SOBRE A ADITIVIDADE DAS INTEGRAIS MONÓTONAS

RICARDO APPARÍCIO BACCI

No [illegible]
Aparicio

Orientador

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Tese de Doutorado apresentada à UNICAMP no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação para a obtenção do Grau de Doutor em Matemática.

Campinas - 1983.

À memória de minha mãe

Djanira Felix Bomfim Bacci

ÍNDICE

PREFÁCIO

A motivação de nosso trabalho foi encontrada no estudo das Capacidades bialternativas de Choquet [1], empregadas por Huber [9] em seu artigo sobre Inferência Estatística. Huber utiliza resultados devidos a Strassen no caso em que o espaço X é finito. A capacidade v é uma função real de conjunto definida nas partes de X, satisfazendo: (i) $v(\phi) = 0$; (ii) v é monótona crescente; e (iii) $v(A \cup B) + v(A \cap B) \leq v(A) + v(B)$ (bialternativa).

A partir da capacidade v é definido o funcional $\tilde{v}(f) = \int_0^{+\infty} v\{x : f(x) > t\}dt$, para f contínua e positiva. O funcional $\tilde{v}$ é linear se v é uma medida, além disso, $\tilde{v}$ é positivo, monótono crescente, positivamente homogêneo, bialternativo (se, e só se v é bialternativo) e $\tilde{v}(\varphi_A) = v(A)$.

A demonstração da sub-aditividade do funcional $\tilde{v}$ exige que tal funcional tenha derivadas de segunda ordem contínuas, X conjunto finito e $f \in [0, +\infty)^X$.

O objetivo inicial de nosso trabalho foi mostrar que a bialternatividade de v é equivalente à aditividade de $\tilde{v}$, para funções f $\mathbb{H}$-mensuráveis, quando X é um conjunto qualquer, distinto de vazio.

A partir deste resultado, obtivemos outros também relevantes utilizando a teoria das Integrais Monótonas.

A todas as pessoas que, de maneira direta ou indiretamente , colaboraram na feitura deste trabalho, apresentamos nossos agradecimentos.

Em especial:

ao Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi, nosso orientador, que de uma maneira segura e valiosa, nos proporcionou sempre os meios indispensáveis, para atingirmos nosso objetivo;

ao Prof. Dr. Gabriele Greco, que nos auxiliou na formulação do problema, e nos forneceu meios para resolvê-lo;

aos meus colegas do IMECC, que nos proporcionaram um ambiente de colaboração e amizade, indispensáveis para a realização do trabalho;

ao Sérgio R. Fenley, aluno de mestrado, pela paciência e assiduidade que nos ouviu em Seminários, sugerindo sempre melhoras no manuscrito;

à minha esposa e meus filhos a quem devo mais do que posso me expressar.

Ricardo Apparício Bacci

Campinas - 1983

0. INTRODUÇÃO.

Neste trabalho usaremos os símbolos X, $\mathcal{P}(X)$, $[0, +\infty]^X$, $[0, +\infty]^{\mathcal{P}(X)}$, $\overline{\mathbb{R}}^X$, $\mathbb{N}$ respectivamente para designar um conjunto não vazio, a classe dos subconjuntos de X, a classe das funções definidas em X com valores em $[0, +\infty]$, a classe das funções definidas em $\mathcal{P}(X)$ com valores em $[0, +\infty]$, a classe das funções definidas em X com valores na reta real ampliada e o conjunto dos números inteiros positivos.

Empregaremos as letras do alfabeto grego α, β, γ, δ para designar funções de conjunto monótonas, isto é, funções α pertencentes a $[0, +\infty]^{\mathcal{P}(X)}$ tais que $\alpha(\phi) = 0$ e $\alpha(A) \leq \alpha(B)$ se $A \subset B$.

Por $\int_X fd\alpha$ designaremos o número real finito ou não, chamado "integral de f sobre X em relação à função de conjunto monótona α", definido por

$$\int_X fd\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}dt \quad \text{se} \quad f \in [0, +\infty]^X$$

e por

$$\int_X fd\alpha = \int_X f^+d\alpha - \int_X f^-d\alpha \quad \text{se} \quad f \in \overline{\mathbb{R}}^X ,$$

com $\int_X f^+d\alpha < +\infty$ ou $\int_X f^-d\alpha < +\infty$.

Se $B \in P(X)$ definiremos

$$\int_B f d\alpha = \int_X f \varphi_B d\alpha \ ,$$

onde φ_B é a função característica do conjunto B.

Com a notação $\{f > a\}$, indicaremos o conjunto $\{x \in X$ tal que $f(x) > a\}$.

O trabalho está dividido em quatro parágrafos, sendo que no primeiro definiremos convergência uniforme em $\overline{\mathbb{R}}$ para funções de $\overline{\mathbb{R}}^X$, e daremos algumas propriedades desse tipo de convergência.

No parágrafo 2, apresentaremos os conceitos e propriedades relativos à integral monótona, que são estudadas por Greco, G.H. em [4], [5], [6] e [8], destacando o teorema de representação da integral monótona (Teo. 1).

No parágrafo 3, conceituaremos conjuntos e funções α-mensuráveis segundo Carathéodory. Veremos na proposição 10, que a aditividade da integral monótona é válida, para funções $f \in [0, +\infty]^X$, com f *α-mensurável* e $\int_X f d\alpha < +\infty$. Veremos também uma segunda noção de mensurabilidade de uma função em relação a uma família de conjuntos $\mathbb{H}$ contida em $P(X)$. Essa noção é empregada na teoria da medida somente quando $\mathbb{H}$ é uma σ-álgebra contida em $P(X)$. Nesse sentido, $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ é mensurável em relação a σ-álgebra $\mathbb{H}$, se o conjunto $\{x : f(x) > t\}$ pertence a $\mathbb{H}$ para todo número real t.

Na teoria da integração essa noção de mensurabilidade, não difere muito da noção de Carathéodory, porque emprega-se sempre medidas exteriores, em relação as quais, as famílias de conjuntos mensuráveis são σ-álgebras, onde as medidas exteriores são σ-aditivas.

Assim, diremos que $f \in [0, +\infty]^X$ é uma função $\mathbb{H}$-mensurável se $\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta$ sempre que $\alpha(H) = \beta(H)$, para todo $H \in \mathbb{H}$, onde α e β são funções de conjunto monótonas. O teorema 3 mostra que f é $\mathbb{H}$-mensurável se, e somente se, para todo par $a,b \in (0, +\infty)$ com $a > b$, existe $H \in \mathbb{H}$, tal que $\{f \geq a\} \subset H \subset$ $\subset \{f \geq b\}$.

No final do parágrafo daremos tres exemplos mostrando uma função que não é α-mensurável e que de acordo com a família $\mathbb{H}$ que considerarmos ela será ou não $\mathbb{H}$-mensurável.

Greco, G.H. em [4], proposição 4, demonstra que vale a linearidade da integral monótona $\int_X f d\alpha$, para toda $f \in [0, +\infty]^X$, f α-mensurável e $\int_X f d\alpha < +\infty$, onde α é uma função de conjunto monótona. No parágrafo 4, daremos condições necessárias e suficientes para que uma integral seja aditiva sobre um cone de funções (isto é, uma família de funções fechada por soma finita e estável pelas operações de "sup" e "inf" finitos). Se o cone for estável também pela diferença, isto é, se $f \vee g - g$ pertencer ao cone, para toda f e g funções limitadas pertencentes ao cone, a aditividade de uma integral definida sobre esse cone é equivalente a admitir que esta integral pode ser representada mediante uma função de conjunto que torna mensurável, no sentido de Carathéodory, todas as funções do cone ([4], teorema 2, pág. 162).

O teorema 6 e seu corolário sugerem uma descrição das integrais definidas sobre um domínio de integração $\mathbb{B}_f$, gerado por uma função f .

Em geral, as funções mensuráveis no sentido de Carathéodory são definidas fazendo uso dos conjuntos mensuráveis. Mostraremos no teorema 8 que é possível definir a mensurabilidade de Carathéodory de uma função $f \in [0, +\infty]^X$, em relação a uma função de conjunto α, usando apenas a aditividade da integral $\int_X - d\alpha$.

Como consequência desse teorema, veremos que se $\alpha \in \in [0, +\infty]^{P(X)}$ é monótona e $f \in [0, +\infty]^X$ é α-mensurável, então $\int_X (f+g)d\alpha = \int_X fd\alpha + \int_X gd\alpha$, $\forall g \in [0, +\infty]^X$. Verificaremos ainda que a recíproca dessa afirmação não é verdadeira.

1. CONVERGÊNCIA UNIFORME EM $\overline{\mathbb{R}}^X$.

Seja $\overline{\mathbb{R}}$ a reta real extendida, isto é, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ com a topologia usual. Seja $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1,1]$ a função crescente e biunívoca definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = +\infty \\ -1 & \text{se} \quad x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a função $\Delta : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [0, +\infty)$, definida por

$$\Delta(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

é uma métrica sobre $\overline{\mathbb{R}}$ que induz sobre $\overline{\mathbb{R}}$ a topologia usual. Esta métrica Δ é equivalente, sobre todo intervalo limitado de $\mathbb{R}$, a métrica usual sobre $\mathbb{R}$.

De fato,

$$|x-y| \geq \Delta(x,y) \geq \frac{1}{(1+a)^2}|x-y| \quad , \quad \forall x,y \in [-a,a] .$$

DEFINIÇÃO 1. Diremos que um net de funções $\{f_j\}_{j\in I}$ em $\overline{\mathbb{R}}^X$ *converge uniformemente em* $\overline{\mathbb{R}}^X$, para a função $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, se

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists j_o \in I \quad \text{tal que} \quad \Delta(f_j,f) \leq \varepsilon, \quad \forall j \geq j_o .$$

ou, equivalentemente, o net $\{\varphi(f_j)\}_{j\in I}$ em $[-1,1]^X$ converge uniformemente a $\varphi(f)$.

DEFINIÇÃO 2. Diremos que um net $\{g_j\}_I$ em $\mathbb{R}^X$ *converge uniformemente* a $g \in \mathbb{R}^X$ (sem especificar $\mathbb{R}^X$), se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists j_o \in I$

tal que $|g_j - g| < \varepsilon$ para todo $j \geq j_o$.

PROPOSIÇÃO 1. *Seja* $\{f_j\}_{j\in I}$ *em* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *um net e* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$. *As seguintes propriedades são equivalentes*

(i) $\{f_j\}_{j\in I}$ *converge uniformemente a* f *em* $\overline{\mathbb{R}}^X$

(ii) $\forall a \in [0, +\infty)$ *o net* $\{-a \vee f_j \wedge a\}_{j\in I}$ *converge uniformemente a* $-a \vee f \wedge a$.

OBSERVAÇÃO. "$-a \vee f_j \wedge a$" indica a quantidade "$[(-a) \vee f_j] \wedge a$".

PROPOSIÇÃO 2. *Sejam* $\{f_j\}_{j\in I}$ *em* $[0, +\infty]^X$ *e* $\{g_j\}_{j\in I}$ *em* $[0, +\infty]^X$ *dois nets e* f *e* $g \in \overline{\mathbb{R}}^X$. *Então, vale a seguinte propriedade: Se*

$\{f_j\}$ *converge uniformemente em* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *para* f,

e

$\{g_j\}$ *converge uniformemente em* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *para* g,

então, $\{f_j + g_j\}_j$ *converge uniformemente em* $\overline{\mathbb{R}}^X$ *para* $f + g$.(1)

PROPRIEDADES DA CONVERGÊNCIA UNIFORME EM $\overline{\mathbb{R}}^X$.

PROPRIEDADE 1. Se o net $\{f_j\}_{j\in I} \subset \overline{\mathbb{R}}^X$ converge uniformemente em

---

(1) As demonstrações das proposições 1 e 2, encontram-se feitas com detalhes na tese de Mestrado "Integrais Monótonas - Linearidade e Mensurabilidade" redigida por Maria Christina Amêndola de Almeida, Universidade Estadual de Londrina.

$\overline{\mathbb{R}}^X$ a $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, então $\lim_{j \in I} f_j(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

PROPRIEDADE 2. As sucessões $\{-n \vee f \wedge n\}_n$, $\{f \wedge n\}_n$ e $\{f \vee \frac{1}{n} + f \wedge (-\frac{1}{n})\}_n$ convergem uniformemente em $\overline{\mathbb{R}}^X$ a f, qualquer que seja $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$.

PROPRIEDADE 3. Sejam f e $g \in [0, +\infty]^X$. A sucessão $\{f \wedge n + g \wedge n\}_n$ converge uniformemente em $\overline{\mathbb{R}}^X$ à $f + g$.

PROPRIEDADE 4. O net $\{\sum_{n=1}^{\infty} \delta \varphi_{\{f > \delta_n\}}\}_\delta$ converge uniformemente em $\overline{\mathbb{R}}^X$ à função f quando $\delta \longrightarrow 0^+$.

PROPRIEDADE 5. O net $\{\sum_{i=1}^{n2^n} \frac{1}{2^n} \varphi_{\{f > \frac{i}{2^n}\}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em $\overline{\mathbb{R}}^X$ para a função f, quando $n \longrightarrow +\infty$

PROPRIEDADE 6. Seja $\{H_i\}_{i=1}^{\infty} \subset P(X)$ uma sucessão de conjuntos decrescente, e $\{a_i\} \subset [0, +\infty)$. A sucessão $\{\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{H_i}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em $\overline{\mathbb{R}}^X$ a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{H_i}$.

2. INTEGRAL MONÓTONA.

DEFINIÇÃO 3. Uma família $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$, será chamada de *Domínio de Integração sobre* X, se são verificadas as seguintes propriedades:

(i) $\mathbb{B} \neq \phi$

(ii) para todo $a \in [0,+\infty)$, para toda $f \in \mathbb{B} \Rightarrow af$, $f \wedge a$, $f \vee a - a \in \mathbb{B}$ (3).

OBSERVAÇÃO. Todo domínio de integração contém a função nula. Além disso $\mathbb{B} = [0,+\infty]^X$ é um domínio de integração e toda intersecção de domínios de integração é um domínio de integração.

DEFINIÇÃO 4. O domínio de *integração gerado* por uma família de funções é o menor domínio de integração que a contém. O domínio de integração gerado pela função $f \in [0,+\infty]^X$ é o conjunto de funções

$$\mathbb{B}_f = \{a(f \wedge b - f \wedge c) : a \in [0,+\infty),\ 0 \leq c < b \leq +\infty\}.$$

Assim, o domínio de integração $\mathbb{B}$ gerado pela família de funções $S \subset [0,+\infty]^X$ é dado por

$$\mathbb{B} = \begin{cases} \{0\} & \text{se} \quad S = \phi \\ \bigcup_{f \in S} \mathbb{B}_f & \text{se} \quad S \neq \phi\,. \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 5. Seja $\mathbb{H} \subset P(X)$ e $\phi \in \mathbb{H}$, chamaremos funções simples sobre $\mathbb{H}$ as funções do tipo $\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{H_i}$, onde $a_i \in [0,+\infty)$,

---

(3) $a \wedge b = \inf\{a,b\}$

$a \vee b = \sup\{a,b\}$

$\{H_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{H}$ e $H_i \supset H_{i+1}$, para todo $i = 1,2,\ldots,n-1$. Indicaremos por $I_{\mathbb{H}}$ o conjunto destas funções simples sobre $\mathbb{H}$, e obviamente $I_{\mathbb{H}}$ é um domínio de integração contido em $[0,+\infty]^X$

DEFINIÇÃO 6. A função de conjunto $\alpha : P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ é monótona se verifica:

(i) $\alpha(\phi) = 0$

(ii) $A,B \in P(X),\ A \subset B \Rightarrow \alpha(A) \leq \alpha(B)$.

DEFINIÇÃO 7. Seja $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^X$ um domínio de integração sobre X. Uma aplicação $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0,+\infty]$ se diz *Integral Monótona sobre o Domínio de Integração* $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^X$ se são verificadas as seguintes propriedades, para todo f e $g \in \mathbb{B}$, e para todo $a \in [0,+\infty)$.

(i) $T(af) = aT(f)$

(ii) $f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$

(iii) $T(f) = T(f \wedge a) + T(f \vee a - a)$

(iv) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \wedge n)$

(v) $T(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} T(f \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$

OBSERVAÇÃO. As propriedades (iv) e (v) implicam

$$T(f) = \lim_{n \to +\infty} T(f \wedge n - f \wedge \frac{1}{n}).$$

Para as proposições que enunciaremos a seguir assumiremos que α é uma função de conjunto monótona, definida em $P(X)$, e que

$$\int_X - \, d\alpha : \quad [0, +\infty]^X \longrightarrow [0, +\infty]$$

é a aplicação definida por

$$\int_X f d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{x : f(x) > t\} dt \, .$$

PROPOSIÇÃO 3. $\int_X - \, d\alpha$ *é uma integral monótona*(4) *sobre* $[0, +\infty]^X$.

PROPOSIÇÃO 4. $$\int_X f d\alpha = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\{x : f(x) > \frac{k}{n}\}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha\{f > \frac{k}{2^n}\}$$ (5)

PROPOSIÇÃO 5. *Se para todo* $n \in \mathbb{N}$ *a sucessão* $\{g_k \wedge n\}_{k \in \mathbb{N}}$ *converge uniformemente para a função* $g \wedge n$ *em* $[0, +\infty]^X$, *então*

$$\int_X g d\alpha \leq \liminf_k \int_X g_k d\alpha$$

---

(4) cf. definição 7

(5) cf. [5], proposição 1.2, (2), pag. 8.

PROPOSIÇÃO 6. *Se a sucessão* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty]^X$ *converge uniformemente para a função* $g \in [0,+\infty]^X$, *e se existe* $f \in [0,+\infty]^X$ *tal que* $g_n \leq f$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $\int_X f d\alpha < +\infty$, *então*

$$\int_X g d\alpha = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\alpha \quad (6) .$$

PROPOSIÇÃO 7. $\int_X — d\alpha$ *é a única integral monótona definida sobre* $[0,+\infty]^X$ *que verifica*

$$\int_X \varphi_B \, d\alpha = \alpha(B), \text{ para todo } B \in P(X) ,$$

onde φ_B *representa a função característica do conjunto* B(7).

PROPOSIÇÃO 8. $\int_X (\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{B_i}) d\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \alpha(B_i)$ *para todo* $a_i \in [0,+\infty)$ *e* $B_i \supset B_{i+1}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$. (8)

PROPOSIÇÃO 9. *Para toda* $f \in [0,+\infty]^X$ *temos*

---

(6) Para as demonstrações das proposições 5 e 6, ver [4], proposição 1, pag. 152, 153.

(7) cf. [5], teorema 1.1, pág. 4

(8) cf. [5], Proposição 1.2, pág. 8.

$$(1)\quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \frac{f \wedge (t+\varepsilon) - f \wedge t}{\varepsilon}\, d\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > t+\varepsilon\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f \geq t+\varepsilon\}$$

$$(2)\quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \frac{f \wedge t - f \wedge (t-\varepsilon)}{\varepsilon}\, d\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > t-\varepsilon\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \{f \geq t-\varepsilon\}\ ^{(9)}\ .$$

OBSERVAÇÃO. Se T é uma integral monótona, chamaremos de α_T e β_T as funções de conjuntos monótonas definidas em $P(X)$ por:

$$\alpha_T(B) = \sup\{T(f) : f \leq \varphi_B\ ,\ f \in \mathbb{B}\}$$

e

$$\beta_T(B) = \inf\{T(f) : f \geq \varphi_B\ ,\ f \in \mathbb{B}\},$$

para todo $B \subset X$ e $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$.

Além disso, indicaremos com $[\alpha_T, \beta_T]$ a família das funções de conjunto monótonas γ, definidas em $P(X)$, tais que $\alpha_T(B) \leq \gamma(B) \leq \beta_T(B)$, para todo $B \subset X$. Como $\alpha_T \leq \beta_T$ temos que $[\alpha_T, \beta_T] \neq \phi$.

---

(9) cf. [5], proposição 1,2, pag. 9.

TEOREMA 1. (Teorema de Representação da Integral Monótona)[10].

Seja $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ *uma integral monótona sobre* $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^X$. *Uma função de conjunto monótona* γ, *definida em* $P(X)$, *representa* T, *isto é*, $T(g) = \int_X g d\gamma$ *para todo* $g \in \mathbb{B}$, *se, e somente se*, $\gamma \in [\alpha_T, \beta_T]$.

3. MENSURABILIDADE

Na teoria da medida e da integração encontramos dois empregos para a palavra "mensurabilidade": falamos de mensurabilidade de uma função $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ em relação a uma função de conjunto $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ e falamos de mensurabilidade de uma função f em relação a uma família de conjuntos $\mathbb{H} \subset P(X)$.

A primeira noção de mensurabilidade, devida a Carathéodory é empregada na teoria da medida, quando a função α é uma medida exterior.

DEFINIÇÃO 8. Seja α uma função de conjunto, definida em $P(X)$. Diremos que um conjunto $B \in P(X)$ é α-mensurável (ou mensurável segundo Carathéodory), se para todo $A \in P(X)$ vale a igualdade $\alpha(A) = \alpha(A \cap B) + \alpha(A \cap B^c)$.

DEFINIÇÃO 9. Seja $f \in [0, +\infty]^X$. Diremos que f é α - mensurável

---

(10) cf. [4], teor. 1, pag. 154.

se o conjunto $\{t \in (0, +\infty) : \{x \in X : f(x) > t\}$ não é α-mensurável $\}$ é enumerável.

Observamos que toda função α-mensurável e limitada é limite uniforme de uma sequência de funções simples, que são combinações lineares de conjuntos mensuráveis.

DEFINIÇÃO 10. Seja T uma integral monótona sobre $\mathbb{B} \in [0, +\infty]^X$. Diremos que um conjunto $B \in P(X)$ é T-regular se $\alpha_T(B) = \beta_T(B) < +\infty$.

PROPOSIÇÃO 10. *Seja α uma função monótona de conjunto definida em $P(X)$. Colocamos* $\mathbb{B} = \{f \in [0, +\infty]^X$: f *é α-mensurável e*

$$\int_X f d\alpha < +\infty \} \quad e \quad T(f) = \int_X f d\alpha \quad \text{para toda} \quad f \in \mathbb{B} .$$

Então, para a integral monótona T *valem as seguintes propriedades:*

(1) $\int_X f d\beta_T = \int_X f d\alpha_T < +\infty \Rightarrow f$ *é α-mensurável.*

(2) $\int_X (f+g) d\alpha = \int_X f d\alpha + \int_X g d\alpha$ *para toda* f *e* $g \in \mathbb{B}$

(3) *Se* f *e* $g \in \mathbb{B}$ *então* $f \vee g,\ f \wedge g,\ f+g \in \mathbb{B}$

(4) *Se* f *e* $g \in \mathbb{B}$ *e* f *e* g *são limitadas em* X, *então* $f \vee g - g \in \mathbb{B}$.[11]

TEOREMA 2. *Seja* $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ *uma integral monótona sobre* $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$. *Se para todo par de funções* f, g *limitadas, pertencentes a* $\mathbb{B}$ *valem as propriedades*

(i) $f \wedge g, \quad f \vee g, \quad f \vee g - g \in \mathbb{B}$

(ii) $T(f) = T(f \wedge g) + T(f \vee g - g)$

então

(1) *a família* R_T *dos conjuntos* T-*regulares é um anel de conjuntos* α_T *e* β_T-*mensuráveis.*

(2) *para todo* $f \in [0, +\infty)^X$ *com* $\int_X f d\alpha < +\infty$ temos que: $\int_X f d\beta_T = \int_X f d\alpha_T$, *se e somente se,* f *é uma função* α_T *e* β_T-*mensurável.*[12]

A segunda noção de mensurabilidade,é empregada na teoria da medida somente quando $\mathbb{H}$ é uma σ-álgebra contida em $P(X)$, no sentido que uma função $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ é mensurável em relação a σ-álgebra $\mathbb{H}$ se o conjunto $\{x : f(x) > t\}$ pertence a $\mathbb{H}$ para todo número real t . Esta noção de mensurabilidade, na teoria da integração,

(11) cf. [4], proposição 4, pág. 159.

(12) cf. [4], teorema 2, pág. 162.

não difere muito da primeira noção, porque emprega-se sempre medidas exteriores, em relação as quais as famílias de conjuntos mensuráveis são σ-álgebras, onde as medidas exteriores são σ-aditivas.

É interessante termos uma definição de mensurabilidade de uma função numérica, em relação a uma família de conjuntos $\mathbb{H} \subset P(X)$, que responda a exigência de determinar funções numéricas f tais que, a integral $\int_X f d\alpha$ dependa somente dos valores de α sobre $\mathbb{H}$, qualquer que seja $\alpha \in [0, +\infty]^{P(X)}$.

DEFINIÇÃO 11. Seja $\mathbb{H}$ uma família de conjuntos contida em $P(X)$, tal que $\phi \in \mathbb{H}$. Diremos que uma função $f \in [0, +\infty]^X$ é $\mathbb{H}$-*mensurável* se $\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta$ sempre que $\alpha(H) = \beta(H)$, para todo $H \in \mathbb{H}$, onde α e β são funções de conjunto monótonas pertencentes a $[0, +\infty]^{P(X)}$.

Diremos que $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ é $\mathbb{H}$-mensurável se, $f^+ = f \vee 0$ e $f^- = -f \wedge 0$ são $\mathbb{H}$-mensuráveis.

OBSERVAÇÃO. A família $\mathbb{H} \subset P(X)$, tal que $\phi \in \mathbb{H}$, é chamada por P.M. Meyer de "pavage" ; Flemming-Topsoe em [11] define $(\phi, \cup f, \cup C)$-paving quando $\phi \in \mathbb{H}$ e $\mathbb{H}$ é fechada por união finita e intersecção enumerável.

Notaremos por $M(X,\mathbb{H})$ a classe das funções $f \in \mathbb{R}^X$ que são

$\mathbb{H}$-mensuráveis e por $M^{+}(X,\mathbb{H}) = M(X,\mathbb{H}) \cap [0,+\infty]^{X}$.

LEMA 1. *As mais simples funções $\mathbb{H}$-mensuráveis são as funções que pertencem a* $I_{\mathbb{H}} = \{f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{H_i}$ *, onde* $a_i \in [0,+\infty]$, $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{H}$, $H_i \supset H_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}\}$

LEMA 2. *Seja* $\mathbb{H} \subset P(X)$, $\phi \in \mathbb{H}$ *e* $f \in [0,+\infty]^{X}$. *As condições seguintes são equivalentes:*

(i) f *é* $\mathbb{H}$*-mensurável*

(ii) $\forall$ *par* $\alpha,\beta : P(X) \longrightarrow \{0,1\}$ *de funções de conjunto monótonas tais que* $\alpha(H) = \beta(H)$ *para todo* $H \in \mathbb{H}$, *temos que* $\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta$. (13)

LEMA 3. *Seja* $\mathbb{H} \subset P(X)$, $\phi \in \mathbb{H}$. *Se a função* $f \in [0,+\infty]^{X}$ *é* $\mathbb{H}$*-mensurável, então as funções* af, $f \wedge a$, $f \vee a - a$ *também são* $\mathbb{H}$*-mensuráveis para todo* $a \in [0,+\infty)$ (14).

TEOREMA 3. *Seja* $\mathbb{H} \subset P(X)$, $\phi \in \mathbb{H}$ *e* $f \in [0,+\infty]^{X}$. *As condições seguintes são equivalentes:*

---

(13) cf. [7], Lema 1, pag. 165

(14) cf. [7], Lema 2, pag. 166

(i) f *é* $\mathbb{H}$*-mensurável*

(ii) *Para todo par* $a,b \in (0,+\infty)$ *tal que* $a > b$, *existe um conjunto* $H \in \mathbb{H}$ *tal que* $\{f \geq a\} \subset H \subset \{f > b\}$.

(iii) *Existe uma sequência* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I_{\mathbb{H}}$ *tal que* $g_n \leq f$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e a sequência* $\{g_n \wedge a\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente para* $f \wedge a$ *para todo* $a \in (0,+\infty)$.(15)

PROPOSIÇÃO 11. *Seja* $\mathbb{H} \subset P(X)$, $\phi \in \mathbb{H}$, *então:*

(i) *para que* $f \vee g \in M^+(X,\mathbb{H})$, (*respectivamente* $f \wedge g \in M^+(X,\mathbb{H})$) *para toda* f *e* $g \in M^+(X,\mathbb{H})$ *é necessário e suficiente que* $\mathbb{H}$ *seja estável por reunião finita* (*respectivamente, intersecção finita*).(16)

(ii) *para que* $f+g \in M^+(X,\mathbb{H})$ *para toda* $f,g \in M^+(X,\mathbb{H})$, *é necessário e suficiente que* $\mathbb{H}$ *seja estável por reunião finita e intersecção finita.*

EXEMPLOS.

EXEMPLO 1. Seja $X = \{1,2\}$,

logo $P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

---

(15) cf. [7], teorema 1, pag. 166.

(16) cf. [7], proposição 2, pag. 169.

Seja $\alpha : P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ monótona definida por $\alpha(\phi) = 0$ e $\alpha(A) = 1$ para todo $A \neq \phi$, $A \in P(X)$. Então, a função $f \in [0,+\infty]^X$, definida por: $f(x) = x$ *não é α-mensurável.*

De fato, de acordo com a definição 9, qualquer que seja $t \in (1,2)$, o conjunto $\{x : f(x) > t\}$ é o próprio conjunto $\{2\}$. E $\{2\}$ não é α-mensurável pois pela definição 8,

$$\alpha(X) \neq \alpha(X \cap \{2\}) + \alpha(X \cap \{2\}^c) .$$

Como $(1,2)$ não é enumerável, temos que f não é mensurável.

EXEMPLO 2. Seja $X = \{1,2\}$, $\mathbb{H} = \{\phi, \{1\}, \{1,2\}\} \subset P(X)$. Então a função f definida no exemplo 1 *não é $\mathbb{H}$-mensurável.*

De fato, seja $\beta : P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$, definida por $\beta(\phi) = 0$, $\beta(\{2\}) = 0$, $\beta(\{1\}) = 1$ e $\beta(X) = 1$. Então, temos que $\alpha(H) = \beta(H)$ para todo $H \in \mathbb{H}$, mas $\int_X f d\alpha \neq \int_X f d\beta$, e pela definição 11 temos que f não é $\mathbb{H}$-mensurável, (α definida como no ex. 1).

EXEMPLO 3. Se $\mathbb{H} = \{\phi, \{2\}, \{1,2\}\} \subset P(X)$ e $\beta : P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ é definida por $\beta(\phi) = 0$, $\beta(X) = 1$, $\beta(\{2\}) = 1$, $\beta(\{1\}) = 0$. Então a função f definida no exemplo 1 não é α-mensurável mas é $\mathbb{H}$-mensurável.

De fato, $\alpha(H) = \beta(H)$ para todo $H \in \mathbb{H}$, e

$$\int_X f d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\} dt = \int_0^2 \alpha\{f > t\} dt =$$

$$= \int_0^1 \alpha\{f > t\} dt + \int_1^2 \alpha\{f > t\} dt =$$

$$= \int_0^1 \alpha(X) dt + \int_1^2 \alpha\{2\} dt$$

$$= 1 + 1 = 2 .$$

$$\int_X f d\beta = \int_0^1 \beta\{f > t\} dt + \int_1^2 \beta\{f > t\} dt$$

$$= \int_0^1 \beta\{X\} dt + \int_1^2 \beta\{2\} dt$$

$$= 1 + 1 = 2$$

portanto

$$\int_X f d\alpha = \int_X f d\beta ,$$

que pela definição 11 implica que f é $\mathbb{H}$-mensurável.

4. LINEARIDADE

Nos próximos dois teoremas, daremos condições necessárias e suficientes para que uma integral seja aditiva sobre um cone de funções.

TEOREMA 4. *Seja* $\mathbb{H}$ *uma família contida em* $P(X)$, *com* $\phi \in \mathbb{H}$, *fechada por união e intersecção finita. Seja* $\delta : \mathbb{H} \longrightarrow [0, +\infty]$ *uma função de conjunto monótona. Então, são equivalentes:*

(i) $\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) = \delta(A) + \delta(B) \quad , \quad \forall A, B \in \mathbb{H}$.

(ii) $\int_X (f+g)d\delta = \int_X f d\delta + \int_X g d\delta \quad , \quad \forall f, g \in M^+(X, \mathbb{H})$.

PROVA:

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$$\delta(A) + \delta(B) = \int_X \varphi_A d\delta + \int_X \varphi_B d\delta$$

$$= \int_X (\varphi_A + \varphi_B) d\delta$$

$$= \int_X (\varphi_{A \cup B} + \varphi_{A \cap B}) d\delta$$

$$= \int_X \varphi_{A \cup B}\, d\delta + \int_X \varphi_{A \cap B}\, d\delta$$

$$= \delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \qquad \text{cqd.}$$

Antes de demonstrarmos que (i) $\Rightarrow$ (ii), vamos destacar algumas propriedades das funções simples $\mathbb{H}$ mensuráveis que pertencem ao conjunto $I_{\mathbb{H}}$ (17). Sabemos que se $f \in I_{\mathbb{H}}$ então

$$\int_X f d\delta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta(H_i) \text{ (18)}$$

Tal resultado ainda é válido, mesmo que a condição $H_i \supset H_{i+1}$ não seja verificada:

LEMA 4. *Nas condições do teorema 4, sejam* $H_i \in \mathbb{H}$, $H_i \supset H_{i+1}$ *e* H *um conjunto qualquer de* $\mathbb{H}$. *Então vale*

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{H_i} + \varphi_H\right) d\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta(H_i) + \delta(H).$$

De fato, podemos mostrar por indução que

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_{H_i} + \varphi_H = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{H_i \cap (H_{i+1} \cup H)} + \varphi_{H_1 \cup H}$$

considerando $H_{n+1} = \phi$. E como temos satisfeita a condição

$$H_i \cup H \supset H_i \cap (H_{i+1} \cup H) \supset H_{i+1} \cap (H_{i+2} \cup H) \quad , \quad \forall i = 1,2,\ldots,n \quad ,$$

então vale

$$\int_X \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{H_i} + \varphi_H\right) d\delta = \int_X \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_{H_i \cap (H_{i+1} \cup H)} + \varphi_{H_1 \cup H}\right) d\delta$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta(H_i \cap (H_{i+1} \cup H)) + \delta(H_1 \cup H) = \sum_{i=1}^{n} \delta(H_i) + \delta(H).$$

(17) cf. Lema 1, pag. 17

(18) cf. Proposição 8, pag. 11

LEMA 5. *Se* $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}$, $\forall A_i \in \mathbb{H}$ (19) , *então*

$$\int_X \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} d\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta(A_i)$$

De fato, usando o raciocínio de indução, temos que para $n = 1$ o lema é verdadeiro.

Seja $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}$, para todo $A_i \in \mathbb{H}$, então f pode ser escrito por

$$f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i^*} ,$$

onde $A_i^* = \{x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i : f(x) \geq i\}$ (20) .

Assim, podemos escrever que:

$$f + \varphi_A = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i^*} + \varphi_A \qquad , \qquad \forall A \in \mathbb{H}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i^* \cap (A_{i+1}^* \cup A)} + \varphi_{A_i^* \cup A} ,$$

---

(19) Sem a necessidade de $A_i \supset A_{i+1}$

(20) Assim $A_i^* \supset A_{i+1}^*$ e $A_{n+1}^* = \phi$

com $A_1^* \cup A \supset A_1^* \cap (A_2^* \cup A) \supset \ldots \supset A_i^* \cap (A_{i+1}^* \cup A) \supset \ldots \supset A_n^* \cup A$.

Logo [21]

$$\int_X (f + \varphi_A)d\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta(A_i^*) + \delta(A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta\{f \geq i\} + \delta(A)$$

$$= \int_X fd\delta + \int_X \varphi_A \, d\delta \ .$$

Supondo agora, que o resultado é verdadeiro para n, provaremos que vale para $n+1$.

Seja $f = \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_{A_i}$. Escrevendo $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} + \varphi_{A_{n+1}}$, temos que

$$\int_X fd\delta = \int_X (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} + \varphi_{A_{n+1}})d\delta =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \delta(A_i) + \delta(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \delta(A_i) \qquad \text{cqd.}$$

---

(21) cf. Lema 4.

Agora, podemos provar a implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) do teorema 4.

(a) A linearidade da integral monótona $\int_X \text{—}\, d\delta$ para funções simples $\mathbb{H}$ mensuráveis.

Se f e g são funções simples tais que:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{A_i} \qquad \text{e}$$

$$g = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_{B_j} \;. \quad \text{Então, existem:}^{(22)}$$

$$f_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{r} \varphi_{A_{i,n}} \quad \text{com} \quad A_{i,n} \supset A_{i+1,n} \quad \forall n \text{ com } r = a_m 2^n \,,$$

$$a_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,, \quad \text{convergindo uniformemente para } f; \text{ e}$$

$$g_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{s} \varphi_{B_{i,n}} \quad \text{com} \quad B_{i,n} \supset B_{i+1,n} \quad \forall n \text{ com } s = b_m 2^n \,,$$

$$b_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \,, \quad \text{convergindo uniformemente para } g \,.$$

---

(22) De fato. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists p = a_p 2^n$, $a_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$; tal que, com $i \geq p$,

$$|f_n - f| = \left| \frac{1}{2^n} \sum_{i=p}^{r} \varphi_{A_{i,n}} - \sum_{i=p}^{m} \lambda_i \varphi_{A_i} \right| = \left| \frac{1}{2^n} \left[\sum_{i=1}^{r} \varphi_{A_{i,n}} - \sum_{i=1}^{p} \varphi_{A_{i,n}} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{A_i} - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_{A_i} \right] \right| = \left| \frac{1}{2^n} |r - p| - |a_m - a_p| \right| = 0 \;, \quad \forall i \geq p.$$

Logo f_n converge uniformemente para f. Do mesmo modo g_n converge uniformemente para g.

Como

$$\int_X (f_n + g_n)d\delta = \frac{1}{2^n} \int_X [\sum_{i=1}^{r} \varphi_{A_{i,n}} + \sum_{i=1}^{s} \varphi_{B_{i,n}}] d\delta =$$

$$= \frac{1}{2^n} \int_X \sum_{i=1}^{r} \varphi_{A_{i,n}} d\delta + \frac{1}{2^n} \int_X \sum_{i=1}^{s} \varphi_{B_{i,n}} d\delta ,$$

tomando-se o limite com $n \longrightarrow +\infty$, em ambos os membros acima teremos

$$\int_X (f+g)d\delta = \int_X fd\delta + \int_X gd\delta .$$

(b) A linearidade da integral monótona $\int_X - d\delta$ para funções $\mathbb{H}$-mensuráveis limitadas.

Sejam f e g funções $\mathbb{H}$-mensuráveis limitadas, então, pelo teorema 3, existem sucessões $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ de funções, combinações lineares positivas de funções características de conjuntos $\mathbb{H}$-mensuráveis, convergindo uniformemente para f e g, respectivamente, com $f_n \leq f$ e $g_n \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $f_n + g_n \in I_{\mathbb{H}}$, temos pela parte (a) que

$$\int_X (f_n + g_n)d\delta = \int_X f_n d\delta + \int_X g_n d\delta$$

e como $f_n + g_n \leq f + g$ e $f_n + g_n \xrightarrow{\text{unif.}} f+g$, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X (f_n + g_n) d\delta = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\delta + \lim_{n \to +\infty} \int_X g_n d\delta$$

logo $$\int_X (f + g) d\delta = \int_X f d\delta + \int_X g d\delta$$

e a linearidade também é verdadeira para funções $\mathbb{H}$-mensuráveis limitadas.

(c) A linearidade da integral monótona $\int_X \text{—}\, d\delta$ para funções $\mathbb{H}$ - mensuráveis quaisquer.

Sejam f e g funções $\mathbb{H}$-mensuráveis quaisquer, então pelo lema 3, $f \wedge n$ e $g \wedge n$ são funções $\mathbb{H}$-mensuráveis limitadas, para todo $n \in [0, +\infty)$.

Pela parte (b) da demonstração vale a linearidade para $f \wedge n$ e $g \wedge n$, isto é,

$$\int_X (f \wedge n + g \wedge n) d\delta = \int_X (f \wedge n) d\delta + \int_X (g \wedge n) d\delta .$$

Agora, usando a desigualdade

$$(f + g) \wedge n \leq f \wedge n + g \wedge n \leq f + g$$

para toda f e $g \in [0, +\infty]^X$ e a monotocidade de δ, teremos

$$\int_X [(f+g) \wedge n]\,d\delta \leq \int_X [f \wedge n]\,d\delta + \int_X [g \wedge n]\,d\delta \leq \int_X [f+g]\,d\delta,$$

e passando ao limite com $n \longrightarrow +\infty$, ficaremos com

$$\int_X (f+g)\,d\delta \leq \int_X f d\delta + \int_X g d\delta \leq \int_X (f+g)\,d\delta$$

isto é

$$\int_X (f+g)\,d\delta = \int_X f d\delta + \int_X g d\delta \quad \blacksquare \quad \text{cqd.}$$

COROLÁRIO 1. *Sejam* $\mathbb{H}$ *e* δ *como no teorema* 4, *então vale as seguintes relações:*

(i) $\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \leq \delta(A) + \delta(B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_X (f+g)\,d\delta \leq \int_X f d\delta + \int_X g d\delta$$

(ii) $\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) \geq \delta(A) + \delta(B) \Longrightarrow$

$$\int_X (f+g)\,d\delta \geq \int_X f d\delta + \int_X g d\delta$$

para toda f e g $\mathbb{H}$-mensuráveis.

TEOREMA 5. *Seja* $\mathbb{B}$ *um domínio de integração, fechado em relação à soma finita, sup finito e inf finito* ($\mathbb{B}$ = *cone de funções*).

Seja $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ *uma integral monótona. Então, são equivalentes:*

(i) $T(f + g) = T(f) + T(g)$ *para todo* $f, g \in \mathbb{B}$

(ii) (a) *Existe uma família* $\mathbb{H} \subset \mathcal{P}(X)$ *fechada por união e intersecção finita, com* $\phi \in \mathbb{H}$,

(b) $\mathbb{B} \subset M^+(X, \mathbb{H})$,

(c) *Existe* $\delta : \mathbb{H} \longrightarrow [0, +\infty]$, *monótona tal que*

$$\delta(A \cup B) + \delta(A \cap B) = \delta(A) + \delta(B) \text{ , e}$$

(d) $T(f) = \int_X f d\delta$ *para toda* $f \in \mathbb{B}$.

PROVA.

A implicação (ii) ⇒ (i) é uma consequência imediata do teorema 4. Provaremos que a linearidade da integral em (i) implica cada um dos ítens de (ii).

(d) Se $T : \mathbb{B} \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma integral monõtona, definida sobre o domínio de integração $\mathbb{B} \subset [0, +\infty]^X$. Se α_T, β_T são as funções de conjunto monõtonas, definidas em $\mathcal{P}(X)$, por:

$$\alpha_T(B) = \sup\{T(f) : f \leq \varphi_B \ , \ f \in \mathbb{B}\}$$

e

$$\beta_T(B) = \inf\{T(f) : f \geq \varphi_B \ , \ f \in \mathbb{B}\} \ ,$$

para todo $B \in \mathcal{P}(X)$.

Então, existe[23] uma função de conjunto monôtona

$$\delta \in [\alpha_T, \beta_T] \quad \text{, que representa } T \text{, isto é,}$$

$$T(f) = \int_X f d\delta \quad , \quad \text{para toda} \quad f \in \mathbb{B} .$$

(a) Consideremos, $\mathbb{H} \subset \mathcal{P}(X)$, tal que $H \in \mathbb{H}$ se $\alpha_T(H) = \beta_T(H) < +\infty$, isto é, $\mathbb{H}$ é a classe dos conjuntos T-regulares, com

$$\int_X f d\delta < +\infty \quad \text{para toda} \quad \delta \in [\alpha_T, \beta_T] .$$

$\mathbb{H}$ é fechada por união e intersecção finita.

De fato, sejam $F, G \in \mathcal{P}(X)$ e consideremos $f_1, g_1, f, g \in \mathbb{B}$, tais que $f_1 \leq \varphi_F \leq f \leq 1$ e $g_1 \leq \varphi_G \leq g \leq 1$. Então, temos:

$$T(f) + T(g) = T(f \wedge g) + T(f \vee g - g) + T(g)$$

$$= T(f \wedge g) + T(f \vee g)$$

$$\geq \beta_T(F \cup G) + \beta_T(F \cap G)$$

pois $(f \vee g)(x) \geq \varphi_{F \cup G}(x)$, $(f \wedge g)(x) \geq \varphi_{F \cap G}(x)$ para todo x.

---

(23) cf. teorema 1, pag. 13.

Tomando-se o ínfimo para f e g em $\mathbb{B}$ em ambos os membros da desigualdade acima, temos

$$\inf\{T(f)\ ;\ f \geq \varphi_F\ ,\ f \in \mathbb{B}\} + \inf\{T(g)\ ;\ g \geq \varphi_G\ ,\ g \in \mathbb{B}\} \geq$$

$$\geq\ \beta_T(F \cup G) + \beta_T(F \cap G)$$

isto é,

$$(a_1)\qquad \beta_T(F) + \beta_T(G) \geq \beta_T(F \cup G) + \beta_T(F \cap G).$$

Usando o mesmo procedimento, temos também que:

$$T(f_1) + T(g_1) = T(f_1 \wedge g_1) + T(f_1 \vee g_1)$$

$$\leq \alpha_T(F \cup G) + \alpha_T(F \cap G),$$

e tomando-se o sup para f_1 e g_1 em $\mathbb{B}$, em ambos os membros da desigualdade acima, temos

$$\sup\{T(f_1)\ ;\ f_1 \leq \varphi_F\ ,\ f_1 \in \mathbb{B}\} + \sup\{T(g_1)\ ;\ g_1 \leq \varphi_G\ ,\ g_1 \in \mathbb{B}\} \leq$$

$$\leq\ \alpha_T(F \cup G) + \alpha_T(F \cap G)\ ,$$

isto é,

$(a_2)\quad \alpha_T(F) + \alpha_T(G) \leq \alpha_T(F \cup G) + \alpha_T(F \cap G)$.

Como $\alpha_T(A) \leq \beta_T(A)$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$, temos por (a_1) e (a_2) que:

$$\alpha_T(F) + \alpha_T(G) \leq \alpha_T(F \cup G) + \alpha_T(F \cap G) \leq \beta_T(F \cup G) + \beta_T(F \cap G) \leq$$

$$\leq \beta_T(F) + \beta_T(G) .$$

Mas, se F e G pertencerem a $\mathbb{H}$, então

$$\alpha_T(F) = \beta_T(F) \quad \text{e} \quad \alpha_T(G) = \beta_T(G) ,$$

o que nos permite concluir que:

$$\alpha_T(F \cup G) + \alpha_T(F \cap G) = \beta_T(F \cup G) + \beta_T(F \cap G)$$

e que $F \cup G \in \mathbb{H}$ e $F \cap G \in \mathbb{H}$, logo $\mathbb{H}$ é fechada por união e intersecção finita.

Que o conjunto vazio pertence a $\mathbb{H}$, é óbvio pois, α_T, β_T sendo monótonas, $\alpha_T(\phi) = 0 = \beta_T(\phi)$.

(c) A função de conjunto $\delta : \mathbb{H} \longrightarrow [0, +\infty]$, monótona tal que

$$\int_X f d\delta = T(f) ,$$

é tal que $\alpha_T \leq \delta \leq \beta_T$. Essa função δ restrita à classe $\mathbb{H}$, nos dará $\delta(H) = \alpha_T(H) = \beta_T(H)$ para todo $H \in \mathbb{H}$. Portanto, teremos que

$$\delta(F) + \delta(G) = \delta(F \cup G) + \delta(F \cap G)$$

para todo F e $G \in \mathbb{H}$.

(b) Para toda função $f \in \mathbb{B}$, f limitada, mostraremos que f é $\mathbb{H}$-mensurável, isto é, $\mathbb{B} \subset M^+(X, \mathbb{H})$.

De fato, a função $\delta : \mathbb{H} \longrightarrow [0, +\infty]$ monótona, aditiva, bialternativa é tal que

$$\delta(H) = \alpha_T(H) = \beta_T(H) < +\infty \qquad \text{para todo } H \in \mathbb{H} .$$

Como δ representa T, temos que $T(f) = \int_X f d\delta$ e daí, concluimos que

$$\int_X f d\alpha_T = \int_X f d\beta_T \quad \text{se} \quad \alpha_T(H) = \beta_T(H) \ ,$$

para todo $H \in \mathbb{H}$, portanto f é $\mathbb{H}$-mensurável.

Logo, $\mathbb{B} \subset M^+(X, \mathbb{H})$ ■

cqd.

O próximo teorema e seu colorário, descrevem as integrais definidas sobre um domínio de integração $\mathbb{B}_f$, gerado por uma função $f \in [0, +\infty]^X$.

TEOREMA 6. *Seja* $\alpha : P(X) \in [0, +\infty]$ *uma função de conjunto monótona e seja* $\mathbb{B}_f$ *o domínio de integração gerado por* f, $f \in [0,+\infty]^X$. *Então,*

$$\int_X (g_1 + g_2)\,d\alpha = \int_X g_1 d\alpha + \int_X g_2 d\alpha \quad , \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbb{B}_f \ .$$

PROVA.

(a) Consideremos a família $\mathbb{H}$ definida por

$$\mathbb{H} = \{\{x : f(x) > t\} : x \in X \ , \ t \in (0, +\infty)\} \cup \phi \ ,$$

então $\mathbb{H}$ é fechada por união e intersecção finita. Pois se,

$A = \{x : f(x) > t_1\}$ e $B = \{x : f(x) > t_2\}$ com t_1 e t_2 números reais, temos:

$$A \cup B = \{x : f(x) > \min\{t_1, t_2\}\}$$

e

$$A \cap B = \{x : f(x) > \max\{t_1, t_2\}\}$$

o que implica que $A \cup B \in \mathbb{H}$ e $A \cap B \in \mathbb{H}$.

(b) Para toda α monótona sobre $\mathcal{P}(X)$ temos que α é aditiva em $\mathbb{H}$ pois:

$$\alpha(A \cup B) + \alpha(A \cap B) = \alpha\{x : f(x) > \min\{t_1, t_2\}\} + \alpha\{x : f(x) > \max\{t_1, t_2\}\}$$

$$= \alpha\{x : f(x) > t_1\} + \alpha\{x : f(x) > t_2\} \quad (\text{se } t_1 < t_2)$$

$$= \alpha(A) + \alpha(B) \quad , \quad \forall A, B \in \mathbb{H}$$

(c) $\mathbb{B}_f \subset \mathcal{M}^+(X, \mathbb{H})$ pois,

para toda $\beta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ monótona, tal que $\beta(A) = \alpha(A)$ para todo A em $\mathbb{H}$, temos que:

$$\int_X f d\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{x : f(x) > t\} dt = \int_0^{+\infty} \beta\{x : f(x) > t\} dt = \int_X f d\beta$$

logo f é $\mathbb{H}$-mensurável.

Seja agora $g \in \mathbb{B}_f$; $g = a(f \wedge c - f \wedge b)$ com $a \in [0, +\infty)$, $0 \leq b < c \leq +\infty$, então

$$\alpha\{f \wedge c - f \wedge b > t\} = \alpha\{f > t + b\} =$$

$$= \beta\{f > t + b\} = \beta\{f \wedge c - f \wedge b > t\}$$

o que implica que

$$\int_X (f \wedge c - f \wedge b)d\alpha = \int_X (f \wedge c - f \wedge b)d\beta .$$

Como $\int_X g d\alpha$ é homogênea temos:

$$\int_X g d\alpha = \int_X a(f \wedge c - f \wedge b)d\alpha =$$

$$= a \int_X (f \wedge c - f \wedge b)d\alpha =$$

$$= a \int_X (f \wedge c - f \wedge b)d\beta =$$

$$= \int_X a(f \wedge c - f \wedge b)d\beta = \int_X f d\beta$$

e g é $\mathbb{H}$-mensurável. Portanto

$$\mathbb{B}_f \subset M^+(X, \mathbb{H}) .$$

Então, pelo teorema 5, temos que

$$T(g_1 + g_2) = T(g_1) + T(g_2) \quad , \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbb{B}_f .$$

COROLÁRIO 2. *Seja* $\alpha : P(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$ *monótona. Então, para todo par de funções crescentes* f_1 *e* f_2 *pertencentes a* $[0;+\infty)^{\mathbb{R}}$ *temos:*

$$\int_{\mathbb{R}} (f_1 + f_2)d\alpha = \int_{\mathbb{R}} f_1 d\alpha + \int_{\mathbb{R}} f_2 d\alpha .$$

A prova desse corolário segue como consequência do Teorema 5, quando consideramos

$$i : [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty] \quad \text{tal que} \quad i(x) = x$$

$\mathbb{B}_i$ = família de todas as funções crescentes e

$T : \mathbb{B}_i \longrightarrow [0, +\infty]$ como sendo $T(f) = \int_{\mathbb{R}} f d\alpha$, onde

$\alpha : P(\mathbb{R}) \longrightarrow (0, +\infty)$ monótona.

TEOREMA 7. *Seja* $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *uma função de conjunto monótona e* $f \in [0, +\infty]^X$. *Se* $\mathbb{B}_f$ *é o Domínio de Integração gerado por* f, *então* $\int_X - \, d\alpha$ *é* σ*-aditiva.*

Para demonstrarmos esse teorema precisaremos do seguinte lema:

LEMA 6. *Seja* $f : \mathbb{N} \longrightarrow [0, +\infty)$ *uma sequência decrescente de números reais e* $f_o = \inf_n f$. *Então, se*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i [f \wedge c_i - f \wedge b_i] = f$$

teremos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i [f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] = f_o \quad ,$$

com $a_i \in [0, +\infty)$ e $0 \leq b_i < c_i \leq +\infty$.

PROVA DO LEMA.

(i) Para $c_i > f(1)$, $b_i < f_o$, a_i = constante e $0 \leq b_i < c_i \leq +\infty$, temos:

$$a_i [f \wedge c_i - f \wedge b_i] = a_i [f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n}$$

com $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$. Pois,

$$f(1) \wedge c_i - f(1) \wedge b_i = f(1) - b_i$$

$$f(2) \wedge c_i - f(2) \wedge b_i = f(2) - b_i$$

- - - - - - - - - - -

(1) $\quad f(n) \wedge c_i - f(n) \wedge b_i = f(n) - b_i$ para todo n

e

(2) $\quad f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i = f_o - b_i$ para todo n .

(1) e (2) nos permitem concluir que

$$f(n) \wedge c_i - f(n) \wedge b_i = f(n) - b_i$$

$$= f_o - b_i + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n}$$

para todo n. Onde $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n} = f(n) - f_o$.

(ii) Para $c_i > f(1)$; $f(n) > b_i > f(n+1) > f_o$ algum n, a_i constante e $0 \leq b_i < c_i \leq +\infty$, temos:

$$a_i [f \wedge c_i - f \wedge b_i] = a_i [f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n}$$

com $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$. Pois

(3) $f(m) \wedge c_i - f(m) \wedge b_i = f(m) - b_i$ para todo $m \leq n$

$f(m+1) \wedge c_i - f(m+1) \wedge b_i = f(m+1) - f(m+1) = 0$, para todo $m>n$

e

(4) $f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i = f_o - f_o = 0$ para todo n ,

(3) e (4) permitem concluir que

$$f(n) - b_i = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n} \quad \text{para todo } n.$$

Isto é,

$$a_i[f \wedge c_i - f \wedge b_i] = a_i[f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^n \varphi_{A_n}$$

(iii) Para $f(k-1) > c_i > f(k)$ algum k e $b_i < f_o$, temos também que

$$a_i[f \wedge c_i - f \wedge b_i] = a_i[f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n} .$$

Pois:

$$(5) \quad f(n) \wedge c_i - f(n) \wedge b_i = \begin{cases} c_i - b_i & \text{se } n < k \\ f(n) - b_i & \text{se } n \geq k \end{cases}$$

e

$$(6) \quad f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i = f_o - b_i .$$

(5) e (6) implicam que

$$f(n) - b_i = f_o - b_i + \sum_{n \geq k}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n} ,$$

onde $\delta_n^i = f(n) - f(n-1)$ se $n \geq k$, e

$$\sum_{n \geq k} \delta_n^i \varphi_{A_n} = f(n) - f_o$$

$$\sum_{n=1}^{k} \delta_n^i \varphi_{A_n} = c_i - f_o \; .$$

De maneira análoga podemos demonstrar que a relação

$$a_i(f \wedge c_i - f \wedge b_i) = a_i(f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n} \;)$$

é válida para todo n, independente da posição de b_i e c_i em relação a f_o e $f(n)$. Logo, temos

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i [f \wedge c_i - f \wedge b_i] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i [f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n} \; , \quad e$$

tomando-se o $\inf_n$ em ambos os membros, ficamos com

$$f_o = \sum_{i=1}^{\infty} a_i [f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] + \inf_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \varphi_{A_n} \right) .$$

Falta então, mostrar que

$$\inf_n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \, \varphi_{A_n} = 0 .$$

De fato,

$$f(1) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i [f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \, \varphi_{A_n}(1) < +\infty, \text{ e}$$

como

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i [f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i] = \text{constante} ,$$

segue que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i < +\infty.$$

Assim

$$\inf_n \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^i \, \varphi_{A_n} \right) = \inf \left[\sum_{n=k}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \delta_n^i \right) \right] = 0$$

pois

$$\varphi_{A_n}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k \leq n \\ 0 & \text{se} \quad k > n \end{cases}$$

logo , $\sum_{i=1}^{\infty} a_i(f_o \wedge c_i - f_o \wedge b_i) = f_o$. cqd.

OBSERVAÇÃO. Esse resultado ainda é válido se considerarmos $\inf_n f =$ $= + \infty$. Pois nesse caso $f(n) = + \infty$ para todo n, o que implica que $f(n) = \inf_n f(n)$, e

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i [f(n) \wedge c_i - f(n) \wedge b_i] = a_i [f(n) \wedge c - f(n) \wedge b] .$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 7 .

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{k} g_n\right) d\alpha = \sum_{n=1}^{k} \int_X g_n \, d\alpha$$

para toda $g_n \in \mathbb{B}_f$ e para todo $k \in \mathbb{N}$, finito[24] .

Seja $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{B}_f$, tal que

$$g_n = \sum_{i=1}^{n} a_i (f \wedge c_i - f \wedge b_i) \leq f$$

para todo n , e

(24) cf. teorema 6, pag. 34

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (f \wedge c_i - f \wedge b_i) = \lim_n g_n \,.$$

Então, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$ temos que

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} (\inf_A g_n) = \lim_n (\inf_A \sum_{i=1}^{n} a_i (f \wedge c_i - f \wedge b_i)) \geq$$

$$\geq \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_i [\inf_A (f \wedge c_i - f \wedge b_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\inf_A f \wedge c_i - \inf_A f \wedge c_i) \quad \text{(lema 6)}$$

$$= \inf_A f$$

Logo , temos que

$$\int_X \sum_{i=1}^{\infty} a_i |f \wedge c_i - f \wedge b_i| d\alpha =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_X a_i (f \wedge c_i - f \wedge b_i) d\alpha$$

cqd. ∎

No teorema que segue, mostraremos que é possível definir a mensurabilidade de Carathéodory de uma função $f \in [0,+\infty]^X$, em relação a uma função de conjunto monótona α, usando apenas a aditividade da integral $\int_X - \, d\alpha$.

TEOREMA 8. *Seja* $\alpha : P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ *uma função de conjunto monótona. Sejam* $f \in [0,+\infty]^X$ *e* $\mathbb{B}_f$ *o domínio de integração gerado por* f. *Então, são equivalentes:*

(I) f *é* α-*mensurável no sentido de Carathéodory.*

(II) $\int_X (h+g)\,d\alpha = \int_X h\,d\alpha + \int_X g\,d\alpha$, *para todo* $h \in \mathbb{B}_f$ *e para toda* $g \in [0,+\infty]^X$.

DEMONSTRAÇÃO. Mostraremos a implicação (I) $\Rightarrow$ (II) em três etapas:

(i) quando $f = \varphi_A$, com A conjunto α-mensurável, temos:

$$\int_X (f+g)\,d\alpha = \int_X (\varphi_A + g)\,d\alpha =$$

$$= \int_{X-A} (\varphi_A + g)\,d\alpha + \int_A (\varphi_A + g)\,d\alpha^{(25)}$$

(25) cf. [5] proposição 2.1, pag. 32.

$$= \alpha(A_1) + \int_X (\sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i} + g)d\alpha , \quad \text{cf. (i)}$$

$$= \alpha(A_1) + \int_X [\varphi_{A_2} + (\sum_{i>2}^{n} \varphi_{A_i} + g)] d\alpha$$

$$= \alpha(A_1) + \alpha(A_2) + \int_X (\sum_{i>2}^{n} \varphi_{A_i} + g)d\alpha$$

repetindo essa operação para $i = 3,4,\ldots,n$ obteremos que

$$\int_X (f + g)d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i) + \int_X gd\alpha =$$

$$= \int_X fd\alpha + \int_X gd\alpha$$

(iii) quando f é α-mensurável (caso geral)

Da α-mensurabilidade de f, temos que, para todo $a,b \in (0,+\infty)$, com $a > b$, existe um conjunto α-mensurável H, tal que

$$\{f \geq a\} \subset H \subset \{f > b\}^{(29)}$$

---

(29) pois caso contrário $\{x : f(x) > t\}$ não seria α-mensurável para todo $t \in (b,a)$ e (b,a) não é enumerável (definição 9, pag. 13).

Logo, para todo par $i, n \in \mathbb{N}$, existem conjuntos $H_{i,n}$, α-mensuráveis tais que:

$$\{f \geq \frac{i}{2^n}\} \supset H_{i,n} \supset \{f > \frac{i+1}{2^n}\} \quad \text{com} \quad H_{i,n} \supset H_{i+1,n} \,.$$

E para todo n vale(30)

$$f \geq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{H_{i,n}} \geq f \vee \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} \,.$$

Agora, a sequência de funções simples

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, com $f_n = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{H_{i,n}}$ e $H_{i,n} \supset H_{i+1,n}$ é tal que $\{f_n \wedge a\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f \wedge a$, para todo $a \in (0, +\infty)$. Portanto, f é limite uniforme em $\overline{\mathbb{R}}^X$ de uma sequência de funções simples, que são combinações lineares, de conjuntos α-mensuráveis.

Então,

$(f_n + g)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em $\overline{\mathbb{R}}^X$ a $f + g$, e portanto

---

(30) cf. [10], pag. 88

$$\lim_{n} \int_X (f_n + g)d\alpha = \lim_{n} \int_X f_n d\alpha + \int_X g d\alpha =$$

$$= \int_X f d\alpha + \int_X g d\alpha \ .$$

Para provarmos a recíproca devemos antes demonstrar o seguinte lema:

LEMA 7. *Para todo* $t > 0$ *e para todo* B *pertencente a* $P(X)$ *temos:*

(i) $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \left(\frac{f \wedge (t+\varepsilon) - f \wedge t)}{\varepsilon} + \varphi_B\right) d\alpha =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X (\varphi_{\{f > t+\varepsilon\}} + \varphi_B) d\alpha$$

(ii) $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \left(\frac{f \wedge t - f \wedge (t-\varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi_B\right) d\alpha =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X (\varphi_{\{f > t-\varepsilon\}} + \varphi_B) d\alpha$$

PROVA de (i).

Da validade da desigualdade

$$(c - b)\,\varphi_{\{f > b\}} \geq f \wedge c - f \wedge b \geq (c - b)\,\varphi_{\{f > c\}}$$

para todo b e c, tal que $0 < b < c < +\infty$, temos que para todo $t > 0$ e $\varepsilon > 0$ vale também

$$\varphi_{\{f > t\}} \geq \frac{f \wedge (t+\varepsilon) - f \wedge t}{\varepsilon} \geq \varphi_{\{f > t+\varepsilon\}} .$$

Portanto, para todo $B \in \mathcal{P}(X)$, temos

$$(1)\quad \varphi_{\{f > t\}} + \varphi_B \geq \frac{f \wedge (t + \varepsilon) - f \wedge t}{\varepsilon} + \varphi_B$$

$$\geq \varphi_{\{f > t+\varepsilon\}} + \varphi_B$$

e

$$(2)\quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \left(\frac{f \wedge (t + \varepsilon) - f \wedge t}{\varepsilon} + \varphi_B\right) d\alpha \geq$$

$$\geq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X (\varphi_{\{f > t + \varepsilon\}} + \varphi_B)\, d\alpha$$

Por outro lado, temos,

$$\frac{f \wedge (t + a) - f \wedge (t + b)}{a} + \varphi_B \leq \frac{a-b}{a}\,\varphi_{\{f > t + b\}} + \varphi_B$$

para todo $b \in (0,a)$, e que

$$\{\frac{f \wedge (t+a) - f \wedge (t+b)}{a} + \varphi_B\}$$

converge uniformemente em $\overline{\mathbb{R}}^X$ para

$$\frac{f \wedge (t+a) - f \wedge t}{a} + \varphi_B$$

quando $b \longrightarrow 0^+$.

Então,

$$\int_X \left(\frac{f \wedge (t+\varepsilon) - f \wedge t}{\varepsilon} + \dot{\varphi}_B\right) d\alpha =$$

$$= \lim_{b \to 0^+} \int_X \left(\frac{f \wedge (t+\varepsilon) - f \wedge (t+b)}{\varepsilon} + \dot{\varphi}_B\right) d\alpha$$

$$\leq \lim_{b \to 0^+} \int_X (\varphi_{\{f > t+b\}} + \varphi_B) d\alpha .$$

E isso acarreta

(3) $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \left(\frac{f \wedge (t+\varepsilon) + f \wedge t}{\varepsilon} + \dot{\varphi}_B\right) \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X (\varphi_{\{f > t + \varepsilon\}} + \varphi_B)\, d\alpha \ .$$

Das desigualdades (2) e (3) segue (i). A demonstração da parte (ii) é análoga. cqd.

Podemos agora demonstrar a recíproca do teorema 8.

Primeiramente, se $f=\varphi_A$, com $\alpha(A) < +\infty$ e $g = \varphi_B$ para todo $B \in P(X)$, então fazendo $h = \varphi_A$ temos que $h \in \mathbb{B}_f$ e

$$\alpha(A) + \alpha(B) = \int_X \varphi_A d\alpha + \int_X \varphi_B d\alpha$$

$$= \int_X (\varphi_A + \varphi_B) d\alpha \quad \text{(hipótese II)}$$

$$= \int_X (\varphi_{A \cup B} + \varphi_{A \cap B}) d\alpha$$

$$= \alpha(A \cup B) + \alpha(A \cap B) \quad \text{(hipótese II)}.$$

Logo,

$$\alpha(B) = \alpha(A \cup B) + \alpha(A \cap B) - \alpha(A)$$

$$= \alpha(B - A) + \alpha(B \cap A) \quad \text{para todo } B \in P(X),$$

então A é α-mensurável e portanto $f = \varphi_A$ é α-mensurável.

Agora, se $f = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{A_i}$ com $\int_X f d\alpha < +\infty$, então para todo i, $\varphi_{A_i} \in \mathbb{B}_f$ e $\alpha(A_i) < +\infty$ e pela primeira parte segue que φ_{A_i} é α-mensurável. Portanto, f é α-mensurável[31].

Quando $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{A_i}$, com $\lambda_i \neq 0$, $g = \lambda_i \varphi_B$ para todo $B \in P(X)$, então para $h = \lambda_i \varphi_{A_i} \in \mathbb{B}_f$ e como

$$\int_X (\lambda_i \varphi_{A_i} + \lambda_i \varphi_B) d\alpha = \lambda_i \int_X (\varphi_{A_i} + \varphi_B) d\alpha ,$$

pela primeira parte, segue que φ_{A_i} é α-mensurável, logo f é α-mensurável.[32]

Finalmente, seja $f \in [0, +\infty]^X$, com $\int_X f d\alpha < +\infty$ e $g \in [0, +\infty]^X$, então, para $h = \frac{1}{\varepsilon} (f \wedge t - f \wedge (t - \varepsilon)) \in \mathbb{B}_f$ para todo $\varepsilon \in (0, +\infty)$, mostraremos que $\{x : f(x) > t\}$ é α-mensurável, para quase todo $t \in (0, +\infty)$.

---

(31) cf. proposição 10, pag. 14

(32) cf. [5], proposição 2.7, pag. 40, $\lambda_i \varphi_{A_i}$ é α-mensurável; Proposição 10, pag. 14, $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{A_i}$ é α-mensurável.

Consideramos a função $\psi \in [0, +\infty)^{[0, +\infty]}$ definida por $\psi(t) = \alpha\{f > t\}$. ψ é uma função monótona, logo existe[33] um conjunto $K \subset [0, +\infty)$ no máximo enumerável tal que ψ é contínua no complementar de K.

Seja t_o um ponto de continuidade de ψ, então, para todo $B \in \mathcal{P}(X)$ temos:

$$\alpha(\{f > t_o\}) + \alpha(B) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > t_o + \varepsilon\} + \alpha(B)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \frac{f \wedge (t_o + \varepsilon) - f \wedge t_o}{\varepsilon} d\alpha + \alpha(B) \quad \text{(cf. Prop. 9).}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \left(\frac{f \wedge (t_o + \varepsilon) - f \wedge t_o}{\varepsilon} + \varphi_B\right) d\alpha \qquad \text{(hipótese II)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X (\varphi_{\{f > t_o + \varepsilon\}} + \varphi_B) d\alpha \qquad \text{(Lema 7)}$$

$$\leq \int_X (\varphi_{\{f > t_o\}} + \varphi_B)\, d\alpha \quad \text{(cf. desigualdade (1) do Lema 7).}$$

Analogamente,

---

(33) cf. Rudin, W. "Princípios de Análise Matemática", pag.97.

$$\alpha(\{f > t_o\}) + \alpha(B) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \alpha\{f > t_o - \varepsilon\} + \alpha(B)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \frac{f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon}\, d\alpha + \alpha(B) \qquad \text{(cf. Prop. 9)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X \left(\frac{f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon} + \varphi_B\right) d\alpha \qquad \text{(hipótese II)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_X (\varphi_{\{f > t_o - \varepsilon\}} + \varphi_B)\, d\alpha \qquad \text{(Lema 7)}$$

$$\geq \int_X (\varphi_{\{f > t_o\}} + \varphi_B)\, d\alpha \qquad \text{(cf. desigualdade (1) do Lema 7).}$$

Logo

$$\alpha(\{f > t_o\}) + \alpha(B) = \int_X (\varphi_{\{f > t_o\}} + \varphi_B)\, d\alpha$$

e segue pela primeira parte, que o conjunto $\{f > t_o\}$ é α-mensurável.

Portanto, $\{t : \{f > t\}$ não é α-mensurável$\}$, é no máximo enumerável, ou seja f é α-mensurável. cqd.

TEOREMA 9. *Seja* $f \in [0, +\infty]^X$ *com* $\int_X f d\alpha < +\infty$ *e* $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *monótona. Se*

$$\int_X [(f \wedge a) + g] d\alpha = \int_X (f \wedge a) d\alpha + \int_X g d\alpha$$

para todo $g \in [0, +\infty]^X$ *, e todo* $a \in (0, +\infty)$*, então,* f *é* α*-mensurável.*

PROVA. Como

$$\frac{f \wedge (t_o + \varepsilon) - f \wedge t_o}{\varepsilon} = \frac{(f \vee t_o - t_o) \wedge \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{f \vee t_o - t_o}{\varepsilon} \wedge 1$$

e

$$\frac{f \wedge t_o - f \wedge (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{[f \vee (t_o - \varepsilon) - (t_o - \varepsilon)] \wedge \varepsilon}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{f \vee (t_o - \varepsilon) - (t_o - \varepsilon)}{\varepsilon} \wedge 1 ,$$

com o mesmo mesmo raciocínio da demonstração do teorema 8, temos que:

$$\int_X [(f \wedge 1) + g] d\alpha = \int_X (f \wedge 1) d\alpha + \int_X g d\alpha \quad , \quad \forall g \in (0, +\infty)^X$$

implica que f é α-mensurável.

Como

$$\int_X [(f \wedge a) + g]\, d\alpha = \int_X (f \wedge a)\, d\alpha + \int_X g d\alpha \quad , \quad \forall g \in [0, +\infty]^X ,$$

podemos reescrever tal igualdade do seguinte modo:

$$a \int_X [(\frac{f}{a} \wedge 1) + \frac{g}{a}]\, d\alpha = a \int_X (\frac{f}{a} \wedge 1)\, d\alpha + a \int_X \frac{g}{a}\, d\alpha$$

e $g/a \in [0, +\infty]^X$.

Assim temos que f/a é α-mensurável e portanto f é α-mensurável.

Os resultados obtidos até aqui, podem ser reunidos no seguinte teorema:

TEOREMA 10. *Seja* $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ *monótona* , $f \in [0, +\infty]^X$, *com* $\int_X f d\alpha < +\infty$. *Então, são equivalentes:*

(a) $\int_X (h + \varphi_B)\, d\alpha = \int_X h d\alpha + \int_X \varphi_B d\alpha$

$$\forall h \in \mathbb{B}_f \quad , \quad \forall B \in P(X) ,$$

(b) f *é* α*-mensurável*

(c) $\int_X (h+g)d\alpha = \int_X hd\alpha + \int_X gd\alpha$

$$\forall g \in [0,+\infty]^X \quad , \quad \forall h \in \mathbb{B}_f \ .$$

PROPOSIÇÃO 12. *Seja* $\alpha : P(X) \longrightarrow [0,+\infty]$ *monótona, então se* , $f \in [0,+\infty]^X$ *é* α*-mensurável, temos que*

$$\int_X (f+g)d\alpha = \int_X fd\alpha + \int_X gd\alpha \quad , \quad \forall g \in [0,+\infty]^X \ .$$

DEMONSTRAÇÃO. Esta proposição é uma consequência imediata do teorema 8, pois $f \in \mathbb{B}_f$.

Entretanto, a recíproca desta proposição não é verdadeira , isto é, se

$$\int_X (f+g)d\alpha = \int_X fd\alpha + \int_X gd\alpha \quad , \quad \forall g \in [0,+\infty]^X$$

não significa que f deva ser α-mensurável.

Para provarmos essa afirmação, basta observarmos o seguinte contra-exemplo.

Seja X um conjunto qualquer, com mais de um elemento e $\alpha : P(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ uma função de conjunto monótona, definida por

$$\alpha(X) = +\infty$$

$$\alpha(A) = 0 \quad , \quad \forall A \in P(X) \quad , \quad A \neq X \, .$$

Seja $f \in [0, +\infty]^X$, definida por:

$$f(x_o) = 1$$

$$f(x) = +\infty \quad , \quad \forall x \neq x_o \, .$$

"A função f assim definida não é α-mensurável, apesar da linearidade da integral ser válida".

Prova de que f não é α-mensurável.

Qualquer que seja $A \in P(X)$, $A \neq \phi$, $A \neq X$, A não é α-mensurável pois,

$$\alpha(X) \neq \alpha(X \cap A) + \alpha(X \cap A^c)$$

Agora o conjunto $\{t \in (0, +\infty)$ tal que $\{f > t\}$ não é α-mensurável$\}$ é o próprio intervalo $[1, +\infty)$, que não é enumerável, portanto f não é α-mensurável.

Prova de que a linearidade da integral é válida.

De acordo com a definição e f e de α sabemos que $\int_X fd\alpha = +\infty$ pois:

$$\int_X fd\alpha = \int_0^{+\infty} \alpha\{f > t\}dt \geq \int_0^1 \alpha\{f > t\}dt = +\infty \text{ (34)} .$$

Agora, para todo $g \in [0,+\infty]^X$, temos

$$\int_X (f+g)d\alpha \geq \int_X fd\alpha = +\infty$$

e

$$\int_X fd\alpha + \int_X gd\alpha = +\infty + \int_X gd\alpha = +\infty$$

portanto

$$\int_X (f+g)d\alpha = \int_X fd\alpha + \int_X gd\alpha , \qquad \forall g \in [0,+\infty]^X .$$

e f definida acima.

(34) $\forall t \in (0,1)$, $\{f > t\} = X$ e $\alpha(X) = +\infty$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHOQUET, G. - "Theory of Capacities", Annales de l'Institut Fourier, 5 (1953/54), p. 287.

[2] De GIORGI, E. - LETTA, G. - "Une notion génerale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble", Ann. Sc. Norm. Sup. PISA, 4 (IV), p.61-99, (1977).

[3] DUNFORD, N. - SCHWARTZ, J.T. - "Linear Operators", New York, Wiley, 1971.

[4] GRECO, G.H. - "Integral Monotono", Rend. Sem. Mat.Padova, 57 (1977), p. 149-166.

[5] ———— - "Misura e Probalitã", (prima parte), Notas da Lîbero Universidade di Studi di Trento, (1978).

[6] ———— - Fondamenti della teoria della misura,notas sobre Curso ministrado em Campinas, UNICAMP (1979).

[7] ———— - "Sur la mensurabilitẽ d'une fonction Numẽrique par rapport ã famille d'ensembles", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 65 (1981), p. 163-176.

[8] ——————— - "Sulla rappresentazione di funzionali integrali" , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 66 (1982).

[9] HUBER, P.J. - *Theorie de L'inference Statistique Robuste*, Sêminaire de Mathemâtiques superieures de L'Université de Montreal (1969).

[10] MARTINS, A. - *Integrais Monõtonas*, Tese de Mestrado , UNICAMP, Campinas (1980).

[11] TOPSOE, F. - *Topology and Measure*, Lecture Notes in Mathematics, 133 (1970).

[12] ALMEIDA, M.C.A. - Integrais Monõtonas - Linearidade e Mensurabilidade, Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina (1981).