Pedro Manfrim Magalhães de Paula

Consequências geométricas associadas à limitação do tensor de Bakry-Émery-Ricci

CAMPINAS
2015

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

PEDRO MANFRIM MAGALHÃES DE PAULA

CONSEQUÊNCIAS GEOMÉTRICAS ASSOCIADAS À LIMITAÇÃO DO TENSOR DE BAKRY-ÉMERY-RICCI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO PEDRO MANFRIM MAGALHÃES DE PAULA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. DIEGO SEBASTIAN LEDESMA.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2015

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

P281c

Paula, Pedro Manfrim Magalhães de, 1991-
Consequências geométricas associadas à limitação do tensor de Bakry-Émery-Ricci / Pedro Manfrim Magalhães de Paula. – Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Diego Sebastian Ledesma.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Geometria riemaniana. 2. Geometria diferencial global. 3. Cálculo tensorial. 4. Tensor de Ricci. I. Ledesma, Diego Sebastian,1979-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Geometric consequences associated to the limitation of the Bakry-Émery-Ricci tensor
Palavras-chave em inglês:
Geometry, Riemannian
Global differential geometry
Calculus of tensors
Ricci tensor
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Diego Sebastian Ledesma [Orientador]
Paulo Regis Caron Ruffino
Alexandre José Santana
Data de defesa: 27-02-2015
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de fevereiro de 2015 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). DIEGO SEBASTIAN LEDESMA

Prof.(a). Dr(a). PAULO REGIS CARON RUFFINO

Prof.(a). Dr(a). ALEXANDRE JOSÉ SANTANA

Abstract

This work presents a study about Riemannian manifolds having a Bakry-Émery-Ricci tensor with bounds. Initially we approached both the traditional aspects of Riemannian geometry like metrics and geodesics, as more advanced aspects like the Bochner, Weitzenböck formulas and the Hodge's theorem. Then we discussed the Gromov-Hausdorff convergence and its properties, in addition to showing some theorems as those from Kasue and Fukaya. Lastly we studied the topological and geometric properties of manifolds with bounds on the Bakry-Émery-Ricci tensor and the behavior of these bounds with respect to submersions and the Gromov-Hausdorff convergence.

Keywords: Geometry, Riemannian, Global differential geometry, Calculus of tensors, Ricci tensor.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre variedades Riemannianas que possuem um tensor de Bakry-Émery-Ricci com limitações. Inicialmente abordamos tanto aspectos da geometria Riemanniana tradicional como métricas e geodésicas, quanto aspectos mais avançados como as fórmulas de Bochner, Weitzenböck e o teorema de Hodge. Em seguida discutimos a convergência de Gromov-Hausdorff e suas propriedades, além de serem apresentados alguns teoremas como os de Kasue e Fukaya. Por fim estudamos as propriedades topológicas e geométricas de variedades com limitação no tensor de Bakry-Émery-Ricci e o comportamento de tais limitações com respeito à submersões e à convergência de Gromov-Hausdorff.

Palavras-chave: Geometria riemanniana, Geometria diferencial global, Cálculo tensorial, Tensor de Ricci.

Sumário

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador prof. Diego Ledesma por ter me introduzido à pesquisa matemática e por ter me orientado ao longo do mestrado. Agradeço aos professores Alexandre José Santana e Paulo Ruffino, professores da banca, pela revisão da dissertação e presença na defesa.

Sou grato aos meus familiares, principalmente aos meus pais, por darem o suporte necessário para que eu chegasse até aqui. Gostaria de agradecer também ao meu irmão pelos longos diálogos que me entretiam para assuntos além da matemática. Agradeço também aos meus colegas e amigos por todas as conversas que contribuíram no meu conhecimento matemático.

Agradeço à Unicamp e ao IMECC por proverem toda a estrutura necessária que um estudante necessita (e muito mais) e aos professores do IMECC por ajudarem a me desenvolver como estudante de matemática. Agredeço também aos funcionários da secretaria de pós-graduação, da biblioteca, da informática e demais áreas por estarem sempre dispostos a resolver qualquer problema.

Por fim agradeço à Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Introdução

A geometria riemanniana global é uma parte da geometria diferencial que estuda como propriedades locais de uma variedade riemanniana informam propriedades globais. Seu desenvolvimento teve origem no século passado com o surgimento da geometria riemanniana, embora suas raízes originem dos trabalhos de Gauss. Ao longo do século passado, ela gerou vários resultados em topologia e geometria das variedades, ajudando a entender melhor a relação entre estas duas áreas. Recentemente, com a descoberta de mais tensores ligados à geometria da variedade, vários resultados globais sobre a geometria das variedades têm sido obtidos. Um destes tensores é o tensor de Bakry-Émery-Ricci,

$$\mathrm{Ric}_f = \mathrm{Ric} + \mathrm{Hess}\,(f)\,.$$

Este tensor foi definido por Bakry e Émery para estudar processos de difusão, tendo conexões com desigualdades de Sobolev logarítmicas, desigualdades isoperimétricas e semigrupos de calor. Além disso, ele também é utilizado para estudar o fluxo de Ricci, pois os pontos fixos do fluxo de Ricci, que são conhecidos como solitons de Ricci, são métricas que satisfazem

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_X g = \lambda g.$$

Assim, quando X é um campo gradiente, estudar solitons de Ricci é o análogo no caso do tensor de Bakry-Émery-Ricci a estudar variedades Einstein. Portanto vemos que o tensor de Bakry-Émery-Ricci está ligado a várias áreas da matemática e da física, possuindo assim muitas aplicações.

O objetivo deste trabalho é estudar as propriedades globais de variedades com limitações no tensor de Bakry-Émery-Ricci e as maneiras de estimar estas limitações em alguns casos específicos. Para isso estudamos os resultados de Yang [34], Fernández-López e García-Río [15], Wylie [33] e Lott [24]. A estrutura deste trabalho é organizada da seguinte maneira:

No capítulo 1 introduzimos as noções básicas da geometria riemanniana. O objetivo deste capítulo é apresentar algumas definições e enunciar alguns resultados, que serão utilizados em capítulos posteriores. Começamos introduzindo fibrados vetorias, métricas riemannianas em fibrados vetorias e apresentamos alguns exemplos. Seguimos definindo conexões e curvatura em fibrados vetoriais, submersões riemannianas e mostramos como calcular as conexões e curvaturas do produto torcido de variedades riemannianas. Em seguida apresentamos variedades completas e suas propriedades, introduzimos os funcionais de comprimento e energia, os campos de Jacobi e a forma índice e demonstramos o teorema da primeira variação de área para imersões. Na seção seguinte derivamos algumas fórmulas para calcular a derivada exterior e seu adjunto em k-formas, enunciamos as fórmulas de Bochner e apresentamos o teorema da decomposição de Hodge. Por fim, enunciamos alguns resultados como as desigualdades de Bishop-Gromov, o teorema de Myers, o teorema da separação de Cheeger-Gromoll, o teorema de Bieberbach e o teorema de Myers-Steenrod.

No capítulo 2 descrevemos um pouco da geometria métrica. Nossa intenção é apresentar as definições e resultados que serão utilizados nos capítulos seguintes. Para isso, começamos definindo a distância de Gromov-Hausdorff e demonstramos algumas de suas propriedades. Em seguida definimos a convergência de Gromov-Hausdorff para espaços pontuados, definimos a convergência de mapas e demonstramos um lema semelhante ao teorema de Arzelà-Ascoli para estes mapas. Seguimos estudando a classe de variedades com uma cota inferior no tensor de Ricci e mostramos que tal classe é pre-compacta na topologia de Gromov-Hausdorff. Por fim, enunciamos alguns dos resultados que utilizaremos posteriormente como o teorema de Kasue sobre a convergência de variedades que não colapsam, o teorema de Fukaya sobre convergêcia de variedades que colapsam, o teorema de Abresch sobre aproximação de métricas, o teorema de Colding sobre a continuidade do volume para convergência de variedades e o teorema de Cheeger sobre a cota inferior do raio de injetividade de variedades.

No capítulo 3 apresentamos detalhadamente os resultado de Yang, Fernández-López e García-Río, Wylie e os resultados topológicos e geométricos de Lott. Começamos mostrando os resultados de Lott sobre variedades compactas com tensor de Bakry-Émery-Ricci não negativo e positivo. Em seguida derivamos uma fórmula do tipo Bochner para o tensor de Bakry-Émery-Ricci e a utilizamos para obter os resultados sobre variedades compactas com tensor de Bakry-Émery-Ricci não positivo e negativo. Seguimos estudando o resultado de Yang que estima o crescimento de subgrupos finitamente gerados do grupo fundamental, assumindo que o tensor de Bakry-Émery-Ricci não é negativo e a função potencial é limitada. Então apresentamos o resultado de Fernández-López e García-Río sobre a compacidade de variedades com tensor de Bakry-Émery-Ricci generalizado positivo. E por fim, mostramos o resultado de Wylie que afirma que variedades com tensor de Bakry-Émery-Ricci generalizado positivo possuem grupo fundamental finito.

No capítulo 4 mostramos os resultados de Lott sobre estimativas do tensor de Bakry-Émery-Ricci. Começamos definindo o tensor de Bakry-Émery-Ricci induzido por uma submersão riemanniana e o transporte de fibras de uma submersão riemanniana. Então mostramos que cotas inferiores do tensor original passam para o tensor induzido se assumirmos que o transporte de fibras preserva a medida da fibra a menos de uma constante. Em seguida estendemos a definição de cota inferior do tensor de Bakry-Émery-Ricci para uma classe de variedades compactas com métricas que não precisam ser suaves. E mostramos que o ponto limite de uma sequência convergente de variedades com cota inferior no tensor de Bakry-Émery-Ricci possui mesma cota inferior segundo a definição estendida. Por fim apresentamos o resultado de Lott sobre a equivalência entre cotas inferiores no tensor de Bakry-Émery-Ricci e estimativas de volumes em tubos de distância.

Capítulo 1

Geometria Riemanniana

Neste capítulo introduziremos os conceitos mais comuns da geometria riemanniana como métricas riemannianas, conexões, submersões riemannianas e geodésicas. Apresentaremos também alguns resultados clássicos como as identidades de Bochner e o teorema de Hodge. Por fim comentaremos alguns teoremas importantes para os capítulos posteriores. As principais referências para este capítulo são os livros de Cheeger e Ebin [5], Jost [22], O'Neill [26] e Poor [29].

1.1 Fibrados vetoriais

Começaremos o estudo de geometria introduzindo um tipo de estrutura que será utilizado ao longo de todo trabalho, a principal referência para esta seção é [29].

Definição 1.1.1. *Um fibrado vetorial (real) é uma tripla* (E, B, π)*, onde*

- E *(chamado espaço total) e* B *(chamado espaço base) são variedades suaves;*
- $\pi : E \to B$ *é um mapa suave sobrejetivo (chamado projeção do fibrado);*
- *Cada conjunto* $\pi^{-1}(b)$ *com* $b \in B$ *possui uma estrutura de espaço vetorial (real);*

Tal que para cada $b \in B$ *existe uma vizinhança* U_b*, um número natural* k_b *e um difeomorfismo* $\phi_b : \pi^{-1}(U_b) \to U_b \times \mathbb{R}^{k_b}$ *com as seguintes propriedades:*

1. $pr_1 \circ \phi_b = \pi$ *para a projeção na primeira coordenada* pr_1*, ou seja, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_b) \arrow[r, "\phi_b"] \arrow[d, "\pi"'] & U_b \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ U_b & \end{tikzcd}.$$

2. *A restrição do mapa* ϕ_b *às fibras* $\pi^{-1}(u)$ *é um isomorfismo de espaços vetoriais.*

Veja que as trivializações implicam que a dimensão das fibras k_b como espaços vetoriais é localmente constante. Se todas as dimensões são iguais a k, dizemos que o fibrado tem posto k, e dizemos que E é um fibrado vetorial de posto k.

Normalmente nos referimos a um fibrado (E, B, π) somente especificando o espaço total E, mas veja que isto não é suficiente como é o caso de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^1, \mathrm{pr}_1)$ e $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2, \mathrm{pr}_1 \times \mathrm{pr}_2)$. Em todo caso especificaremos a tripla caso haja possível confusão.

Exemplo 1.1.2. *Aqui temos alguns exemplos de fibrados:*

1. *O fibrado trivial $\left(M \times \mathbb{R}^k, M, \pi\right)$ admite uma estrutura de fibrado vetorial canônica. Além disso dizemos que um fibrado vetorial (E, B, π) é trivial se existe um difeomorfismo $f : E \to B \times \mathbb{R}^k$ que é um isomorfismo sobre as fibras.*

2. *O fibrado tangente (TM, M, π) e o fibrado cotangente (T^*M, M, π) são fibrados vetorias que geralmente não são triviais, como é o caso de TS^2. Quando o fibrado TM é trivial dizemos que a variedade M é paralelizável.*

3. *Mais geralmente os fibrados tensoriais $T^{(p,q)}M$ e exteriores $\Lambda^k M$ são fibrados vetoriais.*

4. *Se (E_i, M_i, π_i) são fibrados vetoriais, $i = 1, 2$, então $(E_1 \times E_2, M_1 \times M_2, \pi_1 \times \pi_2)$ é também um fibrado vetorial chamado fibrado produto de E_1 e E_2.*

Definição 1.1.3. *Dado um fibrado vetorial (E, B, π), uma variedade suave M e um mapa suave $f : M \to B$ definimos o fibrado vetorial (f^*E, M, pr_1) chamado fibrado pullback de E por f, onde $f^*E = \{(m, e) \in M \times E / f(m) = \pi e\}$. Veja que cada fibra de f^*E é isomorfa a uma fibra de E e que se $f(M)$ esta contida em uma trivialização local então f^*E é trivial.*

Definição 1.1.4. *Se E_1 e E_2 são fibrados vetoriais sobre B. A soma de Whitney de E_1 e E_2 é o fibrado pullback $E_1 \oplus E_2 = \Delta^*(E_1 \times E_2) \to B$ do fibrado produto $E_1 \times E_2 \to B \times B$ pelo mapa diagonal $\Delta : B \to B \times B$, $b \mapsto (b, b)$. Para $m \in M$ temos que as fibras de $E_1 \oplus E_2$ são da forma $(E_1 \oplus E_2)_m = E_1|_m \oplus E_2|_m$.*

Além da soma direta podemos generalizar outras operações entre espaços vetoriais para fibrados vetoriais.

Exemplo 1.1.5. *Estes são os fibrados mais comuns que surgem de operações algébricas:*

1. *O dual de um fibrado vetorial E é o fibrado E^*; a fibra de E^* em $p \in M$ é o espaço E_p^* dos funcionais lineares em E_p.*

2. *O produto tensorial de fibrados vetoriais E_1 e E_2 é o fibrado $E_1 \otimes E_2$; a fibra de $E_1 \otimes E_2$ em $p \in M$ é o produto tensorial $E_1|_p \otimes E_2|_p$. Denotamos o fibrado $E \otimes ... \otimes E$ por $\otimes^k E$.*

3. *O fibrado homomorfismo de E_1 a E_2 é o fibrado vetorial $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$; a fibra em $p \in M$ é o espaço vetorial $\mathrm{Hom}(E_1|_p, E_2|_p)$.*

Veja que as propriedades dos funtores nos espaços vetoriais induzem isomorfismos entre fibrados. Assim temos que

- $E_1 \otimes E_2 \cong E_2 \otimes E_1$.
- $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \cong E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$.
- $E_1^* \otimes E_2^* \cong (E_1 \otimes E_2)^*$.
- $\mathrm{Hom}\,(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2^*$.
- $E_1^* \wedge E_2^* \cong (E_1 \wedge E_2)^*$.

Além disto temos que $E \otimes (M \times \mathbb{R}) \cong E$.

Definição 1.1.6. *Um mapa entre fibrados vetoriais $f : E \to F$ é uma aplicação suave entre as variedades E e F tal que restrita às fibras é uma transformação linear. Ainda mais, um isomorfismo entre fibrados é um mapa entre fibrados que possui um mapa inverso, isto é, um mapa que composto resulta no mapa identidade.*

Veremos mais adiante alguns exemplos de mapas entre fibrados.

Lembre-se que uma álgebra é um espaço vetorial V com um dado mapa linear $V \otimes V \to V$, chamado multiplicação em V. Podemos então definir uma estrutura que generaliza álgebras assim como um fibrado vetorial generaliza espaços vetoriais.

Definição 1.1.7. *Seja $\mathcal{V}$ uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Um fibrado vetorial E sobre M é um fibrado de álgebras com fibra $\mathcal{V}$ se existe um mapa suave $E \otimes E \to E$ que age linearmente em cada fibra e um atlas de álgebras em E, isto é, um atlas de fibrado vetorial $\mathcal{A}$ em E tal que se $(\pi, \psi) \in \mathcal{A}$ é uma carta em E sobre $U \subset M$, então para todo $p \in U$, ψ mapeia a álgebra E_p isomorficamente à álgebra $\mathcal{V}$.*

Exemplo 1.1.8. *Segue os fibrados de álgebra mais comuns:*

1. *O fibrado da álgebra tensorial de um fibrado vetorial E é o fibrado com fibra padrão $\otimes\mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ sendo a fibra padrão de E)*

$$\otimes (E) = \oplus_{k,l \geq 0} \left(\otimes^k E\right) \otimes \left(\otimes^l E^*\right),$$

   com a multiplicação da álgebra tensorial natural em cada fibra.

2. *O fibrado da álgebra exterior de um fibrado vetorial E é o fibrado*

$$\Lambda (E) = \oplus_{k \geq 0} \Lambda^k E,$$

   com a multiplicação da álgebra exterior natural em cada fibra.

3. *O fibrado da álgebra dos endomorfismos de um fibrado vetorial E é o fibrado*

$$\mathrm{End}\,(E) = \mathrm{Hom}\,(E, E),$$

   com a multiplicação associativa natural das fibras por composição $f \cdot g = f \circ g$.

Definição 1.1.9. *Uma seção de um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é um mapa C^∞ $s : M \to E$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. O conjunto das secções de E será denotado por ΓE. Uma seção local de E será uma seção do fibrado $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ sobre um aberto $U \subset M$.*

Observe que a imagem de uma seção s é uma subvariedade mergulhada, pois se $\{U, \phi\}$ é uma carta de M, então $\{\pi^{-1}(U), \phi \circ \phi\}$ é uma carta de $s(U)$.

Exemplo 1.1.10. *As seções mais utilizadas neste trabalho são:*

1. *As secções do fibrado $M \times \mathbb{R}$ são justamente as funções suaves de M, logo $\Gamma(M \times \mathbb{R}) = C^\infty(M)$. O espaço $C^\infty(M)$ é um anel com as operações de soma e multiplicação pontual.*

2. *O espaço ΓE das secções de E é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial, onde a soma e multiplicação por escalar são dadas pontualmente. Veja que ΓE é também um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$ com a multiplicação pontual. O elemento nulo de ΓE é chamada a seção nula de E. Normalmente chamamos secções de um fibrado vetorial de campos.*

3. *O espaço $\Gamma(\otimes(TM))$ possui uma estrutura de álgebra dada pela multiplicação pontual, as secções deste espaço são chamadas de campos tensoriais; uma seção de $\left(\otimes^k TM\right) \otimes \left(\otimes^l T^*M\right)$ é chamada campo tensorial de tipo (k, l). Os campos tensoriais de tipo $(0, 0)$ são as funções C^∞ de M e os campos do tipo $(1, 0)$ são os campos vetoriais de M.*

4. *O espaço $\Gamma(\Lambda(T^*M))$ possui uma estrutura de álgebra dada pela multiplicação pontual, as secções deste são chamadas de formas diferenciais; uma seção de $\Gamma\left(\Lambda^k(T^*M)\right)$ é chamada uma k-forma. Denotaremos o conjunto $\Gamma\left(\Lambda^k(T^*M)\right)$ por $\Omega^k(M)$ e o conjunto $\Gamma(\Lambda(T^*M))$ por $\Omega(M)$.*

Proposição 1.1.11. *Se E_1 e E_2 são fibrados vetoriais sobre M, então temos o seguinte isomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos*

$$\Gamma\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \simeq \mathrm{Hom}(\Gamma E_1, \Gamma E_2).$$

Demonstração. Defina o mapa $F : \Gamma\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \to \mathrm{Hom}(\Gamma E_1, \Gamma E_2)$ tomando $(F(\psi))(\sigma)(p) = \psi(\sigma(p))$, onde $p \in M$, $\sigma \in \Gamma E_1$ e $\psi \in \Gamma\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$. Nota-se de imediato que este mapa é um homomorfismo de $C^\infty(M)$-módulos.

Observe que se $F(\psi) = 0$, então $\psi(\sigma)(p) = 0_p$ para quaisquer $\sigma \in \Gamma E_1$ e $p \in M$, o que implica $\psi = 0$. Logo F é injetivo. Se $\alpha \in \mathrm{Hom}(\Gamma E_1, \Gamma E_2)$ defina $\phi \in \Gamma\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ como $\phi(e_1)(p) = \alpha(\sigma)(p)$, onde $e_1 \in E_1$ tal que $\pi(e_1) = p$ e $\sigma \in \Gamma E_1$. Como α é $C^\infty(M)$-linear, esta definição de ϕ não depende da escolha de σ e assim está bem definida. Logo $F(\phi) = \alpha$ e temos que F é sobrejetivo. ☐

1.2 Métricas riemannianas

Agora que conhecemos em que tipo de espaço nós estamos trabalhando, podemos introduzir mais estrutura nele. Para isso introduzimos as métricas riemannianas e obtemos várias estruturas a partir desta. A principal referência para esta seção é o livro de Poor [29].

Definição 1.2.1. *Uma métrica Riemanniana em um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma seção g de $(E \otimes E)^*$ tal que para todo $p \in M$, g_p é um produto interno no espaço vetorial E_p. Um fibrado vetorial Riemanniano (E, g) é um fibrado vetorial E dotado de uma métrica Riemanniana g. Uma variedade Riemanniana (M, g) é uma variedade M com uma métrica Riemanniana g em TM; g é também chamada de métrica Riemanniana em M.*

Dados $\zeta, \xi \in E_p$, $p \in M$, utilizaremos $\langle \zeta, \xi \rangle$ para denotar $g(\zeta, \xi) = g_p(\zeta \otimes \xi) \in \mathbb{R}$, e estabelecemos $\|\zeta\|^2 = \langle \zeta, \zeta \rangle$; pela definição de um produto interno, $\|\zeta\|^2 > 0$ se $\zeta \neq 0$. Segue da definição de métrica que $\langle \zeta, \xi \rangle \in C^\infty(M)$.

Definição 1.2.2. *Sejam (E_j, g_j) fibrados vetoriais Riemannianos sobre variedades M_j, $j = 1, 2$. Um homomorfismo de fibrados vetoriais $h : E_1 \to E_2$ ao longo de um mapa $f : M_1 \to M_2$ é isométrico se $\langle h\zeta, h\xi \rangle_2 = \langle \zeta, \xi \rangle_1$ para todo $\zeta \otimes \xi \in E_1 \otimes E_1$. Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades Riemannianas; um mapa f de M_1 em M_2 é isométrico se $f_* : TM_1 \to TM_2$ é isométrico, isto é, se $f^* g_2 = g_1$. Um recobrimento Riemanniano é um recobrimento C^∞ isométrico de variedades Riemannianas. Uma isometria é um difeomorfismo isométrico de variedades Riemannianas.*

Segue imediatamente da definição que um mapa isométrico de variedades Riemannianas é uma imersão.

Proposição 1.2.3. *Todo fibrado vetorial admite uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta localmente finita de M tal que R trivial sobre cada U_α; seja (π, ψ_α) uma trivialização de E sobre U_α. Defina uma métrica Riemanniana em $\pi^{-1}(U_\alpha)$ por $g_\alpha(\zeta, \xi) = \langle \psi_\alpha \zeta, \psi_\alpha \xi \rangle$, onde $\langle \, , \, \rangle$ denota o produto interno usual de $\mathbb{R}^m$. Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$, e extenda a seção local $f_\alpha \cdot g_\alpha$ de $(E \otimes E)^*$ para que seja zero fora de U_α. A seção $g = \sum_\alpha f_\alpha \cdot g_\alpha$ de $(E \otimes E)^*$ é uma métrica Riemanniana em E. $\square$

Exemplo 1.2.4. *As métricas mais comuns são:*

1. *A métrica Riemanniana canônica em $M \times \mathbb{R}^m$ é $\langle (p, \zeta), (p, \xi) \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle$, o produto interno de ζ e ξ em $\mathbb{R}^m$. A métrica Riemanniana canônica na variedade $\mathbb{R}^n$ é $\langle (p, u), (p, v) \rangle = \langle u, v \rangle$; o isomorfismo de fibrado vetorial usual $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é isométrico.*

2. *Dado um produto interno $\langle \, , \, \rangle_{\mathfrak{g}}$ na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de campos invariantes a esquerda de um grupo de Lie G, defina uma métrica Riemanniana em G por $\langle X_g, Y_g \rangle = \langle X_e, Y_e \rangle_{\mathfrak{g}}$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $g \in G$. Esta métrica é invariante à esquerda, isto é, cada translação à esquerda L_g de G, $g \in G$, é uma isometria: $L_g^* \langle \, , \, \rangle = \langle \, , \, \rangle$. Similarmente, uma métrica invariante à direita em G é uma para qual todas as translações à direita R_g, $g \in G$, são isometrias: $R_g^* \langle \, , \, \rangle = \langle \, , \, \rangle$; neste caso, $\langle U_g, V_g \rangle = \langle U_e, V_e \rangle_{\tilde{\mathfrak{g}}}$, U, V na álgebra de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ de campos invariantes à direita, onde $\langle \, , \, \rangle_{\tilde{\mathfrak{g}}}$ é um produto interno em $\tilde{\mathfrak{g}}$.*

   Uma métrica em G é bi-invariante se ela é invariante à esquerda e invariante à direita; por exemplo, a métrica canônica em $\mathbb{R}^n$ é bi-invariante. Uma métrica Riemanniana invariante à esquerda $\langle \, , \, \rangle$ em G é também invariante à direita e assim bi-invariante, se e somente se, o produto interno associado em $\mathfrak{g}$ é invariante por Ad_g para todo $g \in G$, onde Ad é a representação adjunta de G em $\mathfrak{g}$: $\mathrm{Ad}_g = (L_g \circ R_{g^{-1}})_* \big|_e$.

3. *A métrica canônica em S^n é definida permitindo que o mergulho de S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ seja isométrico; isto é,*
$$\langle (p,u), (p,v) \rangle_{S^n} = \langle (p,u), (p,v) \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle u, v \rangle$$
para $(p,u), (p,v) \in T_pS^n$. O grupo $O(n+1)$ age em S^n por isometrias:
$$\langle g_* (p,u), g_* (p,v) \rangle_{S^n} = \langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle = \langle (p,u), (p,v) \rangle_{S^n}$$

4. *Mais geralmente, uma métrica Riemanniana em um espaço homogêneo $M = G/H$ é invariante se cada $g \in G$ age em G/H como uma isometria; neste caso $(G/H, \langle\ ,\ \rangle)$ é chamado espaço homogêneo Riemanniano. Suponha que H é o grupo de isotropia de $p \in M$. Seja $\mathcal{P} : G \to M$ a projeção; $\mathcal{P}(g) = gp$ para todo $g \in G$; em particular, $\mathcal{P}(H) = \mathcal{P}(e) = p$. Invariância de $\langle\ ,\ \rangle$ significa que $\langle g_*u, g_*v \rangle_{gp} = \langle u, v \rangle_p$ para $g \in G$, $u, v \in M_p$; por exemplo, $\langle h_*u, h_*v \rangle_p = \langle u, v \rangle_p$, $h \in H$, assim $\langle\ ,\ \rangle_p$ é invariante pela representação de isotropia linear $\lambda : H \to GL(M_p)$, $h \mapsto h_*\big|_p$. Reciprocamente, um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ em M_p que é invariante pelo subgrupo $\lambda H \subset GL(M_p)$ pode ser extendido a uma mética invariante em M por $\langle g_*u, g_*v \rangle_{gp} = \langle u, v \rangle_p$ para todo $g \in G$, $u, v \in M_p$. Isto é bem definido porque se $h \in H$, e $u, v \in M_p$, então*
$$\langle g_*u, g_*v \rangle_{gp} = \langle u, v \rangle_p = \langle h_*u, h_*v \rangle_p = \langle (gh)_* u, (gh)_* v \rangle_{gp}.$$
Logo uma métrica invariante em $M = G/H$ é equivalente a um produto interno λH-invariante no espaço tangente M_p, $p = \mathcal{P}(H) \in M$.

5. *O espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ é difeomorfo ao espaço quociente $S^n/\mathbb{Z}_2$; a projeção $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $f(p) = \{p, -p\}$, é um recobrimento C^∞. Defina uma métrica em $\mathbb{R}P^n$ por*
$$\langle f_* (p,u), f_* (p,v) \rangle_{\mathbb{R}P^n} = \langle (p,u), (p,v) \rangle_{S^n};$$
isto é bem definido porque $\mathbb{Z}_2$ age em S^n por isometrias. A projeção f é agora um recobrimento Riemanniano.

Definição 1.2.5. *Dados dois fibrados vetoriais Riemannianos (E_j, g_j) sobre variedades M_j, $j = 1, 2$, a métrica produto Riemanniana em $E_1 \times E_2$ é definida por*
$$\langle (\zeta_1, \zeta_2), (\xi_1, \xi_2) \rangle = \langle \zeta_1, \xi_1 \rangle_1 + \langle \zeta_2, \xi_2 \rangle_2$$
Se $M = M_1 \times M_2$ e g é a métrica produto em TM determinada por métricas g_1 e g_2 em TM_1 e TM_2, então (M, g) é chamado produto Riemanniano de (M_1, g_1) e (M_2, g_2).

Por exemplo, $\mathbb{R}^2$ é canonicamente o produto Riemanniano de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$; por iteração, $\mathbb{R}^n$ é canonicamente o produto Riemanniano de n cópias de $\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ são dotados do produto interno usual.

Definição 1.2.6. *Dados fibrados vetoriais Riemannianos (E_j, g_j), $j = 1, 2$, sobre uma variedade M, a métrica Riemanniana na soma de Whitney $E_1 \oplus E_2 = \Delta^* (E_1 \times E_2)$ é a única métrica em $E_1 \times E_2$ tal que pr_2 é um homomorfismo de fibrados vetoriais isométrico ao longo do mapa mergulho diagonal Δ de M em $M \times M$, $\Delta(p) = (p, p)$.*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E_2 & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & E_1 \times E_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[\Delta]{} & M \times M \end{array}$$

A métrica Riemanniana no produto tensorial $E_1 \otimes E_2$ é definida por

$$\langle \zeta_1 \otimes \zeta_2, \xi_1 \otimes \xi_2 \rangle = \langle \zeta_1, \xi_1 \rangle_1 \cdot \langle \zeta_2, \xi_2 \rangle_2$$

Sobre o fibrado $\otimes^k E$ costuma-se utilizar a métrica

$$\langle v_1 \otimes ... \otimes v_k, w_1 \otimes ... \otimes w_k \rangle = \frac{1}{k} \langle v_1, w_1 \rangle ... \langle v_k, w_k \rangle .$$

Definição 1.2.7. *A métrica Riemannina no fibrado exterior $\Lambda(E)$ de um fibrado vetorial Riemanniano (E, g) sobre M é definida por*

$$\langle \zeta_1 \wedge ... \wedge \zeta_r, \xi_1 \wedge ... \wedge \xi_s \rangle = \begin{cases} \det [\langle \zeta_i, \xi_j \rangle] & \text{se } i \in \{i_1, ..., i_k\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seja (E, g) um fibrado vetorial Riemanniano sobre M. Para cada $p \in M$, g_p é não singular, isto é, $\langle \zeta, \xi \rangle = 0$ para todo $\zeta \in E_p$ implica $\xi = 0$; isto implica que o mapa $E \to E^*$ que leva cada vetor ζ ao covetor $\langle \zeta, \cdot \rangle$ é um isomorfismo de fibrados vetoriais.

Definição 1.2.8. *Defina o isomorfismo musical com respeito a $\langle \ , \ \rangle$ por $\flat : E \to E^*$, $\zeta^\flat = \langle \zeta, \cdot \rangle$, e $\sharp : E^* \to E$ tal que $\sharp$ seja a inversa de $\flat$. A expressão $\zeta^\flat$ é lida "ζ bemol", e para $\mu \in E^*$, $\mu^\sharp$ é lida "μ sustenido".*

No cálculo tensorial clássico, o isomorfismo $\flat$ "abaixava os índices"pois dada uma base $\{\epsilon_j\}$ para E_p e a base dual $\{\omega^i\}$ para E_p^*, se $\zeta = \sum \zeta^i \epsilon_i \in E_p$, estão $\zeta^\flat = \sum \zeta_j \omega^j$, onde $\zeta_j = \sum_i \langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle \zeta^i$. O isomorfismo inverso $\sharp$ levantava os índices.

Definição 1.2.9. *A métrica Riemanniana no dual E^* de um fibrado vetorial Riemanniano (E, g) é definida por*

$$\langle \eta, \mu \rangle_{E^*} = \left\langle \eta^\sharp, \mu^\sharp \right\rangle_E \qquad \eta \otimes \mu \in E^* \otimes E^*$$

Observação 1.2.10. *Dados $\eta, \mu \in E_p^*$ e uma base ortonormal $\{\epsilon_j\}$ de E_p temos que*

$$\langle \eta, \mu \rangle = \left\langle \left(\sum \eta(\epsilon_j) \epsilon_j^\flat \right)^\sharp, \left(\sum \mu(\epsilon_j) \epsilon_j^\flat \right)^\sharp \right\rangle = \sum \eta(\epsilon_j) \mu(\epsilon_j) .$$

Então se $\zeta \in E_p$ temos $\left\langle \mu, \zeta^\flat \right\rangle = \mu(\zeta) = \left\langle \mu^\sharp, \zeta \right\rangle$. Logo os mapas $\flat\big|_{E_p} : E_p \to E_p^*$ e $\sharp\big|_{E_p} : E_p^* \to E_p$ são isometrias e portanto $\flat$ e $\sharp$ são isomorfismos de fibrados vetoriais isométricos.

Definição 1.2.11. *Dados fibrados vetoriais Riemannianos* (E_j, g_j) *sobre* M*, a métrica Riemanniana no fibrado de homomorfismo* $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ *sobre* M *é definido permitindo que o isomorfismo* $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) \cong E_1^* \otimes E_2$ *seja isométrico.*

Observação 1.2.12. *Dados* $K, L \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E_1, E_2))$ *e uma base ortonormal* $\{\epsilon_i\}$ *para* $E_1\big|_p$*, temos*

$$\langle K, L\rangle (p) = \left\langle \sum K\epsilon_i \otimes \epsilon_i^\flat, \sum L\epsilon_i \otimes \epsilon_i^\flat \right\rangle_2 = \sum \langle K\epsilon_i, L\epsilon_i\rangle_2 .$$

Logo ao compararmos as métricas de E^* *e* $\mathrm{Hom}(E, M \times \mathbb{R})$ *vemos que estas são compatíveis.*

Definição 1.2.13. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana; para cada* $f \in C^\infty(M)$*, o gradiente de* f *é o campo vetorial* $\nabla f = (df)^\sharp$ *em* M*:*

$$\langle \nabla f, v\rangle = \left\langle df^\sharp, v \right\rangle = df(v) = vf \qquad v \in M$$

Definição 1.2.14. *Dada uma imersão isométrica* $f : \bar{M} \to M$ *de variedades Riemannianas, e dado um campo vetorial* $X \in \Gamma_f(TM)$ *ao longo de* f*, seja* $\mu \in \Omega^1\left(\bar{M}\right)$ *uma 1-forma tal que* $\mu V = \langle f_* V, X\rangle, V \in \Gamma\left(T\bar{M}\right)$*. A componente tangencial de* X *é* $X^\top = f_*\mu^\sharp \in \Gamma_f(TM)$*. A componente ortogonal de* X *é* $X^\perp = X - X^\top \in \Gamma_f(TM)$*.*

Observação 1.2.15. *Da própria definição temos para todo* $p \in \bar{M}$ *que* $X_p^\top \in f_*\bar{M}_p$ *e que* $X_p^\perp$ *é ortogonal a* $f_*\bar{M}_p$*.*

Definição 1.2.16. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana orientada* n*-dimensional. O elemento de volume Riemanniano em* (M, g) *é o único elemento de volume* ω *na orientação de* M *tal que* $\|\omega\|^2 \in C^\infty(M)$ *é igual a* 1*.*

A unicidade de ω segue do fato de $\Lambda(T^*M)$ ser um fibrado de linha. Se $\{\epsilon_i\}$ é uma base ortonormal orientada positivamente de T_pM, então $\omega_p(\epsilon_1, ..., \epsilon_n) = 1$.

Lema 1.2.17. *Se* (E, g) *é um fibrado vetorial Riemanniano sobre* M*, então localmente existe um campo de bases ortonormal para* E*.*

Demonstração. Basta aplicar o processo de ortonormalização de Gram-Schimidt a elementos de um campo de bases local arbitrário de E. □

Proposição 1.2.18. *Seja* $\omega \in \Omega^n(M)$ *o elemento de volume Riemanniano em uma variedade Riemanniana orientada* (M, g)*. Se* $\{\omega^j\}$ *é um campo base local ortonormal orientado positivamente de* T^*M*, então* $\omega = \omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n$*.*

Demonstração.

$$\left\|\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^n\right\|^2 = \det\left[\left\langle \omega^i, \omega^j \right\rangle\right] = \det(I) = 1.$$

□

Definição 1.2.19. *O operador estrela de Hodge em uma variedade Riemanniana orientada n-dimensional* (M, g) *é a seção* $\star \in \Gamma\left(\mathrm{End}\left(\Lambda\left(T^*M\right)\right)\right)$ *tal que*

$$(\star\mu)(X) = \left\langle \mu \wedge X^\flat, \omega \right\rangle \qquad \mu \in \Omega^r(M), X \in \Gamma\left(\Lambda^{n-r}(TM)\right)$$

onde $\omega \in \Omega^n(M)$ *é o elemento de volume Riemanniano.*

Proposição 1.2.20. *O operador estrela* $\star$ *em uma variedade Riemanniana n-dimensional orientada* (M, g) *é um isomorfismo de fibrado vetorial isométrico de* $\Lambda(T^*M)$ *em si mesmo, e mapeia* $\Lambda^r(T^*M)$ *isomorficamente em* $\Lambda^{n-r}(T^*M)$*. Em particular,* $\star\omega = 1 \in \Omega^0(M)$*,* $\star 1 = \omega$*, e* $\star(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^r) = \omega^{r+1} \wedge ... \wedge \omega^n$ *se* $\{\omega^j\}$ *é uma base ortonormal orientada positivamente de* T_p^*M*. Em* $\Omega^r(M)$*,* $\star^2 = (-1)^{r(n-r)}$*. Temos também,* $\langle \eta, \mu \rangle = \star(\eta \wedge \star\mu) = \star(\mu \wedge \star\eta)$ *para* $\eta, \mu \in \Omega(M)$*. Finalmente, se* $\{\epsilon_i\}$ *e* $\{\omega^j\}$ *são as bases ortonormais duais de* T_pM *e* T_p^*M*, então* $\star(\omega^i \wedge \mu) = (-1)^r \iota_{\epsilon_i} \star \mu$ *para* $\mu \in \Lambda^r\left(T_p^*M\right)$*, onde* ι *é o produto interior,* $\iota_X\mu = \mu(X, \cdot, ..., \cdot)$ *para* $X \in \Gamma(M)$*,* $\mu \in \Omega(M)$*.*

Demonstração. Claramente, $\star$ mapeia $\Lambda^r(T^*M)$ em $\Lambda^{n-r}(T^*M)$. Pela definição 1.1.9, dados $\mu \in \Omega^r(M)$ e $\eta \in \Omega^{n-r}(M)$, $\langle \star\mu, \eta \rangle = (\star\mu)\left(\eta^\sharp\right) = \langle \mu \wedge \eta, \omega \rangle$. Então, se $\{\omega^i\}$ é como na hipótese, logo

$$\left\langle \star\left(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^r\right), \omega^{i_1} \wedge ... \wedge \omega^{i_{n-r}} \right\rangle = 0$$

se $\{j_1, ..., j_{n-r}\} \neq \{r+1, ..., n\}$; logo $\star(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^r) = \omega^{r+1} \wedge ... \wedge \omega^n$, e isto implica as partes restantes da proposição. □

Toda variedade é localmente orientável, com exatamente duas escolhas de orientação local. Então localmente uma variedade Riemanniana tem dois operadores estrelas, um para cada escolha de orientação local. Tal operador estrela local pode ser extendido a um operador estrela global se e somente se M é orientável.

1.3 Conexões e Curvaturas

Assim como métricas, os fibrados vetoriais admitem outra estrutura geométrica conhecida como conexão. Veremos nesta seção como obter a partir de uma conexão um tensor curvatura e veremos também que no caso de variedades riemannianas exite uma conexão que provem naturalmente da métrica. Uma referência para esta seção é o livro de Cheeger e Ebin [5].

Definição 1.3.1. *Uma conexão em um fibrado vetorial* $\pi : E \to M$ *é um mapa* $\mathbb{R}$*-linear* $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ *que satisfaz a regra de Leibniz*

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma,$$

para qualquer função $f \in C^\infty(M)$ *e seção* $\sigma \in \Gamma(E)$*.*

Quando temos uma conexão ∇ em um fibrado E, gostariamos de ter uma conexão ∇^* no fibrado dual E^* que satisfaça a regra de Leibnitz. Assim, para seções $s \in \Gamma(E)$ e $\sigma \in \Gamma(E^*)$ definimos

$$d(\sigma(s)) = (\nabla^* \sigma)(s) + \sigma(\nabla s).$$

Segue da fórmula que ∇^* é mesmo uma conexão.

No caso em que E é o fibrado tangente, uma conexão ∇ define um mapa bilinear

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

dado pela contração de ∇Y com X que é $C^\infty(M)$-linear na primeira entrada. Definimos a *torsão* da conexão como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} T_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

Caso esta aplicação é nula para quaisquer campos dizemos que a conexão ∇ é *livre de torsão.*

Se (M, g) é uma variedade riemanniana e ∇ uma conexão em M, i.e., uma conexão no fibrado tangente TM. Dizemos que ∇ é *compatível com g* se vale a equação

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle,$$

para quaiquer campos $X, Y, Z \in \mathfrak{M}$.

O seguinte teorema garante a existência de uma conexão canônica em uma variedade riemanniana.

Teorema 1.3.2 (Teorema fundamental da geometria riemanniana)**.** *Seja (M, g) uma variedade riemanniana, então existe uma única conexão compatível com a métrica g e sem torsão em M chamada de conexão de Levi-Civita.*

Demonstração. Se existe tal conexão, então ela deve satisfazer a *fórmula de Koszul*

$$2g(\nabla_X Y, Z) = \partial_X(g(Y, Z)) + \partial_Y(g(X, Z)) - \partial_Z(g(X, Y)) + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X).$$

Como g é não degenerada, podemos utilizar esta fórmula para definir ∇. Segue então a existência e unicidade de ∇. $\square$

Se ∇ é uma conexão em M, definimos a *curvatura riemanniana* como a aplicação

$$\begin{aligned} R_\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned}$$

Esta aplicação é $C^\infty(M)$-linear, logo define um tensor em M conhecido como *tensor curvatura de Riemann.* Como usualmente trabalhamos com variedades riemannianas, e estas possuem uma conexão canônica, denotamos a curvatura simplesmente por R.

Se $u, v \in T_pM$ são linearmente independentes, definimos a *curvatura seccional* de u, v como

$$K(u,v) = \frac{\langle R(u,v)v, u\rangle}{|u \wedge v|^2}.$$

É fácil ver que K só depende do plano σ gerado por u, v em T_pM, assim K é uma função suave definida sobre o fibrado que tem M como espaço base e como fibra as grassmannianas $Gr(2, T_pM)$. Geometricamente $K(\sigma)$ mede a curvatura gaussiana da superfície que tem σ como plano tangente.

Se $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM, definimos o *tensor curvatura de Ricci* como

$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i\rangle .$$

Definimos a *curvatura escalar* como sendo a função

$$S = \sum_i \operatorname{Ric}(e_i, e_i).$$

A seguir temos uma proposição que é útil para calcular a conexão e a curvatura em grupos de Lie.

Proposição 1.3.3. *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma métrica invariante à esquerda em um grupo de Lie G, e sejam X, Y, Z campos invariantes à esquerda. Então*

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}\left([X,Y] - \operatorname{ad}_X^* Y - \operatorname{ad}_Y^* X\right); \tag{1.3.1}$$

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle - \left\langle \nabla_{[X,Y]} Z, W\right\rangle; \tag{1.3.2}$$

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Y, X\rangle = {} & \left\|\operatorname{ad}_X^* Y + \operatorname{ad}_Y^* X\right\|^2 - \langle \operatorname{ad}_X^* X, \operatorname{ad}_Y^* Y\rangle - \frac{3}{4}\|[X,Y]\|^2 \\ & - \frac{1}{2}\langle [[X,Y],Y], X\rangle - \frac{1}{2}\langle [[Y,X],X], Y\rangle . \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Demonstração. Usando a fórmula de Koszul e a invariância da métrica temos

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle [X,Y], Z\rangle - \langle Y, [X,Z]\rangle - \langle X, [Y,Z]\rangle\right),$$

de onde segue (1.3.1).

Pela fórmula de Koszul e pela invariância da métrica temos também que

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, W\rangle = -\langle \nabla_Y Z, \nabla_X W\rangle, -\langle \nabla_Y \nabla_X Z, W\rangle = \langle \nabla_X Z, \nabla_Y W\rangle,$$

assim temos (1.3.2).

Aplicando as duas primeiras partes temos (1.3.3). $\square$

1.4 Submersões Riemannianas

Nesta seção estudaremos submersões riemannianas com a finalidade de calcular as curvaturas da variedade total de um produto torcido. Neste caso, os cálculos são mais simples do que em uma submersão riemanniana geral e não é necessário utilizar toda a teoria que se encontra no artigo de O'Neill [27]. A principal referência para esta seção é o livro de O'Neill [26].

Dadas duas variedades Riemannianas (M, g_M) e (N, g_N), uma *submersão Riemanniana* $F : (M, g_M) \to (N, g_N)$ é uma submersão $F : M \to N$ tal que $\mathrm{d}F_p : (\ker(\mathrm{d}F_p))^{\perp} \to T_{F(p)}N$ é uma isometria para cada $p \in M$.

Exemplo 1.4.1. *Os casos mais comuns de submersões riemaniannas são:*

1. *Projeções ortogonais* $\pi : (\mathbb{R}^m, \mathrm{can}) \to (\mathbb{R}^n, \mathrm{can})$, *para* $m > n$ *são submersões Riemannianas.*

2. *Se* (M, g_M) *é uma variedade Riemanniana e* G *é um grupo de Lie com uma ação por isométrica, livre e própria em* (M, g_M), *então o espaço das órbitas* M/G *possui uma estrutura de variedade Riemanniana induzida por* (M, g_M) *e o mapa quociente* $\pi : (M, g_M) \to \left(M/G, g_{M/G}\right)$ *é uma submersão Riemanniana.*

3. *Sejam* (M, g_M) *e* (N, g_N) *variedades Riemannianas,* $\pi_M : M \times N \to M$ *e* $\pi_N : M \times N \to N$ *as projeções canônicas e* $f \in C^{\infty}(M)$ *uma função positiva, então temos uma variedade Riemanniana* $(M \times N, \pi_M^*(g_M) + (f^2 \circ \pi_M)\, \pi_N^*(g_N))$, *que denotaremos por* $M \times_f N$. *Esta variedade é conhecida como o produto torcido de* (M, g_M) *e* (N, g_N) *por* f, *e a projeção* $\pi : M \times_f N \to (M, g_M)$ *é uma submersão Riemanniana.*

Se $F : (M, g_M) \to (N, g_N)$ é uma submersão Riemanniana temos associadas duas distribuições em TM. A distribuição vertical $\mathcal{V}$ é formada pelos núcleos do diferencial da submersão $\mathcal{V}_p = \ker(\mathrm{d}F_p) \subset T_pM$, $p \in M$. A distribuição horizontal $\mathcal{H}$ é dada pelos complementos ortogonais da distribuição vertical $\mathcal{H}_p = (\mathcal{V}_p)^{\perp} \subset T_pM$, $p \in M$. Assim F é uma submersão Riemanniana se e somente se $\mathrm{d}F_p : \mathcal{H}_p \to T_{F(p)}N$ é uma isometria.

Se $v \in T_pM$ temos as projeções $\mathcal{H} : T_pM \to \mathcal{H}_p$ e $\mathcal{V} : T_pM \to \mathcal{V}_p$. Dado um campo vetorial X em N temos associado um único campo horizontal $\overline{X}$ em M que é F-relacionado a X. Dizemos que $\overline{X}$ é um levantamento horizontal básico de X.

Proposição 1.4.2. *Sejam* $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ *e* ∇^M *a conexão de* M, *então:*

1. $g_M\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = g_N(X, Y) \circ F$;

2. $\mathcal{H}\left[\overline{X}, \overline{Y}\right] = \overline{[X, Y]}$;

3. $\mathcal{H}\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla_X Y}$.

Demonstração. Pelas hipóteses temos:

1. Já que $\overline{X}$ é F-relacionado a X, $\overline{Y}$ é F-relacionado a Y, F é uma submersão Riemanniana e $\overline{X}, \overline{Y}$ são horizontais temos

$$g_M\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)_p = g_N\left(\mathrm{d}F_p\left(\overline{X}_p\right), \mathrm{d}F_p\left(\overline{Y}_p\right)\right) = g_N\left(X_{F(p)}, Y_{F(p)}\right) = g_N\left(X, Y\right)_{F(p)},$$

onde $p \in M$.

2. Como $\overline{X}$ é F-relacionado a X, $\overline{Y}$ é F-relacionado a Y e F é uma submersão Riemanniana temos

$$\mathrm{d}F_p \mathcal{H}\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]_p\right) = \mathrm{d}F_p\left[\overline{X}, \overline{Y}\right]_p = \left[X, Y\right]_{F(p)},$$

onde $p \in M$. Pela unicidade do levantamento horizontal devemos ter $\mathcal{H}\left[\overline{X}, \overline{Y}\right] = \overline{[X, Y]}$.

3. Basta mostrar que $\forall p \in M$ e $Z_p \in \mathcal{H}_p$ temos $g_M\left(\left(\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y}\right)_p, Z_p\right) = g_M\left(\left(\overline{\nabla_X Y}\right)_p, Z_p\right)$, ou ainda que para qualquer $Z \in \Gamma\left(TN\right)$ temos $g_M\left(\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}\right) = g_M\left(\overline{\nabla_X Y}, \overline{Z}\right)$. Pelo item (1) basta mostrar que $g_M\left(\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y}_p, \overline{Z}\right) = g_N\left(\nabla_X Y, \overline{Z}\right) \circ F$. Usando os itens (1) e (2) temos

$$\begin{aligned}
D_{\overline{X}} g_M\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right)(p) &= D_{\overline{X}}\left(g_N\left(Y, Z\right) \circ F\right)(p) = \left(\mathrm{d}F_p \overline{X}\right) g_N\left(Y, Z\right)\left(F\left(p\right)\right) = D_X g_N\left(Y, Z\right)(p) \\
g_M\left(\overline{X}, \left[\overline{Y}, \overline{Z}\right]\right) &= g_M\left(\overline{X}, \overline{[Y, Z]}\right) = g_N\left(X, [Y, Z]\right)
\end{aligned}$$

Pela fórmula de Koszul temos

$$\begin{aligned}
2g_M\left(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}\right) &= D_{\overline{X}}\left(g_M\left(\overline{Y}, \overline{Z}\right)\right) + D_{\overline{Y}}\left(g_M\left(\overline{Z}, \overline{X}\right)\right) - D_{\overline{Z}}\left(g_M\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\right) \\
&\quad - g_M\left(\left[\overline{X}, \overline{Z}\right], \overline{Y}\right) - g_M\left(\overline{X}, \left[\overline{Y}, \overline{Z}\right]\right) + g_M\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right], \overline{Z}\right) \\
&= D_X\left(g_M\left(Y, Z\right)\right) + D_Y\left(g_M\left(Z, X\right)\right) - D_Z\left(g_M\left(X, Y\right)\right) \\
&\quad - g_M\left(\left[X, Z\right], Y\right) - g_M\left(X, \left[Y, Z\right]\right) + g_M\left(\left[X, Y\right], Z\right) \\
&= 2g_N\left(\nabla_X Y, Z\right) \\
&= 2g_M\left(\overline{\nabla_X Y}, \overline{Z}\right).
\end{aligned}$$

Chegando assim ao resultado.

□

Proposição 1.4.3. *Se $F : (M, g_M) \to (N, g_N)$ é uma submersão Riemanniana, sejam V um campo vertical em M e X, Y, Z campos em N com levantamento horizontal básico $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$. Temos então a seguintes propriedades.*

1. *$\left[V, \overline{X}\right]_M$ é vertical;*

2. *$\left(\mathcal{L}_V g_M\right)\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = D_V g_M\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = 0$;*

3. $g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],V\right)=2g_M\left(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y},V\right)=-2g_M\left(\nabla_V\overline{X},\overline{Y}\right)=2g_M\left(\nabla_{\overline{Y}}V,\overline{X}\right);$

4. $\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}=\overline{\nabla_XY}+\frac{1}{2}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]^{\mathcal{V}}.$

Demonstração. Usando as hipóteses temos:

1. Como $\overline{X}$ é F-relacionado a X e V é F-relacionado a 0, o campo vetorial nulo em N, temos

$$\mathrm{d}F_p\left(\left[\overline{X},V\right]_p\right)=\left[\mathrm{d}F_p\left(\overline{X}_p\right),\mathrm{d}F_p\left(V_p\right)\right]=\left[X_{F(p)},0_{F(p)}\right]=0_{F(p)},$$

   para qualquer $p\in M$. Logo $\left[\overline{X},V\right]_p\in\ker\left(\mathrm{d}F_p\right)\forall p\in M$.

2. Por (1) temos que $\left[V,\overline{X}\right]$ e $\left[V,\overline{Y}\right]$ são verticais, assim

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_Vg_M\right)\left(\overline{X},\overline{Y}\right)&=D_V\left(g_M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\right)-g_M\left(\left[V,\overline{X}\right],\overline{Y}\right)-g_M\left(\overline{X},\left[V,\overline{Y}\right]\right)\\&=D_V\left(g_M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\right).\end{aligned}$$

   Já que F é uma submersão Riemanniana temos que $g_M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=g_N\left(X,Y\right)$, ou seja, $g_M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ é constante sobre as fibras. Como V é tangente às fibras temos $D_V\left(g_M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\right)=0$.

3. Usando (1), (2) e a fórmula de Koszul temos

$$\begin{aligned}2g_M\left(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y},V\right)&=g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],V\right);\\2g_M\left(\nabla_V\overline{X},\overline{Y}\right)&=-g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],V\right);\\2g_M\left(\nabla_{\overline{Y}}V,\overline{X}\right)&=g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],V\right).\end{aligned}$$

4. Por (3) temos que $\frac{1}{2}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]^{\mathcal{V}}$ é a componente vertical de $\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}$. Sabemos que $\overline{\nabla_XY}$ é horiontal, resta mostrar que esta é a componente horizontal de $\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}$. Usando que os campos são F-relacionados e que F é uma submersão Riemanniana temos pela fórmula de Koszul

$$\begin{aligned}2g_M\left(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y},\overline{Z}\right)&=D_{\overline{X}}\left(g_M\left(\overline{Y},\overline{Z}\right)\right)+D_{\overline{Y}}\left(g_M\left(\overline{Z},\overline{X}\right)\right)-D_{\overline{Z}}\left(g_M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\right)\\&\quad-g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Z}\right],\overline{Y}\right)-g_M\left(\overline{X},\left[\overline{Y},\overline{Z}\right]\right)+g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\overline{Z}\right)\\&=D_X\left(g_M\left(Y,Z\right)\right)+D_Y\left(g_M\left(Z,X\right)\right)-D_Z\left(g_M\left(X,Y\right)\right)\\&\quad-g_M\left(\left[X,Z\right],Y\right)-g_M\left(X,\left[Y,Z\right]\right)+g_M\left(\left[X,Y\right],Z\right)\\&=2g_N\left(\nabla_XY,Z\right)\\&=2g_M\left(\overline{\nabla_XY},\overline{Z}\right).\end{aligned}$$

   Como $\overline{Z}$ é um vetor horizontal arbitrário, temos $\left(\nabla_{\overline{X}}\overline{Y}\right)^{\mathcal{H}}=\overline{\nabla_XY}$.

□

Teorema 1.4.4 (O'Neill)**.** *Sejam R o tensor curvatura em N e R^M o tensor curvatura em M, então*
$$g_N\left(R\left(X,Y\right)Y,X\right)=g_M\left(R^M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Y},\overline{X}\right)+\frac{3}{4}\left\|\left[\overline{X},\overline{Y}\right]^{\mathcal{V}}\right\|^2.$$

Demonstração. Tome $X,Y\in\Gamma\left(TN\right)$ tais que $\left[X,Y\right]\equiv 0$, então $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]$ é vertical. Com isso calculamos a curvatura:
$$\begin{aligned}
g_M\left(R^M\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Y},\overline{X}\right)&=g_M\left(\nabla^M_{\overline{X}}\nabla^M_{\overline{Y}}\overline{Y}-\nabla^M_{\overline{Y}}\nabla^M_{\overline{X}}\overline{Y}-\nabla^M_{\left[\overline{X},\overline{Y}\right]}\overline{Y},\overline{X}\right)\\
&=g_M\left(\nabla^M_{\overline{X}}\left(\overline{\nabla_Y Y}+\frac{1}{2}\left[\overline{Y},\overline{Y}\right]\right),\overline{X}\right)\\
&\quad-g_M\left(\nabla^M_{\overline{Y}}\left(\overline{\nabla_X Y}+\frac{1}{2}\left[\overline{X},\overline{Y}\right]\right),\overline{X}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}g_M\left(\left[\overline{Y},\overline{X}\right],\left[\overline{X},\overline{Y}\right]\right)\\
&=g_M\left(\overline{\nabla_X\nabla_Y Y}+\frac{1}{2}\left[\overline{X},\overline{\nabla_Y Y}\right]^{\mathcal{V}}+\frac{1}{2}\nabla^M_{\overline{X}}\left[\overline{Y},\overline{Y}\right],\overline{X}\right)\\
&\quad-g_M\left(\overline{\nabla_Y\nabla_X Y}+\frac{1}{2}\left[\overline{Y},\overline{\nabla_X Y}\right]^{\mathcal{V}}+\frac{1}{2}\nabla^M_{\overline{Y}}\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\overline{X}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\left[\overline{X},\overline{Y}\right]\right)\\
&=g_N\left(R\left(X,Y\right)Y,X\right)-\frac{1}{2}g_M\left(\left[\overline{Y},\overline{Y}\right],\nabla^M_{\overline{X}}\overline{X}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\nabla^M_{\overline{Y}}\overline{X}\right)-\frac{1}{2}g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\left[\overline{X},\overline{Y}\right]\right)\\
&=g_N\left(R\left(X,Y\right)Y,X\right)-\frac{1}{4}g_M\left(\left[\overline{Y},\overline{Y}\right],\left[\overline{X},\overline{X}\right]\right)\\
&\quad+\frac{1}{4}g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\left[\overline{Y},\overline{X}\right]\right)-\frac{1}{2}g_M\left(\left[\overline{X},\overline{Y}\right],\left[\overline{X},\overline{Y}\right]\right)
\end{aligned}$$

□

Vamos estudar um pouco mais o produto torcido $M\times_f N$ para conseguir descrever explicitamente a curvatura desta variedade. Para facilitar a notação denotaremos o produto torcido simplesmente por $\mathcal{W}$.

Lema 1.4.5. *Seja $f\in C^\infty\left(M\right)$, então o gradiente do levantamento de f é o levantamento do gradiente de f. Ou seja,*
$$\nabla f\circ\pi_M=\overline{\nabla f}$$

Demonstração. Basta mostrar que $\nabla\left(f\circ\pi_M\right)$ é horizontal e π_M-relacionado a ∇f.

- Se $V\in T\mathcal{W}$ é vertical, então
$$g_{\mathcal{W}}\left(\nabla f\circ\pi_M,V\right)=\mathrm{d}\left(f\circ\pi_M\right)\left(V\right)=V\left(f\circ\pi_M\right)=\mathrm{d}\pi_M\left(V\right)\left(f\right)=0\left(f\right)=0,$$
logo $\nabla f\circ\pi_M$ é horizontal.

- Se $X \in T\mathcal{W}$ é horizontal, usando que π_M é uma submersão Riemanniana e o item anterior temos
$$\begin{aligned} g_M\left(\mathrm{d}\pi_M\left(\nabla f \circ \pi_M\right), \mathrm{d}\pi_M\left(X\right)\right) &= g_{\mathcal{W}}\left(\nabla f \circ \pi_M, X\right) = X\left(f \circ \pi_M\right) \\ &= \mathrm{d}\pi_M\left(X\right)\left(f\right) = g_M\left(\nabla f, \mathrm{d}\pi_M\left(X\right)\right), \end{aligned}$$
assim para cada ponto de $\mathcal{W}$ temos $\mathrm{d}\pi_M \nabla f \circ \pi_M = \nabla f$.

$\square$

Proposição 1.4.6. *Sejam $\overline{X}, \overline{Y}$ levantamentos de $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\overline{U}, \overline{V}$ levantamentos de $U, V \in \mathfrak{X}(N)$ e ∇^M, ∇^N as conexões de M, N respectivamente. Temos então:*

1. $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{Y} = \overline{\nabla^M_X Y}$;
2. $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{U} = \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{X} = \left(\frac{X(f)}{f}\right) \circ \pi_M \overline{U}$;
3. $\mathcal{H}\left(\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{V}\right) = \Pi\left(\overline{U}, \overline{V}\right) = -\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U}, \overline{V}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f}$;
4. $\mathcal{V}\left(\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{V}\right) = \overline{\nabla^N_U V}$.

Demonstração. Pelas hipóteses temos:

1. Usando que $\left[\overline{X}, \overline{U}\right] = \left[\overline{Y}, \overline{U}\right] = 0$ e $g_{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{U}\right) = g_{\mathcal{W}}\left(\overline{Y}, \overline{U}\right) = 0$ temos pela fórmula de Koszul
$$2g_{\mathcal{W}}\left(\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{U}\right) = -D_{\overline{U}}\left(g_{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\right) + g_{\mathcal{W}}\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right], \overline{U}\right).$$
Como $g_{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$ é constante sobre as fibras e $\overline{V}$ é vertical, temos $-D_{\overline{U}}\left(g_{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)\right) = 0$. Além disso $\left[\overline{X}, \overline{Y}\right] = \overline{[X, Y]}$, assim $g_{\mathcal{W}}\left(\left[\overline{X}, \overline{Y}\right], \overline{U}\right) = 0$. Portanto $g_{\mathcal{W}}\left(\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{U}\right) = 0$, ou seja, $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{Y}$ é horizontal. Como cada $\pi_M|_{M\times\{q\}}$ é uma isometria, temos o resultado.

2. $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{U} = \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{X}$ pois $\left[\overline{X}, \overline{U}\right] = 0$. Pelo item anterior $g_{\mathcal{W}}\left(\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{U}, \overline{Y}\right) = -g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U}, \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{Y}\right) = 0$, logo $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{U}$ é vertical. Pela fórmula de Koszul temos
$$\begin{aligned} 2g_{\mathcal{W}}\left(\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{U}, \overline{V}\right) &= D_{\overline{X}}\left(g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U}, \overline{V}\right)\right) \\ &= D_{\overline{X}}\left(g_M\left(\mathrm{d}\pi_M\left(\overline{U}\right), \mathrm{d}\pi_M\left(\overline{V}\right)\right) \circ \pi_M\right) \\ &\quad + D_{\overline{X}}\left(\left(f^2 \circ \pi_M\right) g_N\left(\mathrm{d}\pi_N\left(\overline{U}\right), \mathrm{d}\pi_N\left(\overline{V}\right)\right) \circ \pi_N\right) \\ &= D_{\overline{X}}\left(\left(f^2 \circ \pi_M\right) g_N\left(U, V\right) \circ \pi_N\right) \\ &= 2\left(f \circ \pi_M\right) D_{\overline{X}}\left(f \circ \pi_M\right) g_N\left(U, V\right) \circ \pi_N \\ &\quad + \left(f^2 \circ \pi_M\right) D_{\overline{X}}\left(g_N\left(U, V\right) \circ \pi_N\right) \\ &= 2\left(\frac{D_{\overline{X}}\left(f \circ \pi_M\right)}{\left(f \circ \pi_M\right)}\right)\left(f^2 \circ \pi_M\right) g_N\left(U, V\right) \circ \pi N \\ &= 2\left(\frac{X\left(f\right)}{f}\right) \circ \pi_M g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U}, \overline{V}\right). \end{aligned}$$

3. Pelo item (2) e pelo Lema anterior temos

$$\begin{aligned}
g_{\mathcal{W}}\left(\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{V},\overline{X}\right) &= -g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{X}\right) = -g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{\left(\frac{X(f)}{f}\right)}\overline{U}\right) = -\overline{\left(\frac{X(f)}{f}\right)}g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{U}\right) \\
&= -\left(\frac{\overline{X(f)}}{\overline{f}}\right)g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{U}\right) = -\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\nabla\overline{f},\overline{X}\right)}{\overline{f}}\right)g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{U}\right) \\
&= -\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{f}\right)g_{\mathcal{W}}\left(\nabla\overline{f},\overline{X}\right).
\end{aligned}$$

4. Como $\overline{U},\overline{V}$ são tangentes às fibras, considerando as fibras como mergulhadas em $\mathcal{W}$ temos que $\mathcal{V}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{V}$ é igual à derivada covariante da fibra aplicada aos campos $\overline{U},\overline{V}$ restritos às fibras. Como $\pi_N|_{\{p\}\times N}$ é uma homotetia temos que $\mathcal{V}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{V}$ e $\overline{\nabla^N_U V}$ são π_N-relacionados.

□

Proposição 1.4.7. *Sejam R, R^M, R^N as curvaturas de $\mathcal{W}, M, N$ respectivamente. Se $\overline{X},\overline{Y},\overline{Z}$ e $\overline{U},\overline{V},\overline{W}$ são levantamentos de campos em M e N respectivamente, temos:*

1. $R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Z} = \overline{R^M(X,Y)Z}$;

2. $R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{U}\right)\overline{Y} = \left(\frac{\text{Hess}\left(\overline{f}\right)\left(\overline{X},\overline{Y}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U}$;

3. $R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{U} = R^{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)\overline{X} = 0$;

4. $R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{U}\right)\overline{V} = -\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{\overline{f}}\right)\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\nabla\overline{f}$;

5. $R^{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)\overline{W} = R^N(U,V)W + \left(\frac{\left|\nabla\overline{f}\right|^2}{\overline{f}^2}\right)\left(g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{W}\right)\overline{V} - g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{W}\right)\overline{U}\right)$.

Demonstração. Pelas hipóteses temos:

1. Usando o item (1) da proposição anterior e que $\left[\overline{X},\overline{Y}\right] = \overline{[X,Y]}$ temos

$$\begin{aligned}
R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{Z} &= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{Y}}\overline{Z} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{Y}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{Z} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\left[\overline{X},\overline{Y}\right]}\overline{Z} \\
&= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{\nabla^M_Y Z} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{Y}}\overline{\nabla^M_X Z} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{[X,Y]}}\overline{Z} \\
&= \overline{\nabla^M_X\nabla^M_Y Z} - \overline{\nabla^M_Y\nabla^M_X Z} - \overline{\nabla^M_{[X,Y]}Z} \\
&= \overline{R^M(X,Y)Z}.
\end{aligned}$$

2. Pelos itens (1), (2) da proposição anterior e usando que $\left[\overline{X},\overline{U}\right]=0$ temos

$$\begin{aligned}
R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{U}\right)\overline{Y} &= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{Y} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\left[\overline{X},\overline{U}\right]}\overline{Y} \\
&= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\left(\left(\frac{\overline{Y}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U}\right) - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{\nabla^{M}_{X}Y} - \nabla^{\mathcal{W}}_{0}\overline{Y} \\
&= \left(\frac{\overline{X}\left(\overline{Y}\left(\overline{f}\right)\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U} - \left(\frac{\overline{\nabla^{M}_{X}Y}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U} \\
&= \left(\frac{\operatorname{Hess}\left(\overline{f}\right)\left(\overline{X},\overline{Y}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U}.
\end{aligned}$$

3. Do item (2) da proposição anterior e usando que $\left[\overline{X},\overline{Y}\right]=\overline{[X,Y]}$ temos

$$\begin{aligned}
R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)\overline{U} &= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{Y}}\overline{U} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{Y}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{U} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\left[\overline{X},\overline{Y}\right]}\overline{U} \\
&= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\left(\left(\frac{\overline{Y}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U}\right) - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{Y}}\left(\left(\frac{\overline{X}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U}\right) - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{[X,Y]}}\overline{U} \\
&= \frac{1}{\overline{f}}\left(\overline{X}\left(\overline{Y}\left(\overline{f}\right)\right) - \overline{Y}\left(\overline{X}\left(\overline{f}\right)\right)\right)\overline{U} - \left(\frac{\overline{[X,Y]}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $\overline{f}$ e $\overline{X}\left(\overline{f}\right)$ são constantes nas fibras temos $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{f} = \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\overline{f} = 0$ e $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\left(\overline{X}\left(\overline{f}\right)\right) = \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\left(\overline{X}\left(\overline{f}\right)\right) = 0$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
R^{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)\overline{X} &= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\overline{X} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{X} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\left[\overline{U},\overline{V}\right]}\overline{X} \\
&= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\left(\left(\frac{\overline{X}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{V}\right) - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\left(\left(\frac{\overline{X}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{U}\right) - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{[U,V]}}\overline{X} \\
&= \left(\frac{\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\left(\overline{X}\left(\overline{f}\right)\right)\overline{f} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{f}}{\overline{f}^{2}}\right)\overline{V} - \left(\frac{\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\left(\overline{X}\left(\overline{f}\right)\right)\overline{f} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\overline{f}}{\overline{f}^{2}}\right)\overline{U} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

4. Usando que $\left[\overline{X},\overline{U}\right]=0$, $\overline{X}\left(g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)\right)=0$ e os itens $(2),(3),(4)$ da proposição anterior

temos

$$
\begin{aligned}
R^{\mathcal{W}}\left(\overline{X},\overline{U}\right)\overline{V} &= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{V} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{V} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\left[\overline{X},\overline{U}\right]}\overline{V} \\
&= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\left(-\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f}\right) + \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{\nabla^{N}_{U}V} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\left(\left(\frac{\overline{X}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{V}\right) - \nabla^{\mathcal{W}}_{0}\overline{V} \\
&= \left(-\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{\overline{f}}\right) + \left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{\overline{f}}\right)\left(\frac{\overline{X}\left(\overline{f}\right)}{\overline{f}}\right)\right)\overline{\nabla f} \\
&\quad - \left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{\overline{f}}\right)\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{\nabla f} \\
&= -\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{\overline{f}}\right)\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{\nabla f}.
\end{aligned}
$$

5. Pelos itens $(2),(3),(4)$ da proposição anterior temos

$$
\begin{aligned}
R^{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)\overline{W} &= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\overline{W} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{W} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\left[\overline{U},\overline{V}\right]}\overline{W} \\
&= \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\left(-\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f}\right) + \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{\nabla^{N}_{V}W} \\
&\quad - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\left(-\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{U}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f}\right) + \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\overline{\nabla^{N}_{U}W} - \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{[U,V]}}\overline{W}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\overline{U}\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{W}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f} - \left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{W}\right)}{\overline{f}}\right)\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{U}}\overline{\nabla f} \\
&\quad - \left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{\nabla^{N}_{V}W}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f} + \overline{\nabla^{N}_{U}\nabla^{N}_{V}W} \\
&\quad + \overline{V}\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{W}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f} - \left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{W}\right)}{\overline{f}}\right)\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{V}}\overline{\nabla f} \\
&\quad + \left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{\nabla^{N}_{U}W}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f} - \overline{\nabla^{N}_{V}\nabla^{N}_{U}W} \\
&\quad + \left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{[U,V]},\overline{W}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{\nabla f} - \overline{\nabla^{N}_{[U,V]}W} \\
&= \overline{R^{N}\left(U,V\right)W} + \left(\frac{\left|\nabla\overline{f}\right|^{2}}{\overline{f}^{2}}\right)\left(g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{W}\right)\overline{V} - g_{\mathcal{W}}\left(\overline{V},\overline{W}\right)\overline{U}\right).
\end{aligned}
$$

$\square$

Corolário 1.4.8. *Sejam* $\mathrm{Ric}^{\mathcal{W}}, \mathrm{Ric}^{M}, \mathrm{Ric}^{N}$ *as curvaturas de Ricci de* $\mathcal{W}, M, N$ *respectivamente. Se* $\overline{X}, \overline{Y}$ *e* $\overline{U}, \overline{V}$ *são levantamentos de campos em* M *e* N *respectivamente, temos:*

1. $\mathrm{Ric}^{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = \mathrm{Ric}^{M}(X, Y) - \frac{n}{\overline{f}}\mathrm{Hess}\left(\overline{f}\right)\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$*;*

2. $\mathrm{Ric}^{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{U}\right) = 0$*;*

3. $\mathrm{Ric}^{\mathcal{W}}\left(\overline{U}, \overline{V}\right) = \mathrm{Ric}^{N}(U, V) - g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U}, \overline{V}\right)\left(\frac{\Delta \overline{f}}{\overline{f}} + (n-1)\frac{\left|\nabla \overline{f}\right|^2}{\overline{f}^2}\right)$.

Demonstração. Seja $p \in \mathcal{W}$ e $\left\{\overline{E_i}\right\}_{i=1}^{m+n}$ a base ortonormal de $T_p\mathcal{W}$ tal que $\left\{\mathrm{d}\pi_M\left(\overline{E_i}\right)\right\}_{i=1}^{m} = \{E_i\}_{i=1}^{m}$ e $\left\{\mathrm{d}\pi_N\left(\overline{E_i}\right)\right\}_{i=m+1}^{m+n} = \left\{\frac{1}{\overline{f}}E_i\right\}_{i=m+1}^{m+n}$ são bases ortogonais de $T_{\pi_M(p)}M$ e $T_{\pi_N(p)}N$ respectivamente. Temos então para cada ponto de $\mathcal{W}$:

1. Usando os itens $(1), (2)$ da proposição anterior obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) &= \sum_{i=1}^{m} g_{\mathcal{W}}\left(R^{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i}, \overline{X}\right)\overline{Y}, \overline{E_i}\right) + \sum_{i=m+1}^{m+n} g_{\mathcal{W}}\left(R^{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i}, \overline{X}\right)\overline{Y}, \overline{E_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g_{\mathcal{W}}\left(\overline{R^{M}(E_i, X)Y}, \overline{E_i}\right) + \sum_{i=m+1}^{m+n} g_{\mathcal{W}}\left(-\left(\frac{\mathrm{Hess}\left(\overline{f}\right)\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)}{\overline{f}}\right)\overline{E_i}, \overline{E_i}\right) \\
&= \mathrm{Ric}^{M}(X, Y) - \frac{n}{\overline{f}}\mathrm{Hess}\left(\overline{f}\right)\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)
\end{aligned}
$$

2. Pelos itens $(3), (4)$ da proposição anterior e utilizando que $\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\nabla\overline{f} = \nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\overline{\nabla f}$ é horizontal temos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\mathcal{W}}\left(\overline{X}, \overline{U}\right) &= \sum_{i=1}^{m} g_{\mathcal{W}}\left(R^{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i}, \overline{X}\right)\overline{U}, \overline{E_i}\right) + \sum_{i=m+1}^{m+n} g_{\mathcal{W}}\left(R^{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i}, \overline{X}\right)\overline{U}, \overline{E_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g_{\mathcal{W}}\left(0, \overline{E_i}\right) + \sum_{i=m+1}^{m+n} g_{\mathcal{W}}\left(\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i}, \overline{U}\right)}{\overline{f}}\right)\nabla^{\mathcal{W}}_{\overline{X}}\nabla\overline{f}, \overline{E_i}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ric}^{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right) &= \sum_{i=1}^{m} g_{\mathcal{W}}\left(R^{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i},\overline{U}\right)\overline{V},\overline{E_i}\right) + \sum_{i=m+1}^{m+n} g_{\mathcal{W}}\left(R^{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i},\overline{U}\right)\overline{V},\overline{E_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} g_{\mathcal{W}}\left(-\left(\frac{g_{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i},\overline{U}\right)}{\overline{f}}\right)\nabla^{\mathcal{W}}_{X}\nabla\overline{f},\overline{E_i}\right) \\
&\quad + \sum_{i=m+1}^{m+n} g_{\mathcal{W}}\left(\overline{R^N\left(E_i,U\right)V} + \left(\frac{\left|\nabla\overline{f}\right|^2}{\overline{f}^2}\right)\left(g_{\mathcal{W}}\left(\overline{E_i},\overline{V}\right)\overline{U} - g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)\overline{E_i}\right),\overline{E_i}\right) \\
&= \mathrm{Ric}^N\left(U,V\right) - g_{\mathcal{W}}\left(\overline{U},\overline{V}\right)\left(\frac{\Delta\overline{f}}{\overline{f}} + (n-1)\frac{\left|\nabla\overline{f}\right|^2}{\overline{f}^2}\right).
\end{aligned}
$$

□

1.5 Geodésicas e campos de Jacobi

Apresentaremos aqui alguns resultados como o teorema de Hopf-Rinow, os funcionais de comprimento e energia, campos de Jacobi, forma índice e a variação de volume de imersões. As principais referências desta seção são os livros de Gallot, Hulin e Lafontaine [19] e Jost [22].

Lembre-se que uma variedade Riemanniana (M,g) é *geodesicamente completa* se para todo $p \in M$, o mapa $\exp_p$ está definido em todo T_pM.

Neste trabalho trateremos, na maioria das vezes, de variedades geodesicamente completas. O teorema a seguir apresenta algumas equivalências entre esta propriedade e a propriedade de a variedade ser completa como espaço métrico.

Teorema 1.5.1 (Hopf-Rinow)**.** *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *M é completa como espaço métrico.*
2. *Os subconjuntos fechados e limitados de M são compactos.*
3. *Existe $p \in M$ tal que $\exp_p$ está definido em todo T_pM.*
4. *M é geodésicamente completa.*

   E mais, cada uma das afirmações acima implicam em

5. *Quaisquer dois pontos $p, q \in M$ podem ser unidos por uma geodésica de comprimento $d(p,q)$.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em vários livros de geometria riemanniana, veja por exemplo o capítulo 7 no livro de do Carmo [4] □

Dada uma curva suave $c : [a, b] \to M$ definimos o comprimento de c, denotado por $L(c)$, como

$$L(c) = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt.$$

Definimos também a energia de c, que denotaremos por $E(c)$, como

$$E(c) = \int_a^b \|c'(t)\|^2 \, dt.$$

Uma variação de c é um mapa diferenciável $F : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ para um $\epsilon > 0$ tal que $F(t, 0) = c(t)$ para todo $t \in [a, b]$. A variação é chamada própria se os pontos finais permanecem fixados, i.e. $F(a, s) = c(a)$, $F(b, s) = c(b)$ para todo $s \in (-\epsilon, \epsilon)$. Denotaremos $c(t, s) = F(t, s)$, $c_t(t, s) = \partial_t c(t, s) = dF(\partial_t)(t, s)$, $c_s(t, s) = \partial_s c(t, s) = dF(\partial_s)(t, s)$.

Se denotarmos $L(c_s)$ e $E(c_s)$ apenas por $L(s)$ e $E(s)$ respectivamente, o próximo lema nos dá as fórmulas da derivada destas funções em $s = 0$.

Lema 1.5.2. *$L(s)$ e $E(s)$ são diferenciáveis em relação a s, e temos*

$$L'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial_t \langle c_s, c_t \rangle}{\langle c_t, c_t \rangle^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left\langle c_s, \nabla_{\partial_t} c_t \right\rangle}{\langle c_t, c_t \rangle^{\frac{1}{2}}} \right) dt$$

$$E'(0) = \langle c_s(b, 0), c_t(b, 0) \rangle - \langle c_s(a, 0), c_t(a, 0) \rangle - \int_a^b \left\langle c_s, \nabla_{\partial_t} c_t(t, s) \right\rangle dt.$$

Demonstração. Usando que a conexão é de Levi-Civita temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} E(s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \partial_s \langle c_t(t, s), c_t(t, s) \rangle \, dt \\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_s} c_t(t, s), c_t(t, s) \right\rangle \\
&= \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t} c_s(t, s), c_t(t, s) \right\rangle \\
&= \int_a^b \left(\partial_t \langle c_s(t, s), c_t(t, s) \rangle - \left\langle c_s, \nabla_{\partial_t} c_t(t, s) \right\rangle \right) dt \\
&= \langle c_s, c_t \rangle \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \left\langle c_s, \nabla_{\partial_t} c_t(t, s) \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} L(s) &= \int_a^b \partial_s \langle c_t(t, s), c_t(t, s) \rangle^{\frac{1}{2}} \, dt \\
&= \int_a^b \frac{\left\langle \nabla_{\partial_t} c_s(t, s), c_t(t, s) \right\rangle}{\langle c_t(t, s), c_t(t, s) \rangle^{\frac{1}{2}}} dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial_t \langle c_s, c_t \rangle}{\langle c_t, c_t \rangle^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left\langle c_s, \nabla_{\partial_t} c_t \right\rangle}{\langle c_t, c_t \rangle^{\frac{1}{2}}} \right) dt.
\end{aligned}$$

$\square$

O lema anterior implica que c é estacionária para E (com respeito a variações que mantêm pontos finais fixos) e, se parametrizada por comprimento de arco, também estacionária para L se e somente se

$$\nabla_{\partial_t} c_t (t, 0) \equiv 0,$$

ou seja, c é uma geodésica.

Queremos agora calcular a segunda derivada de E e L em $s = 0$ para o caso em que c é uma geodésica, temos assim o seguinte teorema.

Teorema 1.5.3. *Se $c : [a, b] \to M$ é uma geodésica, temos*

$$E'' (0) = \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t} c_s (t, 0), \nabla_{\partial_t} c_s (t, 0) \right\rangle dt - \int_a^b \left\langle R (c_t, c_s) c_s, c_t \right\rangle dt \Big|_{s=0} + \left\langle \nabla_{\partial_s} c_s, c_t \right\rangle \Big|_{t=a,s=0}^{t=b,s=0}$$

e para $c_s^{\perp} = c_s - \left\langle \frac{c_t}{\|c_t\|}, c_s \right\rangle \frac{c_t}{\|c_t\|}$ (a componente de c_s ortogonal a c_t),

$$L'' (0) = \frac{1}{\|c_t\|} \left\{ \int_a^b \left(\left\langle \nabla_{\partial_t} c_s^{\perp}, \nabla_{\partial_t} c_s^{\perp} \right\rangle - \left\langle R \left(c_t, c_s^{\perp} \right) c_s^{\perp}, c_t \right\rangle \right) dt + \left\langle \nabla_{\partial_s} c_s, c_t \right\rangle \Big|_{t=a}^{t=b} \right\} \Big|_{s=0}.$$

Demonstração. De acordo com as fómulas da prova do lema anterior e usando que a conexão é de Levi-Civita,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} E (s) &= \int_a^b \partial_s \left\langle \nabla_{\partial_t} c_s (t, s), c_t (t, s) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t} c_s (t, s), \nabla_{\partial_t} c_s (t, s) \right\rangle dt \\ &\quad + \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_s} \nabla_{\partial_t} c_s (t, s), c_t (t, s) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t} c_s (t, s), \nabla_{\partial_t} c_s (t, s) \right\rangle dt \\ &\quad + \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t} \nabla_{\partial_s} c_s (t, s), c_t (t, s) \right\rangle dt \\ &\quad - \int_a^b \left\langle R (c_t, c_s) c_s, c_t \right\rangle dt \end{aligned}$$

Como c é geodésica, temos $\nabla_{\partial_t} c_t (t, 0) = 0$, e concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} E (0) = &\int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t} c_s (t, 0), \nabla_{\partial_t} c_s (t, 0) \right\rangle dt \\ &- \int_a^b \left\langle R (c_t, c_s) c_s, c_t \right\rangle dt \Big|_{s=0} \\ &+ \left\langle \nabla_{\partial_s} c_s, c_t \right\rangle \Big|_{t=a,s=0}^{t=b,s=0}. \end{aligned}$$

Similarmente temos,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}L(0) &= \int_a^b \partial_s \left(\frac{\left\langle \nabla_{\partial_t} c_s(t,s), c_t(t,s) \right\rangle}{\langle c_t(t,s), c_t(t,s)\rangle^{\frac{1}{2}}} \right) dt\Big|_{s=0} \\
&= \frac{1}{\|c_t\|}\Big\{ \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t} c_s(t,0), \nabla_{\partial_t} c_s(t,0) \right\rangle dt - \int_a^b \langle R(c_t,c_s)c_s, c_t\rangle dt\Big|_{s=0} \\
&\quad + \left\langle \nabla_{\partial_s} c_s, c_t \right\rangle\Big|_{t=a,s=0}^{t=b,s=0} \Big\} \\
&\quad - \frac{1}{\|c_t\|^3}\int_a^b \left(\left\langle \nabla_{\partial_t} c_s(t,0), c_t(t,0) \right\rangle \right)^2 dt \\
&= \frac{1}{\|c_t\|}\Big\{ \int_a^b \left\langle \nabla_{\partial_t}\left(c_s^{\perp}\right), \nabla_{\partial_t}\left(c_s^{\perp}\right) \right\rangle dt \\
&\quad - \int_a^b \langle R(c_t,c_s)c_s, c_t\rangle dt + \left\langle \nabla_{\partial_s} c_s, c_t \right\rangle\Big|_{t=a}^{t=b} \Big\}\Big|_{s=0}.
\end{aligned}$$

Temos também que

$$\langle R(c_t,c_s)c_s, c_t\rangle = \left\langle R\left(c_t, c_s^{\perp}\right)\left(c_s^{\perp}\right), c_t \right\rangle,$$

de modo que para a segunda variação de L através de variações próprias, somente a componente ortogonal a c_t do campo da variação c_s aparece. □

Seja X um campo ao longo de uma geodésica γ. Existe uma variação $\gamma : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ de $\gamma(t)$ com $\frac{\partial \gamma}{\partial s}\Big|_{s=0} = X$.

Tomamos

$$I(X,X) = \int_a^b \left(\langle \nabla_t X, \nabla_t X\rangle - \langle R(\gamma', X)X, \gamma'\rangle \right) dt,$$

isto é

$$I(X,X) = \frac{d^2}{ds^2}E(0), \quad se\ X(a) = 0 = X(b).$$

Em vez de uma variação a um parâmetro $\gamma(t,s)$, podemos considerar uma variação a dois parâmetros e para $Y = \frac{\partial \gamma}{\partial r}$ tomar

$$I(X,Y) = \int_a^b \left(\langle \nabla_t X, \nabla_t Y\rangle - \langle R(\gamma', X)Y, \gamma'\rangle \right) dt.$$

Segue direto da definição que $I(X,Y)$ é bilinear e simétrica em X e Y. Definimos a *forma índice* da geodésica γ como sendo a forma bilinear I nos campos sobre γ.

Definição 1.5.4. *Um campo J ao longo de γ é chamado campo de Jacobi se satisfaz a equação*

$$\nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} J + R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Como uma abreviação, algumas vezes escreveremos

$$\ddot{J} + R(J,\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0,$$

onde $\ddot{J} = (\nabla_{\partial_t} \dot{J}) = \nabla_{\partial_t}\nabla_{\partial_t} J$.

Lema 1.5.5. *Seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma geodésica. Para qualquer $v, w \in T_{\gamma(a)}M$, existe um único campo de Jacobi X ao longo de γ tal que*

$$X(a) = v, \ X'(a) = w.$$

Teorema 1.5.6. *Seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma geodésica.*

1. *Se não há um ponto conjugado a $\gamma(a)$ ao longo de γ, então existe $\epsilon > 0$ com a propriedade de que para qualquer curva suave por partes*

$$g : [a,b] \to M$$

com $g(a) = \gamma(a)$, $g(b) = \gamma(b)$, $d(g(t), \gamma(t)) < \epsilon$ para qualquer $t \in [a,b]$, temos

$$L(g) \geq L(\gamma)$$

com igualdade se e somente se g é uma reparametrização de γ.

2. *Se existe $c \in (a,b)$ tal que $\gamma(a)$ e $\gamma(c)$ são conjugados ao longo de γ, então existe uma variação própria*

$$\gamma(t,s) : [a,b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$$

tal que

$$L(\gamma_s) < L(\gamma)$$

para $0 < |s| < \epsilon$.

Demonstração. Para a demonstração veja o capítulo 5 do livro de Jost [22]. □

Lema 1.5.7. *Seja $\gamma : [a,b] \to M$ uma geodésica. Então não há um par de pontos conjugados ao longo de γ se e somente se a forma índice I de γ é positiva definida para todo campo variacional próprio.*

Demonstração. Para a demonstração veja o capítulo 5 do livro de Jost [22]. □

Definição 1.5.8. *Seja $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ uma variedade Riemanniana n-dimensional e M uma subvariedade (imersa) de $\widetilde{M}$ k-dimensional. Uma variação de M é um mapa suave $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to \widetilde{M}$ tal que $F(m,0) = m \quad \forall m \in M$. O campo variacional de F é o campo dado pelas curvas $t \mapsto F(m,t)$.*

Observação 1.5.9. *Como $F_0 = F(\cdot, 0)$ é a função identidade, temos que para t pequeno F_t é um difeomorfismo local.*

Lema 1.5.10. *Seja F uma variação de M em $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ e X o seu campo variacional. Se dvol_{M_t} é a densidade Riemanniana induzida pela métrica de $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ na subvariedade (imersa) $M_t = F_t(M)$ temos que*

$$\mathcal{L}_X \left(\mathrm{dvol}_{M_t}\right)\Big|_M = \mathrm{div}\left(X^\top\right) \mathrm{dvol}_M - \langle N, X \rangle \, \mathrm{dvol}_M \tag{1.5.1}$$

onde N é o vetor curvatura média de M.

Demonstração. Seja $(x_1, ..., x_k)$ um sistema de coordenadas locais em M e $(\partial_1, ..., \partial_k)$ seu respectivo campo coordenado. Temos que

$$F_t^* d\mathrm{vol}_{M_t} = \left(\det\left(\langle F_{t*}\partial_i, F_{t*}\partial_j\rangle\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left|dx^1 ... dx^k\right| = \frac{\left(\det\left(\langle F_{t*}\partial_i, F_{t*}\partial_j\rangle\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\det\left(\langle \partial_i, \partial_j\rangle\right)\right)^{\frac{1}{2}}} d\mathrm{vol}_M = J(m,t)\, d\mathrm{vol}_M. \tag{1.5.2}$$

Temos então que

$$\mathcal{L}_X \left(d\mathrm{vol}_{M_t}\right)\Big|_M = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \left(F_t^* d\mathrm{vol}_{M_t}\right)\Big|_M = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} J(m,t)\, d\mathrm{vol}_M. \tag{1.5.3}$$

Para calcular a derivada em um ponto m podemos assumir que os campos coordenados são ortonormais no ponto, temos assim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} J(m,t) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \langle F_{t*}\partial_i, F_{t*}\partial_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left\langle \widetilde{\nabla}_X F_{t*}\partial_i, F_{t*}\partial_i\right\rangle\Big|_{t=0}. \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

Usando que os colchetes de Lie dos campos ∂_t e ∂_i são nulos pois são campos coordenados temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} J(m,t) &= \sum_{i=1}^{k} \left\langle \widetilde{\nabla}_{F_{t*}\partial_i} X, F_{t*}\partial_i\right\rangle\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \partial_i \langle \partial_i, X\rangle - \sum_{i=1}^{k} \left\langle \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_i, X\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{k} \partial_i \left\langle \partial_i, X^\top\right\rangle - \langle N, X\rangle \\ &= \operatorname{div}\left(X^\top\right) - \langle N, X\rangle. \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

□

1.6 Identidades do tipo Bochner e o teorema da decomposição de Hodge

Veremos nesta seção as identidades de Bochner clássicas que foram utilizadas para obter propriedades topológicas da variedade a partir de limitações no tensor de Ricci. Veremos também o teorema da decomposição de Hodge, estas ferramentas são muito úteis em vários problemas de geometria. As principais referências desta seção os livros de Poor [29] e Warner [30].

Seja M uma variedade Riemanniana orientada n-dimensional, usando o operador de Hodge temos um mapa que preserva o ponto base

$$\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M).$$

Para $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ com suporte compacto, definimos o produto L^2 como

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \star (1) \\ &= \int_M \alpha \wedge \star \beta.\end{aligned}$$

Este produto é um produto interno no espaço das k-formas com suporte compacto.

Assumiremos agora que M é compacta para não ter que restringir nossas considerações a formas com suporte compacto.

Definição 1.6.1. *Seja $\delta : \Omega(M) \to \Omega(M)$ o operador que é (formalmente) adjunto a d em $\Omega(M)$ com respeito ao produto $(\cdot, \cdot)$. Isto significa que para $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, $\beta \in \Omega^k(M)$ temos*

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta),$$

assim δ leva $\Omega^{k-1}(M)$ em $\Omega^k(M)$.

Lema 1.6.2. *Temos que $\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ satisfaz*

$$\delta = (-1)^{n(k+1)+1} \star d \star .$$

Demonstração. Para $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$, $\beta \in \Omega^k(M)$ temos

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \star\beta) &= d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d \star \beta \\ &= d\alpha \wedge \star\beta + (-1)^{k-1} (-1)^{(k-1)(n-k+1)} \alpha \wedge \star\star (d \star \beta) \\ &= d\alpha \wedge \star\beta - (-1)^{n(k+1)+1} \alpha \wedge \star\star\star\beta \\ &= \pm \star \left(\langle d\alpha, \beta \rangle - (-1)^{n(k+1)+1} \langle \alpha, \star d \star \beta \rangle \right). \end{aligned}$$

Integrando esta fórmula temos pelo teorema de Stokes que a integral do lado esquerdo é nula, e obtemos o resultado. ☐

Definição 1.6.3. *O operador de Laplace-de Rham (também conhecido como Laplaciano de Hodge) em $\Omega^k(M)$ é dado por*

$$\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M).$$

Uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ é dita harmônica se

$$\Delta\omega = 0.$$

Proposição 1.6.4. *Os isomofismos musicais comutam com a conexão, ou seja, se $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\omega \in \Omega^1(M)$ e $Y \in T_pM$ para qualquer $p \in M$ temos*

$$(\nabla_Y X)^\flat = \nabla_Y \left(X^\flat\right) \quad \text{e} \quad (\nabla_Y \omega)^\sharp = \nabla_Y \left(\omega^\sharp\right).$$

Demonstração. Para qualquer $Z \in \mathfrak{X}(M)$ temos que

$$\begin{aligned}\left(\nabla_Y X\right)^\flat (Z) &= \langle \nabla_Y X, Z \rangle \\ &= Y \langle X, Z \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \nabla_Y \left(X^\flat\right)(Z).\end{aligned}$$

Além disso temos que

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\nabla_Y \omega\right)^\sharp, Z \right\rangle &= \left(\nabla_Y \omega\right)(Z) \\ &= Y\omega(Z) - \omega\left(\nabla_Y Z\right) \\ &= Y \left\langle \omega^\sharp, Z \right\rangle - \left\langle \omega^\sharp, \nabla_Y Z \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_Y \left(\omega^\sharp\right), Z \right\rangle.\end{aligned}$$

Logo como tomamos Z qualquer temos o resultado. □

Proposição 1.6.5. *A forma volume Riemanniana é paralela e o operador estrela de Hodge comuta com a conexão, isto é, se $\omega \in \Omega^k(M)$ e $Y \in T_pM$ para qualquer $p \in M$ temos*

$$\nabla_Y d\mathrm{vol}_M = 0 \quad \text{e} \quad \star\left(\nabla_Y \omega\right) = \nabla_Y (\star\omega).$$

Demonstração. Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal orientada de T_pM. Tome uma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = Y$ e considere o transporte paralelo $P(\gamma)$ associado a ela. Defina $\{E_i\}_{i=1}^n$ como o transporte paralelo ao longo de γ da base $\{e_i\}_{i=1}^n$. Temos que

$$\begin{aligned}\nabla_Y d\mathrm{vol}_M &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(P(\gamma)_t^*\right)\left(d\mathrm{vol}_M\right) - d\mathrm{vol}_M}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\left(P(\gamma)_t^* E_1^\flat\right) \wedge \ldots \wedge \left(P(\gamma)_t^* E_n^\flat\right) - e_1^\flat \wedge \ldots \wedge e_n^\flat}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{e_1^\flat \wedge \ldots \wedge e_n^\flat - e_1^\flat \wedge \ldots \wedge e_n^\flat}{t} = 0.\end{aligned}$$

Por linearidade só é necessário demonstrar a segunda afirmação para ω da forma

$$\omega = f\eta_{i_1} \wedge \ldots \wedge \eta_{i_k}.$$

onde $\{\eta_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal local de $\Omega^1(M)$ em uma vizinhança de p.

Neste caso, tomando $\star(\eta_{i_1}\wedge ...\wedge \eta_{i_k})=\eta_{j_1}\wedge ...\wedge \eta_{j_{n-k}}$ temos que

$$\begin{aligned}
\star(\nabla_Y\omega) &= \star\left(Y(f)\,\eta_{i_1}\wedge ...\wedge \eta_{i_k}+f\sum_{l=1}^{k}\eta_{i_1}\wedge ...\wedge \nabla_Y\eta_{i_l}\wedge ...\wedge \eta_{i_k}\right)\\
&= Y(f)\star(\eta_{i_1}\wedge ...\wedge \eta_{i_k})+f\star\left(\sum_{m=1}^{n-k}\sum_{l=1}^{k}\langle\nabla_Y\eta_{i_l},\eta_{j_m}\rangle\,\eta_{i_1}\wedge ...\wedge \eta_{j_m}\wedge ...\wedge \eta_{i_k}\right)\\
&= Y(f)\,\eta_{j_1}\wedge ...\wedge \eta_{j_{n-k}}+f\star\left(\sum_{m=1}^{n-k}\sum_{l=1}^{k}\langle\nabla_Y\eta_{j_m},\eta_{i_l}\rangle\,\eta_{i_1}\wedge ...\wedge \eta_{j_m}\wedge ...\wedge \eta_{i_k}\right)\\
&= Y(f)\,\eta_{j_1}\wedge ...\wedge \eta_{j_{n-k}}+f\sum_{m=1}^{n-k}\sum_{l=1}^{k}\langle\nabla_Y\eta_{j_m},\eta_{i_l}\rangle\,\eta_{j_1}\wedge ...\wedge \eta_{i_l}\wedge ...\wedge \eta_{j_{n-k}}\\
&= Y(f)\,\eta_{j_1}\wedge ...\wedge \eta_{j_{n-k}}+f\sum_{m=1}^{n-k}\eta_{j_1}\wedge ...\wedge \nabla_Y\eta_{j_m}\wedge ...\wedge \eta_{j_{n-k}}\\
&= \nabla_Y\left(f\eta_{j_1}\wedge ...\wedge \eta_{j_{n-k}}\right)=\nabla_Y(\star\omega).
\end{aligned}$$

□

Lema 1.6.6. *Sejam $X\in\mathfrak{X}(M)$ e $\omega\in\Omega^k(M)$ temos então que*

$$i_X\star\omega=\star\left(\omega\wedge X^\flat\right).$$

Demonstração. Seja $p\in M$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de T_pM e $\left\{e^\flat_{i_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{i_k}/i_1<...<i_k\right\}$ a base de $\Lambda^k_p(M)$ associada. Temos que

$$\begin{aligned}
i_{e_i}\star\left(e^\flat_{i_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{i_k}\right) &= i_{e_i}\left(e^\flat_{j_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{j_{n-k}}\right)\\
&= \sum_{l=1}^{n-k}(-1)^{l-1}\left(i_{e_i}e^\flat_{j_l}\right)e^\flat_{j_1}\wedge ...\wedge \widehat{e^\flat_{j_l}}\wedge ...\wedge e^\flat_{j_{n-k}}\\
&= (-1)^{q-1}\,e^\flat_{j_1}\wedge ...\wedge \widehat{e^\flat_{j_q}}\wedge ...\wedge e^\flat_{j_{n-k}}\\
&= (-1)^{q-1}\star\left((-1)^{q-1}\,e^\flat_{i_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{i_k}\wedge e^\flat_{j_q}\right)\\
&= \star\left(e^\flat_{i_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{i_k}\wedge e^\flat_{j_q}\right)
\end{aligned}$$

onde $e^\flat_{j_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{j_{n-k}}$ é tal que $e^\flat_{i_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{i_k}\wedge e^\flat_{j_1}\wedge ...\wedge e^\flat_{j_{n-k}}$ é a forma volume Riemanniana e $j_q=i$.

Como ambos os lados da equação são $C^\infty(M)$-linear em relação a ω e X, só é necessário mostrar a identidade para elementos de uma base de T_pM e $\Lambda^k_p(M)$ para todo $p\in M$. Logo temos o resultado. □

Sabemos que se T é um k-tensor covariante e $X_0,...,X_k\in\mathfrak{X}M$ temos que

$$(\nabla_XT)(X_1,...,X_k)=X(T(X_1,...,X_k))-\sum_{i=1}^{k}T(X_1,...,X_{i-1},\nabla_XX_i,X_{i+1},...,X_k),$$

$$(\mathcal{L}_XT)(X_1,...,X_k)=X(T(X_1,...,X_k))-\sum_{i=1}^{k}T(X_1,...,X_{i-1},[X,X_i],X_{i+1},...,X_k).$$

Usando que a conexão é sem torsão temos

$$\left(\mathcal{L}_X T\right)\left(X_1, ..., X_k\right) = \left(\nabla_X T\right)\left(X_1, ..., X_k\right) + \sum_{i=1}^{k} T\left(X_1, ..., X_{i-1}, \nabla_{X_i} X, X_{i+1}, ..., X_k\right).$$

Para uma k-forma ω temos

$$\begin{aligned} d\omega\left(X_0, ..., X_k\right) = & \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mathcal{L}_{X_i}\left(\omega\left(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_k\right)\right) \\ & + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \omega\left(\left[X_i, X_j\right], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_k\right), \end{aligned}$$

logo

$$d\omega\left(X_0, ..., X_k\right) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \nabla_{X_i} \omega\left(X_0, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_k\right), \tag{1.6.1}$$

ou ainda

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \wedge \nabla_{e_i} \omega, \tag{1.6.2}$$

onde $\{e_i\}$ é um referencial local com base dual $\{\eta_i\}$.

Usando esta identidade podemos calcular o adjunto δ de d de outra forma. Seja $\{e_i\}$ é um referencial local ortonormal com base dual $\{\eta_i\}$. Temos que

$$\begin{aligned} \delta\omega &= (-1)^{nk+n+1} \star d \star \omega \\ &= (-1)^{nk+n+1} \star \left(\sum_k \eta_k \wedge \nabla_{e_k} \star \omega\right) \\ &= \sum_k (-1)^{nk+n+1} \star \left(\eta_k \wedge \star \nabla_{e_k} \omega\right) \\ &= -\sum_k (-1)^{nk+n+1} i_{e_k} \star \star \nabla_{e_k} \omega, \end{aligned}$$

logo

$$\delta\omega = -\sum_k i_{e_k} \nabla_{e_k} \omega, \tag{1.6.3}$$

ou ainda

$$\delta\omega\left(X_1, ..., X_{k-1}\right) = -\sum_{j=1}^{n} \nabla_{e_j} \omega\left(e_j, X_1, ..., X_{k-1}\right). \tag{1.6.4}$$

Definição 1.6.7. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $X \in \Gamma(TM)$, podemos pensar ∇X como uma seção de* End TM *e assim $\nabla^2 X \in \Omega^1(M, \text{End}\, TM)$ é uma 1-forma com valores em* End TM. *Denote por $\text{tr}\nabla^2 X \in \Gamma(TM)$ a contração de $\nabla^2 X$ com respeito a g: $\left(\text{tr}\nabla^2 X\right)_p = \sum \nabla^2 X\left(e_i, e_i\right)$, onde $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM.*

Teorema 1.6.8 (Bochner)**.** *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e $X \in \Gamma(TM)$, então*

$$2\left\langle \mathrm{tr}\nabla^2 X, X \right\rangle + 2\|\nabla X\|^2 + \Delta \|X\|^2 = 0.$$

Se M é compacta, B é uma forma bilinear simétrica semidefinida positiva em M e $X \in \Gamma(TM)$ satisfaz $B(X,\cdot) = \langle \mathrm{tr}\nabla^2 X, \cdot\rangle$, então X é paralelo e $B(X,X) = 0$; se B é definida positiva, então X é zero.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no capítulo 4 do livro de Poor [29]. □

Definição 1.6.9. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e $\mu \in \Omega^r(M)$, definimos o campo $(0,r)$-tensorial* Ricμ *em M por*

$$\mathrm{Ric}\mu(v_1,...,v_r) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r}\left(R(e_i,v_j)\mu\right)(v_1,...,v_{j-1},e_i,v_{j+1},...,v_r),$$

onde $v_j \in T_pM$ e $\{e_i\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Teorema 1.6.10 (Weitzenböck)**.** *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana e $\mu \in \Omega^r(M)$, então*

$$\Delta\mu = -\mathrm{div}\nabla\mu + \mathrm{Ric}\mu$$
$$\langle \Delta\mu, \mu\rangle = \frac{1}{2}\Delta\|\mu\|^2 + \|\nabla\mu\|^2 + \langle \mathrm{Ric}\mu, \mu\rangle.$$

Se M é flat, então ρ_μ é zero, assim $\Delta\mu = -\mathrm{div}\nabla\mu$; logo $-\mathrm{div}\nabla\mu$ é formalmente o Laplaciano flat. Deve-se notar que o Laplaciano flat formal $-\mathrm{div}\nabla\mu = \Delta\mu + \rho_\mu$ é geralmente só um campo $(0,r)$-tensorial, não uma r-forma; por esta razão é também chamado o "Laplaciano irregular".

Demonstração. Veja o capítulo 4 de [29]. □

Definição 1.6.11. *Definimos*

$$H^p = \{\omega \in \Omega^p(M) : \Delta\omega = 0\}.$$

Teorema 1.6.12 (Teorema da Decomposição de Hodge)**.** *Para cada inteiro p com $0 \le p \le n$, H^p tem dimensão finita, e temos a seguinte decomposição em soma direta ortogonal do espaço $\Omega^p(M)$ das p-formas suaves em M:*

$$\begin{aligned}\Omega^p(M) &= \Delta(\Omega^p) \oplus H^p \\ &= d\delta(\Omega^p) \oplus \delta d(\Omega^p) \oplus H^p \\ &= d\left(\Omega^{p-1}\right) \oplus \delta\left(\Omega^{p+1}\right) \oplus H^p.\end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no capítulo 6 do livro de Warner [30]. □

Corolário 1.6.13. *Cada classe de cohomologia de de Rham em uma variedade Riemanniana orientada e compacta M contém um único representante harmônico.*

1.7 Teoremas da geometria Riemanniana

Apresentamos aqui alguns teoremas importantes da geometria Riemanniana que são utilizados para estudar a topologia das variedades com limitações no tensor de Ricci ou com curvatura Riemanniana nula. Não apresentaremos as demonstrações destes resultados por serem longas e exigirem muitos pré-requisitos que não utilizaremos.

Este primeiro teorema compara o volume das bolas de uma variedade com o de bolas de uma forma espacial.

Teorema 1.7.1 (Desigualdade de Bishop-Gromov)**.** *Suponha que (M, g) é uma variedade Riemanniana n-dimensional completa com $\operatorname{Ric} \geq (n-1)\,k$ e seja $v(n, k, r)$ o volume da bola de raio r na forma espacial S_k^n. Então*

$$r \mapsto \frac{\operatorname{vol} B(p, r)}{v(n, k, r)}$$

é uma função não decresccente cujo limite é 1 quando $r \to 0$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no capítulo 9 do livro de Petersen [28]. □

O teorema a seguir estima o diâmetro de uma variedade a partir de limitações no tensor de Ricci. Além disso temos um corolário que informa o tamanho do grupo fundamental da variedade.

Teorema 1.7.2 (Myers)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa com $\operatorname{Ric}(M, g) \geq k > 0$, então*

$$\operatorname{diam}(M, g) \leq \pi \sqrt{\frac{(n-1)}{k}}$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no capítulo 9 do livro de do Carmo [4]. □

Corolário 1.7.3 (Myers)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa com $\operatorname{Ric}(M, g) \geq k > 0$, então $\pi_1(M)$ é finito.*

Demonstração. Se $\pi : \widetilde{M} \to M$ é o recobrimento universal de M, tome $\tilde{g} = \pi^* g$. Então $\pi : \left(\widetilde{M}, \tilde{g}\right) \to (M, g)$ é um recobrimento Riemanniano, logo $\left(\widetilde{M}, \tilde{g}\right)$ é completa e $\operatorname{Ric}\left(\widetilde{M}, \tilde{g}\right) \geq k > 0$. Portanto $\widetilde{M}$ é compacta e assim temos que $\pi_1(M)$ é finito. □

Este teorema aborda o caso em que a variedade não possui curvatura de Ricci estritamente positiva. Neste caso precisamos assumir que esta é compacta para podermos garantir que o teorema descreva sua topologia.

Teorema 1.7.4 (Cheeger-Gromoll)**.** *Seja M uma variedade compacta de curvatura de Ricci não negativa. Então $\pi_1(M)$ contém um subgrupo normal finito H tal que $\pi_1(M)/H$ é um grupo finito estendido por $\mathbb{Z}^k$, e o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de M se separa isometricamente como $\bar{M} \times \mathbb{R}^k$ onde $\bar{M}$ é compacta.*

Demonstração. A demonstração deste teorema se encontra no artigo de Cheeger e Gromoll [8]. □

O teorema a seguir descreve a geometria de uma variedade compacta com curvatura Riemanniana nula em todo ponto.

Teorema 1.7.5 (Bieberbach)**.** *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana flat compacta de dimensão* n*. Então seu grupo fundamental contém um subgrupo normal abeliano livre de posto* n *e índice finito. Assim,* M *é um quociente finito de um toro flat.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro de Wolf [32]. □

O teorema a seguir é muito conhecido em geometria diferencial, ele garante que o grupo de isometrias de uma variedade compacta possui uma estrutura geométrica de grupo de Lie compacto.

Teorema 1.7.6 (Myers-Steenrod)**.** *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana e* $\mathrm{Iso}(M)$ *seu grupo de isometrias. Então* $(\mathrm{Iso}(M), \tau)$ *com a topologia compacto-aberto possui uma estrutura diferenciável compatível com a estrutura de grupo que o torna um grupo de Lie de dimensão finita. Ainda mais, se* M *é compacta então* $(\mathrm{Iso}(M), \tau)$ *é compacto.*

Demonstração. A demonstração deste teorema se encontra no artigo de Myers e Steenrod [25]. □

Capítulo 2

Geometria métrica

Neste capítulo introduziremos a distância de Gromov-Hausdorff entre espaços métricos e a convergência de Gromov-Hausdorff para espaços métricos com medida. Veremos também algumas propriedades destas topologias para o subespaço das variedades riemannianas com curvatura de Ricci limitada. Por fim apresentaremos vários resultados técnicos de geometria métrica. As principais referências para este capítulo são os livros [12] e [28].

2.1 A distância de Hausdorff

Aqui introduzimos a distância de Hausdorff que foi primeira maneira natural de medir distâncias de subconjuntos de espaços métricos. Veremos que além de ser intuitivamente clara, ela induz uma métrica bem definida nos subconjuntos fechados e limitados de um espaço métrico.

Definição 2.1.1. *Se (X, d) é um espaço métrico e $A, B \subset X$, então definimos*

$$\begin{aligned}
d(A,B) &= \inf\{\, d(a,b) \mid a \in A, b \in B \,\} \\
B(A,\epsilon) &= \{\, x \in X \mid d(x,A) < \epsilon \,\} \\
&= \bigcup_{a\in A} B(a,\epsilon) \\
d_H(A,B) &= \inf\{\, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \mid A \subset B(B,\epsilon), B \subset B(A,\epsilon) \,\} \\
&= \max\left\{ \sup_{a\in A} \left\{ \inf_{b\in B} \{d(a,b)\} \right\}, \sup_{b\in B} \left\{ \inf_{a\in A} \{d(a,b)\} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

Proposição 2.1.2. *Se (X, d) é um espaço métrico denote por $F(X)$ o conjunto dos subconjuntos fechados, limitados e não-vazios de X. Temos então:*

1. *A e B são limitados $\Rightarrow d_H(A,B)$ é finita;*

2. *$d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$;*

3. *d_H define uma métrica no conjunto $F(X)$.*

Demonstração.

1. Tome $a \in A, b \in B$ e sejam $\delta_a, \delta_b \in \mathbb{R}^+$ tais que $A \subset B(a, \delta_a)$ e $B \subset B(b, \delta_b)$. Então se $r = d(a, b)$ e $\delta = \max\{\delta_a, \delta_b\}$ temos que $A \subset B(b, \delta + r) \subset B(B, \delta + r)$ e $B \subset B(a, \delta + r) \subset B(A, \delta + r)$, logo $d_H(A, B) \leq \max \delta + r$. Assim $d_H(A, B)$ é finita.

2. Por definição temos que $d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B(B, \epsilon)$ e $B \subset B(A, \epsilon)$ $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow d(a, B) = 0\ \forall a \in A$ e $d(b, A) = 0\ \forall b \in B \Leftrightarrow A \subset \overline{B}$ e $B \subset \overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

3. $F(X)$ não é vazio, pois X não é vazio e pontos de X são fechados e limitados. $d_H : X \times X \to \mathbb{R}$ é bem definida pois os elementos de $F(X)$ são limitados. Se $A, B, C \in F(X)$ temos

- $d_H(A, B) \geq 0$ pela definição de d_H. E do item anterior sabemos que $d_H(A, B) = 0 \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B} \Leftrightarrow A = B$.
- Pela definição temos que $d_H(A, B) = \inf\{\, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \mid A \subset B(B, \epsilon), B \subset B(A, \epsilon)\,\} = \inf\{\, \epsilon \in \mathbb{R}^+ \mid B \subset B(A, \epsilon), A \subset B(B, \epsilon)\,\} = d_H(B, A)$.
- $$\begin{aligned} d_H(a, b) &= \max\left\{\sup_{a \in A}\left\{\inf_{b \in B}\{d(a, b)\}\right\}, \sup_{b \in B}\left\{\inf_{a \in A}\{d(a, b)\}\right\}\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{a \in A}\left\{\inf_{b \in B}\{d(a, c) + d(c, b)\}\right\}, \sup_{b \in B}\left\{\inf_{a \in A}\{d(a, c) + d(c, b)\}\right\}\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{a \in A}\left\{\inf_{c \in C}\{d(a, c)\} + \inf_{b \in B}\{d(c, b)\}\right\}, \sup_{b \in B}\left\{\inf_{a \in A}\{d(a, c)\} + \inf_{c \in C}\{d(c, b)\}\right\}\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{a \in A}\left\{\inf_{c \in C} d(a, c)\right\} + \sup_{c \in C}\left\{\inf_{b \in B} d(c, b)\right\}, \sup_{c \in C}\left\{\inf_{a \in A} d(a, c)\right\} + \sup_{b \in B}\left\{\inf_{c \in C} d(c, b)\right\}\right\} \\ &\leq \max\left\{\sup_{a \in A}\left\{\inf_{c \in C}\{d(a, c)\}\right\}, \sup_{c \in C}\left\{\inf_{a \in A}\{d(a, c)\}\right\}\right\} \\ &+ \max\left\{\sup_{c \in C}\left\{\inf_{b \in B}\{d(c, b)\}\right\}, \sup_{b \in B}\left\{\inf_{c \in C}\{d(c, b)\}\right\}\right\} \\ &= d_H(a, c) + d_H(c, b). \end{aligned}$$

□

Veremos agora como esta métrica em $F(X)$ herda algumas propriedades de X.

Proposição 2.1.3. *Se (X, d) é um espaço métrico então:*

1. *X completo $\Rightarrow F(X)$ completo;*
2. *X totalmente limitado $\Rightarrow F(X)$ totalmente limitado;*
3. *Se X é compacto, então $F(X)$ é compacto.*

Demonstração.

1. Se (A_i) é sequência de Cauchy em $F(X)$, e seja A o conjunto dos pontos limites de sequências (a_i) com $a_i \in A_i$. Como (A_i) é Cauchy, para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ existe $N(\epsilon, n)$ tal que $d_H(A_k, A_l) < \frac{\epsilon}{2^n}$ para $k, l \geq N(\epsilon, n)$, podemos assumir sem perda de generalidade que $N(\epsilon, n) < N(\epsilon, m)$ se $n < m$. Então dado $a_k \in A_k$ com $k \geq N(1, n)$ existe $a_l \in A_l$ tal que $d(a_k, a_l) < \frac{1}{2^n}$ para todo $l \geq k$. Mostraremos primeiro que $A \in F(X)$, ou seja, A é não vazio, limitado e fechado, e depois mostraremos que $A_i \to A$.

- Defina uma sequência (a_i) com $a_i \in A_i$ do seguinte modo, tome quaisquer pontos $a_i \in A_i$ para $i \leq N(1,1)$. Para $N(1,1) < i \leq N(1,2)$ tome $a_i \in A_i$ tal que $d(a_i, a_{N(1,1)}) < \frac{1}{2}$. Indutivamente, se a_i já está definido para $i \leq N(1, m)$, tome $a_i \in A_i$ para $N(1, m) < i \leq N(1, m+1)$ tal que $d(a_i, a_{N(1,m)}) < \frac{1}{2^m}$. Então temos uma sequência (a_i) que é de Cauchy e, por X ser completo, é convergente. Assim podemos construir uma sequência cujo ponto limite está em A, logo A não é vazio.
- Para $i \geq N_1$ temos $d_(A_i, A_{N(1,0)}) < 1$, então $A_i \subset B(A_{N(1,0)}, 1)$ para todo $i \geq N(1, 0)$. Logo $A \subset \overline{B(A_{N(1,0)}, 1)}$ e como o $A_{N(1,0)}$ é limitados, temos que A é limitado.
- Se (a_j) é uma sequência em A convergente, passando para uma subsequência se necessário podemos supor que $d(a_n, a_m) < \frac{1}{N}$ para $n, m \geq N$. Seja $(a^i_j) \to a_j$ tal que $a^i_j \in A_i$ e tome a sequência $(a^j_{f(j)})$ onde $f(j) > f(j-1)$, então como $(a^j_{f(j)})$ é Cauchy e X é completo, temos que $(a^j_{f(j)})$ é convergente. Logo (a_j) converge para um ponto de A e portanto A é fechado.
- Dado $\epsilon > 0$ existe $N(\epsilon, 1)$ tal que $d(A_n, A_m) < \frac{\epsilon}{2}$ se $n, m \geq N(\epsilon, 1)$, então $A_n \subset B(A_m, \frac{\epsilon}{2})$ para $n \geq m \geq N(\epsilon, 1)$. Logo $A \subset \overline{B(A_m, \frac{\epsilon}{2})} \subset B(A_m, \epsilon)$.

  Dado $\epsilon > 0$ e $a_k \in A_k$ com $k > N(\epsilon, 2)$, defina uma sequência (s_n) com $s_n \in A_n$ de maneira análoga ao que foi feito anteriormente, tal que $s_k = a_k$ e para $N(\epsilon, p) < n, m \leq N(\epsilon, p+1)$ e $p \geq 2$ temos $d(s_n, s_m) < \frac{\epsilon}{2^p}$. Então para $n \geq k$ temos $d(a_k, s_n) \leq d(a_k, s_{N(\epsilon,3)}) + ... + d(s_{N(\epsilon,q)}, s_n) < \frac{\epsilon}{2^2} + ... + \frac{\epsilon}{2^q} < \frac{\epsilon}{2}$, onde q é o maior inteiro tal que $N(\epsilon, q) < n$. Logo todo ponto de A_k está a uma distância menor que ϵ de A e assim $A_k \subset B(A, \epsilon)$.

  Portanto dado $\epsilon > 0$ tomando $i > N(\epsilon, 2)$ temos $d(A_i, A) < \epsilon$, então $A_i \to A$.

2. Dado $\epsilon > 0$, tome $B(x_1, \epsilon), ..., B(x_n, \epsilon)$ uma cobertura finita de ϵ-bolas de X. Seja $A = \mathcal{P}\{x_1, ..., x_n\} - \emptyset$, se $B \in F(X)$ tome $C = \{\, x_i \mid B(x_i, \epsilon) \cap B \neq \emptyset \,\}$. Então como $B \neq \emptyset$ e os $B(x_i, \epsilon)$ cobrem X, temos que $C \in A$ e $d_H(B, C) < \epsilon$. Portanto o conjunto das bolas $B(C_k, \epsilon)$ cobrem $F(X)$.

3. É consequência imediata de (1) e (2) pelo teorema de Heine-Borel.

□

2.2 A distância de Gromov-Hausdorff

Utilizando a distância de Hausdorff definiremos uma distância entre espaços métricos compactos. A partir disto veremos que ela dá ao conjunto de classes de isometrias de espaços compactos uma estrutura de espaço métrico.

Definição 2.2.1. *Se X e Y são espaços métricos, então uma métrica admissível em $X \coprod Y$ é uma métrica que estende as métricas de X e Y para $X \coprod Y$. Assim definimos a distância de Gromov-Hausdorff como:*

$$d_{G-H}(X,Y) = \inf\{\, d_H(X,Y) \mid d \text{ é métrica admissível em } X \coprod Y \,\}$$

Exemplo 2.2.2. *Se Y é o espaço de um ponto, então:*

$$\begin{aligned} d_{G-H}(X,Y) &\le \inf_{y\in Y}\{\sup_{x\in X}\{d(x,y)\}\} \\ &= \operatorname{rad} X \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3. *Definindo $d(x,y) = D/2$, onde $diamX$, $diamY \le D$ e $x \in X$, $y \in Y$ temos que*

$$d_{G-H}(X,Y) \le D/2$$

Denotaremos a coleção dos espaços métricos compactos por $(\mathcal{M}, d_{G-H})$.

Proposição 2.2.4. *Se X e Y são espaços métricos compactos com $d_{G-H}(X,Y) = 0$, então X e Y são isométricos.*

Demonstração. Seja d_i uma sequência de métricas em $X \coprod Y$ tal que $d_{iH}(X,Y) < i^{-1}$. Tomando $x \in X$ podemos escolher $y \in Y$ que satisfaz $d_i(x,y) \le i^{-1}$ e definir $P_i(x) = y$. Analogamente podemos fazer isso a mesma coisa a partir de $y \in Y$. Dessa maneira podemos construir mapas (não necessariamente contínuos)

$$\begin{aligned} P_i &: X \to Y, \text{ com } d_i(x, P_i(x)) \le i^{-1} \\ Q_i &: Y \to X, \text{ com } d_i(y, Q_i(y)) \le i^{-1} \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular e pelo fato de d_i ser admissível temos

$$\begin{aligned} d(P_i(x_1), P_i(x_2)) &\le 2i^{-1} + d(x_1,x_2) \\ d(Q_i(y_1), Q_i(y_2)) &\le 2i^{-1} + d(y_1,y_2) \\ d(x, Q_i \circ P_i(x)) &\le 2i^{-1} \\ d(y, P_i \circ Q_i(y)) &\le 2i^{-1} \end{aligned}$$

Seja $A \subset X$ um subconjunto denso e contável. Para $a_1 \in A$ existe subsequência P_{i1} de P_i tal que $P_{i1}(a_1)$ é convergente, indutivamente temos que para a_j existe subsequência P_{ij} de P_{ij-1} tal que $P_{ij}(a_j)$ é convergente. Tomando a subsequência $\widetilde{P}_i$ tal que seu j-ésimo termo é o j-ésimo termo da subsequência P_{ij} temos que $\widetilde{P}_i(a)$ converge para todo $a \in A$ e definimos $P(a)$ este limite.

Da primeira desigualdade temos que P decresce distância em A. Logo P é uniformemente contínua e portanto tem uma extensão única para um mapa $P: X \to Y$, que também decresce distância. Da mesma maneira temos um mapa $Q: Y \to X$, e das duas últimas desigualdades temos que P e Q são inversas uma da outra, logo P e Q são isometrias. □

Exemplo 2.2.5. *Seja X um espaço métrico compacto e $A \subset X$ um subconjunto finito tal que todo pomto de X está a uma distância ϵ de algum elemento de A, ou seja, $d_H(A, X) \leq \epsilon$. Tais conjuntos são chamados de ϵ-densos em X. É claro que se usarmos a métrica em A induzida por X temos também $d_{G-H}(A, X) \leq \epsilon$. Além disso como X é compacto dado qualquer $\epsilon > 0$ podemos encontrar tais subconjuntos finitos.*

O conjunto das classes de isometria de espaços métricos compactos $\mathcal{M}$ munido com a distância de Gromov-Hausdorff torna-se um espaço métrico. A proposição seguinte nos mostra algumas propriedades que este espaço métrico possui.

Proposição 2.2.6. *O espaço métrico $(\mathcal{M}, d_{G-H})$ é separável e completo.*

Demonstração. Para ver que é separável tomamos a coleção dos espaços métricos finitos com distância racional entre todos seus pontos. Então essa coleção é contável e densa como visto no exemplo anterior.

Para ver que é completo basta mostrar que toda sequência (X_n) de Cauchy possui uma subsequência convergente. Seja (X_i) subsequência tal que $d_{G-H}(X_i, X_{i+1}) < 2^{-i}$ para todo i e tome $d_{i,i+1}$ uma métrica em $X_i \coprod X_{i+1}$ tal que a distância de Hausdorff de X_i e X_{i+1} seja menor que 2^{-i}. Defina a seguinte métrica em $X_i \coprod X_{i+j}$

$$d_{i,i+j}(x_i, x_{i+j}) = \min_{x_{i+k} \in X_{i+k}} \left\{ \sum_{k=0}^{j-1} d_{i+k,i+k+1}(x_{i+k}, x_{i+k+1}) \right\}$$

Temos assim uma métrica $\widetilde{d}$ em $Y = \coprod_i X_i$ tal que $\widetilde{d}_H(X_i, X_{i+j}) \leq 2^{-i+1}$. Seja

$$\widehat{X} = \{ (x_i) \mid x_i \in X_i, \widetilde{d}(x_i, x_j) \to 0 \text{ para } i, j \to \infty \}$$

Este conjunto tem uma pseudo-métrica dada por

$$\widehat{d}((x_i), (y_i)) = \lim_{i \to \infty} \widetilde{d}(x_i, y_i)$$

Como as sequências (x_i) são de Cauchy, temos uma métrica no quociente X, dado pela relação de equivalência

$$(x_i) \sim (y_i) \text{ se e somente se } \widehat{d}((x_i), (y_i)) = 0$$

Assim podemos estender a métrica em Y para uma em $X \coprod Y$ definindo

$$d(x_k, (x_i)) = \lim_{i \to \infty} \widetilde{d}(x_k, x_i)$$

Como $d_H(X_j, X_{j+1}) \leq 2^{-j}$, podemos encontrar uma sequência $(x_{i,j}) \in \widehat{X}$ tal que $x_{i,i} = x_i$ e $d(x_{i,j}, x_{i,j+1}) \leq 2^{-j}$. Logo $d(x_i, (x_{i,j})) \leq 2^{-i+1}$,e assim para todo X_i temos $X \in \overline{B(X_i, 2^{-i+1})}$. Por outro lado para qualquer $(x_i) \in \widehat{X}$ temos uma sequência equivalente $(y_i) \in \widehat{X}$ tal que $d(y_k, (y_i)) \leq 2^{-k+1}$ para todo k. Logo $X_k \in \overline{B(X, 2^{-k+1})}$, assim $d_H(X, X_i) \leq 2^{-i+1}$ para todo i e portanto $X_i \to X$. $\square$

2.3 A convergência pontuada e a convergência de mapas

Veremos nesta seção como podemos generalizar a noção de convergência entre espaços métricos quando estes não são mais compactos. Em seguida definiremos a convergência de mapas e mostraremos um resultado do tipo Arzelà-Ascoli.

Definição 2.3.1. *Se (X,x) e (Y,y) são espaços pontuados, definimos a distância de Gromov-Hausdorff pontuada como*

$$d_{G-H}((X,x),(Y,y)) = \inf\{\, d_H(X,Y) + d(x,y) \mid d \text{ é admissível em } X \coprod Y \,\}$$

Os resultados que foram mostrados anteriormente ainda valem para esta nova distância.

Definição 2.3.2. *Definimos a topologia de Gromov-Hausdorff na coleção dos espaços métricos pontuados próprios (a função distância é própria) $\mathcal{M}_* = \{(X,x,d)\}$ como:*

Dizemos que

$$(X_i, x_i, d_i) \to (X, x, d)$$

na topologia de Gromov-Hausdorff pontuada se para todo R, as bolas fechadas

$$\left(\overline{B\left(x_i,R\right)}, x_i, d_i\right) \to \left(\overline{B\left(x,R\right)}, x, d\right)$$

convergem com respeito à métrica de Gromov-Hausdorff pontuada.

Definição 2.3.3. *Se tivermos*

$$f_k : X_k \to Y_k \text{ com } X_k \to X \text{ , } Y_k \to Y$$

Dizemos que f_k converge para $f : X \to Y$ se para toda sequência $x_k \in X_k$ convergindo para $x \in X$ tivermos $f_k(x_k) \to f(x)$.

Segue desta definição que se as funções f_k preservam distância ou são submetrias, então o limite desta sequência preserva essas propriedades respectivamente.

Podemos ver uma sequência de mapas f_k como um mapa contínuo

$$F : \left(\coprod_i X_i\right) \to Y \coprod \left(\coprod_i Y_i\right)$$

Assim a sequência converge se e somente se este mapa possui uma extensão

$$\widetilde{F} : X \coprod \left(\coprod_i X_i\right) \to Y \coprod \left(\coprod_i Y_i\right)$$

e neste caso o mapa limite é a restrição de $\widetilde{F}$ a X. Assim, uma sequência é convergente se e somente se o mapa F é uniformemente contínuo.

Definição 2.3.4. *Uma sequência de funções é dita equicontínua se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$f_k\left(B\left(x_k, \delta\right)\right) \subset B\left(f_k\left(x_k\right), \epsilon\right)$$

para todo k *e* $x_k \in X_k$.

Uma sequência é equicontínua se, por exemplo, todas as funções são Lipschitz com mesma constante de Lipschitz.

Lema 2.3.5. *Uma família equicontínua* $f_k : X_k \to Y_k$*, com* $X_k \to X$ *e* $Y_k \to Y$ *na topologia de Gromov-Hausdorff (pontuada) tem uma subsequência convergente. Se os espaços não são compactos, nós assumimos que os* f_k *preservam o ponto base.*

Demonstração. Escolha subconjuntos densos e contáveis $A_i = \{a_1^i, a_2^i, a_3^i, ...\} \subset X_i$ tal que as sequências $\left(a_j^i\right) \to a_j \in X$. Então $A = \{a_j\} \subset X$ é denso e usando um argumento de diagonal podemos encontrar uma subsequência de funções $\widetilde{f_l}$ que convergem sobre A_l. Logo existe $F : A \coprod \left(\coprod_l A_l\right) \to Y \coprod \left(\coprod_l Y_l\right)$ e usando a desigualdade triangular com a equicontinuidade temos que F é uniformemente contínua, portanto $\widetilde{f_l}$ é convergente. □

2.4 Compacidade de Classes de Espaços Métricos

Apresentaremos nesta seção resultados de finitude topologica para classes de variedades riemannianas.

Definição 2.4.1. *Se* X *é um espaço métrico compacto definimos a capacidade e a cobertura de* X *como*

$$\begin{aligned} Cap_X\left(\epsilon\right) &= \text{máximo do número de } \frac{\epsilon}{2}-\text{bolas disjuntas em } X; \\ Cob_X\left(\epsilon\right) &= \text{mínimo do número de } \epsilon-\text{bolas que cobrem } X. \end{aligned}$$

Veja que $Cob\left(\epsilon\right) \leq Cap\left(\epsilon\right)$ pois se $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$ são bolas disjuntas e $B\left(x_i, \epsilon\right)$ não cobrem X, então $B\left(x, \frac{\epsilon}{2}\right)$, onde $x \in X - \cup B\left(x_i, \epsilon\right)$, é disjunta das bolas $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$. Logo as $B\left(x_i, \frac{\epsilon}{2}\right)$ não podem ser maximais.

Observe que se dois espaços compactos X e Y satisfazem $d_{G-H}(X, Y) < \delta$, então pela desigualdade triangular:

$$Cob_X\left(\epsilon + 2\delta\right) \leq Cob_Y\left(\epsilon\right) \text{ e } Cap_X\left(\epsilon\right) \geq Cap_Y\left(\epsilon + 2\delta\right)$$

Proposição 2.4.2. *Para uma classe* $\mathcal{C} \subset \left(\mathcal{M}, d_{G-H}\right)$ *temos as seguintes equivalências:*

1. $\mathcal{C}$ *é precompacto, ou seja, toda sequência em* $\mathcal{C}$ *tem uma subsequência convergente em* $\left(\mathcal{M}, d_{G-H}\right)$.

2. *Existe uma função* $N_1 : (0, \alpha) \to (0, \infty)$ *tal que* $Cap_X\left(\epsilon\right) \leq N_1\left(\epsilon\right)$ *para todo* $X \in \mathcal{C}$.

3. *Existe uma função* $N_2 : (0, \alpha) \to (0, \infty)$ *tal que* $Cob_X\left(\epsilon\right) \leq N_2\left(\epsilon\right)$ *para todo* $X \in \mathcal{C}$.

Demonstração. $(1) \Rightarrow (2)$: Como $\mathcal{C}$ é precompacto, para todo $\epsilon > 0$ existem $X_1, ..., X_k \in \mathcal{C}$ tais que $d_{G-H}(X, X_i) < \frac{\epsilon}{4}$ para todo $X \in \mathcal{C}$ e algum $i \in \{1, ..., k\}$. Assim temos

$$Cap_X(\epsilon) \leq Cap_{X_i}\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \leq \max_i \left\{Cap_{X_i}\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right\}$$

Logo temos um limitante para $Cap_X(\epsilon)$ para cada $\epsilon > 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Basta tomar $N_2 = N_1$.

$(3) \Rightarrow (1)$: É suficiente mostrar que $\mathcal{C}$ é totalmente limitado. Como $Cob_X\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \leq N_2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$, temos que todo $X \in \mathcal{C}$ está $\frac{\epsilon}{2}$ próximo de um subconjunto finito com no máximo $N_2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. Usando a métrica induzida temos que esses subconjuntos finitos são espaços métricos finitos.

Além disso como diam $X \leq 2\delta \cdot Cob_X(\delta)$ para qualquer δ, os espaços métricos finitos não possuem nenhuma distância maior que $\epsilon \cdot N_2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$. A métrica nesses espaços finitos então são matrizes $(d_{ij}), 1 \leq i, j \leq N_2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$, onde $d_{ij} \in \left[0, \epsilon \cdot N_2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right]$.

Logo existe um número finito $X_1, ..., X_k$ de espaços cujas matrizes estão $\frac{\epsilon}{2}$ próximas para qualquer matriz dos espaços métricos finitos. Portanto todos espaços de $\mathcal{C}$ estão $\frac{\epsilon}{2}$ próximos de algum dos espaços $X_1, ..., X_k$, assim $\mathcal{C}$ é totalmente limitado. □

Corolário 2.4.3. *Uma coleção $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_*$ é precompacta se e somente se para cada $R > 0$ a coleção*

$$\{\, B(x, R) \mid B(x, R) \subset (X, x) \in \mathcal{C} \,\} \subset (\mathcal{M}, d_{G-H})$$

é precompacta.

Corolário 2.4.4. *Para qualquer inteiro $n \geq 2$, $k \in \mathbb{R}$, e $D > 0$ temos que as seguintes classes são precompactas:*

1. *A coleção das n-variedades Riemannianas fechadas com* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)k$ *e diâmetro menor ou igual a D.*

2. *A coleção das n-variedades Riemannianas completas com* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)k$.

Demonstração. Basta mostrar (2) pois (1) é um caso particular. Dado $R > 0$, temos que mostrar que não há muitas bolas disjuntas dentro de $B(x, R) \subset M$. Para ver isso, suponha que $B(x_1, \epsilon), ..., B(x_l, \epsilon) \subset B(x, R)$ são disjuntos. Se $B(x_i, \epsilon)$ é a bola com menor volume, temos

$$l \leq \frac{\mathrm{vol}(B(x, R))}{\mathrm{vol}(B(x_i, \epsilon))} \leq \frac{\mathrm{vol}(B(x_i, 2R))}{\mathrm{vol}(B(x_i, \epsilon))} \leq \frac{v(n, k, 2R)}{v(n, k, \epsilon)}$$

onde a última desigualdade é consequência da desigualdade de Bishop-Gromov 1.7.1. Isto nos dá o limitante desejado. □

Lema 2.4.5. *Seja $\mathcal{C}(N(\epsilon))$ a coleção dos espaços métricos tal que $Cob_X(\epsilon) \leq N(\epsilon)$. Se N é contínua, então $\mathcal{C}(N(\epsilon))$ é compacto.*

Demonstração. Já se sabe que $\mathcal{C}(N(\epsilon))$ é precompacto, assim basta mostrar que se $X_i \to X$ e $Cob_{X_i}(\epsilon) \le N(\epsilon)$ então $Cob_X(\epsilon) \le N(\epsilon)$. Como temos

$$Cob_X(\epsilon) \le Cob_{X_i}(\epsilon - 2d_{G-H}(X, X_i)) \le N(\epsilon - 2d_{G-H}(X, X_i))$$

e $N(\epsilon - 2d_{G-H}(X, X_i)) \to N(\epsilon)$ se $i \to \infty$, segue o resultado. $\square$

2.5 Teoremas da geometria métrica

Nesta seção introduziremos vários teoremas da geometria métrica que utilizaremos adiante, para isto precisaremos introduzir alguns conceitos novos como a convergência de Gromov-Haussdorff com medida e a distância de Lipschitz entre dois espaços métricos. Não apresentaremos as demonstrações desses teoremas por serem muito grandes, mas citaremos onde as demonstrações destes podem ser encontradas.

Denote por $\mathcal{M}(n, \Lambda, I, D)$ o conjunto das classes de isometria de variedades riemannianas n-dimensionais compactas cujo valor absoluto da curvatura seccional é limitado por Λ^2, raio de injetividade limitado inferiormente por I e diâmetro limitado superiormente por D. O seguinte teorema mostra que esta classe possui uma propriedade semelhante a compacidade na topologia de Gromo-Hausdorff mensurada.

Teorema 2.5.1. *Dada uma sequência $\{(M_i, g_i)\}_{i=1}^{\infty}$ em $\mathcal{M}(n, \Lambda, I, D)$, existe uma subsequência $\{(M_{i'}, g_{i'})\}_{i'=1}^{\infty}$ de $\{(M_i, g_i)\}_{i=1}^{\infty}$, uma variedade suave M_∞ e $C^{1,\alpha}$-difeomorfismos $\Phi_{i'} : M_{i'} \to M_\infty$ $(0 < \alpha < 1)$ tal que o pushforward $\Phi_{i'*}g_{i'}$ da métrica $g_{i'}$ converge a uma métrica g_∞ de classe $C^{1,\alpha}$ na topologia $C^{1,\alpha'}$ $(0 < \alpha' < \alpha)$.*

Demonstração. A demonstração se encontra no artigo de Kasue [23]. $\square$

Tratamos até agora da convergência de Gromov-Hausdorff para o caso de espaços métricos, mas como consideraremos variedades riemannianas como espaços metricos com medida, introduziremos uma topologia que detecta também a medida do espaço métrico.

Definição 2.5.2. *Seja $\mathcal{M}$ a classe dos espaços métricos compactos e seja $\mathcal{MM}$ a classe dos pares (M, μ), onde M é um espaço métrico compacto e μ uma medida de probabilidade.*

Se $\mathcal{A}$ é um conjunto dirigido e $(X_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, uma rede de elementos de $\mathcal{MM}$. Dizemos que (X_α, μ_α) converge a um elemento (X, μ) de $\mathcal{MM}$ com respeito à topologia de Gromov-Hausdorff mensurada, ou simplesmente topologia G-H mensurada, e escrevemos $\lim_{\alpha \in \mathcal{A}}(X_\alpha, \mu_\alpha) = (X, \mu)$ se existem mapas Borel mensuráveis $\psi_\alpha : X_\alpha \to X$ e números positivos ϵ_α tal que

1. $\lim_{\alpha \in \mathcal{A}} \epsilon_\alpha = 0$,
2. *A ϵ_α-vizinhança de $\psi_\alpha(X_\alpha)$ é igual a X,*
3. *Para cada $p, q \in X_\alpha$, temos $|d(\psi_\alpha(p), \psi_\alpha(q)) - d(p, q)| < \epsilon_\alpha$,*
4. *Para cada função contínua f em X temos $\lim_{\alpha \in \mathcal{A}} \int f \circ \psi_\alpha d\mu_\alpha = \int f d\mu$.*

Com esta topologia $\mathcal{MM}$ é um espaço metrizável, separável e completo. Ainda mais, podemos definir a convergência pontuada para espaços pontuados e a convergência de mapas assumindo que estes sejam Borel mensuráveis.

Denote por $\mathcal{M}(n, D)$ o conjunto das classes de isometria de variedades riemannianas n-dimensionais compactas com diametro limitado por D e cujo valor absoluto da curvatura seccional é limitado por 1. Denotaremos o fecho deste conjunto na topologia de Gromov-Hausdorff por $\mathcal{CM}(n, D)$. Denote também por $\mathcal{PM}_n$ o conjunto das variedades riemannianas pontuadas (M, p) de $\mathcal{M}(n, D)$ e seu fecho na topologia de Gromov-Hausdorff pontuada por $\mathcal{CPM}_n$. Denotamos por $\mathcal{M}(n, D, I)$ os elementos de $\mathcal{M}(n, D)$ com raio de injetividade maior que I.

Seja

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}(\mathcal{M}(n, D)) &= \bigcup_{I>0} \mathcal{CM}(n, D, I), \\ \partial\mathcal{M}(n, D) &= \mathcal{CM}(n, D) - \operatorname{Int}(\mathcal{M}(n, D)). \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

$\operatorname{Int}(\mathcal{PM}_n)$ e $\partial\mathcal{PM}_n$ são definidos similarmente.

Gromov, em [21], provou que os elementos de $\operatorname{Int}(\mathcal{PM}_n)$ são variedades. Em geral, elementos de $\partial\mathcal{PM}_n$ possuem singularidades.

Definição 2.5.3. *Dizemos que elementos (X, p_0) e X de $\mathcal{CPM}_n$ e $\mathcal{CM}(n, \infty)$ são suaves se satisfazem o seguinte:*

Para cada ponto $p \in X$, existe uma vizinhança U de p em X, um grupo de Lie compacto G_p e uma representação fiel de G_p no grupo ortogonal, $O(n)$, tal que a componente da identidade de G_p é isomorfa a um toro e que U é homeomorfa a V/G_p para alguma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^m$. Ainda mais, deve existir uma métrica Riemanniana suave G_p-invariante g em V tal que U é isométrico a $(V/G_p, \bar{g})$, onde $\bar{g}$ é a métrica quociente.

Definição 2.5.4. *A distância Lipschitz entre dois espaços métricos X, Y é definida por*

$$d_L(X, Y) = \inf_f \log\left(\max\left\{\operatorname{dil}(f), \operatorname{dil}\left(f^{-1}\right)\right\}\right)$$

onde

$$\operatorname{dil}(f) = \sup_{x,y\in X} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}$$

e o ínfimo varia sobre todos os homeomorfismos bi-Lipschitz entre X e Y.

Usando a topologia da distância de Lipschitz temos o seguinte teorema que nos diz se há muitos elementos suaves em $\mathcal{CPM}_n$.

Teorema 2.5.5. *Elementos suaves são densos em $\mathcal{CPM}_n$ com respeito à distância Lipschitz pontual. Em particular, todo elemento de $\mathcal{CPM}_n$ é homeomorfo a um suave.*

O próximo teorema caracteriza os elementos de $\mathcal{CPM}_n$.

Teorema 2.5.6. *Seja $X \in \mathcal{CPM}_n$. Então existe uma variedade Riemanniana M em que $O(n)$ age como isometrias tal que*

1. X é isométrico a $M/O(n)$. (Seja $P: M \to X$ a projeção.)

2. Para cada ponto $p \in X$ o grupo $\{g \in O(n) \,|\, g(p) = p\}$ é isomorfo a G_p, onde G_p é como na definição anterior.

Ainda mais, se a ação de $O(n)$ na variedade M tem um único tipo de órbita, então X tem a estrutura de uma variedade suave com métrica riemanniana $C^{1,\alpha}$-regular.

Demonstração. As demonstrações de ambos teoremas podem ser encontradas no artigo de Fukaya [16]. □

Seja N um grupo de Lie nilpotente, isto é, a série central decrescente da sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_k]$ se anula. Existe então uma conexão ∇_{can} de TN que é invariante por ações de N tanto a esquerda quanto a direita. Seja Γ um subgrupo discreto de N, logo ∇_{can} induz uma conexão em N/Γ que denotamos pelo mesmo símbolo. Seja Λ um subgrupo finito de $\mathrm{Aut}(N/\Gamma, \nabla_{\mathrm{can}})$, então chamamos $(N/\Gamma)/\Lambda$ uma *variedade infranil.*

Ao estudar o colapso de variedades Riemannianas que convergem na topologia de Gromov-Hausdorff temos o seguinte teorema.

Teorema 2.5.7 (Fukaya)**.** *Suponha que M_i é uma sequência de variedades com* $\mathrm{Diam}(M_i) \leq D$ *e $|\mathrm{Sec}_{M_i}| \leq 1$ que converge para uma variedade suave B. Então, para i grande, existe um fibrado $\pi_i : M_i \to B$ com as seguintes propriedades:*

1. A fibra é difeomorfa a uma variedade infranil F.

2. O grupo estrutural é o grupo de transformações afins $\mathrm{Aff}(F, \nabla_{\mathrm{can}})$.

3. π_i é uma submersão quase Riemanniana, isto é, se $V \in T_pM_i$ é perpendicular às fibras temos

$$1 - \epsilon_i < \frac{g_{M_i}(V,V)}{\pi_i^* g_N(V,V)} < 1 + \epsilon_i,$$

onde $\epsilon_i \to 0$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada nos artigos de Fukaya [17] e [18]. □

Em seguida temos um teorema que garante a existência de métricas próximas a uma métrica innicial. Além de estarem pŕoximas, estas novas métricas possuem conexões de Levi-Civita próximas e limitações nas derivadas de suas curvaturas.

Teorema 2.5.8 (Abresch)**.** *No conjunto das variedades Riemannianas n-dimensionais completas com $|K| \leq 1$, existe para todo $\epsilon > 0$ um operador suavizante, $g \to S_\epsilon(g) = \bar{g}$, tal que*

1. $e^{-\epsilon} g \leq \bar{g} \leq e^{\epsilon} g$,

2. $\left|\nabla - \bar{\nabla}\right| \leq \epsilon$, *3.* $\left|\bar{\nabla}^i \bar{R}\right| \leq A_i(n,\epsilon)$.

Onde $A_i(n,\epsilon)$ é uma constante que depende somente de i, n e ϵ.

Demonstração. A demonstração do teorema se encontra em [1]. □

Recorde que o *raio de conjugação* de uma variedade riemanniana M é o maior raio r que uma bola no espaço tangente T_pM de cada ponto $p \in M$ pode ter tal que o mapa exponencial possua posto máximo nesta bola. Denotamos por $\mathcal{M}(n,r_0)$ as classes de isometria de variedades riemannianas n-dimensionais compactas cujo valor absoluto da curvatura de Ricci é limitado por 1 e com raio de conjugação maior que r_0.

Temos o seguinte resultado de aproximação de métricas para variedades nesta classe.

Teorema 2.5.9. *Existe $T(n,r_0) > 0$ e $C(n,r_0) > 0$ tal que para qualquer variedade $(M,g_0) \in \mathcal{M}(n,r_0)$, o fluxo de Ricci*

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}(g), \quad g(0) = g_0 \tag{2.5.2}$$

tem uma solução suave única $g(t)$ para $0 \leq t \leq T(n,r_0)$ satisfazendo

$$\begin{aligned} |g(t) - g_0| &\leq 4t, \\ |R(g(t))|_\infty &\leq C(n,r_0)\, t^{-1/2}, \\ |\mathrm{Ric}(g(t))|_\infty &\leq 2. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada no artigo de Dai, Wei e Ye [10]. □

Observe que embora não podemos esperar que a curvatura de Ricci de $g(t)$ esteja uniformemente próxima de g_0, usando a segunda equação pode-se mostrar que os limites superiores e inferiores estão arbitrariamente próximos do original quando t tende a 0. Ou seja, se assumirmos que $C_1 < \mathrm{Ric}(g_0) < C_2$, então obtemos uma métrica $g(t)$ satisfazendo $C_1 - Ct^{1/2} < \mathrm{Ric}(g_0) < C_2 + Ct^{1/2}$, onde C é uma constante uniforme. Em particular, métricas curvadas negativamente (ou positivamente) ainda são negativamente (ou positivamente) curvadas depois da suavização.

A seguir apresentamos alguns teoremas de comparação da geometria riemanniana que serão usados nas próximas seções.

O teorema a seguir nos diz que o volume das bolas converge quando a sequência converge na topologia de Gromov-Hausdorff.

Teorema 2.5.10. *Seja $\{(M_i^n, p_i)\}_{i=1}^\infty$ uma sequência de variedades riemannianas completas com $\mathrm{Ric} \geq (n-1)C$ que converge na topologia de Gromov-Hausdorff pontuada a uma variedade riemanniana suave (M^n,p), então para todo $r \geq 0$ temos*

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{Vol}(B(p_i,r)) = \mathrm{Vol}(B(p,r))$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no artigo de Colding [9]. □

Os próximos resultados nos permitem estimar quantidades geométricas, como comprimento de geodésica fechada e raio de injetividade, a partir de cotas no diâmetro, volume e curatura seccional.

Teorema 2.5.11. *Dados $D, V > 0$ e K existe uma constante $c(n, D, V, K) > 0$ tal que se M é uma variedade riemanniana n-dimensional com* $\operatorname{Diam}(M) < D$, $\operatorname{Vol}(M) > V$ *e* $\operatorname{Sec}_M > K$, *então toda geodésica fechada em M tem comprimento maior que $c(n, D, V, K)$.*

Demonstração. A demonstração se encontra no artigo de Cheeger [6]. □

Corolário 2.5.12. *Dados $K, D, V > 0$ existe uma constante $C(n, D, V, K)$ tal que se M é uma variedade riemanniana n-dimensional com* $\operatorname{Diam}(M) < D$, $\operatorname{Vol}(M) > V$ *e* $|\operatorname{Sec}_M| < K$, *então o raio de injetividade de M satisfaz $i(M) > C(n, D, V, K)$.*

Demonstração. A demonstração se encontra no artigo [6]. □

Capítulo 3

Propriedades de variedades com tensor de Bakry-Émery-Ricci limitado

Começaremos este capítulo abordando as propriedades geométricas e topológicas de variedades riemannianas com limitações no tensor de Bakry-Émery-Ricci, assim como é feito em [24]. Em seguida apresentaremos um resultado de Yang ([34]) sobre o crescimento do grupo fundamental de variedades com tensor de Bakry-Émery-Ricci não negativo. Então, veremos um resultado de compacidade de variedades completas obtido por Lopéz e Río em [15]. Por fim, demonstraremos um resultado de Wylie ([33]) que generaliza parte do teorema de Myers para limitações no tensor de Bakry-Émery-Ricci generalizado.

3.1 Consequências topológicas e geométricas para variedades compactas

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana n-dimensional conexa e $\phi \in C^{\infty}(M)$ uma função positiva. Se denotarmos a densidade Riemanniana em (M, g) por $d\mathrm{vol}_M$ temos que $(M, \phi\, d\mathrm{vol}_M)$ é um espaço de medida métrica suave. Temos associado a $(M, \phi\, d\mathrm{vol}_M)$ uma generalização do tensor de Ricci, chamado tensor de Bakry-Émery-Ricci, que é definido da seguinte maneira

$$\mathrm{Ric}_{\phi}^{\infty} = \mathrm{Ric} - \mathrm{Hess}\left(\ln \phi\right).$$

Como iremos estudar limitações neste tensor, é conveniente introduzir um outro tensor, que chamaremos de tensor de q-Bakry-Émery-Ricci, que definimos para $q \in (0, \infty)$ como

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{\phi}^{q} &= \mathrm{Ric}_{\phi}^{\infty} - \frac{1}{q} d\ln\phi \otimes d\ln\phi \\
&= \mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{Hess}\left(\ln\phi\right)}{\phi} + \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{d\phi}{\phi} \otimes \frac{d\phi}{\phi} \\
&= \mathrm{Ric} - q\frac{\mathrm{Hess}\left(\phi^{\frac{1}{q}}\right)}{\phi^{\frac{1}{q}}}.
\end{aligned}$$

Este primeiro resultado nos informa sobre o grupo fundamental de espaços de medida métrica suave compactos com tensor de q-Bakry-Émery-Ricci não negativo e generaliza um resultado de Myers para o caso do tensor de Bakry-Émery-Ricci positivo.

Teorema 3.1.1. *Seja* (M, g, ϕ) *um espaço de medida métrica suave com* M *uma variedade* n *dimensional conexa e fechada. Se* $\mathrm{Ric}_\phi^q \geq r$ *para* $q \in (0, \infty)$ *e* $r \geq 0$*, então* $\pi_1(M)$ *tem um subgrupo abeliano livre, de índice finito e com ordem no máximo* n*. Ainda mais, se* $\mathrm{Ric}_\phi^\infty \geq r$ *e* $r > 0$ *então* $\pi_1(M)$ *é finito.*

Demonstração. Primeiro observe que se $\mathrm{Ric}_\phi^\infty \geq r$ para $r > 0$ então como M é fechada, Ric_ϕ^q é contínua em TM e $\mathrm{Ric}_\phi^q(X, X) \leq \mathrm{Ric}_\phi^p(X, X)$ para $p \geq q \in (0, \infty]$, temos que $\mathrm{Ric}_\phi^q > 0$ para algum $q \in (0, \infty)$ suficientemente grande. Aumentando q se necessário, nós assumimos sem perda de generalidade que q é um inteiro maior que um. Assim é suficiente considerar o caso quando $\mathrm{Ric}_\phi^q \geq r$ para algum inteiro q maior que um.

Dado $i \in \mathbb{N}$, seja $M_i = M \times_{f_i} S^q$ o produto torcido pela função $f_i = \phi^{\frac{1}{q}}/i$. Seja $\pi_M : M_i \to M$ a projeção. Seja X um campo horizontal em M_i e seja U um campo vertical em M_i. Pelo corolário 1.4.8 temos,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ric}_{M_i}(X, X) = \pi_M^*\left(\mathrm{Ric}_M - \frac{q}{\phi^{\frac{1}{q}}}\mathrm{Hess}\left(\phi^{\frac{1}{q}}\right)\right)(X, X),\\
&\mathrm{Ric}_{M_i}(X, U) = 0,\\
&\mathrm{Ric}_{M_i}(U, U) = \pi_{S^q}^*\mathrm{Ric}_{S^q}(U, U) - g_{M_i}(U, U) \cdot \pi_M^*\left(\frac{\Delta\phi^{\frac{1}{q}}}{\phi^{\frac{1}{q}}} + (q-1)\frac{\left|\nabla\phi^{\frac{1}{q}}\right|^2}{\phi^{\frac{2}{q}}}\right).
\end{aligned}$$

Logo se T é um campo em M_i e $\mathcal{H}T$, $\mathcal{V}T$ são suas componentes horizontal e vertical, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_{M_i}(T, T) &= \mathrm{Ric}_{M_i}(\mathcal{H}T, \mathcal{H}T) + \mathrm{Ric}_{M_i}(\mathcal{V}T, \mathcal{V}T)\\
&= \pi_M^*\left(\mathrm{Ric}_M - \frac{q}{\phi^{\frac{1}{q}}}\mathrm{Hess}\left(\phi^{\frac{1}{q}}\right)\right)(\mathcal{H}T, \mathcal{H}T)\\
&\qquad + \pi_{S^q}^*\mathrm{Ric}_{S^q}(\mathcal{V}T, \mathcal{V}T) - g_{M_i}(\mathcal{V}T, \mathcal{V}T) \cdot \pi_M^*\left(\frac{\Delta\phi^{\frac{1}{q}}}{\phi^{\frac{1}{q}}} + (q-1)\frac{\left|\nabla\phi^{\frac{1}{q}}\right|^2}{\phi^{\frac{2}{q}}}\right)\\
&\geq r\pi_M^* g_M(\mathcal{H}T, \mathcal{H}T)\\
&\qquad + \pi_{S^q}^* g^{S^q}(\mathcal{V}T, \mathcal{V}T) - g_{M_i}(\mathcal{V}T, \mathcal{V}T) \cdot \pi_M^*\left(\frac{\Delta\phi^{\frac{1}{q}}}{\phi^{\frac{1}{q}}} + (q-1)\frac{\left|\nabla\phi^{\frac{1}{q}}\right|^2}{\phi^{\frac{2}{q}}}\right)\\
&= r g_{M_i}(\mathcal{H}T, \mathcal{H}T) + \pi_M^*\left[\left(\frac{i}{\phi^{\frac{1}{q}}}\right)^2 - \left(\frac{\Delta\phi^{\frac{1}{q}}}{\phi^{\frac{1}{q}}} + (q-1)\frac{\left|\nabla\phi^{\frac{1}{q}}\right|^2}{\phi^{\frac{2}{q}}}\right)\right] \cdot g_{M_i}(\mathcal{V}T, \mathcal{V}T)
\end{aligned}$$

Como M_i é compacta temos que $\left(\frac{\Delta\phi^{\frac{1}{q}}}{\phi^{\frac{1}{q}}}+(q-1)\frac{\left|\nabla\phi^{\frac{1}{q}}\right|^2}{\phi^{\frac{2}{q}}}\right)$ e $\phi^{\frac{1}{q}}$ são limitados, logo para i suficientemente grande temos $\left[\left(\frac{i}{\phi^{\frac{1}{q}}}\right)^2-\left(\frac{\Delta\phi^{\frac{1}{q}}}{\phi^{\frac{1}{q}}}+(q-1)\frac{\left|\nabla\phi^{\frac{1}{q}}\right|^2}{\phi^{\frac{1}{q}}{}^2}\right)\right]\geq r$. Então $\mathrm{Ric}_\phi^q\geq r$ implica que $\mathrm{Ric}^{M_i}\geq r$ para $r\geq 0$.

Pelo teorema de Cheeger-Gromoll 1.7.4, existe um $k\geq 0$ tal que $\pi_1(M)\cong\pi_1(M\times S^q)=\pi_1(M_i)$ tem um subgrupo abeliano livre, com índice finito de ordem k e o recobrimento universal $\widetilde{M}\times S^q$ tem uma separação isométrica como $\mathbb{R}^k\times Y^{n+q-k}$, onde Y é fechado e simplesmente conexo. Considerando os grupos de cohomologia de $\widetilde{M}\times S^q\cong\mathbb{R}^k\times Y^{n+q-k}$ e utilizando a fórmula de Künneth para a cohomologia do produto temos

$$\begin{aligned}
q+\max\left\{j:H^j\left(\widetilde{M};\mathbb{Z}\right)\neq 0\right\}&=\max\left\{j:\bigoplus_{l=0}^{j}H^l\left(\widetilde{M};\mathbb{Z}\right)\otimes H^{j-l}\left(S^q;\mathbb{Z}\right)\neq 0\right\}\\
&=\max\left\{j:H^j\left(\widetilde{M}\times S^q;\mathbb{Z}\right)\neq 0\right\}\\
&=\max\left\{j:H^j\left(\mathbb{R}^k\times Y^{n+q-k};\mathbb{Z}\right)\neq 0\right\}\\
&=\max\left\{j:\bigoplus_{l=0}^{j}H^l\left(\mathbb{R}^k;\mathbb{Z}\right)\otimes H^{j-l}\left(Y^{n+q-k};\mathbb{Z}\right)\neq 0\right\}\\
&=\max\left\{j:H^j\left(Y^{n+q-k};\mathbb{Z}\right)\neq 0\right\}\\
&=n+q-k
\end{aligned}$$

Onde a última igualdade é consequência de Y ser fechada. Então

$$k=n-\max\left\{j:H^j\left(\widetilde{M};\mathbb{Z}\right)\neq 0\right\}\leq n,$$

o que prova a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte do teorema vemos que se r é positivo temos pelo corolário do teorema de Myers 1.7.3 que $\pi_1(M)\cong\pi_1(M\times S^q)=\pi_1(M_i)$ é finito. $\square$

Dado um espaço de medida métrica suave (M,g,ϕ) temos associado o espaço vetorial com produto interno $(\Omega^*(M),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ tal que

$$\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle=\int_M\langle\alpha,\beta\rangle\,\phi\,d\mathrm{vol}_M.$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é a métrica de $\Lambda^*(M)$ induzida por g.

Como $d:\Omega^*(M)\to\Omega^*(M)$ é um operador linear temos associado o operador adjunto $\tilde{\delta}$ em relação a $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$.

Assim se $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$ e $\beta \in \Omega^k(M)$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle\langle d\alpha, \beta\rangle\rangle &= \int_M \langle d\alpha, \phi\,\beta\rangle \,\mathrm{dvol}_M \\
&= \int_M \langle \alpha, \delta(\phi\wedge\beta)\rangle \,\mathrm{dvol}_M \\
&= \int_M \left\langle \alpha, (-1)^{nk+n+1} \star d \star (\phi\wedge\beta)\right\rangle \mathrm{dvol}_M \\
&= \int_M \left\langle \alpha, (-1)^{nk+n+1} \star (d\phi\wedge\beta + \phi\wedge d(\star\beta))\right\rangle \mathrm{dvol}_M.
\end{aligned}$$

Usando o lema 1.6.6 temos

$$\begin{aligned}
\langle\langle d\alpha, \beta\rangle\rangle &= \int_M \left\langle \alpha, \phi\left(-\frac{1}{\phi} i_{\nabla\phi}\beta + \delta\beta\right)\right\rangle \mathrm{dvol}_M \\
&= \int_M \langle \alpha, \phi\,(\delta - i_{\nabla \ln\phi})\,\beta\rangle \,\mathrm{dvol}_M \\
&= \langle\langle \alpha, (\delta - i_{\nabla\ln\phi})\,\beta\rangle\rangle\,.
\end{aligned}$$

Portanto temos que

$$\widetilde{\delta} = \delta - i_{\nabla\ln\phi}. \tag{3.1.1}$$

Tome $\Delta = d\delta + \delta d$ e $\widetilde{\Delta} = d\widetilde{\delta} + \widetilde{\delta} d$. Então

$$\tilde{\Delta} = \Delta - d i_{\nabla\ln\phi} - i_{\nabla\ln\phi} d = \Delta - \mathcal{L}_{\nabla\ln\phi}. \tag{3.1.2}$$

A identidade de Weitzenböck 1.6.10 diz que se ω é uma 1-forma então vale a seguinte igualdade de funções em M:

$$\frac{1}{2}\delta d\,\langle\omega,\omega\rangle = \frac{1}{2}\Delta\,\langle\omega,\omega\rangle = \langle\omega,\Delta\omega\rangle - \langle\nabla\omega,\nabla\omega\rangle - \langle\omega,\mathrm{Ric}\omega\rangle\,. \tag{3.1.3}$$

onde $\mathrm{Ric}\omega = \mathrm{Ric}\left(\omega^\sharp,\cdot\right)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} i_{\nabla\ln\phi} d\,\langle\omega,\omega\rangle &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla\ln\phi}\,\langle\omega,\omega\rangle \\
&= \frac{1}{2}\nabla\ln\phi\left\langle\omega^\sharp,\omega^\sharp\right\rangle \\
&= \left\langle\left(\nabla_{\nabla\ln\phi}\omega\right)^\sharp,\omega^\sharp\right\rangle \\
&= \langle\nabla_{\nabla\ln\phi}\omega,\omega\rangle
\end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\nabla\ln\phi}\omega(X) &= \nabla\ln\phi\,(\omega(X)) - \omega\left(\mathcal{L}_{\nabla\ln\phi}X\right) \\
&= \nabla_{\nabla\ln\phi}(\omega(X)) - \omega\left(\nabla_{\nabla\ln\phi}X - \nabla_X\nabla\ln\phi\right) \\
&= \nabla_{\nabla\ln\phi}\omega(X) + \omega\left(\nabla_X\nabla\ln\phi\right).
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{1}{2}i_{\nabla\ln\phi}d\left\langle\omega,\omega\right\rangle=\left\langle\omega,\mathcal{L}_{\nabla\ln\phi}\omega\right\rangle-\left\langle\omega,\mathrm{Hess}\left(\ln\phi\right)\omega\right\rangle. \tag{3.1.4}$$

onde $\mathrm{Hess}\left(\ln\phi\right)\omega=\mathrm{Hess}\left(\ln\phi\right)\left\langle\omega^{\sharp},\cdot\right\rangle$.

Subtraindo (3.1.4) de (3.1.3) e usando as equações (3.1.1), (3.1.2) temos

$$\frac{1}{2}\widetilde{\delta}d\left\langle\omega,\omega\right\rangle=\widetilde{\Delta}\left\langle\omega,\omega\right\rangle=\left\langle\omega,\widetilde{\Delta}\omega\right\rangle-\left\langle\nabla\omega,\nabla\omega\right\rangle-\left\langle\omega,\mathrm{Ric}_{\phi}^{\infty}\omega\right\rangle. \tag{3.1.5}$$

onde $\mathrm{Ric}_{\phi}^{q}\omega=\mathrm{Ric}_{\phi}^{q}\left(\omega^{\sharp},\cdot\right)$ para $q\in(0,\infty]$.

Multiplicando (3.1.5) por ϕ e integrando sobre M, obtemos

$$0=\left\langle\left\langle\omega,\widetilde{\Delta}\omega\right\rangle\right\rangle-\left\langle\left\langle\nabla\omega,\nabla\omega\right\rangle\right\rangle-\left\langle\left\langle\omega,\mathrm{Ric}_{\phi}^{\infty}\omega\right\rangle\right\rangle,$$

ou

$$\left\langle\left\langle d\omega,d\omega\right\rangle\right\rangle+\left\langle\left\langle\widetilde{\delta}\omega,\widetilde{\delta}\omega\right\rangle\right\rangle-\left\langle\left\langle\nabla\omega,\nabla\omega\right\rangle\right\rangle=\left\langle\left\langle\omega,\mathrm{Ric}_{\phi}^{\infty}\omega\right\rangle\right\rangle. \tag{3.1.6}$$

Usando esta equação obtemos o seguinte teorema o qual mostra que quando o tensor de Bakry-Émery-Ricci é não negativo, a cohomologia da variedade M pode ser obtida conhecendo somente o espaço das 1-formas paralelas em (M,g) que se anulam aplicadas em $\nabla\phi$.

Teorema 3.1.2. *Seja (M,g,ϕ) um espaço de medida métrica suave tal que M é conexa, fechada e $\mathrm{Ric}_{\phi}^{\infty}\geq 0$. Então $H^{1}\left(M;\mathbb{R}\right)$ é isomorfo ao espaço linear das 1-formas paralelas em M que aplicadas ao campo $\nabla\phi$ se anulam identicamente. Logo $\mathrm{b}_{1}\left(M\right)\leq n$, valendo a igualdade se e somente se M é um toro flat e ϕ é constante.*

Demonstração. Podemos aplicar teoria elíptica usual ao complexo de de Rham, com produto interno $\left\langle\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle\right\rangle$, para obter um isomorfismo

$$H^{*}\left(M;\mathbb{R}\right)\cong\left\{\omega\in\Omega^{*}\left(M\right):d\omega=\widetilde{\delta}\omega=0\right\}.$$

Se $\mathrm{Ric}_{\phi}^{\infty}\geq 0$ e uma 1-forma ω satisfaz $d\omega=\widetilde{\delta}\omega=0$, então (3.1.6) implica que $\nabla\omega=0$. Logo pela equação (1.6.4) temos $\delta\omega=0$. Como $\widetilde{\delta}\omega=0$, a equação (3.1.1) implica que $\omega\left(\nabla\phi\right)=0$.

Reciprocamente, se $\omega\left(\nabla\phi\right)=0$ então $i_{\nabla\ln\phi}\omega=0$. Como $\nabla\omega=0$ temos pelas equações (1.6.1) e (1.6.4) que $d\omega=0$ e $\widetilde{\delta}\omega=0$. Isto prova o isomorfismo do teorema.

Se $\mathrm{b}_{1}\left(M\right)=n$ então há n 1-formas paralelas linearmente independentes em M que aniquilam $\nabla\phi$. Tomando os campos duais a estas formas temos n campos linearmente independentes paralelos. Logo ao calcular a curvatura temos que esta é nula, e portanto M é uma variedade flat. Segue do teorema de Bieberbach 1.7.5 que M é um quociente finito de um toro flat. Como as formas paralelas em M aniquilam $\nabla\phi$, ϕ deve ser constante. Isto prova o teorema. □

Se $p\in M$ e $\{e_{i}\}$ é o referencial local com dual $\{\eta_{i}\}$ dado pelas coordenadas normais, temos em p que

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla\omega, \nabla\omega\rangle &= \left\langle \sum_{i,j} \nabla_i\omega^j \eta_i \otimes \eta_j, \sum_{k,l} \nabla_k\omega^l \eta_k \otimes \eta_l \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left(\nabla_i\omega^j\right)^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle d\omega, d\omega\rangle &= \left\langle \sum_{i} \eta_i \wedge \nabla_{e_i}\omega, \sum_{j} \eta_j \wedge \nabla_{e_j}\omega \right\rangle \\
&= \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(\nabla_i\omega^j - \nabla_j\omega^i\right)^2,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g, \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g\rangle &= \left\langle \sum_{i,j} \left(\nabla_i\omega^j + \nabla_j\omega^i\right) \eta_i \otimes \eta_j, \sum_{k,l} \left(\nabla_k\omega^l + \nabla_l\omega^k\right) \eta_k \otimes \eta_l \right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left(\nabla_i\omega^j + \nabla_j\omega^i\right)^2.
\end{aligned}
$$

Logo temos pontualmente que

$$
\langle d\omega, d\omega\rangle + \langle \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g, \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g\rangle = 2\left\langle \nabla\omega, \nabla\omega\right\rangle.
$$

Assim pela equação (3.1.6) temos

$$
\langle\langle \nabla\omega, \nabla\omega\rangle\rangle + \left\langle\left\langle \widetilde{\delta}\omega, \widetilde{\delta}\omega\right\rangle\right\rangle - \left\langle\left\langle \omega, \mathrm{Ric}_\phi^\infty \omega\right\rangle\right\rangle = \langle\langle \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g, \mathcal{L}_{\omega^\sharp} g\rangle\rangle. \tag{3.1.7}
$$

Usando esta identidade temos um teorema que caracteriza os campos de Killing em (M, g) para o caso em que o tensor de Bakry-Émery-Ricci é não positivo e generaliza um resultado de Bochner sobre o grupo de isometria de (M, g) para o caso do tensor de Bakry-Émery-Ricci.

Teorema 3.1.3. *Seja (M, g, ϕ) é um espaço de medida métrica suave tal que M é conexa, fechada e $\mathrm{Ric}_\phi^\infty \leq 0$. Então todo campo vetorial de Killing é paralelo e se anula aplicado em ϕ. Ainda mais, se $\mathrm{Ric}_\phi^\infty < 0$, então o grupo de isometria de (M, g) é finito.*

Demonstração. Se $\mathrm{Ric}_\phi^\infty \leq 0$ e $\mathcal{L}_V g = 0$ então (3.1.7) implica que $\nabla V^\flat = \widetilde{\delta} V^\flat = 0$. Por (1.6.4) temos $\delta V^\flat = 0$, obtemos que $V\phi = 0$. Isto prova a primeira parte.

Pelo teorema de Myers-Steenrod 1.7.6sabemos que $\mathrm{Iso}\,(M, g)$ é um grupo de Lie compacto cuja álgebra de Lie podemos identificar com os campos de Killing globais de (M, g). Se $\mathrm{Ric}_\phi^\infty < 0$ e V é um campo de Killing global em (M, g), então tomando $\omega = V^\flat$, (3.1.7) implica que $V = 0$. Logo o grupo $\mathrm{Iso}\,(M, g)$ é discreto e, como é compacto, deve ser finito. Isto prova o resto do teorema. □

3.2 Crescimento polinomial do grupo fundamental

Dado um grupo G e um subgrupo H finitamente gerado, com geradores especificados $S = \{h_1, ..., h_k\}$. Defina $\phi_S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a *função crescimento* de H com respeito aos geradores $S = \{h_1, ..., h_k\}$ para G como

$$\phi_S(n) = \#\left\{h_{i_1}...h_{i_l} \in H : h_{i_1}, ..., h_{i_l} \in S \cup S^{-1} \; e \; l \leq n\right\}$$

onde $S^{-1} = \left\{h_1^{-1}, ..., h_k^{-1}\right\}$.

Se existem constantes c, k tal que $\phi(n) \leq cn^k$ para todo n, então dizemos que H tem *crescimento polinomial*. O número $\inf\left\{k : \phi(n) \leq cn^k, c \in \mathbb{R}\right\}$ é dito *grau* do crescimento polinomial. Embora ϕ_S claramente dependa de quais são os geradores de H, escreveremos somente ϕ quando o conjunto S é subentendido.

Para uma função $f \in C^\infty(M)$ denotaremos por Ric_f o tensor de Bakry-Émery-Ricci correspondente a $\phi = e^{-f}$.

Lema 3.2.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa satisfazendo $\mathrm{Ric}_f \geq 0$ para $f \in C^\infty(M)$. Suponha que $|f| \leq k$, então para r_1, r_2 positivos,*

$$J(r_2, \theta) \leq e^{6k}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n-1} J(r_1, \theta) \tag{3.2.1}$$

onde $J(r, \theta) = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}$ é o elemento de área da esfera geodésica $\partial B(p, r)$ com raio r centrada em p.

Demonstração. Fixe $p \in M$ como um ponto base e tome $r(\cdot) = d(p, \cdot)$, a função distância. Para qualquer $x \in M$, seja $\gamma : [0, r] \to M$ uma geodésica minimal de p a x parametrizada por comprimento de arco. Sejam $\{E_i(s)\}_{i=1}^{n-1}$ campos vetoriais ortonormais paralelos ao longo de γ que são ortogonais a γ'. Construindo campos vetoriais $\left\{X_i(s) = \frac{s}{r}E_i(s)\right\}_{i=1}^{n-1}$ ao longo de γ, pela fórmula da segunda variação, temos

$$\begin{aligned}
\Delta r(x) &\leq \int_0^r \sum_{i=1}^{n-1}\left(|\nabla_{\gamma'} X_i|^2 - \langle R(X_i, \gamma')\gamma, X_i\rangle\right) ds \\
&= \int_0^r \left(\frac{n-1}{r^2} - \frac{s^2}{r^2}\mathrm{Ric}(\gamma', \gamma')\right) ds \\
&\leq \frac{n-1}{r} + \int_0^r \frac{s^2}{r^2}\mathrm{Hess}(f)(\gamma', \gamma')\, ds \\
&= \frac{n-1}{r} + \frac{1}{r^2}\int_0^r s^2 \frac{d^2}{ds^2}(f \circ \gamma)\, ds \\
&= \frac{n-1}{r} + \langle \nabla f, \gamma'\rangle(x) - \frac{2}{r^2}\int_0^r s\frac{d}{ds}(f \circ \gamma)\, ds \\
&= \frac{n-1}{r} + \langle \nabla f, \gamma'\rangle(x) - \frac{2}{r}f(x) + \frac{2}{r^2}\int_0^r (f \circ \gamma)\, ds.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Considere o sistema de coordenadas polares (r, θ), pelo Lema de Gauss temos

$$dz_M^2 = dr^2 + g_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta, \quad \alpha, \beta = 2, ..., n.$$

Temos então

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln J \left(r, \theta \right) \right) \frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{\partial B_p(r)}.$$

Logo,

$$\Delta r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\ln J \left(r, \theta \right) \right). \tag{3.2.3}$$

em $\exp_p \left(\Sigma \left(p \right) \right) \setminus \{p\}$.

Combinando (3.2.2) e (3.2.3), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\ln J \left(r, \theta \right) \right) \leq \frac{n-1}{r} + \langle \nabla f, \gamma' \rangle - \frac{2}{r} f + \frac{2}{r^2} \int_0^r \left(f \circ \gamma \right) ds.$$

Integrando de r_1 positivo a r_2, junto com $|f| \leq k$, temos

$$\begin{aligned}
\ln \left(\frac{J \left(r_2, \theta \right)}{J \left(r_1, \theta \right)} \right) &\leq \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{n-1} + f|_{r_1}^{r_2} + 2 \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r f \left(s \right) ds - \frac{1}{r} f \left(r \right) \right) dr \\
&= \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{n-1} + f|_{r_1}^{r_2} - \left(\frac{2}{r} \int_0^r f ds \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} + 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} f dr - 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} f dr \\
&= \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{n-1} + f|_{r_1}^{r_2} - \left(\frac{2}{r} \int_0^r f ds \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} \\
&\leq \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{n-1} + 6k.
\end{aligned}$$

Obtemos o resultado ao aplicar a exponencial. □

Seja $V \left(B \left(p, r \right) \right)$ o volume da bola geodésica $B \left(p, r \right)$. Nós obtemos o seguinte teorema de comparação de volume:

Teorema 3.2.2. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana completa satisfazendo* $\mathrm{Ric}_f \geq 0$ *para* $f \in C^\infty \left(M \right)$. *Suponha que* $|f| \leq k$, *então para* $0 < R_1 \leq R_2$,

$$\frac{V \left(B \left(p, R_2 \right) \right)}{V \left(B \left(p, R_1 \right) \right)} \leq e^{6k} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^n.$$

Demonstração. Integrando (3.2.1) sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ com respeito a θ, obtemos

$$r_1^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} J \left(r_2, \theta \right) d\theta \leq e^{6k} r_2^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} J \left(r_1, \theta \right) d\theta.$$

Integrando de 0 a R_1 com respeito a r_1, obtemos

$$\frac{R_1^n}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} J \left(r_2, \theta \right) d\theta \leq e^{6k} r_2^{n-1} V \left(B \left(p, R_1 \right) \right).$$

Integrando de 0 a R_2 com respeito a r_2, temos

$$\frac{R_1^n}{n} V\left(B\left(p, R_2\right)\right) \leq e^{6k} \frac{R_2^n}{n} V\left(B\left(p, R_1\right)\right).$$

Isto prova o teorema. $\square$

Usando esta comparação de volume podemos estimar o crescimento do grupo fundamental da variedade. A seguir temos uma estimativa obtida por Yang.

Teorema 3.2.3 (Yang)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa com*

$$\operatorname{Ric}_f \geq 0 \tag{3.2.4}$$

para alguma $f \in C^{\infty}(M)$ tal que $|f| \leq k$ para alguma constante k. Então qualquer subgrupo finitamente gerado H do grupo fundamental de M tem crescimento polinomial de grau $\leq n$. Ou seja, a função crescimento de H satisfaz $\phi(x) \leq$ constante $\cdot\, x^n$.

Demonstração. Seja $\widetilde{M}$ o recobrimento universal de M com métrica induzida por g. Então $\widetilde{M}$ satisfaz (3.2.4) com função potencial $\tilde{f}$, o pullback de f. Fixe um ponto $p \in \widetilde{M}$. Identificamos $\pi_1(M)$ com o grupo de todas as transformações de recobrimento de $\widetilde{M}$ sobre M. Seja $\tilde{h}_i : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ a transformação de recobrimento correspondente ao gerador especificado h_i de H $(i = 1, ..., k)$. Tome $\mu = \max_i \{d(p, h_i(p))\}$. Note que, para qualquer $x \in \mathbb{Z}^+$, $B(p, \mu x)$ contém ao menos $\phi(x)$ pontos distintos da forma $g(p)$ com $g \in \pi_1(M)$.

Escolha $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente para que a bola geodésica $B(p, \epsilon)$ seja disjunta de $g(B(p, \epsilon))$ para qualquer $g \in \pi_1(M) \setminus \{1\}$. Então temos

$$\phi(x) V(B(p, \epsilon)) \leq V(B(p, \mu x + \epsilon))$$

Aplicando Teorema 3.2.2 com $R_1 = \epsilon$ e $R_2 = \mu x + \epsilon$, obtemos

$$\phi(x) \leq e^{6k} \left(\frac{\mu x + \epsilon}{\epsilon}\right)^n$$

que implica que $\phi(x) \leq cx^n$ para c suficientemente grande. $\square$

3.3 Compacidade

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) definimos o *fibrado tangente unitário* SM por

$$SM = \{X \in TM : \|X\| = 1\}.$$

Além disso definimos para $p \in M$ a *esfera tangente unitária* como $S_pM = T_pM \cap SM$.

Observe que temos em SM a restrição da projeção de TM (que denotaremos por π), sendo assim (SM, M, π) é um fibrado esférico cujas fibras são difeomorfas à esfera S^{n-1}.

Se $X \in SM$ definimos a função $\sigma : SM \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ como

$$\sigma(X) = \sup_{\mathbb{R}} \left\{ t : d\left(\pi(X), \exp_p(tX)\right) = t \right\}.$$

Para $p \in M$ definimos o conjunto

$$\tilde{C}(p) = \{\sigma(X) \cdot X \in T_pM : X \in S_pM \text{ e } \sigma(X) < \infty\}$$

chamado *cut locus tangencial* de p. Sua imagem por $\exp_p$ é chamada de *cut locus* de p e é denotada por $C(p)$.

Para demonstrar o teorema principal desta seção precisaremos conhecer quando uma variedade é compacta. Para isso temos os lemas a seguir que garantem compacidade sob certas hipóteses. Mas primeiro precisamos do seguinte resultado:

Lema 3.3.1. *O mapa $\sigma : SM \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ é contínuo.*

Demonstração. Seja $\{X_n\}$ uma sequência em SM com limite X. Podemos assumir que a sequência $\{s_n = \sigma(X_n)\}$ possui um limite s^* no espaço compacto $\mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Queremos derivar uma contradição de $s^* \neq \sigma(X) = s$.

Considere primeiro o caso $s^* < s$. Se $\pi(X_n) = p_n$, $\pi(X) = p = \lim p_n$ podemos escolher $\eta > 0$ tal que $s^* + \eta < s$. Para n grande, a geodésica $\gamma_{X_n}\big| [0, s^* + \eta]$ de p_n a q_n não será uma curva minimizante entre seu pontos finais. Logo, geodésicas minimizantes de p_n a q_n terão direções iniciais $\tilde{X}_n \neq X_n$, $\left|\tilde{X}_n\right| = 1$. Podemos assumir que $\lim \tilde{X}_n = \tilde{X}$ e $\lim q_n = q$ existe. Afirmamos que $\tilde{X} \neq X$.

De fato, como $\gamma_X\big| [0, s]$ não contém ponto conjugado em seu interior, o mapa

$$\pi_M \times \exp : TM \to M \times M,$$

é de posto máximo no segmento

$$[0, s^* + \eta] \cdot X = \{t \cdot X / 0 \leq t \leq s^* + \eta\} \subset TM.$$

Ainda mais, ele é injetivo. Pela suavidade do mapa o mesmo é válido para uma vizinhança apropriada de $[0, s^* + \eta] \cdot X$ em TM.

Se $\tilde{X} = X$, os conjuntos $[0, s^* + \eta] \cdot \tilde{X}_n$ e $[0, s^* + \eta] \cdot X_n$ pertencem a esta vizinhança, para n grande. Mas os elementos $d(p_n, q_n) \cdot \tilde{X}_n$ e $(s^* + \eta) \cdot X_n$ possuem mesma imagem (p_n, q_n) sobre $\pi_M \times \exp$, uma contradição.

Assim, $\tilde{X} \neq X$, logo $\gamma_{\tilde{X}}\big| [0, d(p, q)]$ é uma geodésica minimizante de p a $q = \gamma_X(s^* + \eta)$, diferente de $\gamma_X\big| [0, s^* + \eta]$, uma contradição à definição de $s = \sigma(X) > s^* + \eta$.

Assuma agora que $s < s^*$. Escolha $\eta > 0$ com $s + \eta < s^*$. Então, para n grande, $\gamma_{X_n}\big| [0, s + \eta]$ será minimizante entre seus pontos finais p_n e q_n. De $\lim p_n = p$, $\lim q_n = q$ e $d(p_n, q_n) = s + \eta$ segue $d(p, q) = s + \eta = L\left(\gamma_X\big| [0, s + n]\right)$. Isto é, $\gamma_X\big| [0, s + \eta]$ é uma geodésica minimizante de p a q, em contradição com a definição de s. $\square$

Usando que σ é contínua, temos o seguinte lema sobre compacidade:

Lema 3.3.2. *Se existe $p \in M$ tal que todo raio geodésico saindo de p tem um ponto conjugado a p, então M é compacta.*

Demonstração. Pelo teorema de Hopf-Rinow 1.5.1 sabemos que todos os pontos de uma variedade completa podem ser ligados por geodésicas minimizantes. Seja $A_p \subset T_pM$ o conjunto dos primeiros pontos conjugados dos raios de T_pM. Se A_p é limitado, então o comprimento das geodésicas minimizantes é limitado, assim temos que M é limitada e portanto compacta. Logo, mostraremos que A_p é limitado.

Se S_pM é o conjunto dos vetores unitários de T_pM, defina $f : S_pM \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{\infty\}$ como $f(v) = \sigma(v)$. Pela hipótese temos que $f(S_pM) \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$, e pelo lema anterior f é contínua. Logo $\{\|a\| : a \in A_p\} = f(S_pM)$ é compacto em $\mathbb{R}^{\geq 0}$ e consequentemente A_p é limitado. □

Agora podemos estudar compacidade estudando os pontos conjugados de raios geodésicos. Para estudar a existência de tais pontos precisaremos da seguinte definição:

Definição 3.3.3. *Uma equação diferencial do tipo Jacobi,*

$$x'' + r(t)\,x = 0, \tag{3.3.1}$$

onde $r(t)$ é contínua em um intervalo I, é dita conjugada em I se existe uma solução não trivial $\phi(t)$ em I que se anula em pelo menos dois valores t_1, t_2 em I.

Usando a definição podemos traduzir o problema de pontos conjugados para um problema de EDO, isto é o que diz o lema a seguir.

Lema 3.3.4. *Se existe $p \in M$ tal que para qualquer raio geodésico saindo de p a equação diferencial acima, com $r(t) = \operatorname{Ric}(\gamma', \gamma')/(n-1)$, é conjugada em $[0, \infty)$. Então M é compacta.*

Demonstração. Como a equação (3.3.1) é conjugada em $[0, \infty)$, existe uma solução não trivial $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de (3.3.1) tal que $\phi(t_1) = \phi(t_2) = 0$ com $0 \leq t_1 < t_2$. Defina a função $f : [0, t_2] \to \mathbb{R}$ como:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ \phi(t) & t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

Se X e Y são campos suaves por partes ao longo de $\gamma\big|_{[0,t_2]}$ que se anulam nos extremos, temos definida a forma índice I em $\gamma\big|_{[0,t_2]}$,

$$I(X,Y) = \int_0^{t_2} \left[\left\langle \frac{DX}{dt}, \frac{DY}{dt} \right\rangle + \langle R(X,\gamma')Y, \gamma' \rangle \right] dt. \tag{3.3.2}$$

Seja $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k = t_2$ uma partição de $[0, t_2]$ tal que $X\big|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ e $Y\big|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ são suaves para cada i. Então integrando o lado direito de (3.3.2) por partes temos,

$$I(X,Y) = \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \Delta_{\tau_i} \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle - \int_0^{t_2} \left\langle \frac{D^2X}{dt^2} + R(X,\gamma')\gamma', Y \right\rangle dt, \tag{3.3.3}$$

onde $\Delta_{\tau_i}\frac{DX}{dt}$ é o salto de $\frac{DX}{dt}$ em τ_i.

Sejam $\{E_1(t), ..., E_{n-1}(t)\}$ campos ortonormais paralelos ao longo de $\gamma\big|_{[0,t_2]}$ ortogonais a γ'. Defina $X_i(t) = f(t)E_i(t)$, temos que

$$\left\langle \frac{D^2X_i}{dt^2} + R(X_i, \gamma')\gamma', X_i \right\rangle = (f'' + K(E_i \wedge \gamma') f) f, \tag{3.3.4}$$

em cada um dos subintervalos $[0, t_1]$ e $[t_1, t_2]$ em que f é suave. Então, substituindo (3.3.4) em (3.3.3) temos

$$I(X_i, X_i) = -\int_0^{t_2} [f'' + K(E_i \wedge \gamma') f] f dt,$$

onde usamos o fato que X_i se anula em $t = t_1$. Então, usando o fato que $\mathrm{Ric}(\gamma', \gamma') = \sum_{i=1}^{n-1} K(E_i \wedge \gamma')$, obtemos ao somar,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} I(X_i, X_i) &= -(n-1)\int_0^{t_2} (f'' + r(t) f) f dt \\ &= -(n-1)\int_{t_1}^{t_2} (\phi'' + r(t)\phi)\phi\, dt = 0\end{aligned}$$

já que ϕ é uma solução de (3.3.1). Logo, para algum i, $I(X_i, X_i) \leq 0$. Mas $I(X_i, X_i) > 0$ a menos que exista um ponto conjugado a p ao longo de $\gamma\big|_{[0,t_2]}$. Logo pelo lema anterior M é compacta. $\square$

Então, o problema de encontrar condições sobre a curvatura de Ricci que asseguram a compacidade de M é reduzido ao problema de encontrar condições suficientes em $r(t)$ para qual a equação diferencial (3.3.1) é conjugada em $[0, \infty)$. Uma tal condição é devido a Wintner ([31]): se $\int_0^\infty r(t)\, dt = \infty$ então (3.3.1) é oscilatória em $[0, \infty)$ (A equação (3.3.1) é oscilatória em $[0, \infty)$ se cada solução de (3.3.1) em $[0, \infty)$ possui infinitos zeros). Portanto temos o seguinte teorema, atribuido a Ambrose ([2]), como consequêcia do lema anterior e do resultado de Wintner.

Teorema 3.3.5 (Ambrose)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa e $p \in M$ tal que para qualquer geodésica $\gamma : [0, \infty) \to M$ parametrizada por comprimento de arco saindo de p tenhamos*

$$\int_0^\infty \mathrm{Ric}(\gamma', \gamma')\, ds = \infty,$$

então M é compacta.

Dada uma variedade riemannina (M, g) e um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ definimos o *tensor de Bakry-Émery-Ricci generalizado* como

$$\mathrm{Ric}_X = \mathrm{Ric} + \mathcal{L}_X g.$$

Veja que Ric_X generaliza mesmo o tensor de Bakry-Émery-Ricci quando tomamos o campo X como sendo o gradiente de uma função.

Temos então o seguinte teorema sobre a compacidade de variedades com limitação no tensor de Bakry-Émery-Ricci generalizado.

Teorema 3.3.6 (Lopez-Rio)**.** *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_X g \geq \lambda g \tag{3.3.5}$$

para algum campo vetorial X em M e alguma constante $\lambda > 0$. Então, M é compacta se e somente se $\|X\|$ é limitada em (M, g).

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como $\|X\|$ é uma função contínua em M, se M é compacta temos que $\|X\|$ é limitada.
($\Leftarrow$) Por outro lado, seja $p \in M$ e considere uma geodésica parametrizada por comprimento de arco $\gamma : [0, \infty) \to M$ saindo de p. Temos ao longo de γ

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X g\left(\gamma', \gamma'\right) &= \mathcal{L}_X\left(g\left(\gamma', \gamma'\right)\right) - 2g\left(\left[X, \gamma'\right], \gamma'\right) \\
&= 2g\left(\nabla_X \gamma', \gamma'\right) - 2g\left(\nabla_X \gamma' - \nabla_{\gamma'} X, \gamma'\right) \\
&= 2g\left(\nabla_{\gamma'} X, \gamma'\right) \\
&= 2\gamma' g\left(X, \gamma'\right) \\
&= 2\frac{d}{ds}\left[g\left(X, \gamma'\right)\right].
\end{aligned}$$

Então usando (3.3.5) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^S \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) ds &\geq \int_0^S \lambda g\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) - \mathcal{L}_X g\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) ds \\
&= \lambda S + 2g\left(X(p), \gamma'(0)\right) - 2g\left(X(\gamma(S)), \gamma'(S)\right) \\
&\geq \lambda S + 2g\left(X(p), \gamma'(0)\right) - 2\left\|X(\gamma(S))\right\|.
\end{aligned}$$

Como $\|X\|$ é limitado, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) ds &= \lim_{S \to \infty} \int_0^S \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) ds \\
&\geq \lim_{S \to \infty} \left(\lambda S + 2g\left(X(p), \gamma'(0)\right) - 2\left\|X(\gamma(S))\right\|\right) \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Logo pelo critério de compacidade de Ambrose 3.3.5 temos o teorema. □

3.4 Finitude do grupo fundamental

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) e $p \in M$ defina

$$H_p = \max\left\{0, \sup_{v \in TB(p,1)} \left\{\mathrm{Ric}(v, v) : \|v\| = 1\right\}\right\}.$$

onde $TB(p, 1)$ é o fibrado tangente da bola $B(p, 1) \subset M$.

Com esta definição podemos estimar um cota superior para a integral da curvatura de Ricci ao longo de uma geodésica.

Lema 3.4.1. *Seja* (M,g) *uma variedade Riemanniana completa, sejam* $p,q\in M$ *tais que* $r=d(p,q)>1$ *e seja* γ *uma geodésica minimal de* p *a* q *parametrizada por comprimento de arco, então*

$$\int_0^r \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)ds \leq 2(n-1)+H_p+H_q.$$

Demonstração. Sejam $\{E_i(s)\}_{i=1}^{n-1}$ campos vetoriais ortonormais paralelos ao longo de γ e ortogonais a γ'. Como γ é minimal, pela fórmula da segunda variação de comprimento de arco, para qualquer função suave por partes ϕ com $\phi(0)=\phi(r)=0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^r \sum_{i=1}^{n-1}\left(\left|\nabla_{\gamma'}(\phi E_i)\right|^2-\langle R(\phi E_i,\gamma')\gamma',\phi E_i\rangle\right)ds \\ &= \int_0^r\left((n-1)\left(\phi'(s)\right)^2-\phi^2(s)\,\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\right)ds. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Seja ϕ a função

$$\phi(s)=\begin{cases} s & 0\leq s\leq 1\\ 1 & 1\leq s\leq r-1\\ r-s & r-1\leq s\leq r\end{cases}$$

Então, como $\phi(s)=1$ e $\phi'(s)=0$ para $1\leq s\leq r-1$, (3.4.1) torna-se

$$\begin{aligned} 0\leq &\int_0^1\left((n-1)\left(\phi'(s)^2\right)\right)ds+\int_{r-1}^r\left((n-1)\left(\phi'(s)\right)^2\right)ds-\int_0^1\left(\phi^2(s)\,\mathrm{Ric}(\gamma',\gamma')\right)ds\\ &-\int_{r-1}^r\left(\phi^2(s)\,\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\right)ds-\int_1^{r-1}\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)ds. \end{aligned}$$

Adicionando $\int_0^r \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)ds$ a ambos os lados da equação resulta

$$\begin{aligned} \int_0^r \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma's\right)ds \leq &\int_0^1\left((n-1)\left(\phi'(s)\right)^2\right)ds+\int_{r-1}^r\left((n-1)\left(\phi'(s)\right)^2\right)ds\\ &+\int_0^1\left(\left(1-\phi^2(s)\right)\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\right)ds\\ &+\int_{r-1}^r\left(\left(1-\phi^2(s)\right)\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\right)ds. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Nós agora resolvemos os termos do lado direito da equação (3.4.2). Como $|\phi'(s)|=1$ para $0\leq s\leq 1$ e $r-1\leq s\leq r$ nós temos

$$\int_0^1\left((n-1)\left(\phi'(s)\right)^2\right)ds+\int_{r-1}^r\left((n-1)\left(\phi'(s)\right)^2\right)ds=2(n-1). \tag{3.4.3}$$

Ainda mais, $0\leq\phi\leq 1$ e $\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\leq H_p$ para $0\leq s\leq 1$, assim

$$\int_0^1\left(\left(1-\phi^2(s)\right)\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\right)ds\leq H_p. \tag{3.4.4}$$

Similarmente, como $\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\leq H_q$ para $r-1\leq s\leq r$,

$$\int_{r-1}^r\left(\left(1-\phi^2(s)\right)\mathrm{Ric}\left(\gamma'(s),\gamma'(s)\right)\right)ds\leq H_q. \tag{3.4.5}$$

Logo, combinando (3.4.2), (3.4.3), (3.4.4), e (3.4.5) nos dá o lema. □

Usando o lema 3.4.1 podemos derivar agora uma limitação superior na distância entre dois pontos que depende somente de $\|X\|$ e H.

Teorema 3.4.2. *Se (M, g) é uma variedade completa satisfazendo* $\mathrm{Ric}_X \geq \lambda$ *para algum $\lambda > 0$ e $X \in \Gamma(TM)$, então para qualquer $p, q \in M$,*

$$d(p,q) \leq \max\left\{1, \frac{1}{\lambda}\Big(2(n-1) + H_p + H_q + 2\|X_p\| + 2\|X_q\|\Big)\right\}.$$

Demonstração. Se $d(p,q) \leq 1$ temos o resultado. Assuma que $r = d(p,q) > 1$ e seja γ a geodésica minimal de p a q parametrizada por comprimento de arco. Aplicando o lema 3.4.1 temos

$$\int_0^r \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) ds \leq 2(n-1) + H_p + H_q. \tag{3.4.6}$$

Por outro lado, como $\mathrm{Ric}_X \geq \lambda g$, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^r \mathrm{Ric}\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) ds &\geq \int_0^r \left(\lambda g\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) - \mathcal{L}_X g\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right)\right) ds \\ &= \lambda d(p,q) + 2g(p)\left(X, \gamma'(0)\right) - 2g(q)\left(X, \gamma'(r)\right) \\ &\geq \lambda d(p,q) - 2\|X_p\| - 2\|X_q\|.\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Onde, no segundo passo, usamos

$$\mathcal{L}_X g\left(\gamma'(s), \gamma'(s)\right) = 2\frac{d}{ds} g\left(X, \gamma'(s)\right).$$

Combinando (3.4.6) e (3.4.7) e resolvendo para $d(p,q)$ obtemos o teorema. ☐

A seguir temos um teorema demonstrado por Wylie que generaliza parte do teorema de Myers para o caso do tensor de Bakry-Émery-Ricci generalizado.

Teorema 3.4.3 (Wylie)**.** *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana completa satisfazendo*

$$\mathrm{Ric} + \mathcal{L}_X g \geq \lambda g \tag{3.4.8}$$

para algum campo vetorial X em M e alguma constante $\lambda > 0$. Então o grupo fundamental de M é finito.

Demonstração. Seja $\widetilde{M}$ o recobrimento universal de M. $\widetilde{M}$ satisfaz (3.4.8) para a métrica do pullback $\widetilde{g}$ e o campo vetorial do pullback $\widetilde{X}$. Fixe $\tilde{p}$ em $\widetilde{M}$ e seja $h \in \pi_1(M)$ identificado como uma transformação de recobrimento em $\widetilde{M}$. Note que $B(\tilde{p}, 1)$ e $B(h(\tilde{p}), 1)$ são isométricas para a métrica $\widetilde{g}$, assim $H_{\tilde{p}} = H_{h(\tilde{p})}$. Também, $\left\|\widetilde{X}_{\tilde{p}}\right\| = \left\|\widetilde{X}_{h(\tilde{p})}\right\|$, assim ao aplicar Teorema 3.4.2 aos pontos $\tilde{p}$ e $h(\tilde{p})$ obtemos

$$d(\tilde{p}, h(\tilde{p})) \leq \max\left\{1, \frac{2}{\lambda}\left(n - 1 + H_{\tilde{p}} + 2\left\|\widetilde{X}_{\tilde{p}}\right\|\right)\right\} \forall h \in \pi_1(M).$$

Como o lado direito é independente de h, temos que a órbita de $\widetilde{p}$ pela ação de $\pi_1(M)$ é limitada. Visto que $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$ é completa, temos que a órbita é compacta, discreta e portanto finita. Já que há uma bijeção entre a órbita de $\widetilde{p}$ e $\pi_1(M)$, isto prova o teorema. ☐

Capítulo 4

Propriedades do tensor de Bakry-Émery-Ricci

Neste capítulo fizemos um estudo detalhado do artigo de Lott [24]. Aqui apresentaremos como estimar o tensor em uma variedade que é espaço base de uma submersão riemanniana quando conhecemos limitações do tensor no espaço total. Em seguida veremos como se comporta as limitações do tensor de Bakry-Émery-Ricci quando temos uma convergência de Gromov-Hausdorff. Por fim abordaremos a relação entre as limitações do tensor e razões de volume de tubos de distância na variedade.

4.1 Limitações do tensor de Bakry-Émery-Ricci gerado por submersões Riemannianas

Dada uma submersão Riemanniana $\pi : M \to B$ com fibra compacta F e uma função positiva ϕ^M em M, podemos definir uma função positiva suave ϕ^B em B, pelo pushforward

$$\pi_* \left(\phi^M d\mathrm{vol}_M\right) = \phi^B d\mathrm{vol}_B.$$

Assim, se M possui um tensor de Bakry-Émery-Ricci Ric_ϕ^∞, temos um tensor de Bakry-Émery-Ricci em B dado por ϕ^B. Denotando por Ric_M^∞ e Ric_B^∞ os respectivos tensores, somos levados a questionar se uma limitação em um dos tensores implica uma limitação no outro.

Lembramos que o transporte de fibras associado à curva suave $\gamma : [0,1] \to B$ é o difeomorfismo $\rho : F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(1)}$ definido para cada $m \in F_{\gamma(0)}$ como o ponto $\overline{\gamma}(1)$ do levantamento horizontal $\overline{\gamma}$ de γ que começa em $\overline{\gamma}(0) = m$.

Veremos nesta seção que, fazendo algumas suposições sobre o transporte de fibras, uma limitação em Ric_M^∞ implica uma limitação em Ric_B^∞. Assim obtemos um resultado semelhante ao de O'Neill 1.4.4 para o caso do tensor de Bakry-Émery-Ricci.

Primeiro recorde que na submersão Riemanniana $\pi : M \to B$ temos associadas as distribuições horizontal e vertical $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ que utilizamos para definir dois tensores T, A cujos valores em campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são dado por

$$\begin{aligned} T_X Y &= \mathcal{H}\left(\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{V}Y\right) + \mathcal{V}\left(\nabla_{\mathcal{V}X}\mathcal{H}Y\right), \\ A_X Y &= \mathcal{H}\left(\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{V}Y\right) + \mathcal{V}\left(\nabla_{\mathcal{H}X}\mathcal{H}Y\right). \end{aligned}$$

T é a extensão da segunda forma fundamental das fibras $\pi^{-1}(b)$ para todo M e A é a dualização de T trocando $\mathcal{H}$ por $\mathcal{V}$. Esses tensores são úteis pois podemos calcular as curvaturas de M conhecendo os valores de T, A, ∇T, ∇A e da curvatura de B.

Se $\{X_i\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_x$ e $\{U_j\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{V}_x$, denotamos

$$\begin{aligned} \langle A_X, A_Y\rangle &= \sum_i \langle A_X X_i, A_Y X_i\rangle = \sum_i \langle A_X U_j, A_Y U_j\rangle, \\ \langle A_X, T_U\rangle &= \sum_i \langle A_X X_i, T_U X_i\rangle = \sum_i \langle A_X U_j, T_U U_j\rangle, \\ \langle AU, AV\rangle &= \sum_i \langle A_{X_i}U, A_{X_i}V\rangle, \\ \langle TX, TY\rangle &= \sum_j \left\langle T_{U_j}X, T_{U_j}Y\right\rangle. \end{aligned}$$

O *vetor curvatura média* ao longo de cada fibra é dado por

$$N = \sum_j T_{U_j}U_j.$$

Usando as equações de O'Neill [27] para a curvatura Riemanniana de M, podemos calcular a curvatura de Ricci de M. Assim, se X e Y são campos horizontais de M,temos

$$\mathrm{Ric}_M(X,Y) = \pi^*\left(\mathrm{Ric}_B\right)(X,Y) - 2\langle A_X, A_Y\rangle - \langle TX, TY\rangle + \frac{1}{2}\left(\langle\nabla_X N, Y\rangle + \langle\nabla_Y N, X\rangle\right).$$

Logo para um campo X em B, com levantamento horizontal $\overline{X}$ em M, temos

$$\mathrm{Ric}_M\left(\overline{X},\overline{X}\right) = \mathrm{Ric}_B(X,X) - 2\langle A_{\overline{X}}, A_{\overline{X}}\rangle - \left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle + \left\langle \overline{X}, \nabla^M_{\overline{X}}N\right\rangle. \tag{4.1.1}$$

Dado $b \in B$, seja $\{\theta_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ o fluxo de X definido em uma vizinhança de b para t em um intervalo $(-\epsilon,\epsilon)$. Seja $\left\{\overline{\theta}_t\right\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ o fluxo de $\overline{X}$ que cobre θ_t. Ele leva fibras a fibras difeomorficamente. Logo faz sentido definir $\mathcal{L}_{\overline{X}}d\mathrm{vol}_F$ por

$$\left(\mathcal{L}_{\overline{X}}d\mathrm{vol}_F\right)\Big|_{F_b} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\overline{\theta}_t^* d\mathrm{vol}_F\right)\Big|_{F_b}.$$

Usando a fórmula da primeira variação de área 1.5.10 e o fato de $\overline{X}$ ser horizontal temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\overline{X}}d\mathrm{vol}_F\Big|_{F_b} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\overline{\theta}_t^* d\mathrm{vol}_F\right)\Big|_{F_b} \\ &= -\left\langle\overline{X}, N\right\rangle d\mathrm{vol}_F. \end{aligned}$$

Como

$$\phi^B = \int_F \phi^M d\mathrm{vol}_F.$$

Temos

$$\begin{aligned} X\phi^B &= \mathcal{L}_X \int_F \phi^M d\mathrm{vol}_F = \int_F \mathcal{L}_{\overline{X}} \left(\phi^M d\mathrm{vol}_F\right) \\ &= \int_F \left(\overline{X}\phi^M - \left\langle \overline{X}, N \right\rangle \phi^M\right) d\mathrm{vol}_F \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

e

$$\begin{aligned} XX\phi^B &= \int_F \left[\overline{X}\left(\overline{X}\phi^M - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle \phi^M\right) - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle \left(\overline{X}\phi^M - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle \phi^M\right)\right] d\mathrm{vol}_F \\ &= \int_F \left[\overline{XX}\phi^M - \overline{X}\left\langle \overline{X}, N\right\rangle \phi^M - 2\left\langle \overline{X}, N\right\rangle \overline{X}\phi^M + \left\langle \overline{X}, N\right\rangle^2 \phi^M\right] d\mathrm{vol}_F \\ &= \int_F \left[\frac{\overline{XX}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \nabla^M_{\overline{X}}\overline{X}, N\right\rangle - \left\langle \overline{X}, \nabla^M_{\overline{X}} N\right\rangle - \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)^2\right]\phi^M d\mathrm{vol}_F. \end{aligned}$$

Pela proposição 1.4.3 temos que $\nabla^M_{\overline{X}}\overline{X} = \overline{\nabla^B_X X}$, segue que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\left(\phi^B\right)(X, X) &= XX\phi^B - \left(\nabla^B_X X\right)\phi^B \\ &= \int_F \left[\frac{\mathrm{Hess}\left(\phi^M\right)\left(\overline{X}, \overline{X}\right)}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, \nabla^M_{\overline{X}} N\right\rangle - \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)^2\right]\phi^M d\mathrm{vol}_F \\ &= \int_F \left[\mathrm{Hess}\left(\ln \phi^M\right)\left(\overline{X}, \overline{X}\right) - \left\langle \overline{X}, \nabla^M_{\overline{X}} N\right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)^2\right]\phi^M d\mathrm{vol}_F. \end{aligned}$$

Substituindo $\left\langle \overline{X}, \nabla^M_{\overline{X}} N\right\rangle$ de (4.1.1) temos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ric}_B(X,X)\,\phi^B - \operatorname{Hess}\left(\phi^B\right)(X,X) &= \int_F \Bigg[\operatorname{Ric}^B(X,X) - \operatorname{Hess}\left(\ln\phi^M\right)\left(\overline{X},\overline{X}\right) \\
&\quad + \left\langle \overline{X}, \nabla^M_{\overline{X}} N\right\rangle - \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)^2\Bigg]\phi^M d\mathrm{vol}_F \\
&= \int_F \Bigg[\operatorname{Ric}^M\left(\overline{X},\overline{X}\right) - \operatorname{Hess}\left(\ln\phi^M\right)\left(\overline{X},\overline{X}\right) \\
&\quad + 2\left\langle A_{\overline{X}}, A_{\overline{X}}\right\rangle + \left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle - \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)^2\Bigg]\phi^M d\mathrm{vol}_F \\
&= \int_F \Bigg[\operatorname{Ric}^M_\infty\left(\overline{X},\overline{X}\right) + 2\left\langle A_{\overline{X}}, A_{\overline{X}}\right\rangle + \left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle \\
&\quad - \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)^2\Bigg]\phi^M d\mathrm{vol}_F.
\end{aligned}
$$

Usando (4.1.2),

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ric}^\infty_B(X,X)\,\phi^B &= \left[\operatorname{Ric}_B(X,X) - \frac{\operatorname{Hess}\left(\phi^B\right)(X,X)}{\phi^B} + \frac{\left(X\phi^B\right)^2}{\left(\phi^B\right)^2}\right]\phi^B \\
&= \int_F \Bigg[\operatorname{Ric}^\infty_M\left(\overline{X},\overline{X}\right) + 2\left\langle A_{\overline{X}}, A_{\overline{X}}\right\rangle + \left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle \\
&\quad - \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)^2\Bigg]\phi^M d\mathrm{vol}_F \\
&\quad + \left(\int_F \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)\phi^M d\mathrm{vol}_F\right)^2 \left(\phi^B\right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.1.3}
$$

Utilizando esta equação temos o seguinte resultado que relaciona as limitações de $\operatorname{Ric}^\infty_B$ com as limitações de $\operatorname{Ric}^\infty_M$.

Teorema 4.1.1. *Suponha que para cada curva suave $\gamma : [0,1] \to B$ existe uma constante $c_\gamma > 0$ tal que $\rho^*\left(\phi^M\big|_{F_{\gamma(1)}} d\mathrm{vol}_{F_{\gamma(1)}}\right) = c_\gamma \phi^M\big|_{F_{\gamma(0)}} d\mathrm{vol}_{F_{\gamma(0)}}$. Então se $\operatorname{Ric}^\infty_M \geq r$ temos $\operatorname{Ric}^\infty_B \geq r$, onde $r \in \mathbb{R}$. Ainda mais, se $\phi^M = 1$ e $q = \dim(F)$, temos que $\operatorname{Ric}_M \geq r$ implica $\operatorname{Ric}^q_B \geq r$.*

Demonstração. Como

$$
\mathcal{L}_{\overline{X}}\left(\phi^M d\mathrm{vol}_F\right) = \left(\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle\right)\phi^M d\mathrm{vol}_F,
$$

temos pela hipótese que $\frac{\overline{X}\phi^M}{\phi^M} - \left\langle \overline{X}, N\right\rangle$ é constante ao longo da fibra F.

Então pela equação (4.1.3)

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_B^\infty(X,X)\,\phi^B &= \int_F \left[\mathrm{Ric}_M^\infty\left(\overline{X},\overline{X}\right) + 2\left\langle A_{\overline{X}}, A_{\overline{X}}\right\rangle + \left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle\right]\phi^M d\mathrm{vol}_F \\ &\geq \int_F \mathrm{Ric}_M^\infty\left(\overline{X},\overline{X}\right)\phi^M d\mathrm{vol}_F.\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Logo, se $\mathrm{Ric}_M^\infty \geq r$, (4.1.4) implica que $\mathrm{Ric}_B^\infty \geq r$. Isto prova a primeira parte do teorema.

Supondo que $\phi^M = 1$ temos pela equação (4.1.2) que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_B^q(X,X)\,\phi^B = &\int_F \left[\mathrm{Ric}_M\left(\overline{X},\overline{X}\right) + 2\left\langle A_{\overline{X}}, A_{\overline{X}}\right\rangle + \left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle - \frac{1}{q}\left\langle \overline{X}, N\right\rangle^2\right] d\mathrm{vol}_F \\ &+ \left(1-\frac{1}{q}\right)\left(-\int_F \left\langle \overline{X}, N\right\rangle^2 d\mathrm{vol}_F + \left(\int_F \left\langle \overline{X}, N\right\rangle d\mathrm{vol}_F\right)^2 \left(\phi^B\right)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Como $\left\langle \overline{X}, N\right\rangle$ é constante na fibra F e $\left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle - \frac{1}{q}\left\langle \overline{X}, N\right\rangle^2 \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_B^q(X,X)\,\phi^B &= \int_F \left[\mathrm{Ric}_M\left(\overline{X},\overline{X}\right) + 2\left\langle A_{\overline{X}}, A_{\overline{X}}\right\rangle + \left\langle T\overline{X}, T\overline{X}\right\rangle - \frac{1}{q}\left\langle \overline{X}, N\right\rangle^2\right] d\mathrm{vol}_F \\ &\geq \int_F \mathrm{Ric}_M\left(\overline{X},\overline{X}\right) d\mathrm{vol}_F.\end{aligned}$$

Se $\mathrm{Ric}_M^\infty \geq r$ então

$$\mathrm{Ric}_B^q(X,X)\,\phi^B \geq r\int_F \left\langle \overline{X}, \overline{X}\right\rangle d\mathrm{vol}_F = r\left\langle X, X\right\rangle \phi^B.$$

Isto prova a segunda parte do teorema. □

Segue abaixo alguns exemplos em que podemos aplicar este resultado.

Exemplo 4.1.2. *Se identificamos S^3 com a bola $B(0,1)$ na norma de $\mathbb{C}^2$, temos uma ação isométrica, livre e própria de S^1 em S^3 dada pela multiplicação escalar de $\mathbb{C}^2$ por S^1. Como sabemos, o quociente desta aplicação é o espaço projetivo $\mathbb{CP}^1$ que é difeomorfo a S^2 ao identificá-la com a esfera de Riemman. Logo obtemos uma fibração $S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$ chamada fibração de Hopf tal que a projeção $S^3 \to S^2$ é uma submersão Riemanniana. Como as fibras são totalmente geodésicas, o transporte de fibras age por isometrias. Assim podemos aplicar a segunda parte do teorema* 4.1.1.

Exemplo 4.1.3. *Sejam $\left(M, g^M\right), \left(N, g^N\right)$ variedades Riemannianas compactas e $\mathcal{W} = M \times_f N$ para $f \in C^\infty(M)$ tal que $\mathrm{Ric}_{\mathcal{W}} \geq r$. Como $\pi_M : \mathcal{W} \to M$ é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas, o transporte de fibras age por isometria. Então o transporte de fibras em $\mathcal{W}$ preserva a medida das fibras a menos de uma constante, assim podemos aplicar a segunda parte do teorema* 4.1.1 *para obter as limitações $\mathrm{Ric}_M^n \geq r$ e $\mathrm{Ric}_N^m \geq r$, onde $n = \dim N$ e $m = \dim M$.*

A seguir calculamos a curvatura de Bakry-Émery-Ricci de uma esfera exótica, a construção deste exemplo pode ser encontrada no artigo de Duran [13].

Exemplo 4.1.4. *Seja* $Sp\,(2)$ *o conjunto das matrizes* 2×2 *com coeficientes em* $\mathbb{H}$ *tal que*

$$AA^* = A^*A = I,$$

onde A^* *é a matriz conjugada tranposta de* A*.*

A álgebra de Lie $sp\,(2)$ *de* $Sp\,(2)$ *é dada pelas matrizes* 2×2 *com coeficientes em* $\mathbb{H}$ *tal que*

$$A + A^* = 0.$$

O grupo $Sp\,(1) = S^3$ *age livremente em* $Sp\,(2)$ *da seguinte forma: se* $q \in Sp\,(1)$ *e* $A \in Sp\,(2)$*,*

$$q \star A = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \bar{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

resultando um fibrado principal $S^3 \to Sp\,(2) \to \Sigma^7$*, onde* Σ^7 *é uma esfera exótica.*

O grupo $Sp\,(1)$ *também age livremente em* $Sp\,(2)$ *como:*

$$q \bullet A = A \begin{pmatrix} \bar{q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

produzindo um fibrado principal $S^3 \to Sp\,(2) \to S^7$*, onde* S^7 *é a esfera padrão.*

Usando o procedimento Kaluza-Klein para a conexão canônica de $Sp\,(2)$ *(dada pela métrica bi-invariante) e a métrica canônica de* S^7*, temos uma métrica* g *em* $Sp\,(2)$ *que é invariante à esquerda e para* $A = (a_{ij}) \in sp\,(2)$ *tem-se:*

$$g\,(A, A) = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2\,,$$

onde $|\cdot|$ *é a norma canônica de* $\mathbb{H}$*.*

A métrica g *também é invariante à direita pelo subgrupo diagonal* $S^3 \times S^3 \subset Sp\,(2)$*, logo temos uma métrica induzida em* Σ^7 *que faz de* $\pi : Sp\,(2) \to \Sigma^7$ *uma submersão Riemanniana.*

Dada uma curva γ *em* Σ^7*, o transporte de fibras* $\Phi : F_{\gamma(0)} \to F_{\gamma(1)}$ *em* $Sp\,(2)$ *satisfaz para* $x \in F_{\gamma(0)}$*:*

$$q \star \Phi\,(x) = \Phi\,(q \star x)\,,$$

logo temos que

$$d\Phi_{q\star x} \circ dq_x = dq_{\Phi(x)} \circ d\Phi_x,$$

e assim

$$\Phi^*\left(\mathrm{dvol}_{F_{\gamma(1)}}\right) = |d\Phi_x|\,\mathrm{dvol}_{F_{\gamma(0)}},$$

onde $|d\Phi_x|$ *é o valor absoluto do determinante de* $d\Phi_x$*.*

Seja $\{e_i\}_{i=1}^{10}$ *o referencial ortonormal gerado pela ação a esquerda de* $Sp\,(2)$ *sobre a seguinte base de* $sp\,(2)$*:*

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a proposição 1.3.3 *temos, para* $X = \sum_{i=1}^{10} x_i e_i$, *que*

$$\mathrm{Ric}\,(X, X) = 3\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right) + \frac{5}{2}x_7^2 + \frac{17}{2}\left(x_8^2 + x_9^2 + x_{10}^2\right).$$

Portanto temos as condições do teorema 4.1.1,*e então* $\mathrm{Ric}^3_{\Sigma^7} \geq \frac{5}{2}$.

4.2 Limitações do tensor de Bakry-Émery-Ricci em sequências convergentes

Recorde que o espaço de Sobolev $H^k(M)$ é dado por

$$H^k(M) = \{\, f \in L^2(M) \mid D^\alpha f \in L^2(M)\, \forall\, |\alpha| \leq k \,\}$$

onde α denota um multi-índice e D^α é a derivada fraca em relação ao multi-índice α. O espaço $H^k_{loc}(M)$ consiste das funções que estão localmente em H^k, isto é, para cada compacto $C \subset M$ a função deve pertencer a $H^k(C)$.

A igualdade (3.1.6) nos permite generalizar a noção de $\mathrm{Ric}^\infty_\phi \geq r$ para uma classe de variedades com medida não suave (M, g, ϕ). Para isto, suponha que M é uma variedade cujos mapas de transição são $C^{1,1}$ continuos, g é uma métrica cujas componentes, em coordenadas locais, estão em $C^0(M) \cap H^1(M)$ e $\phi \in C^0(M) \cap H^1_{loc}(M)$ uma função positiva. (Como M é $C^{1,1}$, existe M' suave e um difeomorfismo $C^{1,1}$ de M' em M. Assim, depois de aplicar o pullback, pode-se assumir que g e ϕ estão definidos em uma variedade suave.)

Nas condições do parágrafo anterior temos as seguintes definições para as curvaturas:

Definição 4.2.1. *Dizemos que* $\mathrm{Ric} \geq r$ *se para toda 1-forma Lipschitz contínua com suporte compacto em* M*,*

$$\int_M \langle d\omega, d\omega \rangle \, \mathrm{dvol}_M + \int_M \langle \delta\omega, \delta\omega \rangle \, \mathrm{dvol}_M - \int_M \langle \nabla\omega, \nabla\omega \rangle \, \mathrm{dvol}_M \geq r \int_M \langle \omega, \omega \rangle \, \mathrm{dvol}_M.$$

Dizemos que $\mathrm{Ric}^\infty_\phi \geq r$ *se para toda 1-forma Lipschitz contínua com suporte compacto em* M*,*

$$\langle\langle d\omega, d\omega \rangle\rangle + \left\langle\left\langle \tilde{\delta}\omega, \tilde{\delta}\omega \right\rangle\right\rangle - \langle\langle \nabla\omega, \nabla\omega \rangle\rangle \geq r \langle\langle \omega, \omega \rangle\rangle.$$

Dizemos que $\mathrm{Ric}^q_\phi \geq r$ *se para toda 1-forma Lipschitz contínua com suporte compacto em* M*,*

$$\langle\langle d\omega, d\omega \rangle\rangle + \left\langle\left\langle \tilde{\delta}\omega, \tilde{\delta}\omega \right\rangle\right\rangle - \langle\langle \nabla\omega, \nabla\omega \rangle\rangle - \frac{1}{q}\int_M (\omega(\nabla \ln \phi))^2 \phi \, \mathrm{dvol}_M \geq r \langle\langle \omega, \omega \rangle\rangle.$$

Para que esta definição faça sentido, devemos mostrar que os integrandos estão bem definidos e que as integrais existem. Como ω é uma 1-forma Lipschitz com suporte compacto, temos pelo teorema de Rademacher (teorema 3.1.6 do livro de Federer [14]) que as funções componentes de ω são diferenciáveis q.t.p. com derivada limitada e com suporte compacto. Temos também que g é

$C^0 \cap H^1$-regular, e assim suas componentes, em coordenadas locais, possuem uma derivada fraca em $L^2(M)$. Portanto, para $\omega = f_i dx^i$, valem as seguintes equações:

$$
\begin{aligned}
\langle d\omega, d\omega \rangle &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\left(g^{jl}g^{ik} - g^{jk}g^{il}\right),\\
\langle \delta\omega, \delta\omega \rangle &= \frac{1}{|g|}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}g^{ji}\sqrt{|g|} + f_i\partial_j\left(g^{ji}\sqrt{|g|}\right)\right)\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}g^{ji}\sqrt{|g|} + f_k\partial_l\left(g^{lk}\sqrt{|g|}\right)\right),\\
\langle \nabla\omega, \nabla\omega \rangle &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\left(g^{jl}g^{ik} - g^{jk}g^{il}\right) - \frac{\partial f_k}{\partial x_l} f_i \Gamma^i_{rs}\left(g^{rl}g^{sk} - g^{rk}g^{sl}\right) + \frac{1}{2} f_i f_j \Gamma^i_{kl}\Gamma^j_{rs} g^{kr} g^{ls},\\
\langle \omega, \omega \rangle &= f_i f_j g^{ij},\\
\left\langle \tilde{\delta}\omega, \tilde{\delta}\omega \right\rangle &= \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}g^{ji}\sqrt{|g|} + f_i\partial_j\left(g^{ji}\sqrt{|g|}\right)\right) - f_k g^{kl}\partial_l(\ln\phi)\right)^2,\\
\omega(\nabla \ln\phi)^2 &= f_i f_k g^{ij} g^{kl} \partial_j(\ln\phi)\,\partial_l(\ln\phi).
\end{aligned}
$$

onde usamos aqui a notação de soma de Einstein. Logo é possível ver que todos os integrandos estão bem definidos em quase todos os pontos de M. Como ω tem suporte compacto, temos pelas equações que os integrandos são nulos fora do suporte de ω. Ainda mais, neste compacto os integrandos são somas de produtos de funções integraveis com fatores limitados e L^2 integraveis. Portanto as integrais existem.

Segue diretamente da definição e do fato de as integrais serem contínuas na topologia $C^0 \cap H^1$ o seguinte lema.

Lema 4.2.2. *Seja M uma variedade suave fechada.*

1. *Se $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de métricas Riemannianas suaves com $\mathrm{Ric}(M, g_i) \geq r g_i$, e $g_i \xrightarrow{C^0\cap H^1} g$ para alguma métrica $C^0 \cap H^1$-regular g, então $\mathrm{Ric}(M, g) \geq rg$.*

2. *Se $\{(g_i, \phi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de métricas Riemannianas suaves e funções positivas suaves em M com $\mathrm{Ric}^{\infty}(M, g_i, \phi_i) \geq r g_i$, tal que $(g_i, \phi_i) \xrightarrow{C^0\cap H^1} (g, \phi)$ para algum par $C^0 \cap H^1$-regular (g, ϕ), então $\mathrm{Ric}^{\infty}(M, g, \phi) \geq rg$.*

3. *Se $\{(g_i, \phi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de métricas Riemannianas suaves e funções positivas suaves em M com $\mathrm{Ric}^{q}(M, g_i, \phi_i) \geq r g_i$, tal que $(g_i, \phi_i) \xrightarrow{C^0\cap H^1} (g, \phi)$ para algum par $C^0 \cap H^1$-regular (g, ϕ), então $\mathrm{Ric}^{q}(M, g, \phi) \geq rg$.*

Conforme vimos anteriormente, temos em $\mathcal{MM}$ uma noção de convergência. Como as classes de isometria das variedades Riemannianas fechadas com medida suave estão em $\mathcal{MM}$, podemos estudar quais são as propriedades topológicas desta ou de outras subclasses envolvendo variedades.

Como utilizaremos a convergência G-H com medida como topologia em $\mathcal{MM}$, precisaremos normalizar a medida das variedades envolvidas. Denotaremos então por V_M o volume de uma variedade Riemanniana com medida suave (M, g, ϕ) e $\left(M, g, \frac{\phi}{V_M}\right)$ sua respectiva classe em $\mathcal{MM}$. Para não haver confusão, o volume da variedade dado pela densidade Riemanniana será chamado de volume Riemanniano.

Este primeiro teorema nos diz que toda variedade Riemanniana com medida suave n-dimensional e fechada com $\mathrm{Ric}_\phi^q \geq r$ surge do colapso de uma sequência de variedades Riemannianas com medida suave $(n+q)$-dimensionais e fechadas com $\mathrm{Ric} \geq r$ se $q \geq 2$.

Teorema 4.2.3. *Seja (B, g, ϕ) uma variedade Riemanniana fechada com medida suave tal que $\mathrm{Ric}_\phi^q \geq r$, para $r \in \mathbb{R}$ e um inteiro $q \geq 2$. Então $\left(B, g, \frac{\phi}{V_B}\right)$ é o limite G-H mensurado de uma sequência $\left(M_i, g_i, \frac{1}{V_{M_i}}\right)_{i=1}^\infty$ de variedades Riemannianas com medida suave $(n+q)$-dimensionais, fechadas e com* $\mathrm{Ric} \geq r$.

Demonstração. Assim como no teorema 3.1.1 consideraremos as variedades $M_i = B \times_{f_i} S^q$ com $f_i = \phi^{\frac{1}{q}}/i$. Vimos que para i suficientemente grande as variedades M_i possuem $\mathrm{Ric} \geq r$, assim precisamos mostrar a convergência $M_i \to B$ para $i \to \infty$.

Se $S = \sup\{\phi(b) : b \in B\}$ e $x, y \in M_i$ temos que

$$d(\pi_i(x), \pi_i(y)) \leq d(x,y) \leq d(\pi_i(x), \pi_i(y)) + 2\pi \frac{S^{\frac{1}{q}}}{i}$$

onde a primeira desigualdade surge por π_i ser uma submersão Riemanniana, e a segunda é consequência de calcular o comprimento do caminho que liga x e y dado como união dos caminhos nas fibras com um caminho horizontal.

Para uma função contínua f em B temos que

$$\begin{aligned}(V_{M_i})^{-1} \int_{M_i} f \circ \pi_i \mathrm{dvol}_{M_i} &= \left(\int_{B \times S^q} f_i^q \circ \pi_i \mathrm{dvol}_B \wedge \mathrm{dvol}_{S^q}\right)^{-1} \int_{B \times S^q} (f \cdot f_i^q) \circ \pi_i \mathrm{dvol}_B \wedge \mathrm{dvol}_{S^q} \\ &= \left(V_{S^q} \int_B f_i^q \mathrm{dvol}_B\right)^{-1} V_{S^q} \int_B f \cdot f_i^q \mathrm{dvol}_B \\ &= (V_B)^{-1} \int_B f \cdot \phi \, \mathrm{dvol}_B.\end{aligned}$$

Portanto, tomando $\epsilon_i = 2\pi \frac{S^{\frac{1}{q}}}{i}$ e os mapas π_i, temos a convergência de Gromov-Hausdorff mensurada. $\square$

Temos então uma espécie de recíproca do teorema anterior dizendo que se um ponto limite de uma sequência de variedades Riemannianas com medida suave n-dimensionais, fechadas e com $\mathrm{Ric} \geq r$ é ainda uma variedade n-dimensional, então esta possui $\mathrm{Ric} \geq r$ no sentido da definição 4.2.1 contanto que tenhamos limitações $|\mathrm{Sec}| \leq \Lambda$ e $\mathrm{Diam} \leq D$ para a sequência.

Teorema 4.2.4. *Seja $(M_i, g_i)_{i=1}^\infty$ uma sequência de variedades Riemannianas n-dimensionais, fechadas e conexas com $|\mathrm{Sec}| \leq \Lambda$ e $\mathrm{Diam} \leq D$, para $\Lambda, D \in \mathbb{R}^+$. Suponha que a sequência $\left(M_i, g_i, \frac{1}{V_{M_i}}\right)_{i=1}^\infty$ possua um ponto limite (X, μ) na topologia de Gromov-Hausdorff mensurável tal que X é uma variedade n-dimensional. Se para algum $r \in \mathbb{R}$ todo elemento da sequência possui $\mathrm{Ric} \geq r$, então $\mathrm{Ric} \geq r$ no sentido generalizado da definição* 4.2.1.

Demonstração. Passando para uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\lim_{i\to\infty}\left(M_i, g_i, \frac{1}{V_{M_i}}\right) = (X, \mu)$$

na topologia G-H mensurada. Como X é uma variedade n-dimensional, temos pelo teorema 2.5.10 que os volumes Riemannianos da sequência são limitados inferiormente. Logo pelo corolário 2.5.12 o raio de injetividade da sequência é limitado inferiormente por uma constante positiva.

Logo podemos aplicar o teorema de Kasue 2.5.1 para obter uma subsequência $(M_{i'}, g_{i'})$, uma variedade suave M e difeomorfismos $\Phi_{i'} : M_{i'} \to M$ de classe $C^{1,\beta}$ tal que as métricas $(\Phi_{i'*}g_{i'})$ convergem a uma métrica g de classe $C^{1,\beta}$ na topologia $C^{1,\alpha}$, onde $0 < \alpha < \beta < 1$. Em particular a sequência $(M, \Phi_{i'*}g_{i'})$ converge na topologia de Gromov-Hausdorff à variedade (M, g).

Então como $(M_{i'}, g_{i'})$ e $(M, \Phi_{i'*}g_{i'})$ são isométricos, temos que X e (M, g) são espaços métricos isométricos. Assim podemos assumir que nossa sequência original é da forma $\left(M, \Phi_{i'*}g_{i'}, \frac{1}{V_{i'}}\right)$ e aplicando o lema 4.2.2 obtemos resultado. $\square$

Veremos agora um resultado semelhante ao anterior mas para o qual a sequência dada colapsa. Se um ponto limite de uma sequência de variedades Riemannianas com medida suave $(n+q)$-dimensionais $(q > 0)$, fechadas e com $\mathrm{Ric} \geq r$ é uma variedade n-dimensional, então esta possui $\mathrm{Ric}^q_\phi \geq r$ no sentido da definição 4.2.1 contanto que tenhamos limitações $|\mathrm{Sec}| \leq \Lambda$ e $\mathrm{Diam} \leq D$ para a sequência.

Teorema 4.2.5. *Seja $(M_i, g_i)_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de variedades Riemannianas $(n+q)$-dimensionais, fechadas e conexas com $|\mathrm{Sec}| \leq \Lambda$ e $\mathrm{Diam} \leq D$, para $\Lambda, D \in \mathbb{R}^+$. Suponha que a sequência $\left(M_i, g_i, \frac{1}{V_{M_i}}\right)_{i=1}^{\infty}$ possua um ponto limite (X, μ) na topologia de Gromov-Hausdorff mensurável tal que X é uma variedade n-dimensional. Se para algum $r \in \mathbb{R}$ todo elemento da sequência possui $\mathrm{Ric} \geq r$, então $\mathrm{Ric}^q_X \geq r$ no sentido generalizado da definição* 4.2.1.

Demonstração. Lembramos que ao dizer que X é uma variedade, queremos dizer que na construção de X como um espaço quociente $\widehat{X}/O(N)$ dado pelo teorema 2.5.6, a ação de $O(N)$ na variedade $\widehat{X}$ tem um único tipo de órbita. Então X tem a estrutura de uma variedade suave com um par $C^{1,\alpha}$-regular $\left(g^X, \phi^X\right)$.

Passando para uma subsequência se necessário, podemos assumir que

$$\lim_{i\to\infty}\left(M_i, g_i, \frac{1}{V_{M_i}}\right) = (X, \mu)$$

na topologia G-H mensurada.

Multiplicando as métricas g_i por uma mesma constante, podemos assumir que $|\mathrm{Sec}| \leq 1$ para todas as métricas. Então dado $\epsilon > 0$ podemos usar o teorema de Abresch 2.5.8 para obter métricas $g_i(\epsilon)$ que satisfazem

$$e^{-\epsilon} g_i \leq g_i(\epsilon) \leq e^{\epsilon} g_i$$
$$\left|\nabla_{g_i} - \nabla_{g_i(\epsilon)}\right| \leq \epsilon$$
$$\left|\nabla^k_{g_i(\epsilon)} R\left(M_i, g_i(\epsilon)\right)\right| \leq A_k(n, \epsilon)$$

Tomando ϵ pequeno podemos assumir que $\text{Ric}\left(M_i, g_i\left(\epsilon\right)\right) \geq \left(r - \epsilon\right)$. Ainda mais, para ϵ pequeno, seja $B\left(\epsilon\right)$ um limite de Gromov-Hausdorff de uma subsequência de $\left\{\left(M_i, g_i\left(\epsilon\right)\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ Por comodidade nós renomeamos a subsequência como $\left\{\left(M_i, g_i\left(\epsilon\right)\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$. Como a curvatura Riemanniana dos $g_i\left(\epsilon\right)$ é limitada, multiplicamos as métricas por uma constante positiva $b\left(\epsilon\right)$ tal que a curvatura seccional fique limitada em valor absoluto por 1.

Agora podemos aplicar o teorema 2.5.7 para obter, para i grande, um fibrado $f_i : M_i \to B\left(\epsilon\right)$ com fibras infranil e grupo estrutural $\text{Aff}\left(F, \nabla_{can}\right)$. Podemos usar a estrutura das fibras infranil e integrar sobre elas a métrica $g_i\left(\epsilon\right)$ para obter uma métrica $g_i'\left(\epsilon\right)$ dada por uma perturbação C^2 de $g_i\left(\epsilon\right)$ que é invariante com respeito a Nil-estrutura (veja a proposição 4.9 do artigo de Cheeger, Fukaya e Gromov [7]). Em particular, podemos assumir que $\text{Ric}\left(M_i, g_i'\left(\epsilon\right)\right) \geq \left(\frac{r-2\epsilon}{b(\epsilon)}\right) g_i'\left(\epsilon\right)$.

Usando que $g_i'\left(\epsilon\right)$ é invariante por $\text{Aff}\left(F, \nabla_{can}\right)$ podemos definir uma métrica induzida $g_i^{B(\epsilon)}$ em $B\left(\epsilon\right)$. Logo $\left(M_i, g_i'\left(\epsilon\right)\right)$ é o espaço total de uma submersão Riemanniana $f_i : \left(M_i, g_i'\left(\epsilon\right)\right) \to \left(B\left(\epsilon\right), g_i^{B(\epsilon)}\right)$ com fibras infranil e holonomia afim. Denote $\phi_i^{B(\epsilon)}$ a medida induzidas em $B\left(\epsilon\right)$. Como o transporte de fibras da submersão Riemanniana preserva as formas volume afim-paralela das fibras, a menos de constantes, o teorema 4.1.1 implica que $\text{Ric}_{B(\epsilon)}^q \geq \left(\frac{r-2\epsilon}{b(\epsilon)}\right)$. Multiplicando as métricas por $\left(b\left(\epsilon\right)\right)^{-1}$ temos que $\text{Ric}_{B(\epsilon)}^q \geq \left(r - 2\epsilon\right)$.

Variando i e ϵ, podemos extrair uma subsequência de $\left\{\left(B\left(\epsilon\right), g_i^{B(\epsilon)}, \phi_i^{B(\epsilon)}\right)\right\}$ com $i \to \infty$ e $\epsilon \to 0$ que converge na topologia $C^{1,\alpha}$ para $\left(X, g^X, \phi^X\right)$. O teorema segue agora do Lema 4.2.2. $\square$

4.3 Limitações no tensor de Bakry-Émery-Ricci e o volume de tubos de distância

Dado um espaço de medida-métrica suave $\left(M, g, \phi\, d\text{vol}_M\right)$ e um subconjunto mensurável $\mathcal{O}$ de M, denote

$$\text{vol}_\phi\left(\mathcal{O}\right) = \int_{\mathcal{O}} \phi\, d\text{vol}_M.$$

Seja T_0 um subconjunto fechado de M, um subconjunto $T \subset M$ contendo T_0 é um *tubo de distância* com base em T_0 se para todo $t \in T$, existe um segmento $s \subset T$ de algum $t_0 \in T_0$ a t com comprimento $l\left(s\right) = d\left(t, T_0\right)$.

Para $0 < u_1 < u_2$, defina o anel de distância

$$A\left(u_1, u_2\right) = \left\{t \in T : u_1 \leq d\left(t, T_0\right) \leq u_2\right\}$$

Se $\text{Ric}_\phi^\infty \geq r$ e $c \in \mathbb{R}$, tome

$$\widehat{v}\left(u_1, u_2, c\right) = \int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{r}{2}x^2 + cx} dx.$$

Dado números $0 < u_1 < u_2 < u_3, u_4$, assuma que o tubo T é uma união disjunta de segmentos, começando em T_0, de comprimento pelo menos u_3. Seja s um tal segmento de $t_0 \in T_0$ a $t \in T$, com comprimento $l\left(s\right) > u_3$ e parâmetro de comprimento de arco u. Podemos decompor a medida $\phi\, d\text{vol}_M$ em $A\left(u_1, u_4\right)$ como $\phi \cdot \text{area}_s\left(u\right) \cdot du \cdot \mu\left(s\right)$, onde μ é uma medida no espaço $\mathcal{S}$ de segmentos distintos s que compõem $A(u_1, u_4)$, du é a medida de comprimento ao longo do segmento s e $\mathrm{area}_s(u)$ é o tamanho relativo da densidade de área Riemanniana transversal ao longo de s, medida com respeito ao leque de segmentos.

Dado um conjunto de nível de distância constante de T_0, denotamos a sua segunda forma fundamental por Π. (Com nossas convenções, a fronteira da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ tem curvatura média positiva). Diferenciando ao longo do segmento s, com respeito a u, e usando o teorema 3.11 do livro de Gray [20] temos

$$\partial_u \ln(\phi(u)\,\mathrm{area}_s(u)) = \frac{\partial_u(\phi(u)\,\mathrm{area}_s(u))}{\phi(u)\,\mathrm{area}_s(u)} = \mathrm{Tr}(\Pi)(u) + \partial_u \ln(\phi(u)) \tag{4.3.1}$$

e

$$\partial_u^2 \ln(\phi(u)\,\mathrm{area}_s(u)) = \partial_u \mathrm{Tr}(\Pi)(u) + \partial_u^2 \ln(\phi(u)). \tag{4.3.2}$$

Da equação de Riccati para Π (corolário 3.6 de [20]),

$$\partial_u \mathrm{Tr}(\Pi)(u) = -\mathrm{Tr}\left(\Pi^2\right) - \mathrm{Ric}(\partial_u, \partial_u) \leq -\mathrm{Ric}(\partial_u, \partial_u).$$

Então

$$\partial_u^2 \ln(\phi(u)\,\mathrm{area}_s(u)) \leq -\mathrm{Ric}_\phi^\infty(\partial_u, \partial_u) \leq -r.$$

Logo para qualquer $c \in \mathbb{R}$,

$$\partial_u^2 \left(\ln(\phi(u)\,\mathrm{area}_s(u)) + \frac{r}{2}u^2 - cu\right) \leq 0. \tag{4.3.3}$$

Fixe um segmento s e tome

$$a(u) = \phi(u)\,\mathrm{area}_s(u),$$

$$\widehat{a}(u) = e^{-\frac{r}{2}u^2 + cu},$$

$$v(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} a(u)\,du,$$

e

$$\widehat{v}(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} \widehat{a}(u)\,du.$$

Então (4.3.3) diz que

$$\frac{d^2}{du^2} \ln\left(\frac{a}{\widehat{a}}\right) \leq 0.$$

i.e. que $\ln\left(\frac{a}{\widehat{a}}\right)$ é côncava em u.

Lema 4.3.1. *Se* $\frac{v(u_2,u_3)}{\widehat{v}(u_2,u_3)} \leq \frac{v(u_1,u_2)}{\widehat{v}(u_1,u_2)}$ *então* $\frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)} \leq \frac{v(u_2,u_3)}{\widehat{v}(u_2,u_3)}$.

Demonstração. Suponha que

$$\frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)} > \frac{v(u_2,u_3)}{\widehat{v}(u_2,u_3)} = \frac{\int_{u_2}^{u_3} \frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} \widehat{a}(u)\,du}{\int_{u_2}^{u_3} \widehat{a}(u)\,du}.$$

Se $\frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)} \geq \frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)}$ então a concavidade de $\ln\left(\frac{a}{\widehat{a}}\right)$ implica que para $t \in [0,1]$

$$\ln\left(\frac{a(u_3)}{\hat{a}(u_3)}\right) \leq t\ln\left(\frac{a(u_2)}{\hat{a}(u_2)}\right) + (1-t)\ln\left(\frac{a(u_3)}{\hat{a}(u_3)}\right) \leq \ln\left(\frac{a(tu_2+(1-t)u_3)}{\hat{a}(tu_2+(1-t)u_3)}\right),$$

logo para $u_2 \leq u \leq u_3$ temos $\frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} \geq \frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)}$, assim

$$\frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)} = \frac{\int_{u_2}^{u_3} \frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)} \widehat{a}(u)\,du}{\int_{u_2}^{u_3} \widehat{a}(u)\,du} \leq \frac{\int_{u_2}^{u_3} \frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} \widehat{a}(u)\,du}{\int_{u_2}^{u_3} \widehat{a}(u)\,du},$$

que é uma contradição. Então

$$\frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)} < \frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)}. \tag{4.3.4}$$

Com a concavidade de $\ln\left(\frac{a}{\widehat{a}}\right)$, (4.3.4) implica que para $u < u_2$ e $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} t\ln\left(\frac{a(u)}{\hat{a}(u)}\right) + (1-t)\ln\left(\frac{a(u_2)}{\hat{a}(u_2)}\right) &< t\ln\left(\frac{a(u)}{\hat{a}(u)}\right) + (1-t)\ln\left(\frac{a(u_3)}{\hat{a}(u_3)}\right) \\ &\leq \ln\left(\frac{a(tu+(1-t)u_3)}{\hat{a}(tu+(1-t)u_3)}\right), \end{aligned}$$

logo para t tal que $tu + (1-t)u_3 = u_2$ temos $\frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)} > \frac{a(u)}{\widehat{a}(u)}$, ou seja, $\frac{a(u)}{\widehat{a}(u)}$ é crescente em u para $u < u_2$ e assim

$$\frac{\int_{u_1}^{u_2} \frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} \widehat{a}(u)\,du}{\int_{u_1}^{u_2} \widehat{a}(u)\,du} < \frac{\int_{u_1}^{u_2} \frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)} \widehat{a}(u)\,du}{\int_{u_1}^{u_2} \widehat{a}(u)\,du} = \frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)}.$$

A concavidade de $\ln\left(\frac{a}{\widehat{a}}\right)$ e (4.3.4) também implicam que para $t \in [0,1]$

$$\ln\left(\frac{a(u_2)}{\hat{a}(u_2)}\right) < t\ln\left(\frac{a(u_2)}{\hat{a}(u_2)}\right) + (1-t)\ln\left(\frac{a(u_3)}{\hat{a}(u_3)}\right) \leq \ln\left(\frac{a(tu_2+(1-t)u_3)}{\hat{a}(tu_2+(1-t)u_3)}\right),$$

logo para $u_2 \leq u \leq u_3$ temos $\frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} > \frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)}$, assim

$$\frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)} = \frac{\int_{u_2}^{u_3} \frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)} \widehat{a}(u)\,du}{\int_{u_2}^{u_3} \widehat{a}(u)\,du} < \frac{\int_{u_2}^{u_3} \frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} \widehat{a}(u)\,du}{\int_{u_2}^{u_3} \widehat{a}(u)\,du}.$$

Então temos

$$\frac{\int_{u_1}^{u_2} \frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} \widehat{a}(u)\, du}{\int_{u_1}^{u_2} \widehat{a}(u)\, du} < \frac{a(u_2)}{\widehat{a}(u_2)} < \frac{\int_{u_2}^{u_3} \frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} \widehat{a}(u)\, du}{\int_{u_2}^{u_3} \widehat{a}(u)\, du},$$

que contradiz a suposição. □

Lema 4.3.2. *Se* $\frac{v(u_2,u_3)}{\widehat{v}(u_2,u_3)} \leq \frac{v(u_1,u_2)}{\widehat{v}(u_1,u_2)}$ *então para* $u_4 \in (u_3, l(s))$, $\frac{v(u_3,u_4)}{\widehat{v}(u_3,u_4)} \leq \frac{v(u_2,u_3)}{\widehat{v}(u_2,u_3)}$.

Demonstração. Para $u \in (u_3, l(s))$, tome

$$F(u) = \ln \left(\frac{v(u_3, u)}{\widehat{v}(u_3, u)} \Big/ \frac{v(u_2, u_3)}{\widehat{v}(u_2, u_3)} \right).$$

Então

$$F'(u) = \frac{a(u)}{v(u_3, u)} - \frac{\widehat{a}(u)}{\widehat{v}(u_3, u)} = \frac{\widehat{a}(u)}{v(u_3, u)} \left[\frac{a(u)}{\widehat{a}(u)} - \frac{v(u_3, u)}{\widehat{v}(u_3, u)} \right].$$

Lema 4.3.1 implica que se $F(u) \leq 0$ então $F'(u) \leq 0$. Podemos estender $F(u)$ suavemente para $u = u_3$, com

$$F(u_3) = \ln \left(\frac{a(u_3)}{\widehat{a}(u_3)} \Big/ \frac{v(u_2, u_3)}{\widehat{v}(u_2, u_3)} \right).$$

Pelo Lema 4.3.1, $F(u_3) \leq 0$. Segue que $F(u) \leq 0$ para todo $u \in (u_3, l(s))$, que prova o lema. □

Com isso temos o seguinte teorema que compara a curvature de Bakry-Émery-Ricci com estas estimativas de volume,

Teorema 4.3.3. *Suponha que* $\mathrm{Ric}_\phi^\infty \geq r$ *para algum* $r \in \mathbb{R}$. *Dado números* $0 < u_1 < u_2 < u_3$, *nós assumimos que o tubo* T *é uma união disjunta de segmentos* s, *começando em* T_0, *de comprimento pelo menos* u_3. *Nós assumimos também que* $\mathrm{vol}_\phi(A(u_2, u_3)) > 0$. *Suponha que para algum* $c \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{vol}_\phi(A(u_2, u_3))}{\mathrm{vol}_\phi(A(u_1, u_2))} \leq \frac{\widehat{v}(u_2, u_3, c)}{\widehat{v}(u_1, u_2, c)} \tag{4.3.5}$$

Então existe um sub-tubo $T' \subset T$ *consistindo de uma união de segmentos* s *de* T_0, *tal que*

1. $$\frac{\mathrm{vol}_\phi(T' \cap A(u_1, u_2))}{\mathrm{vol}_\phi(A(u_1, u_2))} \geq 1 - \frac{\mathrm{vol}_\phi(A(u_2, u_3))}{\mathrm{vol}_\phi(A(u_1, u_2))} \left(\frac{\widehat{v}(u_2, u_3, c)}{\widehat{v}(u_1, u_2, c)} \right)^{-1}; \tag{4.3.6}$$

2. *Se um segmento* $s \subset T$, *começando em* T_0, *intersecta* $T' \cap A(u_2, u_3)$ *então* $s \subset T'$;

3. *Para todo* $u_4 > u_3$,
$$\frac{\mathrm{vol}_\phi(T' \cap A(u_3, u_4))}{\mathrm{vol}_\phi(T' \cap A(u_2, u_3))} \leq \frac{\widehat{v}(u_3, u_4, c)}{\widehat{v}(u_1, u_2, c)}. \tag{4.3.7}$$

Reciprocamente, suponha que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para cada tubo T e $c \in \mathbb{R}$ satisfazendo 4.3.5*, há um sub-tubo T' com as propriedades acima. Então* $\mathrm{Ric}_\phi^\infty \geq r$.

Demonstração. Temos

$$\frac{\mathrm{vol}_\phi\left(A\left(u_2,u_3\right)\right)}{\mathrm{vol}_\phi\left(A\left(u_1,u_2\right)\right)}=\frac{\int_{\mathcal{S}}\frac{v_s(u_2,u_3)}{v_s(u_1,u_2)}v_s\left(u_1,u_2\right)d\mu\left(s\right)}{\int_{\mathcal{S}}v_s\left(u_1,u_2\right)d\mu\left(s\right)}.$$

Tome

$$\mathcal{S}'=\left\{s\in\mathcal{S}:\frac{v_s\left(u_2,u_3\right)}{v_s\left(u_1,u_2\right)}<\frac{\widehat{v}\left(u_2,u_3\right)}{\widehat{v}\left(u_1,u_2\right)}\right\}$$

e

$$T'=\bigcup_{s\in\mathcal{S}'}s.$$

Afirmamos que (4.3.6) é satisfeita. Se não é satisfeita, tome $\mathcal{S}''=\mathcal{S}-\mathcal{S}'$ e $T''=T-T'$. Então

$$\frac{\mathrm{vol}_\phi\left(T''\cap A\left(u_1,u_2\right)\right)}{\mathrm{vol}_\phi\left(A\left(u_1,u_2\right)\right)}=1-\frac{\mathrm{vol}_\phi\left(T'\cap A\left(u_1,u_2\right)\right)}{\mathrm{vol}_\phi\left(A\left(u_1,u_2\right)\right)}>\frac{\mathrm{vol}_\phi\left(A\left(u_2,u_3\right)\right)}{\mathrm{vol}_\phi\left(A\left(u_1,u_2\right)\right)}\left(\frac{\widehat{v}\left(u_2,u_3\right)}{\widehat{v}\left(u_1,u_2\right)}\right)^{-1}. \tag{4.3.8}$$

Entretanto, da definição de T'',

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_\phi\left(A\left(u_2,u_3\right)\right)\geq\mathrm{vol}_\phi\left(T''\cap A\left(u_2,u_3\right)\right)&=\int_{\mathcal{S}''}\frac{v_s\left(u_2,u_3\right)}{v_s\left(u_1,u_2\right)}v_s\left(u_1,u_2\right)d\mu\left(s\right)\\&\geq\int_{\mathcal{S}''}\frac{\widehat{v}_s\left(u_2,u_3\right)}{\widehat{v}_s\left(u_1,u_2\right)}v_s\left(u_1,u_2\right)d\mu\left(s\right)=\frac{\widehat{v}_s\left(u_2,u_3\right)}{\widehat{v}_s\left(u_1,u_2\right)}\mathrm{vol}_\phi\left(T''\cap A\left(u_1,u_2\right)\right),\end{aligned}$$

que contradiz (4.3.8).

Se existe um ponto de corte ao longo de s, com respeito ao seu ponto base em T_0, em $u_c\in\left(u_3,u_4\right)$ então tomamos $v_s\left(u_3,u_4\right)=\int_{u_3}^{u_c}a_s\left(u\right)du$, e caso contrário tomamos $v_s\left(u_3,u_4\right)=\int_{u_3}^{u_4}a_s\left(u\right)du$. Usando Lema 4.3.2,

$$\frac{\mathrm{vol}_\phi\left(T'\cap A\left(u_3,u_4\right)\right)}{\mathrm{vol}_\phi\left(T'\cap A\left(u_2,u_3\right)\right)}=\frac{\int_{\mathcal{S}'}\frac{v_s(u_3,u_4)}{v_s(u_2,u_3)}v_s\left(u_2,u_3\right)d\mu\left(s\right)}{\int_{\mathcal{S}'}v_s\left(u_2,u_3\right)d\mu\left(s\right)}\leq\frac{\widehat{v}_s\left(u_3,u_4\right)}{\widehat{v}_s\left(u_2,u_3\right)}.$$

Isto prova a primeira parte do teorema.

Suponha agora que existe um número $r\in\mathbb{R}$ tal que para cada tubo T e $c\in\mathbb{R}$ satisfazendo (4.3.1), existe um subtubo T' satisfazendo as propriedades do teorema. Dado $m\in M$ e um vetor unitário $v\in T_mM$, seja T_0 uma hipersuperfície passando por m tal que $T_m\left(T_0\right)=v^\perp$ e a segunda forma fundamental de T_0 em m desaparece. Seja s um segmento minimizante com $s\left(0\right)=m$ e $s'\left(0\right)=v$. De (4.3.1),

$$\left.\frac{d}{du}\right|_{u=0}\left(\ln\left(\phi\left(u\right)\mathrm{area}\left(u\right)\right)\right)=v\left(\ln\phi\right).$$

De (4.3.2) e da equação de Riccati,

$$\left.\frac{d^2}{du^2}\right|_{u=0}\left(\ln\left(\phi\left(u\right)\mathrm{area}\left(u\right)\right)\right)=-\mathrm{Ric}_\phi^\infty\left(v,v\right).$$

Tome $c_0=v\left(\ln\phi\right)$ e $r_0=\mathrm{Ric}_\phi^\infty\left(v,v\right)$. Então para u pequeno,

$$\ln\left(\phi\left(u\right)\mathrm{area}\left(u\right)\right)\sim\mathrm{const.}+c_0u-\frac{r_0}{2}u^2.$$

Para $u_1<u_2<u_3<u_4$ pequenos, temos

$$\frac{v\left(u_2,u_3\right)}{v\left(u_1,u_2\right)}\sim\frac{\int_{u_2}^{u_3}e^{-\frac{r_0}{2}u^2+c_0u}du}{\int_{u_1}^{u_2}e^{-\frac{r_0}{2}u^2+c_0u}du}$$

e

$$\frac{v\left(u_3,u_4\right)}{v\left(u_2,u_3\right)}\sim\frac{\int_{u_3}^{u_4}e^{-\frac{r_0}{2}u^2+c_0u}du}{\int_{u_2}^{u_3}e^{-\frac{r_0}{2}u^2+c_0u}du}.$$

Tome T um tubo pequeno ao redor de s (com base T_0 pequena, tome u_3 pequeno em relação a u_4 e tome $c=c_0+\epsilon$ com $\epsilon>0$ pequeno tal que vale (4.3.5). Se há um subtubo T' tal que (4.3.7) vale, para todas tais escolhas, então devemos ter $r_0\geq r$. Isto prova o teorema. $\square$

Referências

[1] U. Abresch. *Über das glatten Riemannisher metriken*. Habilitationsschrift. Reinischen Friedrich-Willhelms-Universität Bonn, 1988.

[2] W. Ambrose. "A theorem of Myers". Em: *Duke Math J.* (1957).

[3] A. L. Besse. *Einstein Manifolds*. Springer, 2007.

[4] M.P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.

[5] D. G. Cheeger J. ; Ebin. *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*. AMS Chelsea Publishing, 1975.

[6] J. Cheeger. "Finiteness theorems for Riemannian manifolds". Em: *American Journal of Mathematics* (1970).

[7] J. Cheeger, K. Fukaya e M. Gromov. "Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds". Em: *Journal of the American Mathematical Society* (1992).

[8] J. Cheeger e D. Gromoll. "The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature". Em: *Journal of Differential Geometry* (1971).

[9] T. H. Colding. "Ricci curvature and volume convergence". Em: *Annals of Mathematics* (1997).

[10] X. Dai, G. Wei e R. Ye. "Smoothing Riemannian metrics with Ricci curvature bounds". Em: *Manuscripta Mathematica* (1996).

[11] F.J.E. Dillen e L.C.A. Verstraelen. *Handbook of Differential Geometry*. v. 1. North Holland, 2000.

[12] F.J.E. Dillen e L.C.A. Verstraelen. *Handbook of Differential Geometry*. v. 2. North Holland, 2005.

[13] C. Durán. "Pointed Wiedersehen Metrics on Exotic Spheres and Diffeomorphisms of S6". Em: *Geometriae Dedicata* (2001).

[14] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.

[15] M. Fernández-López e E. García-Río. "A remark on compact Ricci solitons". Em: *Mathematische Annalen* (2008).

[16] K. Fukaya. "A boundary of the set of riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters". Em: *Journal of Differential Geometry* (1988).

[17] K. Fukaya. “Collapsing riemannian manifolds to ones of lower dimensions”. Em: *Journal of Differential Geometry* (1987).

[18] K. Fukaya. “Collapsing riemannian manifolds to ones of lower dimensions 2”. Em: *Journal of the Mathematical Society of Japan* (1989).

[19] S. Gallot, D. Hullin e J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer, 2004.

[20] A. Gray. *Tubes*. Birkhäuser Basel, 2004.

[21] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés Riemanniennes*. Cédic Nathan, 1981.

[22] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 2011.

[23] A Kasue. “A convergence theorem for riemannian manifolds and some applications”. Em: *Nagoya Mathematical Journal* (1989).

[24] J. Lott. “Some geometric properties of the Bakry-Émery-Ricci tensor”. Em: *Commentarii Mathematici Helvetici* (2003).

[25] S. B. Myers e N. E. Steenrod. “The group of isometries of a Riemannian Manifold”. Em: *Annals of Mathemathics* (1939).

[26] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.

[27] B. O’Neill. “The Fundamental equations of a submersion”. Em: *Michigan Math Journal* (1966).

[28] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. Springer, 2006.

[29] W. A. Poor. *Differential Geometric Structures*. Dover Publications, 2007.

[30] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag, 1983.

[31] A. Wintner. “A criterion of oscillatory stability”. Em: *Quaterly Appl. Math.* (1949).

[32] J. A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature*. AMS Chealsea Publishing, 1967.

[33] W. Wylie. “Complete shrinking Ricci solitons have finite fundamental group”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* (2008).

[34] N. Yang. “A note on nonnegative Bakry-Émery Ricci curvature”. Em: *Archiv der Mathematik* (2009).