



FABIO GRANGEIRO RODRIGUES

**SOBRE CÁLCULO FRACIONÁRIO E
SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL**

**CAMPINAS
2015**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

FABIO GRANGEIRO RODRIGUES

SOBRE CÁLCULO FRACIONÁRIO E
SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO
FABIO GRANGEIRO RODRIGUES E ORIENTADA
PELO PROF. DR. EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA.

Assinatura do(a) Orientador(a)

A large, stylized handwritten signature in black ink is written over a horizontal line. The signature is complex and cursive, with many loops and flourishes.

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

R618s Rodrigues, Fabio Grangeiro, 1980-
Sobre cálculo fracionário e soluções da equação de Bessel / Fabio Grangeiro Rodrigues. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo fracionário. 2. Equações diferenciais fracionárias. 3. Bessel, Equação de. I. Oliveira, Edmundo Capelas de, 1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: About fractional calculus and solutions of the Bessel's equation

Palavras-chave em inglês:

Fractional calculus

Fractional differential equations

Bessel equations

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]

Jayme Vaz Junior

João Mauricio Rosário

Bruto Max Pimentel Escobar

Igor Leite Freire

Data de defesa: 12-02-2015

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 12 de fevereiro de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELA DE OLIVEIRA



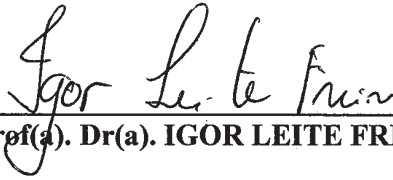
Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR



Prof(a). Dr(a). JOÃO MAURICIO ROSÁRIO



Prof(a). Dr(a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR



Prof(a). Dr(a). IGOR LEITE FREIRE

Abstract

In this thesis we discuss the solvability of the Bessel's differential equation of order p , which is a particular case of the confluent hypergeometric equation, from the perspective of the theory of calculus of arbitrary order, also commonly known as fractional calculus. In particular, we expose some misconceptions encountered in the literature and we raise some questions about interpretations of the Riemann-Liouville operators when acting on certain types of functions. In order to do so, we present the main fractional operators (Riemann-Liouville, Caputo and Grünwald-Letnikov) as well as the fractional integrodifferential operator, which is an unified view of both integration and differentiation under a single operator. We also show the main properties of these operators and mention some of its applications in Mathematics, Physics and Engineering.

Keywords: Fractional calculus, Fractional differential equations, Bessel's equation.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um modo de se obter soluções de um caso particular da equação hipergeométrica confluyente, a equação de Bessel de ordem p , utilizando-se da teoria do cálculo de ordem arbitrária, também conhecido popularmente por cálculo fracionário. Em particular, discutimos alguns equívocos identificados na literatura e levantamos questionamentos sobre algumas interpretações a respeito dos operadores formulados segundo Riemann-Liouville quando aplicados a certos tipos de funções. Para tanto, apresentamos inicialmente os operadores de integração e diferenciação fracionárias segundo as formulações mais clássicas (Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov) e, em seguida, apresentamos o operador de integrodiferenciação fracionária que é a tentativa de unificar as operações de integração e diferenciação sob um único operador. Ao longo do texto indicamos as principais propriedades destes operadores e citamos algumas das suas aplicações comumente encontrados na Matemática, Física e Engenharias.

Palavras-chave: Cálculo fracionário, Equações diferenciais fracionárias, Equação de Bessel.

Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xiii
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Notações, Terminologias e Resultados Clássicos	5
1.2 Funções Especiais do Cálculo Fracionário	11
1.2.1 Funções Generalizadas: Distribuição δ -Dirac	11
1.2.2 A Função Gama $\Gamma(z)$	17
1.2.3 Funções de Mittag-Leffler	22
1.2.4 Funções Hipergeométricas	24
2 Introdução ao Cálculo de Ordem Fracionária	29
2.1 Integral e Derivada de Riemann-Liouville	31
2.1.1 Propriedades das IFRL e DFRL	47
2.2 Derivada de Caputo	72
2.3 Derivada de Grünwald-Letnikov	76
2.4 Operador de Integrodiferenciação	82
2.4.1 Derivada de Marchaud	89
2.4.2 Integrodiferenciação e a Regra de Leibniz	90

SUMÁRIO

3	Soluções da Equação de Bessel via Cálculo Fracionário	95
3.1	Resolução da Equação de Bessel	96
3.2	Soluções Obtidas	99
3.3	Verificação do caso $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g$	104
3.4	Resultados e Conclusões	108
	Considerações Finais	117
A	Apêndice	121
A.1	Prova dos Resultados Eq.(2.31a) e Eq.(2.31c)	121
A.2	Prova do Corolário 2.1	122
A.3	Prova da Eq.(2.62)	124
A.4	Casos $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}\mp p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm p} g = g$	125
	Referências Bibliográficas	135

Aos meus queridos pais, Waldyr e Fátima, pelo imenso carinho, amor e compromisso com a minha formação. Aos meus familiares e amigos pelo apoio e compreensão.

Para a Dayane, minha companheira de todas as horas. . . .

Agradecimentos

- Primeiramente, gostaria de agradecer ao Prof. Edmundo Capelas de Oliveira por ter aceitado ser o meu orientador neste programa de doutorado. Além da sua colaboração com o trabalho de pesquisa, demonstrou enorme paciência comigo o tempo todo.
- Agradeço também aos meus familiares e a minha companheira Dayane pelo constante incentivo e apoio emocional para o término deste trabalho.
- Finalmente quero agradecer aos órgãos financiadores durante o programa de doutorado, a Capes e a PRPG da Unicamp pelas bolsas PED.

INTRODUÇÃO

Atualmente, a chamada teoria do cálculo fracionário¹ é uma área da Matemática com grande potencial de ascensão e dizemos isso no entendimento de que é evidente, pelo menos para os estudiosos desta área, que o número de trabalhos (artigos, relatórios, livros, etc... [4, 5, 6, 19, 26, 36, 50, 51, 54, 59]) que estão sendo publicados nestas últimas cinco décadas [56, 57] a respeito, tanto do desenvolvimento rigoroso da teoria descrita em termos da análise funcional [13, 25, 32, 41, 48], assim como das inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento têm se tornado cada vez mais substancial [1, 11, 12, 21, 22, 29, 55, 61]. Entretanto, o assunto ainda é desconhecido para a grande maioria dos acadêmicos e, ainda mais intrigante, existe uma quantidade enorme de definições distintas de operadores fracionários² que “circulam” pela literatura. Indagando sobre quais propriedades de fato definem uma *derivada fracionária*³, os autores de [36] buscam estabelecer critérios que possam ser usados como referências de partida para se definir um operador fracionário. Em particular, mostram que as definições “mais clássicas” como as de Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e Caputo satisfazem os critérios (segundo a nomenclatura por eles estabelecidas) de linearidade, identidade

¹Ao longo deste trabalho iremos denotar, indiferentemente, cálculo de ordem arbitrária, cálculo de ordem fracionária ou simplesmente, cálculo fracionário, como a teoria dos operadores de diferenciação e integração de ordem $\nu \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

²Apenas para citar os mais conhecidos temos, Liouville, Riemman, Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Riesz, Weyl, Marchaud, Miller-Ross (sequenciais), entre outros.

³Os autores usam a palavra derivada fracionária, mas deixam claro que se a ordem α deste operador for negativa, então trata-se de um operador de integração (indefinida), i.e., o processo de se obter uma primitiva.

INTRODUÇÃO

(i.e., operador de ordem zero é o operador de identidade), compatibilidade reversa (i.e., quando é escolhida uma ordem inteira, então o caso se reduz ao caso clássico de derivação e integração), leis de índice (i.e., propriedade de semigrupo, quando restrito a ordens negativas) e uma regra de Leibniz generalizada (para se computar o operador aplicado ao produto de duas funções).

É claro que uma das maiores motivações no desenvolvimento de uma nova teoria matemática é a busca contínua por novos métodos e aplicações a problemas práticos e teóricos, sejam estes provenientes de novos desafios matemáticos da ciência contemporânea ou mesmo provenientes de “problemas clássicos”, ou seja, aqueles que já foram exaustivamente estudados sob a ótica das diversas teorias até então difundidas. Assim, nosso intuito neste trabalho foi o de produzir um texto útil para a divulgação, exploração e verificação de resultados até então propostos para a teoria do cálculo fracionário e agregar valor ao uso desta nova área, identificando em parte original no **Capítulo 3** alguns equívocos que encontramos na literatura a respeito da obtenção das soluções da equação de Bessel via uma metodologia do cálculo fracionário. Inclusive, tais investigações nos levaram a questionar sobre uma nova interpretação para os chamados operadores de Riemann-Liouville quando aplicados a certos tipos de funções.

Para tanto, nos organizamos da seguinte forma: o capítulo inicial, além de fixar as principais notações usadas, apresenta uma revisão dos principais conceitos da análise funcional e definições auxiliares que serão constantemente referenciados ao longo do texto. No capítulo dois, introduzimos os operadores de integração e diferenciação fracionários, restringindo-nos às versões mais conhecidas, a saber, Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov, investigando os critérios de compatibilidade entre estas definições. Também discutimos na **Seção 2.4** o que denominamos de operador de integrodiferenciação fracionária, que é a tentativa de descrever sob um único símbolo as operações de derivação e integração e, com bases nestas ideias expostas, na **Subseção 2.4.1** traçamos um paralelo a respeito da formulação conhecida como derivada fracionária de Marchaud. Ainda no contexto da **Seção 2.4**, apresentamos uma das versões da chamada *regra de Leibniz fracionária*. No capítulo três, apresentamos uma abordagem simples, através do cálculo fracionário, como alternativa ao conhecido método de Frobenius, para abordar a conhecida equação de Bessel, frequentemente encontrada

INTRODUÇÃO

no estudo dos fenômenos de propagação de ondas, de condução de calor e de equilíbrio eletrostático em domínios cilíndricos:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2) w = 0, \quad z > 0 \quad (1)$$

onde $w = w(z)$ e p é um parâmetro. A metodologia desenvolvida foi inicialmente proposta pelos autores de [35], no entanto, ao analisar aquele artigo observamos algumas inconsistências na metodologia usada pelos autores ao tentar obter a segunda solução linearmente independente para o caso em que o parâmetro p não é um inteiro. Discutimos com detalhes as causas de tais inconsistências e encontramos as devidas limitações ao método empregado pelos autores, sugerindo um formalismo consistente para a solução de problemas análogos.

Por fim, encerramos o trabalho com as considerações finais, sintetizando os resultados investigados e apresentando alguns tópicos que sugerem novos estudos e trabalhos.

Esta tese também contempla um apêndice, sendo este um espaço reservado para incluirmos alguns resultados e/ou demonstrações “secundários”, normalmente laboriosos e eventualmente “inconvenientes” para serem incluídos no corpo textual principal.

INTRODUÇÃO

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é necessário para estabelecermos as notações que serão utilizadas ao longo do trabalho, assim como exibirmos alguns resultados conhecidos da análise funcional e ainda, relembrarmos certas funções especiais da Física-Matemática, visto que estas terão papel fundamental ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Notações, Terminologias e Resultados Clássicos

Para iniciarmos a nossa discussão, convém fixarmos algumas das principais notações e terminologias que faremos uso. Denotamos:

Notação 1.1 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, sendo $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos números naturais.

Notação 1.2 $\mathbb{Z}_0^- := \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, \dots\}$, sendo $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ o conjunto dos números inteiros.

Notação 1.3 $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(\Omega)$ denota a classe de todas as funções definidas no conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Sendo $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ os conjuntos dos números reais e complexos, respectivamente.

Notação 1.4 $\mathcal{C}^n \equiv \mathcal{C}^n(\Omega) \subset \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}_0$ denotam as classes de funções continuamente diferenciáveis até ordem n em Ω , sendo que para o caso particular $n = 0$, $\mathcal{C}^0 \equiv \mathcal{C}(\Omega) \subset$

1.1. NOTAÇÕES, TERMINOLOGIAS E RESULTADOS CLÁSSICOS

$\mathcal{F}$ define a classe de funções contínuas em Ω e se $n = \infty$, $\mathcal{C}^\infty \equiv \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ define a classe de funções infinitamente diferenciáveis, também chamado de espaço das funções suaves.

Notação 1.5 $\mathcal{C}_p \equiv \mathcal{C}_p(\Omega) \subset \mathcal{F}$ denota a classe de funções contínuas por partes em Ω .

Notação 1.6 $AC(\Omega)$ denota a classe de funções absolutamente contínuas em Ω , onde, $f \in AC(\Omega)$ se, dado $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para qualquer conjunto finito de intervalos $[a_k, b_k] \subset \Omega$, $k = 1, 2, \dots, n$, dois a dois disjuntos,

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Notação 1.7 $AC^n \equiv AC^n(\Omega) \subset \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, denotam as classes de funções $f(x)$ continuamente diferenciáveis até ordem $n - 1$ em Ω e com $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$. Em particular, $\Omega = [a, b]$, $AC^1(\Omega) \equiv AC[a, b]$.

Notação 1.8 $L_p[a, b] := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável em } [a, b] \text{ e } \|f\|_p < \infty \right\}$.
Sendo que

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_\infty &= \text{ess sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \end{aligned}$$

onde $\text{ess sup } |f(x)|$ denota o supremo essencial da função $|f(x)|$ [25].

Quando $p = 1$, $L_1[a, b]$ é normalmente dito o espaço das funções Lebesgue-integráveis em $\Omega = [a, b]$. Observamos ainda que, formalmente, os elementos de $L_p[\Omega]$ são, na verdade, classes de equivalência, no sentido de que duas funções mensuráveis em Ω : $f(x)$ e $g(x)$ são indistinguíveis em $L_p[\Omega]$ se, e só se, coincidirem em quase todos os pontos¹ de Ω . Ou seja, $f \in [f]$ é “igual” a outra função $g \in [f]$ a menos de um subconjunto de Ω com medida nula. Logo, por abuso de notação, toda vez que for mencionado que $f \in L_p[a, b]$ estaremos de fato tomando um certo $f(x)$ para representar a classe $[f]$.

¹Uma propriedade é dita válida "em quase todos os ponto de Ω " quando ela é verdadeira em todo Ω exceto, possivelmente, num subconjunto de Ω com medida nula [2].

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Lembramos de um resultado clássico da análise [25, 48] que nos garante que

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) \mathbf{d}t, \quad \varphi \in L_1[a, b],$$

i.e., o espaço $AC[a, b]$ coincide com o espaço das primitivas de funções φ que estão em $L_1[a, b]$. Note que da equivalência acima, se $f \in AC[a, b]$, então $f'(x) = \varphi(x)$ em quase todos os pontos de Ω com $c = f(a)$. E mais geralmente, temos o seguinte lema.

Lema 1.1 *O espaço $AC^n[a, b]$ é formado pelas funções $f(x)$, que podem ser representadas pela forma*

$$f(x) = (\mathcal{I}_{a+}^n \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad (1.1)$$

onde $\varphi \in L_1[a, b]$, c_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$) são constantes arbitrárias e

$$(\mathcal{I}_{a+}^n \varphi)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) \mathbf{d}t.$$

E mais, se $f(x)$ tem a forma da Eq.(1.1), então $f \in AC^n[a, b]$.

Note que segue da Eq.(1.1) que

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t) \quad \text{e} \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Para futuras referências, recordemos agora a famosa *Desigualdade de Hölder* [2, 48]:

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $f \in L_p[a, b]$ e $g \in L_q[a, b]$ onde $p, q \in [1, \infty]^2$ satisfazendo a relação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Corolário 1.1 *Sejam $f \in L_1[a, b]$ e $g \in L_\infty[a, b]$, i.e., $g(x)$ é essencialmente limitada em $[a, b]$, então o produto $(fg) \in L_1[a, b]$.*

²O sentido de $[1, \infty]$ vem do fato de considerarmos, quando necessário, o conjunto dos números reais estendido, i.e., $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1.1. NOTAÇÕES, TERMINOLOGIAS E RESULTADOS CLÁSSICOS

Notação 1.9 Denotaremos o espaço das funções localmente integráveis em Ω por

$$L_{1,loc}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mensurável em } \Omega \text{ e } f|_U \in L_1(U), \forall U \subset \Omega\},$$

sendo que $f|_U$ é a restrição de f a um subconjunto compacto U .

Notação 1.10 O operador de diferenciação (no sentido usual) $\mathcal{D} \equiv \frac{d}{dx} : \mathcal{C}^1 \longrightarrow \mathcal{F}$, definido por $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$, aplica funções $f \in \mathcal{C}^1$ na sua derivada $f' \in \mathcal{F}$. Em particular, se $f \in \mathcal{C}^n$, então

$$\mathcal{D}^n f(x) = \underbrace{\frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx}}_n [f(x)] = \left(\frac{d^n}{dx^n} f \right)(x) = f^{(n)}(x)$$

é bem definido.

Além disso, para funções suficientemente bem comportadas, e.g. $f \in \mathcal{C}^{m+n}$, também vale a propriedade de semigrupo³

$$\mathcal{D}^m \mathcal{D}^n f(x) = \mathcal{D}^n \mathcal{D}^m f(x) = \mathcal{D}^{m+n} f(x).$$

Notação 1.11 O operador de integração $\mathcal{I} : L_1[a, b] \longrightarrow AC[a, b]$, definido por

$$(\mathcal{I}_a f)(x) = \int_a^x f(t) dt = F(x)$$

para $x \in [a, b]$ mapeia funções $f \in L_1[a, b]$ na sua primitiva $F \in AC[a, b]$. Em particular, se $f \in L_1[a, b]$, então por um resultado clássico da teoria da integração [2, 27], $\mathcal{I}_a f = F \in \mathcal{C}[a, b] \subset L_1(a, b)$, donde segue que a expressão a seguir é bem definida:

$$\underbrace{\int \cdots \int}_n f = (\mathcal{I}^n f).$$

³Um semigrupo é uma estrutura algébrica consistindo de um conjunto munido de uma operação binária (fechada) associativa. Assim, no contexto dos operadores de diferenciação e integração, a operação binária em questão é a composição.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Além disso, para funções integráveis, também vale a propriedade de semigrupo

$$\mathcal{I}^m \mathcal{I}^n f(x) = \mathcal{I}^n \mathcal{I}^m f(x) = \mathcal{I}^{m+n} f(x).$$

Notação 1.12 Para unificação simbólica⁴, usamos a letra $\mathfrak{D}^\nu$ para denotar o operador de integrodiferenciação fracionária de ordem $\nu > 0$ do seguinte modo:

$$\mathfrak{D}^\nu : \text{Dom}(\mathfrak{D}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F},$$

onde $\mathfrak{D}^{-\nu} \equiv \mathcal{I}^\nu$ e $\mathfrak{D}^\nu = \mathcal{D}^\nu \equiv \frac{\mathbf{d}^\nu}{\mathbf{d}x^\nu}$ denotam a integral e a derivada de ordens arbitrárias⁵ $\nu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), respectivamente. Em particular, $\mathcal{D}^n = \frac{\mathbf{d}^n}{\mathbf{d}x^n}$ e $\mathcal{D}^{-n} = \mathcal{I}^n$ quando $n \in \mathbb{N}$. Também iremos denotar, por conveniência, $\mathfrak{D}^0 \equiv \mathbf{I}$ o operador identidade.

Lembremos que o Teorema Fundamental do Cálculo (Clássico) nos dá o seguinte resultado:

Teorema 1.2 (TFC - Clássico) Seja $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Defina $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t) \mathbf{d}t,$$

para todo $x \in [a, b]$. Então, F é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $F' = f$.

Ou seja, o teorema estabelece uma relação íntima entre os operadores de integração e diferenciação. Na nossa notação, este resultado fica escrito como $(\mathcal{D}\mathcal{I})f = f$.

Corolário 1.2 Seja $f \in L_1[a, b]$, então

$$(\mathcal{D}^n \mathcal{I}^n f)(x) = f(x). \quad (1.2)$$

Prova. De fato, a Eq.(1.2) pode ser provada por indução.

⁴Explicaremos com mais detalhes esta ideia na **Seção 2.4**.

⁵Neste momento, ainda não é feita distinção entre as diferentes formas de se definir os operadores fracionários. Isto será feito no capítulo seguinte.

1.1. NOTAÇÕES, TERMINOLOGIAS E RESULTADOS CLÁSSICOS

Para $n = 1$ o resultado é o próprio **Teorema 1.2**. Suponha, por hipótese indutiva, que o resultado seja válido para n , então:

$$\begin{aligned} [(\mathcal{D}^{n+1}\mathcal{I}^{n+1})f](x) &= [\mathcal{D}(\mathcal{D}^n\mathcal{I}^n)\mathcal{I}f](x) \\ &= [\mathcal{DI}f](x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donde se conclui a prova. ■

Corolário 1.3 *Seja $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$, então*

$$(\mathcal{I}^n\mathcal{D}^nf)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a^+) \frac{x^k}{k!}.$$

Prova. A prova também é feita por indução. Para $n = 1$, temos

$$(\mathcal{I}\mathcal{D}f)(x) = \int_{a^+}^x f'(t) \, dt = f(x) - f(a^+).$$

Agora suponha, por hipótese indutiva, a validade do resultado para n , então:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}^{n+1}\mathcal{D}^{n+1}f) &= \mathcal{I}(\mathcal{I}^n\mathcal{D}^nf') \\ &= \mathcal{I} \left[f' - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(a^+) \frac{x^k}{k!} \right] \\ &= \mathcal{I}f' - \mathcal{I} \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(a^+) \frac{x^k}{k!} \\ &= f(x) - f(a^+) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(a^+) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a^+) \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

donde se conclui a prova. ■

Portanto, se a ideia do cálculo fracionário é obter uma generalização dos operadores de integração e diferenciação para ordens ν arbitrárias, devemos procurar estabelecer condições para que estas relações continuem válidas em um sentido generalizado, e.g., se $\mathfrak{C} \subset Dom(\mathfrak{D})$ denotar a classe de funções para o qual vale um resultado generalizado do **Teorema 1.2**, então será que

$$(\mathfrak{D}^\nu \mathfrak{D}^{-\nu}) f = \mathfrak{D}^{\nu-\nu} f = \mathfrak{D}^0 f = f?$$

1.2 Funções Especiais do Cálculo Fracionário

Dedicamos esta seção para relembrarmos de algumas funções e algumas de suas propriedades que devido a sua importância no contexto do estudo do cálculo fracionário, merecem o crédito de serem nomeadas segundo a nomenclatura acima.

1.2.1 Funções Generalizadas: Distribuição δ -Dirac

Começamos relembrando que apesar da nomenclatura “funções generalizadas”, o termo a que nos referimos não trata verdadeiramente de funções no sentido usual, mas sim de uma classe de funcionais lineares contínuos agindo em um certo espaço de funções “suficientemente bem comportadas”. Então para introduzirmos formalmente estes conceitos [3, 10, 18, 52, 58], começamos com a recordação de algumas definições.

Definição 1.1 *Seja $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. O suporte de $\varphi(x)$ em Ω é o fecho do subconjunto $A \subset \Omega$ para o qual $\varphi(x) \neq 0$. Nessas condições, $\varphi(x)$ é dita com suporte compacto em $A \subset \Omega$ se*

$$\varphi(x) = 0, \quad x \notin A.$$

Note que, se $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$, então como $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é contínua, segue que ela é limitada em Ω e, conseqüentemente, $\varphi(x) < \infty$, $x \in A$.

Definição 1.2 *Denotaremos por $\mathbf{D}(\Omega)$ o conjunto de todas as funções suaves e com suporte compacto em Ω , i.e.,*

$$\mathbf{D}(\Omega) := \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \varphi(x) = 0, \quad x \notin \Omega\}.$$

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Os elementos de $\mathbf{D}(\Omega)$ são usualmente denominados de funções teste e, neste trabalho, adotaremos esta mesma nomenclatura.

Um exemplo de função teste é a função

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} c_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right), & |x| < \epsilon, \\ 0, & |x| > \epsilon. \end{cases} \quad (1.3)$$

É fácil mostrar que $\mathbf{D}(\Omega)$ é fechado com respeito a (i) operação de soma e (ii) multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} (i) \quad & \varphi, \phi \in \mathbf{D}(\Omega) \Rightarrow (\varphi + \phi) \in \mathbf{D}(\Omega), \\ (ii) \quad & \varphi \in \mathbf{D}(\Omega) \text{ e } \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \Rightarrow \lambda\varphi \in \mathbf{D}(\Omega) \end{aligned}$$

e que estas operações satisfazem os axiomas canônicos sobre espaço linear, logo $\mathbf{D}(\Omega)$ é um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{K}$.

Definição 1.3 Dizemos que $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$, se dada uma sequência de funções teste $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, existir algum $A \subset \Omega$ limitado, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (i) \quad & \varphi_n(x) = 0, \quad x \notin A, \\ (ii) \quad & \varphi_n^{(k)}(x) \rightarrow \varphi^{(k)}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

sendo que em (ii) a convergência exigida é a uniforme.

Definição 1.4 Um funcional linear contínuo sobre o espaço $\mathbf{D}(\Omega)$ é uma aplicação $\mathfrak{f} : \mathbf{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ um número real $\mathfrak{f}[\varphi] \equiv (\mathfrak{f}, \varphi)$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \mathfrak{f} \text{ é linear;} \\ (ii) \quad & \mathfrak{f} \text{ é contínuo.} \end{aligned}$$

Especificamente, a condição (i) da **Definição 1.4**, significa que dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $\varphi, \phi \in \mathbf{D}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} (\mathfrak{f}, \alpha\varphi + \beta\phi) &= (\mathfrak{f}, \alpha\varphi) + (\mathfrak{f}, \beta\phi) \\ &= \alpha(\mathfrak{f}, \varphi) + \beta(\mathfrak{f}, \phi). \end{aligned}$$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Já a condição (ii) da mesma definição, significa que

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{f}, \varphi_n) \rightarrow (\mathfrak{f}, \varphi).$$

O espaço de todos os funcionais lineares sobre $\mathbf{D}(\Omega)$ também é um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e pode ser mostrado que ele é o dual de $\mathbf{D}(\Omega)$ e, portanto, será denotado por $\mathbf{D}^*(\Omega)$ e os elementos deste novo espaço linear são usualmente chamados de *funções generalizadas* [18, 58].

Dentro de $\mathbf{D}^*(\Omega)$, podemos categorizar dois tipos de *funções generalizadas*: as regulares e as singulares.

Definição 1.5 (Funções Generalizadas Regulares) *Seja $f(x) \in L_{1,loc}(\Omega)$ e considere o funcional linear e contínuo $\mathfrak{f} \in \mathbf{D}^*(\Omega)$ definido por*

$$\mathfrak{f}[\varphi(x)] = (\mathfrak{f}, \varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx, \quad \varphi(x) \in \mathbf{D}(\Omega). \quad (1.4)$$

Então $\mathfrak{f}$ é dito uma função generalizada regular. E mais, toda função generalizada de $\mathbf{D}^(\Omega)$ que puder ser definida em termos de uma função f localmente integrável segundo a fórmula Eq.(1.4) é dita regular.*

Note que a linearidade de $\mathfrak{f}$ advém da linearidade da integral e a continuidade de $\mathfrak{f}$ advém do fato de que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente sendo que cada φ_n tem suporte compacto em Ω . Observe também que cada $\mathfrak{f} \in \mathbf{D}^*(\Omega)$ é identificada univocamente com uma $f \in L_{1,loc}(\Omega)$.

Observação 1.1 *Aproveitamos para chamar atenção a respeito da notação utilizada: devido ao fato de que para cada função generalizada regular $\mathfrak{f}$ corresponde uma $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ (e viceversa), muitos livros que tratam sobre a teoria de funções generalizadas (distribuições), e.g., os clássicos [18, 52, 58], não utilizam como apresentado neste trabalho, duas nomenclaturas $\mathfrak{f} \in \mathbf{D}^*(\Omega)$ e $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ para distinguir uma função generalizada regular $\mathfrak{f}$ da função f que define o modo como $\mathfrak{f}$ age sobre $\varphi(x)$ por meio da integral de $f(x)\varphi(x)$. Portanto, é comum na nomenclatura tradicional reescrever*

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

$\mathfrak{f}[\varphi] \equiv (\mathfrak{f}, \varphi)$ por (f, φ) ou ainda $(f(x), \varphi(x))$ (para explicitar a variável independente) e simplesmente usar o símbolo $f = f(x)$ para denotar tanto a função generalizada quanto a função localmente integrável associada, distinguindo-as formalmente segundo o contexto e tendo sempre em mente que não há sentido algum em avaliar uma função generalizada em um dado ponto x .

Definição 1.6 (Funções Generalizadas Singulares) *As demais funções generalizadas de $\mathbf{D}^*(\Omega)$ que não são regulares, são ditas singulares.*

Note que do modo como foi definida uma função generalizada singular, é impossível identificá-la com uma função f localmente integrável e o exemplo clássico que podemos mencionar é a chamada *função generalizada δ -Dirac*, ou ainda, *distribuição δ -Dirac*, $\delta = \delta(x)$, cuja principal propriedade é que

$$\delta[\varphi(x)] = (\delta(x), \varphi(x)) = \varphi(0), \quad (1.5)$$

ou mais geralmente, $\delta_a = \delta(x - a)$

$$\begin{aligned} \delta_a[\varphi(x)] &= (\delta(x - a), \varphi(x)) \\ &= \varphi(a), \quad a \in \Omega. \end{aligned}$$

De fato, suponha que exista uma função $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ tal que para todo $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ tenhamos

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, \mathbf{d}x = \varphi(0).$$

Em particular, tomando como função teste a $\varphi_{\epsilon}(x)$ definida na Eq.(1.3), temos

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi_{\epsilon}(x) \, \mathbf{d}x = \int_{\Omega} f(x) c_{\epsilon} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - x^2}\right) \, \mathbf{d}x \quad (1.6)$$

$$= \varphi_{\epsilon}(0) = c_{\epsilon} e^{-1}. \quad (1.7)$$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

No entanto, se $\epsilon \rightarrow 0$ então $\varphi_\epsilon(x) \rightarrow 0$ e a integral da Eq.(1.6) converge para zero, o que contradiz o resultado da Eq.(1.7).

Novamente chamando atenção para a nomenclatura, devemos ter em mente que $\delta = \delta(x)$ não é uma função no sentido usual, mas sim um funcional linear contínuo que age em funções testes $\varphi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$ e seguindo a nomenclatura (e a definição da Eq.(1.4)) advinda das funções generalizadas regulares, alguns autores costumam escrever

$$\varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)) = \int_{\Omega} \delta(x) \varphi(x) \, \mathbf{d}x. \quad (1.8)$$

No caso específico de funções generalizadas singulares como a δ -Dirac, em geral, a integral do lado direito da igualdade acima não tem nenhum significado no sentido usual, mas observamos que a Eq.(1.8) pode ter sentido matemático rigoroso introduzindo-se a chamada medida de Dirac “ $\mathbf{d}\delta(x)$ ”, como observado pelo autor em [14].

Para terminarmos esta seção, comentamos sobre a diferenciabilidade e integrabilidade das funções generalizadas. É conhecido que nem todas as funções (ordinárias) são diferenciáveis e, de fato, uma infinidade delas não são nem contínuas, no entanto, de acordo com a definição que daremos de diferenciação de funções generalizadas, veremos que toda $f \in \mathbf{D}^*(\Omega)$ é diferenciável e ainda mais, infinitamente diferenciável.

Seja $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, assim considere o funcional linear $f' \in \mathbf{D}^*(\Omega)$ definido por

$$\begin{aligned} f'[\varphi(x)] &= (f', \varphi) \\ &= (f'(x), \varphi(x)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) \, \mathbf{d}x. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Integrando por partes e lembrando que como $\varphi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$, então $\varphi(x) = 0$ fora do intervalo $\Omega = [a, b]$, daí podemos reescrever a Eq.(1.9) como

$$\begin{aligned} (f'(x), \varphi(x)) &= f(x) \varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) \, \mathbf{d}x \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x) \, \mathbf{d}x \\ &= -(f(x), \varphi'(x)). \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Ou seja, $(f', \varphi) = (f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x))$ e, de modo geral, uma trivial prova por indução nos garante o seguinte resultado

$$f^{(k)}[\varphi(x)] = (f^{(k)}(x), \varphi(x)) = (-1)^k (f(x), \varphi^{(k)}(x)). \quad (1.11)$$

Note que da propriedade Eq.(1.5) da função δ -Dirac e do resultado recém apresentado sobre a diferenciabilidade das funções generalizadas, segue que

$$\begin{aligned} (\delta'(x), \varphi(x)) &= -(\delta(x), \varphi'(x)) = \varphi'(0), \\ (\delta^{(k)}(x), \varphi(x)) &= (-1)^k (\delta(x), \varphi^{(k)}(x)) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0), \end{aligned}$$

onde $\delta^{(k)} = \mathcal{D}^k \delta$.

Agora, vejamos como a integrabilidade das funções generalizadas pode ser definida. Obviamente, motivados pelo **Teorema 1.2** e da propriedade da derivação Eq.(1.11) gostaríamos de ter válido, para $f \in \mathbf{D}^*(\Omega)$, $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ e denotando $f^{(-1)}$ uma primitiva de f , os seguintes resultados

$$\begin{cases} (i) \quad \frac{d}{dx} f^{(-1)} = f, \\ (ii) \quad (f'(x), \varphi(x)) = -(f(x), \varphi'(x)). \end{cases}$$

Ou seja, aplicando ambos os funcionais lineares em cada lado da igualdade (i) numa função teste $\varphi \in \mathbf{D}(\Omega)$ e depois usando o resultado (ii) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{(-1)}[\varphi(x)] &= f[\varphi(x)] \\ \left(\frac{d}{dx} f^{(-1)}(x), \varphi(x) \right) &= (f(x), \varphi(x)) \\ - (f^{(-1)}(x), \varphi'(x)) &= (f(x), \varphi(x)) \\ (f^{(-1)}(x), \varphi'(x)) &= - (f(x), \varphi(x)). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Agora, será que podemos escrever

$$\varphi(x) = \psi'(x) + c\varphi_0(x), \quad (1.13)$$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

com $c \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e de modo que $\psi'(x) \in \mathbf{D}(\Omega) \Rightarrow \psi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$?

Observe que se tivermos a seguinte condição, $\varphi_0(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) \, dx = 1$$

e escrevermos

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \varphi_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \, d\xi, \quad (1.14)$$

então definindo

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^x \left[\varphi(\xi) - \varphi_0(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) \, d\eta \right] d\xi,$$

teremos que $\psi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$, pois claramente $\psi(x)$ é infinitamente diferenciável e terá suporte compacto em Ω , uma vez que φ e φ_0 têm suporte compacto em Ω . Comparando-se as Eq.(1.13) e Eq.(1.14) conclui-se que

$$c = (1, \varphi_0(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \, d\xi.$$

Desta investigação, podemos concluir que

$$\begin{aligned} (f^{(-1)}(x), \varphi(x)) &= (f^{(-1)}(x), \psi'(x) + c\varphi_0(x)) \\ &= (f^{(-1)}(x), \psi'(x)) + (f^{(-1)}(x), c\varphi_0(x)) \\ &= -\left(\frac{d}{dx} f^{(-1)}(x), \psi(x)\right) + (1, \varphi_0(x)) c_0 \\ &= -(f(x), \psi(x)) + (c_0, \varphi(x)), \end{aligned}$$

onde $c_0 = (f^{(-1)}, \varphi_0)$.

1.2.2 A Função Gama $\Gamma(z)$

Nesta seção apresentamos a função gama e algumas de suas propriedades e sua relação com outras funções especiais.

A *função gama* é definida em termos da seguinte integral, conhecida como *integral*

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

de Euler de segunda espécie,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} \mathbf{d}x, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \quad (1.15)$$

onde $x^{z-1} = e^{(z-1)\ln x}$, sendo que a integral da Eq.(1.15) converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$ e, portanto, $\Gamma(z)$ é contínua para todo $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Observe que se integrarmos a Eq.(1.15) por partes, nós obtemos uma das principais propriedades da função gama, a saber

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} \mathbf{d}x \\ &= \left[-e^{-x} \frac{x^z}{z} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} x^z e^{-x} \mathbf{d}x \\ &= \frac{1}{z} \Gamma(z+1), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1). \quad (1.16)$$

Uma prova simples por indução, nos permite verificar que a função gama é uma extensão para as variáveis contínuas do fatorial $n!$ valendo a seguinte relação quando $z = n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (1.17)$$

De fato, para $z = 1$, temos

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \mathbf{d}x = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1.$$

Agora usando uma hipótese indutiva, supomos a validade da Eq.(1.17) para $z = n$

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

e vamos prová-la para $z = n + 1$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n+2) &= \int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} \mathbf{d}x \\
 &= \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^\infty + (n+1) \int_0^\infty x^n e^{-x} \mathbf{d}x \\
 &= (n+1) \Gamma(n+1) \\
 &= (n+1) n! \\
 &= (n+1)!.
 \end{aligned}$$

A fórmula da Eq.(1.16) é conhecida como *fórmula da redução* e a partir desta relação, podemos estender o domínio de definição da função gama para o semiplano $\operatorname{Re}(z) \leq 0$ do seguinte modo

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \operatorname{Re}(z) > -n \in \mathbb{N}_0, \quad z \notin \mathbb{Z}_0^-, \quad (1.18)$$

onde $(z)_n$ denota o símbolo de *Pochhammer* (ascendente), definido para $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$ como

$$(z)_0 = 1, \quad (1.19)$$

$$(z)_n = z(z+1) \cdots (z+n-1). \quad (1.20)$$

Por completude, também mencionamos o símbolo de *Pochhammer* (descendente), definido para $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0$ como

$$(z)_0 = 1, \quad (1.21)$$

$$(z)_{-n} = z(z-1) \cdots (z-n+1). \quad (1.22)$$

Inclusive, usando as definições em Eq.(1.18) - Eq.(1.22) é possível verificar as iden-

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

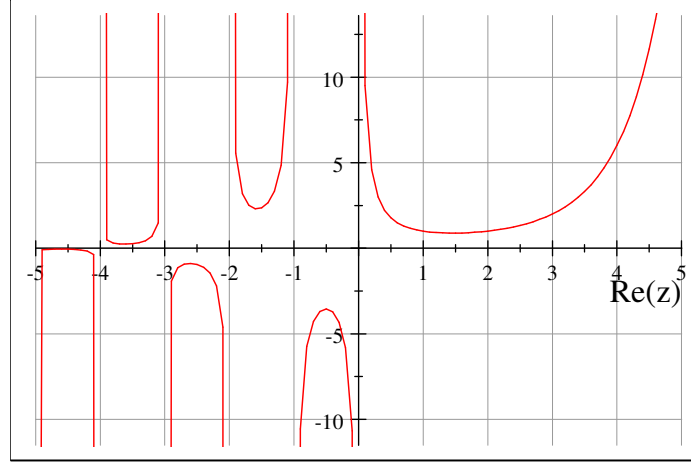


Figura 1.1: Gráfico da função gama ao longo do eixo real com descontinuidades (infinitas) nos valores de $z \in \mathbb{Z}_0^-$.

tidades a seguir[25, 35]

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}, \quad (1.23)$$

$$(z)_{-n} = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)} \quad (1.24)$$

e

$$(-z)_{-n} = (-1)^n (z)_n, \quad (1.25)$$

$$(-z)_n = (-1)^n (z)_{-n}. \quad (1.26)$$

Note que a Eq.(1.18) claramente nos mostra que se $z \in \mathbb{Z}_0^-$, então $\Gamma(z) = \pm\infty$, i.e., a função gama apresenta polos simples nestes pontos. Entretanto, a razão entre funções gama avaliadas em inteiros negativos resulta em valores finitos [35]. De fato,

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m - n = p > 0$, então usando a Eq.(1.23) temos

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-m)} &= \frac{\Gamma(-m+p)}{\Gamma(-m)} = (-m)_p \\
 &= -m(-m+1) \cdots (-m+p-1) \\
 &= -m(-m+1) \cdots (-n-1) \\
 &= (-1)^p [m(m-1) \cdots (n+1)] \\
 &= (-1)^{m-n} \frac{m!}{n!},
 \end{aligned}$$

e, portanto, deste último resultado⁶

$$\frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(-n)} = (-1)^{m-n} \frac{n!}{m!}. \quad (1.27)$$

Outras fórmulas conhecidas e que valem serem mencionadas para uso futuro são a famosa *fórmula de reflexão*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \quad (1.28)$$

e a identidade, conhecida pelo nome de *fórmula de duplicação*

$$\frac{\Gamma(\frac{3}{2} + k)}{\Gamma(2k + 2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k+1}\Gamma(k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.29)$$

Recordamos agora a *função beta* definida em termos da integral de Euler de primeira espécie

$$B(p, q) = \int_0^1 z^{p-1} (1-z)^{q-1} \mathbf{d}z = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q \notin \mathbb{Z}_0^- \quad (1.30)$$

e também da chamada *função gama incompleta* γ^* definida em termos da série de potências

$$\gamma^*(\nu, z) = e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\nu + k + 1)}, \quad (1.31)$$

que é inteira com respeito aos parâmetros ν e z . No caso em que $\operatorname{Re}(z) > 0$, então

⁶Note que $(-1)^{n-m} = (-1)^{m-n}$.

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

$\gamma^*(\nu, z)$ possui a representação integral

$$\gamma^*(\nu, z) = \frac{1}{\Gamma(\nu) z^\nu} \int_0^z t^{\nu-1} e^{-t} dt. \quad (1.32)$$

Por fim, mencionamos que é possível descrever os *coeficientes binomiais generalizados reais*⁷ em termos da função gama

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \Gamma(\beta + 1)}, \quad (1.33)$$

válida para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (arbitrários) com a restrição de que $\alpha \neq -1, -2, \dots$, se $\beta \notin \mathbb{Z}$. Observe que $\beta > \alpha$ implica que

$$\binom{\alpha}{\beta} = 0$$

e que o caso particular, $\alpha = m$ e $\beta = n$, $m, n \in \mathbb{N}$ se reduz ao caso clássico bem conhecido

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!}. \quad (1.34)$$

1.2.3 Funções de Mittag-Leffler

Da mesma forma que a função exponencial e^x desempenha um papel de destaque no cálculo clássico de ordem inteira, as funções de Mittag-Leffler desempenham um papel destacado análogo no cálculo de ordem arbitrária. O que queremos denotar por esta afirmação é que assim como se faz necessário um bom entendimento da exponencial para o estudo e aplicações do cálculo diferencial e integral clássicos o mesmo pode ser dito para aqueles que desejam se aventurar pelo cálculo fracionário. De fato, não é incomum ao resolvermos equações diferenciais de ordem fracionária, obtermos soluções que se não diretamente expressas em termos de uma função de Mittag-Leffler, então ao menos se relacionam com ela através de alguma identidade. Nesta seção dedicamos algumas palavras para introduzir as funções de Mittag-Leffler e algumas de suas propriedades.

⁷Também é válida para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Definição 1.7 *Sejam $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $z \in \mathbb{C}$. A função E_α definida pela série*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.35)$$

é chamada de função de Mittag-Leffler de ordem α , as vezes também denotada por função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Esta função foi introduzida e suas propriedades básicas estudadas pelo matemático sueco Gösta Mittag-Leffler (1846 - 1927). Tomando $\alpha = 1$, segue imediatamente a identidade

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z. \quad (1.36)$$

As seguintes funções, apesar de não terem sido formalmente apresentadas por Mittag-Leffler também recebem o seu nome por serem generalizações diretas da função da Eq.(1.35):

Definição 1.8 *Sejam $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\gamma > 0$ e $z, \beta \in \mathbb{C}$. As funções definidas pelas séries*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.37)$$

e

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (1.38)$$

são chamadas de funções de Mittag-Leffler de dois e três parâmetros, respectivamente.

As funções de Mittag-Leffler de um, dois e três parâmetros são funções inteiras em $\mathbb{C}$. De fato, podemos provar que os seus respectivos raios de convergência são infinitos, aplicando o teste da razão para a séries $\sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$, onde u_k são os coeficientes das séries em Eq.(1.35), Eq.(1.37) e Eq.(1.38), respectivamente.

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Por, exemplo, tomando $u_k = \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| &= \left| \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{z^k} \right| \\ &= \left| \frac{z \Gamma(\alpha k + 1)}{\Gamma(\alpha k + \alpha + 1)} \right| = |z| \left| \frac{1}{(\alpha k + 1)_\alpha} \right|, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} |z| \left| \frac{1}{(\alpha k + 1)_\alpha} \right| = |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(\alpha k + 1)_\alpha} \right| = 0, \forall z \in \mathbb{C}$$

e, portanto, a série para $E_\alpha(z)$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$. As demonstrações para $E_{\alpha,\beta}(z)$ e $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z)$ são feitas de modo similar.

Nós vimos que a exponencial é um caso particular da função $E_\alpha(z)$ quando escolhemos $\alpha = 1$. Outras identidades entre as funções de Mittag-Leffler e as funções trigonométricas clássicas também são trivialmente obtidas como mostrado a seguir

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \quad (1.39)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{z(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}, \quad (1.40)$$

$$E_{2,1}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z), \quad (1.41)$$

$$E_{2,2}(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{z(2k+1)!} = \frac{\sin(z)}{z}. \quad (1.42)$$

1.2.4 Funções Hipergeométricas

Nesta seção relembremos as definições das funções hipergeométricas e algumas das suas propriedades.

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

Dada uma equação diferencial, ordinária, linear, homogênea e de segunda ordem

$$\frac{\mathbf{d}^2 u(z)}{\mathbf{d} z^2} + p(z) \frac{\mathbf{d} u(z)}{\mathbf{d} z} + q(z) u(z) = 0, \quad (1.43)$$

com $p(z), q(z) \in \mathbb{C}$ para a qual se impõe que ela admita três pontos singulares regulares, incluindo um no infinito, então é sempre possível, através de uma série de transformações de variáveis, reduzi-la à forma [7]

$$z(1-z) \frac{\mathbf{d}^2 u(z)}{\mathbf{d} z^2} + [c - (a+b+1)] \frac{\mathbf{d} u(z)}{\mathbf{d} z} - abu(z) = 0, \quad (1.44)$$

que é a chamada *equação hipergeométrica*.

Observando que a equação hipergeométrica possui singularidades regulares nos pontos $z = 0$, $z = 1$ e $z = \infty$, podemos obter uma solução nas proximidades da origem, utilizando-se o método de Frobenius [7, 8], a saber:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= {}_2F_1(a, b; c; z) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \end{aligned} \quad (1.45)$$

conhecida como *função hipergeométrica de Gauss*. Ela é absolutamente convergente⁸ no disco $|z| < 1$ e com $a, b \in \mathbb{C}$; $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ e para os demais valores de z a função hipergeométrica é definida pela continuação analítica da série, sendo um dos métodos para tal extensão obtida pela representação integral

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} \mathbf{d} t, \quad (1.46)$$

com $0 < \operatorname{Re}(b) < \operatorname{Re}(c)$ e $|\arg(1-z)| < \pi$. A condição no argumento de $(1-z)$ significa que a função é considerada no plano complexo com um corte ao longo de $(1, \infty)$

⁸A série também é condicionalmente convergente para $|z| = 1$ quando $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ ou $|z| = 1$ ($z \neq 1$) se $-1 < \operatorname{Re}(c-a-b) \leq 0$.

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

e que o ramo principal escolhido é $(1 - zt)^{-a} = e^{-a \ln(1-zt)}$, para o qual $\ln(1 - zt) \in \mathbb{R}$ para $z \in [0, 1]$.

Uma segunda solução linearmente independente a $u_1(z)$ quando $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ é dada por

$$u_2(z) = z^{1-c} [{}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; z)].$$

Dentre as várias propriedades encontradas na literatura [7, 8, 25] para a função hipergeométrica, listamos algumas:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= {}_2F_1(b, a; c; z), \\ {}_2F_1(a, b; b; z) &= (1 - z)^{-a}, \\ {}_2F_1(a, b; c; 0) &= {}_2F_1(0, b; c; z) = 1, \\ {}_2F_1(a, b; b; 1) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a) \Gamma(c - b)}, \quad \operatorname{Re}[c - a - b] > 0, \\ \frac{d^k}{dz^k} [{}_2F_1(a, b; c; z)] &= \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k} [{}_2F_1(a + k, b + k; c + k; z)]. \end{aligned}$$

Função Hipergeométrica Confluente

A chamada *função hipergeométrica confluyente* ${}_1F_1$ (ou *função de Kummer*) é obtida a partir da função hipergeométrica apresentada na equação Eq.(1.45) tomando-se o seguinte limite

$${}_1F_1(a; c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[{}_2F_1(a, b; c; \frac{z}{b}) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < \infty \quad (1.47)$$

e assim como a função hipergeométrica, também possui uma representação integral:

$${}_1F_1(a; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c - a)} \int_0^1 t^{a-1} (1 - t)^{c-a-1} e^{zt} dt,$$

para $0 < \operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(c)$.

A função hipergeométrica confluyente, Eq.(1.47), é solução da seguinte equação dife-

CAPÍTULO 1. PRELIMINARES

rencial

$$z \frac{\mathbf{d}^2 u(z)}{\mathbf{d} z^2} + (c - z) \frac{\mathbf{d} u(z)}{\mathbf{d} z} - au(z) = 0, \quad (1.48)$$

chamada de *equação hipergeométrica confluyente*.

Observamos que as funções de Bessel são casos particulares das funções hipergeométricas confluentes⁹ e são dadas por

$${}_1F_1 \left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu + 1; 2iz \right) = \Gamma(1 + \nu) e^{iz} \left(\frac{z}{2} \right)^{-\nu} J_\nu(z),$$

onde $J_\nu(z)$ é a função de Bessel de primeira espécie e de ordem ν , a qual sabemos ter a seguinte representação em série de Frobenius:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+2k}}{\Gamma(\nu + k + 1) k!}.$$

⁹Na verdade as funções de Bessel também podem ser escritas em termos das funções hipergeométricas segundo a relação $J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2} \right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1 \left(\nu + 1; -\frac{z^2}{4} \right)$ [25].

1.2. FUNÇÕES ESPECIAIS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

Capítulo 2

Introdução ao Cálculo de Ordem Fracionária

Neste capítulo apresentamos¹ as diversas definições dos operadores de integração e diferenciação fracionários e para cada caso enunciamos propriedades, proposições, lemas e teoremas que quando não demonstrados explicitamente, serão indicados pelas devidas referências bibliográficas.

Lembremo-nos que o cálculo diferencial é um ramo do cálculo e é a Matemática que usamos para lidar com problemas envolvendo taxas de variação, por exemplo: permite calcular coeficientes angulares de curvas, velocidades e acelerações de objetos em movimento, como e.g.: a localização de corpos celestes usando-se a teoria Newtoniana da gravitação (e a teoria de sistemas dinâmicos), dentre tantas outras aplicações numa disciplina quantitativa. Desenvolvido por Newton e Leibniz² no final do século XVII, a formalização desta nova área serviu de catalizador para que outros matemáticos investigassem a abrangente aplicabilidade desta nova ferramenta matemática.

O primeiro texto de cálculo formalmente publicado, *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes*, foi escrito pelo matemático francês Guillaume François Antoine (1661-1704), também conhecido como o marquês de L'Hospital [16].

¹Conteúdos desta seção faz parte de um trabalho [44] a ser submetido para publicação.

²Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) rivais na *invenção* do cálculo desenvolveram, de forma independente, os conceitos e introduziram as notações usadas atualmente.

É a ele a quem se deve uma das primeiras indagações sobre o significado da derivada de ordem³ n : $\frac{d^n y}{dx^n}$, segundo a notação de Leibniz, quando n fosse uma fração e não um inteiro positivo. Neste mesmo período, numa carta de Leibniz para Johan Bernoulli (1667-1748), foi mencionado pela primeira vez o termo derivada de *ordem arbitrária* e alguns anos mais tarde, em correspondência com John Wallis (1616-1703), onde discutiam sobre a representação de $\frac{1}{2}\pi$ por produtos infinitos, Leibniz afirmou que este resultado poderia ter sido obtido por meio do cálculo diferencial e usou a notação $d^{\frac{1}{2}}y$ para designar a derivada de ordem $\frac{1}{2}$.

Portanto, como mostra a própria história do Cálculo, desde debates iniciais, o tema sobre as derivadas de ordem não inteira chamou a atenção de vários matemáticos famosos tais como, Euler (1707 - 1783), Laplace (1749 - 1827), Fourier (1768 - 1830), Abel (1802 - 1829), Liouville (1809 - 1882), Riemann (1826 - 1866) e Laurent (1813 - 1854), dentre outros. Foi somente a partir de 1884 que a teoria dos operadores, um dos ramos da análise funcional, atingiu um nível suficiente para ser usado como ponto de partida para matemáticos modernos. Desde então, a teoria incorporou a notação $\mathcal{D}^\nu$, donde ν pode ser um número real ou complexo arbitrário e, nesse sentido, talvez o nome *cálculo fracionário* não seja mais apropriado, a não ser por motivos de tradição histórica. Neste trabalho, como já mencionado, usaremos indiscriminadamente, o nome clássico *cálculo fracionário* e suas variantes.

Alguns matemáticos, como Sonin, Letnikov e Laurent, consideraram uma abordagem através dos operadores diferencial e integral de ordens fracionárias, os quais se baseiam essencialmente na famosa *fórmula integral de Cauchy-Goursat*. Demonstraram os benefícios e a versatilidade do cálculo fracionário na obtenção de soluções particulares de famílias de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e equações diferenciais parciais (EDPs) homogêneas e não homogêneas, dentre elas uma célebre equação que aparece em inúmeros problemas de Física-Matemática, a *equação de Bessel* Eq.(1).

Além das teorias das equações diferenciais, das equações integrais e das funções especiais da Física-Matemática, algumas das áreas de aplicação moderna do cálculo fracionário incluem dinâmica de fluidos [55], teoria de grupos [21], mecânica quântica

³Em 1695, L'Hospital escreveu uma carta a Leibniz perguntando-lhe “e se $n = \frac{1}{2}$?” e a resposta que recebeu do mesmo foi “Este é um aparente paradoxo no qual, um dia, consequências úteis emergirão”.

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

[21], física nuclear [12, 21], probabilidade e estatística [12, 55], processamento de sinais [12, 51], entre outros.

Nas seções a seguir, introduzimos as definições e algumas propriedades das integrais e derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov e por último, apresentamos a tentativa de unificar os operadores de integração e diferenciação (segundo Riemann-Liouville) num único operador de integrodiferenciação referenciando, logo em seguida, esta abordagem com a formulação proposta por Marchaud [30]. Em cada caso, discutimos as condições para que as definições façam sentido e a classe de funções que podemos operar. A nossa meta nesta primeira parte é poder verificar se há algum tipo de relação entre as diferentes definições, ou seja, queremos responder as seguintes perguntas: será que existe alguma equivalência entre elas? Se sim, como podemos obter uma definição a partir da outra?

2.1 Integral e Derivada de Riemann-Liouville

Devido a razões históricas, é interessante começar a nossa investigação pelas definições de integrais fracionárias, atualmente conhecidas como integrais de Riemann-Liouville. A partir delas, definimos posteriormente as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville.

Definição 2.1 *Seja $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo finito. As expressões para $\mathcal{I}_{a+}^\nu f$ e $\mathcal{I}_{b-}^\nu f$ conforme as identidades:*

$$(\mathcal{I}_{a+}^\nu f)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) \, dt, \quad (2.1)$$

com $x > a$, $\operatorname{Re}(\nu) > 0$ e

$$(\mathcal{I}_{b-}^\nu f)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^b (t-x)^{\nu-1} f(t) \, dt, \quad (2.2)$$

com $x < b$, $\operatorname{Re}(\nu) > 0$, onde $\Gamma(\nu)$ é a função gama, definem as integrais fracionárias de Riemann-Liouville (IFRL) de ordem $\nu \in \mathbb{C}$ num intervalo real finito. As integrais em Eq.(2.1) e Eq.(2.2) são chamadas de integrais fracionárias à esquerda e à direita, respectivamente.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

Alguns autores (e.g. [32])⁴ apresentam uma definição um pouco mais particular do que as versões acima, denotando por IFRL o caso em que $\mathbb{R} \ni x > 0$:

$$(\mathcal{I}^\nu f)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) \, dt, \quad (2.3)$$

com $\operatorname{Re}(\nu) > 0$.

A primeira consideração que fazemos a respeito dessas definições é que se $\nu = n \in \mathbb{N}$, então as definições Eq.(2.1), Eq.(2.2) e Eq.(2.3) coincidem com as integrais iteradas de ordem n :

$$(\mathcal{I}_{a+}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) \, dt, \quad (2.4a)$$

$$(\mathcal{I}_{b-}^n f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) \, dt. \quad (2.4b)$$

Para convencer o leitor disso, mostraremos como obter Eq.(2.4a) a partir da integral iterada de ordem $n \in \mathbb{N}$ e depois fazendo $n \rightarrow \nu \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\nu) > 0$.

Suponha $f(x)$ contínua em $\mathbb{R}$. Então, pelo teorema fundamental do cálculo

$$\frac{d}{dx} [\mathcal{I}_{a+} f(x)] = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) \, dt = f(x),$$

onde $\mathcal{I}_{a+} f(a) = \int_a^a f(t) \, dt = 0$.

Usando uma hipótese indutiva, suponha a fórmula válida para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, provaremos então a validade para $n+1 \in \mathbb{N}$ usando a regra da cadeia. Para isso, considere a função auxiliar

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{n!} \int_a^{x_1} (x_2 - t)^n f(t) \, dt$$

⁴Este autor, junto com [21], distinguem a nomenclatura, baseando-se nos limites inferior e superior das integrais. Segundo suas nomenclaturas, Eq.(2.1) e Eq.(2.2) são chamadas de versão segundo Riemann; e quando $a = -\infty$, denotam por versão segundo Liouville.

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

com $x_2 \in \mathbb{R}$ fixo. Então,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2) = \frac{1}{n!} (x_2 - x_1)^n f(x_1). \quad (2.5)$$

Por outro lado, derivando agora com respeito a variável x_2 , e mantendo $x_1 \in \mathbb{R}$ fixo temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{n!} \int_a^{x_1} (x_2 - t)^n f(t) \, dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} [(x_2 - t)^n f(t)] \, dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^{x_1} n(x_2 - t)^{n-1} f(t) \, dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^{x_1} (x_2 - t)^{n-1} f(t) \, dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, segue pelas Eq.(2.5) e Eq.(2.6)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\mathcal{I}_{a+}^{(n+1)} f(x)] &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, x_2) \right]_{x_1=x=x_2} \\ \mathcal{I}_{a+}^n f(x) &= \frac{1}{n!} (x - x)^n f(x) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) \, dt \\ &= 0 + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) \, dt. \end{aligned}$$

Além disso, $\mathcal{I}_{a+}^{(n+1)} f(a) = \frac{1}{n!} \int_a^a (x - t)^n f(t) \, dt = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^n f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) \, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t) \, dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

é a n -ésima antiderivada de f e $\mathcal{I}_{a+}^k f(a) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Claramente, a expressão Eq.(2.7) é válida mesmo no caso em que $n \rightarrow \nu \in \mathbb{C}$, com $\operatorname{Re}(\nu) > 0$, desde que a integral convirja.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

A segunda consideração é que as definições Eq.(2.1) e Eq.(2.2) podem ser obtidas através de abordagens distintas. Citamos a seguir, algumas delas.

Por exemplo, partindo-se da fórmula integral de Cauchy⁵. Sabemos que para uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ analítica em uma região aberta Ω do plano complexo e $A \subset \Omega$ uma região aberta tal que C seja uma curva suave fechada delimitando a fronteira de A , então

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta \quad (2.8)$$

para $z \in A$. Usando a Eq.(2.8), deriva-se a expressão para a fórmula de Cauchy para derivadas de ordem $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{D}^{(n)} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (2.9)$$

Note que há uma certa semelhança entre a expressão em Eq.(2.9) com as definições apresentadas em Eq.(2.1), Eq.(2.2) e Eq.(2.3).

De fato, se ao invés de um natural n considerarmos um número complexo η , então no lugar de $n!$ na Eq.(2.9) podemos usar a representação via função gama $\Gamma(\eta + 1)$. Entretanto, para $\eta \notin \mathbb{Z}$, o ponto $z \in \mathbb{C}$ na Eq.(2.9) torna-se uma ramificação e não mais um simples polo de modo que não podemos mais usar uma curva C simples fechada ao redor de $z \in \mathbb{C}$. O procedimento padrão nesse caso é fazer um “corte” ao longo do eixo real estendendo-se no semi-intervalo $(-\infty, z)$ (Figura 2.1).

Dai, consideramos o contorno orientado no sentido anti-horário formado pelas retas L_1 e L_2 e a circunferência γ centrada em z e a integral em Eq.(2.9) fica reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\eta)} f(z) &= \frac{\Gamma(\eta + 1)}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma} (\zeta - z)^{-\eta-1} f(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad + \int_{L_1} (\zeta - z)^{-\eta-1} f(\zeta) d\zeta \\ &\quad \left. + \int_{L_2} (\zeta - z)^{-\eta-1} f(\zeta) d\zeta \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

⁵O artigo *On differentiation with arbitrary index*, escrito por N. Ya. Sonin em 1869 foi pioneiro no sentido de partir da fórmula integral de Cauchy para chegar na definição que hoje chamamos de Riemann-Liouville [32].

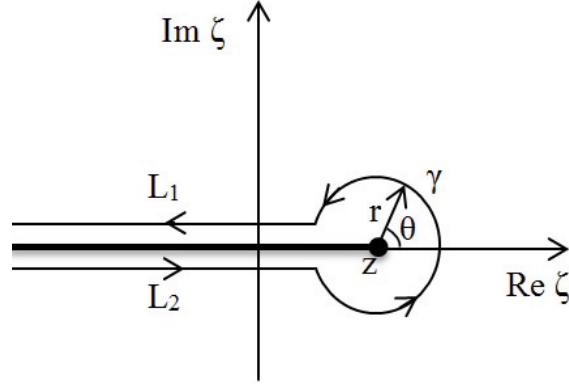


Figura 2.1: Contorno de Hankel para evitar os pontos de ramificação partindo de z .

Admitindo que z esteja sobre o semieixo real positivo, i.e., $z = x > 0$, então sobre γ , temos

$$(\zeta - x)^{-\eta-1} = e^{(-\eta-1)(\ln|\zeta-x|+i\theta)}.$$

Sobre L_1 , $\theta = \pi$, daí

$$(\zeta - x)^{-\eta-1} = e^{(-\eta-1)(\ln|\zeta-x|+i\pi)} = e^{(-\eta-1)[\ln(x-\zeta)+i\pi]}$$

e sobre L_2 , $\theta = -\pi$, donde

$$(\zeta - x)^{-\eta-1} = e^{(-\eta-1)(\ln|\zeta-x|-i\pi)} = e^{(-\eta-1)[\ln(x-\zeta)-i\pi]}.$$

Assim, se $\text{Re}(\eta) < 0$, a Eq.(2.10) fica⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\eta)} f(z) &= \frac{\Gamma(\eta+1)}{2\pi i} \left\{ \int_{\gamma} (\zeta - x)^{-\eta-1} f(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad + e^{-i(\eta+1)\pi} \int_{x-r}^c (x-t)^{-\eta-1} f(t) dt \\ &\quad \left. + e^{i(\eta+1)\pi} \int_c^{x-r} (x-t)^{-\eta-1} f(t) dt \right\}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

⁶Ao longo de L_1 a variável x percorre o caminho de $x-r$ até $c \rightarrow -\infty$. Ao longo de L_2 a variável x percorre o caminho de $c \rightarrow -\infty$ até $x-r$.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

onde $t = \operatorname{Re}(\zeta)$. No entanto,

$$\int_{\gamma} (\zeta - x)^{-\eta-1} f(\zeta) d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} r^{-\eta-1} e^{-i(\eta+1)\theta} f(x + re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta$$

e, como

$$\int_{\gamma} (\zeta - x)^{-\eta-1} f(\zeta) d\zeta \leq r^{-\operatorname{Re}(\eta)} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x + re^{i\theta})| d\theta, \quad (2.12)$$

então quando $r \rightarrow 0$, a expressão para $\mathcal{D}^{(\eta)} f(z)$ na Eq.(2.11) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{(\eta)} f(z) &= \frac{\Gamma(\eta+1)}{2\pi i} \left\{ [e^{i(\eta+1)\pi} - e^{-i(\eta+1)\pi}] \int_c^x (x-t)^{-\eta-1} f(t) dt \right\} \\ &= \frac{\Gamma(\eta+1)}{2\pi i} \{2i \sin[(\eta+1)\pi]\} \int_c^x (x-t)^{-\eta-1} f(t) dt \\ &= \frac{\Gamma(\eta+1) \sin[(\eta+1)\pi]}{\pi} \int_c^x (x-t)^{-\eta-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_c^x (x-t)^{-\eta-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\eta) < 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

ou ainda, chamando $-\eta = \nu \Rightarrow \operatorname{Re}(\nu) > 0$ a expressão em Eq.(2.13) torna-se a própria definição da IFRL apresentada pela Eq.(2.1):

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0.$$

Observamos ainda uma outra abordagem para as IFRL. Em homenagem aos autores de [18], as funções do tipo

$$\phi_{\lambda}(x) := \begin{cases} \frac{x^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

com $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ são usualmente denotadas funções de Gelf'and-Shilov. Assim, dada uma $f(x)$ suficientemente bem comportada e causal⁷ para $x > a$ podemos considerar o

⁷Isto significa que $f(x) = 0$ para $x \leq a$.

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

produto de convolução (entre funções)

$$\begin{aligned} f(x) * \phi_\lambda(x) &= \int_a^x \frac{(x-t)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x (x-t)^{\lambda-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

e a expressão obtida nada mais é do que $(\mathcal{I}_{a+}^\lambda f)(x)$.

Vejamos agora as definições para as *derivadas fracionárias de Riemann-Liouville* (DFRL) de ordem $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\nu) \geq 0$, num intervalo real finito.

Definição 2.2 *Seja $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo finito. As expressões $\mathcal{D}_{a+}^\nu f$ e $\mathcal{D}_{b-}^\nu f$:*

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) &\equiv \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} [(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)] = \left(\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1} f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.16)$$

com $x > a$ e

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{b-}^\nu f)(x) &\equiv \mathcal{D}_{b-}^{\mathbf{n}} [(\mathcal{I}_{b-}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)] = \left(-\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{b-}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} \int_x^b (t-x)^{\mathbf{n}-\nu-1} f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.17)$$

com $x < b$, onde $[\operatorname{Re}(\nu)]$ é a parte inteira de $\operatorname{Re}(\nu)$ e $\mathbf{n} = [\operatorname{Re}(\nu)] + 1$, definem as DFRL de ordem $\nu \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\nu) \geq 0$), à esquerda e à direita, respectivamente.

Novamente, observamos que se $\nu = n \in \mathbb{N}$, então as definições Eq.(2.16) e Eq.(2.17) coincidem com as derivadas usuais de ordem inteira:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^n f)(x) &= \left(\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-n} f)(x) \\ &= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (\mathcal{D}_{a+} \mathcal{I}_{a+} f)(x) \\ &= f^{(n)}(x) \end{aligned} \quad (2.18a)$$

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

e analogamente

$$(\mathcal{D}_{b-}^n f)(x) = (-1)^n f^{(n)}(x), \quad (2.19)$$

sendo que no caso em que $\nu = 0$, temos simplesmente o operador de identidade, i.e., $\mathcal{D}_{a+}^0 f = f$ e $\mathcal{D}_{b-}^0 f = f$.

Se esquematizarmos, através de um diagrama de blocos, a ação deste operador diferencial fracionário, temos algo do tipo:

$$f \longrightarrow \boxed{\mathcal{I}^{n-\nu}} \longrightarrow (\mathcal{I}^{n-\nu} f) \longrightarrow \boxed{\mathcal{D}^n} \longrightarrow (\mathcal{D}^n \mathcal{I}^{n-\nu} f) = \mathcal{D}^\nu f \quad (2.20)$$

ou seja, integra-se $\mathbf{n} - \nu$ vezes f segundo o método de IFRL e depois deriva-se (ordinariamente) $\mathbf{n}$ vezes o resultado da integração, i.e., $\mathcal{D}^\nu = \mathcal{D}^{\mathbf{n}} [\mathcal{I}^{n-\nu}]$.

Assim como no caso da IFRL, podemos partir de outras abordagens para chegar nas DFRL. Por exemplo, novamente sob o ponto de vista das funções de Gelf'and-Shilov Eq.(2.14) e seguindo os passos da Eq.(2.15), ao tomarmos $\mathbf{n} = [\operatorname{Re}(\lambda)] + 1$ segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} (f(x) * \phi_{\mathbf{n}-\lambda}(x)) &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \left[\int_a^x \frac{(x-t)^{\mathbf{n}-\lambda-1}}{\Gamma(\mathbf{n}-\lambda)} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\lambda)} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\lambda-1} f(t) dt \\ &= (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\lambda} f)(x) \\ &= (\mathcal{D}_{a+}^\lambda f)(x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde a integral na Eq.(2.21) claramente converge quando $0 < \operatorname{Re}(\lambda) \notin \mathbb{N}$. Já no caso em que $\lambda = \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0$, as funções de Gelf'and-Shilov precisam ser interpretadas como funções generalizadas. Sabemos que dentre as propriedades investigadas em [18], temos o seguinte resultado

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\mathbf{n}} \phi_\lambda(x) = \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \Big|_{\lambda=-\mathbf{n}} = \delta^{(\mathbf{n})}(x), \quad (2.23)$$

onde $\delta^{(\mathbf{n})}(x)$ é a $\mathbf{n}$ -ésima derivada (no sentido distribucional) da função generalizada δ -Dirac. Neste caso, a expressão da Eq.(2.21) deve ser reinterpretada (de modo a

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

ficar formalmente⁸ rigoroso com a teoria da análise funcional) como um produto de convolução entre funções generalizadas, sendo que neste caso $f = f(x)$ é a respectiva função generalizada (regular) associada à função $f \in L_1[a, b]$, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathbf{n}}(f(x) * \phi_0(x)) &= \mathcal{D}^{\mathbf{n}}(f(x) * \delta^{(0)}(x)) \\ &= \mathcal{D}^{\mathbf{n}}(f(x) * \delta(x)) \\ &= (f(x) * \delta^{(\mathbf{n})}(x)) \\ &= f^{(\mathbf{n})}(x). \end{aligned}$$

Uma outra abordagem que naturalmente leva aos conceitos de IFRL e DFRL é através da resolução da equação integral de Abel⁹

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x - \tau)^{\nu-1} \varphi(\tau) \, d\tau = f(x), \quad x > 0, \quad (2.24)$$

onde $0 < \nu < 1$. Supondo que $a > -\infty$ e que a Eq.(2.24) seja considerada no intervalo finito $[a, b]$, então a sua solução pode ser obtida tomando-se os seguintes passos. Comece com as mudanças de variáveis $x \mapsto t$ e $\tau \mapsto s$, multiplique ambos os lados da Eq.(2.24) por $\Gamma(\nu)(x - t)^{-\nu}$ e integre-a com respeito a t , obtendo

$$\int_a^x (x - t)^{-\nu} \, dt \int_a^t (t - s)^{\nu-1} \varphi(s) \, ds = \Gamma(\nu) \int_a^x (x - t)^{-\nu} f(t) \, dt. \quad (2.25)$$

Agora usando o teorema de Fubini para trocar a ordem das integrais iteradas no lado esquerdo da Eq.(2.25), temos

$$\int_a^x \varphi(s) \, ds \int_a^x (x - t)^{-\nu} (t - s)^{\nu-1} \, dt = \Gamma(\nu) \int_a^x (x - t)^{-\nu} f(t) \, dt. \quad (2.26)$$

⁸Uma descrição completa dos operadores de IFRL e DFRL em termos das funções generalizadas é possível, mas tal abordagem nos levaria a desenvolver com mais cautela diversos aspectos das operações entre funções generalizadas, como os conceitos de produto direto e produto de convolução, além de um detalhamento sobre as condições em que tais operações no espaço das funções testes seriam válidas e tal caminho não faz parte deste trabalho.

⁹Uma descrição muito bem detalhada desta abordagem, com provas sobre a existência e unicidade da solução no espaço $L_1[a, b]$ para a Eq.(2.24) pode ser encontrada em, e.g. [48].

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

Usando a mudança de variável $t = s + z(x - s)$ e aplicando a definição da função beta dada pela Eq.(1.30), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_a^x (x - t)^{-\nu} (t - s)^{\nu-1} \mathbf{d}t &= \int_0^1 z^{\nu-1} (1 - z)^{-\nu} \mathbf{d}z \\ &= B(\nu, 1 - \nu) \\ &= \Gamma(\nu) \Gamma(1 - \nu), \end{aligned}$$

donde segue que a Eq.(2.26) fica

$$\int_a^x \varphi(s) \mathbf{d}s = \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \int_a^x (x - t)^{-\nu} f(t) \mathbf{d}t. \quad (2.27)$$

Diferenciando a Eq.(2.27), obtemos finalmente a expressão

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} \int_a^x (x - t)^{-\nu} f(t) \mathbf{d}t, \quad (2.28)$$

que é reconhecida como sendo a DFRL à esquerda $(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x)$ de ordem $0 < \nu < 1$.

Em particular, se $f \in AC[a, b]$, então a solução da Eq.(2.28) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \left[\int_a^x \frac{\partial}{\partial x} (x - t)^{-\nu} f(t) \mathbf{d}t \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \left[\int_a^x -\nu (x - t)^{-\nu-1} f(t) \mathbf{d}t \right] \end{aligned}$$

cuja integração por partes fornece

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \nu)} \left[\frac{f(a)}{(x - a)^{\nu}} + \int_a^x (x - t)^{-\nu} f'(t) \mathbf{d}t \right].$$

Uma abordagem similar, pode ser feita para a equação integral de Abel da forma

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^b (\tau - x)^{\nu-1} \varphi(\tau) \mathbf{d}\tau = f(x), \quad x \leq b, \quad (2.29)$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

resultando numa solução

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{-\nu} f(t) dt \quad (2.30)$$

reconhecida como sendo a DFRL à direita $(\mathcal{D}_{b-}^\nu f)(x)$ de ordem $0 < \nu < 1$.

O interessante desta abordagem é que formalmente o operador de IFRL surge da formulação da equação integral de Abel e a DFRL naturalmente surge como sendo o operador de inversão¹⁰ para a obtenção da solução, i.e., se $\varphi(x) \in L_1[a, b]$, $x > 0$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^\nu \varphi)(x) &= f(x) \\ [\mathcal{D}_{a+}^\nu (\mathcal{I}_{a+}^\nu \varphi)](x) &= (\mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) \\ \varphi(x) &= (\mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x). \end{aligned}$$

E analogamente, se $\varphi \in L_1[a, b]$, $x \leq b$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{b-}^\nu \varphi)(x) &= f(x) \\ [\mathcal{D}_{b-}^\nu (\mathcal{I}_{b-}^\nu \varphi)](x) &= (\mathcal{D}_{b-}^\nu f)(x) \\ \varphi(x) &= (\mathcal{D}_{b-}^\nu f)(x). \end{aligned}$$

Uma consequência peculiar das definições Eq.(2.16) e Eq.(2.17) é que ao contrário do resultado clássico do cálculo de ordem inteira de que a derivada de uma constante é necessariamente nula, em geral, temos que $\mathcal{D}^\nu k \neq 0$, para $k \in \mathbb{R}$. De fato, podemos verificar diretamente das definições apresentadas acima (IFRL e DFRL) que para funções do tipo potência $(x-a)^{\beta-1}$ e $(b-x)^{\beta-1}$ os operadores resultam em funções potências

¹⁰Na próxima seção, ao estudarmos as propriedades de composição das IFRL e DFRL, acrescentaremos mais detalhes sobre o papel da DFRL como a inversa (à esquerda) da IFRL.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

do mesmo tipo, i.e.: se $\operatorname{Re}(\nu) \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$, então¹¹

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} (t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\nu)} (x-a)^{\beta+\nu-1}, \quad (2.31a)$$

$$\left(\mathcal{I}_{b-}^{\nu} (b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\nu)} (b-x)^{\beta+\nu-1}, \quad (2.31b)$$

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} (t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\nu)} (x-a)^{\beta-\nu-1}, \quad (2.31c)$$

$$\left(\mathcal{D}_{b-}^{\nu} (b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\nu)} (b-x)^{\beta-\nu-1}. \quad (2.31d)$$

Logo, se $\beta = 1$ e $0 \leq \operatorname{Re}(\nu) \notin \mathbb{N}$, temos que $(x-a)^{\beta-1} = (x-a)^0 = 1$ e, portanto:

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} 1\right)(x) = \frac{(x-a)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \quad \left(\mathcal{D}_{b-}^{\nu} 1\right)(x) = \frac{(b-x)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \quad (2.32)$$

e, em geral, para $k \in \mathbb{R}$,

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} k\right)(x) = \frac{k(x-a)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \quad \left(\mathcal{D}_{b-}^{\nu} k\right)(x) = \frac{k(b-x)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}. \quad (2.33)$$

Por outro lado, se $0 \leq \operatorname{Re}(\nu) \notin \mathbb{N}$, então para $j = 1, 2, \dots, [\operatorname{Re}(\nu)] + 1$, valem as igualdades

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} (t-a)^{\nu-j}\right)(x) = \frac{\Gamma(\nu-j+1)}{\Gamma(-j+1)} (x-a)^{-j} = 0 \quad (2.34)$$

$$\left(\mathcal{D}_{b-}^{\nu} (b-t)^{\nu-j}\right)(x) = \frac{\Gamma(\nu-j+1)}{\Gamma(-j+1)} (b-x)^{-j} = 0, \quad (2.35)$$

pois nesse caso, $\frac{\Gamma(\nu-j+1)}{\Gamma(-j+1)} = 0$.

Uma consequência das Eq.(2.34) e Eq.(2.35) é o seguinte resultado.

Corolário 2.1 *Seja $0 < \operatorname{Re}(\nu) \notin \mathbb{N}$, com $\mathbf{n} = [\operatorname{Re}(\nu)] + 1$. Então as derivadas $(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x)$ e $(\mathcal{D}_{b-}^{\nu} f)(x)$ se anulam se, e somente se, $f(x)$ tiver uma das representações*

¹¹No **Apêndice A.1**, nós apresentamos uma dedução das expressões Eq.(2.31a) e Eq.(2.31c).

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

a seguir

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\nu-j} \text{ ou } f(x) = \sum_{j=1}^n d_j (a-x)^{\nu-j}, \quad (2.36)$$

com c_j e d_j constantes, respectivamente para as DFRL à esquerda e à direita.

Prova. Uma prova é apresentada no **Apêndice A.2.** ■

Note que o resultado do **Corolário 2.1** nos mostra que funções do tipo Eq.(2.34) e Eq.(2.35) ou, mais geralmente, segundo as funções em Eq.(2.36) desempenham o mesmo papel para as DFRL que as constantes para as derivadas de ordem inteira.

Outras funções que convém apresentarmos as IFRL e DFRL são as das funções exponenciais $e^{\lambda(x-a)}$ e das funções trigonométricas $\sin(x-a)$ e $\cos(x-a)$, mas deixaremos para apresentar estes resultados depois que indicarmos como integrar e diferenciar, fracionalmente, funções que possuam representação em séries de potências, o que é feito na **Seção 2.1.1.**

Para finalizarmos esta seção discutimos brevemente sobre as condições necessárias para que as definições apresentadas acima façam sentido e a respectiva classe de funções que podemos trabalhar com estes novos operadores.

Começando pelos operadores integrais, a primeira observação pertinente é que as definições Eq.(2.1), Eq.(2.2) e Eq.(2.3) só fazem sentido se as funções $f \in \mathcal{F}$ forem tais que o produto $(x-t)^{\nu-1} f(t)$ seja integrável¹² no intervalo real fechado $\Omega = [a, b]$. Mais precisamente, se f for contínua em Ω e $\operatorname{Re}(\nu) \geq 1$,

$$\int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt \quad (2.37)$$

existe como uma integral de Riemann para todo $t \in [a, b]$. Por outro lado, se f for contínua por partes em $(a, b]$ e tiver um comportamento do tipo t^λ para $-1 < \lambda < 0$ numa vizinhança da fronteira a e/ou se $0 < \operatorname{Re}(\nu) < 1$, então Eq.(2.37) existe como uma integral imprópria de Riemann. Logo, as definições Eq.(2.1), Eq.(2.2) e Eq.(2.3) serão válidas - no sentido da integral de Riemann - para as funções f contínuas por partes em (a, b) e integráveis em $[a, b]$.

¹²Integrável segundo Riemann ou Lebesgue, dependendo da abordagem.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

No entanto, se considerarmos estas integrais fracionárias no sentido de Lebesgue, o seguinte teorema nos garante que as IFRLs existem e são bem definidas para as funções pertencentes a $L_1[a, b]$.

Teorema 2.1 *Sejam $f \in L_1[a, b]$ e $\operatorname{Re}(\nu) > 0$. Então as IFRL definidas pelas equações Eq.(2.1) e Eq.(2.2) existem para quase todos os pontos de $[a, b]$. Além disso, as próprias funções $(\mathcal{I}_{a+}^\nu f)(x)$ e $(\mathcal{I}_{b-}^\nu f)(x)$ também pertencem a $L_1[a, b]$.*

Prova. Dada $f \in L_1[a, b]$ e $\operatorname{Re}(\nu) > 0$, defina as seguintes funções auxiliares

$$\phi_1(u) = \begin{cases} u^{\nu-1}, & \text{para } 0 < u < b-a, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\phi_2(u) = \begin{cases} f(u), & \text{para } a < u < b, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, por construção, estas funções são integráveis em (a, b) e, portanto, $\phi_j \in L_1[a, b]$, $j = 1, 2$ para quase todos os pontos de $[a, b]$. Segue por um teorema da teoria da integração de Lebesgue ([62], Teorema 4.2d), que a convolução entre estas funções

$$\begin{aligned} \phi_1 * \phi_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x-t)\phi_2(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt, \end{aligned} \tag{2.38}$$

existe e pertence a $L_1[a, b]$. Note que, à menos da constante $\frac{1}{\Gamma(\nu)}$, a expressão na Eq.(2.38) é exatamente a IFRL de ordem ν da função f , donde segue o resultado desejado. ■

Quanto aos operadores de diferenciação fracionária, observe que apenas a continuidade de f não garante a existência da derivada fracionária $(\mathcal{D}^\nu f)(x)$ para $\nu \in \mathbb{C}$ com $(\operatorname{Re}(\nu) \geq 0)$. Em particular, quando $\nu = n \in \mathbb{N}$ a derivada fracionária de f coincide com a derivada ordinária de f e pela teoria do cálculo de ordem inteira, sabemos que apenas a continuidade de uma função não garante sua diferenciabilidade. De fato, vejamos um contraexemplo:

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

Suponha que f seja contínua, mas não diferenciável e tome $\nu = 1$. Daí,

$${}_a\mathcal{D}_x^{-1}f(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Como $\mathbf{n} = [\text{Re}(\nu)] + 1 = 2$, temos por Eq.(2.16) que

$${}_a\mathcal{D}_x^1 f(x) = {}_a\mathcal{D}_x^2 [{}_a\mathcal{D}_x^{-1} f(x)] = \frac{d^2}{dx^2} \int_a^x f(t) \, dt = \frac{d}{dx} f(x).$$

Ora, visto que por hipótese f não é diferenciável no sentido usual, então ${}_a\mathcal{D}_x^1 f(x)$ não é definido.

Por outro lado, se $f \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}}$, então os operadores diferenciais fracionários (i.e., Eq.(2.16) e Eq.(2.17)) ficam bem definidos para $x > a$ e $x < b$, respectivamente. Podemos verificar essa afirmação introduzindo a seguinte mudança de variável $t = x - y^\lambda$, onde $\lambda = \frac{1}{\mathbf{n}-\nu}$. Daí, podemos reescrever Eq.(2.1) como

$$\begin{aligned} {}_a\mathcal{D}_x^{-(\mathbf{n}-\nu)} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_{(x-a)^{\mathbf{n}-\nu}}^0 (y^\lambda)^{\mathbf{n}-\nu-1} f(x-y^\lambda) (-\lambda y^{\lambda-1}) \, dy \\ &= \frac{-\lambda}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_{(x-a)^{\mathbf{n}-\nu}}^0 y^{\frac{\mathbf{n}-\nu-1}{\mathbf{n}-\nu}} f(x-y^\lambda) y^{\frac{1-\mathbf{n}+\nu}{\mathbf{n}-\nu}} \, dy \\ &= \frac{1}{(\mathbf{n}-\nu) \Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_0^{(x-a)^{\mathbf{n}-\nu}} y^0 f(x-y^\lambda) \, dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} \int_0^{(x-a)^{\mathbf{n}-\nu}} f(x-y^\lambda) \, dy, \end{aligned}$$

donde segue (por Eq.(2.16)) que

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) &= \mathcal{D}^{\mathbf{n}} [(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)] = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{\mathcal{D}^k}{\Gamma(-\nu+k+1)} (x-a)^{-\nu+k} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} \int_0^{(x-a)^{\mathbf{n}-\nu}} \frac{\partial^{\mathbf{n}}}{\partial x^{\mathbf{n}}} f(x-y^\lambda) \, dy \end{aligned}$$

existe para $x > a$, pois $\mathcal{D}^{\mathbf{n}} f(x)$ é contínua por hipótese. A prova para o caso $x < b$ é análoga.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

O próximo resultado nos garante uma condição suficiente para a existência da DFRL.

Teorema 2.2 *Sejam $\operatorname{Re}(\nu) \geq 0$ e $\mathbf{n} = [\operatorname{Re}(\nu)] + 1$. Se $f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b]$, então as DFRL $\mathcal{D}_{a+}^{\nu}f$ e $\mathcal{D}_{b-}^{\nu}f$ existem em quase todos os pontos de $[a, b]$ e podem ser representadas nas seguintes formas*

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\nu}f)(x) = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a^+) (x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(1+k-\nu)} + \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_a^x \frac{f^{(\mathbf{n})}(t)}{(x-t)^{\nu-\mathbf{n}+1}} dt \quad (2.39)$$

e

$$(\mathcal{D}_{b-}^{\nu}f)(x) = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b^-) (b-x)^{k-\nu}}{\Gamma(1+k-\nu)} + \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_x^b \frac{f^{(\mathbf{n})}(t)}{(t-x)^{\nu-\mathbf{n}+1}} dt, \quad (2.40)$$

respectivamente.

Prova. Por definição $(\mathcal{D}_{a+}^{\nu}f)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}f)(x)$, onde

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1} f(t) dt$$

e devido a hipótese de suavidade sobre a f , podemos integrar parcialmente a expressão acima, obtendo

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu} f'(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} (x-t)^{\mathbf{n}-\nu} f(t) \Big|_{t=a}^{t=x} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} (x-a)^{\mathbf{n}-\nu} f(a) + (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu+1}f')(x). \end{aligned}$$

Repetindo essa integração por partes $\mathbf{n}-1$ vezes obtemos a igualdade

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}f)(x) = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a^+) (x-a)^{k-\nu+\mathbf{n}}}{\Gamma(1+k-\nu)} + (\mathcal{I}_{a+}^{2\mathbf{n}-\nu}f^{(\mathbf{n})})(x).$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

Por fim, aplicando $\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}}$ em ambos os lados da igualdade, chega-se ao resultado desejado para a Eq.(2.39)

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a^+) (x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(1+k-\nu)} + (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f^{(\mathbf{n})})(x).$$

A prova para a representação Eq.(2.40) é feita de modo análogo. ■

Vale uma observação final que é a seguinte: os operadores $\mathcal{I}^{\nu}$ e $\mathcal{D}^{\nu}$ apresentados acima, estão definidos em intervalos finitos da reta real, mas nada impede a sua generalização para intervalos semi-infinitos, e.g., $(-\infty, a]$, $[b, \infty)$ com $a, b \in \mathbb{R}$, ou para toda a reta real $\mathbb{R}$. Em cada caso, a classe de funções que podemos usar pode eventualmente mudar e algumas novas condições particulares podem ser necessárias, mas de um modo geral, as ideias discutidas aqui são igualmente pertinentes para estas extensões dos intervalos. O leitor interessado nestas generalizações pode consultar, por exemplo, as referências [25, 32, 48].

Observação 2.1 *Para os propósitos deste trabalho, a partir deste instante, nos restringiremos a denotar $\mathcal{I}^{\nu}$ e $\mathcal{D}^{\nu}$ os operadores de IFRL e de DFRL, respectivamente, de ordem real $\nu \geq 0$, porém fica o leitor avisado que todas as propriedades e resultados que apresentarmos podem ser generalizadas [25, 48] para o caso em que $\nu \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(\nu) \geq 0$.*

2.1.1 Propriedades das IFRL e DFRL

Enunciamos agora algumas propriedades úteis relativas a IFRL e a DFRL. Adiantamos que em todos os enunciados e demonstrações a seguir, nos restringimos às definições das IFRL e DFRL à esquerda, mas que os respectivos resultados para as IFRL e DFRL à direita são igualmente válidos e demonstrados de forma análoga.

Observamos inicialmente que os operadores de integração e diferenciação fracionárias são lineares e isto é uma consequência imediata da linearidade dos operadores de integração e diferenciação de ordens inteiras e do modo como foram definidas as IFRL e DFRL segundo as Eq.(2.1) e Eq.(2.16), i.e., se $f(x)$ e $g(x)$ são tais que possam ser

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

integroderivadas até, pelo menos a ordem $\nu > 0$, então

$$\mathcal{I}_{a+}^{\nu} [\alpha f + \beta g] (x) = \alpha (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f) (x) + \beta (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} g) (x), \quad (2.41)$$

$$\mathcal{D}_{a+}^{\nu} [\alpha f + \beta g] (x) = \alpha (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f) (x) + \beta (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} g) (x), \quad (2.42)$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Já os dois seguintes lemas, nos dizem que a IFRL e a DFRL são operadores contínuos.

Lema 2.1 *Sejam $\nu > 0$ e $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas em $[a, b]$ uniformemente convergente para uma função f . Então*

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{a+}^{\nu} f_k \right) (x) = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (x) = (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f) (x),$$

i.e., é permitida a passagem do limite para dentro do operador. Em particular, a sequência de funções $(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente.

Prova. Por hipótese, cada f_k é contínua em $[a, b]$ e como $f_k \rightarrow f$ uniformemente, então f também é contínua em $[a, b]$. Isto significa que

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f_k (x) - \mathcal{I}_{a+}^{\nu} f (x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x |f_k(t) - f(t)| (x-t)^{\nu-1} dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \|f_k - f\|_{\infty} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \|f_k - f\|_{\infty} (x-a)^{\nu} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \|f_k - f\|_{\infty} (b-a)^{\nu} \end{aligned}$$

e que converge uniformemente para zero quando $k \rightarrow \infty$ para todo $x \in [a, b]$. ■

Lema 2.2 *Sejam $\nu > 0$ e $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas em $[a, b]$ uniformemente convergente para uma função f . Suponha ainda que $\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f_k$ exista para cada $k \in \mathbb{N}$ e que $(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convirja uniformemente em $[a + \epsilon, b]$ para todo $\epsilon > 0$. Então,*

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

para todo $x \in (a, b]$ vale a igualdade

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f_k \right) (x) = \left(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (x) = (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f) (x).$$

Prova. Segue pela definição de DFRL, que $\mathbf{n} = [\nu] + 1$ e

$$\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f_k = \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f_k,$$

e pelo **Lema 2.1** que a sequência $(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente. Como por hipótese também foi admitido que $(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uniformemente convergente em todo subintervalo compacto de $(a, b]$, então podemos trocar de posição o limite com os operadores de DFRL e IFRL, respectivamente, i.e.,

$$\begin{aligned} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f_k \right) (x) &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f_k \right) (x) \\ &= \left(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f_k \right) (x) \\ &= \left(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) (x) \\ &= \left(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \right) (x) \\ &= (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f) (x), \end{aligned}$$

desde que $x \in (a, b]$. ■

Visto que muitas das aplicações práticas no estudo de equações diferenciais fazem uso de funções que possuem representação em série de potências, então se $f \in \mathcal{C}^{\infty} [a, \epsilon]$ for analítica no intervalo $[a, \epsilon]$, para algum $\epsilon > a$ pequeno o suficiente, vale a seguinte representação para $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k, \quad (2.43)$$

onde c_k são constantes e, neste caso, podemos aplicar as Eq.(2.31a) e Eq.(2.31c), junto com os resultados dos **Lema 2.1** e **Lema 2.2** para integrar ou diferenciar fracionaria-

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

mente a série da Eq.(2.43) termo a termo [13, 35, 48], i.e.

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-a)^k \right] (x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathcal{I}_{a+}^{\nu} (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k+1) (x-a)^{k+\nu}}{\Gamma(k+1+\nu)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

e

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{D}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t-a)^k \right] (x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathcal{D}_{a+}^{\nu} (x-a)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k+1) (x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(k+1-\nu)}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Segue como consequência imediata, que as funções representadas por uma série de Frobenius

$$f(x) = (x-a)^q \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \quad q > -1 \text{ e } c_0 \neq 0,$$

também podem ser integradas e diferenciadas fracionalmente¹³ segundo as expressões

$$\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \Gamma(q+k+1)}{\Gamma(q+k+\nu+1)} (x-a)^{k+q+\nu}, \quad (2.46)$$

$$\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \Gamma(q+k+1)}{\Gamma(q+k-\nu+1)} (x-a)^{k+q-\nu}, \quad (2.47)$$

por causa da condição $q > -1$. Em particular, temos o seguinte teorema sobre a representabilidade das IFRL e DFRL de funções analíticas.

Teorema 2.3 *Sejam $\nu > 0$ e f analítica num intervalo (a, b) , então*

(a)

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\nu}{k} \frac{(x-a)^{k+\nu}}{\Gamma(\nu+k+1)} f^{(k)}(x);$$

¹³Inclusive podendo ser integradas e diferenciadas normalmente quando $\nu \in \mathbb{Z}$.

(b)

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} \frac{(x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(-\nu+k+1)} f^{(k)}(x);$$

onde $\binom{\pm\nu}{k} = \frac{\Gamma(\pm\nu+1)}{\Gamma(\pm\nu-k+1)\Gamma(k+1)}$ são os coeficientes binomiais escritos em termos da função gama.

Prova. Uma prova deste teorema pode ser encontrada, por exemplo em [13] (Corolários 2.8 e 2.16) ou de forma unificada em [48] (Lema 15.3). ■

Neste ponto, estamos aptos a calcular as IFRL e DFRL das funções exponenciais do tipo $e^{\lambda(x-a)}$ e das funções trigonométricas seno e cosseno como mencionado na seção anterior. Dessa forma, listamos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\nu} e^{\lambda(x-a)} &= \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x-a)]^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (x-a)^{k+\nu}}{\Gamma(k+1+\nu)} \\ &= (x-a)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x-a)]^k}{\Gamma(k+1+\nu)} \\ &= (x-a)^{\nu} E_{1,1+\nu}(\lambda(x-a)), \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} e^{\lambda(x-a)} &= \mathcal{D}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x-a)]^k}{\Gamma(k+1)} \\ &= (x-a)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (x-a)^k}{\Gamma(k-\nu+1)} \\ &= (x-a)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x-a)]^k}{\Gamma(k+1-\nu)} \\ &= (x-a)^{-\nu} E_{1,1-\nu}(\lambda(x-a)), \end{aligned} \tag{2.49}$$

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \sin(x-a) &= \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k+1+\nu}}{\Gamma(2k+2+\nu)} \\
&= (x-a)^{1+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k}}{\Gamma(2k+2+\nu)} \\
&= (x-a)^{1+\nu} E_{2,2+\nu}(-(x-a)^2), \tag{2.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a+}^{\nu} \sin(x-a) &= \mathcal{D}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k+1-\nu}}{\Gamma(2k+2-\nu)} \\
&= (x-a)^{1-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k}}{\Gamma(2k+2-\nu)} \\
&= (x-a)^{1-\nu} E_{2,2-\nu}(-(x-a)^2), \tag{2.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \cos(x-a) &= \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k+\nu}}{\Gamma(2k+1+\nu)} \\
&= (x-a)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k}}{\Gamma(2k+1+\nu)} \\
&= (x-a)^{\nu} E_{2,1+\nu}(-(x-a)^2), \tag{2.52}
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{a+}^{\nu} \cos(x-a) &= \mathcal{D}_{a+}^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k}}{\Gamma(2k+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k-\nu}}{\Gamma(2k+1-\nu)} \\
 &= (x-a)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x-a)^{2k}}{\Gamma(2k+1-\nu)} \\
 &= (x-a)^{\nu} E_{2,1-\nu}(-(x-a)^2),
 \end{aligned}$$

donde verificam-se que as IFRL e DFRL das exponenciais e funções trigonométricas seno e cosseno podem ser descritas em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros (vide Eq.(1.37)). O próximo resultado¹⁴ nos diz que o operador IFRL é contínuo com respeito ao índice (ordem) ν .

Lema 2.3 *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência não negativa de números convergente para o valor $\nu \in \mathbb{R}^+$. Então para cada $f \in L_1[a, b]$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{a+}^{\nu_k} f = \mathcal{I}_{a+}^{\nu} f$$

onde a convergência é no sentido da norma de $L_p[a, b]$.

Observação 2.2 *Já vimos que em decorrência da definição da DFRL (vide Eq.(2.16)) que $\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f = f$ para $\nu = 0$, no entanto, a IFRL (vide Eq.(2.1)) não foi definida para $\nu = 0$. Em vista do lema acima, aproveitamos para mencionar que detalhando o tipo de convergência no espaço L_p (ou seja, convergência em quase todos os pontos de $[a, b]$) os autores em [48], demonstram que $\lim_{\nu \rightarrow 0} (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f)(x) = f(x)$, para $f \in L_1[a, b]$. Portanto, para simplicidade de notação identificaremos os operadores fracionários de integração e diferenciação de ordem $\nu = 0$ com o operador identidade:*

$$\mathcal{D}_{a+}^0 = \mathbf{I} = \mathcal{I}_{a+}^0 := \lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{I}_{a+}^{\nu}.$$

Uma pergunta natural surge sobre a continuidade do operador de DFRL com respeito ao índice $\nu > 0$, principalmente se quisermos saber o que acontece com $\mathcal{D}_{a+}^{\nu}$

¹⁴Uma prova pode ser encontrada em [48], Teorema 2.6.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

quando $\nu \rightarrow n \in \mathbb{N}$. Uma investigação inicial partindo-se da própria definição da DFRL e dos resultados demonstrados acima, nos sugere os seguintes resultados para uma $f(x)$ suficientemente bem comportada em $[a, b]$ e $\mathbf{n} - 1 \leq \nu < \mathbf{n}$, onde $\mathbf{n} = [\nu] + 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \mathbf{n}^-} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f &= \lim_{\nu \rightarrow \mathbf{n}^-} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \lim_{\nu \rightarrow \mathbf{n}^-} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} f = f^{(\mathbf{n})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow (\mathbf{n}-1)^-} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f &= \lim_{\nu \rightarrow (\mathbf{n}-1)^-} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \lim_{(\mathbf{n}-1)^-} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^1 f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-1} f = f^{(\mathbf{n}-1)}. \end{aligned}$$

Note que as etapas acima não constituem uma prova formal da propriedade investigada, sendo que nem mesmo nos indicam qual é o tipo de convergência (i.e., pontual, uniforme, etc...). Isto será feito com o enunciado do próximo teorema, mas antes disso, vejamos um caso particular.

Exemplo 2.1 *Seja $f(x) = (x - a)^{\beta}$ para algum $\beta > 0$. Então sabemos pela Eq.(2.31c) que*

$$\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \nu)} (x - a)^{\beta - \nu}, \quad (2.53)$$

$$\mathcal{D}_{a+}^n f(x) = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - n)} (x - a)^{\beta - n}, \quad (2.54)$$

onde $n \in \mathbb{N}$. Comparando-se as Eq(2.53) e Eq.(2.54), observamos os seguintes situações:

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

(a) Se $n < \beta$ (i.e., $\beta - n > 0$), então

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^n f(x), \text{ uniformemente em } [a, b].$$

(b) Se $n = \beta$, então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^n f(x) &= \Gamma(n+1) \neq 0 \text{ (e finito),} \\ \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(a) &= \begin{cases} 0, & \text{se } \nu < n, \\ \infty, & \text{se } \nu > n, \end{cases} \end{aligned}$$

donde podemos concluir que

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^n f(x), \text{ pontualmente em } (a, b].$$

(c) Por fim, se $n > \beta$ (i.e., $\beta - n < 0$), então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^n f(a) &= \infty, \\ \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(a) &= \infty, \end{aligned}$$

donde podemos concluir que

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^n f(x), \text{ pontualmente em } (a, b].$$

Teorema 2.4 *Seja $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$\lim_{\nu \rightarrow n} (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^n f)(x),$$

pontualmente em $(a, b]$. A convergência é uniforme em $[a, b]$ se adicionalmente $f(x) = O((x-a)^{n+\delta})$ para algum $\delta > 0$ à medida que $x \rightarrow a^+$.

Prova. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [13], Teorema 2.20. ■

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

IFRL e DFRL como operadores recíprocos e regras de composição

Investigamos agora em detalhes as propriedades relativas à composição entre os operadores de IFRL e DFRL e sob quais condições podemos descrever estes operadores como recíprocos um do outro. Este entendimento é fundamental para a correta descrição da teoria dos operadores fracionários e, em particular, para a consistência da metodologia abordada na segunda parte deste trabalho quando estudaremos a resolução de EDOs, tomando o caso particular da equação de Bessel.

Iniciamos com a propriedade de semigrupo do operador de IFRL, descrita no teorema a seguir.

Teorema 2.5 *Sejam $f \in L_1[a, b]$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então as igualdades*

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} f\right)(x) = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) \quad (2.55)$$

são válidas em quase todos os pontos de $[a, b]$. Em particular, se $f \in \mathcal{C}[a, b]$ ou $\alpha + \beta \geq 1$, então as relações dadas na Eq.(2.55) valem em todos os pontos de $[a, b]$.

Prova. Sejam $f \in L_1[a, b]$, $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Aplicando a definição da Eq.(2.1) para IFRL, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x \int_{\tau}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x f(\tau) \int_{\tau}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\tau)^{\beta-1} dt d\tau \quad (2.56) \end{aligned}$$

e, usando a seguinte substituição $t = \tau + s(x - \tau)$, podemos escrever

$$(t - \tau)^{\beta-1} = [s(x - \tau)]^{\beta-1}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

$$(x - t)^{\alpha-1} = (1 - s)^{\alpha-1} (x - \tau)^{\alpha-1}$$

donde segue, substituindo na Eq.(2.56) que

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} f \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) \int_0^1 (1 - s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} \mathbf{d}s \mathbf{d}\tau.$$

Reconhecendo que $\int_0^1 z^{p-1} (1 - z)^{q-1} \mathbf{d}z = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ é a função beta $B(p, q)$ temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} f \right) (x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) B(p, q) \mathbf{d}\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha+\beta-1} f(\tau) \mathbf{d}\tau = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x), \end{aligned}$$

sendo a igualdade válida em quase todos os pontos de $[a, b]$.

Entretanto, se $f \in \mathcal{C}[a, b]$ então por um resultado clássico da análise, temos que $\mathcal{I}_{a+}^{\beta} f \in \mathcal{C}[a, b]$ e consequentemente, $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} f$ e $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f$ também pertencem a $\mathcal{C}[a, b]$. Logo, como as duas funções coincidem em quase todos os pontos de $[a, b]$, sendo ambas contínuas elas precisam coincidir em todos os pontos de $[a, b]$.

Finalmente, se $\alpha + \beta \geq 1$, então pelo resultado recém provado

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} \phi \right) (x) &= \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} \phi \right) (x) \\ &= \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta-1} \mathcal{I}_{a+} \phi \right) (x) \end{aligned}$$

e fica provada a segunda parte do teorema. Trocando-se as posições dos índices α e β e seguindo os mesmos passos acima, obtemos os mesmos resultados para $\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f \right) (x)$. ■

O próximo resultado é uma generalização do **Corolário 1.2**.

Lema 2.4 *Se $\nu > 0$ e $f \in L_p[a, b]$ ($1 \leq p \leq \infty$), então a seguinte igualdade*

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} \mathcal{I}_{a+}^{\nu} f \right) (x) = f(x), \tag{2.57}$$

vale em quase todos os pontos de $[a, b]$.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

Prova. Pela definição da DFRL de ordem ν aplicado à $\mathcal{I}_{a+}^\nu f$, temos ($\mathbf{n} = [\nu] + 1$)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^\nu \mathcal{I}_{a+}^\nu f &= (\mathcal{D}_{a+}^\mathbf{n} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}) \mathcal{I}_{a+}^\nu f \\ &= [\mathcal{D}_{a+}^\mathbf{n} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu+\nu})] f \\ &= [(\mathcal{D}_{a+}^\mathbf{n} \mathcal{I}_{a+}^\mathbf{n}) f] \\ &= f. \end{aligned}$$

Sendo que nas etapas acima, foram utilizados os resultados do **Teorema 2.5** e do **Corolário 1.2**. ■

Um resultado ainda mais geral que este último lema pode ser formulado, mas para isso iremos introduzir algumas definições auxiliares.

Definição 2.3 Denotaremos por $\mathcal{I}_{a+}^\nu(L_1)$ com $\nu > 0$ o espaço das funções $f(x)$ que podem ser representadas pela IFRL (à esquerda) de ordem ν de uma função Lebesgue integrável, i.e.,

$$\mathcal{I}_{a+}^\nu(L_1) := \{f = \mathcal{I}_{a+}^\nu \varphi, \varphi \in L_p[a, b], 1 \leq p \leq \infty\}.$$

Uma caracterização deste espaço é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.6 Para que $f \in \mathcal{I}_{a+}^\nu(L_1)$, com $\nu > 0$, é necessário e suficiente que

$$\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \in AC^\mathbf{n}[a, b], \quad (2.58)$$

onde $\mathbf{n} = [\nu] + 1$ e

$$(\mathcal{D}^k \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a) = 0, k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1, \quad (2.59)$$

onde $\mathcal{D}^k = \frac{d^k}{dx^k}$ é a k -ésima derivada no sentido clássico.

Prova. Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [48]. ■

Chamamos atenção para um fato crucial sobre a representabilidade de f por uma IFRL de ordem ν de uma certa função $\varphi \in L_p[a, b]$ e a existência da respectiva DFRL de mesma ordem da f . Estes conceitos não são equivalentes! Mais precisamente,

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

sabermos sobre a existência da $\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f$ não implica, necessariamente, que $f = \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \varphi$ para alguma $\varphi \in L_p[a, b]$. De fato, a função $f(x) = (x - a)^{\nu-1}$, $0 < \nu < 1$ é diferenciável fracionalmente segundo RL (vide Eq.(2.34)), porém ela não pode ser representada pela IFRL de mesma ordem para qualquer função $\varphi \in L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, pois verifica-se neste caso que $\mathcal{I}_{a+}^{1-\nu} (x - a)^{\nu-1} = \Gamma(\nu) \neq 0$ (vide Eq.(2.31a)) donde segue que a condição da Eq.(2.59) não é satisfeita. Inclusive, o leitor pode verificar que para este caso, $f(x) = (x - a)^{\nu-1}$ está relacionado com a IFRL (no sentido distribucional) de ordem ν da função generalizada $\delta(x - a)$, visto que sob esta ótica,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \delta(x - a) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x - t)^{\nu-1} \delta(t - a) dt \\ &= \frac{(x - a)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \\ &= \phi_{\nu}(x - a), \end{aligned}$$

onde $\phi_{\nu}(x - a)$ é a função de Gelf'and-Shilov centrada no ponto $x = a$.

Em vista da **Definição 2.3** e do **Teorema 2.6** podemos introduzir a seguinte definição.

Definição 2.4 *Seja $\nu > 0$. Uma função $f \in L_1[a, b]$ possui uma derivada integrável $\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f \in L_1[a, b]$ se $\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b]$, $\mathbf{n} = [\nu] + 1$.*

Em particular, note que se $\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f = \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f$ existe no sentido usual, i.e., $\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f$ pode ser diferenciada (no sentido clássico) $\mathbf{n}$ vezes, então $f(x)$ terá a derivada no sentido da **Definição 2.4**.

Vejamos então a generalização do **Lema 2.4** descrito pelo seguinte teorema.

Teorema 2.7 *Seja $f \in L_p[a, b]$ ($1 \leq p \leq \infty$).*

(a) *Se $\alpha \geq \beta > 0$, então a relação*

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f \right) (x) \quad (2.60)$$

vale em quase todos os pontos de $[a, b]$.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

(b) Por outro lado, se $\beta > \alpha > 0$ e $\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-(\beta-\alpha)} f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b]$, com $\mathbf{n} = [\beta] + 1$, então

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f\right)(x) \quad (2.61)$$

vale em quase todos os pontos de $[a, b]$.

Prova. Se $\alpha = \beta$, o resultado segue do **Lema 2.4**. Para $\alpha > \beta$, usando a definição da DFRL estabelecida pela equação Eq.(2.16) com $\mathbf{n} = [\beta] + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}+\alpha-\beta} f \\ &= \left(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}}\right) \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f. \end{aligned}$$

Suponha agora $\beta > \alpha > 0$. Observamos inicialmente que a hipótese de que $\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-(\beta-\alpha)} f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b]$ nos garante a existência das derivadas em ambos os lados da igualdade da Eq.(2.61). De fato, em vista da **Definição 2.4**, tal hipótese implica que $\left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f\right)(x)$ existe. Além disso, como¹⁵

$$\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-(\beta-\alpha)} f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b] \Rightarrow \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f \in AC^{\mathbf{m}}[a, b], \quad (2.62)$$

com $\mathbf{m} = [\beta - \alpha] + 1$, então a existência de $\left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f\right)(x)$ também fica assegurada. Daí, notando a validade da seguinte relação

$$\mathbf{n} - \mathbf{m} = [\beta] - [\beta - \alpha] \geq 0,$$

podemos escrever, partindo-se da definição da DFRL, que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-(\beta-\alpha)} f \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}+[\beta]-[\beta-\alpha]} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}+[\beta]-[\beta-\alpha]-(\beta-\alpha)} f \end{aligned}$$

¹⁵Resultado provado no **Apêndice A.3**.

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}} \mathcal{D}_{a+}^{[\beta]-[\beta-\alpha]} \mathcal{I}_{a+}^{[\beta]-[\beta-\alpha]} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f \\
 &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f \\
 &= \mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f,
 \end{aligned}$$

sendo que nas etapas acima foram usados os **Teorema 2.5** e o **Corolário 1.2**. ■

Observamos ainda que na segunda parte do **Teorema 2.7**, se exigirmos que $f \in \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha}(L_1)$, então o resultado segue mais diretamente, pois neste caso sabemos pela **Definição 2.3** que existe uma $\varphi \in L_1[a, b]$ tal que

$$f = \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} \varphi \Rightarrow \mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f = \varphi,$$

daí

$$\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f = \mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} \varphi = \mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} \varphi = \varphi = \mathcal{D}_{a+}^{\beta-\alpha} f.$$

A relação da Eq.(2.57) nos diz que a DFRL é a inversa à esquerda da IFRL. Por outro lado, invertendo a ordem desses operadores, de modo geral vale o resultado seguinte.

Teorema 2.8 *Sejam $\nu > 0$, $\mathbf{n} = [\nu] + 1$ e $(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)$ a IFRL de ordem $\mathbf{n} - \nu$. Se $f \in L_1[a, b]$ e $(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f) \in AC^{\mathbf{n}}[a, b]$, então a igualdade*

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a)}{\Gamma(\nu - k)} (x - a)^{\nu-k-1}, \quad (2.63)$$

onde $(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a) = \lim_{x \rightarrow a+} (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)$, vale em quase todos os pontos de $[a, b]$. Em particular, se $0 < \nu < 1$, então

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) = f(x) - \frac{(\mathcal{I}_{a+}^{1-\nu} f)(a)}{\Gamma(\nu)} (x - a)^{\nu-1}. \quad (2.64)$$

Prova. Primeiramente, observamos que os limites no lado direito das Eq.(2.63) e Eq.(2.64) existem devido a continuidade uniforme dos operadores DFRL e IFRL e das

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

hipóteses sobre a $f(x)$ e $(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)$. Ainda mais, segue pelo **Lema 1.1** que existe $\varphi \in L_1[a, b]$ tal que

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) = (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k, \quad (2.65)$$

com

$$\varphi(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x)$$

e

$$c_k = \frac{(\mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{n}-1.$$

Assim, usando a definição da DFRL, podemos escrever

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) &= (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \left[(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k \right] \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} \varphi)(x) + \mathcal{I}_{a+}^{\nu} \left[\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k \right] \\ &= (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \varphi)(x). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Por outro lado, se aplicarmos o operador $\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}$ (pela esquerda) em ambos os lados da igualdade Eq.(2.65), obteremos

$$\begin{aligned} f(x) &= (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} \varphi)(x) + \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \\ &= (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu+\nu} \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a)}{\Gamma(k+1)} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} (x-a)^k \\ &= (\mathcal{I}_{a+}^{\nu} \varphi)(x) + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a)}{\Gamma(k+1-\mathbf{n}+\nu)} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} (x-a)^{k-\mathbf{n}+\nu}, \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

ou seja,

$$(\mathcal{I}_{a+}^\nu \varphi)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{I}_{a+}^{n-\nu} f)(a)}{\Gamma(k+1-n+\nu)} \mathcal{D}_{a+}^{n-\nu} (x-a)^{k-n+\nu}. \quad (2.67)$$

Comparando-se as Eq.(2.66) e Eq.(2.67), e reorganizando os termos do somatório segue o resultado desejado

$$(\mathcal{I}_{a+}^\nu \mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\nu} f)(a)}{\Gamma(\nu-k)} (x-a)^{\nu-k-1}.$$

Finalmente, se $0 < \nu < 1$, então $\mathbf{n} = [\nu] + 1 = 1$ e basta usarmos os passos acima para este valor específico e o resultado segue. ■

Diferentemente do **Lema 2.4**, este último resultado nos diz que a IFRL não é, em geral, a inversa à esquerda da DFRL, a menos que o somatório no segundo membro da igualdade dada pela Eq.(2.63) se anule. De fato, esta condição pode ser garantida se $f \in \mathcal{I}_{a+}^\nu(L_1)$, como mostra o corolário a seguir.

Corolário 2.2 *Seja $\nu > 0$. Se $f \in \mathcal{I}_{a+}^\nu(L_1)$, então*

$$(\mathcal{I}_{a+}^\nu \mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) = f(x) \quad (2.68)$$

em quase todos os pontos de $[a, b]$.

Prova. De fato se $f \in \mathcal{I}_{a+}^\nu(L_1)$ então existe uma $\varphi \in L_1[a, b]$ tal que $f = \mathcal{I}_{a+}^\nu \varphi$ em quase todos os pontos de $[a, b]$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^\nu \mathcal{D}_{a+}^\nu f &= \mathcal{I}_{a+}^\nu (\mathcal{D}_{a+}^\nu \mathcal{I}_{a+}^\nu) \varphi \\ &= \mathcal{I}_{a+}^\nu \mathbf{I} \varphi \\ &= \mathcal{I}_{a+}^\nu \varphi \\ &= f \end{aligned}$$

e temos o resultado desejado. ■

O **Teorema 2.8** e o seu **Corolário 2.2**, descrevem a composição entre a IFRL à esquerda da DFRL para o caso em que ambas as ordens ($\nu > 0$) dos operadores são

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

iguais, já o seguinte teorema, análogo ao **Teorema 2.7**, descreve a situação quando estas ordens não são necessariamente iguais.

Teorema 2.9 *Seja $f \in \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} (L_1)$. Se $\beta \geq \alpha > 0$, então*

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} f \right) (x),$$

para quase todos os pontos de $[a, b]$. Por outro lado, se $\alpha > \beta > 0$ então

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} f \right) (x),$$

para quase todos os pontos de $[a, b]$.

Prova. Primeiramente, note que se $\beta = \alpha > 0$, então o resultado é o mesmo do **Teorema 2.2**. Agora se $\beta > \alpha > 0$, usando a propriedade de semigrupo dos operadores de IFRL, podemos escrever que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha+\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f. \end{aligned}$$

Acontece que como $f \in \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} (L_1)$ por hipótese, segue do **Teorema 2.6** (que caracteriza os elementos do espaço $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} (L_1)$) que

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f \in AC^{\mathbf{n}} [a, b], \\ (\mathcal{D}_{a+}^k \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f) (a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1, \end{cases}$$

onde $\mathbf{n} = [\alpha] + 1$. Agora pelo **Teorema 2.8** podemos concluir que

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f) (x) = f (x)$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

e, portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} f.\end{aligned}$$

Por fim, se $\alpha > \beta > 0$, então novamente pela hipótese sobre a f , sabemos que existe uma $\varphi \in L_1[a, b]$ tal que

$$f = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \varphi \Rightarrow \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = \varphi.$$

Dai, segue

$$\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f = \mathcal{I}_{a+}^{\beta} \varphi. \quad (2.69)$$

Por outro lado, fazendo uso da propriedade de semigrupo da IFRL e do resultado do **Teorema 2.7**, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} f &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \varphi \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\alpha+\beta} \varphi \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta} \varphi,\end{aligned} \quad (2.70)$$

e comparando-se as Eq.(2.69) e Eq.(2.70) segue o resultado desejado. ■

Agora, se enfraquecermos as hipóteses sobre a f no **Teorema 2.9**, obtemos o seguinte resultado mais geral.

Teorema 2.10 *Seja $f \in L_1[a, b]$ tal que $\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha} f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b]$, $\mathbf{n} = [\alpha] + 1$.*

(a) *Se $\beta \geq \alpha > 0$, então*

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f \right) (x) = \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} f \right) (x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\beta - k)} (x - a)^{\beta-k-1}$$

vale em quase todos os pontos de $[a, b]$.

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

(b) Por outro lado, se $\alpha > \beta > 0$ então

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\beta-k)} (x-a)^{\beta-k-1}$$

vale em quase todos os pontos de $[a, b]$.

Prova. (a) Se $\alpha = \beta > 0$, então o resultado é o próprio **Teorema 2.8**. Para o caso em que $\beta > \alpha > 0$ e denotando $n = [\alpha] + 1$, podemos usar a propriedade de semigrupo da IFRL para escrever

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha+\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) \\ &= \left[\mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)\right](x) \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha-k)} (x-a)^{\alpha-k-1} \right] \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} (x-a)^{\alpha-k-1} \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\beta-\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\beta-k)} (x-a)^{\beta-k-1}. \end{aligned}$$

(b) Por outro lado, se $\alpha > \beta > 0$, então começamos usando o resultado do **Teorema 2.7** para escrever

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} = \mathcal{I}_{a+}^{\beta}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= \left[\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)\right](x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha-k)} (x-a)^{\alpha-k-1} \right] \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\alpha-k)} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} (x-a)^{\alpha-k-1} \\
 &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha-\beta} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{n-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f)(a)}{\Gamma(\beta-k)} (x-a)^{\beta-k-1},
 \end{aligned}$$

como desejado. ■

Teorema 2.11 *Sejam $\nu > 0$, $m \in \mathbb{N}$ com $\mathcal{D}^m = \frac{d^m}{dx^m}$ e $f \in L_1[a, b]$.*

(a) *Se $\mathcal{I}_{a+}^{n-\nu} f \in AC^{m+n}[a, b]$, então a relação*

$$(\mathcal{D}_{a+}^m \mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} f)(x), \quad (2.71)$$

onde $n = [\nu] + 1$ vale em quase todos os pontos de $[a, b]$.

(b) *Por outro lado, invertendo a ordem das derivadas, se $\mathcal{I}_{a+}^{m+n-\nu} \mathcal{D}_{a+}^m f \in AC^{m+n}[a, b]$, então a relação*

$$(\mathcal{D}_{a+}^\nu \mathcal{D}_{a+}^m f)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\nu-m)} (x-a)^{k-\nu-m}, \quad (2.72)$$

vale em quase todos os pontos de $[a, b]$. Portanto, os operadores comutam se, e somente se,

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Prova. Começamos provando o primeiro resultado. A hipótese da parte (a) é necessária para garantir a existência (vide **Definição 2.4**) de todas as derivadas da Eq.(2.71).

Denotando $n = [\nu] + 1$ e usando a definição da Eq.(2.16) para a DFRL, temos

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_{a+}^m \mathcal{D}_{a+}^\nu f) &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \mathcal{D}_{a+}^m \mathcal{D}_{a+}^n (\mathcal{I}_{a+}^{n-\nu} f) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \mathcal{D}_{a+}^{m+n} (\mathcal{I}_{a+}^{n-\nu} f) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(n+m-m-\nu)} \mathcal{D}_{a+}^{m+n} (\mathcal{I}_{a+}^{n+m-m-\nu} f) \\
 &= (\mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} f),
 \end{aligned}$$

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

onde foi usada a propriedade clássica de semigrupo dos operadores de diferenciação de ordem inteira e que por m ser um natural

$$\begin{aligned} [m + \nu] + 1 &= [m] + [\nu] + 1 \\ &= m + \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Agora, provemos o resultado da Eq.(2.72). Novamente a hipótese $\mathcal{I}_{a+}^{m+\mathbf{n}-\nu} \mathcal{D}_{a+}^m f \in AC^{m+\mathbf{n}}[a, b]$, nos garante a existência das derivadas em questão. Inclusive, devido ao **Teorema 2.7** (vide parte (b), Eq.(2.61)) podemos escrever

$$\mathcal{D}_{a+}^\nu g = \mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} \mathcal{I}_{a+}^m g,$$

com $g = \mathcal{D}_{a+}^m f$. Então pela definição da DFRL, temos

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^\nu \mathcal{D}_{a+}^m f)(x) &= [\mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} \mathcal{I}_{a+}^m \mathcal{D}_{a+}^m f](x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} (x-a)^k \right] \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k+1)} \mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} (x-a)^k \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{m+\nu} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-m-\nu}}{\Gamma(k+1-m-\nu)}, \end{aligned}$$

e, portanto, os operadores comutam se, e somente se,

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

o que conclui o resultado da parte (b). ■

O leitor atento deve ter percebido que até aqui foram apresentados praticamente todos os casos de composição entre os operadores de IFRL e DFRL, exceto a investigação a respeito da comutatividade, ou propriedade de semigrupo da DFRL para ordens

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

arbitrárias, i.e. serão válidas as igualdades

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\beta}f\right)(x)=\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta}f\right)(x)=\left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f\right)(x)?$$

Adiantamos ao leitor que, em geral, a resposta é não. E de fato, isso é imediato pelo próprio **Teorema 2.11**, mas iremos postergar o enunciado e prova do teorema que formaliza este resultado após a apresentação do seguinte exemplo, que elucida o caso.

Exemplo 2.2 (a) *Seja $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ e tome $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Então, claramente*

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\beta}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\beta}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_{a+}^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_{a+}^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)} = 0,$$

pois $\frac{1}{\Gamma(0)} \rightarrow 0$.

Por outro lado,

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^1f(x) = \frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Desse modo, temos um exemplo que nos mostra que

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\beta}f\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f\right)(x) \neq \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta}f\right)(x).$$

(b) *Agora seja $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ e tome $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{3}{2}$. Então*

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a+}^{\beta}f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\frac{1}{2}}\mathcal{D}_{a+}^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}_{a+}^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)} = 0,$$

pois $\frac{1}{\Gamma(-1)} \rightarrow 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\beta}\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}f(x) &= \mathcal{D}_{a+}^{\frac{3}{2}}\mathcal{D}_{a+}^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)}x^0 \\ &= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\mathcal{D}_{a+}^{\frac{3}{2}}x^0 \end{aligned}$$

2.1. INTEGRAL E DERIVADA DE RIEMANN-LIOUVILLE

$$\begin{aligned}
&= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} x^{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(-\frac{1}{2})} x^{-\frac{3}{2}} \\
&= -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Por fim, obtemos

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^2 x^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}},$$

o que nos fornece um exemplo em que

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f\right)(x) \neq \left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(x).$$

Finalmente, o teorema a seguir formaliza como funciona a lei dos índices para a DFRL.

Teorema 2.12 *Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, com $\mathbf{n} = [\alpha] + 1$ e $\mathbf{m} = [\beta] + 1$ e $f \in AC^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}[a, b]$, então*

(a)

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f\right)(x) &= \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-\beta} f)(a)}{\Gamma(-\alpha-k)} (x-a)^{-\alpha-k-1}.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f\right)(x) &= \left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(x) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha} f)(a)}{\Gamma(-\beta-k)} (x-a)^{-\beta-k-1}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

Prova. Partindo da definição da DFRL, temos

$$\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \left[\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f(x) \right],$$

e aplicando o **Teorema 2.10**, podemos escrever que

$$\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f(x) = \begin{cases} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha-\beta} f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-\beta} f)(a)}{\Gamma(\mathbf{n}-\alpha-k)} (x-a)^{\mathbf{n}-\alpha-k-1}, & \mathbf{n}-\alpha \geq \beta, \\ \mathcal{D}_{a+}^{\beta-\mathbf{n}+\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-\beta} f)(a)}{\Gamma(\mathbf{n}-\alpha-k)} (x-a)^{\mathbf{n}-\alpha-k-1}, & \mathbf{n}-\alpha < \beta. \end{cases}$$

Observando que pelo **Teorema 2.7** (parte b) temos

$$\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha-\beta} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x)$$

e que pelo **Teorema 2.11** (parte a) temos

$$\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{D}_{a+}^{\beta-\mathbf{n}+\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x),$$

então podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f(x) &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \left[\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\alpha} \mathcal{D}_{a+}^{\beta} f(x) \right] \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) - \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-\beta} f)(a)}{\Gamma(\mathbf{n}-\alpha-k)} (x-a)^{\mathbf{n}-\alpha-k-1} \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-\beta} f)(a)}{\Gamma(-\alpha-k)} (x-a)^{-\alpha-k-1}, \end{aligned}$$

estabelecendo a igualdade da Eq.(2.73).

A demonstração para a Eq.(2.74) é feita de modo análogo. ■

Este resultado nos mostra, como já constatado, que a comutatividade da DFRL em geral não vale a menos que tenhamos

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{m}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-\beta} f)(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{m}-1$$

2.2. DERIVADA DE CAPUTO

e

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-k-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\beta} f)(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1.$$

Na próximas seções, apresentaremos rapidamente outras abordagens para a definição do operador de diferenciação fracionária. Especificamente, veremos como definir este operador segundo a versão proposta por M. Caputo e depois segundo proposto por Grünwald e Letnikov e como cada uma delas se relaciona com as IFRL e DFRL já apresentadas. Por fim, discutiremos sobre o chamado operador de integrodiferenciação fracionária, que é uma tentativa de unificar os operadores de integração e diferenciação fracionárias sob o ponto de vista de um único operador, mais precisamente, veremos que a ideia é obter a DFRL $\mathcal{D}_{a+}^{\nu}$ a partir da extensão analítica da IFRL $\mathcal{I}_{a+}^{\nu}$ para os índices $\nu \leq 0$ e, logo em seguida, mencionamos sobre a derivada de Marchaud, pois trata do mesmo princípio. Inclusive, chamamos atenção para o importante resultado que apresentaremos sobre a generalização da regra de Leibniz para a (integro)diferenciação do produto de duas funções. Alertamos ainda que existem muitas outras formas de definir integrais e derivadas fracionárias ao longo de diferentes domínios, e.g. Wyl, Riesz, Miller-Ross (sequenciais), entre outras, mas que não são abordadas neste trabalho [17, 23, 24, 36]. O leitor que quiser obter mais informações para estes casos pode consultar, por exemplo, [12, 13, 21, 25, 32, 41, 48].

2.2 Derivada de Caputo

Lembremos que ao definirmos a DFRL, nós primeiro tivemos que definir a IFRL. Daí, pelo diagrama da Eq.(2.20), verificamos que a DFRL é obtida pela aplicação do operador $\mathcal{I}^{\nu}$ seguido do operador

$$\mathcal{D}^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{d}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{d}x^{\mathbf{n}}},$$

onde $\mathbf{n} = [\text{Re}(\nu)] + 1$. O leitor pode estar se perguntando e se invertêssemos a ordem destes operadores? Ou seja, se tivéssemos a seguinte sequência de operações

$$f \longrightarrow \boxed{\mathcal{D}^{\mathbf{n}}} \longrightarrow (\mathcal{D}^{\mathbf{n}} f)(x) \longrightarrow \boxed{\mathcal{I}^{\mathbf{n}-\nu}} \longrightarrow ? = \mathcal{D}^{\nu} f \quad (2.75)$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

então o resultado é um operador de diferenciação fracionária válido? Isto é, podemos afirmar que $\mathcal{D}^\nu = \mathcal{I}^{\mathbf{n}-\nu} [\mathcal{D}^{\mathbf{n}}]$? Se a resposta for afirmativa, ele é de alguma forma equivalente a DFRL definida na seção anterior?

De fato, $\mathcal{D}^\nu = \mathcal{I}^{\mathbf{n}-\nu} [\mathcal{D}^{\mathbf{n}}]$ é bem definido e é conhecida como a *derivada fracionária de Caputo* (DFC) e a classe de funções que podemos operar são aquelas nas quais $f \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}}$. Quanto a sua equivalência com a DFRL (i.e., $\mathcal{D}^\nu = \mathcal{D}^{\mathbf{n}} [\mathcal{I}^{\mathbf{n}-\nu}]$), veremos adiante que a definição segundo Caputo é mais restritiva, pois exige condições mais fortes sobre f , mas há uma interseção entre as classes de funções (deriváveis segundo RL e deriváveis segundo Caputo) nos quais uma definição coincide com a outra.

Historicamente, a definição de DFRL atingiu maturidade primeiro e no momento há uma quantidade crescente de bibliografia apresentando todo tratamento formal requerido pela Matemática das propriedades desta definição e não se pode negar a sua importância no desenvolvimento da teoria de cálculo fracionário nos ramos da Matemática pura. Mas de certa forma, alguns problemas aplicados que fizeram uso inicial da teoria do cálculo fracionário, chegaram ao dilema entre a bem estabelecida teoria abstrata da Matemática e a necessidade da interpretação física, principalmente no que se refere à interpretação das chamadas condições iniciais relacionadas às equações diferenciais de ordem fracionária. De modo muito simples, os problemas aplicados, requerem que possamos interpretar fisicamente condições iniciais contendo $f(a)$, $f'(a)$, etc... mas como interpretar fisicamente condições iniciais estabelecidas segundo a abordagem de Riemann-Liouville¹⁶, visto que estes envolvem os limites de derivadas fracionárias nos pontos terminais $x = a$? Contornando este problema, uma definição alternativa foi apresentada por M. Caputo, como descrito a seguir.

Definição 2.5 *Sejam $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{C}$, com $\text{Re}(\nu) > 0$, ${}_a\mathcal{D}_x^\nu$ e ${}_x\mathcal{D}_b^\nu$ as DFRLs como nas Eq.(2.16) e Eq.(2.17), defina $\mathbf{n} = [\nu] + 1$, $\nu \notin \mathbb{N}_0$; $\mathbf{n} = \nu$ se $\nu \in \mathbb{N}_0$, então as expressões*

$${}_a\mathcal{D}_x^\nu f(x) = \left({}_a\mathcal{D}_x^\nu \left[f(t) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \quad (2.76)$$

¹⁶ Apesar da dificuldade inicial para estas interpretações, já há trabalhos que propõe ideias de como isso pode ser realizado [33, 42, 43].

2.2. DERIVADA DE CAPUTO

e

$${}_x^C \mathcal{D}_b^\nu f(x) = \left({}_x \mathcal{D}_b^\nu \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x) \quad (2.77)$$

definem as derivadas fracionárias de Caputo à esquerda e à direita, respectivamente.

Comparando as definições dadas pelas Eq.(2.76) e Eq.(2.77) para as DFC e as definições Eq.(2.16) e Eq.(2.17) para as DFRL, notamos a seguinte relação entre elas

$${}_a^C \mathcal{D}_x^\nu f(x) = {}_a \mathcal{D}_x^\nu f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\nu+1)} (x-a)^{k-\nu} \quad (2.78)$$

e

$${}_x^C \mathcal{D}_b^\nu f(x) = {}_x \mathcal{D}_b^\nu f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\nu+1)} (b-x)^{k-\nu} \quad (2.79)$$

que podem ser comprovadas simplesmente derivando-se segundo RL os termos

$$\left({}_a \mathcal{D}_x^\nu \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x)$$

e

$$\left({}_x \mathcal{D}_b^\nu \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x)$$

usando repetidas vezes integração por partes e a regra de Leibniz para derivação de integrais, ou mais diretamente pela aplicação dos resultados das Eq.(2.31c) e Eq.(2.31d).

Portanto, se tivermos as condições iniciais $f^{(k)}(a) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, os somatórios nas expressões Eq.(2.78) e Eq.(2.79) se anulam e temos a condição em que ambas derivadas fracionárias (DFRL e DFC) coincidem.

O teorema a seguir, nos permite obter a clássica representação integral da DFC, como apresentados, por exemplo, em [12, 21].

Teorema 2.13 *Sejam $\Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{C}$, com $\text{Re}(\nu) > 0$, $n = [\nu] + 1$, $\nu \notin \mathbb{N}_0$; $n = \nu$ se $\nu \in \mathbb{N}_0$. Se $f \in AC(\Omega)$, então as DFC Eq.(2.76) e Eq.(2.77) existem para*

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

quase todos os pontos de Ω e podem ser representadas como

$$\begin{aligned} {}^C_a\mathcal{D}_x^\nu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \int_a^x (x - t)^{\mathbf{n} - \nu - 1} f^{(\mathbf{n})}(t) \, dt \\ &= ({}_a\mathcal{D}_x^{-\mathbf{n} + \nu} \mathcal{D}^{\mathbf{n}} f)(x) \end{aligned} \quad (2.80)$$

e

$$\begin{aligned} {}^C_x\mathcal{D}_b^\nu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \int_x^b (t - x)^{\mathbf{n} - \nu - 1} f^{(\mathbf{n})}(t) \, dt \\ &= (-1)^{\mathbf{n}} ({}_x\mathcal{D}_b^{-\mathbf{n} + \nu} \mathcal{D}^{\mathbf{n}} f)(x). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Prova. A demonstração é feita partindo-se das definições Eq.(2.76) e Eq.(2.77), integrando-se por partes e diferenciando-se usando a regra de Leibniz $\mathbf{n}$ vezes, assim temos

$$\begin{aligned} {}^C_a\mathcal{D}_x^\nu f(x) &= \left({}_a\mathcal{D}_x^\nu \left[f(t) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right] \right) (x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^{\mathbf{n}} \left\{ {}_a\mathcal{I}_x^{\mathbf{n} - \nu} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Integrando-se por partes a expressão dentro dos colchetes, obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_a^x \left[f(t) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right] (x - t)^{\mathbf{n} - \nu - 1} \, dt \\ &= \left[\left(f(t) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right) \left(-\frac{(x - t)^{\mathbf{n} - \nu}}{\mathbf{n} - \nu} \right) \right]_{t=a}^{t=x} + \\ &\quad \int_a^x \frac{(x - t)^{\mathbf{n} - \nu}}{\mathbf{n} - \nu} \frac{d}{dt} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t - a)^k \right] \, dt \\ &= \int_a^x \frac{(x - t)^{\mathbf{n} - \nu}}{\mathbf{n} - \nu} \left[f'(t) - \sum_{k=1}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k - 1)!} (t - a)^{k-1} \right] \, dt. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Usando Eq.(2.83) em Eq.(2.82), e repetindo o processo mais $\mathbf{n} - 1$ vezes, segue o

2.3. DERIVADA DE GRÜN WALD-LETNIKOV

resultado para Eq.(2.80):

$$\begin{aligned}
& {}^C\mathcal{D}_x^\nu f(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} \right)^{\mathbf{n}} \int_a^x \frac{(x-t)^{\mathbf{n}-\nu}}{\mathbf{n} - \nu} \left[f'(t) - \sum_{k=1}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right] \mathbf{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} \right)^{\mathbf{n}-1} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1} \left[f'(t) - \sum_{k=1}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1} \right] \mathbf{d}t \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1} f^{(\mathbf{n})}(t) \mathbf{d}t.
\end{aligned}$$

A prova para Eq.(2.81) é análoga. ■

Note que no caso em que $\nu \in \mathbb{N}_0$, temos $\mathbf{n} = \nu$, então Eq.(2.80) se reduz simplesmente à derivada usual de ordem inteira $\mathcal{D}^{\mathbf{n}}f(x)$ e Eq.(2.81) se reduz a $(-1)^{\mathbf{n}}\mathcal{D}^{\mathbf{n}}f(x)$ e, portanto, para o caso inteiro ambas DFC e DFRL coincidem com a definição clássica.

Observação 2.3 *Observe que enquanto a DFRL de uma constante, em geral, não é zero (vide Eq.(2.32) e Eq.(2.33)), a DFC de uma constante se anula, como no caso da derivada de ordem inteira. De fato, se $f(x) = k$ para $k \in \mathbb{R}$, então usando, por exemplo, a expressão Eq.(2.80), o integrando se anula devido ao fato de que $f^{(\mathbf{n})}(t) = \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\right)^{\mathbf{n}} k = 0$, onde $\mathbf{n} = [\nu] + 1$.*

2.3 Derivada de Grünwald-Letnikov

Nesta seção definimos a derivada fracionária segundo Grünwald-Letnikov e investigamos algumas de suas propriedades, em particular, verificamos que a partir da sua definição é possível recuperar as definições da DFRL e da DFC como casos particulares.

Lembremos que para $n \in \mathbb{N}$, a expressão

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x_0 - kh) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^n f)(x_0)}{h^n},
\end{aligned} \tag{2.84}$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

define a n -ésima derivada de f calculada em $x_0 \in \mathcal{Dom}(f)$, onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

são os coeficientes binomiais e denotamos as diferenças de ordem n da função f avaliadas no ponto $x_0 \in \mathcal{Dom}(f)$ por

$$(\Delta_h^n f)(x_0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x_0 - kh).$$

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov (DFGL) calculada em $x_0 = x \in [a, b]$ é obtida a partir da Eq.(2.84), simplesmente generalizando-se $n \in \mathbb{N}$ por $\mathbb{R} \ni \nu > 0$. Nesse caso, denotando $h = \frac{x-a}{n}$, onde $a \in \mathbb{R}$ e fazendo $n \rightarrow \infty$, a soma definida em $(\Delta_h^n f)(x)$ torna-se uma série infinita e os coeficientes binomiais são descritos em termos da função gama. Assim,

$$\begin{aligned} \left({}_a \tilde{\mathcal{D}}_x^\nu f\right)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\nu}{k} f(x - kh) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu-k+1)} f(x - kh) \end{aligned} \quad (2.85)$$

e a expressão em Eq.(2.85) fica bem definida, desde que o limite exista. Note que nesta definição não é exigida nenhuma propriedade adicional de f (e.g., ser diferenciável, contínua, etc...), apenas que ela esteja definida no ponto $x_0 = x$ em questão. Desse modo, para um $x_0 = x \in [a, b]$ e $a < x$ arbitrário, a expressão

$$\left({}_a \tilde{\mathcal{D}}_x^\nu f\right)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\nu}{k} f(x - kh) \quad (2.86)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu-k+1)} f(x - kh) \quad (2.87)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\tilde{\Delta}_h^n f\right)(x)}{h^\nu} \quad (2.88)$$

2.3. DERIVADA DE GRÜNWALD-LETNIKOV

define a expressão para a DFGL à esquerda¹⁷ como uma função da variável x .

Um aspecto negativo da DFGL é que calcular derivadas (manualmente) a partir de limites, normalmente é uma tarefa extremamente trabalhosa e difícil. Por outro lado, computacionalmente vantajosa, afinal na maioria das vezes os problemas práticos são quase sempre modelados em computador e estão sujeitos às limitações da aritmética de ponto flutuante, de modo que todas as operações realizadas são na verdade aproximações. Portanto, ter em mãos uma fórmula discretizada para o operador fracionário, nos permite implementar algoritmos que aproximam (iterativamente) o valor real das derivadas, onde a ordem do erro dependerá, por exemplo, do algoritmo implementado e do fator de precisão da máquina em que estamos realizando os cálculos e estes, em geral, são satisfatórios o suficiente para serem usados na prática.

Para finalizarmos esta seção, iremos demonstrar que se calcularmos o limite da expressão Eq.(2.86) chegaremos na definição da DFRL e pela expressão Eq.(2.78) saberemos como relacioná-la com a DFC.

Para esta finalidade, precisamos recorrer ao resultado do seguinte teorema¹⁸:

Teorema 2.14 *Sejam $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ e $(\alpha_{n,k})_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N}_0}}$ seqüências numéricas tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = 1, \quad (2.89)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,k} = 0, \quad \alpha_{n,k} \in \mathbb{R}, \quad \forall k, \quad (2.90)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = A, \quad \alpha_{n,k} \in \mathbb{R}, \quad \forall k, \quad (2.91)$$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_{n,k}| < K, \quad \forall n. \quad (2.92)$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \beta_k = A. \quad (2.93)$$

¹⁷Tomando-se $x_0 = x \in [a, b]$ com $x < b$ arbitrário e tomando cuidado para alguns pequenos ajustes na expressão da Eq.(2.85) define-se a DFGL à direita $\left({}_x \mathcal{D}_b^\nu f\right)(x)$.

¹⁸Uma prova deste teorema pode ser encontrado, e.g. em [41].

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

Assim, para calcularmos o limite na Eq.(2.86), considere a seguinte identidade

$$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1}, \quad (2.94)$$

podemos reescrever Eq.(2.86) como

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\Delta}_h^\nu f)(x)}{h^\nu} &= \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\nu-1}{k} f(x-kh) \\ &\quad + \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{\nu-1}{k-1} f(x-kh) \\ &= \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\nu-1}{k} f(x-kh) \\ &\quad + \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{\nu-1}{k} f(x-(k+1)h) \\ &= \frac{1}{h^\nu} (-1)^n \binom{\nu-1}{n} f(a) \\ &\quad + \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\nu-1}{k} \Delta f(x-kh), \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde

$$\Delta f(x-kh) = f(x-kh) - f(x-(k+1)h).$$

Aplicando a propriedade binomial dada pela Eq.(2.94) na Eq.(2.95) $n-1$ vezes, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{\Delta}_h^\nu f)(x)}{h^\nu} &= \frac{1}{h^\nu} (-1)^n \binom{\nu-1}{n} f(a) + \frac{1}{h^n} (-1)^{n-1} \binom{\nu-2}{n-1} \Delta f(a+h) \\ &\quad + \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{\nu-2}{k} \Delta^2 f(x-kh) \\ &= \dots \end{aligned}$$

2.3. DERIVADA DE GRÜNWALD-LETNIKOV

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{\nu-k-1}{n-k} \Delta^k f(a+kh) \\
&\quad + \frac{1}{h^\nu} \sum_{r=0}^{n-n-2} (-1)^r \binom{\nu-m-1}{r} \Delta^n f(x-rh). \tag{2.96}
\end{aligned}$$

Agora vamos avaliar o limite do termo geral do primeiro somatório na Eq.(2.96):

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} (-1)^{n-k} \binom{\nu-k-1}{n-k} \Delta^k f(a+kh) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} (-1)^{n-k} \binom{\nu-k-1}{n-k} (n-k)^{\nu-k} \\
&\quad \times \left(\frac{n}{n-k} \right)^{\nu-k} (nh)^{-\nu+k} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= (x-a)^{-\nu+k} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{\nu-k-1}{n-k} (n-k)^{\nu-k} \\
&\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{\nu-k} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} \\
&= \frac{(x-a)^{-\nu+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(-\nu+k+1)}, \tag{2.97}
\end{aligned}$$

onde foi usado que

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-k} \binom{\nu-k-1}{n-k} (n-k)^{\nu-k} &= \frac{1}{\Gamma(-\nu+k+1)}, \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{\nu-k} &= 1, \\
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^k f(a+kh)}{h^k} &= f^{(k)}(a).
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular o limite do segundo termo na Eq.(2.96), começando por reescrevê-lo da seguinte forma:

$$\frac{1}{\Gamma(-\nu+n)} \sum_{k=0}^{n-n-2} (-1)^k \Gamma(-\nu+n) \binom{\nu-n-2}{k} k^{-n+1+\nu} \times h(kh)^{n-1-\nu} \frac{\Delta^n f(x-kh)}{h^n}.$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

Defina

$$\begin{aligned}\beta_k &= (-1)^k \Gamma(-\nu + \mathbf{n}) \binom{\nu - \mathbf{n}}{k} k^{-\mathbf{n}+1+\nu}, \\ \alpha_{n,k} &= h(kh)^{\mathbf{n}-1-\nu} \frac{\Delta^{\mathbf{n}} f(x - kh)}{h^{\mathbf{n}}}, \quad h = \frac{x - a}{n}.\end{aligned}$$

Usando a representação por limite da função gama¹⁹, temos

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \Gamma(-\nu + \mathbf{n}) \binom{\nu - \mathbf{n}}{k} k^{-\mathbf{n}+1+\nu} \\ &= 1.\end{aligned}\tag{2.98}$$

E se $\mathbf{n} - 1 - \nu > -1$, então

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-\mathbf{n}-2} \alpha_{n,k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} h(kh)^{\mathbf{n}-1-\nu} \frac{\Delta^{\mathbf{n}} f(x - kh)}{h^{\mathbf{n}}} \\ &= \int_a^x (x - t)^{\mathbf{n}-1-\nu} f^{(\mathbf{n})}(t) dt.\end{aligned}\tag{2.99}$$

Portanto, considerando os resultados da Eq.(2.98) e da Eq.(2.99) e aplicando o **Teorema 2.14** (pois agora temos satisfeitas todas as condições necessárias), podemos concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\tilde{\Delta}_h^\nu f)(x)}{h^n} = \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(x - a)^{-\nu+k} f^{(k)}(a)}{\Gamma(-\nu + k + 1)} + \frac{1}{\Gamma(-\nu + \mathbf{n})} \int_a^x \frac{f^{(\mathbf{n})}(t)}{(x - t)^{\nu-\mathbf{n}+1}} dt. \tag{2.100}$$

Observamos que o resultado apresentado na Eq.(2.100) requer que $f \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}}[a, b]$ e que $\mathbf{n}$ seja um inteiro tal que $\mathbf{n} - 1 < \nu < \mathbf{n}$. Portanto, para termos a existência da DFGL basta que ela seja definida nos pontos do intervalo $[a, b]$, no entanto, para que ela coincida com a DFRL (e consequentemente com a DFC) é necessário que a função que estamos derivando seja $\mathbf{n}$ vezes continuamente diferenciável, como mostra a dedução do limite da Eq.(2.100).

¹⁹ $\Gamma(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^z}{z(z+1) \cdots (z+k)}.$

2.4 Operador de Integrodiferenciação

O intuito desta seção é discutir a possibilidade de unificação dos operadores fracionários de integração e diferenciação sob um único operador (para este trabalho, no sentido de Riemann-Liouville definidos em intervalos finitos $[a, b] \subset \mathbb{R}$). O que queremos afirmar com isso é que formalmente os operadores de IFRL ($\mathcal{I}_{a+}^\nu$) e DFRL ($\mathcal{D}_{a+}^\nu$) são operadores distintos, cada um com o seu domínio e imagem, mas veremos logo mais, que há a possibilidade de identificarmos a IFRL e a DFRL como casos particulares de um único operador $\mathfrak{D}_{a+}^\nu$ que denotaremos por integrodiferenciação (fracionária) de ordem²⁰ $\nu \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathfrak{D}_{a+}^\nu = \begin{cases} \mathcal{D}_{a+}^\nu, & \nu > 0 \text{ (DFRL)}, \\ \mathbf{I}, & \nu = 0, \\ \mathcal{I}_{a+}^{-\nu}, & \nu < 0 \text{ (IFRL)}. \end{cases} \quad (2.101)$$

Claramente a maior preocupação é identificar corretamente, quando é possível (e se é que faz sentido) escrever para $\nu > 0$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{-\nu} f)(x) = (\mathcal{I}_{a+}^\nu f)(x), \quad (2.102)$$

e,

$$(\mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) = (\mathcal{I}_{a+}^{-\nu} f)(x). \quad (2.103)$$

Para respondermos a esta pergunta, iniciamos com a seguinte observação: considere a função $f(x) = (x - a)^{\beta-1}$, com $\beta > 0$, definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sabemos pelos resultados das Eq.(2.31a) e Eq.(2.31c) que as respectivas IFRL e DFRL de ordem $\nu > 0$ são dadas por

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^\nu (t - a)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \nu)} (x - a)^{\beta+\nu-1}, \\ (\mathcal{D}_{a+}^\nu (t - a)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \nu)} (x - a)^{\beta-\nu-1}, \end{aligned}$$

e claramente ambas as expressões podem ser convertidas uma na outra simplesmente

²⁰Como já observado, a ordem poderia ser estendida para os números complexos, mas para os propósitos deste trabalho, nos restringiremos ao caso real.

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

fazendo $\nu \rightarrow -\nu$. Ou seja, pelo menos para este caso as relações das Eq.(2.102) e Eq.(2.103) parecem ser verdadeiras. Esta singela análise, no entanto, esconde um problema mais relevante a respeito da legalidade de tal abordagem, em específico quando é feita a transformação $\nu \rightarrow -\nu$ diretamente nas definições da IFRL e DFRL segundo as Eq.(2.1) e Eq.(2.16). Ora, visto que a DFRL foi definida a partir da IFRL, convém analisar o que acontece quando usamos $-\nu$ no lugar de ν na Eq.(2.1). Ou seja, se $\nu > 0 \rightarrow -\nu < 0$, então

$$(\mathcal{I}_{a+}^{-\nu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt, \quad (2.104)$$

resulta numa integral que, em geral, diverge mesmo se $f \in L_1[a, b]$. No caso da DFRL a situação parece ainda pior, pois a expressão resultante parece inapropriada e inconsistente²¹

$$(\mathcal{D}_{a+}^{-\nu} f)(x) \equiv \mathcal{D}_{a+}^{-\mathbf{n}} [(\mathcal{I}_{a+}^{-\mathbf{n}+\nu} f)(x)] = \left(\frac{d}{dx} \right)^{-\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{a+}^{-\mathbf{n}+\nu} f)(x). \quad (2.105)$$

Mesmo que a integral $(\mathcal{I}_{a+}^{-\mathbf{n}+\nu} f)(x)$ convergisse, qual seria a interpretação para o operador $\mathcal{D}_{a+}^{-\mathbf{n}}$? O próximo teorema elucida esta questão, fornecendo uma expressão alternativa para a DFRL. Antes de enunciarmos este resultado, lembremos de alguns fatos sobre o conceito de *integral de Hadamard* ou ainda *parte finita de Hadamard* que é um método de regularização de integrais divergentes.

Integrais do tipo

$$\int_a^b (x-a)^{-\beta} f(x) dx, \quad \beta \geq 1$$

divergem sempre que $f(a) \neq 0$, mesmo assim, em geral, é interessante associar a esta integral um valor finito. Isso pode ser feito, segundo sugestão do matemático francês Jacques Hadamard (1865-1963) [20] descartando-se certos termos que causariam

²¹No mínimo teríamos um pequeno ajuste a fazer na Eq.(2.16), a saber: $\mathbf{n} = [v] + 1 \rightarrow -\mathbf{n} = -([v] + 1) = [-v] - 1$.

2.4. OPERADOR DE INTEGRODIFERENCIAÇÃO

a divergência. Por exemplo, se $\beta > 1$ a integral

$$\int_{a+\epsilon}^b (x-a)^{-\beta} \mathbf{d}x = \frac{1}{1-\beta} \left[(b-a)^{1-\beta} - \epsilon^{1-\beta} \right],$$

é claramente convergente para qualquer $\epsilon > 0$. No entanto, se tomarmos o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, a integral divergirá por causa do termo $\frac{1}{1-\beta} \epsilon^{1-\beta}$. Sendo assim, Hadamard propõe que seja ignorada a contribuição deste termo e designarmos a expressão restante, que é finita, ao resultado da integral, i.e.,

$$\mathcal{H} \int_a^b (x-a)^{-\beta} \mathbf{d}x = \frac{1}{1-\beta} (b-a)^{1-\beta},$$

sendo o símbolo $\mathcal{H}$ justaposto à esquerda ao símbolo da integral para designar justamente o resultado da integral denotado por *parte finita de Hadamard*.

Um modo preciso de definirmos a *integral de Hadamard* (quando $\beta \notin \mathbb{N}$) é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \int_a^b (x-a)^{-\beta} f(x) \mathbf{d}x \quad : \quad &= \sum_{k=0}^{\mathbf{n}} \frac{f^{(k)}(a) (b-a)^{k+1-\beta}}{(k+1-\beta) k!} \\ &+ \int_a^b (x-a)^{-\beta} R_{\mathbf{n}}(x, a) \mathbf{d}x, \end{aligned} \quad (2.106)$$

onde $\mathbf{n} = [\beta] + 1$ e

$$R_{\mathbf{n}}(x, a) = \frac{1}{\mathbf{n}!} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}} f^{(\mathbf{n}+1)}(t) \mathbf{d}t$$

é o resto do $\mathbf{n}$ -ésimo polinômio de Taylor da f centrado no ponto $x = a$. Uma condição suficiente para a existência da integral da Eq.(2.106) é exigirmos que $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$ com $\mathbf{n} < n \in \mathbb{N}$, visto que nesse caso o resto do polinômio de Taylor possui um zero no ponto $x = a$ cuja ordem é grande o suficiente para praticamente anular o efeito da singularidade do termo $(x-a)^{-\beta}$, tornando a expressão integrável²².

Uma representação alternativa para a definição da *integral de Hadamard* que nos será útil mais adiante, segundo proposto por [15], é descrita pelo seguinte teorema.

²²No sentido impróprio segundo Riemann, ou em quase todos os pontos segundo Lebesgue.

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

Teorema 2.15 *Sejam $1 < \beta \notin \mathbb{N}$ e $\mathbf{m} = [\beta] + 1$. Se $f \in \mathcal{C}^{\mathbf{m}}[a, b]$, então*

$$\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \mathcal{H} \int_a^b (x-a)^{-\beta} f(x) \, \mathbf{d}x = \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} \frac{f^{(k)}(a) (b-a)^{k+1-\beta}}{\Gamma(k+2-\beta)} + \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-\beta+1} f^{(\mathbf{m})}(b).$$

Em vista deste último resultado, apresentamos o próximo teorema que nos fornecerá uma representação alternativa para a DFRL [13].

Teorema 2.16 *Seja $0 < \nu \notin \mathbb{N}$ e $\mathbf{n} = [\nu] + 1$. Suponha que $f \in \mathcal{C}^{\mathbf{n}}[a, b]$ e $x \in [a, b]$, então*

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \mathcal{H} \int_a^x (x-t)^{-\mathbf{n}-1} f(t) \, \mathbf{d}t.$$

Prova. Pela definição da DFRL, temos que $(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) = (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x)$, onde

$$(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1} f(t) \, \mathbf{d}t.$$

Em vista da hipótese de suavidade sobre a f , podemos integrar parcialmente a expressão acima num total de $\mathbf{n}$ vezes, obtendo

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu} f'(t) \, \mathbf{d}t \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} (x-t)^{\mathbf{n}-\nu} f(t) \Big|_{t=a}^{t=x} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu+1)} (x-a)^{\mathbf{n}-\nu} f(a) + \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu+1} f'(x) \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{k+\mathbf{n}-\nu}}{\Gamma(k+\mathbf{n}-\nu+1)} + \mathcal{I}_{a+}^{2\mathbf{n}-\nu} f^{(\mathbf{n})}(x). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) &= (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \left[\sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{k+\mathbf{n}-\nu}}{\Gamma(k+\mathbf{n}-\nu+1)} + \mathcal{I}_{a+}^{2\mathbf{n}-\nu} f^{(\mathbf{n})}(x) \right] \end{aligned}$$

2.4. OPERADOR DE INTEGRODIFERENCIAÇÃO

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a) (x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(k-\nu+1)} + \mathcal{I}_{a+}^{n-\nu} f^{(n)}(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \mathcal{H} \int_a^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt,
\end{aligned}$$

sendo a última igualdade estabelecida pelo **Teorema 2.15**. ■

Aproveitamos para mencionar que dentre as propriedades da *integral de Hadamard* (vide, e.g., [13, 20]) está o fato de que ela é uma extensão consistente do conceito de integral regular, i.e., sempre que $\int_a^b (x-a)^{-\beta} f(x) dx$ existir no sentido clássico, então $\mathcal{H} \int_a^b (x-a)^{-\beta} f(x) dx$ também existirá e ambas terão o mesmo valor. Sendo assim, podemos dizer que formalmente devemos escrever

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) = \mathcal{H}(\mathcal{I}_{a+}^{-\nu} f)(x), \quad (2.107)$$

ou ainda

$$(\mathcal{D}_{a+}^{-\nu} f)(x) = \mathcal{H}(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f)(x), \quad (2.108)$$

para $\nu \neq 1, 2, \dots$, mas, por motivos de simplicidade na notação, sempre que for necessário, usaremos a identificação feita pelas Eq.(2.102) e Eq.(2.103) tendo o sentido formal segundo as Eq.(2.107) e Eq.(2.108) como estabelecido pelo **Teorema 2.16**.

A representação da DFRL segundo o **Teorema 2.16** nos elucida um outro aspecto deste operador. Em contrapartida aos operadores de diferenciação de ordem inteira que são operadores *locais*, i.e., para calcularmos $\mathcal{D}_{a+}^n f(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $n \in \mathbb{N}$ é suficiente conhecermos o comportamento da f apenas numa vizinhança ao redor do ponto x , para calcularmos a DFRL $\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f(x)$, $\nu \notin \mathbb{N}$, no entanto, é necessário que saibamos sobre o comportamento da f ao longo de todo o intervalo $[a, x]$.

Portanto, sob esta ótica a unificação como proposta pela Eq.(2.101) parece plausível (pelo menos para funções da classe $\mathcal{C}^n[a, b] \subset AC^n[a, b]$) e os resultados listados na **Seção 2.1** podem ser reescritos em termos do operador $\mathfrak{D}_{a+}^{\nu}$, de ordem $\nu \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, listando alguns deles, o resultado do **Teorema 2.7** fica enunciado da

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

seguinte forma²³:

$$\mathfrak{D}_{a+}^p [\mathfrak{D}_{a+}^{-q} f(x)] = \mathfrak{D}_{a+}^{p-q} f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}^+, \quad (2.109)$$

desde que $f(x)$ seja, no mínimo, contínua e quando $p \geq q \geq 0$ que a derivada $\mathfrak{D}_{a+}^{p-q} f(x)$ exista.

Já o resultado do **Teorema 2.10** fica enunciado da seguinte forma²⁴:

$$\mathfrak{D}_{a+}^{-p} [\mathfrak{D}_{a+}^q f(x)] = \mathfrak{D}_{a+}^{q-p} f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathfrak{D}_{a+}^{q-k-1} f)(a)}{\Gamma(p-k)} (x-a)^{p-k-1}, \quad (2.110)$$

onde $p, q \in \mathbb{R}^+$ e $\mathbf{n} = [q] + 1$.

O resultado do **Teorema 2.11** fica descrito para $\nu > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ como

$$(\mathfrak{D}_{a+}^m \mathfrak{D}_{a+}^\nu f)(x) = (\mathfrak{D}_{a+}^{m+\nu} f)(x), \quad (2.111)$$

$$(\mathfrak{D}_{a+}^\nu \mathfrak{D}_{a+}^m f)(x) = (\mathfrak{D}_{a+}^{m+\nu} f)(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\nu-m)} (x-a)^{k-\nu-m}. \quad (2.112)$$

E o resultado do **Teorema 2.12** que fica generalizado para a forma²⁵ (desde que as derivadas em questão existam)

$$\mathfrak{D}_{a+}^p [\mathfrak{D}_{a+}^q f(x)] = \mathfrak{D}_{a+}^{p+q} f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} \frac{(\mathfrak{D}_{a+}^{q-k-1} f)(a)}{\Gamma(-p-k)} (x-a)^{-p-k-1}, \quad (2.113)$$

$$\mathfrak{D}_{a+}^q [\mathfrak{D}_{a+}^p f(x)] = \mathfrak{D}_{a+}^{p+q} f(x) - \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{(\mathfrak{D}_{a+}^{p-k-1} f)(a)}{\Gamma(-q-k)} (x-a)^{-q-k-1}, \quad (2.114)$$

onde $p, q > 0$ e $\mathbf{n} = [p] + 1$ e $\mathbf{m} = [q] + 1$.

Observe, portanto, que a igualdade entre a Eq.(2.113) e a Eq.(2.114) ocorre se, e somente se, os somatórios nos lados da direita das equações forem nulos, ou equivalen-

²³O autor em [41], mostra a validade desta propriedade para os casos $p > q \geq 0$ e $q \geq p \geq 0$.

²⁴Também apresentada em [41] e válida para $p \geq q \geq 0$ ou $q \geq p \geq 0$.

²⁵Também verificada em [41].

2.4. OPERADOR DE INTEGRODIFERENCIAÇÃO

temente,

$$(\mathfrak{D}_{a+}^{q-k-1}f)(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1), \quad (2.115)$$

$$(\mathfrak{D}_{a+}^{p-k-1}f)(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1). \quad (2.116)$$

O autor em [41] demonstra, na seção 2.3.7 do seu livro, que se $f(x)$ possuir quantidade suficiente de derivadas contínuas, então as condições Eq.(2.115) e Eq.(2.116) são equivalentes, respectivamente, a

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, \mathbf{m} - 1), \quad (2.117)$$

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, \mathbf{n} - 1). \quad (2.118)$$

Logo, se $f^{(k)}(a) = 0, (k = 0, 1, \dots, \mathbf{r} - 1)$, onde $\mathbf{r} = \max\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$, então podemos afirmar que

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} \left[\mathfrak{D}_{a+}^{\beta} f(x) \right] = \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) = \mathfrak{D}_{a+}^{\beta} \left[\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} f(x) \right].$$

Enunciamos ainda, o seguinte resultado sobre composição de operadores de integrodiferenciação para funções analíticas.

Teorema 2.17 *Seja $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ analítica em $[a, b] \subset \Omega$, então a igualdade*

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} \mathfrak{D}_{a+}^{\beta} f(x) = \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x),$$

é válida para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\beta < 1$.

Prova. Por hipótese, f pode ser representada como

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k.$$

Aplicando a regra da Eq.(2.44) (ou Eq.(2.45)) para integrar/diferenciar funções analíticas, obtemos

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\beta} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\beta)} (x-a)^{k-\beta}, \quad (2.119)$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

onde claramente o primeiro termo desta série é igual a $\frac{c_0}{\Gamma(1-\beta)} (x-a)^{-\beta}$.

Assim, para podermos aplicar o operador $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}$ à esquerda da Eq.(2.119) é necessário que $-\beta > -1$ ou, equivalentemente, $\beta < 1$ (vide Eq.(2.31a) e Eq.(2.31c)) para garantirmos a convergência da integral que define o operador $\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha}$. Daí,

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} \mathfrak{D}_{a+}^{\beta} f(x) &= \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\beta)} (x-a)^{k-\beta} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k \Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha-\beta)} (x-a)^{k-\beta-\alpha} \\ &= \mathfrak{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x), \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Como corolário do teorema acima, note que se $\alpha = -\beta$, então

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\alpha} \mathfrak{D}_{a+}^{\beta} f(x) = f(x). \quad (2.120)$$

2.4.1 Derivada de Marchaud

O leitor deve ter percebido que a ideia apresentada nesta seção a respeito da unificação dos operadores de IFRL e DFRL sob um único operador nada mais é do que procurarmos representar o operador de DFRL $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ como sendo a extensão analítica do operador de IFRL $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha}$ para os índices $\alpha < 0$. Como visto acima, isto é equivalente a afirmação de que $\mathcal{I}_{a+}^{-\alpha} = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ (mais precisamente, $\mathcal{H}\mathcal{I}_{a+}^{-\alpha} = \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$), ou ainda, termos uma representação integral para $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ o que pode ser feito através de métodos de regularização de integrais divergentes. O método apresentado acima, utilizou o conceito de *integral de Hadamard* e no fundo estas ideias foram investigadas com detalhes por Marchaud em 1927 [30] mas com o domínio das funções em intervalos infinitos. Por este motivo, a derivada definida por

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_+^{\nu} f)(x) &= \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{\nu+1}} dt \\ &= \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{\nu+1}} dt, \end{aligned} \quad (2.121)$$

2.4. OPERADOR DE INTEGRODIFERENCIAÇÃO

$-\infty < x < \infty$, $0 < \nu < 1$ é denotada *derivada fracionária de Marchaud* de ordem ν .

A derivada acima, pode ser restrita ao intervalo $\mathbb{R}^+$, obtendo a seguinte forma

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{0+}^\nu f)(x) &= \frac{f(0)}{\Gamma(1-\nu)x^\nu} + \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^x \frac{f'(x-t)}{t^\nu} dt \\ &= \frac{f(x)}{\Gamma(1-\nu)x^\nu} + \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{\nu+1}} dt, \end{aligned}$$

$x > 0$, $0 < \nu < 1$ fazendo o papel da *derivada fracionária de Marchaud* à esquerda de ordem ν [25, 48].

2.4.2 Integrodiferenciação e a Regra de Leibniz

Para finalizarmos esta seção, discutimos sobre a generalização da regra de Leibniz para a diferenciação do produto de duas funções para os operadores $\mathfrak{D}_{a+}^\nu$, $\nu \in \mathbb{R}$.

Lembremos inicialmente do resultado clássico.

Teorema 2.18 (Regra de Leibniz Clássica) *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $f, g \in \mathcal{C}^n[a, b]$. Então,*

$$\mathcal{D}^n [fg] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\mathcal{D}^k f) (\mathcal{D}^{n-k} g), \quad (2.122)$$

onde $\mathcal{D}^k$ é o operador de diferenciação de ordem $k \in \mathbb{N}$ e $\binom{n}{k}$ são os coeficientes binomiais (vide Eq.(1.34)). Em particular, se $n = 1$, temos o resultado clássico,

$$[fg]' = fg' + f'g. \quad (2.123)$$

A generalização que apresentamos para esta regra é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.19 (Regra de Leibniz Fracionária) *Sejam f e g analíticas em $[a, b]$, então*

$$\mathfrak{D}_{a+}^\nu [fg] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} f^{(k)} (\mathfrak{D}_{a+}^{\nu-k} g), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (2.124)$$

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

onde $\binom{\nu}{k}$ são os coeficientes binomiais generalizados descritos em termos da função gama (vide Eq.(1.33)).

Prova. Por hipótese, podemos concluir que o produto fg também é uma função analítica em $[a, b]$ e, portanto, podemos escrever em virtude do **Teorema 2.3** que

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\nu} [fg] = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu}{j} \frac{(x-a)^{j-\nu}}{\Gamma(j+1-\nu)} (fg)^{(j)}.$$

Aplicando a regra de Leibniz clássica (vide Eq.(2.122)) e trocando a ordem dos somatórios, obtemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{a+}^{\nu} [fg] &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu}{j} \frac{(x-a)^{j-\nu}}{\Gamma(j+1-\nu)} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (\mathcal{D}^k f) (\mathcal{D}^{j-k} g) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \binom{\nu}{j} \frac{(x-a)^{j-\nu}}{\Gamma(j+1-\nu)} \binom{j}{k} (\mathcal{D}^k f) (\mathcal{D}^{j-k} g) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{D}^k f) \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu}{j+k} \frac{(x-a)^{j-\nu+k}}{\Gamma(j+1-\nu+k)} \binom{j+k}{k} (\mathcal{D}^j g). \end{aligned}$$

Observando que $\binom{\nu}{j+k} \binom{j+k}{k} = \binom{\nu}{k} \binom{\nu-k}{j}$ e usando novamente o **Teorema 2.3** podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{a+}^{\nu} [fg] &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{D}^k f) \binom{\nu}{k} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\nu-k}{j} \frac{(x-a)^{j-\nu+k}}{\Gamma(j+1-\nu+k)} (\mathcal{D}^j g) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} f^{(k)} (\mathfrak{D}_{a+}^{\nu-k} g), \end{aligned}$$

donde se conclui a demonstração. ■

Agora alguns comentários a respeito das fórmulas apresentadas. Primeiramente, note que a fórmula da regra de Leibniz clássica, Eq.(2.122) é simétrica, i.e., podemos trocar as funções f e g de posição sem alterar a expressão resultante. Segundo, para

2.4. OPERADOR DE INTEGRODIFERENCIAÇÃO

calcularmos a n -ésima derivada do produto fg é necessário apenas a diferenciabilidade de ordem n de cada uma das funções f e g , como exigido na hipótese. Verifica-se, entretanto, que estas propriedades não são trivialmente transferidas para o caso fracionário²⁶ (vide Eq.(2.124)) e, de fato, isto tem sido objeto de estudo de muitos pesquisadores ao longo dos anos. Citamos por exemplo, os trabalhos de Watanabe [60] e as extensivas investigações feitas por Osler [37]-[40]. Este último, preocupou-se com a possibilidade de manter a validade da simetria da fórmula original através de restrições sobre as funções f e g e analisando cautelosamente a região de convergência das expansões em série das mesmas. Inclusive, ele se questionou se a fórmula da Eq.(2.124) não se tratava de um caso especial de uma expressão ainda mais geral e isto o levou a provar a validade da seguinte fórmula para a regra de Leibniz [35, 37], e que também pode ser encontrada demonstrada no livro [48]

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\nu} [fg] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \binom{\nu}{k+\beta} \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\nu-\beta-k} f \right) g^{(\beta+k)}, \quad (2.125)$$

com $\nu, \beta \in \mathbb{R}$ (β um parâmetro arbitrário) e $\nu \neq -1, -2, \dots$ se $\beta \notin \mathbb{Z}$.

Observe inclusive que devido a simetria da regra de Leibniz clássica o **Teorema 2.18** poderia ter sido escrito da seguinte forma

$$\mathcal{D}^n [fg] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\mathcal{D}^{n-k} f) (\mathcal{D}^k g) \quad (2.126)$$

o que teria nos levado a concluir um resultado análogo ao **Teorema 2.19**, mas descrito na seguinte forma²⁷

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\nu} [fg] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} \left(\mathfrak{D}_{a+}^{\nu-k} f \right) g^{(k)}. \quad (2.127)$$

Mais recentemente, há esforços voltados para a definição de operadores de diferen-

²⁶Em particular, a versão que apresentamos para a generalização da regra de Leibniz para o operador de integrodiferenciação fracionária segundo Riemann-Liouville $\mathfrak{D}_{a+}^{\nu}$, não possui estas características em geral!

²⁷De fato, encontra-se na literatura sobre cálculo fracionário ambas as versões, mas normalmente, quando apresentado uma delas, não é mencionado sobre a outra.

CAPÍTULO 2. INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

ciação fracionária²⁸ que satisfaçam a “regra de Leibniz” (e.g., [26]) na forma

$$D_{a+}^{\alpha} [fg] = (D_{a+}^{\alpha} f) g + f (D_{a+}^{\alpha} g), \quad (2.128)$$

entretanto, em um trabalho recente publicado por Tarasov [54], foi demonstrado que a violação da regra da Eq.(2.128) é uma característica de todos os operadores fracionários. Wang, entretanto, em recente publicação [59] rebate que os resultados de Tarasov [54] só são válidos para as funções que são “classicamente diferenciáveis” (i.e., baseada em aproximações lineares) e que o intuito é propor uma nova regra de diferenciação baseada em aproximações não lineares (aproximáveis por funções do tipo potência).

Neste trabalho, não investigamos em detalhes as implicações destas novas abordagens, pois para os nossos propósitos, a versão apresentada via **Teorema 2.19** nos é suficiente.

Encerramos esta parte do trabalho com a observação de um fato que se torna evidente no estudo da teoria do Cálculo Fracionário. É grande a dificuldade encontrada pelos diversos estudiosos na tentativa de generalização das regras usuais e das suas aplicabilidades em problemas teóricos e práticos visto não termos ainda disponível uma definição “universal” para os operadores de integração e diferenciação de ordem arbitrária do mesmo modo que já ocorre com o Cálculo de ordem inteira, i.e., a teoria ainda não está suficientemente unificada sobre uma definição que satisfaça o “gosto” de todos os seus usuários (se é que isso é possível). O surgimento deste grande número de definições (Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Marchaud, Weyl, Riesz entre outros) está ligado não somente à necessidade de termos em mãos operadores que, por um lado, generalizem os conceitos e resultados clássicos (já provados) de ordem inteira, mas que inclua a possibilidade de modelar novos problemas “sem perder de vista” os possíveis problemas (velhos) clássicos²⁹. Isto leva a natural preocupação com a interrelação (e possíveis equivalências) entre as diversas definições e, sempre que possível, as interpretações geométricas.

De todo modo, as diversas definições existentes também indicam que o ramo do

²⁸Estes novos operadores têm sido chamados de D_{a+}^{α} α -Derivadas, $\alpha \in \mathbb{R}$.

²⁹Ou seja, as generalizações quando consistentes devem modelar e solucionar os problemas conhecidos quando o reduzimos a ordens inteiras.

2.4. OPERADOR DE INTEGRODIFERENCIAÇÃO

Cálculo Fracionário é fértil no sentido de que, mesmo sem uma “definição unificada”, cada uma delas propõe novos e promissores resultados³⁰ advindos de uma vasta gama de problemas. Por exemplo, já citamos anteriormente no texto publicações no ramo da viscoelasticidade linear fracionária [29, 31, 45, 49], osciladores harmônicos fracionários [21, 45, 53], problemas de difusão fracionárias [5, 6, 28], controladores fracionários [11, 12, 51, 63], entre diversos outros problemas de Física [22, 50, 61] e Matemática [1, 13, 25, 32, 48].

³⁰Quando comparados com as abordagens “clássicas”, em geral, os modelos fracionários fornecem previsões teóricas mais consistentes com os dados experimentais.

Capítulo 3

Soluções da Equação de Bessel via Cálculo Fracionário

Este capítulo é dedicado ao estudo da equação de Bessel (vide Eq.(1)) utilizando uma metodologia do cálculo fracionário e é parte de um trabalho [46] desenvolvido ao longo dos estudos desta tese. Como mencionado na introdução deste trabalho, “novas” teorias são sempre bem vindas mesmo quando aplicada a “velhos” problemas, pois em geral nos fornecem um entendimento mais profundo sobre certas propriedades e relações (pré-)existentes, ou ainda, eventualmente nos fornecem “*insights*” sobre novas relações e propriedades ainda desconhecidas ou pouco compreendidas. Assim, nas seções a seguir, investigando a equação de Bessel pela metodologia do cálculo fracionário como proposta pelos autores de [35], apontamos uma inconsistência despercebida pelos autores supracitados ao tentarem obter uma das soluções e formalizamos através de uma discussão detalhada as devidas limitações ao método empregado e concluindo a nossa investigação de como o cálculo fracionário pode ser uma ferramenta útil na resolução de equações diferenciais, em especial, da Física-Matemática.

3.1 Resolução da Equação de Bessel

Nesta seção vamos discutir a solução geral da equação de Bessel de ordem p , caso particular da equação hipergeométrica confluyente, através da metodologia advinda do cálculo de ordem não inteira. A metodologia original foi proposta pelos autores de [35], no entanto, observamos que estes cometem um equívoco ao justificar a obtenção de uma segunda solução linearmente independente e isto decorre de uma incorreta verificação das condições para os quais o operador IFRL é a inversa à esquerda da DFRL. No devido momento, mais adiante, isto será explicitamente indicado e, posteriormente, investigado cautelosamente as causas do equívoco.

Se introduzirmos a mudança de variável $z^2 = 4x$ na equação de Bessel

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2) w = 0, \quad z > 0, \quad (3.1)$$

onde $w = w(z)$ e p é um parâmetro, obtemos uma variante desta última da seguinte forma:

$$x^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + x \frac{dw}{dx} + \left(x - \frac{p^2}{4}\right) w = 0, \quad (3.2)$$

com $w = w(x)$, $x > 0$.

Como sabemos da teoria das equações diferenciais lineares ordinárias, a solução geral é dada pela combinação linear de duas soluções $w_1 = w_1(x)$ e $w_2 = w_2(x)$ linearmente independentes, cada qual dependentes do parâmetro p e que podem ser obtidas classicamente aplicando-se o método de Frobenius¹ [9, 34], resultando em:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^k (x)^{k+\frac{p}{2}}}{k! \Gamma(k+p+1)} \\ &= a_0 J_p(2\sqrt{x}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

¹Lembremos que o método de Frobenius, consiste em procurar uma solução da EDO através de uma série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^{k+s}$ convergente na vizinhança do ponto x_0 , partindo-se da suposição de que $a_0 \neq 0$ é arbitrário e s sendo um parâmetro a ser determinado.

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

$$\begin{aligned} w_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{(-1)^k (x)^{k-\frac{p}{2}}}{k! \Gamma(k-p+1)} \\ &= a_0 J_{-p}(2\sqrt{x}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde as soluções Eq.(3.3) e Eq.(3.4) convergem para valores finitos² quando $p > 0$ e são linearmente independentes (LI) desde que $p \notin \mathbb{N}$. Se $p \in \mathbb{N}$, então $w_1(x)$ é linearmente dependente (LD) com $w_2(x)$ e precisamos encontrar uma segunda solução por algum outro método; e.g., via redução de ordem [7].

Por outro lado, investigamos em que condições os operadores fracionários de IFRL e DFRL também podem ser aplicados para obtermos uma solução da Eq.(3.2) em termos de funções elementares. Para isso, considere a seguinte mudança de variável dependente $w = x^{\pm \frac{1}{2}p} u$, onde p é a raiz quadrada não negativa de p^2 . Então, calculando as derivadas e simplificando obtemos a seguinte equação diferencial

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (1 \pm p) \frac{du}{dx} + u = 0, \quad (3.5)$$

com $u = u(x)$.

Suponha agora que para cada função u que satisfaça a Eq.(3.5), exista uma função integrodiferenciável $f = f(x)$ tal que

$$u = \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p} f, \quad (3.6)$$

onde $\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p}$ é o chamado operador de integrodiferenciação de Riemann-Liouville de ordem $\frac{1}{2} \pm p$ (vide **Seção 2.4**).

Podemos combinar as Eq.(3.5) e Eq.(3.6) para obter

$$x \frac{d^2}{dx^2} \left[\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p} f \right] + (1 \pm p) \frac{d}{dx} \left[\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p} f \right] + \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p} f = 0 \quad (3.7)$$

e ainda mais, usando o **Teorema 2.11** ou a Eq.(2.109)³, podemos escrever a Eq.(3.7)

²Em particular, $J_p(0)$ é finito para $p \geq 0$, enquanto que $J_{-p}(0)$ é infinito para $0 < p \neq 1, 2, \dots$

³Dependendo se $\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p}$ representar o operador DFRL ou o operador IFRL.

3.1. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE BESSEL

na seguinte forma

$$x\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{5}{2}\pm p}f + (1\pm p)\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2}\pm p}f + \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm p}f = 0. \quad (3.8)$$

Agora, fazendo uso da regra de Leibniz (**Teorema 2.19**) para o operador de integro-diferenciação fracionária de um produto de duas funções, podemos verificar que

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{5}{2}\pm p}[xf] = x\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{5}{2}\pm p}f + \left(\frac{5}{2} \pm p\right)\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2}\pm p}f, \quad (3.9)$$

que rearranjando toma a forma

$$x\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{5}{2}\pm p}f = \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{5}{2}\pm p}[xf] - \left(\frac{5}{2} \pm p\right)\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2}\pm p}f, \quad (3.10)$$

donde segue, a partir da Eq.(3.8), que a nova equação diferencial fracionária é

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{5}{2}\pm p}[xf] - \frac{3}{2}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2}\pm p}f + \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm p}f = 0 \quad (3.11)$$

a qual não mais apresenta o parâmetro p como coeficiente. Em particular, supondo que podemos decompor os operadores da Eq.(3.11) como

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm p}\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}x^2}[xf] - \frac{3}{2}\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm p}\frac{\mathbf{d}f}{\mathbf{d}x} + \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm p}f = 0 \quad (3.12)$$

então pela ação direta do operador $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}\mp p}$ à esquerda, esta última converte-se na equação

$$\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}x^2}[xf] - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{d}f}{\mathbf{d}x} + f = 0. \quad (3.13)$$

As Eq.(3.11) e Eq.(3.12) são equivalentes se, e somente se, forem satisfeitas as condições

$$[xf]_{x=0} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x}[xf]\Big|_{x=0} = 0, \quad (3.15)$$

$$f(0) = 0, \quad (3.16)$$

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

$$\mathfrak{D}_{0+}^{-1} f \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.17)$$

$$\mathfrak{D}_{0+}^{-1} [xf] \Big|_{x=0} = 0, \quad (3.18)$$

sendo que estas aparecem quando aplicamos⁴ os **Teoremas 2.10** ou **2.11** ou suas versões integrodiferenciáveis descritas pelas Eq.(2.110) - Eq.(2.112).

Já as Eq.(3.12) e Eq.(3.13) são equivalentes se, e somente se

$$\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2} \mp p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p} g = g, \quad (3.19)$$

para

$$g = \begin{cases} f, \\ \frac{df}{dx}, \\ \frac{d^2}{dx^2} [xf]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Introduzindo-se a seguinte mudança de variável $x \mapsto 2\sqrt{x}$ (i.e., $\xi = 2\sqrt{x}$) a Eq.(3.13) é conduzida na forma

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} + f = 0, \quad (3.21)$$

cujas soluções LI sabemos ser $f_1(\xi) = \sin \xi$ e $f_2(\xi) = \cos \xi$, ou seja, voltando na variável x ,

$$f_1(2\sqrt{x}) = \sin(2\sqrt{x}) \quad \text{e} \quad f_2(2\sqrt{x}) = \cos(2\sqrt{x}).$$

3.2 Soluções Obtidas

Aqui, como já nos referimos, vamos analisar as duas soluções obtidas, i.e., verificamos se as funções f_1 e f_2 , candidatas à solução do nosso problema realmente satisfazem as condições listadas pelas Eq.(3.14) - Eq.(3.18) e Eq.(3.19) - Eq.(3.20).

Claramente, f_2 não satisfaz as condições Eq.(3.15) e Eq.(3.16), pois $f_2(0) = 1$ e $\frac{d}{dx} [xf_2] \Big|_{x=0} = 1$. Por outro lado, verifica-se que f_1 satisfaz Eq.(3.14) - Eq.(3.18). Logo, vejamos o comportamento de f_1 , com respeito às condições em Eq.(3.19), destacando

⁴Tomando o cuidado de aplicar cada caso dependendo se $\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{5}{2} \pm p}$, $\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{3}{2} \pm p}$ e $\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p}$ representarem uma DFRL ou uma IFRL.

3.2. SOLUÇÕES OBTIDAS

dois casos:

Caso $(\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}+p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} g = g)$: Se $p = \frac{1}{2}$, temos o operador identidade e a igualdade verifica-se. Se $p > \frac{1}{2}$, então $-\frac{1}{2} + p > 0$ e, portanto, o operador mais a esquerda em Eq.(3.19) é a DFRL que sabemos ser a inversa à esquerda da IFRL. Por outro lado, se $0 < p < \frac{1}{2}$, então o operador mais a esquerda é a IFRL e neste caso podemos verificar a igualdade $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}+p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} g = g$ aplicando as regras de integrodiferenciação fracionária na representação em série de potências das funções em Eq.(3.20):

$$\left(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \text{sen}(2\sqrt{t}) \right) (x) = \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \left[\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1 + p)} x^{k+p} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(k + p + 1) x^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k + 1 + p) \Gamma(k + \frac{3}{2})} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+\frac{1}{2}} = \text{sen}(2\sqrt{x}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\left[\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \left(t^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{t}) \right) \right] (x) = \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \left[\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + p)} x^{k-1+p} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \Gamma(k + p) x^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k + p) \Gamma(k + \frac{1}{2})} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$s_k = \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{e} \quad c_k = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}.$$

Observamos que as passagens em Eq.(3.22) - Eq.(3.23) e Eq.(3.24) - Eq.(3.25) são

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

lícitas, pois para todos os casos as potências de x são maiores que -1 , uma vez que $p > 0$. A verificação para $g(x) = \frac{d^2[xf]}{dx^2}$ segue da combinação dos casos supracitados.

Também é conveniente citar que, pelo **Teorema 2.8** Eq.(2.64), devemos ter

$$\left(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} g\right)(x) = g(x) - \frac{\left(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g\right)(0)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-p\right)} x^{\frac{1}{2}-p-1}, \quad (3.26)$$

onde $\left(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g\right)(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g(x)$ e no **Apêndice A.4** verificamos que este limite de fato é zero e, portanto

$$\left(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} g\right)(x) = g(x), \quad (3.27)$$

vale para todo $p > 0$.

Caso $(\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g)$: Como $p > 0$, então $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \equiv \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p}$ e $\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \equiv \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p}$, daí seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, temos:

$$\left(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sin(2\sqrt{t})\right)(x) = \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \left[\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (3.28)$$

$$= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1 - p)} x^{k-p} \quad (3.29)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s_k \frac{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(k - p + 1) x^{k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(k + 1 - p) \Gamma(k + \frac{3}{2})} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+\frac{1}{2}} = \sin(2\sqrt{x}). \quad (3.30)$$

$$\left[\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \left(t^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{t}) \right) \right](x) = \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \left[\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-\frac{1}{2}} \right] \quad (3.31)$$

$$= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - p)} x^{k-1-p} \quad (3.32)$$

3.2. SOLUÇÕES OBTIDAS

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(k - p)x^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k - p)\Gamma(k + \frac{1}{2})} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde

$$s_k = \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{e} \quad c_k = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}.$$

Chamamos atenção para o fato de que nas passagens Eq.(3.29) e Eq.(3.32) se $p \in \mathbb{N}$, então os primeiros coeficientes de cada série se anulam (mais precisamente, os p primeiros em Eq.(3.29) e os $p + 1$ primeiros em Eq.(3.32)) de modo que as potências de x dos primeiros coeficientes não nulos são maiores que -1 (i.e., $k - p > -1$ e $k - p - 1 > -1$), logo podemos realizar a operação $\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p}$ sem problemas. No entanto, se $p \notin \mathbb{N}$, então os primeiros coeficientes de cada série não serão nulos e as potências dos primeiros termos serão menores que -1 (i.e., $k - p > -1$ e $k - p - 1 > -1$) uma vez que $p > 0$ e, portanto, em princípio não poderíamos aplicar a regra de integração fracionária como listado em Eq.(2.31a) para calcularmos $\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} x^{k-p}$ e $\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} x^{k-1-p}$.

É neste ponto que encontramos a discórdia que foi alertada no início da seção. Os autores em [35] afirmam que a função $f(x) = \sin(2\sqrt{x})$ satisfaz estas condições para todo $0 < p \notin \mathbb{N}$, no entanto, a investigação acima nos diz justamente o contrário! O intrigante é que se ignorarmos esta violação da condição exigida sobre os índices e prosseguirmos com a integração, então o resultado final parece indicar a validade da relação $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g$ e mais adiante isto realmente parece nos levar para uma segunda solução linearmente independente da equação de Bessel como o esperado. Talvez tenha sido por este motivo que os autores não tenham se alertado para a inconsistência da argumentação apresentada por eles.

Observamos ainda que o **Teorema 2.8** (vide Eq.(2.63)) nos diz que

$$\left(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g \right) (x) = g(x) - \sum_{j=1}^n \frac{(\mathcal{D}_{0+}^{n-j} \mathcal{I}_{0+}^{n-\frac{1}{2}-p} g)(0)}{\Gamma(\frac{1}{2} + p - j + 1)} x^{\frac{1}{2}+p-j}, \tag{3.34}$$

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

onde⁵ $(\mathcal{D}_{0+}^{\mathbf{n}-j} \mathcal{I}_{0+}^{\mathbf{n}-\frac{1}{2}-p} g)(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\mathcal{D}_{0+}^{\mathbf{n}-j} \mathcal{I}_{0+}^{\mathbf{n}-\frac{1}{2}-p} g)(x)$ e $\mathbf{n} = [\frac{1}{2} + p] + 1$. Logo, é bem claro que a igualdade só ocorre quando o somatório no lado direito da Eq.(3.34) é zero e uma condição suficiente é que os limites que determinam os coeficientes deste somatório sejam zero. Porém podemos verificar⁶ que alguns destes, além de não convergirem para zero, ainda pior, até divergem para $\pm\infty$.

Feitas estas observações, podemos tirar as seguintes primeiras conclusões: a função

$$u_1 = \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sin(2\sqrt{x}) \quad (3.35)$$

é formalmente uma solução para a Eq.(3.5) para todo $p > 0$, entretanto a função

$$u_2 = \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sin(2\sqrt{x}) \quad (3.36)$$

nos fornece uma solução consistente para $p \in \mathbb{N}$, mas ainda não sabemos se para os demais valores de p temos uma solução válida.

Assim, da Eq.(3.35) obtemos a seguinte solução para a Eq.(3.2)

$$\begin{aligned} w_1(p, x) &= x^{-\frac{1}{2}p} u_1 \\ &= x^{-\frac{1}{2}p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sin(2\sqrt{x}) \\ &= x^{-\frac{1}{2}p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1)!} \\ &= x^{-\frac{1}{2}p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+k)}{\Gamma(k+p+1)} x^{k+p} \\ &= x^{-\frac{1}{2}p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+p+1)} x^{k+p} \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+\frac{p}{2}}}{k! \Gamma(k+p+1)} \\ &= \sqrt{\pi} J_p(2\sqrt{x}), \end{aligned}$$

⁵Estes limites também podem ser expressos de forma unificada em termos do operador de integro-diferenciação como $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\mathfrak{D}_{a+}^{\nu-j} g)(x)$.

⁶Isto será feito na próxima seção e de forma alternativa no **Apêndice A.4**.

3.3. VERIFICAÇÃO DO CASO $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-P} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+P} G = G$

onde foi usada a identidade $\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+k)}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k+1}\Gamma(k+1)}$ [35] e a solução fica representada em termos da função de Bessel de ordem $p > 0$.

Curiosamente, se ignorarmos as inconsistências da Eq.(3.36) mencionadas acima e desenvolvermos sua representação como feito para $w_1(p, x)$ acima, obtemos

$$\begin{aligned}
w_2(p, x) &= x^{+\frac{1}{2}p} u_2 \\
&= x^{+\frac{1}{2}p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \text{sen}(2\sqrt{x}) \\
&= x^{+\frac{1}{2}p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1)!} \\
&= x^{+\frac{1}{2}p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{\Gamma(2k+2)} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+k)}{\Gamma(k-p+1)} x^{k-p} \\
&= x^{+\frac{1}{2}p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k-p+1)} x^{k-p} \\
&= \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-\frac{p}{2}}}{k! \Gamma(k-p+1)} \\
&= \sqrt{\pi} J_{-p}(2\sqrt{x}),
\end{aligned}$$

que sabemos também ser solução da Eq.(3.2) sendo LI com $w_1(p, x)$ quando $p \notin \mathbb{N}$ enquanto, para $p = n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
w_2(n, x) &= (-1)^n w_1(n, x) \\
\sqrt{\pi} J_{-n}(2\sqrt{x}) &= \sqrt{\pi} (-1)^n J_n(2\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

3.3 Verificação do caso $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g$

Visto que o caso $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}+p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} g = g$ não parece ter problema algum, inclusive nos levando, em última instância, à solução $\sqrt{\pi} J_p(2\sqrt{x})$ que é a função de Bessel de primeira espécie de ordem $p > 0$, nesta seção investigamos de forma direta e mais cautelosamente o outro caso, i.e. $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g$, que parece apresentar problemas quando consideramos $0 < p \notin \mathbb{N}$.

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

Começamos relembrando que nas etapas Eq.(3.28) - (3.29) já foi calculado que

$$\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \text{sen}(2\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k \Gamma(k + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1 - p)} x^{k-p}, \quad (3.37)$$

onde $s_k = \frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Chamamos atenção de que se exigirmos que $0 < p \notin \mathbb{N}$, então os coeficientes $\frac{s_k \Gamma(k + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1 - p)}$ nunca serão nulos (mas serão sempre finitos para todo $k \in \mathbb{N}$). Em particular, a série na Eq.(3.37) é integrável segundo RL se, e somente se, $0 < p < 1$ (para garantir que $k - p > -1$), logo o resultado

$$\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \text{sen}(2\sqrt{x}) = \text{sen}(2\sqrt{x})$$

calculado nas etapas Eq.(3.28) $\rightarrow$ Eq.(3.30) só é válido nestas condições!

Agora se exigirmos $p = n \in \mathbb{N}$, então os $n - 1$ primeiros coeficientes $\frac{s_k \Gamma(k + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1 - p)}$ serão nulos, pois

$$\Gamma(k + 1 - p) = \Gamma(k + 1 - n) = \pm\infty,$$

para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Dessa forma, o correto é reescrevermos a série na Eq.(3.37) como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \text{sen}(2\sqrt{x}) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{s_k \Gamma(k + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1 - n)} x^{k-n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_{k+n} \Gamma(k + n + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1)} x^k, \end{aligned}$$

que é claramente integrável segundo RL e nos leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \text{sen}(2\sqrt{x}) &= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_{k+n} \Gamma(k + n + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1)} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_{k+n} x^{k+n+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} s_k x^{k+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

3.3. VERIFICAÇÃO DO CASO $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-P} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+P} G = G$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} s_k x^{k+\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+\frac{1}{2}} \\
&= \operatorname{sen}(2\sqrt{x}) - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \operatorname{sen}(2\sqrt{x}) = \begin{cases} \operatorname{sen}(2\sqrt{x}), & 0 < p < 1, \\ \nexists, \text{ (não é integrável)} & p > 1, \\ \operatorname{sen}(2\sqrt{x}) - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+\frac{1}{2}}, & p = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Relembramos também que nas etapas Eq.(3.31) - Eq.(3.32), foi calculado que

$$\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - p)} x^{k-1-p}, \quad (3.39)$$

onde $c_k = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}$ e foi observado que se $0 < p \notin \mathbb{N}$, então a série não é integrodiferenciável, pois os coeficientes $\frac{c_k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - p)}$ nunca se anulam, mas as potências de x dos primeiros termos são sempre menores que -1 . Logo, a integração feita nas etapas Eq.(3.31) $\rightarrow$ Eq.(3.33) não são lícitas nestas condições.

No entanto, se exigirmos $p = n \in \mathbb{N}$, então os n primeiros coeficientes $\frac{c_k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - p)}$ se anulam, pois

$$\Gamma(k - p) = \Gamma(k - n) = \pm\infty,$$

para $k = 0, 1, \dots, n$ e assim a série na Eq.(3.39), se reduz a forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - p)} x^{k-1-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n+1} \frac{\Gamma(k + n + \frac{3}{2})}{\Gamma(k + 1)} x^k,
\end{aligned}$$

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

que é integrável e nos leva ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) &= \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n+1} \frac{\Gamma(k+n+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+1)} x^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n+1} x^{k+n+\frac{1}{2}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k x^{k-\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k-\frac{1}{2}} - \sum_{k=0}^n c_k x^{k-\frac{1}{2}} \\
 &= x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) - \sum_{k=0}^n c_k x^{k-\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluimos que

$$\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) = \begin{cases} \nexists, & \text{(não é integrável)} & 0 < p \notin \mathbb{N}, \\ x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) - \sum_{k=0}^n c_k x^{k-\frac{1}{2}}, & p = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Em vista dos resultados apresentados acima e observando que

$$\frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}x^2} [xf] = \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) - \operatorname{sen}(2\sqrt{x}),$$

podemos concluir também que

$$\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \mathcal{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \frac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}x^2} [xf] = \begin{cases} \nexists \text{ (i.e., não é integrável)}, & 0 < p \notin \mathbb{N}, \\ \frac{3}{2} \left[x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) - \sum_{k=0}^n c_k x^{k-\frac{1}{2}} \right] \\ - \left[\operatorname{sen}(2\sqrt{x}) - \sum_{k=0}^{n-1} s_k x^{k+\frac{1}{2}} \right], & p = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Em particular, usando os resultados de Eq.(3.38), Eq.(3.40) e Eq.(3.41), verifica-se que a Eq.(3.12) tem solução se aplicarmos (pela esquerda) o operador $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} = \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p}$ restringindo $p = n \in \mathbb{N}$, mas no final isto simplesmente nos leva a uma “segunda” solução $w_2 = \sqrt{\pi} J_{-n}(2\sqrt{x})$ que é LD com a “primeira” solução $w_1 = \sqrt{\pi} J_n(2\sqrt{x})$.

3.4 Resultados e Conclusões

Em síntese, os resultados acima (vide Eq.(3.38), Eq.(3.40) e Eq.(3.41)), nos indicam que a condição $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g$, tomando-se g segundo a Eq.(3.20) para $f(x) = \sin(2\sqrt{x})$ não são verdadeiras como afirmam⁷ os autores de [35]. Entretanto, este resultado não seria tão perturbador não fosse o fato de que as investigações feitas na **Seção 3.2** realmente nos indicarem que estas igualdades deveriam ser verdadeiras visto que o método proposto nos leva as duas soluções LI de Bessel (de primeira espécie) conhecidas.

Convém observar que mesmo assim, o método em si é bem sucedido (e formalmente bem descrito) para se obter ao menos uma das soluções da equação de Bessel, a saber, a $w_1 = \sqrt{\pi} J_p(2\sqrt{x})$, para $p > 0$.

Então quais conclusões devemos tirar disso tudo? Será que podemos afirmar que o método usado para resolver a equação de Bessel (vide **Seção 3.1**) é válido mesmo apresentando tal (aparente?) contradição com o **Teorema 2.8**? Sabemos que uma teoria bem descrita não pode levar a inconsistências lógicas, de modo que devemos olhar com cautela para as etapas/cálculos que foram feitos, resultados usados e até mesmo para as definições adotadas! Lembramos ainda ao leitor que as definições e resultados pertinentes a esta análise foram feitas sob a óptica dos operadores fracionários de integração e diferenciação segundo Riemann-Liouville formalmente encontrados e demonstrados em diversas referencias (e.g., [4, 13, 32, 35, 54, 55, 56]).

Na tentativa de respondermos a este questionamento e, especificamente, para poderemos chegar a uma conclusão a respeito da validade ou não do método que foi proposto por Oldham & Spanier [35] para resolvermos a equação de Bessel como descrito na **Seção 3.1**, exporemos uma última análise.

Alguns pontos cruciais que julgamos necessário olharmos com mais cautela são:

- Os resultados sobre a integrodiferenciação fracionária de funções do tipo $(x - a)^\beta$.
- As definições das IFRL ($\mathcal{I}_{a+}^\nu$) e DFRL ($\mathcal{D}_{a+}^\nu$) e do operador de integrodiferenciação fracionária $\mathfrak{D}_{a+}^\nu$, de ordem $\nu \in \mathbb{R}$.

⁷Ressaltamos que eles afirmam que a igualdade se verifica para todo $0 < p \notin \mathbb{N}$.

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

Começemos então pelas definições dos operadores $\mathcal{I}_{a+}^\nu$ e $\mathcal{D}_{a+}^\nu$ apresentadas pelas Eq.(2.1) e Eq.(2.16), chamando especial atenção para a regra de integração e diferenciação de funções do tipo potência $(x-a)^\beta$ como exemplificado pelas Eq.(2.31a) - Eq.(2.31d). Já foi observado que a condição essencial para podermos calcular as IFRL e DFRL destas funções é requerer que $\beta > -1$ para garantir a convergência das integrais que definem os operadores de Riemann-Liouville. De fato, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1 *Seja $f(x) = (x-a)^{-\frac{3}{2}}$, então a primeira observação que temos a fazer é que esta função é definida para todo $a < x \in \mathbb{R}$, sendo que no ponto $x = a$ a expressão diverge. Assim, usando a definição da IFRL (vide Eq.(2.1)) e integrando por partes, podemos obter as igualdades*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a+}^\nu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} (t-a)^{-\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left[\frac{-2(x-t)^{\nu-1}}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} \right]_{t=a}^{t=x} - \frac{2}{\Gamma(\nu-1)} \int_a^x (x-t)^{\nu-2} (t-a)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left[-\frac{(x-t)^\nu}{\nu(t-a)^{\frac{3}{2}}} \right]_{t=a}^{t=x} - \frac{\frac{3}{2}}{\Gamma(\nu+1)} \int_a^x (x-t)^\nu (t-a)^{-\frac{5}{2}} dt,\end{aligned}$$

onde claramente as expressões que surgem no processo de integração por partes apresentam sempre problemas de convergência no ponto $t = a$.

Analogamente para a mesma função se usarmos a definição da DFRL (vide Eq.(2.16)) e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a+}^\nu f(x) &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1} (t-a)^{-\frac{3}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \left\{ \left[-2 \frac{(x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1}}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} \right]_{t=a}^{t=x} \right. \\ &\quad \left. - 2(\mathbf{n}-\nu-1) \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-2} (t-a)^{-\frac{1}{2}} dt \right\}\end{aligned}$$

3.4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

$$= \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n} - \nu)} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} \left\{ \left[-\frac{(x-t)^{\mathbf{n}-\nu}}{(\mathbf{n}-\nu)(t-a)^{\frac{3}{2}}} \right]_{t=a}^{t=x} - \frac{\frac{3}{2}}{(\mathbf{n}-\nu)} \int_a^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu} (t-a)^{-\frac{5}{2}} dt \right\}$$

e, novamente, as expressões que surgem no processo de integração por partes apresentam problemas de convergência no ponto $t = a$.

No entanto, sabemos pelas regras de diferenciação e integração do cálculo de ordem inteira, que para funções do tipo potência $(x-a)^\beta$ valem as seguintes regras:

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}x} (x-a)^\beta = \beta (x-a)^{\beta-1}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad (3.42)$$

$$\int (x-a)^\beta \mathbf{d}x = \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1} + C, \quad -1 \neq \beta \in \mathbb{R}, \quad (3.43)$$

$$\int (x-a)^{-1} \mathbf{d}x = \ln(x-a) + C, \quad x > a \quad (3.44)$$

onde C é uma constante de integração e, mais geralmente, para $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\mathbf{d}^n}{\mathbf{d}x^n} (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta+1-n)}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \quad (3.45)$$

$$\underbrace{\int \cdots \int}_n (x-a)^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)(x-a)^{\beta+n}}{\Gamma(\beta+1+n)} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, & \text{(I)} \\ \frac{(-1)^{m-1}(x-a)^{n-m}}{(m-1)!(n-m)!} \ln(x-a) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, & \text{(II)} \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\underbrace{\int \cdots \int}_n (x-a)^{-1} = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \ln(x-a) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x-a)^k, \quad x > a, \quad (3.47)$$

onde (I) $\beta > -1$ ou $\beta \notin \mathbb{Z}$ ou $\beta = m \in \mathbb{Z}$ e $n < m$, (II) $\beta = m \in \mathbb{Z}$ e $n \geq m$ e c_k são constantes de integração. Isto nos diz que as funções do tipo potência $(x-a)^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, podem ser diferenciadas e integradas (ordinariamente) um número arbitrário de vezes. Em particular, observamos que ao diferenciar ou integrar as funções potências $(x-a)^\beta$, obtemos novamente funções do mesmo tipo (exceto para o caso em que $\beta = -1$, para

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

o qual surgem logaritmos).

O que acontece é que quando temos $\beta < 0$, então todas as funções potências $(x - a)^\beta$, formalmente não são definidas em $x = a$ por causa da singularidade que lá se encontra. Consequentemente, as suas respectivas derivadas (ordinárias) de qualquer ordem $n \in \mathbb{N}$ também não serão definidas neste ponto⁸, enquanto as integrais (ordinárias) de ordem $n \in \mathbb{N}$ poderão produzir primitivas que estarão (ou não) definidas no ponto $x = a$, dependendo da relação de ordem entre n e o índice β , mas que claramente estarão bem definidas para os demais pontos $x \in (a, b]$.

Então como devemos conciliar estes resultados? Ora, se o intuito do chamado “Cálculo Fracionário” é a generalização dos operadores de integração e diferenciação para ordens arbitrárias, então como devemos interpretar a aparente inconsistência de não podermos integrodiferenciar fracionalmente funções do tipo potência $(x - a)^\beta$ com ordem $\beta \leq -1$, enquanto o cálculo de ordem inteira nos diz o contrário? Acreditamos que uma generalização sensata deveria, no mínimo, preservar a possibilidade de integrodiferenciarmos fracionalmente estas mesmas funções⁹ para quaisquer $\beta \in \mathbb{R}$.

Ainda, sabemos da teoria de integração e diferenciação clássica [27], que quando calculamos uma integral indefinida de uma função f contínua num conjunto Ω , o resultado não é a obtenção de uma nova e única função F (denotada de primitiva da f), mas sim de uma família (infinita) de primitivas, todas “iguais” umas das outras a menos de uma constante $C \in \mathbb{R}$ (chamada de constante de integração) e simbolicamente expressamos este resultado como

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C, \text{ onde } F'(x) = f(x).$$

Uma das versões do teorema fundamental do cálculo (vide **Teorema 1.2**) nos permite relacionar as operações de integração e diferenciação e como consequência nos permite calcular integrais definidas de funções f contínuas num dado intervalo $[a, b]$

⁸Basta observar que para esta condição sobre β segue pela Eq.(3.45) que $\beta - 1 < 0$ e os coeficientes $\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)}$ serão sempre finitos (vide Eq.(1.27)).

⁹Com a possível implicação de termos que expandir o domínio de definição dos operadores de IFRL e DFRL.

3.4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

fazendo uso de uma primitiva F do seguinte modo

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a), \quad (3.48)$$

e em particular, se F é uma função tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt + F(a) \Leftrightarrow \int_a^x f(t) \, dt = F(x) - F(a), \quad (3.49)$$

onde $-F(a) = C \in \mathbb{R}$ faz o papel da constante de integração. Assim, para cada escolha do limite inferior de integração $a \leq t \leq x \leq b$ teremos uma constante de integração distinta, sendo que esta escolha deve ser feita obviamente dentro do domínio de definição da função f a ser integrada ou diferenciada.

Agora, suponha que f seja contínua em $(a, b]$ mas ilimitada em $x = a$, como no caso das funções potências $(x - a)^\beta$ com $\beta < 0$. Então, formalmente, este ponto não pertence ao domínio de f , mas a função é comportada o suficiente no restante do intervalo para ser integrada e, portanto, as expressões das Eq.(3.48) e Eq.(3.49) precisam ser reinterpretadas como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) \, dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [F(b) - F(a + \epsilon)], \quad (3.50)$$

$$F(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^x f(t) \, dt + F(a + \epsilon), \quad (3.51)$$

onde as expressões acima são sempre bem definidas para quaisquer $\epsilon > 0$, mas os limites quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ podem ou não existir¹⁰. Em particular, pode ocorrer que a primitiva $F(x)$ seja definida (i.e., finita) em $x = a$ mesmo que $f(a)$ não seja (e.g. $f(x) = (x - a)^{-\frac{1}{2}}$ com $F(x) = 2(x - a)^{\frac{1}{2}}$), assim como pode ocorrer que $F(a)$ também não seja definida (e.g. $f(x) = (x - a)^{-\frac{3}{2}}$ com $F(x) = -2(x - a)^{-\frac{1}{2}}$).

Então obviamente a escolha do limite inferior está relacionada com o aparecimento da constante de integração e similarmente ao caso de integração de ordem inteira, isto também ocorre quando integramos segundo RL a função $f(x)$.

¹⁰Quando estes limites existem, as integrais são chamadas de impróprias.

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

Por exemplo, considere a função $f(x) = (x - a)^{-\frac{4}{5}}$ e considere a IFRL $\mathcal{I}_a^{\frac{1}{5}} f(x)$ que sabemos existir, pois a condição $\beta = -\frac{4}{5} > -1$ é satisfeita. E pelo resultado da Eq.(2.31a):

$$\mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{5}} (x - a)^{-\frac{4}{5}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{8}{15}\right)} (x - a)^{-\frac{7}{15}},$$

mas este resultado não está definido no ponto $x = a$.

Em casos como este, devemos interpretar como limite inferior da IFRL $\mathcal{I}_{a+}^{\nu}$ e (e similarmente para a DFRL $\mathcal{D}_{a+}^{\nu}$) não o ponto a , mas sim o ponto $a + \epsilon$, para qualquer $0 < \epsilon < x < b$, i.e.,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+\epsilon}^{\nu} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{a+\epsilon}^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt, \\ (\mathcal{D}_{a+\epsilon}^{\nu} f)(x) &= (\mathcal{D}_{a+\epsilon}^{\mathbf{n}} \mathcal{I}_{a+\epsilon}^{\mathbf{n}-\nu} f)(x) \\ &= \mathcal{D}_{a+\epsilon}^{\mathbf{n}} \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_{a+\epsilon}^x (x-t)^{\mathbf{n}-\nu-1} f(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} \frac{f^{(k)}(a+\epsilon) (x-a-\epsilon)^{k-\nu}}{\Gamma(1+k-\nu)} + \frac{1}{\Gamma(\mathbf{n}-\nu)} \int_{a+\epsilon}^x \frac{f^{(\mathbf{n})}(t)}{(x-t)^{\nu-\mathbf{n}+1}} dt \end{aligned}$$

e então, tomarmos os limites

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\mathcal{I}_{a+\epsilon}^{\nu} f)(x) &= (\mathcal{I}_a^{\nu} f)(x), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\mathcal{D}_{a+\epsilon}^{\nu} f)(x) &= (\mathcal{D}_a^{\nu} f)(x) \end{aligned}$$

e verificarmos a existência destes limites, assim como quando lidamos com integrais impróprias no caso de ordens inteiras.

Isto é claro, não resolve em si a questão levantada no início desta seção sobre a possibilidade de integrodiferenciarmos fracionalmente funções do tipo $(x - a)^{\beta}$ com ordem $\beta \leq -1$, porém nos faz entender que sempre que as expressões

$$\mathcal{I}_{a+}^{\nu} (x - a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \nu)} (x - a)^{\beta + \nu}, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{D}_{a+}^{\nu} (x - a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 - \nu)} (x - a)^{\beta - \nu} \quad (3.53)$$

3.4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

forem válidas, então

$$\mathcal{I}_{a+\epsilon}^\nu (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\nu)} \left[(x-a)^{\beta+\nu} - \epsilon^{\beta+\nu} \right], \quad (3.54)$$

$$\mathcal{D}_{a+\epsilon}^\nu (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\nu)} \left[(x-a)^{\beta-\nu} - \epsilon^{\beta-\nu} \right], \quad (3.55)$$

de modo que se $\beta + \nu > 0$ (ou $\beta - \nu > 0$) então quando $\epsilon \rightarrow 0^+$ as funções resultantes da integração (ou diferenciação) estarão definidas no ponto $x = a$.

Feito estas observações, parece-nos claro que os operadores de IFRL e DFRL não generalizam completamente os operadores de diferenciação e integração, visto que, por um lado, podemos diferenciar e integrar (pelas regras do cálculo de ordem inteira) funções do tipo $(x-a)^\beta$ um número arbitrário de vezes para qualquer valor de $\beta \in \mathbb{R}$, mas por outro não podemos diferenciar e integrar fracionariamente estas mesmas funções se $\beta \leq -1$.

Uma possível solução para este problema é a conjectura de que uma definição mais ampla dos operadores de integração e diferenciação de ordem arbitrárias que possibilitemos incluir as funções do tipo $(x-a)^\beta$ para $\beta \leq -1$ deve ser possível se ampliarmos o domínio destes operadores de modo a incluir as funções generalizadas e afirmamos isso baseado no seguinte exemplo.

Exemplo 3.2 *Seja $f(x) = (x-a)^{-\frac{3}{2}}$ definida para $x \in (a, b]$ e suponha que $\nu = \frac{1}{2}$. Então se usarmos o resultado da Eq.(2.31a), teremos*

$$\mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{2}} (x-a)^{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(0)} (x-a)^{-1}, \quad (3.56)$$

o que é um resultado inesperado, visto que a função é não nula ao longo de $(a, b]$ e, no entanto, como $\Gamma(0) \rightarrow \infty$ então a expressão parece ser identicamente zero.

Por outro lado, se lembrarmos que a IFRL pode ser interpretada como o produto de convolução entre $\phi_{\frac{1}{2}}(x)$ e $(x-a)^{-\frac{3}{2}}$ (vide Eq.(2.15)), i.e.,

$$\mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{2}} (x-a)^{-\frac{3}{2}} = \phi_{\frac{1}{2}}(x) * (x-a)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.57)$$

CAPÍTULO 3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE BESSEL VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO

e que

$$\begin{aligned}(x-a)^{-\frac{3}{2}} &= \Gamma(-1/2) \phi_{-\frac{1}{2}}(x-a) \\ &= \Gamma(-1/2) \phi_{-\frac{1}{2}}(x) * \delta(x-a),\end{aligned}\tag{3.58}$$

então substituindo a Eq.(3.58) na Eq.(3.57) obtemos¹¹

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{3}{2}} &= \phi_{\frac{1}{2}}(x) * \left[\Gamma(-1/2) \phi_{-\frac{1}{2}}(x) * \delta(x-a) \right] \\ &= \Gamma(-1/2) \left[\phi_{\frac{1}{2}}(x) * \phi_{-\frac{1}{2}}(x) * \delta(x-a) \right] \\ &= \Gamma(-1/2) \left[\phi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(x) * \delta(x-a) \right] \\ &= \Gamma(-1/2) [\phi_0(x) * \delta(x-a)] \\ &= \Gamma(-1/2) [\delta(x) * \delta(x-a)] \\ &= \Gamma(-1/2) \delta(x-a)\end{aligned}\tag{3.59}$$

e este resultado parece bem mais promissor. Aliás, tendo em vista esta linha de raciocínio, podemos rever o resultado da Eq.(3.56) e perceber que a expressão pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{3}{2}} &= \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(0)} (x-a)^{-1} \\ &= \Gamma(-1/2) \phi_0(x-a) \\ &= \Gamma(-1/2) \delta(x-a),\end{aligned}\tag{3.60}$$

que coincide com o resultado da Eq.(3.59).

Este exemplo nos elucidar, como mencionado acima, que eventualmente o melhor modo de generalizar os operadores de integração (e consequentemente os de diferenciação) para ordens arbitrárias seja através do uso de funções generalizadas.

Outro motivo que corrobora com esta hipótese aparece quando tentamos unificar os operadores de integração e diferenciação de ordens arbitrárias em um único operador

¹¹Fazendo uso do resultado da Eq.(2.23).

3.4. RESULTADOS E CONCLUSÕES

de integrodiferenciação fracionária como discutido na **Seção 2.4.2**. Na ocasião, foi apresentado o operador de integrodiferenciação fracionária $\mathfrak{D}_{a+}^{\nu}$ (vide Eq.(2.101)) e foi concluído que

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_{a+}^{\nu} f)(x) &= \mathcal{H}(\mathcal{I}_{a+}^{-\nu} f)(x), \\ (\mathcal{D}_{a+}^{-\nu} f)(x) &= \mathcal{H}(\mathcal{I}_{a+}^{\nu} f)(x),\end{aligned}$$

ou seja, que a DFRL pode ser representada pela parte finita de Hadamard da IFRL e uma descrição destas relações certamente pode ser feita utilizando-se a teoria de distribuições, motivando-nos a continuar os estudos iniciados neste trabalho em futuras investigações.

Obviamente, uma correta descrição dos operadores de IFRL e DFRL e como estes agem nas funções do tipo potência $(x - a)^{\beta}$ para $\beta \in \mathbb{R}$ possui influência direta no modo como integrodiferenciamos funções representáveis por séries de potências e isto, por sua vez, tem consequências na metodologia que utilizamos para resolver a equação de Bessel (apresentada e investigada nas **Seções 3.1 - 3.3**) e possivelmente, abre portas para uma explicação mais abrangente (e quem sabe mais elegante) para as inconsistências apontadas na obtenção da segunda solução $w_2 = \sqrt{\pi} J_{-p}(2\sqrt{x})$.

Considerações Finais

Concluimos este trabalho com as seguintes considerações. Primeiramente, observamos como dito na introdução do **Capítulo 2** que o ramo atualmente denominado de cálculo fracionário, historicamente, é tão antigo quanto o cálculo tradicional de ordem inteira, visto que desde os primórdios do cálculo diferencial e integral grandes matemáticos como L'Hospital, Leibniz e Johan Bernoulli (e tantos outros ao longo dos anos) perceberam, de uma forma ou outra, que havia espaço para o desenvolvimento de uma teoria do cálculo não restrito apenas a ordens inteiras. O desenvolvimento consistente desta “nova” teoria, entretanto, só foi possível através do rigor proveniente da análise funcional e foi a partir daí que surgiram as diversas definições formais conhecidas, sendo que as mais “tradicionais” foram apresentadas neste trabalho. Nos últimos anos, como bem apontado em [56, 57] o número de publicações em cálculo fracionário tem aumentado mostrando que o tópico ganha força sendo aplicado tanto em diversos ramos da própria Matemática (Pura), assim como nos diversos ramos da Matemática Aplicada.

Apresentamos no **Capítulo 2** uma introdução aos operadores de diferenciação e integração fracionária hoje conhecidos como Riemann-Liouville, depois segundo Caputo e também segundo Grünwald-Letnikov, verificando suas propriedades e as relações de equivalências entre estas definições. Também apresentamos o operador de integro-diferenciação fracionária que é a tentativa de unificar a IFRL e a DFRL sob um único operador e chamamos atenção para a formulação de Marchaud para intervalos infinitos. Ainda, apresentamos a regra de Leibniz fracionária, que é uma generalização da regra de diferenciação do produto de duas funções. Convém ressaltarmos que tal regra vem sendo

estudada consistentemente há décadas, pelos trabalhos pioneiros de [37, 38, 39, 40, 60] e mais recentemente os trabalhos de [26, 54, 59] e, certamente, ainda há espaço para a continuidade do estudo de tal regra visto que certas propriedades que são válidas para o caso inteiro não são trivialmente estendidas para o caso de ordem arbitrária tal como a simetria da expressão em Eq.(2.122), por exemplo.

Mencionamos ainda que existem outras formulações para os operadores fracionários além das que foram apresentadas neste trabalho e daquelas resumidas em [4], em particular, as recentes formulações [17, 23, 24] as quais ainda merecem mais estudos devido a diferirem das formulações clássicas, via integral fracionária de RL, pois tais formulações estão baseadas na clássica definição de derivada do cálculo de ordem inteira.

No **Capítulo 3** investigamos a resolução da equação de Bessel sob a ótica do cálculo fracionário e verificamos que a técnica proposta por Oldham & Spanier [35] de fato é muito promissora e é uma alternativa à abordagem clássica do método de Frobenius para a obtenção da solução da equação de Bessel de primeira espécie J_p , mas como indicado na **Seção 3.2** e na **Seção 3.3** expusemos alguns equívocos encontrados na literatura e demonstramos as limitações dos resultados com o formalismo matemático necessário.

Especificamente, partindo-se da forma clássica da equação de Bessel (vide Eq.(3.1)) e fazendo-se algumas mudanças de variável, a equação que foi ponto de partida da nossa análise foi

$$x \frac{d^2 u}{dx^2} + (1 \pm p) \frac{du}{dx} + u = 0,$$

onde $p > 0$ é o parâmetro que define a ordem da equação (na forma clássica) de Bessel. Daí, supusemos que para cada função u que satisfizesse a equação acima, esta pudesse ser escrita em termos de uma função integrodiferenciável $f = f(x)$ tal que

$$u = \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p} f,$$

onde $\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p}$ é o operador de integrodiferenciação de Riemann-Liouville de ordem $\frac{1}{2} \pm p$. Utilizando-se das propriedades dos operadores de IFRL e DFRL descritas no **Capítulo**

Considerações Finais

2, pudemos obter duas candidatas a solução da equação, a saber

$$u_1 = \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} \text{sen}(2\sqrt{x}) \quad \text{e} \quad u_2 = \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} \text{sen}(2\sqrt{x}).$$

Foi verificado que u_1 leva a conhecida $\sqrt{\pi}J_p(2\sqrt{x})$ que é a função de Bessel (de primeira espécie) de ordem $p > 0$ e que u_2 leva a segunda solução $\sqrt{\pi}J_{-p}(2\sqrt{x})$. No entanto, ao contrário do que foi afirmado¹² pelos autores de [35], nós mostramos que, formalmente, a solução $\sqrt{\pi}J_{-p}(2\sqrt{x})$ só é obtida a partir das condições de diferenciabilidade e integrabilidade (fracionariamente) das funções trabalhadas quando $p \in \mathbb{N}$, o que significa que $\sqrt{\pi}J_{-n}(2\sqrt{x})$ é LD com a $\sqrt{\pi}J_p(2\sqrt{x})$ através da conhecida relação

$$\sqrt{\pi}J_{-n}(2\sqrt{x}) = \sqrt{\pi}(-1)^n J_n(2\sqrt{x}).$$

Ao investigarmos o porque desta limitação do método, foi observado que o problema se dava pelo fato de que as DFRL e IFRL não serem formalmente definidas para operarem em funções do tipo $(x-a)^\beta$ com¹³ $\beta \leq -1$, em contrapartida com as regras usuais de diferenciação e integração clássicas de ordem inteiras, que nos permitem diferenciar e integrar todas as funções $(x-a)^\beta$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Isso nos fez questionar sobre a real interpretação das DFRL e IFRL como generalizações dos operadores de diferenciação e integração de ordens inteiras. Ao voltarmos a atenção para uma das abordagens que definem tais operadores fracionários, segundo Riemann-Liouville, em termos de um produto de convolução, pudemos conjecturar que, de fato, estes operadores são melhores descritos quando aplicados no contexto de funções generalizadas, como indicado no **Exemplo 3.2** da **Seção 3.4**. Essa conjectura é corroborada com as observações feitas na **Seção 2.4** onde foi mencionada a ideia de se ter as operações de integração e diferenciação descritos sob um único operador e, na ocasião, observou-se que a DFRL pode ser descrita em termos de uma extensão analítica da IFRL para índices negativos. Em outras palavras, isso significa que a DFRL possui uma representação integral (válida para ordens não inteiras), mas que a correta interpretação deve ser feita utilizando-se o conceito de *integral de Hadamard* (ou *parte finita de Hadamard*) e tal abordagem

¹²Segundo eles, o método garante a validade da solução $\sqrt{\pi}J_{-p}(2\sqrt{x})$ para todo $0 < p \notin \mathbb{N}$.

¹³Pois em tais condições as expressões divergem.

sugere naturalmente o uso de funções generalizadas. Portanto, ao que tudo indica, a DFRL e a IFRL são generalizações dos conceitos de diferenciação e integração de funções generalizadas (i.e., no sentido distribucional) e não meras generalizações das operações de diferenciação e integração (com ordens inteiras) de funções clássicas e isto, certamente, indica um caminho que parece ser uma continuação natural dos estudos feitos aqui com perspectivas de trabalhos futuros.

Inclusive, motivados pelas investigações feitas para a obtenção da equação de Bessel, obtivemos por uma metodologia semelhante, uma solução da equação hipergeométrica confluyente compilado no trabalho [47].

Finalmente, ao longo do desenvolvimento desta tese, foram estudadas outras aplicações das derivadas fracionárias na formulação de equações diferenciais fracionárias em um recente trabalho [45] no qual são apresentadas possíveis generalizações para modelos de viscoelasticidade linear e osciladores harmônicos, sendo que as soluções foram obtidas através da metodologia da transformada de Laplace.

Apêndice A

Apêndice

Como já mencionado, reservamos este espaço para apresentarmos alguns resultados e/ou demonstrações que por motivos *estéticos* não foram incluídos no corpo textual principal.

A.1 Prova dos Resultados Eq.(2.31a) e Eq.(2.31c)

Pela definição da IFRL segundo a Eq.(2.1), temos

$$\left(\mathcal{I}_{a+}^{\nu}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} (t-a)^{\beta-1} \mathbf{d}t.$$

Daí, introduzindo a mudança de variável $t = a + z(x-a)$ podemos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I}_{a+}^{\nu}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &\equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{\nu-1} (x-a)^{\beta-1+\nu} \mathbf{d}z \\ &= \frac{(x-a)^{\beta-1+\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 z^{\beta-1} (1-z)^{\nu-1} \mathbf{d}z \\ &= \frac{(x-a)^{\beta-1+\nu}}{\Gamma(\nu)} B(\beta, \nu) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\nu)} (x-a)^{\beta-1+\nu}, \end{aligned}$$

A.2. PROVA DO COROLÁRIO 2.1

onde $B(\beta, \nu) = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\beta+\nu)}$ é a função beta (vide Eq.(1.30)) obtendo o resultado (2.31a).

Agora para (2.31c), temos da definição da DFRL Eq.(2.16) e do resultado (2.31a) que

$$\begin{aligned}
 \left(\mathcal{D}_{a+}^{\nu}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) &= \mathcal{D}^{\mathbf{n}} \left[\left(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) \right] \\
 &= \mathcal{D}^{\mathbf{n}} \left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\mathbf{n}-\nu)}(x-a)^{\beta+\mathbf{n}-\nu-1} \right] \\
 &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\mathbf{n}-\nu)} \frac{\Gamma(\beta+\mathbf{n}-\nu)}{\Gamma(\beta+\mathbf{n}-\nu-\mathbf{n})} (x-a)^{\beta+\mathbf{n}-\nu-1-\mathbf{n}} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\nu)} (x-a)^{\beta-\nu-1}.
 \end{aligned}$$

A.2 Prova do Corolário 2.1

Provaremos o resultado para a DFRL à esquerda e o caso para a DFRL à direita é feito de modo análogo.

Se

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} c_j (x-a)^{\nu-j},$$

então pela definição da Eq.(2.16) e pela linearidade do operador DFRL, temos que

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_{a+}^{\nu}f)(x) &= \left[\mathcal{D}_{a+}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} c_j (t-a)^{\nu-j} \right](x) \\
 &= \left[\sum_{j=1}^{\mathbf{n}} \mathcal{D}_{a+}^{\nu} \left[c_j (t-a)^{\nu-j} \right] \right](x) \\
 &= \left[\sum_{j=1}^{\mathbf{n}} c_j \frac{\Gamma(\nu-j+1)}{\Gamma(-j+1)} (x-a)^{-j} \right](x) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

dado o resultado da Eq.(2.34).

APÊNDICE A. APÊNDICE

Por outro lado, se $(\mathcal{D}_{a+}^\nu f)(x) = 0$, então da definição de DFRL, temos

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)](x) &= 0 \\ [\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}} (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f))](x) &= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} 0 \\ [(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}}) (\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)](x) &= 0. \end{aligned}$$

Aplicando o **Corolário 1.3**, à última passagem resulta em

$$\left[(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f) - \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} (\mathcal{D}_{a+}^{j-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+) \frac{(t-a)^{j-1}}{(j-1)!} \right](x) = 0$$

e aplicando o operador $\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu}$ à esquerda em ambos os lados da igualdade acima, segue

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} \left[(\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f) - \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} (\mathcal{D}_{a+}^{j-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+) \frac{(t-a)^{j-1}}{\Gamma(j)} \right](x) &= \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} 0 \\ \left[(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f) - \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} (\mathcal{D}_{a+}^{j-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+) \frac{(t-a)^{j-1}}{\Gamma(j)} \right](x) &= 0 \\ \left[f - \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} (\mathcal{D}_{a+}^{j-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+) \frac{\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} (t-a)^{j-1}}{\Gamma(j)} \right](x) &= 0 \\ \left[f - \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} (\mathcal{D}_{a+}^{j-1} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+) \frac{(t-a)^{j-1-\mathbf{n}+\nu}}{\Gamma(j-\mathbf{n}+\nu)} \right](x) &= 0 \\ \left[f - \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} (\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-j} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+) \frac{(t-a)^{\nu-j}}{\Gamma(\nu-j+1)} \right](x) &= 0, \end{aligned}$$

donde conclui-se que

$$f(x) = \left[\sum_{j=1}^{\mathbf{n}} \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-j} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+)}{\Gamma(\nu-j+1)} (t-a)^{\nu-j} \right](x),$$

A.3. PROVA DA EQ.(2.62)

ou seja,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\mathbf{n}} c_j (x-a)^{\nu-j},$$

com

$$c_j = \frac{(\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-j} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\nu} f)(a^+)}{\Gamma(\nu-j+1)}, j = 1, 2, \dots, \mathbf{n}.$$

A.3 Prova da Eq.(2.62)

Queremos provar que se $\beta > \alpha > 0$, então

$$\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-(\beta-\alpha)} f \in AC^{\mathbf{n}}[a, b] \Rightarrow \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f \in AC^{\mathbf{m}}[a, b],$$

com $\mathbf{n} = [\beta] + 1$ e $\mathbf{m} = [\beta - \alpha] + 1$.

De fato, por hipótese, existe uma função $\varphi \in L_1[a, b]$ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-(\beta-\alpha)} f &= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}} \varphi + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k \\ \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}+[\beta]-[\beta-\alpha]-(\beta-\alpha)} f &= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}+[\beta]-[\beta-\alpha]} \varphi + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k \\ \mathcal{I}_{a+}^{[\beta]-[\beta-\alpha]} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f &= \mathcal{I}_{a+}^{[\beta]-[\beta-\alpha]} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}} \varphi + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k \\ \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f &= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}} \varphi + \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k, \end{aligned}$$

assim aplicando (pela esquerda) o operador $\mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}}$ em ambos os lados da última igual-

APÊNDICE A. APÊNDICE

dade obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f &= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}} \varphi + \mathcal{D}_{a+}^{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \sum_{k=0}^{\mathbf{n}-1} c_k (x-a)^k, \\
&= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}} \varphi + \sum_{k=\mathbf{n}-\mathbf{m}}^{\mathbf{n}-1} c_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\mathbf{n}+\mathbf{m})} (x-a)^{k-\mathbf{n}+\mathbf{m}} \\
&= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}} \varphi + \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} c_{k+\mathbf{n}-\mathbf{m}} (x-a)^k \\
&= \mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}} \varphi + \sum_{k=0}^{\mathbf{m}-1} d_k (x-a)^k,
\end{aligned}$$

o que implica, em vista do **Lema 1.1**, que $\mathcal{I}_{a+}^{\mathbf{m}-(\beta-\alpha)} f \in AC^{\mathbf{m}}[a, b]$ como desejado.

A.4 Casos $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2} \mp p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm p} g = g$

Explicitamos a verificação destes casos através do **Teorema 2.8**.

Primeiramente, reescrevemos as funções em Eq.(3.20) para $f = \text{sen}(2\sqrt{x})$ por suas respectivas séries de Frobenius:

$$f = \text{sen}(2\sqrt{x}) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^k}{(2k+1)!}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{df}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^k}{(2k)!}, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2[xf]}{dx^2} &= \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) - \text{sen}(2\sqrt{x}) \\
&= \frac{3}{2} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^k}{(2k)!} - x^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^k}{(2k+1)!}.
\end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Para calcularmos os limites listados em Eq.(3.26) e Eq.(3.34), lembremos que dada

A.4. CASOS $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2} \mp P} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm P} G = G$

uma série de Frobenius (integroderivável) em torno de $x = a$, i.e.,

$$g(x) = (x - a)^q \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k, \quad q > -1 \text{ e } a_0 \neq 0, \quad (\text{A.4})$$

então por Eq.(2.45) temos

$$\mathfrak{D}_{a+}^{\nu} g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma(q + k + 1)}{\Gamma(q + k - \nu + 1)} (x - a)^{q+k-\nu}. \quad (\text{A.5})$$

Assim, se quisermos saber o comportamento do limite $\lim_{x \rightarrow a+} \mathfrak{D}_{a+}^{\nu} g(x)$, basta olharmos para comportamento do primeiro termo da série Eq.(A.5), i.e.,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \mathfrak{D}_{a+}^{\nu} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{a_0 \Gamma(q + 1)}{\Gamma(q - \nu + 1)} (x - a)^{q-\nu} \\ &= \begin{cases} 0, & q - \nu > 0 \\ a_0 \Gamma(q + 1), & q - \nu = 0 \\ \infty, & q - \nu < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Caso $(\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}+p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}-p} g = g)$: Calculando $(\mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g)(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{I}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g(x)$ em Eq.(3.26) quando $0 < p < \frac{1}{2}$ e $g(x) = \sin(2\sqrt{x})$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{2}+p} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{a+}^{-\frac{1}{2}-p} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} 2 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + p}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + p + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} 2 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) x^{p+1}}{\Gamma(p + 2)} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

pois $p + 1 > 0$.

APÊNDICE A. APÊNDICE

Para $g(x) = \frac{df}{dx} = x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x})$, como $p > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{2}+p} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{a+}^{-\frac{1}{2}-p} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) x^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + p}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + p + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^p}{\Gamma(p + 1)} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Para $g(x) = \frac{d^2[xf]}{dx^2} = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) - \sin(2\sqrt{x})$, como $p > 0$ fazemos uso dos resultados Eq.(A.7) e Eq.(A.8), para concluir que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{I}_{a+}^{\frac{1}{2}+p} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \mathcal{D}_{a+}^{-\frac{1}{2}-p} g(x) = 0.$$

Caso $(\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g)$: A análise deste caso é mais complicada e convém uma abordagem mais cautelosa, por isso, antes de calcularmos os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \mathfrak{D}_{0+}^{\nu-j} g(x), \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} \quad (\text{A.9})$$

para $\nu = \frac{1}{2} + p$ ($p > 0$) e $\mathbf{n} = \left[\frac{1}{2} + p\right] + 1$ provenientes da Eq.(3.34), notemos o seguinte:

$$\nu - j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1, \quad (\text{A.10})$$

$$\nu - j < 0, \quad j = \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n} - \nu > 0, \quad (\text{A.11})$$

sendo que estas relações valem para qualquer $\nu \geq 0$. Em particular, observamos que a igualdade na Eq.(A.10) ocorre se, e somente se, $\nu = n \in \mathbb{N}_0$ e $j = \mathbf{n} - 1$. Assim sendo, se utilizarmos $\nu = \frac{1}{2} + p$ como desejado na nossa análise, então as Eq.(A.10) e Eq.(A.11) resultam em

$$\frac{1}{2} + p - j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{1}{2} + p - j < 0, \quad j = \mathbf{n} \Leftrightarrow \mathbf{n} - \frac{1}{2} - p > 0, \quad (\text{A.13})$$

A.4. CASOS $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}\mp P} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm P} G = G$

sendo que a igualdade na Eq.(A.12) ocorre se, e somente se, $\frac{1}{2} + p = n \in \mathbb{N}_0$ e $j = \mathbf{n} - 1$.

Usando a representação em série para $g(x) = \sin(2\sqrt{x})$ e integrodiferenciando termo a termo, obtemos (para $\alpha > 0$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{0+}^\alpha \sin(2\sqrt{x}) &= \mathcal{D}_{0+}^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} \Gamma(k + \frac{3}{2}) x^{k+\frac{1}{2}-\alpha}}{\Gamma(2k+2) \Gamma(k + \frac{1}{2} - \alpha + 1)} \\
&= \sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+\frac{1}{2}-\alpha}}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} - \alpha + 1)} \\
&= \sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}-\alpha} J_{\frac{1}{2}-\alpha}(2\sqrt{x}). \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0+}^\alpha \sin(2\sqrt{x}) &= \mathcal{I}_{0+}^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{k+\frac{1}{2}}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} \Gamma(k + \frac{3}{2}) x^{k+\frac{1}{2}+\alpha}}{\Gamma(2k+2) \Gamma(k + \frac{1}{2} + \alpha + 1)} \\
&= \sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+\frac{1}{2}+\alpha}}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + \alpha + 1)} \\
&= \sqrt{\pi} x^{\frac{1}{2}+\alpha} J_{\frac{1}{2}+\alpha}(2\sqrt{x}). \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Agora, usando a representação em série para

$$g(x) = \frac{\mathbf{d} \sin(2\sqrt{x})}{\mathbf{d}x} = x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x})$$

e integrodiferenciando termo a termo, obtemos (para $\alpha > 0$):

$$\mathcal{D}_{0+}^\alpha x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) = \mathcal{D}_{0+}^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{k-\frac{1}{2}}}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} \Gamma(k + \frac{1}{2}) x^{k - \frac{1}{2} - \alpha}}{\Gamma(2k + 1) \Gamma(k - \frac{1}{2} - \alpha + 1)} \\
 &= \sqrt{\pi} x^{-\frac{1}{2} - \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k + \frac{-\frac{1}{2} - \alpha}{2}}}{k! \Gamma(k - \frac{1}{2} - \alpha + 1)} \\
 &= \sqrt{\pi} x^{-\frac{1}{2} - \alpha} J_{-\frac{1}{2} - \alpha}(2\sqrt{x}). \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{0+}^{\alpha} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) &= \mathcal{I}_{0+}^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{k - \frac{1}{2}}}{(2k)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} \Gamma(k + \frac{1}{2}) x^{k - \frac{1}{2} + \alpha}}{\Gamma(2k + 1) \Gamma(k - \frac{1}{2} + \alpha + 1)} \\
 &= \sqrt{\pi} x^{-\frac{1}{2} + \alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k + \frac{-\frac{1}{2} + \alpha}{2}}}{k! \Gamma(k - \frac{1}{2} + \alpha + 1)} \\
 &= \sqrt{\pi} x^{-\frac{1}{2} + \alpha} J_{-\frac{1}{2} + \alpha}(2\sqrt{x}). \tag{A.17}
 \end{aligned}$$

Nos resultados acima, $J_{\pm\frac{1}{2}\pm\alpha}(2\sqrt{x})$ são as funções de Bessel de respectiva ordem. Além disso, observamos que em algumas passagens foram usados as seguintes identidades $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ e $\frac{\Gamma(\frac{3}{2}+k)}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k+1}\Gamma(k+1)}$ [35].

Portanto, os limites em Eq.(A.9), tendo em vista os resultados das Eq.(A.10) - Eq.(A.13) e Eq.(A.14) - Eq.(A.17), podem ser calculados tomando-se os limites das expressões (para $\alpha = \nu - j = \frac{1}{2} + p - j$ e $\mathbf{n} = [\frac{1}{2} + p] + 1$):

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p-j} \sin(2\sqrt{x}) = \begin{cases} \sqrt{\pi} x^{-\frac{p+j}{2}} J_{-p+j}(2\sqrt{x}), & j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1, \\ \sqrt{\pi} x^{\frac{p+1-\mathbf{n}}{2}} J_{p+1-\mathbf{n}}(2\sqrt{x}), & j = \mathbf{n}. \end{cases} \tag{A.18}$$

$$\mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p-j} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}) = \begin{cases} \sqrt{\pi} x^{-\frac{1-p+j}{2}} J_{-1-p+j}(2\sqrt{x}), & j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1, \\ \sqrt{\pi} x^{\frac{p-\mathbf{n}}{2}} J_{p-\mathbf{n}}(2\sqrt{x}), & j = \mathbf{n}. \end{cases} \tag{A.19}$$

Isto significa que para calcularmos os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p-j} \sin(2\sqrt{x})$$

A.4. CASOS $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2} \mp P} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm P} G = G$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} + p - j} x^{-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{x}),$$

devemos saber reconhecer o comportamento dos limites da forma

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta J_\alpha(2\sqrt{x}), \quad (\text{A.20})$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Para auxílio no cálculo do limite acima, convém recordarmos a representação assintótica das funções de Bessel numa vizinhança da origem [9], i.e., fixada a ordem $\alpha \in \mathbb{R}$, então para $z \rightarrow 0^+$ vale a relação¹

$$J_\alpha(z) \simeq \begin{cases} \frac{(\frac{z}{2})^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, & \alpha \neq -1, -2, \dots \\ (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^n}{\Gamma(n+1)} & \alpha = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Além disso, sabemos que

$$J_\alpha(0^+) = \lim_{z \rightarrow 0^+} J_\alpha(z) = \begin{cases} 1, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha > 0. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

$$J_{-\alpha}(0^+) = \lim_{z \rightarrow 0^+} J_{-\alpha}(z) = \begin{cases} 0, & \alpha = n \in \mathbb{N}, \\ \pm\infty, & 0 < \alpha \neq n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Os possíveis resultados para o limite em Eq.(A.20) quando temos $\alpha, \beta \geq 0$ são triviais e facilmente obtidos a partir da Eq.(A.22). De fato, nestas condições o limite sempre converge para zero, exceto quando $\alpha = 0 = \beta$ onde o limite tem o valor 1. Quando $\beta = 0$ e $\alpha < 0$ (lembre-se que nesse caso, iremos denotar $\alpha \mapsto -\alpha$, com $\alpha > 0$) o limite também é trivialmente obtido a partir da Eq.(A.23), pois nesse caso o termo $x^\beta = x^0 = 1$ e o limite admitirá os valores 0 quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$ e $\pm\infty$ quando $0 < \alpha \neq n \in \mathbb{N}$. Quando $\beta < 0$ e $\alpha = 0$ (denotamos $\beta \mapsto -\beta$, com $\beta > 0$) o limite divergirá para ∞ , pois $J_0(0^+) = 1$ e o termo $x^{-\beta} \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 0^+$. Por fim,

¹Para não haver confusão na notação dos índices α e β , convencionaremos o seguinte: Se $\alpha \geq 0$, então $\alpha \mapsto \alpha$ e se $\alpha < 0$ então $\alpha \mapsto -\alpha$, com $\alpha > 0$. O mesmo sendo válido para β . Desse modo, fica fácil a leitura das relações Eq.(A.21) - (A.23).

APÊNDICE A. APÊNDICE

resta-nos verificar o caso em que $\alpha, \beta < 0$, ou seja, usando a nossa convenção

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\beta} J_{-\alpha}(2\sqrt{x}) = ?, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (\text{A.24})$$

Então para a análise final do limite em Eq.(A.24), consideremos dois casos: (i) $\alpha = n \in \mathbb{N}$ e (ii) $0 < \alpha \neq n \in \mathbb{N}$.

Para (i), lembremos que vale a relação

$$J_{-n}(2\sqrt{x}) = (-1)^n J_n(2\sqrt{x}), \quad (\text{A.25})$$

logo o limite em Eq.(A.24) resulta

$$(-1)^n \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\beta} J_n(2\sqrt{x}) \quad (\text{A.26})$$

e usando a representação assintótica em Eq.(A.21) podemos escrever (com $z = 2\sqrt{x}$)

$$(-1)^n \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\beta} \frac{(x)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n+1)} = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{n}{2}-\beta}, \quad (\text{A.27})$$

donde se conclui que o limite converge para zero se $n > 2\beta$, converge para $\frac{(-1)^n}{n!}$ se $n = 2\beta$ e diverge para $\pm\infty$ se $n < 2\beta$.

Para o caso (ii), novamente fazendo uso da representação assintótica em Eq.(A.21), podemos reescrever o limite em Eq.(A.24) como

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\beta} \frac{(x)^{\frac{-\alpha}{2}}}{\Gamma(-\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{-\alpha}{2}-\beta}. \quad (\text{A.28})$$

Observe que o termo $\frac{1}{\Gamma(-\alpha+1)}$ é sempre finito nas condições do caso (ii), mas $\frac{-\alpha}{2} - \beta < 0$ sempre! Logo, o limite sempre diverge para $\pm\infty$.

Concluída esta investigação sobre o comportamento do limite da Eq.(A.20), relembramos o leitor de que tudo isto foi motivado pela necessidade de sabermos se os limites da Eq.(A.9), a saber,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}+p-j} g(x), \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n},$$

A.4. CASOS $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2} \mp P} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2} \pm P} G = G$

convergem ou não para zero quando $g(x) = f_1$, $g(x) = \frac{df_1}{dx}$ e $g(x) = \frac{d^2[xf_1]}{dx^2}$, no caso em que $f_1(x) = \text{sen}(2\sqrt{x})$. Isto porque em vista do **Teorema 2.8** a IFRL será a inversa à esquerda da DFRL no **Caso** $(\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g)$ se, e somente se, todos estes limites forem zero.

Dessa forma, os limites em Eq.(A.9) vistos sob a ótica das Eq.(A.18) e Eq.(A.19) e da investigação feita para a Eq.(A.20) resultam em:

1-) Quando $p = n \in \mathbb{N}$, então $\mathbf{n} = n + 1$ e $j = 1, 2, \dots, n + 1$ e olhando para os índices que aparecem na Eq.(A.18) temos

$$\begin{aligned} -p + j &= -n + j \begin{cases} < 0, & j = 1, 2, \dots, n - 1, \\ = 0 & j = n, \end{cases} \\ p + 1 - \mathbf{n} &= n + 1 - (n + 1) = 0, \quad j = \mathbf{n} = n + 1, \end{aligned}$$

com $(-p + j), (p + 1 - \mathbf{n}) \in \mathbb{Z}_0^-$, donde se conclui que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+n-j} \text{sen}(2\sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} \sqrt{\pi} x^{-\frac{n-j}{2}} J_{-(n-j)}(2\sqrt{x}), & j = 1, 2, \dots, n - 1, \\ \sqrt{\pi} x^0 J_0(2\sqrt{x}), & j = n, \\ \sqrt{\pi} x^0 J_0(2\sqrt{x}), & j = n + 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} \sqrt{\pi}, & j = 1, 2, \dots, n - 1, \\ \sqrt{\pi}, & j = n, \\ \sqrt{\pi}, & j = n + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Portanto, em virtude do que foi dito na observação acima a respeito da necessidade de termos todos os limites convergindo para zero, o fato de termos encontrado limites que não convergem para zero (vide Eq.(A.29)) para $g(x) = \text{sen}(2\sqrt{x})$ já é suficiente para concluirmos que para $p = n \in \mathbb{N}$ o **Caso** $(\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g)$ não é satisfeito!

2-) Por outro lado, se $0 < p \neq n \in \mathbb{N}$, os limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p-j} f_1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p-j} \frac{df_1}{dx}$ ficam respectivamente iguais a²

²Rever as Eq.(A.18) e Eq.(A.19).

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}+p-j} f_1 = \begin{cases} \text{(i)} \quad \sqrt{\pi} x^{\frac{-p+j}{2}} J_{-p+j}(2\sqrt{x}), & j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1 \\ \text{(ii)} \quad \sqrt{\pi} x^{\frac{p+1-\mathbf{n}}{2}} J_{p+1-\mathbf{n}}(2\sqrt{x}), & j = \mathbf{n}. \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}+p-j} \frac{df_1}{dx} = \begin{cases} \text{(iii)} \quad \sqrt{\pi} x^{\frac{-1-p+j}{2}} J_{-1-p+j}(2\sqrt{x}), & j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1 \\ \text{(iv)} \quad \sqrt{\pi} x^{\frac{p-\mathbf{n}}{2}} J_{p-\mathbf{n}}(2\sqrt{x}), & j = \mathbf{n}, \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

que são da forma

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-\frac{\alpha}{2}} J_{-\alpha}(2\sqrt{x}),$$

possuem índices

$$\text{(i)} \quad -\alpha = -p + j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1, \quad (\text{A.32})$$

$$\text{(ii)} \quad -\frac{1}{2} < -\alpha = p + 1 - \mathbf{n} = p - \left[p + \frac{1}{2}\right] < \frac{1}{2}, \quad (\text{A.33})$$

$$\text{(iii)} \quad -\alpha = -1 - p + j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, \mathbf{n} - 1, \quad (\text{A.34})$$

$$\text{(iv)} \quad -\alpha = p - \mathbf{n} = p - \left[p + \frac{1}{2}\right] - 1 < 0 \quad (\text{A.35})$$

e que sempre admitem valores não inteiros. Inclusive, em virtude do que foi analisado para Eq.(A.28), quando estes índices forem negativos, saberemos que os limites divergirão, o que é garantido sempre em (i), (iii) e (iv) para qualquer $0 < p \neq n \in \mathbb{N}$.

Para dar um exemplo, note que quando $0 < p < \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} < p + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left[p + \frac{1}{2}\right] = 0 \Rightarrow \mathbf{n} = 1.$$

Sendo assim, $\frac{1}{2} + p - j = -\frac{1}{2} + p < 0$ e por Eq.(A.30) e Eq.(A.31) devemos usar as expressões para (ii) e (iv). Daí, como

$$p + 1 - \mathbf{n} = p > 0,$$

$$p - \mathbf{n} = p - 1 < 0,$$

conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0^+}^{\frac{1}{2}+p-j} f_1 = 0, \quad (\text{A.36})$$

A.4. CASOS $\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}\mp P} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}\pm P} G = G$

mas

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p-j} \frac{df_1}{dx} = \infty. \quad (\text{A.37})$$

Portanto, podemos concluir que sempre haverá ao menos um limite dentre todos os $\mathbf{n} = \left[\frac{1}{2} + p\right] + 1$ possíveis na Eq.(A.9) que irá divergir para $\pm\infty$, logo, decorre do **Teorema 2.8** que o **Caso** $(\mathfrak{D}_{0+}^{-\frac{1}{2}-p} \mathfrak{D}_{0+}^{\frac{1}{2}+p} g = g)$ deve ser falso para qualquer $p > 0$!

Referências Bibliográficas

- [1] Abbas, S., Benchora, M. and N'Guéréketa, G. M., *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin - Heidleberg, 2014.
- [2] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John-Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [3] Butkov, E., *Mathematical Physics*, Addison - Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1968.
- [4] Capelas de Oliveira, E. and Tenreiro Machado, J. A., A review of definitions for fractional derivatives and integral, *Math. Probl. Eng.*, ID 238459 (2014).
- [5] Capelas de Oliveira, E., Mainardi, F. and Vaz, J. Jr., Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics., *Eur. Phys. J. Spec Top.*, **193**, 161-171 (2011).
- [6] Capelas de Oliveira, E., Mainardi, F. and Vaz, J. Jr., Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function, *Meccanica*, **49**, 2049-2060 (2014). DOI 10.1007/s11012-014-9930-0.
- [7] Capelas de Oliveira, E. e Maiorino, J. E., *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada*, Editora Unicamp, 3^a. Edição, Campinas, 2010.
- [8] Capelas de Oliveira, E., *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, 2^a. Edição, São Paulo, 2012.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [9] Capelas de Oliveira, E. e Tygel, M., *Métodos Matemáticos para a Engenharia*, 2^a. Edição, SBMAC Editora, Rio de Janeiro, 2012.
- [10] Choquet-Bruhat, Y., *Analysis, Manifolds and Physics* (revised edition), North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1982.
- [11] Cresson, J., *Fractional Calculus in Analysis, Dynamics and Optimal Control*, Nova Science Publishers Inc., Hauppauge NY, 2014.
- [12] Das. S., *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [13] Diethelm, K., *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [14] Dieudonné, J., “Examples of Measures”, *Treatise of Analysis*, Part 2, Acad. Press, New York, (1976).
- [15] Elliot, D., An asymptotic analysis of two algorithms for certain Hadamard finite-part integrals, *IMA J. Numer. Anal.*, **13**, 445-462 (1993).
- [16] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*, Editora da Unicamp, Campinas, 2004.
- [17] Garra, R. et al., Hilfer-Prabhakar derivatives and some applications, *Appl. Math. & Comput.*, **242**, 576-589 (2014).
- [18] Gelf’and, I. M. and Shilov, G. E., *Generalized Functions*, Academic Press, Inc., New York, 1964.
- [19] Grigoletto, E. C. and Capelas de Oliveira, E., Fractional versions of the fundamental theorem of calculus, *Scientific Research, Applied Mathematics*, **4**, 23-33 (2013). DOI 10.4236/am.2013.47A006.
- [20] Hadamard, J., *Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale Univ. Press, New Haven, 1923, (Dover NY, 1952).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [21] Herrmann, R., *Fractional Calculus, An Introduction for Physicists*, Word Scientific Publishing Co., Singapore, 2011.
- [22] Hilfer, R., *Applications of Fractional Calculus in Physics*, Word Scientific Publishing Co., Singapore, 2000.
- [23] Katugampola, U. N., A new fractional derivative with classical properties, ArXiv:1410.6535v2 [math.CA] (2014).
- [24] Khalil, R. et al., A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, **264**, 65-70 (2014).
- [25] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.
- [26] Kobelev, V.V., On a Leibniz-type fractional derivative, ArXiv:1202.2714v2 [math-ph] (2012).
- [27] Lima, E. L., *Curso de Análise*, vol. 1, SBM, Rio de Janeiro, 2000.
- [28] Lin, Y., Xu, C., Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation, *J. Comput. Phys.*, **225**, 1533-1552, (2007).
- [29] Mainardi, F., *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*, Imperial College Press, London, 2010.
- [30] Marchaud, A., Sur les dérivées et sur les différences de fonctions des variables réelles, *J. Math. Pures Appl.* **6**, 337-425 (1927).
- [31] Meral, F. C., Royston, T. J., Magin, R., Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study, *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **15**(4), 939-945, (2010).
- [32] Miller, K. S. and Ross, B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [33] Moshrefi-Tobarti, M., Hammond, J. K., Physical and geometrical interpretation of fractional operators, *J. Franklin Inst.*, **335**(6), 1077-1086 (1998). DOI: 10.1016/S0016-0032(97)00048-3.
- [34] Myint-U, T. and Debnath, L., *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [35] Oldham, Keith B. and Spanier, J., *The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Publications, Inc., New York, 2002.
- [36] Ortigueira, M.D., Tenreiro Machado, J. A., What is a fractional derivative?, *J. Comput. Phys.* (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.07.019>.
- [37] Osler, T. J., Leibniz rule for fractional derivatives generalized and application to infinite series, *SIAM J. Appl. Math.* **18**, 658-674 (1970).
- [38] Osler, T. J., Fractional derivatives and Leibniz rule, *Am. Math. Mon.*, **78**, 645-649 (1971).
- [39] Osler, T. J., A further extension of Leibniz rule to fractional derivatives and its relation to Parseval's formula, *SIAM J. Math. Anal.* **3**(1), 1-16, (1972).
- [40] Osler, T. J., The integral analog of the Leibniz rule, *Math. Comp.* **26**, 903-915 (1972).
- [41] Podlubny, I., *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [42] Podlubny, I., Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **5**(4), 367- 386, (2002).
- [43] Podlubny, I., Heymans, N., Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives, *Rheol. Acta.*, (45), 765-771, (2006). DOI 10.1007/s00397-005-0043-5.
- [44] Rodrigues, F. G. e Capelas de Oliveira, E., Introdução às derivadas fracionárias (submetido para publicação), (2015).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [45] Rodrigues, F. G. e Capelas de Oliveira, E., Modelos matemáticos utilizando o cálculo fracionário, (submetido para publicação), (2015).
- [46] Rodrigues, F. G. e Capelas de Oliveira, E., Solução da equação de Bessel via Cálculo Fracionário, (submetido para publicação), (2015).
- [47] Rodrigues, F. G. e Capelas de Oliveira, E., Solutions of the confluent hypergeometric equation by fractional calculus approach, (a ser submetido), (2015).
- [48] Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [49] Schiessel, H., Metzler, R., Blumen, A., Nonnenmacher T., F., Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions, *J. Phys. A.*, **28**, 6567-6584, (1995).
- [50] Silva Costa, F., et al., Slowing-down of neutrons: A fractional model, *Commun. Appl. Ind. Math.*, (aceito para publicação), (2015).
- [51] Solteiro Pires, E. J., Tenreiro Machado, J. A., de Moura Oliveira, P. B., Fractional order dynamics in a GA planner, *Signal Process* **83**, 2377-2386 (2003).
- [52] Schwartz, L., *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover Publ. Inc., New York (2008).
- [53] Stinga, P. R., Torrea, J. L., Regularity theory for the fractional harmonic oscillator, *J. Funct. Anal.*, **260**(10), 3097-3131, (2011).
- [54] Tarasov, V. E., No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18**(11), 2945-2948 (2013).
- [55] Tarasov, V. E., *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [56] Tenreiro Machado, J. A., Galhano, A. M S. F., Trujillo, J. J., On Development of Fractional Calculus During the Last Fifty Years, *Scientometrics* 98:577-582 (2014), DOI 10.1007/s11192-013-1032-6.
- [57] Tenreiro Machado, J. A., Galhano, A. M S. F., Trujillo, J. J., Science metrics on fractional calculus development since 1966, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **16**(2), 479-500, (2013).
- [58] Vladimirov, V. S., *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
- [59] Wang, X., On the Leibniz rule and fractional derivative for differentiable and non-differentiable functions, viXra.org: 1404.0072 (2014). <http://vixra.org/pdf/1404.0072v1.pdf>.
- [60] Watanabe, Y., Notes on the generalized derivative of Riemann-Liouville and its application to Leibniz's formula I and II, *Tôhoku Math. J.*, **34**(8), (1931).
- [61] West, B. J., Colloquium: Fractional calculus view of complexity: A tutorial, *Rev. Mod. Phys.*, **8**, 1169-1182 (2014).
- [62] Williamson, J.H., *Lebesgue Integration*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
- [63] Zhao, C., Xue, D. and Chen, Y., A fractional order PID tuning algorithm for a class of fractional order plants, *International Conference on Mechatronics & Automation*, Niagara Falls, Canada, **1**, 216-221, (2005).