harmônicas em  $F(N)$  e a teoria de torneios.

### 4.1 Torneios e Estruturas Quase-complexas

**Definição 4.1.1** *Um torneio ou  $n$ -torneio  $\tau$ , consiste de um conjunto finito  $p_1, \dots, p_n$  de vértices ou jogadores distintos tal que cada par de vértices estão unidos por exatamente um arco  $p_i \rightarrow p_j$ .*

**Definição 4.1.2** *Sejam  $\tau_1$  um torneio com  $n$  jogadores  $\{1, \dots, n\}$  e  $\tau_2$  um torneio com  $m$  jogadores  $\{1, \dots, m\}$ . Um homomorfismo entre  $\tau_1$  e  $\tau_2$  é uma aplicação  $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  tal que*

$$i \rightarrow j \Leftrightarrow \phi(i) \rightarrow \phi(j)$$

ou

$$\phi(i) = \phi(j).$$

Quando  $\phi$  é bijetiva dizemos que  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são isomorfos.

Cada torneio determina um vetor placar  $(s_1, \dots, s_n) : 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$ ; tal que  $\sum_{i=1}^n s_i = \binom{n}{2}$

**Definição 4.1.3** O torneio com  $n$  jogadores  $\{1, \dots, n\}$ , definido por

$$i \rightarrow j \Leftrightarrow i < j,$$

é chamado de torneio canônico. O seu vetor placar é  $(0, 1, \dots, n)$ .

Por exemplo para  $F(3)$  e  $F(4)$  temos respectivamente

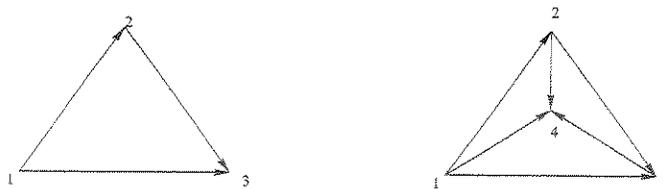


Figura 4.1: são torneios canônicos

**Proposição 4.1.4** Os torneios gozam das duas seguintes propriedades básicas:

- 1) Se dois torneios  $\tau_1$  e  $\tau_2$  são isomorfos, então eles têm o mesmo vetor placar.
- 2) Se um torneio  $\tau$  tem um circuito  $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow i_1$  então ele tem um 3-ciclo.

A recíproca da propriedade 1) não é verdadeira como mostra o exemplo abaixo, (ver [14] para maiores detalhes):

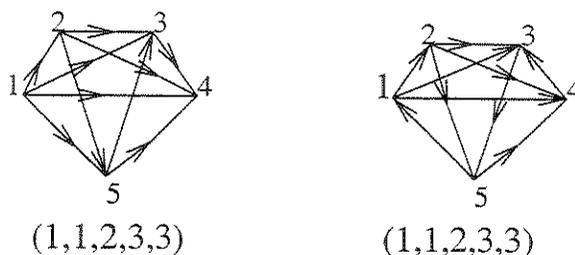


Figura 4.2: Torneios não isomorfos mas com mesmo vetor placar

Dada uma estrutura quase complexa invariante  $J$ , podemos fazer-lhe corresponder naturalmente um torneio  $\tau_j$  com  $N$  jogadores  $\{1, \dots, N\}$  da seguinte maneira se  $J(a_{ij}) = (a'_{ij})$  então  $\tau_j$  é tal que para  $i < j$

$$i \rightarrow j \Leftrightarrow a'_{ij} = \sqrt{-1}a_{ij}$$

e

$$i \leftarrow j \Leftrightarrow a'_{ij} = -\sqrt{-1}a_{ij}$$

**Exemplo 4.1.5** Consideremos

$$F(3) = \frac{U(3)}{U(1) \times U(1) \times U(1)}$$

Neste caso  $J : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} : a_{12}, a_{13}, a_{23} \in \mathbb{C} \right\}$$

Se  $J$  é uma estrutura quase complexa invariante definida por:

$$J \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -\bar{a}_{12} & 0 & a_{23} \\ -\bar{a}_{13} & -\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1}a_{12} & -\sqrt{-1}a_{13} \\ -\sqrt{-1}\bar{a}_{12} & 0 & \sqrt{-1}a_{23} \\ -\sqrt{-1}\bar{a}_{13} & \sqrt{-1}\bar{a}_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

então o torneio  $\tau_j$  associado é:

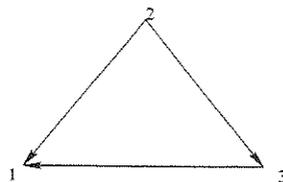


Figura 4.3: torneio associado

**Definição 4.1.6** Uma variedade quase complexa  $(F(N), J)$  é dita uma variedade complexa se  $J$  é integrável. Neste caso cada aplicação entre sistemas de coordenadas complexas locais é holomorfa.

O seguinte resultado é devido a Burstall e Salamon [4].

**Teorema 4.1.7** [4] *Existe uma correspondência um a um entre estruturas quase complexas invariantes  $J$  em  $F(N)$  e  $n$ -torneios  $\tau_j$  tal que  $J$  é integrável se e somente se  $\tau_j$  não contém 3-ciclos.*

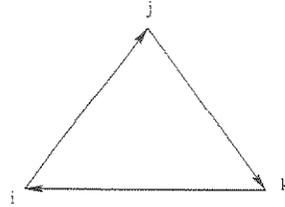


Figura 4.4: É um 3-ciclo

## 4.2 As formas de Maurer-Cartan de $U(N)$

Sejam  $V, W \in \mathbb{C}^N$ ,  $V = (v_1, \dots, v_N)$  e  $W = (w_1, \dots, w_N)$ . Munimos  $\mathbb{C}^N$  com o produto interno hermitiano usual.

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^N v_i \bar{w}_i$$

A seguinte proposição contém algumas propriedades deste produto interno, cuja prova é simples:

**Proposição 4.2.1** *Se  $V, W, Z \in \mathbb{C}^N$  e  $a, b \in \mathbb{C}$  então*

1.  $\overline{\langle V, W \rangle} = \langle W, V \rangle$
2.  $\langle aV + bZ, W \rangle = a \langle V, W \rangle + b \langle Z, W \rangle$
3.  $\langle V, aW + bZ \rangle = \bar{a} \langle V, W \rangle + \bar{b} \langle V, Z \rangle$

**Definição 4.2.2** *Um referencial consiste de um conjunto ordenado de  $N$  vetores linearmente independentes  $(z_1, \dots, z_N)$  tais que  $z_1 \wedge \dots \wedge z_N \neq 0$ .*

Usaremos a convenção

$$\bar{v}_i = v_{\bar{i}} \text{ e } \overline{f_{i\bar{j}}} = f_{\bar{i}j}$$

O referencial é chamado unitário se

$$\langle z_i, z_j \rangle = \delta_{i\bar{j}} \tag{4.1}$$

$$\text{onde } \delta_{i\bar{j}} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

O espaço dos referenciais unitários podem ser identificados com o grupo unitário  $U(N)$ . Escrevemos

$$dz_i = \sum_j \omega_{i\bar{j}} z_j \quad (4.2)$$

onde  $w_{ij}$  são as 1-formas, conhecidas como as formas de Maurer-Cartan.

**Proposição 4.2.3** *As formas de Maurer-Cartan são anti-hermitianas, isto é, satisfazem*

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}i} = 0 \quad (4.3)$$

**Demonstração:**

Derivando 4.1 temos

$$\langle dZ_i, Z_j \rangle + \langle Z_i, dZ_j \rangle = 0$$

Agora usando (3.2) obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \sum \omega_{i\bar{k}} Z_k, Z_j \right\rangle + \left\langle Z_i, \sum \omega_{j\bar{k}} Z_k \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \sum \omega_{i\bar{k}} Z_k, Z_j \right\rangle + \overline{\left\langle \sum \omega_{j\bar{k}} Z_k, Z_i \right\rangle} &= 0 \end{aligned}$$

Usando a linearidade do produto interno e usando novamente (3.1) temos

$$\begin{aligned} \sum \omega_{i\bar{k}} \langle Z_k, Z_j \rangle + \sum \overline{\omega_{j\bar{k}}} \langle Z_k, Z_i \rangle &= 0 \\ \omega_{i\bar{j}} + \overline{\omega_{j\bar{k}}} &= 0 \end{aligned}$$

Isto é

$$\omega_{i\bar{j}} + \omega_{\bar{j}k} = 0$$

■

**Proposição 4.2.4** *As formas de Maurer-Cartan satisfazem a equação*

$$d\omega_{i\bar{j}} = \sum_k \omega_{i\bar{k}} \wedge \omega_{k\bar{j}}. \quad (4.4)$$

**Demonstração:**

Tomando a derivada exterior na equação (3.1) temos:

$$\begin{aligned}
\sum_j (dw_{i\bar{j}}z_j - w_{i\bar{j}}dz_j) &= 0 \\
\sum_j dw_{i\bar{j}}z_j - \sum_k w_{i\bar{k}}dz_k &= 0 \\
\sum_j dw_{i\bar{j}}z_j - \sum_k w_{i\bar{k}} \left( \sum_j w_{k\bar{j}}z_j \right) &= 0 \\
\sum_j dw_{i\bar{j}}z_j - \sum_j \left( \sum_k w_{i\bar{k}} \wedge w_{k\bar{j}}z_j \right) z_j &= 0 \\
\sum_j \left( dw_{i\bar{j}} - \sum_k w_{i\bar{k}} \wedge w_{k\bar{j}}z_j \right) z_j &= 0
\end{aligned}$$

Como  $z_j$  são linearmente independentes então:  $dw_{i\bar{j}} = \sum_k w_{i\bar{k}} \wedge w_{k\bar{j}}$  ■

### 4.3 Métricas Invariantes à Esquerda

Consideremos a variedade  $F(N)$  com uma estrutura quase complexa invariante  $J$  e torção associado  $\tau_j$ . Todas as métricas invariantes à esquerda sobre  $(F(N), J)$  têm a forma.

$$ds_\Lambda^2 = \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_{i\bar{j}} \otimes w_{\bar{i}j} \quad (4.5)$$

onde  $\Lambda = \lambda_{ij}$  é uma matriz real simétrica que satisfaz:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} > 0, & \text{se } i \neq j \\ = 0, & \text{se } i = j \end{cases} \text{ e as formas de Maurer-Cartan de } U(N) \text{ são tais que}$$

$$m^{1,0} = \text{gerado}_{i \rightarrow j} \{w_{i\bar{j}}\} \text{ e } m^{0,1} = \text{gerado}_{i \rightarrow j} \{w_{\bar{i}j}\}$$

O espaço  $m^{1,0}$  é o auto-espaço de  $J$  para o autovalor  $\sqrt{-1}$  e o  $m^{0,1}$  é o auto-espaço de  $J$  para o autovalor  $-\sqrt{-1}$ .

Observe que na fórmula 4.5 quando  $\lambda_{ij} = 1$ , para todo  $i, j$ , obtemos a métrica normal induzida pela forma de Cartan-Killing de  $U(N)$ .

**Proposição 4.3.1** *As métricas 4.5 chamadas métricas de Borel, são quase hermitianas para cada estrutura quase complexa  $J$ , isto é  $ds_{\Lambda}^2(JX, JY) = ds_{\Lambda}^2(X, Y)$  para todos os campos vetoriais  $X, Y$ .*

**Demonstração:**

$$\begin{aligned}
ds_{\Lambda}^2(JX, JY) &= \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_{i\bar{j}} \otimes w_{\bar{i}j}(JX, JY) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_{i\bar{j}}(JX) w_{\bar{i}j}(JY) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{ij} J w_{i\bar{j}}(X) J w_{\bar{i}j}(Y) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{ij} \varepsilon_{ij} \sqrt{-1} w_{i\bar{j}}(X) \varepsilon_{ij} (-\sqrt{-1}) w_{\bar{i}j}(Y) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{ij} \varepsilon_{ij}^2 \sqrt{-1} (-\sqrt{-1}) w_{i\bar{j}}(X) w_{\bar{i}j}(Y) \\
&= \sum_{i,j} \lambda_{ij} w_{i\bar{j}} \otimes w_{\bar{i}j}(X, Y) \\
&= ds_{\Lambda}^2(X, Y)
\end{aligned}$$

para cada campo vetorial  $X$  e  $Y$  onde

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \rightarrow j \\ -1 & \text{se } j \rightarrow i \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.6)$$

■

## 4.4 Formas de Kähler e suas diferenciações exteriores

**Definição 4.4.1** *Seja  $J$  uma estrutura quase-hermitiana  $U(N)$ -invariante sobre  $F(N)$  e  $\tau_j$  o torneio associado a ela. A forma quase Kähler associada a  $J$  é definida para cada par de vetores tangentes  $X, Y$  por*

$$\Omega(X, Y) = ds_{\Lambda}^2(X, JY)$$

**Proposição 4.4.2** *Seja  $\Sigma_N$  o grupo de permutações de  $N$  elementos com identidade  $e$ . Para cada permutação  $\tau \in \Sigma_N$ , a forma quase Kähler  $\Omega$  se escreve como:*

$$\Omega = -2\sqrt{-1} \sum_{i < j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}, \quad (4.7)$$

onde

$$\mu_{\tau(i)\tau(j)} = \varepsilon_{\tau(i)\tau(j)} \lambda_{\tau(i)\tau(j)}$$

sendo  $\varepsilon_{ij}$  definido em 4.6.

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} \Omega(X, Y) &= ds_\Lambda^2(X, JY) \\ &= \sum_{i, j} \lambda_{\tau(i)\tau(j)} \omega_{\tau(i)\tau(j)}(X) J \omega_{\tau(i)\tau(j)}(Y) \\ &= \sum_{i, j} \lambda_{\tau(i)\tau(j)} \varepsilon_{\tau(i)\tau(j)} (-\sqrt{-1}) \omega_{\tau(i)\tau(j)}(X) \omega_{\tau(i)\tau(j)}(Y) \\ &= -\sqrt{-1} \left( \sum_{i < j} + \sum_{i > j} \right) \lambda_{\tau(i)\tau(j)} \varepsilon_{\tau(i)\tau(j)} [\omega_{\tau(i)\tau(j)}(X) \omega_{\tau(i)\tau(j)}(Y)] \\ &= -\sqrt{-1} \sum_{i < j} \varepsilon_{\tau(i)\tau(j)} \lambda_{\tau(i)\tau(j)} [\omega_{\tau(i)\tau(j)}(X) \omega_{\tau(i)\tau(j)}(Y) - \omega_{\tau(i)\tau(j)}(Y) \omega_{\tau(i)\tau(j)}(X)] \\ &= -2\sqrt{-1} \sum_{i < j} \varepsilon_{\tau(i)\tau(j)} \lambda_{\tau(i)\tau(j)} \mu_{\tau(i)\tau(j)}(X, Y) \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.4.3** [13] *Seja  $(F(N), J, ds_\Lambda^2)$  uma variedade bandeira e  $\Omega$  a forma quase Kähler associada a  $J$ . Então*

$$\frac{1}{4} d\Omega = \sum_{i < j < k} C_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)} \psi_{\tau(i)\tau(j)\tau(k)}, \quad (4.8)$$

onde

$$C_{ijk} = \mu_{ij} - \mu_{ik} + \mu_{jk} \quad (4.9)$$

e

$$\psi_{ijk} = \text{Im}(\omega_{i\bar{j}} \wedge \omega_{\bar{i}k} \wedge \omega_{j\bar{k}}). \quad (4.10)$$

**Demonstração:**

Diferenciando  $\Omega$  e usando as equações de Maurer-Cartan para  $U(N)$  deduzimos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{-1}}{2}d\Omega &= \sum_{i<j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} [d(\omega_{\tau(i)\tau(j)}) \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} - \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge (d\omega_{\tau(i)\tau(j)})] \\
&= \sum_{i<j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \left[ \sum_k \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} \right. \\
&\quad \left. - \sum_k \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(k)\tau(j)}} \right] \\
&= \sum_{i<j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \left[ (\omega_{\tau(i)\tau(i)} + \omega_{\tau(i)\tau(i)}) \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} + \right. \\
&\quad \left. + \omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge ((\omega_{\tau(j)\tau(j)} + \omega_{\tau(j)\tau(j)}) \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k \neq i,j} \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)} \right. \\
&\quad \left. - \left[ \sum_{k \neq i,j} \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(k)\tau(j)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)}} \right] \right] \\
&= 2\sqrt{-1} \sum_{i<j} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \sum_{k \neq i,j} \text{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)})
\end{aligned}$$

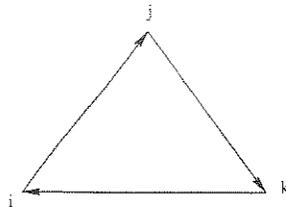
Então temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}d\Omega &= \left( \sum_{k<i<j} + \sum_{i<k<j} + \sum_{i<j<k} \right) \mu_{\tau(i)\tau(j)} \text{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) \\
&= \sum_{i<j<k} \mu_{\tau(j)\tau(k)} \text{Im}(\omega_{\tau(j)\tau(i)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}) \\
&\quad + \sum_{i<j<k} \mu_{\tau(i)\tau(k)} \text{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)}) \\
&\quad + \sum_{i<j<k} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \text{Im}(\omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(k)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(j)}) \\
&= - \sum_{i<j<k} \mu_{\tau(j)\tau(k)} \text{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(j)\tau(k)}}) \\
&\quad - \sum_{i<j<k} \mu_{\tau(i)\tau(k)} \text{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(j)\tau(k)}}) \\
&\quad - \sum_{i<j<k} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \text{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(i)\tau(k)}} \wedge \overline{\omega_{\tau(j)\tau(k)}})
\end{aligned}$$

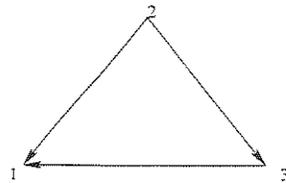
$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(j)\tau(k)} \operatorname{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}}) \\
 &- \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(k)} \operatorname{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}}) \\
 &+ \sum_{i < j < k} \mu_{\tau(i)\tau(j)} \operatorname{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}}) \\
 &= \sum_{i < j < k} (\mu_{\tau(i)\tau(j)} - \mu_{\tau(i)\tau(k)} + \mu_{\tau(j)\tau(k)}) \operatorname{Im}(\overline{\omega_{\tau(i)\tau(j)} \wedge \omega_{\tau(i)\tau(k)} \wedge \omega_{\tau(j)\tau(k)}})
 \end{aligned}$$

■

Denotamos por  $\mathbb{C}^{p,q}$  o espaço das formas complexas do tipo  $(p, q)$  sobre  $F(N)$ . Se  $i, j, k$  formam um 3-ciclo como na figura abaixo, então  $\omega_{i\bar{j}} \in m^{1,0}, \omega_{i\bar{k}} \in m^{1,0}$



e  $\omega_{j\bar{k}} \in m^{1,0}$  e portanto  $\psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3}$ . Da mesma forma, quando  $i, j, k$  não formam um 3-ciclo como na figura abaixo então  $\omega_{i\bar{j}} \in m^{1,0}, \omega_{i\bar{k}} \in m^{0,1}$  e  $\omega_{j\bar{k}} \in m^{1,0}$



e portanto  $\psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2}$ . Assim, para qualquer  $i, j, k$  temos que:

$$\psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{3,0} \oplus \mathbb{C}^{0,3}$$

ou

$$\psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2}$$

Como  $d\Omega$  é uma 3-forma, então ela tem partes  $(3,0), (2,1), (1,2)$  e  $(0,3)$  isto é :

$$d\Omega = (d\Omega)^{3,0} + (d\Omega)^{0,3} + (d\Omega)^{2,1} + (d\Omega)^{1,2}$$

**Observação 4.4.4** *Toda variedade de Kähler é (1,2)-simplética. A recíproca é claramente falsa, basta considerar uma métrica (1,2)-simplética para  $J$  não integrável.*

**Teorema 4.4.5** [9] *Seja  $\phi : (M, J_1, g) \longrightarrow (F(N), J, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  uma aplicação  $J$ -holomorfa e também assumimos que a variedade alvo é (1,2)-simplética. Então  $\phi$  é harmônica.*

**Definição 4.4.6** *Se  $J$  é uma estrutura quase complexa invariante sobre  $F(N)$ , então dizemos que  $F(N)$  é uma variedade quase Kähler se a forma  $\Omega$  associada a  $J$  for fechada isto é se  $d\Omega = 0$ . Quando  $J$  é integrável e  $\Omega$  é fechada dizemos que  $F(N)$  é uma variedade de Kähler.*

Para o próximo resultado vamos precisar do seguinte teorema:

**Teorema 4.4.7** [7] *O número de triângulos cíclicos num grafo completo com  $N$  vértices é:*

$$\frac{1}{24}(N^2 - N)$$

se  $N$  é ímpar ou

$$\frac{1}{24}N(N^2 - 4)$$

caso  $N$  seja par.

**Demonstração:** Observemos que todo triângulo não cíclico contém exatamente um vértice com duas extremidades terminadas. Seja  $T_i$  o número de vértices terminando no vértice  $a_i$ . Então qualquer par de tais vértices pertencerá a um triângulo não-cíclico. Visto que existem  $\frac{T_i(T_i - 1)}{2}$  triângulos não cíclicos associados com  $a_i$  e, conseqüentemente existem ao todo

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N T_i(T_i - 1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N T_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N T_i \quad (4.11)$$

triângulos não cíclicos no gráfico.

Por outro lado, a soma dos  $T_i$  é o número total das extremidades, i.e,

$$\sum_{i=1}^n T_i = \frac{N(N-1)}{2} \quad (4.12)$$

e combinando isto com a equação 4.11 vemos que na ordem, para maximizar o número de triângulos cíclicos devemos minimizar  $\sum_{i=1}^n T_i^2$  sujeito a equação 4.12.

O cálculo simples construído para solucionar este problema mínimo é dado por  $T_i = \frac{(N-1)}{2}$  e, conseqüentemente, esta é também a solução quando  $N$  é ímpar. Neste caso substituindo na equação 4.11 dá o número total de triângulos não cíclicos  $\frac{N(N-1)(N-3)}{8}$  e subtraindo do número total de triângulos  $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$  dá  $\frac{N^2 - N}{24}$ .

No caso  $N$  par, o mínimo é atingido pelo conjunto de todos os  $T_i$  iguais a  $\frac{1}{2}N$  ou  $\frac{1}{2}N - 1$ , para se dizer  $T_i = \frac{1}{2}N + p$ ,  $p > 0$ , então por causa da equação 4.12 algum  $T_i$  pode ser além disso diminuído para permitir

$$T_1 = \frac{1}{2}N + p - 1, T_2 = \frac{1}{2}N - p + 1$$

Novamente da equação 4.12 é necessário que  $T_i = \frac{1}{2}N$  para  $\frac{1}{2}N$  valores de  $i$  e  $T_i = \frac{1}{2}N - 1$  para os outros  $\frac{1}{2}N$ . Visto que, uma reduzida fronteira do número de triângulo não cíclico é

$$\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N \times \frac{1}{2}(\frac{1}{2}N - 1) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}N - 1)(\frac{1}{2}N - 2) = \frac{N(N-2)^2}{8}$$

e subtraindo do número total de triângulos dá

$$\frac{N(N^2 - 4)}{24}.$$

■

**Teorema 4.4.8** *A métrica de Killing sobre  $F(N)$  é (1,2)-simplética se e somente se  $N \leq 3$ .*

**Demonstração:** Fazendo  $\tau = I$  na equação 4.8 temos:

$$\frac{1}{4}d\Omega = \sum_{i < j < k} C_{ijk} \psi_{ijk}$$

Portanto  $ds_\lambda^2$  é (1,2)-simplética se e somente se  $(d\Omega)^{1,2} = 0 \Leftrightarrow C_{ijk} = 0$  se

$$\psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{2,1} \oplus \mathbb{C}^{1,2} \quad (4.13)$$

Então como  $C_{ijk} = \mu_{ij} - \mu_{ik} + \mu_{jk}$  e  $\mu_{ij} = \varepsilon_{ij} \lambda_{ij}$ , e a métrica é de Killing então  $\lambda_{ij} = 1$  e portanto  $C_{ijk} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ik} + \varepsilon_{jk} \neq 0$ .

Logo 4.13 é equivalente a

$$\psi_{ijk} \in \mathbb{C}^{0,3} \oplus \mathbb{C}^{3,0} \quad (4.14)$$

para todo  $i < j < k$ . Daí

$$\omega_{i\bar{j}}, \omega_{i\bar{j}}, \omega_{j\bar{k}} \in m^{1,0}$$

ou

$$\omega_{\bar{j}i}, \omega_{\bar{i}k}, \omega_{\bar{j}k} \in m^{1,0}$$

$\Rightarrow i, j, k$  formam um 3-ciclo. Assim, o número de 3-ciclo em um torneio  $\tau_J$  é igual a  $\binom{N}{3}$ . Entretanto, isto é impossível pois de acordo com o teorema acima temos que o número de 3-ciclos no torneio é menor ou igual a  $\frac{1}{24}(N^2 - N)$  se  $N$  é ímpar ou  $\frac{1}{24}N(N^2 - 4)$  caso  $N$  seja par. ■

# Bibliografia

---

- [1] M. Black, Harmonic maps into homogeneous spaces, *Pitman Res Notes Math, Ser.*, vol. **255**, Longman Harlow, (1991).
- [2] A. Borel, Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups, *Proc. Nat. Acad. of Sci. USA* **40** (1954) 1147-1151.
- [3] A. Borel and Hirzebruch F., L.M.: Some geometrical aspects of the 2-dimensional Toda equations, *Geometry, Topology and Physics*, B. Apanasov et al (eds), *Walter de Gruyter* (1997).
- [4] F. E. Burstall and S. Salamon, Tournaments, flags and harmonic maps, *Math. Ann.* **277** (1987), 249-265.
- [5] J. Eells e L. Lemaire, Selected topics in harmonic maps, CBMS regional Conf. Ser. in Math., **50** *Amer. Math*
- [6] J. Eells and J. C. Wood, Harmonic maps from surfaces to complex projective Spaces, *Advances in Mathematics* **49** (1983), 217-263.
- [7] D. Gale, On the number of faces of a convex polygon, *Canada J. Math.* **16**(1964), 12-16.
- [8] M. Paredes, Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira, Tese, *Univerdade Estadual de Campinas-IMECC*, (2000).
- [9] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variétés Kählériennes, *Symposia Mathematica III* Bologna, (1970), 341-402.

- [10] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, *Interscience Publishers John Wiley and Sons*, vol II (1969).
- [11] X. Mo and C. J. C. Negreiros, Equiharmonic tori in flag manifolds, Relatorio de Pesquisa **53/99**, *IMECC-UNICAMP*(1999).
- [12] X. Mo and C. J. C. Negreiros, Tournaments and geometry of full flag manifolds, Proceedings of the XI Brazilian Topology Meeting, Rio Claro, Brazil, World Scientific.
- [13] X. Mo and C.J.C. Negreiros, Hermitian structures on flag manifolds, Relatório de Pesquisa **35/98**, *IMECC-UNICAMP*(1998).
- [14] J.W Moon, Topics on tournaments, Holt, Rinehart and Winston, *New York*,(1968).
- [15] C. J. C. Negreiros, Some remarks about harmonic maps into flag manifolds, *Indiana University Mathematics Journal* 37 N° 3 (1988).
- [16] C. J. C. Negreiros, harmonic maps from compact Riemann surfaces into flag manifolds, Thesis, *University of Chicago*, (1987).
- [17] C. J. C. Negreiros, Equivariant harmonic maps into homogeneous spaces, *J. Math. Phys* 31(1990) N° 7,1635-1642 (Reviewer Martin A. Guest)(58E20)-(58E40).
- [18] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups( Classical Solutions of the Chern-Simons Model) *J. Diff. Geometry* **30**(1989).