ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

SOBRE CORPOS NÃO-COMUTATIVOS

MARILENE TEIXEIRA BALBI

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO

AUTORIZAÇÃO PARA QUE A UNICAMP POSSA FORNECER, A PREÇO DE CUSTO, CÓPIAS DA TESE A INTERESSADOS

Nome do Aluno: MARILENE TEIXEIRA BALBI
Nº de Identificação: 795251
Endereço para Correspondência: IMECC - UNICAMP
Curso: matemática
Nome do Orientador: Prof. Dr. João Bosco Prolla
Título da Dissertação ou Tese: ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS SOBRE CORPOS NÃO-COMUTATIVOS
Data proposta para a Defesa:

(O Aluno deverá assinar um dos 3 ítens abaixo)

1) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas a partir desta data, a fornecer, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

13/8/82 — Marilene Teixeira Balbi

Data — assinatura do aluno

2) Autorizo a Universidade Estadual de Campinas, a fornecer, a partir de dois anos após esta data, a preço de custo, cópias de minha Dissertação ou Tese a interessados.

__/__/__ — ____________

Data — assinatura do aluno

3) Solicito que a Universidade Estadual de Campinas me consulte, dois anos após esta data, quanto à minha autorização para o fornecimento de cópias de minha Dissertação ou Tese, a preço de custo, a interessados.

__/__/__ — ____________

Data — assinatura do aluno

De acordo
João Bosco Prolla
Orientador

ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS
SOBRE CORPOS NÃO-COMUTATIVOS

MARILENE TEIXEIRA BALBI

Orientador:

Prof. Dr. João Bosco Prolla

Tese apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Setembro/1982

ÍNDICE

§1 - TOPOLOGIAS τ_F-ADMISSÍVEIS

Neste capítulo reuniremos definições e enunciados de teoremas e proposições da teoria de espaços vetoriais topológicos sobre anéis de divisão topológicos necessários ao desenvolvimento de nossa Tese. As demonstrações encontram-se nos textos referidos na bibliografia.

Aqui e nos capítulos seguintes, consideraremos, salvo menção em contrário, apenas espaços vetoriais sobre um anel de divisão topológico de Hausdorff e não-discreto (F,τ_F).

DEFINIÇÃO 1.1 - Seja E um espaço vetorial (EV). Diremos que uma topologia τ em E é τ_F-*admissível* se (E,τ) é um espaço vetorial topológico (EVT) sobre (F,τ_F), isto é, se as aplicações

(i) - $(x,y) \to x + y$ de $E \times E$ em E

e

(ii) - $(\lambda,x) \to \lambda x$ de $F \times E$ em E

são contínuas, onde $E \times E$ e $F \times E$, estão munidos de suas topologias produto.

TEOREMA 1.2 - *Seja* (E,τ) *um* EVT. *Se* $\mathcal{V}$ *é um sistema fundamental de* τ-*vizinhanças do* 0 *em* E, *então* $\mathcal{V}$ *é uma base de filtro sobre* E *satisfazendo as seguintes condições:*

(V1) *para todo* $W \in \mathcal{V}$ *existe* $V \in \mathcal{V}$ *tal que* $V + V \subset W$;

(V2) *para todo* $W \subsetneq \mathcal{V}$ *existe uma* τ_F-*vizinhança* U *do* 0 *em* F *e existe* $V \in \mathcal{V}$ *com* $U.V \subset W$;

(V3) *para todo* $W \in \mathcal{V}$ *e para todo* $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, *existe* $V \in \mathcal{V}$ *tal que* $W \subset \lambda V$;

(V4) *para todo* $x \in E$ *e para todo* $W \in \mathcal{V}$ *existe uma* τ_F-*vizinhança* V *do* 0 *em* F *tal que* $Vx \subset W$.

Reciprocamente, dada uma base de filtro $\mathcal{V}$ *sobre* E *satisfazendo* (V1) - (V4) *existe uma única topologia* τ_F-*admissível em* E *que admite* $\mathcal{V}$ *por sistema fundamental de vizinhanças do* 0.

PROVA: ver [3], teorema 2.14∎

EXEMPLOS:

1.3 - Se E é um EV e se τ e τ_0 são topologias τ_F-admissíveis em E, por $\overline{\tau_0}^{\tau}$ denotaremos a topologia τ_F-admissível em E que admite para vizinhanças do 0 em E as τ-aderências $\overline{U}^{\tau}$ das τ_o-vizinhanças U do 0 em E.

1.4 - Sejam (E,τ) e (G,η) espaços vetoriais topológicos e seja A uma aplicação linear de E em G. Por $A^{-1}(\eta)$ (resp. $\overline{A^{-1}(\eta)}^{\tau}$) denotaremos a topologia τ_F-admissível em E que tem para sistema fundamental de vizinhanças do 0 o conjunto $\mathcal{B}=\{A^{-1}(V);V\in\mathcal{V}\}$ (resp. $\mathcal{B}=\{\overline{A^{-1}(V)}^{\tau}, V\in \mathcal{V}\}$) onde $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de η-vizinhanças do 0 em G. Evidentemente, $A^{-1}(\tau)$ é a menos fina das topologias τ_F-admissíveis em E que tornam A contínua e é chamada *topologia imagem inversa por* A *da topologia de* G.

No caso particular em que E é um subespaço vetorial de G e A é a imersão canônica, I_E, de E em G, $I_E^{-1}(\eta)$ é chamada topologia induzida em E por η e anotada η_E.

Se A é sobrejetiva, por $A(\tau)$ (resp. $\overline{A(\tau)}^{\eta}$), denotaremos a topologia τ_F-admissível em G que admite por sistema fundamental de vizinhanças do 0 o conjunto $\mathcal{W}=\{A(U);\ U\in\mathcal{U}\}$ (resp. $\mathcal{W}=\{\overline{A(U)}^{\eta};\ U\in\mathcal{U}\}$), onde $\mathcal{U}$ é um sistema fundamental de τ-vizinhanças do 0 em E.

Seja E um EV e seja $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ uma família não-vazia de topologias τ_F-admissíveis em E.

1.5 - Por $\tau:=\sup\{\tau_\alpha;\alpha\in\Lambda\}$ denotaremos a topologia τ_F-admissível em E, chamada *supremo das topologias* τ_α, que satisfaz as seguintes condições:

(1) $\tau_\alpha\subset\tau$ para todo $\alpha\in\Lambda$;

(2) se η é uma topologia τ_F-admissível em E tal que $\tau_\alpha\subset\eta$ para todo $\alpha\in\Lambda$, então $\tau\subset\eta$.

1.6 - Por $\xi:=\inf\{\tau_\alpha;\alpha\in\Lambda\}$ denotaremos a topologia τ_F-admissível em E, chamada *ínfimo das topologias* τ_α, que satisfaz as seguintes condições:

(1) $\xi\subset\tau_\alpha$ para todo $\alpha\in\Lambda$;

(2) se μ é uma topologia τ_F-admissível em E tal que para cada $\alpha\in\Lambda$ $\mu\subset\tau_\alpha$, então $\mu\subset\xi$.

DEFINIÇÃO 1.7 - Seja E um EV e sejam U e B subconjuntos não-vazios de E. Diremos que:

(i) - U *absorve* B se existe uma τ_F-vizinhança V do 0 em

F tal que $V.B \subset U$.

(ii) - U é *absorvente* se U absorve $\{x\}$, para todo $x \in E$.

DEFINIÇÃO 1.8 - Seja (E,τ) um EVT e B um subconjunto de E. Diremos que B é τ-*limitado* (ou *limitado* em (E,τ)) se toda τ-vizinhança U do 0 em E absorve B.

DEFINIÇÃO 1.9 - Seja (E,τ) um EVT e seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E. Diremos que ξ é τ-*fechada* se ξ admite um sistema fundamental de vizinhanças τ-fechadas do 0.

DEFINIÇÃO 1.10 - Seja (E,τ) um EVT e seja V uma parte não-vazia de E. Diremos que V é τ-*bornívora* se V absorve todo τ-limitado de E.

DEFINIÇÃO 1.11 - Seja (E,τ) um EVT e ξ uma topologia τ_F-admissível em E. Diremos que ξ é τ-*bornívora* se ξ admite um sistema fundamental de vizinhanças τ-bornívoras do 0.

Se (E,τ) e (G,η) são espaços vetoriais topológicos, por $\mathcal{L}(E;G)$ denotaremos o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de E em G.

DEFINIÇÃO 1.12 ($\mathfrak{S}$-topologias) - Sejam (E,τ) e (G,η) EVT e seja $\mathfrak{S}$ um conjunto de partes τ-limitadas de E satisfazendo a:

(i) - se $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$, existe $S_3 \in \mathfrak{S}$ tal que $S_1 \cup S_2 \subset S_3$;

(ii) - se $S \in \mathfrak{S}$, então $\lambda S \in \mathfrak{S}$ para todo $\lambda \in F$;

(iii)- $\bigcup \{S;\ S \in \mathfrak{S}\} = E$.

Se $\mathcal{B}$ um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em (G,η), para cada $S \in \mathfrak{S}$ e para cada $V \in \mathcal{V}$, seja

$$W[S;V] := \{f;\ f \in \mathcal{L}(E;G),\ f(S) \subset V\}.$$

Claramente

$$\mathcal{B} := \{W[S;V]\ ;\ S \in \mathfrak{S},\ V \in \mathcal{B}\}$$

é uma base de filtro em $\mathcal{L}(E;G)$ satisfazendo (V1) - (V4) em 1.2. Logo, por 1.2, existe uma única topologia $\tau_{\mathfrak{S}}$ em $\mathcal{L}(E;G)$ tal que $(\mathcal{L}(E;G), \tau_{\mathfrak{S}})$ é um EVT e que admite $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}$ por sistema fundamental de vizinhanças do 0 em $\mathcal{L}(E;G)$.

Exemplos importantes de $\mathfrak{S}$-topologias são obtidos quando:

(i) - $\mathfrak{S}$ é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de E. Nesse caso $\tau_{\mathfrak{S}}$ é chamada *topologia da convergência pontual em* $\mathcal{L}(E;G)$.

(ii) - $\mathfrak{S}$ é a família de todos os subconjuntos pré-compactos de E. Nesse caso $\tau_{\mathfrak{S}}$ é chamada *topologia da convergência pré-compacta* em $\mathcal{L}(E;G)$.

Diremos que um subconjunto H de $\mathcal{L}(E;G)$ é $\mathfrak{S}$-*limitado* se H é limitado no EVT $(\mathcal{L}(E;G), \tau_{\mathfrak{S}})$. Em particular, se $\tau_{\mathfrak{S}}$ é a topologia da convergência pontual em $\mathcal{L}(E,G)$, diremos que H é *pontualmente limitado* se H é $\mathfrak{S}$-limitado em $\mathcal{L}(E;G)$, o que é equivalen te a: para cada $x \in E$ o conjunto $B(x):=\{f(x)\ ;\ f \in H\}$ é η-limitado em G.

PROPOSIÇÃO 1.13 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos e seja* $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ *são equivalentes:*

(i) - H *é equicontínuo;*

(ii) - *para cada* η-*vizinhança* V *do* 0 *em* G, $\cap\{f^{-1}(V)\ ;\ f \in H\}$ *é uma* τ-*vizinhança do* 0 *em* E;

(iii)- *para cada* η-*vizinhança* V *do* 0 *em* G, *existe uma* τ-*vizinhança* U *do* 0 *em* E *tal que* $\cup\{f(U)\ ;\ f \in H\} \subset V$.

PROPOSIÇÃO 1.14 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos e seja* H *um conjunto equicontínuo de aplicações lineares de* E *em* G. *Então* H *é pontualmente limitado.*

PROPOSIÇÃO 1.15 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos e seja* $H \subset \mathcal{L}(E;G)$. *Se* H *é equicontínuo e* H_1 *é a aderência de* H *em* G^E *munido da topologia produto, então* $H_1 \subset \mathcal{L}(E;G)$ *e é equicontínuo.*

PROVA: ver [8] ∎

PROPOSIÇÃO 1.16 - *Seja* $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ *um subconjunto equicontínuo. As restrições a* H *das seguintes topologias são as mesmas:*

(i) - *a topologia da convergência simples;*

(ii) - *a topologia da convergência pré-compacta.*

§2 - LIMITE PROJETIVO DE ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

TEOREMA 2.1 - *Sejam* E *um espaço vetorial,* $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma família de espaços vetoriais topológicos e* $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma família de aplicações lineares de* E *em* E_α. *Para cada* $\alpha \in \Lambda$, *seja* B_α *um sistema fundamental de* τ_α*-vizinhanças de* 0 *em* E_α. *Para cada conjunto finito* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Lambda$, *considere o elemento de* E *definido por*

$$(1) \qquad U := \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1} (U_{\alpha_i}),$$

onde $U_{\alpha_i} \in B_{\alpha_i}$, $i=1,\ldots,n$. *Seja* F *o conjunto de todos os elementos* U *de* E *definidos por* (1).

Então:

(i) - *F é uma base de filtro em* E *satisfazendo* (V1) - (V4) *em* 1.2;

(ii) - *A topologia* τ_F*-admissível em* E, *que admite* F *por sistema fundamental de vizinhanças do zero, é a menos fina topologia* τ_F*-admissível em* E *para a qual todas as aplicações* A_α, $\alpha \in \Lambda$, *são contínuas.*

PROVA: (i) - É evidente que F é uma base de filtro em E pois, para todo $U \in F$, $0 \in U$, o que implica que $\phi \notin F$ e se $U_1, U_2 \in F$, então $U_1 \cap U_2 \in F$. Mostremos que F satisfaz as condições (V1) - (V4) do teorema 1.2.

(a) - F satisfaz (V1). Seja $U \in F$. Então $U = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1} (U_{\alpha_i})$ para algum conjunto finito $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \Lambda$ onde $U_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$. Logo, para cada $i=1,\ldots,n$, existe $W_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ com $W_{\alpha_i} + W_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$. Então

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i}) + \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} [A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i}) + A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i})] \subset$$

$$\subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i} + W_{\alpha_i}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = U$$ e (V1) segue pois

$W := \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i}) \in \mathcal{F}$ é tal que $W + W \subset U$.

(b) - $\mathcal{F}$ satisfaz (V2). Seja $U \in \mathcal{F}$. Então $U = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ para algum conjunto finito $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \Lambda$ onde $U_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$. Então, para cada $i=1,\ldots,n$, existe uma τ_F-vizinhança V_{α_i} do 0 em F e existe $W_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ com $V_{\alpha_i} W_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$. Sejam $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$ e $W := \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i})$. Então V é uma τ_F-vizinhança do 0 em F, $W \in \mathcal{F}$ e $V W_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$ o que implica $V A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i}) \subset A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$.

Logo $V W = V \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = U$.

(c) - $\mathcal{F}$ satisfaz (V3). Sejam $U \in \mathcal{F}$ e $\lambda \neq 0$ dados. Então $U = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ para algum conjunto finito $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \in \Lambda$ onde $U_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$. Portanto, para cada $i=1,\ldots,n$, existe $W_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ tal que $W_{\alpha_i} \subset \lambda U_{\alpha_i}$ e, pondo $W := \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i})$, segue que $W \in \mathcal{F}$ e $W \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(W_{\alpha_i}) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(\lambda U_{\alpha_i}) = \lambda \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \lambda U$.

(d) - $\mathcal{F}$ satisfaz (V4). Sejam $x \in E$ e $U \in \mathcal{F}$. Então $U = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ para algum conjunto finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \Lambda$ onde $U_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$. Logo, para cada $i=1,\ldots,n$, existe uma τ_F-vizinhança W_{α_i} do 0 em F tal que $W_{\alpha_i} A_{\alpha_i}(x) \subset U_{\alpha_i}$. Seja $W := \bigcap_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}$. Então W é uma τ_F-vizinhança do 0 em F com

$$Wx = \left(\bigcap_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}\right) x = \bigcap_{i=1}^{n} W_{\alpha_i} \{x\} \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = U.$$

(ii) - De (i) e do teorema 1.2, existe uma única topologia τ_F-admissível em E, que denotaremos por τ, para a qual $\mathcal{F}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do zero. Da definição de τ segue que, para cada $\alpha \in \Lambda$, a aplicação linear A_α de (E,τ) em (E_α,τ_α) é contínua. Seja, agora, τ^1 uma outra topologia τ_F-admissível em E tal que, para cada $\alpha \in \Lambda$, $A_\alpha : (E,\tau^1) \to (E_\alpha,\tau_\alpha)$ é contínua. Afirmamos que $\tau \subset \tau^1$. De fato, seja U uma τ-vizinhança do zero em E. Então existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \subset U$ onde $V = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, para algum conjunto finito $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \Lambda$, e $U_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$. Da continuidade de $A_{\alpha_i} : (E,\tau^1) \to (E_{\alpha_i},\tau_{\alpha_i})$, $i=1,\ldots,n$, segue que V é uma τ^1-vizinhança do zero em E, o que é verda de também para U, pois $V \subset U$∎

DEFINIÇÃO 2.2 - A topologia τ_F-admissível em E definida e descrita no teorema 2.1 é chamada *topologia projetiva* em E com respeito à família $((E_\alpha,\tau_\alpha), A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Um EVT (E,τ) gerado como descrito no teorema 2.1 é chamado o *limite projetivo dos espaços vetoriais topológicos* (E_α,τ_α) *com relação às aplicações lineares* A_α e denotado por

$$(E,\tau) = \operatorname*{proj}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha), A_\alpha).$$

EXEMPLOS 2.3 - Da definição de topologia induzida, topologia produto, supremo de uma coleção de topologias e do teorema 2.1, podemos enunciar os seguintes exemplos:

2.3.1 - Seja (E,τ) um EVT e seja H um subespaço vetorial de E. Seja A uma aplicação linear de H em E. Obviamente $(H, A^{-1}(\tau)) = \operatorname{proj}((E,\tau), A)$. No caso particular em que A é a imersão canônica de H em E, conseqüentemente segue que $(H,\tau_H) = \operatorname{proj}((E,\tau), I_H)$.

2.3.2 - Seja $(E,\tau) = \prod_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$ o produto topológico da família de EVT $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Se denotarmos por P_α a projeção econômica de $\prod_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$ sobre E_α, $\alpha \in \Lambda$, temos que $(E,\tau) = \operatorname*{proj}_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha), P_\alpha)$.

2.3.3 - Seja E um EV e seja $\{\tau_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ uma família de topologias τ_F-admissíveis em E. Se $\tau = \sup \{\tau_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, então $(E,\tau) = \underset{\alpha \in \Lambda}{\text{proj}} ((E,\tau_\alpha), i_\alpha)$ onde, para cada $\alpha \in \Lambda$, i_α é a aplicação identidade em E.

PROPOSIÇÃO 2.4 - *Seja* $(E,\tau) = \underset{\alpha \in \Lambda}{\text{proj}} ((E_\alpha,\tau_\alpha), A_\alpha)$, *onde, para cada* $\alpha \in \Lambda$, (E_α,τ_α) *é um* EVT *de Hausdorff. Então* (E,τ) *é um* EVT *de Hausdorff se, e somente se,* $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker (A_\alpha) = \{0\}$.

PROVA: Desde que τ é uma topologia de Hausdorff em E se, somente se, $\bigcap_{V \in \mathcal{B}} V = \{0\}$, onde $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de τ-vizinhanças do 0 em E, é suficiente provarmos que, sob as hipóteses, $\bigcap_{V \in \mathcal{B}} V = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker (A_\alpha)$. Seja $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker (A_\alpha)$ e seja $V \in \mathcal{B}$. Então $V = \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ onde U_{α_i} é uma τ_{α_i}-vizinhança básica do zero em E_{α_i}, $i=1,\dots,n$. Desde que $A_{\alpha_i}(x) = 0 \in U_{\alpha_i}$, temos que $x \in V$. Como V foi escolhido arbitrariamente em $\mathcal{B}$, segue que

$$\text{(a)} \quad \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker (A_\alpha) \subset \bigcap_{V \in \mathcal{B}} V.$$

Reciprocamente, seja $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}} V$ e seja $\alpha \in \Lambda$ dados. Seja W_α uma τ_α-vizinhança do zero em E. Então $U = A_\alpha^{-1}(W_\alpha) \in \mathcal{B}$ pois $\{\alpha\}$ é um subconjunto finito de Λ. Logo $x \in U$, o que implica que $A_\alpha(x) \in W_\alpha$ e, portanto, $A_\alpha(x) = 0$

pois (E_α, τ_α) é um EVT de Hausdorff. Como $\alpha \in \Lambda$ foi escolhido arbitrariamente, $x \in \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker (A_\alpha)$. Logo

(b) $\bigcap_{V \in \mathcal{B}} V \subset \bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker (A_\alpha)$ ∎

NOTA: Na prova de (a) não foi usado o fato de (E_α, τ_α) ser um EVT de Hausdorff. Portanto, se (E, τ) é um EVT de Hausdorff, então $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker (A_\alpha) = \{0\}$.

COROLÁRIO 2.5 - *Nas hipóteses da proposição 2.4,* (E, τ) *é um* EVT *de Hausdorff se, e somente se, para cada* $x \in E$, $x \neq 0$, *existe* $\alpha \in \Lambda$ *e uma* τ_α*-vizinhança* U_α *do zero em* E_α *tal que* $A_\alpha(x) \notin U_\alpha$.

PROVA: Imediata de 2.4∎

PROPOSIÇÃO 2.6: *Se* $(E, \tau) = \operatorname{proj}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha, \tau_\alpha), A_\alpha)$ *e se* (G, η) *é um* EVT *arbitrário, então uma aplicação linear* A *de* G *em* E *é contínua se, e somente se, para cada* $\alpha \in \Lambda$, *a aplicação linear* $A_\alpha \circ A$ *de* G *em* E_α *é contínua.*

PROVA: Suponhamos que $A:(G, \eta) \to (E, \tau)$ seja contínua. Então, da definição de τ, segue imediatamente que, para todo $\alpha \in \Lambda$, $A_\alpha \circ A:(G, \eta) \to (E_\alpha, \tau_\alpha)$ é contínua. Reciprocamente, seja $\alpha \in \Lambda$ dado e suponhamos que $A_\alpha \circ A:(G, \eta) \to (E_\alpha, \tau_\alpha)$ seja contínua. Seja V uma τ-vizinhança do 0 em E. Então, da definição de τ, podemos garantir a existência de um conjunto finito $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \Lambda$ e, para cada $i=1,\ldots,n$ uma τ_{α_i}-vizinhança básica U_{α_i} do 0 em E_{α_i} tal que $U := \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset V$. Portanto $A^{-1}(U) = A^{-1} \bigcap_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} A^{-1}(A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})) =$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} (A_{\alpha_i} \circ A)^{-1} (U_{\alpha_i}) \subset A^{-1}(V).$$

Por hipótese, $(A_{\alpha_i} \circ A^{-1})(U_{\alpha_i})$ é uma η-vizinhança do 0 em G e portanto $A^{-1}(U)$ também o é. Como $A^{-1}(U) \subset A^{-1}(V)$, segue que $A^{-1}(V)$ é uma η-vizinhança do 0 em G ∎

PROPOSIÇÃO 2.7: *Se* $(E,\tau) = \operatorname{proj}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),A_\alpha)$ *e se* (G,η) *é um EVT arbitrário, então um conjunto* H *de aplicações lineares de* G *em* E *é equicontínuo se, e somente se, para cada* $\alpha \in \Lambda$, $H_\alpha = \{A_\alpha \circ T\ ;\ T \in H\}$ *é um conjunto equicontínuo de aplicações lineares de* G *em* H_α.

PROVA: Suponhamos que H seja um conjunto equicontínuo de aplicações lineares de G em E e seja $\alpha \in \Lambda$ dado. Desde que para todo $T \in H$, $T \in \mathcal{L}(G;E)$, segue que

$$H_\alpha := \{A_\alpha \circ T\ ;\ T \in H\} \subset \mathcal{L}(G;E_\alpha)$$

por 2.6. Seja V uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α. Por hipótese, existe uma η-vizinhança U do 0 em G tal que $T(U) \subset A_\alpha^{-1}(V)$

para todo $T \in H$. Portanto $(A_\alpha \circ T)(U) \subset V$ para todo $T \in H$, o que mostra que $H_\alpha \subset \mathcal{L}(G;E_\alpha)$ é equicontínuo $\forall \alpha \in \Lambda$. Reciprocamente, admitamos que H é um conjunto de aplicações lineares de G em E tal que $H_\alpha = \{A_\alpha \circ T\,;\, T \in H\}$ é um conjunto equicontínuo de aplicações lineares de G em E_α para cada $\alpha \in \Lambda$. Então $H_\alpha \subset \mathcal{L}(G;E_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Seja V uma τ-vizinhança do 0 em E. Pela definição de τ, existe um conjunto finito $J = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subset \Lambda$ e para cada $\alpha_i \in J$ uma τ_{α_i}-vizinhança U_{α_i} do 0 em E_{α_i} tal que $\bigcap_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset V$. Seja $1 \leq i \leq m$. Desde que U_{α_i} é uma τ_{α_i}-vizinhança do 0 em E_{α_i}, existe uma η-vizinhança V_i do 0 em G com $(A_{\alpha_i} \circ T)(V_i) \subset U_{\alpha_i}$, para todo $T \in H$. Seja $W = \bigcap_{i=1}^{m} V_i$ e seja $T \in H$. Desde que W é uma η-vizinhança do 0 em G, $T(W) \subset \bigcap_{i=1}^{m} T(V_i) \subset \bigcap_{i=1}^{m} (A_{\alpha_i}^{-1} \circ A_{\alpha_i})(T(V_i)) =$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}^{-1}(A_\alpha \circ T(V_i)) \subset \bigcap_{i=1}^{m} A_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset V$$

e, como T foi escolhido em H arbitrariamente, segue que $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ é equicontínuo ∎

PROPOSIÇÃO 2.8: *Seja* $(E,\tau) = \operatorname{proj}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha), A_\alpha)$ *e admitamos que* $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} \ker(A_\alpha) = \{0\}$. *A aplicação* $J : E \to \prod_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$ *definida* *por* $J(x) = (A_\alpha(x))_{\alpha \in \Lambda}$, $x \in E$, *é um isomorfismo topológico entre* (E,τ) *e* $(J(E),\Pi_{J(E)})$, *onde* Π *denota a topologia produto de* $\prod_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$.

PROVA: É óbvio que J é uma aplicação linear injetiva de E em $\prod_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$. Mostremos agora que J é contínua. Para isso, seja $\alpha \in \Lambda$ dado e seja P_α a projeção canônica de $\prod_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$ sobre E_α. Como $P_\alpha \circ J = A_\alpha : E \to E$ é contínua, a afirmação segue de 2.6. Consideremos agora $J^{-1} : J(E) \to E$. Desde que para cada $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha \circ J^{-1} = P_\alpha/_{J(E)}$ e P_α é contínua pela definição de Π, segue de 2.6 que J^{-1} é contínua ■

§3 - LIMITE INDUTIVO DE ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

TEOREMA 3.1. - *Sejam* E *um* EV, $(E_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma família de* EVT *e* $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma coleção de aplicações lineares de* E_α *em* E. *Seja* F *o conjunto de partes de* E *definido por:*

$$F := \{U; U \subset E \text{ e } A_\alpha^{-1}(U) \text{ é uma } \tau_\alpha\text{-vizinhança do } 0 \text{ em } E_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

Então:

(i) - F *é uma base de filtro em* E *satisfazendo* (V1)-(V4) *em* 1.2.

(ii) - *A topologia* τ_F *- admissível em* E *que admite* F *por sistema fundamental de vizinhanças do* 0 *é a mais fina topologia* τ_F*-admissível em* E *para a qual todas as aplicações* A_α, $\alpha \in \Lambda$, *são contínuas.*

PROVA: (i) - *E'* imediato que F é uma base de filtro em E pois $\phi \notin F$ e a interseção de dois elementos de F é um elemento de F. Mostremos que F satisfaz as condições (V1)-(V4) do teorema 1.2.

a) F satisfaz (V1).

Seja $U \in F$. Desde que $\forall \alpha \in \Lambda$ $A_\alpha^{-1}(U)$ é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α, então $\forall \alpha \in \Lambda$ $\exists$ W_α τ_α-vizinhança do 0 em E_α tal que $W_\alpha + W_\alpha \subset A_\alpha^{-1}(U)$. Seja $W := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha) \in E$. Mostremos que $W \in F$ e $W+W \subset U$. De fato, seja $\alpha \in \Lambda$ dado. De $W_\alpha \subset A_\alpha^{-1}(A_\alpha(W_\alpha)) \subset A_\alpha^{-1}(W)$ segue que W é uma τ_α-vizinhança do zero em E_α e, portanto, $W \in F$. Temos também que $W+W = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha) + \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(W_\alpha) + A_\alpha(W_\alpha)] =$

$$= \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha + W_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(A_\alpha^{-1}(U)) \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U = U.$$

(b) F satisfaz (V2)

Seja $U \in F$. Então $\forall \alpha \in \Lambda$, desde $A_\alpha^{-1}(U)$ é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α, $\exists V_\alpha$ τ_F-vizinhança do 0 em F e $\exists$ W_α τ_α-vizinhança do 0 em E_α tal que $V_\alpha W_\alpha \subset A_\alpha^{-1}(U)$. Portanto $\forall \alpha \in \Lambda$ $W_\alpha \subset (V_\alpha - \{0\})^{-1} A_\alpha^{-1}(U)$. Seja $V := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha$. Então V é uma τ_F-vizinhança do 0 em F e $\forall \alpha \in \Lambda$

$$W_\alpha \subset (V_\alpha - \{0\})^{-1} A_\alpha^{-1}(U) \subset \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (V_\alpha - \{0\})^{-1}\right) A_\alpha^{-1}(U) =$$

$= (V - \{0\})^{-1} A_\alpha^{-1}(U) \subset A_\alpha^{-1}((V - \{0\})^{-1} U)$. Logo, $\forall \alpha \in \Lambda, A_\alpha(W_\alpha) \subset (V - \{0\})^{-1} U$ e, portanto, $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha) \subset (V - \{0\})^{-1} U$.

Pondo $W := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha)$, segue que $W \in F$ e, como $0 \in W$, temos que $V\, W \subset U$.

(c) F satisfaz (V3)

Seja $U \in F$ e seja $\lambda \neq 0$. Então, $\forall \alpha \in \Lambda$, $\exists W_\alpha, \tau_\alpha$-vizinhança do 0 em E_α, com $W_\alpha \subset \lambda\, A_\alpha^{-1}(U) = A_\alpha^{-1}(\lambda U)$.

Seja $W := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha)$. Então $W \in F$ e $W = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(W_\alpha) \subset$

$\subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(A_\alpha^{-1}(\lambda U)) \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \lambda U = \lambda\, U$.

(d) F satisfaz (V4)

Seja $x \in E$ e seja $U \in F$. Seja $\alpha \in \Lambda$ dado. Então $A_\alpha^{-1}\{x\} \subset E_\alpha$ e $A_\alpha^{-1}(U)$ é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α. Escolhamos $y_\alpha \in E_\alpha$ tal que $x = A_\alpha(y_\alpha)$. Então existe W_α, τ_α-vizinhança do 0 em E_α, tal que $W_\alpha y_\alpha \subset A_\alpha^{-1}(U)$, o que implica que $W_\alpha A_\alpha(y_\alpha) = W_\alpha\, x \subset U$. Seja $W := \bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha$. Então $W \in F$ e $Wx \subset U$ pois, se $z \in Wx$, então, para algum $w_\alpha \in W_\alpha$, $z = w_\alpha \in W_\alpha x \subset \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha\right) x = Wx \subset U$.

(ii) - Por (i) e por 1.2, existe uma única topologia τ_F-admissível em E, que denotaremos por τ, admitindo F por sistema fundamental de vizinhanças do 0 em E. Da definição de τ segue que, para todo $\alpha \in \Lambda$, A_α é uma aplicação linear contínua. Afirmamos que τ é a mais fina topologia τ_F-admissível em E com essa propriedade. Para tal, seja η uma outra topologia τ_F-admissível em E tal que, para todo $\alpha \in \Lambda, A_\alpha:(E_\alpha,\tau_\alpha) \to (E,\eta)$ é contínua e seja V uma η-vizinhança do 0 em E. Então para todo $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha^{-1}(V)$ é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α o que acarreta, pela definição de τ, que V é uma τ-vizinhança do zero em E. Logo $\eta \subset \tau$. ∎

DEFINIÇÃO 3.2 - A topologia τ_F-admissível em E definida e descrita no teorema 3.1 é chamada *topologia limite indutivo* em E com respeito à família $((E_\alpha,\tau_\alpha),A)_{\alpha \in \Lambda}$. Um EVT (E,τ) gerado como descrito no teorema 3.1 é chamado *limite indutivo dos espaços vetoriais topológicos* (E_α,τ_α) *com relação às aplicações lineares* A_α e denotado por

$$(E,\tau) = \operatorname*{ind}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha, \tau_\alpha), A_\alpha).$$

EXEMPLOS 3.3 - Da definição de topologia quociente, topologia soma-direta, ínfimo de um coleção de topologias e do teorema 3.1, podemos enunciar os seguintes exemplos:

3.3.1 - Seja (E,τ) um EVT e M subespaço vetorial de E. Seja $\Pi : E \to E/M$ a aplicação quociente. Desde que a topologia quociente τ_q em E/M é a mais fina topologia τ_F-admissível em E/M que torna Π contínua, temos que $(E/M,\tau_q)=\text{ind}((E,\tau),\Pi)$.

3.3.2 - Seja $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} (E_\alpha, \tau_\alpha)$ a soma direta topológica da família de EVT (E_α,τ_α). Se demotarmos por I_α a imersão canônica de E_α em $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha, \alpha\in\Lambda$, temos que $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha\in\Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),I_\alpha)$.

3.3.3 - Seja E um EV e seja $\{\tau_\alpha,\alpha\in\Lambda\}$ uma família de topologias τ_F-admissíveis em E. Se $\tau=\inf\{\tau_\alpha;\alpha\in\Lambda\}$, então $(E,\tau)= =\operatorname{ind}_{\alpha\in\Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),i_\alpha)$ onde, para cada $\alpha\in\Lambda$, i_α é a aplicação identidade em E.

PROPOSIÇÃO: 3.4 - Seja $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha\in\Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),A_\alpha)$ *e* (G,η) *um* EVT *arbitrário. Uma aplicação linear* A *de* E *em* G *é contínua se, e somente se, para cada* $\alpha\in\Lambda$ *a aplicação linear* $A \circ A_\alpha$ *de* E_α *em* G *é contínua.*

PROVA: Claramente a condição é necessária. Reciprocamente, suponhamos que, para cada $\alpha\in\Lambda$, $A\circ A_\alpha : (E_\alpha,\tau_\alpha)\to(G,\eta)$ é contínua. Seja V uma η-vizinhança do 0 em G. Então, por hipótese, $(A\circ A_\alpha)^{-1}(V) = A_\alpha^{-1}(A^{-1}(V))$ é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α qualquer que seja $\alpha\in\Lambda$. Por 2.2 temos que $A^{-1}(V)$ é uma τ-vizinhança do 0 em E, o que implica que $A : E\to G$ é contínua ∎

PROPOSIÇÃO 3.5 - *Seja* $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha\in\Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),A_\alpha)$ e (G,η) *um* EVT *arbitrário. Um conjunto* H *de aplicações lineares de* E *em* G *é equicontínuo se, e somente se, para cada* $\alpha\in\Lambda, H_\alpha:=\{T\circ A_\alpha; T\in H\}$ *é um conjunto equicontínuo de aplicações lineares de* E_α *em* G.

PROVA: Suponhamos que H seja um conjunto equicontínuo de aplicações lineares de E em G e seja $\alpha \in \Lambda$ dado. Desde que para cada $T \in H$, $T \in \mathcal{L}(E,G)$, segue que $H_\alpha := \{T \circ A_\alpha ; T \in H\} \subset \mathcal{L}(E_\alpha ; G)$ por 3.4. Seja V uma η-vizinhança do 0 em G. Por hipótese, existe U, τ-vizinhança do 0 em E tal que $T(U) \subset V$ para todo $T \in H$. Logo H_α é equicontínuo, pois $A_\alpha^{-1}(U)$ é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α com $(T \circ A_\alpha)(A_\alpha^{-1}(U)) \subset T(U) \subset V$ para todo $T \in H$. Reciprocamente, suponhamos que H é um conjunto de aplicações lineares de E em G tal que $H_\alpha := \{T \circ A_\alpha ;\ T \in H\}$ é um conjunto equicontínuo de aplicações lineares de E_α em G para todo $\alpha \in \Lambda$. Então, qualquer que seja $\alpha \in \Lambda$, $H_\alpha \subset \mathcal{L}(E_\alpha ; G)$. Seja V uma η-vizinhança do 0 em G. Por hipótese,

$$\bigcap_{T \in H} (T \circ A_\alpha)^{-1}(V) = \bigcap_{T \in H} A_\alpha^{-1}(T^{-1}(V)) = A_\alpha^{-1} \bigcap_{T \in H} T^{-1}(V)$$

é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α para cada $\alpha \in \Lambda$. Disto e de 2.2 segue que $\bigcap_{T \in H} T^{-1}(V)$ é uma τ-vizinhança do 0 em E, o que implica, por 1.13, que H é equicontínuo ■

PROPOSIÇÃO 3.6 - *Seja* $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha, \tau_\alpha), A_\alpha)$ *e admitamos que a união dos subespaços* $A_\alpha(E_\alpha)$ *gera* E. *Para cada* $\alpha \in \Lambda$, *seja* V_α *uma* τ_α*-vizinhança do* 0 *em* E_α *e seja*

$$(1) \qquad U := \bigcup_{\phi \in \Phi} \sum_{\alpha \in \phi} A_\alpha(V_\alpha) ,$$

onde Φ *é o conjunto de todos os subconjuntos finitos de* Λ. *En-*

tão:

(i) - U *é uma* τ*-vizinhança do* 0 *em* E;

(ii) - *se* Λ *é enumerável, então quando* V_α *percorre um sistema fundamental de vizinhanças do* 0 *em* (E_α, τ_α), *o conjunto de todas as partes de* E *dadas por* (1) *é um sistema fundamental de vizinhanças do* 0 *em* (E,τ).

PROVA: (i) - Para mostrarmos que U é um τ-vizinhança do zero em E, basta verificarmos inicialmente que, qualquer que seja o conjunto de índices Λ, o conjunto de todas as partes U de E, dadas por (1), com V_α, $\alpha \in \Lambda$, τ_α-vizinhança básica do zero em E_α, é um sistema fundamental de vizinhanças do zero para uma topologia η τ_F-admissível em E que torna todas as A_α contínuas. Seja, então, para cada $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{B}_\alpha$ um sistema fundamental de τ_α-vizinhanças do zero em E_α. Seja $\mathcal{B}$ o conjunto de todas as partes U de E dadas por (1) com $V_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha, \alpha \in \Lambda$. Facilmente verifica-se que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em E satisfazendo (V1) - (V4) em 1.2. Por 1.2, seja η a única topologia τ_F-admissível em E que admite $\mathcal{B}$ por sistema fundamental de vizinhanças do zero em E. Afirmamos que, para todo $\alpha \in \Lambda$, $A_\alpha : (E_\alpha, \tau_\alpha) \to (E,\eta)$ é contínua. De fato, seja $\alpha_0 \in \Lambda$ dado e seja W uma η-vizinhança do 0 em E. Então existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subset W$ onde

$$V = \bigcup_{\phi \in \Phi} \sum_{\alpha \in \phi} A_\alpha(V_\alpha),\ V_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \text{, para todo } \alpha \in \Lambda.$$

Desde que

$$A_{\alpha_0}^{-1}(V) = A_{\alpha_0}^{-1}\left(\bigcup_{\phi \in \Phi} \sum_{\alpha \in \phi} A_\alpha(V_\alpha)\right) \supset A_{\alpha_0}^{-1}(A_{\alpha_0}(V_{\alpha_0})) \supset V_{\alpha_0},$$

segue que $A_{\alpha_0}^{-1}(V)$ é uma τ_{α_0}-vizinhança de 0 em E_{α_0} e, portanto, o mesmo é verdade para $A_{\alpha_0}^{-1}(W)$. Em particular, se U é dado por (1) temos que $A_{\alpha_0}^{-1}(U)$ é uma τ_{α_0}-vizinhança do 0 em E_{α_0}. Como τ é a mais fina topologia τ_F-admissível que torna todas as A_α contínuas, segue que $\eta \subset \tau$, o que conclui a prova de (i).

(ii) - Suponhamos agora que Λ é enumerável, digamos, $\Lambda = \{\alpha(n);\ n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{B}_{\alpha(n)}$ um sistema fundamental de $\tau_{\alpha(n)}$-vizinhanças do zero em $E_{\alpha(n)}$. Então

$$\mathcal{B} = \{U;\ U \subset E,\ U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq r \leq n} A_{\alpha(r)}(V_{\alpha(r)}),$$

$$V_{\alpha(r)} \in \mathcal{B}_{\alpha(r)},\ r = 1,2,\dots,n,\ \forall n \in \mathbb{N}\},$$

como foi mostrado acima, é um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em E para uma topologia ξ τ_F-admissível em E menos fina do que τ. Mostremos agora que ξ é mais fina do que τ. Para isso, seja W_0 uma τ-vizinhança do zero em E e seja $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de τ-vizinhanças de 0 em E com $W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n$, $n \geq 1$ e $W_1 + W_1 \subset W_0$. Desde que para cada $n \in \mathbb{N}$ $A_{(n)}^{-1}(W_n)$ é uma $\tau_{\alpha(n)}$-vizinhança do 0 em $E_{\alpha(n)}$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $V_{\alpha(n)} \in \mathcal{B}_{\alpha(n)}$ tal que

$A_{\alpha(n)}(V_{\alpha(n)}) \subset W_n$. Seja $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq r \leq n} A_{\alpha(r)}(V_{\alpha(r)})$. Então $U \in \mathcal{B}$, isto é, U é uma ξ-vizinhança do zero em E e $U \subset W_0$. Logo $\tau \subset \xi$ e, portanto, $\xi = \tau$, o que conclui a prova de (ii).

COROLÁRIO 3.7 - *Seja* Λ *um subconjunto finito de* $\mathbb{N}$, *seja* $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),A_\alpha)$, *onde* $E = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(E_\alpha)$. *Para cada* $\alpha \in \Lambda$, *seja* $\mathcal{B}_\alpha$ *um sistema fundamental de* τ_α*-vizinhanças do* zero *em* E_α. *Então o conjunto*

$$\mathcal{B} := \{U;\ U \subset E,\ U = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(V_\alpha), V_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}$$

é um sistema fundamental se τ*-vizinhanças do* zero *em* E.

PROVA: Imediata de 3.6 ■

PROPOSIÇÃO 3.8 - *Seja* $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$. *Então para todo subconjunto finito* Φ *de* Λ *a topologia soma direta da família* $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ *e a topologia induzida por* τ *em* $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$ *coincidem.*

PROVA: Seja Φ um subconjunto finito de Λ e ponhamos $(H,\eta) := \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (E_\alpha,\tau_\alpha)$. Seja I a imersão canônica de

$H := \bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$ em E e seja τ_H a topologia induzida por τ em H. Mostremos inicialmente que $\tau_H \subset \eta$, o que equivale a mostrar que $I : (H,\eta) \to (E,\tau)$ é contínua. Para tal, seja $\alpha \in \Phi$ dado e seja $\tilde{I}_\alpha$ (resp. I_α) a imersão canônica de E_α em (H,η) (resp. E). Da definição η e τ segue que $\tilde{I}_\alpha$ e I_α são contínuas. Como $I \circ \tilde{I}_\alpha = I_\alpha$ vem, de 3.4, que I é contínua. Mostremos agora que $\eta \subset \tau_H$. Seja $i : (H,\tau_H) \to (H,\eta)$ a aplicação identidade. Então $i = P \circ I$, onde P é a projeção de E sobre (H,η). Como I de (H,τ_H) em (E,τ) é contínua e P é contínua (a continuidade de P segue de 3.4 pois, para cada $\alpha \in \Phi$, $P \circ I_\alpha = \tilde{I}_\alpha$, onde I_α e $\tilde{I}_\alpha$ são como acima), segue que i é contínua e, portanto, $\eta \subset \tau_H$. Logo $\eta = \tau_H$ ∎

COROLÁRIO 3.9 - *Seja* $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$. *Então, para cada* $\alpha \in \Lambda$, *a topologia induzida por* τ *em* E_α *coincide com* τ_α.

PROVA: Imediata de 3.8 ∎

PROPOSIÇÃO 3.10 - *Seja* $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma família de espaços vetoriais topológicos. Se* $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$ *e* $(G,\eta) = \prod_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$, *então:*

(i) - τ *é mais fina do que a topologia induzida por* η *em* E;

(ii) - *para todo subconjunto finito* Φ *de* Λ, τ *e* η *coincidem em* $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$.

PROVA: Para cada $\alpha \in \Lambda$, sejam I_α a imersão canônica de E_α E e P_α a projeção de G em E_α. Mostremos (i) - Seja I a imersão de (E,τ) em (G,η). Para mostrarmos que $\eta_E \subset \tau$, basta mostrarmos que I é contínua. Para isso, seja $\alpha \in \Lambda$ dado e denotemos por ${}_\Pi I_\alpha$ a imersão de E_α em (G,η). Evidentemente essa aplicação linear é contínua e, como $I \circ I_\alpha = {}_\Pi I_\alpha$, segue de 3.3.2 e 3.4 que I é contínua. Mostremos (ii) - Seja $\Phi \subset \Lambda$ finito e seja k o número de elementos de Φ. Por (i), é suficiente mostrarmos que τ é menos fina do que η em $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$. Seja, então, U uma τ-vizinhança do 0 em E. Para cada $\alpha \in \Lambda$, seja U_α uma τ_{E_α}-vizinhança do 0 em E_α com $U_\alpha = W \cap E_\alpha$ onde W é uma τ-vizinhança do 0 em E satisfazendo a $\underbrace{W + W + \ldots + W}_{k\text{-termos}} \subset U$. De 3.9 vem que U_α é uma τ_α-vizinhança do 0 em E_α. Então $M = \bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ é, por 2.3.2 e 2.1, uma η-vizinhança do 0 em G. Logo $V := M \cap \bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$ é uma vizinhança do 0 na topologia induzida por η em $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$ com

$$V = \left(\bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{-1}(U_\alpha)\right) \cap \bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha \in \Phi} P_\alpha^{-1}(W \cap E_\alpha)\right) \cap \bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha \subset$$

$$\subset \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (W \cap E_\alpha) \subset \underbrace{(W + W + \ldots + W)}_{k\text{-termos}} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha \subset U \cap \bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha .$$

Como $U \cap \bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$ é uma vizinhança do 0 na topologia induzida por τ em $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$, a asserção segue ■

COROLÁRIO 3.11 - *As topologias soma direta e produto são coincidentes quando consideramos uma família finita de* EVT.

PROVA: Imediata de 3.10 ■

COROLÁRIO 3.12 - *Seja* $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha, \tau_\alpha)$. Então (E,τ) *é um* EVT *de Hausdorff se, e somente, se para cada* $\alpha \in \Lambda$, (E_α, τ_α) *é um* EVT *de Hausdorff.*

PROVA: Claramente a condição é necessária por 3.9. Reciprocamente, suponhamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ (E_α, τ_α) é um EVT de Hausdorff. Seja $(G,\eta) = \prod_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha, \tau_\alpha)$. Então (G,η) é um EVT de Hausdorff e como, por 3.10, $\eta_E \subset \tau$, segue de (E,τ) é um EVT de Hausdorff ■

PROPOSIÇÃO 3.13 - *Se* $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha, \tau_\alpha), A_\alpha)$ com

$E = \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(E_\alpha)$, *então* (E,τ) *é linear e topologicamente isomorfo ao espaço quociente* $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha, \tau_\alpha) / N$, *onde* N *é o núcleo da aplicação* $J : \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha \to E$ *com* $J(x) := \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x_\alpha)$, *para* $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha$.

PROVA: Seja $(G,\eta) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha, \tau_\alpha)$. É evidente que J é linear. Logo podemos considerar o espaço quociente G/N munido da topolo—

gia quociente $\dot{\eta}$. Seja Π_J a sobrejeção canônica de (G,η) em $(G/N,\dot{\eta})$ e seja $\hat{J}$ a aplicação linear de G/N em E induzida por J, isto é, $\hat{J} \circ \Pi_J = J$. Desde que J é uma sobrejeção contínua (que J é sobrejetiva segue da hipótese feita sobre E e a continuidade segue de 3.4 pois, para $\alpha \in \Lambda$, $J \circ I_\alpha = A_\alpha$, onde I_α é a imersão de E_α em G), temos que $\hat{J}$ é uma bijeção contínua. Seja $\hat{J}^{-1} : E \to G/N$ a inversa de $\hat{J}$. Então $\hat{J}^{-1}$ é linear e sua continuidade segue da continuidade de $\hat{J}^{-1} \circ A = \Pi_J \circ I_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$, e de 3.4∎

NOTA 3.14 - Seja $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de EVT e sejam Φ e ψ dois subconjuntos disjuntos de Λ com $\Lambda = \Phi \cup \psi$. Se definirmos $(E,\tau) := \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$, $(G,\eta) := \bigoplus_{\alpha \in \Phi} (E_\alpha,\tau_\alpha)$ e $(H,\xi) := \bigoplus_{\alpha \in \psi} (E_\alpha,\tau_\alpha)$, então (E,τ), sendo a soma direta topológica de (G,η) e (H,ξ), é, na verdade, o produto topológico de (G,η) e (H,ξ), pelo corolário 3.11.

COROLÁRIO 3.15 - *Seja* $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma família de* EVT *de Hausdorff. Então, para cada parte* Φ *de* Λ, $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} E_\alpha$ *é um subespaço fechado de* $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$.

PROVA: Seja $\Phi \subset \Lambda$ dado. Então existe $\psi \subset \Lambda$ com $\Phi \cap \psi = \phi$ e $\Lambda = \Phi \cup \psi$. Portanto $(E,\tau) = (\bigoplus_{\alpha \in \Phi} (E_\alpha,\tau_\alpha)) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \psi} (E_\alpha,\tau_\alpha))$. Da observação feita em 3.14 vem que

$(E,\tau) = (\underset{\alpha \in \Phi}{\oplus} (E_\alpha,\tau_\alpha)) \times (\underset{\alpha \in \psi}{\oplus} (E_\alpha,\tau_\alpha))$, o que implica que $\underset{\alpha \in \psi}{\oplus} (E_\alpha,\tau_\alpha)$ é linear e topologicamente isomorfo ao espaço quociente $(E,\tau)/ \underset{\alpha \in \Phi}{\oplus} E_\alpha$. Desde que, para cada $\alpha \in \psi$, (E_α,τ_α) é um EVT de Hausdorff, segue de 3.12 que $\underset{\alpha \in \psi}{\oplus} (E_\alpha,\tau_\alpha)$ é um EVT de Hausdorff. Portanto o espaço quociente $(E,\tau)/ \underset{\alpha \in \Phi}{\oplus} E_\alpha$ é de Hausdorff o que implica ser $\underset{\alpha \in \Phi}{\oplus} E_\alpha$ τ-fechado em E ∎

COROLÁRIO 3.16 - *Sob as hipóteses de 3.15, para cada* $\alpha \in \Lambda$ E_α *é um subespaço vetorial fechado de* (E,τ).

PROVA: Imediata de 3.15 ∎

DEFINIÇÃO 3.17 - Se $(E, \tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\text{ind}} ((E_n,\tau_n),I_n)$ onde

(i) - $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência estritamente crescente de subespaços vetoriais de E com $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$;

(ii) - I_n é a imersão canônica de E_n em E para cada $n \in \mathbb{N}$;

(iii) - a topologia induzida por τ_{n+1} em E_n coincide com τ_n para todo $n \in \mathbb{N}$,

então dizemos que (E,τ) é o limite *indutivo estrito* da seqüência $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e denota-lo-emos por

$$(E,\tau) = \underset{\substack{\longrightarrow \\ n \in \mathbb{N}}}{\text{ind}} (E_n, \tau_n)$$

OBSERVAÇÃO 3.18 - Se $(E,\tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\operatorname{ind}}} (E_n, \tau_n)$, então $(E, \tau) = \underset{k \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\operatorname{ind}}} (E_{n_k}, \tau_{n_k})$ para toda subseqüência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$. De fato, seja $(E_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ uma subseqüência de $(E_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Desde que $(E,\tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\operatorname{ind}}} (E_n, \tau_n)$, temos que $(E_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência estritamente crescente de subespaços vetoriais de E com $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}$ e a topologia induzida por $\tau_{n_{k+1}}$ em E_{n_k} coincide com τ_{n_k}, para todo $k \in \mathbb{N}$, pois, para quaisquer m, $j \in \mathbb{N}$, a topologia induzida por τ_{n+1} em E_n coincide com τ_n. Seja $(E,\tau') = \underset{k \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\operatorname{ind}}} (E_{n_k}, \tau_{n_k})$. Afirmamos que $\tau' = \tau$. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$ dado. Desde que $I_{n_k} : E_{n_k} \longrightarrow E$ é τ-contínua segue de 3.1 que $\tau \subset \tau'$. Por outro lado, $I_{n_k} : E_{n_k} \longrightarrow E$ τ'-contínua. Da hipótese segue então que $\tau' \subset \tau$. Logo $\tau = \tau'$ o que completa a prova ∎

EXEMPLO: 3.19 - Se $(E,\tau) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (E_n, \tau_n)$, então $(E,\tau) := \underset{j \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\operatorname{ind}}} (G_j, \beta_j)$ onde, para cada $j \in \mathbb{N}$, $(G_j, \beta_j) := \bigoplus_{1 \leq n \leq j} (E_n, \tau_n)$. De fato, é evidente que a família $\{G_j ; j \in \mathbb{N}\} = \{\bigoplus_{1 \leq n \leq j} E_j, j \in \mathbb{N}\}$ é uma seqüência crescente de subespaços vetoriais de E com

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_1 \oplus \dots \oplus E_j .$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ dado. Mostremos agora que a topologia induzida por

β_{j+1} em G_j coincide com β_j. Para isso, sejam δ_j a topologia induzida por β_{j+1} em G_j, I_j a imersão canônica de (G_j, β_j) em (G_{j+1}, β_{j+1}) e $I_{n,j}$ a imersão canônica de (E_n, τ_n) em (G_j, β_j), $1 \leq n \leq j$. Desde que $I_j \circ I_{n,j} = I_{n,j+1} : (E_n, \tau_n) \longrightarrow (G_{j+1}, \beta_{j+1})$ é contínua para todo $n \in \{1, ---, j\}$, segue que

$I_j : (G_j, \beta_j) \longrightarrow (G_{j+1}, \beta_{j+1})$ é contínua. Como δ_j é a menos fina topologia τ_F-admissível em G_j para a qual I_j é contínua, segue que $\delta_j \subset \beta_j$. Por outro lado, se $i : (G_j, \delta_j) \longrightarrow (G_j, \beta_j)$ é a aplicação identidade, segue que i é contínua visto que $i = p_j \circ I_{G_j}$, onde $p_j : (G_{j+1}, \beta_{j+1}) \longrightarrow (G_j, \beta_j)$ é a projeção de G_{j+1} sobre G_j, que é contínua, e I_{G_j} é a imersão canônica de (G_j, δ_j) em (G_{j+1}, β_{j+1}), que é contínua pela definição de δ_j. Finalmente, se $(E, \tau') := \underset{\overrightarrow{j \in \mathbb{N}}}{\text{ind}}((G_j, \beta_j), A_j)$, onde $A_j : G_j \longrightarrow E$ é a imersão canônica para cada $j \in \mathbb{N}$, então $\tau = \tau'$. De fato, como τ é a mais fina topologia τ_F-admissível em E para a qual a imersão canônica $I_n : (E_n, \tau_n) \longrightarrow E$ é contínua, e

$I_n = A_j \circ I_{n,j} : (E_n, \tau_n) \longrightarrow (E, \tau')$, $n, j \in \mathbb{N}$, é contínua, segue que $\tau' \subset \tau$. Também $\tau \subset \tau'$ pois, se i é a aplicação identidade de (E, τ') em (E, τ) sua continuidade segue de 3.4 pois, quaisquer que sejam $j, n \in \mathbb{N}$, $i \circ A_j \circ I_{n,j} : (E_n, \tau_n) \longrightarrow (E, \tau)$ é contínua. Logo $\tau = \tau'$ ∎

NOTA: Sob as hipóteses do exemplo acima, é evidente que G_j é fechado em $(G_{j+1},\beta_{j+1}), j \in \mathbb{N}$.

PROPOSIÇÃO 3.20 - *Seja* $(E,\tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\text{ind}}}(E_n,\tau_n)$. *Então para todo* $n \in \mathbb{N}$, *a topologia induzida por* τ *em* E_n *coincide com* τ_n.

PROVA: Seja $n \in \mathbb{N}$ dado. Seja τ'_n a topologia induzida por τ em E_n e seja I_n a imersão canônica de E_n em E. Desde que τ'_n é a menos fina topologia τ_F-admissível em E_n para a qual I_n é contínua e, por hipótese, $I_n: (E_n,\tau_n) \to (E,\tau)$ é contínua, segue que $\tau'_n \subset \tau_n$. Mostremos agora que $\tau_n \subset \tau'_n$. Para tal, seja W_n uma τ_n-vizinhança do 0 em E_n e seja U_n uma τ_n-vizinhança básica do 0 em E_n com

$$(1) \qquad \underbrace{U_n + U_n + \ldots + U_n}_{(n+1)\text{-termos}} \subset W_n .$$

Desde que a topologia induzida por τ_{n+1} em E_n coincide com E_n, existe U'_{n+1}, τ_{n+1}-vizinhança básica do 0 em E_{n+1}, com $U'_{n+1} \cap E_n \subset U_n$. Portanto, existe U_{n+1}, τ_{n+1}-vizinhança básica do 0 em tal que

$$(2) \qquad (U_{n+1} + U_{n+1}) \cap E_n \subset U'_{n+1} \cap E_n \subset U_n.$$

De forma análoga, existe U_{n+2}, τ_{n+2}-vizinhança básica do 0 em

E_{n+2}, tal que

$$(U_{n+2} + U_{n+2}) \cap E_{n+1} \subset U_{n+1}.$$

Disso e de (2) segue que

$$(3) \quad (U_{n+2} + U_{n+2} + U_{n+1}) \cap E_n \subset U_n.$$

De fato, se $z \in (U_{n+2} + U_{n+2} + U_{n+1}) \cap E_n$, então $z \in E_n$ e $z = z_1 + z_2$ com $z_1 \in U_{n+1}$ e $z_2 \in U_{n+2} + U_{n+2}$. Desde que $E_n \subset E_{n+1} \subset E_{n+2}$, $z_2 = z - z_1 \in E_{n+1}$ e, portanto,

$$(U_{n+2} + U_{n+2} + U_{n+1}) \cap E_n \subset ((U_{n+2} + U_{n+2}) \cap E_{n+1} + U_{n+1}) \cap E_n \subset$$

$$\subset (U_{n+1} \cap E_{n+1} + U_{n+1}) \cap E_n = (U_{n+1} + U_{n+1}) \cap E_n \subset U_n.$$

Continuando dessa forma, podemos encontrar U_{n+j}, τ_{n+j}-vizinhança básica do 0 em E_{n+j}, $j \geq 1$, tal que, para todo $r \in \mathbb{N}$,

$$(U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+r} + U_{n+r}) \cap E_n \subset U_n.$$

Portanto, $\left(\bigcup_{r \geq 1} \sum_{1 \leq j \leq r} U_{n+j} \right) \cap E_n \subset U_n$ e, usando (1), vemos que

$$\left(\bigcup_{r \geq 1} \sum_{1 \leq j \leq r} U_{n+j} + \underbrace{U_n + \ldots + U_n}_{n\text{-termos}} \right) \cap E_n \subset$$

$$\subset \Big(\bigcup_{r\geq 1} \sum_{1\leq j\leq r} U_{n+j} \Big) \cap E_n + \underbrace{U_n + \ldots + U_n}_{n\text{-termos}} \subset$$

$$\subset \underbrace{U_{n} + \ldots + U_n}_{(n+1)\text{-termos}} \subset E_n .$$

Pela proposição 3.6, $W := \bigcup_{r\geq 1} (\underbrace{U_n + \ldots + U_n}_{n\text{-termos}} + \sum_{1\leq j\leq r} U_{n+j})$

é uma τ-vizinhança do 0 em E. Logo $W \cap E_n$ é uma τ'_n-vizinhança do 0 em E_n contida em W_n, o que implica $\tau_n \subset \tau'_n$. Logo $\tau_n = \tau'_n$ ∎

COROLÁRIO 3.21 - *O limite indutivo estrito de uma seqüência de espaços vetoriais topológicos é um* EVT *de Hausdorff se, e somente se, cada elemento da seqüência é um* EVT *de Hausdorff.*

PROVA: Seja $(E_n, \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência estritamente crescente de EVT satisfazendo as condições da def. 3.17 e seja $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\overrightarrow{n \in \mathbb{N}}} (E_n, \tau_n)$. Se (E,τ) é um EVT de Hausdorff, então, por 3.20, (E_n, τ_n) é um EVT de Hausdorff para todo $n \in \mathbb{N}$. Reciprocamente se, para cada $n \in \mathbb{N}$, (E_n, τ_n) é um EVT de Hausdorff então, desde que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, (E,τ) é um EVT de Hausdorff ∎

COROLÁRIO 3.22 - *Se* $(E,\tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\text{ind}}}(E_n,\tau_n)$ *e se, para cada* $n \in \mathbb{N}$, E_n *é fechado em* (E_{n+1},τ_{n+1}), *então* E_n *é fechado em* (E,τ).

PROVA: Seja $n \in \mathbb{N}$ dado e suponhamos que E_n é fechado em (E_{n+1},τ_{n+1}). É claro que, por indução, E_n é fechado em todo (E_{n+p},τ_{n+p}), $p \geq 1$. Seja $x \in E$ tal que $x \notin E_n$. Então existe $p \geq 1$ tal que $x \in E_{n+p}$. Desde que E_n é fechado em (E_{n+p},τ_{n+p}), existe V_{n+p}, τ_{n+p}-vizinhança do 0 em E_{n+p}, tal que $(x + V_{n+p}) \cap E_n \neq \phi$. Pela proposição 3.20 existe V, τ-vizinhança do 0 em E, tal que $V \cap E_{n+p} = V_{n+p}$. Então $(x + V) \cap E_n = \phi$, isto é, $\complement E_n$ é τ-aberto em E ∎

LEMA 3.23 - *Seja* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência limitada em* (E,τ) *e seja* $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência convergente a zero em* (F,τ_F). *Então* $\lambda_n x_n \longrightarrow 0$ *quando* $n \to \infty$ *em* (E,τ).

PROVA: Seja $\mathcal{B} = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e seja W uma τ-vizinhança do 0 em E. Desde que $\mathcal{B}$ é τ-limitado, existe V, τ_F-vizinhança do 0 em F, tal que $V\mathcal{B} \subset W$. Como $\lambda_n \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Seja $n \geq n_0$ dado. Então $\lambda_n\mathcal{B} \subset W$, o que implica que $\lambda_n x_n \in W$ ∎

PROPOSIÇÃO 3.24 - *Seja* $(E,\tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\text{ind}}}(E_n,\tau_n)$ *um EVT sobre um anel de divisão topológico métrizável e não-discreto* (F,τ_F) *e suponhamos que para todo* $n \in \mathbb{N}$, E_n *é fechado em* (E_{n+1},τ_{n+1}). *Se-*

ja B *uma parte não-vazia de* E. *Então* B *é limitado em* (E,τ) *se, e somente se, existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* B *é limitado em* (E_n,τ_n).

PROVA: A condição é claramente suficiente por 3.20 e nesse caso não é necessário supor que (F,τ_F) é metrizável. Reciprocamente, suponhamos que B é limitado em (E,τ) e que $B \not\subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em B com $x_n \in E_{n+1}$ e $x_n \notin E_n$, n=1,2.... Seja $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em F^* com $\lambda_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Desde que, por 3.22, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, E_n é fechado em (E,τ), garantimos a existência de uma sequência estritamente decrescente $(V_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ de τ-vizinhanças do 0 em E com $\lambda_n x_n \notin V_{n+1} \cap E_n$. Seja $W_n := V_{n+1} \cap E_n$, n = 1,2,.... Então, por 3.20, W_n é uma τ_n-vizinhança do 0 em E_n. Logo, se $I_n : (E_n,\tau_n) \longrightarrow (E,\tau)$, $n \in \mathbb{N}$, é a imersão canônica, então, por 3.6, $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \sum_{1 \leq n \leq k} I_n(W_n)$ é uma τ-vizinhança do 0 em E com $\lambda_n x_n \notin U$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é absurdo pois, pelo lema 3.23, $\lambda_n x_n \longrightarrow 0$ em (E,τ) quando $n \to \infty$. Portanto $B \subset E_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Temos também que B é τ_n-limitado em E_n porque, por 3.20, τ coincide com τ_n em E_n e, por hipótese, B é τ-limitado em E ∎

PROPOSIÇÃO 3.25 - *Seja* $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha,\tau_\alpha)$ *um* EVT *sobre um anel de divisão topológico metrizável e não discreto* (F,τ_F) *e seja* B *uma parte não vazia de* E. *Então* B *é limitado em* (E,τ)

se, e somente se, existe um conjunto finito $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset \Lambda$ *e partes limitadas* M_{α_i} *em* $(E_{\alpha_i},\tau_{\alpha_i})$, $1 \leq i \leq n$, *tais que*

$B \subset \sum_{i=1}^{n} I_{\alpha_i}(M_{\alpha_i})$, *onde para* $\alpha \in \Lambda$, I_α *é a imersão canônica de* E_α *em* $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E_\alpha$.

PROVA: Evidentemente a condição é suficiente e nesse caso não é necessário supor que (F,τ_F) é metrizável. Reciprocamente, suponhamos que B é limitado em (E,τ). Para cada $\alpha \in \Lambda$, seja P_α a projeção de (E,τ) sobre (E_α,τ_α). Desde que para todo $\alpha \in \Lambda$ $P_\alpha(B) \subset E_\alpha$ e $B \subset \sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha(P_\alpha(B))$, o resultado segue se mostrarmos que $P_\alpha(B) = \{0\}$ exceto para um número finito de $\alpha \in \Lambda$. Para isso, suponhamos que existe um subconjunto enumerável $\Lambda_0 := \{\alpha_i,\ i \in \mathbb{N}\} \in \Lambda$ tal que $P_{\alpha_i}(B) \neq 0$, $\alpha_i \in \Lambda_0$. Seja $P_{\alpha_0} := (P_{\alpha_i})_{i\in\mathbb{N}}$ a projeção de E sobre $\bigoplus_{\alpha_i\in\Lambda_0} E_{\alpha_i}$. Então, segue da hipótese que $P_{\Lambda_0}(B)$ é limitado em $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda_0}(E_\alpha,\tau_\alpha) =$

$= \underset{k\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathrm{ind}}} \bigoplus_{j=1}^{k}(E_{\alpha_j},\tau_{\alpha_j})$ (ver exemplo 3.18). Porém para todo $k \in \mathbb{N}$ $P_{\Lambda_0}(B) \not\subset \bigoplus_{j=1}^{k}(E_{\alpha_j},\tau_{\alpha_j})$, que contradiz a proposição 3.24 ∎

COROLÁRIO 3.36 - *Seja* $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *uma família infinita de* EVT *de Hausdorff sobre o mesmo anel de divisão topológico metrizável* *e não-discreto* (F,τ_F). *Então* $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(E_\alpha,\tau_\alpha)$ *não é metrizável.*

PROVA: Sejam Φ e ψ dois subconjuntos disjuntos de Λ tais que $\Lambda = \Phi \cup \psi$. Então, desde que, por 3.14,

$$(E,\tau) = \Big(\bigoplus_{\alpha\in\Phi}(E_\alpha,\tau_\alpha)\Big)\times\Big(\bigoplus_{\alpha\in\psi}(E_\alpha,\tau_\alpha)\Big),$$

basta mostrarmos o resultado quando considerarmos, por exemplo, ψ uma parte enumerável de Λ. Suponhamos, então, que ψ é o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais e seja $(G,\eta) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(E_n,\tau_n)$. Suponhamos também que (G,η) é metrizável e seja $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência monotonamente decrescente de η-vizinhanças do 0 em G. Seja $(G_j;\beta_j) = \bigoplus_{1\leq n\leq j}(E_n,\tau_n)$. Então, para cada $j\in\mathbb{N}$, G_j é um subespaço vetorial próprio de G, G_j é fechado em (G_{j+1},τ_{j+1}) e $(G,\eta) = \underset{j\in\mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathrm{ind}}}(G_j,\beta_j)$. Seja $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em G com $x_j \notin G_j$ e $x_j \in U_j$, $j\in\mathbb{N}$. Desde que, para cada $j\in\mathbb{N}$, $x_j \notin G_j$, segue da prop. 3.24 que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ não é uma sequência limitada em (G,η), o que contradiz o fato de $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ser uma sequência monotonamente decrescente de η-vizinhanças do 0 em G e $x_j\in U_j$ para todo $j\in\mathbb{N}$.

COROLÁRIO 3.27 -*Seja* $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *uma família de* EVT *de Hausdorff seqüencialmente completos* (resp. *quase-completos*) *sobre o mesmo anel de divisão topológico metrizável e não-discreto* (F,τ_F).

Então $(E,\tau) = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} (E_\alpha, \tau_\alpha)$ *é um* EVT *seqüencialmente completo* (resp. *quase-completo*).

PROVA: Seja $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em (E,τ). Então para cada $n \in \mathbb{N}$ $x_n = (z_n)_{\alpha \in \Lambda} \in \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} E_\alpha = E$. Desde que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em E, existe B, fechado e limitado em (E,τ), tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ $(z_n^\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \subset B$. Do fato de B ser limitado numa soma direta topológica, segue que 3.25 que existe um subconjunto finito $\Lambda_0 := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset \Lambda$ tal que $P_{\alpha_i}(x) = (z_n^{\alpha_i})_{n \in \mathbb{N}} \neq 0$, $0 \leq 1 \leq k$ e $P_\alpha(x) = 0$ se $\alpha \notin \Lambda_0$, onde para todo $\alpha \in \Lambda$ P_α é projeção de E_α sobre E_α. Como P_{α_i}, $1 \leq i \leq k$, é uma aplicação linear (uniformemente) contínua, $P_{\alpha_i}(x) = (z_n^{\alpha_i})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $(E_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i})$, $1 \leq i \leq k$ e, portanto, por hipótese, existe $x^i \in E_{\alpha_i}$ tal que $z_n^{\alpha_i} \to x^i$ quando $n \to \infty$ em $(E_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i})$, $1 \leq i \leq k$. Seja $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ o elemento de (E,τ) definido por $y_\alpha = x^i$, se $\alpha = \alpha_i$, e $y_\alpha = 0$ se $\alpha \neq \alpha_i$, $1 \leq i \leq k$. Então $x_n \to y$ quando $n \to \infty$ em (E,τ), o que completa a prova ∎

PROPOSIÇÃO 3.28 - *Seja* $(E,\tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\mathrm{ind}}} (E_n, \tau_n)$ *e suponhamos que* (E,τ) *é um subespaço vetorial topológico do* EVT (G,η). *Se para* $n \in \mathbb{N}$ E_n *for fechado em* (G,η), *então* E *é fechado em* (G,η).

PROVA: Suponhamos que $E \neq \bar{E}^\eta$. Então existe $x \in \bar{E}^\eta$ tal que

$x \notin E$. Segue então da hipótese que $x \notin E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, desde que para todo $n \in \mathbb{N}$ E_n é fechado em (G,η), podemos determinar uma sequência $(W'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de η-vizinhanças do 0 em G com $(x + \bar{W}'^{\eta}_n) \cap E_n = \phi$ e $W'_{n+1}+W'_{n+1}+W'_{n+1} \subset W_n, n \geq 1$. Seja $W_n := W'_n \cap E$, $n \geq 1$. Então $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de τ-vizinhanças do 0 em E com $(x + \bar{W}^{\eta}_n) \cap E_n = \phi$ e $W_{n+1}+W_{n+1}+W_{n+1} \subset W_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $U_n = W_n \cap E_n$, $n \geq 1$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ U_n é uma τ_n-vizinhança do o em E_n e pondo-se $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leq i \leq n} I_i(U_i)$, onde para todo $i \in \mathbb{N}$ I_i é a imersão canônica de E_i em E, temos, por 3.6, que U é uma τ-vizinhança do 0 em E. Portanto, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, $(x + \bar{U}^{\eta}) \cap E_{n_0} \neq \phi$. Afirmamos que $U \subset E_{n_0}+W_{n_0+1}+W_{n_0+1}$.

De fato, se $z \in U$, então para algum inteiro k, que pode ser escolhido maior do que n_0, $z \in \sum_{1 \leq i \leq k} I_i(U_i)$. Portanto

$$z \in \sum_{1\leq i\leq n_0} I_i(U_i) + \sum_{n_0+1\leq i\leq k} I_i(U_i) \subset E_{n_0} + \sum_{n_0+1\leq i\leq k} W_i \subset E_{n_0} + W_{n_0+1} + W_{n_0+1}$$

Portanto $\bar{U}^{\eta} \subset E_{n_0} + \bar{W}^{\eta}_n$. Como $(x + \bar{U}^{\eta}) \cap E_{n_0} \neq \phi$, segue que $(x + \bar{W}^{\eta}_n) \cap E_{n_0} \neq \phi$, o que é impossível. Logo $E = \bar{E}^{\eta}$ ∎

COROLÁRIO 3.29 - *Seja* (F,τ_F) *um anel de divisão topológico de Hausdorff completo e não-discreto e seja* $(E_n,\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de* EVT *completos de Hausdorff satisfazendo as condições da definição* 3.17. *Então* $(E,\tau) = \underset{n \in \mathbb{N}}{\underrightarrow{\text{ind}}}(E_n,\tau_n)$ *é um* EVT *completo*.

PROVA: De 3.21 segue que (E,τ) é um EVT de Hausdorff. Seja $(\hat{E},\hat{\tau})$ um completamento de (E,τ). Desde que (E,τ) é um subespaço vetorial topológico de $(\hat{E},\hat{\tau})$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ E_n é fechado em $(\hat{E},\hat{\tau})$ segue de 3.28 que E é fechado em $(\hat{E},\hat{\tau})$. Logo (E,τ) é completo ∎

COROLÁRIO 3.30 - *Seja* (F,τ_F) *um anel de divisão topológico completo de Hausdorff e não-discreto e seja* $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma seqüência de* EVT *completos de Hausdorff sobre* (F,τ_F). *Então* $(E,\tau) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (E_n,\tau_n)$ *é um* EVT *completo.*

PROVA: Segue imediatamente de 3.19, 3.21 e 3.29 ∎

§4 - ESPAÇOS TONELADOS; INFRA-S-ESPAÇOS

DEFINIÇÃO 4.1 - Diremos que um EVT (E,τ) é *tonelado* se toda topologia τ_F-admissível e τ-fechada em E é menos fina do que τ.

PROPOSIÇÃO 4.2 - *Todo EVT de Baire sobre um anel de divisão topológico metrizável e não-discreto é tonelado.*

PROVA: Seja (F,τ_F) um anel de divisão topológico metrizável e não-discreto e seja (E,τ) um EVT de Baire sobre (F,τ_F). Seja μ uma topologia em E que é τ_F-admissível e τ-fechada. Devemos mostrar que $\mu \subset \tau$. Para isso, consideremos $\mathcal{B}$ um sistema fundamental de μ-vizinhanças do 0 em E τ-fechadas. Seja $V \in \mathcal{B}$ e seja $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em F^* com $\lambda_k^{-1} \to 0$ quando $k \to \infty$. Então existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $W + W \subset V$ e $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \lambda_k W$, pois W é absorvente em E. Desde que W é τ-fechado (portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k W$ também o é) e (E,τ) é um espaço de Baire, existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_{k_o} W$ tem interior não-vazio. Logo W tem interior não-vazio e denotá-lo-emos por A.
Desde que $0 \in W$, segue que $0 + A \subset W + W \subset V$ o que implica que 0 é um ponto interior a V. Logo V é uma τ-vizinhança do 0 em E. Portanto $\eta \subset \tau$ ■

COROLÁRIO 4.3 - *Todo EVT metrizável completo sobre um anel de* *divisão topológico metrizável completo é tonelado.*

PROVA: De 4.2. segue o resultado imediatamente, pois todo espaço topológico metrizável completo é um espaço de Baire ▪

Num EVT (E,τ), designemos por F o conjunto de todas as topologias em E τ_F-admissíveis que são τ-fechadas. Seja $\tau^b := \sup\{\mu; \mu \in F\}$. Então τ^b é uma topologia τ_F-admissível em E e, como $\tau \in F, \tau \subset \tau^b$.

PROPOSIÇÃO 4.4 - *Um* EVT (E,τ) *é tonelado se, e somente se,* $\tau=\tau^b$.

PROVA: Suponhamos que (E,τ) é tonelado e seja μ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada. Então $\mu \subset \tau$ e, da definição de τ^b, segue que $\tau^b \subset \tau$. Como $\tau \subset \tau^b$, tem-se que $\tau = \tau^b$. Reciprocamente, suponhamos que $\tau=\tau^b$ e seja μ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada. Logo $\mu \subset \tau^b$. Da hipótese segue que $\mu \subset \tau$. Portanto (E,τ) é tonelado ▪

PROPOSIÇÃO 4.5 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) EVT *e* A *uma aplicação linear contínua de* (E,τ) *em* (G,η). *Então* $A:(E,\tau^b) \to (G,\eta^b)$ *é contínua.*

PROVA: Seja μ uma topologia τ_F-admissível em G η-fechada. Da definição de η^b, segue que a aplicação identidade i_μ de (G,η^b) em (G,μ) é contínua.

Portanto $i_\mu \circ A:(E,\tau) \to (G,\mu)$ também o é. De 2.3.3 e 2.6 segue que $A:(E,\tau) \to (G,\eta^b)$ é contínua. Como $\tau \subset \tau^b$, segue que

$A : (E,\tau^b) \to (G,\eta^b)$ é contínua ∎

PROPOSIÇÃO 4.6 - *Seja* $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *uma família de* EVT *tonelados e seja* $(E,\tau) = \operatorname*{ind}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha), A_\alpha)$. *Então* (E,τ) *é tonelado.*

PROVA: Seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada e seja $\alpha \in \Lambda$ dado. Então, como $A_\alpha : (E_\alpha,\tau_\alpha) \to (E,\tau)$ é contínua, $A_\alpha^{-1}(\xi)$ é uma topologia τ_F-admissível em E_α τ_α-fechada. Como (E_α,τ_α) é tonelado, por hipótese, segue que $A_\alpha^{-1}(\xi) \subset \tau_\alpha$. Logo $A_\alpha : (E_\alpha,\tau_\alpha) \to (E,\xi)$ é contínua. Da definição 3.2 segue que $\xi \subset \tau$. Portanto (E,τ) é tonelado ∎

COROLÁRIO 4.7 - (i) - *Todo limite indutivo estrito de espaços tonelados é tonelado.*

(ii) - *Toda soma direta topológica de espaços tonelados é tonelado.*

(iii)- *Todo quociente de um espaço tonelado é tonelado.*

Num EVT (E,τ) designemos por $J(t)$ o conjunto de todas as topologias η, τ_F-admissíveis em E, tais que:

(i) - $\tau \subset \eta$.

(ii) - (E,η) é um espaço tonelado.

Seja $\tau^t := \inf \{\eta \,;\, \eta \in J(t)\}$. Então τ^t é uma topologia τ_F-admissível em E satisfazendo a:

(I) - (E,τ^t) é um espaço tonelado;

(II) - $\tau \subset \tau^b \subset \tau^t$.

PROVA de (I) - Desde que $(E,\tau^t) = \operatorname*{ind}_{\eta \in J(t)} ((E,\eta), i_\eta)$ onde i_η é a aplicação identidade de (E,η) em E, para cada $\eta \in J(t)$, segue imediatamente de 4.6 que (E,τ^t) é tonelado.

PROVA de (II) - Basta mostrarmos que $\tau^b \subset \tau^t$. Para isso, seja $\eta \in J(t)$ e seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada. Desde que $\eta \supset \tau$, segue que ξ é η-fechada. Por ser (E,η) tonelado, temos que $\xi \subset \eta$. Logo a aplicação identidade $I : (E,\eta) \to (E,\xi)$ é contínua. Se denotarmos por i_η a aplicação identidade de (E,η) em (E,τ^t), que é contínua pela definição de τ^t, por i a identidade de (E,τ^t) em (E,τ^b) e por i_ξ a aplicação identidade de (E,τ^b) em (E,ξ), que é contínua pela definição de τ^b, temos que $(i_\xi \circ i) \circ i_\eta = I$. Da definição de τ^t, de 3.3.3 e de 3.4 segue que $i_\xi \circ i : (E,\tau^t) \to (E,\xi)$ é contínua. Agora, da definição de τ^b, de 2.3.3 e de 2.6 segue que $i : (E,\tau^t) \to (E,\tau^b)$ é contínua, ou seja, $\tau^b \subset \tau^t$ ∎

DEFINIÇÃO 4.8 - Num EVT (E,τ), a topologia τ^t construída como acima é chamada *topologia tonelada associada* a τ e o EVT (E,τ^t) é chamado *espaço tonelado associado* a (E,τ).

PROPOSIÇÃO 4.9 - *Um* EVT (E,τ) *é tonelado se, e somente se,* $\tau = \tau^b = \tau^t$.

PROVA: Obviamente a condição é suficiente. Reciprocamente, suponhamos que (E,τ) é tonelado. Então da definição de τ^t segue que $\tau^t \subset \tau$. Como $\tau \subset \tau^t$, vem que $\tau = \tau^t$.

PROPOSIÇÃO 4.10 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos e seja* $A:(E,\tau) \to (G,\eta)$ *uma aplicação linear contínua. Então* $A:(E,\tau^t) \to (G,\eta^t)$ *ainda é contínua.*

PROVA: Seja μ a mais fina topologia τ_F-admissível em G tal que $A:(E,\tau^t) \to (G,\mu)$ é contínua. Então, de 4.5, segue $A:(E,(\tau^t)^b) \to (G,\mu^b)$ é contínua. Como $(\tau^t)^b = \tau^t$, segue que $A:(E,\tau^t) \to (G,\mu^b)$ é contínua. Logo, da definição de μ, temos que $\mu^b \subset \mu$. Como $\mu^b \supset \mu$, segue que $\mu = \mu^b$. Portanto (G,μ) é tonelado e isso acarreta que $\eta^t \subset \mu$. Logo $A:(E,\tau^t) \to (G,\eta^t)$ é contínua ∎

PROPOSIÇÃO 4.11 - *Seja* (E,τ) *um EVT e seja* H *um subespaço vetorial denso em* (E,τ). *Se* (H,τ_H) *é tonelado, então* (E,τ) *também o é.*

PROVA: Seja μ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada. Então μ_H é uma topologia τ_F-admissível em H τ_H-fechada. Como (H,τ_H) é tonelado, temos $\mu_H \subset \tau_H$. Seja $\mathcal{B}$ um sistema fundamental que μ-vizinhanças do 0 em E. Devemos mostrar que, para todo $U \in \mathcal{B}$, U é uma τ-vizinhança do 0 em E. Seja, então $U \in \mathcal{B}$ dado. Da definição de τ_H, existe $A_U \subset E$, $0 \in A_U$, τ-aberto em E com $A_U \cap H \subset U \cap H$. Portanto

$\overline{A_U \cap H}^{\tau} \subset \overline{U \cap H}^{\tau} \subset \overline{U}^{\tau} = U$. Por outro lado, porque A_U é τ-aber to em E e H é denso em E, $\overline{A_U}^{\tau} = \overline{A_U \cap H}^{\tau}$. Porém $A_U \subset \overline{A_U}^{\tau} = \overline{A_U \cap H}^{\tau} \subset U$, o que implica que U é uma τ-vizinhança do 0 em E ∎

COROLÁRIO 4.12 - *Seja* (F,τ_F) *um anel de divisão topológico completo de Hausdorff e não-discreto e seja* (E,τ) *um* EVT *sobre* (F,τ_F). *Se* (E,τ) *é tonelado, então o seu completamento também é tonelado.*

TEOREMA 4.13 - *Seja* (E,τ) *um espaço tonelado e* (G,η) *um* EVT *arbitrário. Seja* H *um conjunto de aplicações lineares contínuas de* (E,τ) *em* (G,η) *pontualmente limitado. Então* H *é equicontínuo.*

PROVA: Por 1.13 devemos mostrar que se V é uma η-vizinhança do 0 em G, então $\cap\{f^{-1}(V); f \in H\}$ é uma τ-vizinhança do 0 em E. Seja, então, V uma η-vizinhança do 0 em G e seja $\mathcal{V}$ um sistema fundamental de vizinhanças fechadas do 0 em (G,η) satisfazendo (V1) - (V4) em 1.2. Para cada $U \in \mathcal{V}$, seja W_U o subconjunto de E definido por $W_U := \cap\{f^{-1}(U); f \in H\}$.
Seja $\mathcal{B} = \{W_U ; U \in \mathcal{V}\}$. É imediato que $\mathcal{B}$ é uma base de filtro em E satisfazendo (V1) - (V4) em 1.2. Consideremos, então, ξ a única topologia τ_F-admissível em E que admite $\mathcal{B}$ por sistema fundamental de vizinhanças do 0. Como todo elemento de H é contínuo e todo $U \in \mathcal{V}$ é η-fechado, segue que ξ é uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada. Como (E,τ) é tonelado, segue que

$\xi \subset \tau$, ou seja, todo elemento de $\mathcal{B}$ é uma τ-vizinhança do 0 em E. Tem-se, assim, que $\cap \{f^{-1}(V) ; f \in H\}$ é uma τ-vizinhança do 0 em E, pois existe $W_V \in \mathcal{B}$ com $W_V \subset \cap\{f^{-1}(V) ; f \in H\}$.

TEOREMA 4.14 - (Banach-Steinhaus) - *Sejam* (E,τ) *um espaço tonelado e* (G,η) *um* EVT *de Hausdorff. Seja* $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ *um "net" em* $\mathcal{L}(E;G)$ *pontualmente limitado e pontualmente convergente para uma aplicação* $f:E \to G$. *Então* $f \in \mathcal{L}(E;G)$ *e* $f_\alpha \to f$ *uniformemente em todo subconjunto totalmente limitado de* (E,τ).

PROVA: Seja $H = \{f_\alpha ; \alpha \in \Lambda\}$. Então por 4.13 H é equicontínuo e, como f pertence à aderência de H em G^E munido da topologia produto, vem de 1.15 que $f \in \mathcal{L}(E;G)$. De 1.16 é imediato que $f_\alpha \to f$ uniformemente em todo subconjunto totalmente limitado de (E,τ) ∎

DEFINIÇÃO 4.15 - Seja (G,η) um EVT de Hausdorff e seja A uma aplicação linear de um EVT arbitrário (E,τ) em (G,η). Diremos que A é *fechada* se seu gráfico, que denotaremos por $gr(A)$, é um subconjunto fechado de $(E,\tau) \times (G,\eta)$.
É óbvio que toda aplicação linear contínua A de um EVT (E,τ) num EVT de Hausdorff (G,η) é fechada.

PROPOSIÇÃO 4.16 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos, onde* η *é uma topologia de Hausdorff em* G. *Seja* $A:(E,\tau) \to (G,\eta)$ *uma aplicação linear fechada. Se* $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{M}$) *é um sistema fundamental de vizinhanças do* 0 *em* (E,τ) (resp. (G,η))

então o conjunto $\mathcal{V}$ *de partes de* G *definido por*

$$\mathcal{V} = \{A(U) + V ; U \in \mathcal{B} , V \in \mathcal{M}\} \qquad (1)$$

é uma base de filtro em G *satisfazendo* (V1) - (V4) *em* 1.2 *e a única topologia* μ τ_F*-admissível em* G *que admite* $\mathcal{V}$ *por sistema fundamental de vizinhanças do* 0 *é a mais fina topologia de Hausdorff menos fina do que* η *tal que* $A : (E,\tau) \to (G,\mu)$ *é contínua.*

PROVA: Sem dificuldade mostra-se que o conjunto $\mathcal{V}$ dado por (1) é uma base de filtro em G satisfazendo (V1) - (V4) em 1.2. Seja μ a única topologia τ_F-admissível em G que admite $\mathcal{V}$ por sistema fundamental de vizinhanças do 0 .

É claro que $\mu \subset \eta$, pois toda μ-vizinhança do 0 em G contém uma η-vizinhança básica do 0 em G e, da definição de μ , segue imediatamente que $A : (E,\tau) \to (G,\mu)$ é contínua. Mostremos que μ é a mais fina topologia τ_F-admissível em G com essa propriedade. Seja ξ uma topologia τ_F-admissível em G tal que $A : (E,\tau) \to (G,\xi)$ é contínua e seja $W \in \mathcal{M}$. Desde que para toda V ξ-vizinhança do 0 em G $V \subset V-W$, da continuidade de A segue que $\exists\, U \in \mathcal{B}$ tal que $U \subset A^{-1}(V) \subset A^{-1}(V-W)$. Logo $A(U) \subset A(A^{-1}(V-W)) \subset V-W \Rightarrow A(U) + W \subset V \Rightarrow V$ é μ-vizinhança do 0 em G . Afirmamos que (G,μ) é um EVT de Hausdorff. De fato, seja $y \in \bigcap_{U \in \mathcal{B}} \overline{A(U)} = \bigcap \{A(U) ; U \in \mathcal{B} , V \in \mathcal{M}\}$, $y \neq 0$. Como A é uma aplicação fechada, $(0,y)$ não pertence ao gráfico de A . Logo existe (U,V) , vizinhança do 0 em $(E,\tau) \times (G,\mu)$, tal que

$[(0,y) + U \times V] \cap gr(A) = \emptyset$. Disso segue que $y + V \not\subset A(U)$, o que é absurdo. Como $\{0\} \subset \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A(U)$, a afirmação segue ∎

COROLÁRIO 4.17 - *Sejam* (E,τ), (G,η) *como na proposição* 4.16 *e* A *uma aplicação linear de* E *em* G. *Então* A *é fechada se, e somente se, existe uma topologia* μ, *de Hausdorff e* τ_F*- admissível em* G, *menos fina do que* η, *tal que* $A : (E,\tau) \to (G,\mu)$ *é contínua.*

PROVA: A necessidade da condição segue imediatamente de 4.16. Reciprocamente, seja μ uma topologia de Hausdorff τ_F-admissível em G, menos fina do que η, com $A : (E,\tau) \to (G,\mu)$ contínua. Então o gráfico de A é um subconjunto fechado de $(E,\tau) \times (G,\mu)$ e, desde que $\mu \subset \eta$, temos também que o gráfico de A é fechado em $(E,\tau) \times (G,\eta)$. Logo $A : (E,\tau) \to (G,\eta)$ é fechada ∎

COROLÁRIO 4.18 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *e* μ *uma topologia de Hausdorff* τ_F*-admissível em* E *menos fina do que* τ. *Então a aplicação identidade* $i : (E,\mu) \to (E,\tau)$ *é fechada.*

PROVA: Óbvia de 4.17 ∎

PROPOSIÇÃO 4.19 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo. Se* (E,τ^*) *é um* EVT *tonelado de Hausdorff com* $\tau^* \subset \tau$, *então* $\tau^* = \tau$.

PROVA: Como (E,τ^*) é tonelado, é suficiente mostrarmos que τ possui um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em E τ^*-fechadas. Seja $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um sistema fundamental de vizinhanças fechadas simétricas do 0 em (E,τ) com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{0\}$. Façamos $W_1 = V_1$ e definamos por indução uma seqüência $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de τ-vizinhanças fechadas simétricas do 0 em E tal que

$$W_{n+1} + W_{n+1} \subset V_n \cap W_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente a seqüência $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é um sistema fundamental de vizinhanças simétricas fechadas do zero em (E,τ) com $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n = \{0\}$ e $W_{n+1} \subset W_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja T_n a τ^*-aderência de W_n. Então a topologia τ_F-admissível em E que admite a seqüência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por sistema fundamental de vizinhanças do 0 em E é τ^*-fechada. Por ser (E,τ^*) um EVT tonelado segue que T_n é uma τ^*-vizinhança do 0 em E para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ dado e seja $x \in T_{n+i}$. Logo $(x + T_{n+2}) \cap W_{n+1} \neq \emptyset$ (pois $x \in \overline{W_{n+1}}^{\tau^*}$ e T_{n+2} é uma τ^*-vizinhança do 0). Seja $x_1 \in W_{n+1}$ com $x - x_1 \in T_{n+2}$ (T_{n+2} é uma vizinhança simétrica do 0). Por indução, podemos definir uma seqüência $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em E com $x_j \in W_{n+j}$ e

$$x - \sum_{i=1}^{j} x_i \in T_{n+j+1} .$$

Desde que $\left(\sum_{i=1}^{j} x_i\right)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em (E,τ) e (E,τ) é completo, existe $y \in E$ tal que $\sum_{i=1}^{j} x_i \to y$ quando $j \to \infty$. Como $\sum_{i=1}^{j} x_i \in \sum_{i=1}^{j} W_{n+i} \subset W_n$ e W_n é τ-fechado, segue que $y \in W_n$. Afirmamos que $y=x$. De fato, como $\tau^* \subset \tau$, $(\sum_{i=1}^{j} x_i)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para y em (E,τ^*). Temos também que $x-y \in T_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $x - \sum_{i=1}^{j} x_i \in T_{n+j+1}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Admitamos, por absurdo, que $x-y \neq 0$. Desde que (E,τ^*) é um EVT de Hausdorff, existe V, τ^*-vizinhança do 0 em E, tal que $(X-y+V) \cap V = \emptyset$. Por ser $\tau^* \subset \tau$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(x-y+V) \cap W_k = \emptyset$. Segue disso que $x-y \notin T_k$, o que é contradição ∎

TEOREMA 4.20 - *Toda aplicação linear fechada de um* EVT *tonelado em um* EVT *metrizável completo é contínua.*

PROVA: Sejam (E,τ) e (G,η) dois EVT, com (E,τ) tonelado e (G,η) metrizável completo e seja T uma aplicação linear fechada de E em G. Seja μ^* uma topologia de Hausdorff τ_F-admissível em G tal que $\mu^* \subset \mu$ com $T:(E,\tau) \to (G,\mu^*)$ contínua. Ponhamos $\mu_o = (\mu^*)^t$. Então, desde que (E,τ) é tonelado, $T:(E,\tau) \to (G,\mu_o)$ é contínua. Como (G,μ) é tonelado (ver 4.3), segue que $\mu_o \subset \mu$. De 4.18 vem que $\mu_o = \mu$. Logo $T:(E,\tau) \to (G,\mu)$ é contínua ∎

DEFINIÇÃO 4.21 - Um EVT de Hausdorff (E,τ) é chamado *infra-s-espaço* se para toda topologia μ de Hausdorff τ_F-admissível em E com $\mu \subset \tau$, tem-se $\mu^t \supset \tau$ ou, equivalentemente, $\mu^t = \tau^t$.

PROPOSIÇÃO 4.22 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo. Então* (E,τ) *é um infra-s-espaço.*

PROVA: Seja μ uma topologia de Hausdorff τ_F-admissível em E menos fina do que τ. Então, por 4.18, a aplicação identidade $i : (E,\mu) \to (E,\tau)$ é fechada.

Logo $i : (E,\mu^t) \to (E,\tau)$ também é fechada pois $\mu \subset \mu^t$. Então, desde que (E,μ^t) é um EVT tonelado, segue de 4.20 que

$$i : (E,\mu^t) \to (E,\tau)$$

é contínua. Logo $\mu^t \supset \tau$. Da definição 4.21 segue que (E,τ) é um infra-s-espaço.

TEOREMA 4.23 - *Seja* (G,η) *um* EVT *de Hausdorff. São equivalentes:*

(i) - (G,η) *é um infra-s-espaço.*

(ii) - *Toda aplicação linear fechada definida num* EVT *tonelado* (E,τ) *e tomando valores em* (G,η) *é contínua.*

PROVA: (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $T : (E,\tau) \to (G,\eta)$ linear fechada. Por 4.15, existe η^*, topologia de Hausdorff τ_F-admissível em G, com $\eta^* \subset \eta$ e tal que $T : (E,\tau) \to (G,\eta^*)$ é contínua. Então $T : (E,\tau^t = \tau) \to (G,\eta^{*t})$ é contínua. Como (G,η) é um infra-s-espaço, $\eta^{*t} = \eta^t$, ou seja, $T : (E,\tau) \to (G,\eta^t)$ é contínua, o que implica, por ser $\eta^t \supset \eta$, que $T : (E,\tau) \to (G,\eta)$ é contínua.

(ii) $\Rightarrow$ (i) - Seja μ uma topologia de Hausdorff τ_F-admissível em G menos fina do que η. Logo, por 4.18, a aplicação identidade $i : (G,\mu) \to (G,\tau)$ tem gráfico fechado.

Portanto $i : (G,\mu^t) \to (G,\mu)$ também tem gráfico fechado pois $\mu^t \supset \mu$. Segue, então, da hipótese que $i : (G,\mu^t) \to (G,\eta)$ é contínua, pois (G,μ^t) é um EVT tonelado. Logo $\mu^t \supset \eta$. Desde que $\mu^t \subset \eta^t$, tem-se que $\mu^t = \eta^t$, ou seja, (G,η) é um infra-s-espaço ∎

DEFINIÇÃO 4.24 - Seja (E,τ) e (G,η) espaços vetoriais topológicos. Seja A uma aplicação linear de E em G. Dizemos que

(i) - A é *quase-contínua* se, para toda η-vizinhança do 0 em G, $\overline{A^{-1}(V)}$ é uma τ-vizinhança do 0 em E;

(ii) - A é *aberta* (resp. *quase-aberta*) se, para cada τ-vizinhança do 0 em E, $A(U)$ (resp. $\overline{A(U)}$) é uma η-vizinhança do 0 em G.

Da definição acima segue imediatamente que toda aplicação linear contínua (resp. aberta) é quase-contínua (resp. quase-aberta).

PROPOSIÇÃO 4.25 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos e* A *uma aplicação linear de* E *em* G.

(i) - *Se* (E,τ) *é tonelado, então* A *é quase-contínua;*

(ii) - *Se* A *é sobrejetiva e* (G,η) *é tonelado, então* A *é quase-aberta.*

PROVA: (i) - óbvia, pois $\overline{A^{-1}(\eta)}$ é uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada e (E,τ) é um EVT tonelado.

(ii) - segue imediatamente do fato de $\overline{A(\tau)}$ ser uma topologia τ_F-admissível em G η-fechada e de (G,η) ser um EVT tonelado.

DEFINIÇÃO 4.26 - Um EVT de Hausdorff (G,η) é chamado $\mathcal{B}_r$-*completo* se toda aplicação linear T quase-contínua e fechada de um EVT arbitrário (E,τ) em (G,η) é contínua.

PROPOSIÇÃO 4.27 - *Seja* (E,τ_o) *um* EVT *de Hausdorff tal que para toda topologia* τ *de Hausdorff* τ_F*-admissível em* E *menos fina do que* τ_o *com* $\overline{\tau_o}^{\tau} \subset \tau$, *tem-se que* $\tau = \tau_o$. *Então* (E,τ_o) *é* $\mathcal{B}_r$*-completo.*

PROVA: Suponhamos por absurdo que (E,τ_o) não é $\mathcal{B}_r$-*completo*. Seja (G,μ) um EVT. Então existe uma aplicação linear quase-contínua fechada T de G em E que não é contínua. Seja τ a mais fina topologia de Hausdorff τ_F-admissível em E, menos fina do que τ_o, com $T:(G,\mu)\to(E,\tau)$ contínua. Afirmamos que $\overline{\tau_o}^{\tau} \subset \tau$. De fato, seja V uma $\overline{\tau_o}^{\tau}$-vizinhança do 0 em E. Portanto existe U, τ_o-vizinhança do 0 em E, tal que $U \subset \overline{U}^{\tau} \subset V$. Como $T:(G,\mu)\to(E,\tau_o)$ é quase contínua, tem-se que $\overline{T^{-1}(U)}^{\mu}$ é uma μ-vizinhança do 0 em G. Por serem $T:(G,\mu)\to(E,\tau)$ contínua e $\overline{U}^{\tau}$ τ-fechado em E, segue que $\overline{T^{-1}(\overline{U}^{\tau})}^{\mu} = T^{-1}(\overline{U}^{\tau})$. Como $\overline{T^{-1}(U)}^{\mu} \subset T^{-1}(\overline{U}^{\tau})$ segue que $T^{-1}(\overline{U}^{\tau})$ é uma μ-vizinhança do 0 em G, o que é verdade também para $T^{-1}(V)$. Logo $T:(G,\mu)\to(E,\overline{\tau_o}^{\tau})$ é contínua. Pela hipótese feita sob τ, segue que $\overline{\tau_o}^{\tau} \subset \tau$. Logo, da hipótese, tem-se que $\tau = \tau_o$, o que é contradição. Portanto (E,τ_o) é $\mathcal{B}_r$-*completo* ∎

PROPOSIÇÃO 4.28 - *Seja* (E,τ_o) *um* EVT *tonelado de Hausdorff. Se* (E,τ_o) *é um infra-s-espaço, então* (E,τ_o) *é* B_r*-completo.*

PROVA: Seja τ uma topologia de Hausdorff τ_F-admissível em E menos fina que τ_o com $\bar{\tau}_o^{\tau} \subset \tau$. Afirmamos que $(E,\bar{\tau}_o^{\tau})$ é um EVT tonelado de Hausdorff. De fato, que $(E,\bar{\tau}_o^{\tau})$ é um EVT de Hausdorff segue imediatamente da hipótese feita sobre τ e de $\bar{\tau}_o^{\tau} \subset \tau$. Mostremos então que $(E,\bar{\tau}_o^{\tau})$ é tonelado. Para isso, seja μ uma topologia τ_F-admissível em E $\bar{\tau}_o^{\tau}$-fechada. Então, como $\bar{\tau}_o^{\tau} \subset \tau_o$, μ é τ_o-fechada. De (E,τ_o) tonelado, segue que $\mu \subset \tau_o$. Seja W uma μ-vizinhança básica do 0 em E. Então existe V, τ_o-vizinhança do 0 em E, tal que $V \subset W$. Então $\bar{V}^{\tau} \subset \bar{W}^{\tau}$. Como W é $\bar{\tau}_o^{\tau}$-fechado e $\bar{\tau}_o^{\tau} \subset \tau$, segue que $\bar{V}^{\tau} \subset W$.

Como $\bar{V}^{\tau}$ é uma $\bar{\tau}_o^{\tau}$-vizinhança do 0 em E segue que W é uma $\bar{\tau}_o^{\tau}$-vizinhança do 0 em E. Logo $\mu \subset \bar{\tau}_o^{\tau}$, ou seja, $(E,\bar{\tau}_o^{\tau})$ é tonelado. Portanto $\bar{\tau}_o^{\tau} = (\bar{\tau}_o^{\tau})^t$. Como (E,τ_o) é um infra-s-espaço e $\bar{\tau}_o^{\tau} \subset \tau_o$, segue que $\tau_o = \bar{\tau}_o^{\tau} \subset \tau \subset \tau_o$. Portanto $\tau = \tau_o$. Pela proposição 4.27, tem-se que (E,τ_o) é B_r-completo ∎

COROLÁRIO 4.29 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo sobre um anel de divisão topológico metrizável e não-discreto* (F,τ_F). *Então* (E,τ) *é* B_r*-completo.*

PROVA: De 4.3 segue que (E,τ) é um EVT de Hausdorff tonelado. De 4.22 vem que (E,τ) é um infra-s-espaço. Logo, de 4.28, tem-se que (E,τ) é B_r-completo ∎

PROPOSIÇÃO 4.30 - *Seja* (G,η) *um* EVT *metrizável completo sobre um anel de divisão topológico metrizável* (F,τ_F). *Então toda aplicação linear* T *quase-contínua e fechada definida num* EVT *arbitrário* (E,τ) *e tomando valores em* (G,η) *é contínua.*

PROVA: De 4.29, (E,τ) é B_r-completo. Da definição 4.26 o resultado segue ∎

PROPOSIÇÃO 4.31 - *Todo espaço* B_r*-completo é um infra-s-espaço.*

PROVA: Seja (G,η) um espaço B_r-completo. Seja (E,τ) um EVT tonelado e $T:(E,\tau)\to(G,\eta)$ uma aplicação linear fechada. Por 4.25, T é uma aplicação linear quase-contínua de E em G. Como (G,η) é B_r-completo, vem que T é contínua. Portanto, de 4.23, vem que (G,η) é um infra-s-espaço ∎

COROLÁRIO 4.32 - *Toda aplicação linear fechada de um* EVT *tonelado num espaço* B_r*-completo é contínua.*

PROVA: Sejam (E,τ) um EVT tonelado, (G,η) um espaço B_r-completo e $T:(E,\tau)\to(G,\eta)$ uma aplicação linear fechada. Por 4.31 (G,η) é um infra-s-espaço. Por 4.23, $T:(E,\tau)\to(G,\eta)$ é contínua ∎

LEMA 4.33 - *Seja* T *uma aplicação linear contínua de um* EVT *metrizável* (E,τ) *em um* EVT *de Hausdorff* (G,η). *Se* $\mathcal{B}=\{U_n; n\in\mathbb{N}\}$ *é um sistema fundamental enumerável de* τ*-vizinhanças do* 0 *em* E, *então* $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{T(U_n)} = \{0\}$.

PROVA: É óbvio que o resultado segue imediatamente de 4.16, desde que toda aplicação contínua é fechada ■

TEOREMA 4.34 - *Sejam* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo e* (G,η) *um* EVT *de Hausdorff. Então toda aplicação linear contínua e quase-aberta de* E *em* G *é aberta.*

PROVA: Seja $T:(E,\tau) \to (G,\eta)$ uma aplicação linear contínua e quase-aberta. Para mostrarmos que T é uma aplicação aberta, basta mostrarmos que, para algum sistema fundamental $\mathcal{B}$ de τ-vizinhanças do 0 em E, $T(U)$ é uma η-vizinhança do 0 em G para todo $U \in \mathcal{B}$. Seja, então, $\mathcal{B} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de partes simétricas e τ-fechadas em E com $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, $n \geq 1$. Como T é quase-aberta, segue que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \overline{T(U_n)}$ é uma η-vizinhança do 0 em G. O resultado seguirá se mostrarmos que $T(U_n) \supset W_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso, seja $k \in \mathbb{N}$ dado e seja $y \in W_{k+1} = \overline{T(U_{k+1})}$. Como $(y + W_{k+2}) \cap T(U_{k+1}) \neq \emptyset$, podemos escolher $x_1 \in U_{k+1}$ tal que $y - T(x_1) \in W_{k+2}$. Por indução, podemos definir uma seqüência $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em E com $x_j \in U_{k+j}$ e $y - \sum_{i=1}^{j} T(x_i) \in W_{k+j+i}$. Afirmamos que a seqüência das somas parciais da série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é uma seqüência de Cauchy em E. De fato, seja V uma τ-vizinhança do 0 em E. Da escolha de $\mathcal{B}$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_o$ $U_{k+n-1} \subset V$. Então, para todo $p \geq 0$ e para todo $n \geq n_o$

$$\sum_{i=0}^{p} x_{n+i} \in \sum_{i=0}^{p} U_{k+n+i} \subset U_{k+n} + \sum_{i=1}^{p} U_{k+n+i} \subset$$

$$\subset U_{k+n} + U_{k+n} \subset U_{k+n-1} \subset V,$$

o que prova a nossa asserção. Como (E,τ) é completo, existe $x \in E$ tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Por outro lado, como

$$\sum_{i=0}^{p} x_{1+i} \in U_{k+1-1} = U_k,\ p \geq 0, \quad \text{e} \quad U_k \quad \text{é} \quad \tau\text{-fechado},$$

segue que $x \in U_k$. Também, para todo $p \geq 0$ e para todo $n \geq 1$,

$$y - \sum_{i=1}^{n+p} T(x_i) \in W_{k+n+p+1} \subset W_{k+n+1}.$$

Fazendo $p \to \infty$, temos que $y - \sum_{i=0}^{\infty} T(x_i) \in W_{k+n+1}$ para todo $n \geq 1$. Da continuidade de T segue que $y - T(x) \in W_{k+n+1}$ para todo $n \geq 1$. De 4.33 vem que $y = T(x)$. Porém $T(x) \in T(U_k)$. Logo $W_{k+1} \subset T(U_k)$∎

COROLÁRIO 4.35 - *Sejam* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo e* (G,η) *um* EVT *de Hausdorff tonelado. Seja* T *uma aplicação linear contínua de* E *sobre* G. *Então* T *é aberta.*

PROVA: De 4.25 (ii), vem que T é quase-aberta. De 4.34, vem que T é aberta∎

COROLÁRIO 4.36 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos metrizáveis completos sobre o mesmo anel de divisão topológico metrizável e não-discreto* (F,τ_F). *Então toda aplicação linear contínua* T *de* E *sobre* G *é aberta.*

PROVA: O resultado segue de 4.35 pois (G,η) é tonelado (veja 4.3) ∎

LEMA 4.37 - *Sejam* (E,τ) *e* (G,η) *espaços vetoriais topológicos sobre o mesmo anel de divisão topológica metrizável e não-discreto* (F,τ_F). *Seja* T *uma aplicação linear de* E *em* G *tal que* $T(E)$ *é de segunda categoria em* G. *Então* T *é quase-aberta.*

PROVA: Seja U uma τ-vizinhança do 0 em E e seja $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em F^* com $\lambda_k^{-1}\to 0$ quando $k\to\infty$. Desde que U é absorvente em E, temos que $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_k U$. Logo $T(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_k T(U)$.

Como $T(E)$ é de segunda categoria em G, existe $k_o\in\mathbb{N}$ tal que $\lambda_{k_o}\overline{T(U)}$ é uma η-vizinhança do 0 em G, o que é verdade também para $\overline{T(U)}$. Logo, por 4.24(ii), T é quase-aberta ∎

COROLÁRIO 4.38 - *Sejam* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo e* (G,η) *um* EVT *de Baire e de Hausdorff sobre o mesmo anel de divisão topológico metrizável e não-discreto* (F,τ_F). *Seja* T *uma* *aplicação linear contínua de* E *sobre* G . *Então* T *é aberta.*

PROVA: Por 4.3, (E,τ) é um EVT tonelado. Como $T(E)=G$ e todo espaço de Baire é de segunda categoria nele mesmo, por 4.37 T é quase-aberta. Logo, por 4.34, o resultado segue ∎

COROLÁRIO 4.39 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo. Se* μ *é uma topologia de Hausdorff* τ_F*-admissível em* E , *menos fina do que* τ , *com* (E,μ) *tonelado, então* $\mu=\tau$.

PROVA: Seja i a aplicação identidade de (E,τ) sobre (E,μ) . Como i é contínua e (E,μ) é um EVT tonelado, segue de 4.25(ii) que i é quase-aberta . Por 4.35 i é aberta, ou seja, $\tau \subset \mu$. Disso e da hipótese segue que $\tau = \mu$.

COROLÁRIO 4.40 - *Seja* E *um espaço vetorial sobre um anel de divisão topológico metrizável* (F,τ_F) . *Se* μ *e* τ *são topologias* τ_F*-admissíveis em* E , *metrizáveis e completas, com* $\mu \subset \tau$, *então* $\mu = \tau$.

PROVA: De 4.3 vem que (E,μ) é um EVT tonelado e o resultado segue aplicando-se 4.39 ∎

TEOREMA 4.41 - *Sejam* (E,τ) *um* EVT *metrizável completo e* (G,η) *um* EVT *de Hausdorff sobre o mesmo anel de divisão topológico metrizável* (F,τ_F) . *Seja* T *uma aplicação linear contínua de* E *em* G *tal que* T(E) *é de segunda categoria em* G . *Então* T *é* *aberta e sobre.*

PROVA: Por 4.37, T é quase-aberta. Por 4.34 T é aberta. Desde que $T(E)$ é aberto em G, segue que $T(E)$ é absorvente. Seja $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em F^* com $\lambda_k^{-1} \to 0$ quando $k \to \infty$. Então $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \lambda_k T(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(\lambda_k E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} T(E) = T(E)$;

ou seja, $T : E \to G$ é sobrejetiva.

§5 - ESPAÇOS BORNOLÓGICOS

DEFINIÇÃO 5.1: Diremos que um EVT (E,τ) sobre (F,τ_F) é *bornológico* se toda topologia em E que é τ_F-admissível e τ-bornívora é menos fina do que τ.

DEFINIÇÃO 5.2 - Sejam (E,τ) e (G,η) espaços vetoriais topológicos e seja A uma aplicação linear de E em G. Diremos que A é *limitada* se $A(B)$ é limitado em (G,η) para todo $B \subset E$ limitado em (E,τ).

PROPOSIÇÃO 5.3 - *Seja* (E,τ) *um* EVT. *São equivalentes:*

(i) (E,τ) *é bornológico;*

(ii) *Toda aplicação linear limitada definida em* (E,τ) *e tomando valores num* EVT *arbitrário* (G,η) *é contínua.*

PROVA: (i) $\Rightarrow$ (ii) - Suponhamos que (E,τ) é um EVT bornológico e seja $T : (E,\tau) \to (G,\eta)$ uma aplicação linear limitada. Afirmamos que a topologia τ_F-admissível em E, $T^{-1}(\eta)$, é τ-bornívora em E. De fato, seja $V \in \mathcal{B}$, onde $\mathcal{B}$ um sistema fundamental de η-vizinhanças 0 em G e seja $B \subset E$ τ-limitado. Então existe W, τ_F-vizinhança do 0 em F, tal que $WT(B) \subset V$. Portanto, $WB \subset T^{-1}(V)$. Como $T^{-1}(V) \in T^{-1}(\mathcal{B})$ e $T^{-1}(\mathcal{B})$ é um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em $(E,T^{-1}(\eta))$, a afirmação segue. Agora, por ser (E,τ) bornológico, tem-se que $T^{-1}(\eta) \subset \tau$. Logo

$T : E \to G$ é contínua.

(ii) $\Rightarrow$ (i) - Seja μ uma topologia τ_F-admissível em E τ-bornívora. Se mostrarmos que a aplicação identidade $i: (E,\tau) \to (E,\mu)$ é limitada, seguirá da hipótese que i é contínua e que, portanto, $\mu \subset \tau$. Seja, então, $B \subset E$ τ-limitado e seja V uma μ-vizinhança básica do 0 em E. Pela hipótese feita sobre μ, tem-se que V é uma μ-vizinhança do 0 em E τ-bornívora. Logo V absorve B, o que implica que B é μ-limitado. Então $i : (E,\tau) \longrightarrow (E,\mu)$ é limitada ■

PROPOSIÇÃO 5.4 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *metrizável sobre um anel de divisão topológico metrizável* (F,τ_F). *Então* (E,τ) *é um* EVT *bornológico.*

PROVA: Seja (G,η) um EVT sobre (F,τ_F) e seja $A : E \to G$ uma aplicação linear limitada. Suponhamos por absurdo que A não seja contínua. Portanto existe V η-vizinhança do 0 em G tal que $A^{-1}(V)$ não é τ-vizinhança do 0 em E. Seja $\mathcal{B} = \{B_n;\ B_n \supset B_{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\mathcal{U} = \{U_n; U_n \supset {}_{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$) um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em (E,τ) (resp. (F,τ_F)). Desde que $\mathcal{B}$ satisfaz (V1) - (V4) em 1.2, por indução podemos determinar uma sequência $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ e um conjunto $P = \{U_{n_k} B_{n_k};\ U_{n_k} \in \mathcal{U};\ B_{n_k} \in \mathcal{B}, U_{n_1} B_{n_1} \subset B_1$ e $U_{n_k} B_{n_k} \subset B_{n_k - 1}\}$. Seja $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de E com $x_k \in U_{n_k} B_{n_k}$ e $x_k \notin A^{-1}(V)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\lambda_k \in F^*$, $\lambda_k^{-1} \in U_{n_k}$ e

$\lambda_k x_k \in \beta_{n_k}$. A seqüência $(A(\lambda_k x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ não é limitada em (G,η), embora a seqüência $(\lambda_k x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ seja τ-limitada em E. De fato, suponhamos que a seqüência $(A(\lambda_k x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ seja limitada em (G,η). Então existe uma τ_F-vizinhança U do 0 em F tal $U\{A(\lambda_k x_k), k \in \mathbb{N}\} \subset W$. Como $\lambda_k^{-1} \to 0$ quando $k \to \infty$, existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$ $\lambda_k^{-1} \in U$. Logo para todo $k \geq k_0$ $\lambda_k^{-1} A(\lambda_k x_k) \in V$ o que implica que para todo $k \geq k_0$ $x_k \in A^{-1}(V)$, o que é contradição. Logo $A : E \to G$ é contínua. De 5.3 segue que (E,τ) é bornológico ∎

Num EVT (E,τ) designemos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as topologias τ_F-admissíveis em E que são τ-bornívoras. Seja $\tau^\beta := \sup\{\eta, \eta \in \mathcal{F}\}$. Então τ^β é uma topologia τ_F-admissível em E e $\tau \subset \tau^\beta$.

PROPOSIÇÃO 5.5 (E,τ) e (E,τ^β) têm os mesmos limitados.

PROVA: Desde que $\tau \subset \tau^\beta$, então todo τ^β-limitado e τ-limitado. Reciprocamente, seja $B \subset E$ τ-limitado. Então B é η-limitado em E para toda $\eta \in \mathcal{F}$. Da definição de τ^β segue então que é τ^β-limitado em E ∎

PROPOSIÇÃO 5.6 - *Seja* (E,τ) *um* EVT. *Então* τ^β *é a mais fina topologia* τ_F-*admissível em* E *que tem os mesmos limitados de* (E,τ).

PROVA: Seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E tal que (E,τ) e (E,ξ) tenham os mesmos limitados. Então ξ é uma topologia

τ_F-admissível em E τ-bornívora. Logo $\xi \in F$ o que implica que $\xi \subset \tau^\beta$ ∎

PROPOSIÇÃO 5.7 - *O EVT* (E,τ^β) *é bornológico.*

PROVA - Seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E τ^β-bornívora e seja V uma ξ-vizinhança do 0 em E. Seja $B \subset E$ τ^β-limitado. Então, pela hipótese feita sobre ξ, V absorve B. Pela proposição 5.5, B é τ-limitado. Logo ξ é uma topologia τ_F-admissível em E τ-bornívora. Da definição de τ^β, segue, então, que $\xi \subset \tau^\beta$. Portanto (E,τ^β) é bornológico ∎

PROPOSIÇÃO 5.8 - *Um* EVT (E,τ) *é bornológico se, e somente se,* $\tau = \tau^\beta$.

PROVA: Claramente a condição é suficiente. Reciprocamente, suponhamos que (E,τ) é bornológico. Desde que $\tau \subset \tau^\beta$, basta mostrarmos que $\tau^\beta \subset \tau$. Seja, então, i a aplicação identidade de (E,τ^β) em (E,τ) e seja η uma topologia τ_F-admissível em E τ-bornívora. Se denotarmos por i_η a aplicação identidade de (E,τ^β) em (E,η), tem-se que i_η é contínua. Seja I_η a aplicação identidade de (E,τ) em (E,η). Desde que $\eta \subset \tau$, pois estamos supondo que (E,τ) é um EVT bornológico, tem-se que I_η é contínua. Como $i_\eta \circ i = I_\eta$, segue de 2.3.3 e 2.6 que i é contínua. Logo $\tau^\beta \subset \tau$. Portanto $\tau = \tau^\beta$ ∎

PROPOSIÇÃO 5.9 - *Seja* $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),A_\alpha)$, *onde* $(E_\alpha,\tau_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$

é uma família de espaços vetoriais topológicos bornológicos. Então (E,τ) é bornológico.

PROVA: Seja (G,η) um EVT arbitrário e seja A uma aplicação linear limitada de E em G e seja $\alpha \in \Lambda$ dado. Desde que A_α é uma aplicação linear contínua de E_α em E, portanto limitada, segue que $A \circ A_\alpha : E_\alpha \longrightarrow G$ é limitada. Como (E_α,τ_α) é um EVT bornológico, segue da prop. 5.3 que $A \circ A_\alpha : E_\alpha \to G$ é contínua. Aplicando 3.4 vem que A é contínua ∎

COROLÁRIO 5.8 - (i) - *A soma direta topológica de uma família de EVT bornológicos é um EVT bornológico.*

(ii) - *Todo limite indutivo estrito de uma família de EVT bornológicos é bornológico.*

(iii) - *Todo quociente de um EVT bornológico é bornológico.*

§6 - ESPAÇOS QUASE-TONELADOS

DEFINIÇÃO 6.1 - Um EVT (E,τ) é dito *quase-tonelado* se toda topologia em E τ_F-admissível, τ-fechada e τ-bornívora, é menos fina do que τ.

EXEMPLO 6.2

6.2.1 - Todo espaço tonelado é quase-tonelado.

6.2.2 - Todo espaço bornológico é quase-tonelado.

Num EVT (E,τ), denotaremos por $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as topologias τ_F-admissíveis em E que são τ-fechadas e τ-bornívoras. Seja $\tau^{b*} = \sup\{\mu, \mu \in \mathcal{F}\}$. Então τ^{b*} é uma topologia τ_F-admissível em E com $\tau \subset \tau^{b*}$.

PROPOSIÇÃO 6.3 - *Seja* (E,τ) *um* EVT. *Então*

(i) (E,τ) *é quase-tonelado se, e somente se,* $\tau = \tau^{b*}$.

(ii) (E,τ) *e* (E,τ^{b*}) *têm os mesmos limitados.*

(iii) $\tau^{b*} \subset \tau^{\beta}$.

PROVA: (i) - Suponhamos que (E,τ) é um EVT quase-tonelado. Seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada e τ-bornívora. Segue da hipótese que $\xi \subset \tau$ e da definição de τ^{b*} que $\tau^{b*} \subset \xi$. Logo $\tau^{b*} \subset \tau$ e por ser $\tau \subset \tau^{b*}$ tem-se, então, que $\tau^{b*} = \tau$. Reciprocamente, suponhamos que $\tau^{b*} = \tau$ e seja η uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada e τ-bornívora. Da definição de τ^{b*} segue que $\eta \subset \tau^* = \tau$, o que implica que (E,τ) é quase-tonelado.

(ii) É claro que todo τ^{b*}-limitado em E é τ-limitado, pois $\tau \subset \tau^{b*}$. Seja, agora, $B \subset E$ τ-limitado. Então para toda topologia ξ τ_F-admissível em E, τ-fechada e τ-bornívora, B é ξ-limitado. Da definição de τ^{b*} segue que B é τ^{b*}-limitado.

(iii) Óbvia de 5.6 e de 6.3 (ii) ∎

PROPOSIÇÃO 6.4 - *Seja* $(E,\tau) = \operatorname{ind}_{\alpha \in \Lambda} ((E_\alpha,\tau_\alpha),A_\alpha)$, *onde para cada* $\alpha \in \Lambda$ (E_α,τ_α) *é um* EVT *quase-tonelado. Então* (E,τ) *é um* EVT *quase-tonelado.*

PROVA: Seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada e τ-bornívora. Seja $\alpha \in \Lambda$ dado. Então, porque $A_\alpha : (E_\alpha,\tau_\alpha) \to (E,\tau)$ é contínua, $A_\alpha^{-1}(\xi)$ é uma topologia τ_F-admissível em E_α τ_α-fechada e τ_α-bornívora. Como, por hipótese, (E_α,τ_α) é quase-tonelado, tem-se que $A_\alpha^{-1}(\xi) \subset \tau_\alpha$. Logo $A_\alpha : (E_\alpha,\tau_\alpha) \to (E,\xi)$ é continua. Da definição 3.2 segue que $\xi \subset \tau$. Logo (E,τ) é quase-tonelado ∎

COROLÁRIO 6.5 - (i) *Todo limite indutivo estrito de espaços quase-tonelados é quase-tonelado.*

(ii) *Toda soma direta topológica de espaços quase-tonelados é quase-tonelada.*

(iii) *Todo quociente de um espaço quase-tonelado é qua-*

se-tonelado.

Num EVT (E,τ) denotaremos por $QB(\tau)$ o conjunto de todas as topologias μ τ_F-admissíveis em E tais que:

(i) $\tau \subset \mu$

(ii) (E,μ) é quase-tonelado.

Seja $\tau^{q^t} := \inf \{\mu ; \mu \in QB(\tau)\}$. Então τ^{q^t} é uma topologia τ_F-admissível em E mais fina do que τ.

PROPOSIÇÃO 6.6 - *Seja* (E,τ) *um* EVT. *Então*

(i) (E,τ^{q^t}) *é um* EVT *quase-tonelado.*

(ii) $\tau \subset \tau^{b^*} \subset \tau^{q^t} \subset \tau^{\beta}$.

PROVA: (i) - Da definição de τ^{q^t} e de 3.3.3., temos que $(E,\tau^{q^t}) = \operatorname{ind}_{\eta \in QB(\tau)} ((E,\eta), i_\eta)$, onde para cada $\eta \in QB(\tau)$, i_η é a aplicação identidade em E. Como, para cada $\eta \in QB(\tau)$, (E,η) é um espaço quase-tonelado, segue de 6.4 que (E,τ^{q^t}) é um EVT quase tonelado.

(ii) - Mostraremos inicialmente que $\tau^{b^*} \subset \tau^{q^t}$. Para isso, seja ξ uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada e τ-bornívora e seja $\eta \in QB(\tau)$. Afirmamos que $\xi \subset \eta$. De fato, seja V uma ξ-vizinhança do 0 em E τ-fechada e τ-bornívora. Então V é uma vizinhança do 0 η-fechada (porque $\tau \subset \eta$) e η-bornívora desde que toda parte η-limitada é τ-limitada e V absorve os τ-limitados. Como (E,η) é um EVT quase-tonelado, segue que $\xi \subset \eta$. Da definição de τ^{q^t} e τ^{b^*}, tem-se imediatamen te que $\tau^{b^*} \subset \tau^{q^t}$.

É imediato que $\tau^{q^t} \subset \tau^{\beta}$, pois (E,τ^{β}) é um espaço bornológico, portanto quase-tonelado, $\tau \subset \tau^{\beta}$. Logo $\tau^{\beta} \in QB(\tau)$, o que implica que $\tau^{q^t} \subset \tau^{\beta}$ ∎

A topologia τ^{q^t} construída e descrita como acima é chamada *topologia quase-tonelada associada* a τ e o EVT (E,τ^{q^t}) é chamado *espaço quase-tonelado associado ao* EVT (E,τ).

PROPOSIÇÃO 6.7 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *quase-tonelado e seja* A *uma aplicação linear limitada definida em* (E,τ) *e tomando valores num* EVT *arbitrário* (G,η). *Então* A *é quase-contínua.*

PROVA: Como $A:(E,\tau) \longrightarrow (G,\eta)$ é uma aplicação linear limitada, $A^{-1}(\eta)$ é uma topologia τ_F-admissível em E τ-bornívora. Portanto $\overline{A^{-1}(\eta)}$ é uma topologia τ_F-admissível em E τ-fechada e τ-bornívora. Da hipótese segue, então, que $\overline{A^{-1}(\eta)} \subset \tau$. Logo, qualquer que seja V, η-vizinhança do 0 em G, $\overline{A^{-1}(V)}$ é uma τ-vizinhança do 0 em E. Da definição 4.24 segue que $A: E \longrightarrow G$ é quase-contínua ∎

PROPOSIÇÃO 6.8 - *Seja* (F,τ_F) *um anel de divisão topológico metrizável e sejam* (E,τ) *e* (G,η) EVT (F,τ_F). *Suponhamos que* (E,τ) *é quase-tonelado e que* (G,η) *é metrizável e completo. Então toda aplicação linear* $T: E \longrightarrow G$ *limitada e fechada é contínua.*

PROVA: Seja $T:(E,\tau) \rightarrow (G,\eta)$ uma aplicação linear limitada e fechada. Por 6.7 T é quase-contínua. Por 4.30 T é contínua ∎

§7 - CORDAS EM ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

A partir deste capítulo, salvo menção em contrário, consideraremos sempre espaços vetoriais sobre um anel de divisão não-trivialmente valorizado $(F, |.|)$.

DEFINIÇÃO 7.1 - Seja E um EV e seja V uma parte não-vazia de E. Diremos que V é *equilibrado* se $\lambda V \subset V$ para todo $\lambda \in F$, $|\lambda| \leq 1$.

PROPOSIÇÃO 7.2 - *Seja* E *um* EV *e seja* B *uma parte não-vazia de* E. *Então* B *é absorvente se, e somente se, para cada* $x \in E$ *existe* $\delta_x > 0$ *tal que para cada* $\lambda \in F$, $|\lambda| \leq \delta_x$, $x \in \lambda B$.

PROVA: Suponhamos que $B \subset E$ é absorvente e seja $x \in E$. Então, por 1.7, existe uma vizinhança V_x do 0 em $(F, |.|)$ tal que $V_x x \subset B$. Como o conjunto $\{B(0;\delta); \delta \in \mathbb{R}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de 0 em $(F, |.|)$, então existe $\delta_x > 0$, tal que $B(0;\delta_x)\, x \subset V_x\, x \subset B$. Seja $\lambda \in F$, $|\lambda| \geq \delta_x$, segue que $x \in \lambda B$. Reciprocamente, seja $x \in E$. Da hipótese vem que $B(0;\delta_x)\, x \subset B$. Como $B(0;\delta_x)$ é uma vizinhança do 0 em $(F, |.|)$, de 1.7 segue que B é absorvente ∎

TEOREMA 7.3 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *e seja* $\mathcal{B}$ *um sistema fundamental de* τ*-vizinhanças do* 0 *em* E. *Então*

(i) *para cada* $V \in \mathcal{B}$ *existe* $U \in \mathcal{B}$ *tal que* $U+U \subset V$;

(ii) *para cada* $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, *e para cada* $V \in \mathcal{B}$ *existe* $W \in \mathcal{B}$ *tal que* $W \subset \lambda V$.

Reciprocamente, se $\mathcal{B}$ *é uma base de filtro em* E *tal que*

(a) *para cada* $V \in \mathcal{B}$ *existe* $U \in \mathcal{B}$ *tal que* $U+U \subset V$;

(b) *existe* $\lambda \in F$, $0 < |\lambda| < 1$, *tal que para cada* $V \in \mathcal{B}$ *existe* $W \in \mathcal{B}$ *com* $W \subset \lambda V$;

(c) *todo* $V \in \mathcal{B}$ *é equilibrado e absorvente,*

então $\mathcal{B}$ *é um sistema fundamental de vizinhanças do* 0 *para uma única topologia em* E *de* EVT *sobre* $(F, |.\,.|)$ *e, por* (ii) *acima,* (b) *é verdadeira para todo* $\lambda \in F, \lambda \neq 0$.

PROVA: ver [8].■

PROPOSIÇÃO 7.4 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *e seja* B *um subconjunto não-vazio de* E. *Então* B *é* τ-*limitado se, e somente se, para toda* τ-*vizinhança* V *do* 0 *em* E *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $\lambda \in F, |\lambda| \geq \delta$, $B \subset \lambda V$.

PROVA: Suponhamos que $B \subset E$ é τ-limitado e seja V uma τ-vizinhança do 0 em E. Por 1.8, existe uma vizinhança U do 0 em $(F, |.|)$ tal que $UB \subset V$. Como $\{B(0;\delta), \delta > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em $(F, |.\,.|)$, então, para algum $\delta > 0$, $B(0;\delta)\, B \subset U\, B \subset V$. Logo, se $\lambda \in F$ e $|\lambda| \geq \delta$, $B \subset \lambda V$. Reciprocamente, seja V uma τ-vizinhança do 0 em E. Então da hipótese segue que $B(0,\delta) B \subset V$, para algum $\delta > 0$. Como $B(0,\delta)$ é uma vizinhança do 0 em $(F,|.|)$, segue de 1.8 , que B é τ-limitado ∎

DEFINIÇÃO 7.5 - Diremos que uma sequência $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos não-vazios de um EV E é uma *corda* em E se:

(i) - para cada $n \in \mathbb{N}$ U_n é equilibrado;

(ii)- para cada $n \in \mathbb{N}$ U_n é absorvente;

(iii)- $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(iv)- existe $\lambda \in F$, $0 < |\lambda| < 1$ (e portanto para todo $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$) tal que dado $U_n \in \mathcal{U}$ existe $U_m \in \mathcal{U}$, $m > n$, tal que $U_m \subset \lambda U_n$.

Cada elemento U_n, $n \in \mathbb{N}$, de uma corda $\mathcal{U}$ é chamado o *n-ésimo nó* de $\mathcal{U}$.

NOTAÇÃO 7.6 - Seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma corda em um EV E. Por $N(\mathcal{U})$ denotaremos o conjunto $N(\mathcal{U}) := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Das condições (i) e (iii) da definição 7.5 segue imediatamente que $N(\mathcal{U})$ é um subespaço vetorial de E e é chamado o *núcleo da corda* $\mathcal{U}$.

NOTA 7.7 - Se $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são cordas num EV E e se $\lambda \in F$, definiremos

$$\lambda\mathcal{U} := (\lambda U_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} := (U_n + V_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} := (U_n \cap V_n)_{n \subset \mathbb{N}}$$

e, claramente, $\lambda\mathcal{U}$, para $\lambda \neq 0$, $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ e $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ são ainda cordas em E. Diremos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ se para cada $n \in \mathbb{N}$ $U_n \subset V_n$.

Sejam E e G espaços vetoriais e A uma aplicação linear de E em G. Se $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $\mathcal{V} = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$) é uma corda em E (resp. uma corda em G), poremos $A(\mathcal{U}) := (A(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $A^{-1}(\mathcal{V}) = (A^{-1}(V_n))_{n \in \mathbb{N}}$).

PROPOSIÇÃO 7.8 - *Sejam* E *e* G *espaços vetoriais e* A *uma aplicação linear de* E *em* G. *Então*

(i) - $A(\mathcal{U})$ *é uma corda na imagem de* A, *para toda corda* $\mathcal{U}$ de E;

(ii) - $A(\mathcal{U}) + \mathcal{V}$ *é uma corda em* G *para toda corda* $\mathcal{U}$ *em* E *e para toda corda* $\mathcal{V}$ *em* G.

(iii) - $A^{-1}(\mathcal{V})$ *é uma corda em* E *para toda corda* $\mathcal{V}$ *em* G.

PROVA: Imediata∎

DEFINIÇÃO 7.9 - Diremos que uma corda $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ num EVT (E,τ) é τ-*topológica* se o n-ésimo nó U_n de $\mathcal{U}$, $n \in \mathbb{N}$, é uma τ-vizinhança do 0 em E.

DEFINIÇÃO 7.10 - Uma corda $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ num EVT (E,τ) é dita τ-*fechada* se, para cada $n \in \mathbb{N}$, o n-ésimo nó U_n de $\mathcal{U}$ é τ-fechado em E.

PROPOSIÇÃO 7.11 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *e* U *uma parte não-vazia de* E. *Então* U *é* τ*-bornívora se, e somente se, para todo* τ*-limitado* B *de* E *existe* $\delta > 0$ *tal que para cada* $\lambda \in F, |\lambda| > \delta$, $B \subset \lambda U$.

PROVA: Imediata ■

DEFINIÇÃO 7.12 - Uma corda $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ num EVT (E,τ) é dita τ-*bornívora* se, para cada $n \in \mathbb{N}$, o n-ésimo nó U_n de $\mathcal{U}$ é uma parte τ-bornívora de E.

OBSERVAÇÃO 7.13 - Seja (E,τ) um EVT. Então:

(i) o conjunto de todas as vizinhanças τ-fechadas e equilibradas do 0 é uma base de vizinhanças do 0;

(ii) se $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de τ-vizinhanças do 0 em E, a cada τ-vizinhança V do 0 em E podemos associar uma corda τ-topológica $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $U_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $U_1 \subset V$. (A construção é feita por indução, escolhido e fixado $\lambda \in F$, $0 < |\lambda| < 1$).

DEFINIÇÃO 7.14 - Um conjunto $\mathcal{F}$ de cordas num EV E é dito *dirigido* se, quaisquer que sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{F}$, existe $\mathcal{W} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

TEOREMA 7.15 - *Se* (E,τ) *é um* EVT, *então existe um conjunto dirigido* $\mathcal{F}$ *de cordas em* E *tal que o conjunto* B *de todos os nós*

de todas as cordas de F forma uma base de τ-vizinhanças do 0 em E.
Reciprocamente, se E *é um* EV *e se* F *é um conjunto dirigido de cordas em* E, *então o conjunto* B *de todos os nós de todas as cordas de* F *é uma base de vizinhanças equilibradas do* 0 *para uma única topologia* τ *em* E *de* EVT *sobre* $(F, |.|)$ *e, nesse caso, diremos que* τ *é geradda por* F.

PROVA: ver [8]∎

OBSERVAÇÃO 7.16 - O conjunto de todas as cordas num EV E é evidentemente um conjunto dirigido de cordas em E e, por 7.15, gera uma topologia de EVT sobre $(F, |.|)$ que denotaremos por τ^{∞}. Além disso, τ^{∞} é a mais fina das topologias de EVT sobre $(F, |.|)$.

PROPOSIÇÃO 7.17 - *Um* EVT (E,τ) *é tonelado se, e somente se, toda corda* τ-*fechada em* E *é* τ-*topológica.*

PROVA: Suponhamos que (E,τ) é tonelado e seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma corda em E τ-fechada. Como o conjunto $F = \{\mathcal{U}\}$ é dirigido, por 7.15 existe uma única topologia $\tau_{\mathcal{U}}$ em E de EVT sobre $(F, |.|)$ que admite o conjunto $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ por sistema fundamental de vizinhanças do 0. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ U_n é τ-fechado em E, temos que $\tau_{\mathcal{U}}$ é uma topologia τ-fechada em E. Da hipótese vem, então, que $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau$, o que implica que $\mathcal{U}$ é uma corda τ-topológica em E. Reciprocamente, suponhamos que toda corda em E τ-

fechada é τ-topológica e seja η uma topologia em E de EVT sobre $(F,|.|)$ τ-fechada. Seja V uma η-vizinhança do 0 em E. Por 7.13, parte (ii), existe uma corda $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E, η-topológica, cujos nós U_n, $n \in \mathbb{N}$, são τ-fechados. Portanto cada U_n, $n \in \mathbb{N}$, é uma τ-vizinhança da origem. Como $U_1 \subset V$, segue que V é também uma τ-vizinhança da origem. Logo $\eta \subset \tau$ ∎

EXEMPLO 7.18 - (E,τ^{∞}) é um EVT tonelado.

PROPOSIÇÃO 7.19 - *Um* EVT (E,τ) *é quase-tonelado se, e somente se, toda corda* τ-*fechada e* τ-*bornívora em* E *é* τ-*topológica.*

PROVA: Análoga à prova da proposição 7.17 ∎

§8 - F - ESPAÇOS

DEFINIÇÃO 8.1 - Seja E um EV sobre $(F, |.|)$. Uma F-*norma* em E é uma função com valores reais $\|\cdot\|_F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

(F-1) para todo $x \in E$, $\|x\|_F \geq 0$ e $\|x\|_F = 0$ se, $x = 0$;

(F-2) $\|x+y\|_F \leq \|x\|_F + \|y\|_F$, quaisquer que sejam $x, y \in E$;

(F-3) $\|\lambda x\|_F \leq \|x\|_F$ para todo $\lambda \in F, |\lambda| \leq 1$, e para todo $x \in E$;

(F-4) $\|\lambda_n x\|_F \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, para toda sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a 0 em $(F, |.|)$.

(F-5) se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em E com $\|x_n\|_F \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, então para todo $\lambda \in F$ $\|\lambda x_n\| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

NOTA 8.2 - É imediato que para cada $x \in E$ $\|-x\|_F = \|x\|_F$.

TEOREMA 8.3 - *Toda F-norma em um EV E define uma topologia de EVT τ e tal que (E,τ) é um EVT metrizável.*

PROVA: Seja $\|.\|_F$ uma F-norma em E. Para cada $\varepsilon > 0$, consideremos o subconjunto de E definido por

$$U_\varepsilon := \{x \in E; \|x\|_F \leq \varepsilon\}.$$

Seja $\mathcal{B} = \{ U_\varepsilon ; \varepsilon > 0 \}$. É claro que $\mathcal{B}$ é um base de filtro em E. Provaremos que $\mathcal{B}$ satisfaz (a)-(c) em 7.3. Para isso, seja $\varepsilon > 0$ dado. Então

(i) - de (F-3) segue que U_ε é equilibrado;

(ii) - U_ε é absorvente (de fato, seja $x \in E$ dado. Seja $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência não-nula em F e convergente a 0. Por (F-4), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n x \in U_\varepsilon$ para todo $n \geq N$. Seja $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq |\lambda_n^{-1}| = \delta$. Então $\| \lambda^{-1} x \|_F = \| \lambda^{-1} \lambda_N^{-1} \lambda_N x \|_F \leq$ $\leq \| \lambda_N x \|_F \leq \varepsilon$ desde que $|\lambda^{-1} \lambda_N^{-1}| \leq 1$, o que implica que $\lambda^{-1} x \in U_\varepsilon$, ou seja, $x \in \lambda U_\varepsilon$);

(iii) - $U_{\varepsilon/2} + U_{\varepsilon/2} \subset U$ (De fato, zeja z um elemento de $U_{\varepsilon/2} + U_{\varepsilon/2}$. Então existem a $x, y \in U_{\varepsilon/2}$ tais que $z = x + y$. De (F-2) segue que $\| z \|_F \leq \| x \|_F + \| y \|_F$ e, portanto, da hipótese feita sobre x e y temos que $\| z \|_F \leq \varepsilon$, o que implica $z \in U_\varepsilon$).

Finalmente, suponhamos que (b) em 7.3 não seja verdadeira. Seja $\lambda_0 \in F$, com $0 < |\lambda_0| < 1$. Então existe $U_{\varepsilon_0} \in \mathcal{B}$ e existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ $U_{1/n} \not\subset \lambda_0 U_\varepsilon$. Assim, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em E com $x_n \in U_{1/n}$ e $x_n \notin \lambda_0 U_{\varepsilon_0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\| x_n \|_F \to 0$ quando $n \to \infty$ e $\| \lambda_0^{-1} x_n \|_F > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que contradiz (F-5).

Logo, por 7.3 existe uma única topologia de EVT em E, que denotaremos por $\tau_{\|\cdot\|_F}$, admitindo $\mathcal{B}$ por sistema fundamental de vizinhanças do 0 em E. Pela nota 8.2 temos que $(E, \tau_{\|\cdot\|_F})$ é um

EVT de Hausdorff.

Definamos agora uma aplicação d de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ pondo $d(x,y) = \|x - y\|_F$ para $x, y \in E$. Então d é uma métrica em E, invariante por translação e, para cada $a \in E$ e para cada $\varepsilon > 0$, temos que

$$\{x \in E; d(x,a) \leq \varepsilon\} = \{x \in E; \|x - a\|_F \leq \varepsilon\} = a + U_\varepsilon .$$

Portanto $(E, \tau_{\|\cdot\|_F})$ é um EVT metrizável ∎

TEOREMA 8.4 - *Seja* E *um* EV *sobre* $(F, |.|)$. *São equivalentes:*

(i) - (E,τ) *é um* EVT *metrizável;*

(ii) - τ *é gerada por uma única corda* $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* E *tal que* $N(\mathcal{U}) = \{0\}$;

(iii) - τ *é definida por uma métrica* d *invariante por translação tal que a função* $\|\cdot\|_F : E \to \mathbb{R}$ *definida por* $\|\cdot\|_F = d(.,0)$ *é uma* F-*norma.*

PROVA: (i) $\Rightarrow$ (ii) - Seja d uma métrica em E definido τ. Então:

$$\mathcal{B} = \{B_n; B_n = \{x \in E;\ d(x,0) \leq n^{-1}\},\ n \in \mathbb{N}\}$$

é um sistema fundamental de τ-vizinhanças do 0 em E. Seja $\lambda \in F$, $0 < |\lambda| < 1$ dado. Seja U_1 uma τ-vizinhança fechada e equilibrada do 0 em E contida em B_1. Sejam U_2' e U_2'' τ-vizinhanças fechadas e equilibradas do 0 em E satisfazendo a

$$U_2' + U_2' \subset B_2 \cap U_1 \subset U_1$$

e

$$U_2'' \subset \lambda U_1 .$$

Ponhamos $U_2 = U_2' \cap U_2''$. Então U_2 é uma τ-vizinhança fechada equilibrada do 0 em E satisfazendo a

$$U_2 + U_2 \subset U_1$$

e

$$U_2 \subset \lambda U_1 .$$

Repetindo o processo, podemos encontrar U_3, τ-vizinhanças fechada e equilibrada do 0 em E, com $U_3 + U_3 \subset U_2$ e $U_3 \subset \lambda U_2$. Por indução, podemos construir uma sequência $\mathcal{U}=(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de partes não-vazias de E e que obviamente é uma corda τ-topológica em E. Temos também que $N(\mathcal{U}) = \{0\}$, pois

$$\{0\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

e $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{0\}$ visto ser (E,τ) um EVT de Hausdorff.

Seja $\tau_{\mathcal{U}}$ a topologia de EVT em E definida pela corda $\mathcal{U}$ construída acima. Evidentemente o conjunto

$$\mathcal{G} = \{U_n;\ U_n \in \mathcal{U},\ n \in \mathbb{N}\}$$

é um sistema fundamental de $\tau_{\mathcal{U}}$-vizinhanças do 0 em E e $(E,\tau_{\mathcal{U}})$ é um EVT de Hausdorff. Afirmamos que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$. De fato, seja V uma

$\tau_{\mathcal{U}}$-vizinhança do 0 em E. Então existe $U_n \in \mathcal{G}$ tal que $U_n \subset V$. Como U_n é uma τ-vizinhança do 0 em E, segue que V é uma τ-vizinhança do 0 em E; portanto $\tau_{\mathcal{U}} \subset \tau$. Reciprocamente seja W uma τ-vizinhança do 0 em E. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_n \subset W$. Como $U_n \subset B_n \subset W$, temos que W é uma $\tau_{\mathcal{U}}$-vizinhança do 0 em E; portanto $\tau \subset \tau_{\mathcal{U}}$. Logo $\tau = \tau_{\mathcal{U}}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) - Seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma corda em E definido τ. Seja $(W_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ uma subsequência de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $W_{n_j} = U_{2(j-1)+1}$ para $j \geq 1$. Denotaremos W_{n_j} simplesmente por W_n. Claramente o conjunto $\mathcal{W} = \{W_n ;\ n \in \mathbb{N}\}$ também é um sistema fundamental de τ-vizinhanças equilibradas do 0 em E com $\bigcap_{n=1}^{\infty} W_n = \{0\}$ e $W_{n+1} + W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos, agora, uma função $g : E \to \mathbb{R}$ como segue:

$$
g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0; \\ 2^{-k}, & \text{se } x \in W_k \text{ e } x \notin W_{k+1} \\ 1, & \text{se } x \notin W_1. \end{cases}
$$

Seja $x \in E$, $x \neq 0$. Então $g(x) \neq 0$ e como, para todo $n \in \mathbb{N}$, W_n é equilibrado, segue que $g(\lambda x) = g(x)$ para todo $\lambda \in F$, $|\lambda| = 1$. Pela mesma razão, para todo $\lambda \in F$, $|\lambda| \leq 1$, $g(\lambda x) \leq g(x)$. Seja d uma função real em $E \times E$ definida por,

$$
d(x,y) = \inf \sum_{i=1}^{n} g(t_i - t_{i-1}),\quad (x,y) \in E \times E,
$$

onde o ínfimo é tomado com respeito a todas as sequências finitas

$(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ com $t_0 = x$ e $t_n = y$.

Afirmamos que

$$\frac{1}{2} g(y-x) \leq d(x,y) \leq g(y-x) \tag{1}$$

para todo $(x,y) \in E \times E$.

A segunda desigualdade é óbvia e a primeira desigualdade será provada por indução sobre n, mostrando-se que para todo $(x,y) \in E \times E$, para todo $n \in \mathbb{N}$ dado e toda sequência $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ com $t_0 = x$ e $t_n = y$ temos que

$$\frac{1}{2} g(y-x) \leq \sum_{i=1}^{n} g(t_i - t_{i-1}). \tag{2}$$

Seja então $(x,y) \in E \times E$ dado. O resultado segue trivialmente para $n = 1$, desde que a única seqüência $(t_i)_{0 \leq i \leq 1}$ tem $t_0 = x$ e $t_1 = y$. Suponhamos então que (2) é verdadeira para todo $k \leq n$, para algum $n \in \mathbb{N}$ dado, $n > 1$, e provemos (2) para $k=n+1$. Seja $a = \sum_{i=1}^{n+1} g(t_i - t_{i-1})$. Se $a \geq \frac{1}{2}$, então (2) é verdadeira porque $g(x) \leq 1$ para todo $x \in E$. Suponhamos então que $a < \frac{1}{2}$. Então existe um inteiro k, $1 < k \leq n + 1$, e tal que

$$\sum_{i=1}^{k-1} g(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{1}{2} a, \quad \sum_{i=1}^{k} g(t_i - t_{i-1}) > \frac{1}{2} a.$$

Necessariamente temos que

$$\sum_{i=k+1}^{n+1} g(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{a}{2}.$$

Desde que $k - 1 \leq n$ e $n + 1 - k \leq n$, segue da hipótese de indução que

$$g(t_{k-1}-x) \leq 2 \sum_{i=1}^{k-1} g(t_i - t_{i-1}) \leq 2.\ \frac{1}{2}\ a = a$$

e

$$g(y - t_k) \leq 2 \sum_{i=k+1}^{n+1} g(t_i - t_{i-1}) \leq 2.\ \frac{1}{2}\ a = a$$

e, da definição de a, que $g(t_k - t_{k-1}) \leq a$.

Seja m o menor inteiro tal que $2^{-m} \leq a$. Então $m \geq 2$ e, da definição de g, segue que $t_{k-1} - x,\ t_k - t_{k-1},\ y - t_k \in W_m$.

Porém

$$y - x = (y - t_k)+(t_k - t_{k-1})+(t_{k-1} - x) \in W_m+W_m+W_m \subset W_{m-1}$$

o que implica que

$$g(y-x) \leq 2^{-(m-1)} \leq 2a.$$

Da definição de d, segue então que

$$\frac{1}{2}\ g(y - x) \leq d(x,y).$$

A seguir mostraremos que d é uma métrica em E invariante por translação. De fato, de (1), segue imediatamente que

(a) $d(x,y) \geq 0$ e $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$, para todo $x,y \in E$,

Que $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,\ y \in E$ segue de $g(-x)=g(x)$ e da definição de d.

Sejam $x,y,z \in E$ e seja $\varepsilon > 0$ dado. Então existem seqüências

$(t_i)_{0 \leq i \leq p}$, com $t_0 = x$, $t_p = z$ e $(\mu_j)_{0 \leq j \leq q}$ com $\mu_0 = z$, $\mu_q = y$ tais que

$$\sum_{i=1}^{p} g(t_i - t_{i-1}) \leq d(x,z) + \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\sum_{j=1}^{q} g(\mu_j - \mu_{j-1}) \leq d(z,y) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Temos, então, que

$$d(x,y) \leq \sum_{i=1}^{p} g(t_i - t_{i-1}) + \sum_{j=1}^{q} g(\mu_j - \mu_{j-1}) \leq d(x,z) + d(z,y) + \varepsilon$$

e, desde que ε foi escolhido arbitrariamente, obtemos a desigualdade triangular

(b) $\quad d(x,y) \leq d(x,y) + d(z,y)$ para todo $x,y,z \in E$.

A invariância de d por translação segue da definição de d e da igualdade $g(y-x) = g((y+a) - (X+a))$ para todo $x,y,a \in E$. Mostraremos, a seguir, que a topologia de EVT em E definida por d coincide com a topologia τ de E. Para tal, para cada $\varepsilon > 0$, denotaremos por V_ε o conjunto de todos os $x \in E$ tais que $d(x,0) \leq \varepsilon$. Afirmamos que para cada inteiro $k \geq 1$

$$V_{2^{-(k+1)}} \subset W_k \subset V_{2^{-k}}$$

e, portanto, que a família $\{V_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em (E,τ). De fato, seja $k \geq 1$ dado e observemos que $W_k=\{x \in E;\ g(x) \leq 2^{-k}\}$. Seja $x \in V_{2^{-(k+1)}}$ dado. De $\frac{1}{2}\, g(x) \leq d(x,0) \leq \frac{1}{2}\, 2^{-k}$ segue que $g(x) \leq 2^{-k}$ e portanto, que $x \in W_k$. Seja, agora, $y \in W_k$. Então, de $d(y,0) \leq g(y) \leq 2^{-k}$ segue que $y \in V_{2^{-k}}$. Além disso, da igualdade $d(x,a) = d(x-a,0)$ segue que $\{x \in E,\ d(x,a) \leq \varepsilon\} = V_\varepsilon + a$.

AFIRMAÇÃO (c): $d(\lambda x, 0) \leq d(x,0)$ para todo $x \in E$ e para todo $\lambda \in F$, $|\lambda| \leq 1$.

PROVA. Seja $\lambda \in F$ dado, $|\lambda| \leq 1$, e seja $x \in E$. Seja $(s_i)_{0 \leq i \leq k}$ uma seqüência em E com $s_0 = \lambda x$, $s_i = \lambda t_i$, para algum $t_i \in E$, $1 \leq i \leq k-1$, e $s_k = 0$. Então,

$$d(\lambda x,0) \leq \sum_{i=1}^{k} g(s_i - s_{i-1}) = g(\lambda t_1 - \lambda x) + \sum_{i=2}^{k} g(t_i - t_{i-1}).$$

Como $g(\lambda t) \leq g(t)$ para todo $t \in E$, segue que

$$d(\lambda x,0) \leq g(t_1 - x) + \sum_{i=2}^{k} g(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} g(\mu_i - \mu_{i-1}),$$

onde $\mu_0 = x$, $\mu_k = 0$ e $\mu_i = s_i$, $2 \leq i \leq k-1$. Da definição de d e da desigualdade acima segue que

$$d(\lambda x,0) \leq d(x,0).$$

AFIRMAÇÃO (d): Se $\lambda_n \to 0$ quando $n \to \infty$ em F, então $d(\lambda_n x,0) \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $x \in E$.

PROVA: Imediata da continuidade de d e do fato que para todo $x \in E$ $\lambda_n x \to 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, em E, qualquer que seja a seqüência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a 0 em F.

AFIRMAÇÃO (e): Se $d(x_n, 0) \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, então $d(\lambda x_n, 0) \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$ para todo $\lambda \in F$.

PROVA: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em E tal que $d(x_n, 0) \to 0$ quando $n \to \infty$. Então $x_n \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$ em E. Seja $\lambda \in F$ dado. Então $(\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência convergente a 0 em E, o que implica que $d(\lambda x_n, 0) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Definamos agora uma aplicação $\|\cdot\|_F$ de E em $\mathbb{R}$ pondo $\|\cdot\|_F = d(x,0)$, para todo $x \in E$. Porque a métrica d, construída acima, satisfaz as propriedades (a) - (e), vemos que $\|\cdot\|_F$ tem as propriedades (F - 1) - (F - 5) da definição 8.2. Logo a aplicação $\|\cdot\|_F : E \to \mathbb{R}$ é uma F-norma em E.

(ii) $\Rightarrow$ (i) - Segue de 8.3

DEFINIÇÃO 8.5 - A um espaço vetorial topológico metrizável completo sobre $(F, |.|)$ chamaremos *F-espaço*.

EXEMPLO 8.6 - Seja E um espaço vetorial sobre um anel de divisão não-trivialmente valorizado e completo $(F, |.|)$.

8.6.1 - Se τ é uma topologia em E tal que (E,τ) é um EVT metrizável e se $\|\cdot\|_F : E \to \mathbb{R}$ é uma F-norma em E

definido τ, então $\|\cdot\|_F$ é uma aplicação uniformemente contínua de E em $\mathbb{R}$. Portanto essa F-norma tem uma única extensão contínua ao completamento $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ de (E,τ), que ainda é uma F-norma em $\tilde{E}$, e a topologia por ela aí definida coincide com $\tilde{\tau}$. Portanto, $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ é um EVT metrizável completo, logo um F-espaço.

8.6.2 - Seja $\mathcal{U}$ uma corda em E com $N(\mathcal{U}) = \{0\}$. Seja $\tau_{\mathcal{U}}$ a topologia de EVT de Hausdorff em E definida por $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}\}$. Então, por 8.4, $(E,\tau_{\mathcal{U}})$ é um EVT metrizável. Portanto o completamento $(\tilde{E},\tilde{\tau}_{\mathcal{U}})$ de $(E,\tau_{\mathcal{U}})$ é um F-espaço sobre $(F, |.|)$.

8.6.3 - Seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma corda arbitrária em E. Desde que $N(\mathcal{U})$ é um subespaço vetorial de E, podemos consender o espaço quociente $E_{/N(\mathcal{U})}$, que denotaremos por $E_{\mathcal{U}}$. Seja Π a projeção canônica de E sobre $E_{\mathcal{U}}$. Então $\Pi(\mathcal{U}) := (\Pi(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma corda em $E_{\mathcal{U}}$ com $N(\Pi(\mathcal{U})) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Pi(U_n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + N(\mathcal{U})) = N(\mathcal{U})$.

Seja $\tau_{\Pi(\mathcal{U})}$ a topologia de EVT de Hausdorff em $E_{\mathcal{U}}$ definida por $\mathcal{F} = \{\Pi(\mathcal{U})\}$. Por 8.4 $(E_{\mathcal{U}},\tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ é um EVT metrizável o que implica que seu completamento $(\hat{E},\hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})})$ é um F-espaço sobre $(F, |.|)$.

PROPOSIÇÃO 8.7 - *Seja* (E,τ) *um* EVT *e seja* $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma corda em* E. *São equivalentes:*

(i) - $\mathcal{U}$ *é uma corda* τ*-topológica em* E;

(ii) - *A aplicação quociente* $\Pi : (E,\tau) \longrightarrow (E_{\mathcal{U}},\tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ *é contínua.*

Além disso, se $(F, |.|)$ *é completo e se* $((\hat{E},\tau_{\Pi(\mathcal{U})}),\varphi)$ *é um completamento de* $(E,\tau_{\Pi(\mathcal{U})})$, *então* (ii) *é equivalente a*

(iii) - $\hat{\Pi} := \varphi \circ \Pi : (E,\tau) \to (\hat{E}_{\mathcal{U}},\hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})})$ *é contínua.*

PROVA: Seja $\mathcal{B} = \{\Pi(U_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ um sistema fundamental de $\tau_{\Pi(\mathcal{U})}$-vizinhanças do 0 em $E_{\mathcal{U}}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Seja $\Pi(U_n) \in \mathcal{B}$ dado. Então

$$\Pi^{-1}(\Pi(U_n)) = U_n + N(\mathcal{U}) \supset U_n.$$

Como U_n é uma τ-vizinhança do 0 em E, segue que $\Pi^{-1}(\Pi(U_n))$ também o é, o que implica que $\Pi : (E,\tau) \longrightarrow (E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ é contínua.

(ii) $\Rightarrow$ (i) - Seja $\Pi(U_{n+2}) \in \mathcal{B}$. Então, da hipótese, segue que $\Pi^{-1}(\overline{\Pi(U_{n+2})})$ é uma τ-vizinhança do 0 em E. Afirmamos que $\overline{\Pi(U_{n+2})} \subset \Pi(U_{n+2}) + \Pi(U_{n+2})$. De fato, seja $y \in \overline{\Pi(U_{n+2})}$. Então $(y + \Pi(U_{n+2})) \cap \Pi(U_{n+2}) \neq \phi$, pois $y + \Pi(U_{n+2})$ é uma $\tau_{\Pi(\mathcal{U})}$-vizinhança de y em $E_{\mathcal{U}}$. Seja agora $z \in (y + \Pi(U_{n+2})) \cap \Pi(U_{n+2})$. Então existem $x_1, x_2 \in \Pi(U_{n+2})$ tais que $z = y + x_1 = x_2$. Portanto $y = (-x_1) + x_2 \in \Pi(U_{n+2}) + \Pi(U_{n+2})$ o que prova nossa afirmativa.

Portanto, $\Pi^{-1}(\overline{\Pi(U_{n+2})}) \subset \Pi^{-1}(\Pi(U_{n+2}) + \Pi(U_{n+2})) \subset U_{n+2} + U_{n+2} + N(\mathcal{U}) \subset U_{n+1} + N(\mathcal{U}) \subset U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ o que implica que U_n é uma τ-vizinhança do 0 em E. Como $n \in \mathbb{N}$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma corda τ-topológica em E.

Suponhamos agora que $(F, |.|)$ é completo e seja $((\hat{E}_{\mathcal{U}}, \hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})}), \varphi)$ um completamento de $(E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) - óbvio .

(iii) $\Rightarrow$(ii) - Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ um "net" em E convergente a $x \in E$. Por hipótese, $\varphi(\Pi(x_\alpha)) \xrightarrow[\alpha]{} \varphi(\Pi(x))$ em $\varphi(E_U) \subset \hat{E}_U$. Como $\varphi : E_U \longrightarrow \hat{E}_U$ é um isomorfismo topológico entre E_U e $\varphi(E_U)$, temos que $\Pi(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha]{} \Pi(x)$, o que implica que (ii) é verdadeira ▪

LEMA 8.8 - *Suponhamos* $(F,|.|)$ *completo. Sejam* (E,τ) e (G,η) EVT *sobre* $(F,|.|)$, *onde* η *é uma topologia de Hausdorff. Se* A *é uma aplicação linear em* E *em* G *e se* $((\hat{G},\hat{\eta}),\varphi)$ *é um completamento de* (G,η), *então* A *é fechada se, e somente* $\hat{A}:=\varphi \circ A:E \longrightarrow \hat{G}$ *é fechada.*

PROVA: Suponhamos que $A : (E,\tau) \longrightarrow (G,\eta)$ é uma aplicação linear fechada e seja $(x,y) \in (E,\tau) \times (\hat{G},\hat{\eta})$ um ponto aderente ao gráfico de $\hat{A}$. Então existe um "net" $(x_\alpha,\hat{A}(x_\alpha))=(x_\alpha,\varphi \circ A(x_\alpha))_{\alpha\in\Lambda} \subset gr(\hat{A})$ convergente a (x,y). Portanto $x_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} x$ em (E,τ) e $\varphi \circ A(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha]{} y$ em $(\hat{G},\hat{\eta})$. Logo $\Pi(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha]{} \varphi^{-1}(y)$ em (G,η) e, como $gr(A)$ é um subconjunto fechado de $(E,\tau) \times (G,\eta)$, segue que $(x,\varphi^{-1}(y)) \in gr(A)$. Logo $A(x) = \varphi^{-1}(y)$, ou seja, $\varphi \circ A(x) = y$. Portanto $\hat{A} : E \longrightarrow \hat{G}$ é fechada. Analogamente mostra-se que a condição é suficiente ▪

PROPOSIÇÃO 8.9 - *Sejam* (E,τ) *um* EVT *e* $U=(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma corda em* E . *Se*

(i) - U *é* τ-*fechada em* E, *então*

(ii) - *a aplicação quociente* $\Pi : (E,\tau) \longrightarrow (E_U, \tau_{\Pi(U)})$ *é fechada.*

Além disso, se $(F,|\cdot|)$ *é completo e se* $(\hat{E}, \hat{\tau}_{(U)}), \varphi)$

é um completamento de $(E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$, *então* (ii) *é equivalente a*

(iii) - $\hat{\Pi} := \varphi \circ \Pi : (E,\tau) \longrightarrow (\hat{E}_{\mathcal{U}}, \hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})})$ *é fechada.*

PROVA: (i) $\Rightarrow$ (ii) - Seja $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma corda τ-fechada em E. Queremos mostrar que $gr(\Pi)$ é um subconjunto fechado de $(E,\tau) \times (E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$. Para isso, seja $(x,y) \in (E,\tau) \times (E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ um ponto aderente a $gr(\Pi)$. Afirmamos que $\Pi(x) - y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi(U_n)$. De fato, seja U uma τ-vizinhança do 0 em E e seja $n \in \mathbb{N}$ dado. Da hipótese feita sobre o ponto (x,y), segue que

$$|(x,y) + U \times \Pi(U_{n+4})| \cap gr(\Pi) \neq \phi.$$

Logo

(1) $\quad \Pi(x) - y \in \Pi(U) + \Pi(U_{n+4})$

e

(2) $\quad$ existe $z \in E$ tal que $\Pi(z) \in y + \Pi(U_{n+4})$.

Portanto, $\Pi(x) - \Pi(z) = \Pi(x) - y + y - \Pi(z) \in$

$\in \Pi(U) + \Pi(U_{n+4}) + \Pi(U_{n+4}) \subset \Pi(U) + \Pi(U_{n+3}) \subset \Pi(U) + \Pi(U_{n+3}) + \Pi(U_{n+3})$.

Assim, $x - z \in U + U_{n+3} + U_{n+3} + N(\mathcal{U}) \subset U + U_{n+2} + N(\mathcal{U}) \subset$

$\subset U + U_{n+2} + U_{n+2} \subset U + U_{n+1}$.

Como U_{n+1} é τ-fechado em E e U é τ-vizinhança do 0 em E, segue que $x - z \in U_{n+1}$. Disso e de (2) segue que

$\Pi(x) - y = \Pi(x) - \Pi(z) + \Pi(z) - y \in \Pi(x) - \Pi(z) + \Pi(U_{n+4}) \subset$

$\subset \Pi(U_{n+1}) + \Pi(U_{n+4}) \subset \Pi(U_{n+1}) + \Pi(U_{n+4}) + \Pi(U_{n+4}) \subset$

$\subset \Pi(U_{n+1}) + \Pi(U_{n+3}) \subset \Pi(U_{n+1}) + \Pi(U_{n+1}) \subset \Pi(U_n)$.

Como $n \in \mathbb{N}$ foi escolhido arbitrariamente temos que $\Pi(x) - y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Pi(U_n)$. Desde que $(E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ é um EVT metrizável e $\{\Pi(U_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças do 0 em $(E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$, segue que $y = \Pi(x)$. Logo $\Pi : (E,\tau) \longrightarrow (E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ é uma aplicação fechada.

Suponhamos agora que $(F, |..|)$ é completo e seja $((\hat{E}, \hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})}), \varphi)$ um completamento de $(E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) - Imediato de 8.8.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) - Imediato de 8.8 ∎

LEMA 8.10 - *Suponhamos $(F,|..|)$ completo. Sejam (E,τ) e (E,η) EVT sobre $(F,|..|)$ onde η é de Hausdorff. Se $A : E \longrightarrow G$ é uma aplicação linear e se $((\hat{G},\hat{\eta}),\varphi)$ é um completamento de (G,η), então A é limitada se, e somente se, $\hat{A} := \varphi \circ A : E \rightarrow \hat{G}$ é limitada.*

PROVA: Evidente a condição é necessária. Reciprocamente, suponhamos que $\hat{A} : E \rightarrow \hat{G}$ seja limitada. Devemos mostrar que $A : E \longrightarrow G$ é limitada. Para isso, seja $B \subset E$ τ-limitado. Então $\hat{A}(B) = \varphi \circ A(B)$ é limitado em $(\varphi(G), \eta)$. Como $\varphi : (G,\eta) \longrightarrow (\hat{G},\hat{\eta})$ é um isomorfismo topológico, segue que $\varphi^{-1}(\hat{A}(B)) = A(B)$ é η-limitado em G ∎

PROPOSIÇÃO 8.11 - *Sejam* (E,τ) *um* EVT *e* $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma corda em* E. *Se*

(i) - $\mathcal{U}$ *é* τ*-bornívora em* E,

então

(ii) - $\Pi : (E,\tau) \to (E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ *é limitada.*

Além disso, se $(F, |.|)$ *é completo e se* $((\hat{E}_{\mathcal{U}}, \hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})}), \varphi)$ *é um completamento de* $(E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$, *então* (ii) *é equivalente a*

(iii) - $\hat{\Pi} := \varphi \circ \Pi : (E,\tau) \longrightarrow (\hat{E}_{\mathcal{U}}, \hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})})$ *é limitada.*

PROVA: (i) $\Rightarrow$ (ii) - Seja $B \subset E$ τ-limitado e seja $n \in \mathbb{N}$ dado. Desde que $\mathcal{U}$ é uma corda τ-bornívora em E, existe $\delta_n > 0$ tal que $B \subset \lambda U_n$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq \delta_n$ Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq \delta_n$. Então $\Pi(B) \subset \lambda \Pi(U_n)$ e por ser $\Pi(U_n)$ uma $\tau_{\Pi(\mathcal{U})}$-vizinhança básica do 0 em $E_{\mathcal{U}}$, segue que $\Pi : (E,\tau) \longrightarrow (E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$ é limitada. Suponhamos agora que $(F, |.|)$ é completo e seja $((\hat{E}_{\mathcal{U}}, \hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})}), \varphi)$ um completamento de $(E_{\mathcal{U}}, \tau_{\Pi(\mathcal{U})})$.

Que (ii) é equivalente a (iii) segue imediatamente de 8.10 ∎

LEMA 8.12 - *Sejam* (E,τ), (G,η) *e* (M,ξ) EVT. *Seja* H *um conjunto pontualmente limitado de aplicações lineares de* E *em* G *e seja* φ *uma aplicação linear contínua de* G *em* M. *Então* $\varphi \circ H := \{\varphi \circ T;\ T \in H\}$ *é um conjunto pontualmente limitado de aplicações lineares de* E *em* M.

PROVA: Seja $x \in E$ dado e seja U uma ξ-vizinhança do 0 em

M. Como $\varphi^{-1}(U)$ é uma η-vizinhança do 0 em G, segue da hipótese feita sobre H que $\exists \delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq \delta$, $T(x) \in \lambda\varphi^{-1}(U)$ para todo $T \in H$. Portanto $\varphi(T(x)) = \varphi \circ T(x) \in \lambda\varphi(\varphi^{-1}(U)) \subset \lambda U$ para todo $T \in H$, o que completa a prova ∎

LEMA 8.13 - *Suponhamos* $(F, |.|)$ *completo e sejam* (E,τ) e (G,η) EVT *sobre* $(F,|.|)$ *onde* η *é de Hausdorff. Seja* $((\hat{G},\hat{\eta}), \varphi)$ *um completamento de* (G,η) *e seja* H *um conjunto de aplicações lineares contínuas de* E *em* G. *Se* $\hat{H} := \varphi \circ H \subset \mathcal{L}(E;\hat{G})$ *é equicontínuo, então* $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ *é equicontínuo.*

PROVA: Seja W uma η-vizinhança do 0 em G. Porque $\hat{\eta}$ coincide com $\varphi(\eta)$ em $\varphi(G)$, existe uma $\hat{\eta}$-vizinhança U do 0 em $\hat{G}$ tal que $W = \varphi^{-1}(U)$. Como $\bigcap_{T \in H} T^{-1}(W) = \bigcap_{T \in H} T^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = \bigcap_{T \in H} (\varphi \circ T)^{-1}(U)$ e, por hipótese, $\bigcap_{T \in H} (\varphi \circ T)^{-1}(U)$ é uma τ-vizinhança do 0 em E, segue que $\bigcap_{T \in H} T^{-1}(W)$ é uma τ-vizinhança do 0 em E. Portanto $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ é equicontínuo ∎

TEOREMA 8.14 - (Banach - Steinhaus) - *Seja* (E,τ) *um* EVT. *São equivalentes:*

(i) - (E,τ) *é um* EVT *tonelado;*

(ii) - *Todo conjunto pontualmente limitado de aplicações lineares contínuas de* (E,τ) *num* EVT *arbitrário é equicontínuo;*

(iii) - *Todo conjunto pontualmente limitado de aplicações lineares contínuas de* (E,τ) *num* EVT *metrizável arbitrário é equicontínuo.*

Se $(F,|..|)$ *é completo, então* (i), (ii), (iii) *são equivalentes a:*

(iv) - *Todo conjunto pontualmente limitado de aplicações lineares contínuas de* (E,τ) *em um F-espaço arbitrário é equicontínuo.*

PROVA: A equivalência entre (i) e (ii) é provada em [8]. É óbvio que (ii) implica (iii) e que (iii) implica (iv).

(iii) $\Rightarrow$(ii) - Seja (G,η) um EVT sobre $(F,|.|)$. Seja $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ um conjunto pontualmente limitado e seja W uma η-vizinhança do 0 em G. Afirmamos que $\bigcap_{T \in H} T^{-1}(W)$ é uma τ-vizinhança do 0 em E. De fato, seja $\mathcal{W} = (W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma corda η-topológica em G com $W_1 + W_1 \subset W$ e consideremos o EVT metrizável $(G_{\mathcal{W}},\tau_{\Pi(\mathcal{W})})$ (veja 8.6), onde Π é a projeção canônica de G sobre $G_{\mathcal{W}}$. Por 8.12 $\Pi \circ H \subset \mathcal{L}(E;G_{\mathcal{W}})$ é pontualmente limitado. Da hipótese, segue, então, que $\Pi \circ H$ é equicontínuo. Seja $V = \Pi(W_1)$. Desde que

$$\bigcap_{T \in H} T^{-1}(W) \supset \bigcap_{T \in H} T^{-1}(W_1+W_1) \supset \bigcap_{T \in H} T^{-1}(W_1+N(\mathcal{W})) = \bigcap_{T \in H} T^{-1}(\Pi^{-1}(\Pi(W_1))) =$$

$$= \bigcap_{T \in H} (\Pi \circ T)^{-1}(\Pi(W_1)) = \bigcap_{T \in H} (\Pi \circ T)^{-1}(V) \text{ e } \bigcap_{T \in H} (\Pi \circ T)^{-1}(V) \text{ é}$$

uma τ-vizinhança do 0 em E, a afirmação segue.

Suponhamos agora que $(F, |.|)$ é completo.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) - Seja (G,η) um EVT metrizável. Seja $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ um conjunto pontualmente limitado e seja $((\hat{G},\hat{\eta}),\varphi)$ um completamento de (G,η). Por 8.12, $\hat{H} \subset \mathcal{L}(E;\hat{G})$ é pontualmente limitado e segue então, da hipótese, que $\hat{H} \subset \mathcal{L}(E;\hat{G})$ é equicontínuo, pois $(\hat{G},\hat{\eta})$ é um F-espaço. Por 8.13, $H \subset \mathcal{L}(E;G)$ é equicontínuo, e isso completa a prova ∎

TEOREMA 8.15 - *Suponhamos* $(F,|.|)$ *completo e seja* (E,τ) *um* EVT *sobre* $(F,|..|)$. *São equivalentes:*

(i) - (E,τ) *é tonelado.*

(ii) - *Toda aplicação linear fechada de* (E,τ) *num* F-*espaço arbitrário é contínua.*

PROVA. Que (i) implica (ii) está demonstrado em [8] e não foi necessário supor que $(F,|.|)$ é completo.

(ii) $\Rightarrow$ (i) - Seja $\mathcal{U}$ uma corda τ-fechada em E e seja $(\hat{E}_{\mathcal{U}},\hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})})$ o F-espaço definido em 8.6. Então, de 8.9, segue que $\hat{\Pi} : E \longrightarrow \hat{E}_{\mathcal{U}}$ é uma aplicação linear fechada e, portanto, contínua por hipótese. Logo, de 8.7, vem que $\mathcal{U}$ é uma corda τ-topológica em E. Disso e de 7.17 vem que (E,τ) é um EVT tonelado ∎

TEOREMA 8.16 - *Suponhamos* $(F,|.|)$ *completo e seja* (E,τ) *um* EVT *sobre* $(F,|..|)$. *São equivalentes:*

(i) - (E,τ) *é quase-tonelado;*

(ii) - *Toda aplicação linear fechada e limitada de* (E,τ) *num F-espaço arbitrário é contínua.*

PROVA: Que (i) implica (ii) é provado em [8] e não foi necessário supor que $(F, |.|)$ é completo.

(ii) $\Rightarrow$(i) - Seja $\mathcal{U}$ uma corda τ-fechada e τ-bornívora em E e seja $(\hat{E}_{\mathcal{U}}, \hat{\tau}_{\Pi(\mathcal{U})})$ o F-espaço definido em 8.6. De 8.9 e 8.11 segue que $\hat{\Pi} : E \longrightarrow \hat{E}_{\mathcal{U}}$ é uma aplicação linear fechada e limitada. Portanto, da hipótese, segue que $\hat{\Pi} : E \rightarrow \hat{E}_{\mathcal{U}}$ é contínua. De 8.7 vem que $\mathcal{U}$ é uma corda τ-topológica em E. De 7.19 segue que (E,τ) é um EVT quase-tonelado, o que completa a prova ∎