AS M-MATRIZES

E SUAS APLICAÇÕES

OLINDA THOMÉ CHAMMA

Orientador

Prof. Dr. BISWA NATH DATTA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto 79

A Deus, aos meus pais, à vovó

À Universidade Estadual de Ponta Grossa pela oportunidade da realização deste mestrado.

À Robin (•18-2-55 ; † 5-2-79) ... por ter sido o que foi.

Só podemos agradecer enquanto ainda estamos vivos
E se estamos vivos, o coração ainda bate
E se o coração bate, ainda se pode amar
E quando se ama, um agradecimento adquire
o seu sentido pleno porque, somente o que
se origina do amor permanece para a eternidade ...

(*Olinda*)

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Uma matriz real $A_{n\times n} = (a_{ij})$ é chamada de M-matriz se $a_{ij} \leq 0$, $i\neq j$ e todos os menores principais líderes de A forem positivos.

O conceito de M-matriz foi introduzido na literatura primeiramente por Ostrowski [21] . A partir de então as M-matrizes foram estudadas por vários pesquisadores tais como Fiedler and Ptak [9] , Schneider [24] , Araki [7] , Plemmons [20] , Varga [28] e muitos outros, uma vez que as aplicações destas matrizes se tornaram muito importantes nas ciências matemáticas.

Existem muitas caracterizações das M-matrizes e nesta tese procuramos as mais importantes e interessantes também, bem como nos propusemos a explicar em maiores detalhes estas aplicações quando se referem ao estudo dos Sistemas Lineares; Estabilidade dos Sistemas de Controle e a D-Estabilidade.

Também por nós é dada uma caracterização efetiva de M-matrizes e a partir dela deduzimos uma nova condição para que uma matriz tridiagonal seja uma M-matriz.

Esta condição é de particular importância, uma vez que as matrizes tridiagonais surgem nos vários estudos relativos à Equações Diferenciais Parciais e Ordinárias, o que passa a dar a esta condição um carater muito útil na prática.

Finalmente esta tese se conclui apresentando algumas questões abertas sobre o assunto proporcionando assim novos caminhos que possam ser abordados para pesquisas futuras.

O ESQUEMA DA TESE É O SEGUINTE :

No segundo capítulo são abordadas várias definições alternativas e algumas caracterizações conhecidas sobre M-matrizes, bem como a identificação de certas classes conhecidas que, através das caracterizações e condições especiais se identificam como M-matrizes.

No terceiro capítulo introduzimos o conceito de Matrizes não-negativas, a teoria de Perron-Frobenius e alguns métodos iterativos para a resolução de sistemas lineares.

No quarto capítulo explicamos com ênfase as aplicações das M-matrizes, sua importância na resolução do sistema linear $Ax = b$ onde A é não-singular, os critérios novos de convergência dos métodos iterativos, o Estudo da Estabilidade nos sistemas dinâmicos e a importância da D-estabilidade em relação a uma M-matriz. Outras aplicações também são mencionadas, porém de maneira mais breve.

No quinto capítulo estabelecemos a caracterização efetiva de M-matrizes não-singulares, provando que uma matriz A, com os elementos fora da diagonal principal não-negativos, é uma M-matriz não-singular se e somente se existe uma fatorização triangular para A na forma $A = LU$ onde L e U são também M-matrizes não-singulares triangulares inferior e superior respectivamente. A condição para que uma matriz seja uma M-matriz é também aqui apresentada, com um novo critério.

O último capítulo da tese aborda algumas questões abertas sobre o assunto, como já tivemos oportunidade de citar anteriormente.

CAPÍTULO II

DEFINIÇÕES DE M-MATRIZES E SUAS CARACTERÍZAÇÕES

Adotaremos no decorrer do trabalho a seguinte notação:

$\emptyset$ conjunto vazio

Φ o vetor nulo

J a matriz identidade

S a matriz Assinatura (uma matriz diagonal com os elementos da diagonal $+1$ ou -1)

C o conjunto dos números complexos

R o conjunto dos números reais

C^n o conjunto dos n-vetores definidos em C

R^n o conjunto dos n-vetores definidos em R

$C^{n,n}$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ definidas em C

$R^{n,n}$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ definidas em R

$C_\pi^{n,n}$ as matrizes definidas em $C^{n,n}$ com os elementos da diagonal principal não-nulos

$Z^{n,n}$ o conjunto de todas as matrizes $A = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ com $a_{ij} \leq 0$ se $i \neq j$, $i \leq 1$, $j \leq n$

Seja $A \in R^{n,n}$. Então

$A > 0$ indica que todos os elementos de A são não-negativos e que $A \neq 0$

$A \geqq 0$ indica que $A > 0$ ou $A = 0$

A^t A transposta de A

A^{-1} A inversa de A

$\rho(A)$ o raio espectral de A; $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \det(\lambda I - A) = 0\}$

0 a matriz nula

$R_{\pi}^{n,n}$ as matrizes definidas em $R^{n,n}$ com elementos da diagonal principal não nulos

Abordamos primeiramente as principais definições de M-matrizes encontradas na literatura.

É conveniente salientar que, tanto estas definições se particularizam (como ocorre em relação às matrizes quadradas) como se ampliam (que é o que se verifica em relação às matrizes retangulares)

As M-matrizes podem ser encontradas no campo dos números reais e no campo dos números complexos que, segundo Ostrowski recebem o H-matrizes.

O nosso estudo é particularizado às M-matrizes e de maneira especial, não singulares.

Damos também algumas caracterizações das mesmas nos baseando em Plemmon [20] bem como outras que visam identificar certas classes de matrizes conhecidas como M-matrizes.

DEFINIÇÃO 2.1: (Ostrowski)[22] - Seja $A \in R^{n,n}$ uma matriz quadra $n \times n$ onde $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$ e $a_{ii} > 0$ para $i = 1,\ldots,n$. Tal matriz é dita uma M-matriz se satisfaz qualquer uma das seguintes condições abaixo:

a) $A = \alpha I - B$ para uma matriz $B \geq 0$ e $\alpha > \rho(B)$

b) Todos os menores principais de A são positivos

c) A parte real de cada autovalor de A é positiva

d) A^{-1} existe e $A^{-1} \geq 0$

e) Existe um vetor $x > 0$ tal que $Ax > 0$

DEFINIÇÃO 2.2: (Ostrowski)[11] - Uma M-matriz é definida como sendo uma matriz $A_{n\times n} \in R^{n,n}$ tal que $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, que possui uma das três condições equivalentes:

a) A é não singular e os elementos de A^{-1} são não-negativos

b) Todos os menores principais de A são positivos

c) Existem n números positivos nj tais que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} n_j > 0 \quad i = 1,\ldots,n$$

DEFINIÇÃO 2.3: (Plemmon) [20] - Uma matriz $n\times n$ que possa ser expressa na forma $A = sI - B$ onde $B = (b_{ij})$ com $b_{ij} \geq 0$, $1 \leq i, j \leq n$ e $s \geq \rho(B)$, é chamada uma M-matriz

DEFINIÇÃO 2.4: (Varga) [28] - Qualquer matriz $B = (b_{ij})$ com $b_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, pode ser escrita como $B = \tau J - C$ onde $\tau = \max b_{ii}$ e onde $C = (c_{ij}) \in R^{n,n}$ satisfazendo $C \geq 0$, tendo seus elementos definidos por

$$c_{ii} = \tau - b_{ii} \geq 0, \quad c_{ij} = -b_{ij} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,\ldots,n .$$

Seguindo Ostrowski, tal matriz é dita uma M-matriz não-singular se $\tau > \rho(C)$. [16]

Observemos que as definições 2.3 e 2.4 diferem apenas na notação das matrizes, sendo a definição 2.3 mais generalizada, isto é, abrangendo M-matrizes não singulares ou singulares.

As definições 2.1 e 2.2 são estabelecidas somente para o caso em que a M-matriz é não-singular.

DEFINIÇÃO 2.5: (Schneider)[24] - Suponhamos $A = (a_{ij})$ satizfazen $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ e $a_{ii} \geq 0$ para $i = 1,\ldots,n$. A matriz quadrada A é chamada M-matriz se satisfaz uma das consições de equivalência abaixo:

a) $A = \alpha I - B$ para alguma matriz B não-negativa e algum $\alpha \geq \rho(B)$

b) A parte real de cada auto valor não nulo de A é positiva

c) Todos os menores principais de A são não-negativos

DEFINIÇÃO 2.6: (Varga)[27] - Uma matriz real $A_{n\times n} = (a_{ij})$ com $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, é uma M-matriz se A é não-singular e $A^{-1} \geq 0$.

É de nosso interesse salientar no presente momento o conceito de monotocidade e semi-monotocidade, pois estes conceitos são úteis para o caso em que as matrizes não são tão somente quadradas, mas também retangulares.

Uma outra definição que nos será útil para este fim é a definição da Inversa Moore - Penrose.

DEFINIÇÃO 2.7: [18] - Para uma matriz $A = (a_{ij})$, consideremos as quatro equações matriciais

$$AX = AXA \qquad (AX)^* = AX$$
$$X = XAX \qquad (XA)^* = XA$$

Se a matriz X satisfaz estas quatro equações ela é chamada matriz Inversa Generalizada (Moore-Penrose)

DEFINIÇÃO 2.8: [22] - Uma matriz A é chamada semi-monotônica se $A^+ \geq 0$. (A^+ denota a inversa de Moore-Penrose).

DEFINIÇÃO 2.9: [23] - Uma matriz $A = (a_{ij})$ retangular é chamada monotônica por linhas se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes abaixo:

a) $x \in R(A^T)$ e $Ax \geq \Phi$ implica $x \geq \Phi$ ($R(A^T)$ denota a imagem de A^T)

b) $AX \geq 0$ implica $AA^+X \geq 0$

c) O sistema $Y \geq 0$, $YA = A^+A$ é consistente

d) $A^+ = B + C$ para algum $B \geq 0$ e C tal que $CA = 0$

DEFINIÇÃO 2.10: (Plemmons) [18] - Suponhemos $A_{m \times n}$ tal que possa ser expressa na forma $A = \alpha B - M$ onde $M = BG \geq 0$, B com "rank" n e $B^+ \geq 0$. Então A é chamada uma M-matriz retangular se A satisfaz qualquer uma das seguintes condições equivalentes abaixo:

a) $\alpha \geq \rho(G)$ $\{G = B^{+}M \geq 0\}$

b) $A^{+} \geq 0$

Para darmos continuidade ao nosso trabalho, queremos frisar que as nossas caracterizações sobre M-matrizes serão dirigidas às M-matrizes não singulares definidas em $R^{n,n}$, tendo como base a Definição 2.3, com $s > \rho(B)$ e $a_{ii} > 0$, $i = 1,...,n$

Então, se $A \in Z^{n,n}$, cada uma das condições equivalentes que se seguem, são equivalentes à afirmação:

A é uma matriz não singular.

2.1. PRINCIPAIS CARACTERIZAÇÕES DE M-MATRIZES SOBRE

a) Positividade dos Menores Principais

P_1 - Todos os menores principais de A são positivos

P_2 - Todo autovalor real de cada submatriz principal de A é positivo

P_3 - $A + D$ é não singular para cada matriz diagonal D não negativa

P_4 - Para cada $x \neq \Phi$ existe uma matriz diagonal positiva D tal que $x^T ADx > 0$

P_5 - Para cada $x \neq \Phi$ existe uma matriz diagonal não-negativa D tal que $x^T ADx > 0$

P_6 - A não troca de sinal para qualquer vetor. Isto é, se $x \neq \Phi$, então para um sub-índice i,

$$x_i (Ax)_i > 0$$

P_7 - Para cada matriz assinatura S, existe um $x > \Phi$ tal que

$$SASx > 0$$

P_8 - A soma de todos os menores principais $k \times k$ de A é positiva para $k = 1,2,\ldots,n$

P_9 - Todo autovalor real de A é positivo

P_{10} - $A + \alpha I$ é não singular para cada escalar $\alpha \geq 0$

P_{11} - Todos os menores principais líderes de A são positivos

P_{12} - Existem matrizes triangulares L e U inferior e superior respectivamente, com os elementos da diagonal positivos tais que a seguinte fatorização se verifica:

$$A = LU$$

P_{13} - Existe uma sequência estritamente crescente de sub-espaços $\emptyset \neq S_1 \subset \ldots \subset S_n = \{1,\ldots,n\}$ tal que o determinante da submatriz principal de A somado pela escolha de linhas e colunas destes índices de S_i é positivo para $i = 1,\ldots,n$

P_{14} - Existe uma matriz de permutação P e matrizes triangulares L e U inferior e superior respectivamente, com elementos da diagonal positivos, tal que

$$PAP^T = LU$$

b) Positiva Inversa e Partições

P_{15} - A é positiva Inversa. Isto é, A^{-1} existe e $A^{-1} \geq 0$

P_{16} - A é monotônica. Isto é,

$$Ax \geq 0 \implies x \geq \Phi \text{ para todo } x \in R^n$$

P_{17} - A tem uma partição regular convergente. Isto é, A tem uma uma representação

$$A = M-N \quad , \quad M^{-1} \geq 0 \quad , \quad N \geqq 0$$

com $M^{-1}N$ convergente. Isto é, $\rho(M^{-1}N) < 1$.

P_{18} - A tem uma partição fraca regular convergente. Isto é, A tem uma representação

$$A = M-N \quad , \quad M^{-1} \geq 0, \quad M^{-1}N \geqq 0$$

com $M^{-1}N$ convergente.

P_{19} - A tem uma partição fraca regular, e existe um $x > \Phi$ com $Ax > 0$

P_{20} - Existem matrizes positivas-inversas M_1 e M_2 com $M_1 \geq A \leq M_2$. Isto é, $A \geq M_1 \Rightarrow A-M_1 \geq 0$, $A \leq M_2 \Rightarrow A-M_2 \leq 0$

P_{21} - Existe uma matriz positiva-inversa M, com $M \geqq A$ e uma M-matriz não-singular B tal que $A = MB$

P_{22} - Existe uma matriz positiva-inversa M e uma M-matriz não singular B tal que $A = MB$

P_{23} - Toda partição fraca regular de A é convergente

P_{24} - Toda partição regular de A é convergente

c) Estabilidade

P_{25} - Existe uma matriz diagonal positiva tal que

$$AD + DA^T \text{ é positiva definida}$$

P_{26} - A é diagonalmente semelhante a uma matriz cuja parte simétrica é positiva definida. Isto é, existe uma matriz diagonal positiva E tal que para $B = E^{-1}AE$, a matriz

$$(B + B^T)/2$$ é positiva definida

P_{27} - Para cada matriz positiva semidefinida não nula P, a matriz PA tem os elementos da diagonal positivos

P_{28} - Toda submatriz principal de A satisfaz P_{25}

P_{29} - A é positivamente estável. Isto é, a parte real de cada autovalor de A é positiva

P_{30} - Existe uma matriz simétrica e positiva definida W tal que

$$AW + WA^T$$

é positiva definida

P_{31} - $A + I$ é não-singular e

$$G = (A + I)^{-1}(A - I)$$

é convergente

P_{32} - $A + I$ é não-singular e para

$$G = (A + I)^{-1}(A - I) ,$$

existe uma matriz simétrica e positiva definida W tal que $W - G^TWG$ é positiva definida

d) Semipositividade e Diagonal Dominante

P_{33} - A é semipositiva. Isto é, existe $x > \Phi$ com $Ax > 0$

P_{34} - Existe $x \geq \Phi$ com $Ax > 0$

P_{35} - Existe uma matriz diagonal positiva D tal que $\mathcal{AD}$ tem a soma de todas as linhas positivas

P_{36} - Existe $x > \Phi$ com $Ax \geq \mathit{0}$ tal que se $(Ax)_{i_o} = 0$, então existem índices $1 \leq i_1,\ldots,i_r \leq n$ com $a_{i_k,i_{k+1}} \neq 0$ para $0 \leq k \leq r-1$ e $(Ax)_{i_r} > 0$

P_{37} - Existe $x > \Phi$ com $Ax \geq \mathit{0}$ e

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > 0 \text{ para cada } i = 1,2,\ldots,n$$

P_{38} - Existe $x > \Phi$ tal que, para cada matriz Assinatura S,

$$SASx > \mathit{0}$$

P_{39} - A tem todos os elementos da diagonal positivos e existe uma matriz diagonal D tal que AD é estritamente diagonal dominante. Isto é,

$$a_{ii}d_i > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|d_j \quad \text{para} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

P_{40} - A tem todos os elementos da diagonal positivos e existe uma matriz diagonal positiva D tal que

$D^{-1}AD$ é estritamente diagonal dominante.

As caracterizações acima nos fornecem condições de equivalência suficientes para que se possa afirmar que, uma vez verificadas estas condições, a matriz A é uma M-matriz não-singular.

Por outro lado, podemos encontrar condições que além de suficientes são também necessárias para que uma matriz quadrada

$A_{n\times n}=(a_{ij}) \in R^{n,n}$ seja uma M-matriz não singular. Neste caso, não se exige que os elementos fora da diagonal principal de A sejam não negativos, de acordo com a Definição 2.3 por nós utilizada até então. São elas:

P_{41} - $A+D$ é positiva-inversa para cada matriz diagonal D não-negativa

P_{42} - $A+\alpha J$ é positiva-inversa para cada escalar $\alpha \geq 0$

P_{43} - Cada submatriz principal de A é positiva-inversa

P_{44} - Cada submatriz principal de A de ordens 1,2 e n é positiva inversa

2.2 - CLASSES DE MATRIZES CONHECIDAS

a) Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R_{\pi}^{n,n}$ com $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ uma matriz triangular. Então A é uma M-matriz não-singular

DEM:

Como A é uma matriz triangular, os auvalores de A são os próprios elementos da diagonal principal de A portanto, todos são números reais e positivos, por construção.

Usando as equivalências da secção 2.2, este resultado é o mesmo que afirmar que a matriz A é uma M-matriz não-singular.

b) Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R_{\pi}^{n,n}$ com $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ uma matriz estritamente diagonal dominante. Então A é uma M-matriz não-singular.

DEM:

No capítulo posterior demonstraremos que tal matriz tem as partes reais de todos os seus autovalores positivos, isto é, $\text{Re}\ \lambda_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$ (Teorema 3.1).

Pelas equivalências da secção anterior podemos afirmar que A é uma M-matriz não-singular.

c) Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ com $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ uma matriz simétrica e positiva definida. Então A é uma M-matriz.

DEM:

Como A é simétrica e positiva definida, todos os seus menores principais líderes são positivos.

Pelas equivalências da secção anterior o argumento se repete e podemos afirmar que A é uma M-matriz.

CAPÍTULO III

MATRIZES NÃO-NEGATIVAS E OS MÉTODOS ITERATIVOS

Muitas das aplicações de M-matrizes se fundamentaram na teoria de Perron-Frobenius sobre matrizes não-negativas, razão pela qual achamos oportuno abordar tal assunto.

Os métodos iterativos também desempenham um papel importante em nosso trabalho, como veremos no decorrer do mesmo.

3.1 - MATRIZES REDUTÍVEIS E NÃO-REDUTÍVEIS

DEFINIÇÃO 3.1.1: [27] - Uma matriz $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in C^{n,n}$ se diz REDUTÍVEL se existe uma matriz de permutação $P_{n\times n}$ tal que

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde A_{11} é uma submatriz também quadrada $r\times r$ e A_{22} é uma submatriz também quadrada $(n-r)\times(n-r)$ onde $1 \leq r \leq n$.

Se esta matriz $P_{n\times n}$ não puder ser encontrada, dizemos que A é uma matriz IRREDUTÍVEL

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz irredutível.

DEFINIÇÃO 3.1.2: [27] - Consideremos a matriz $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in C^{n,n}$ uma matriz redutível de acordo com a Definição 3.1.1, ou seja

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{22} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} .$$

Se, depois desta forma, A_{11} e A_{22} permanecerem redutíveis, nós procuraremos uma nova matriz de permutação P de tal modo que consigamos o que se chama por definição de "Forma Normal" de uma matriz redutiível A.

Seja então a Forma Normal de A:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots\cdots & R_{1m} \\ 0 & R_{22} & \cdots\cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & R_{nm} \end{bmatrix}$$

onde cada submatriz R_{ij}, $1 \leq j \leq m$ é irredutível ou nula.

DEFINIÇÃO 3.1.3: [27] - Uma matriz $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in C^{n,n}$ é dita de Diagonal Dominante se

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| = \Lambda_i \ , \quad 1 \leq i \leq n \ .$$

Quando a desigualdade for estrita, a matriz é dita Estritamente Diagonal Dominante.

Quando a desigualdade for estrita para um índice i ao menos, e a matriz for irredutível, ela é dita Irredutivelmente Diagonal Dominante.

Abordaremos agora um teorema que tem a sua importância para nós por nos fornecer dados sobre os autovalores destas matri zes. Este teorema se utiliza, na sua demonstração, do teorema de Gerschgorin enunciado a seguir.

TEOREMA DE GERSCHGORIN: [27] - Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in C^{n,n}$ e seja

$$\Lambda_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad 1 \leq i \leq n .$$

Então todos os autovalores λ de A estão na união dos discos $|z - a_{ii}| \leq \Lambda_i$, $1 \leq i \leq n$.

TEOREMA 3.1: [27] - Seja a matriz $A_{n\times n} = (a_{ij})$ Estritamente Diagonal Dominante ou Irredutivelmente Diagonal Dominante. Então A é não-singular.

Além disso, se todos os elementos de sua diagonal principal são positivos, a parte real de cada autovalor λ_i, $1 \leq i \leq n$ é positiva.

DEM:

Vamos considerar somente o caso em que a matriz A é Estritamente Diagonal Dominante, pois a prova para o outro caso é semelhante.

Como A é Estritamente Diagonal Dominante, a união dos discos $|z - a_{ii}| \leq \Lambda_i$ não inclui a origem $z = 0$ do plano complexo, e então, por Gerschgorin $\lambda = 0$ não é um autovalor de A, o que prova ser A não-singular. Se os elementos da diagonal principal de A são todos os números reais e positivos, concluimos que a união dos discos $|z - a_{ii}| \leq \Lambda_i$ neste caso, contém somente pontos no palno complexo que tenham as partes reais positivas.

Logo, $\mathcal{R}(\lambda_i) > 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq n$

COROLÁRIO: Seja $A_{n\times n} = (a_{ij})$ uma matriz Hermitiana Estritamente Diagonal Dominante ou Irredutivelmente Diagonal Dominante com os elementos da diagonal principal positivos e reais. Então A é positiva definida.

3.2 - MATRIZES NÃO-NEGATIVAS E O TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

DEFINIÇÃO 3.2.1: Uma matriz A real, é dita positiva (não-negativa) se todos os elementos de A são positivos (não-negativos). Escrevemos $A > 0$ ($A \geq 0$) para indicar que a matriz A é positiva (não-negativa). Também representamos uma matriz não negativa por $|A|$.

Agora, para o desenvolvimento do Teorema de Perron-Frobenius é necessário estabelecer alguns conceitos e lemas a seguir:

Se $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ é uma matriz irredutível e $x \geq \Phi$ é qualquer vetor não nulo, seja

$$r_x \equiv \min \left\{ \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j}{x_i} \right\} ,$$

onde este mínimo é observado sobre todos os $x_i > 0$.

Consideramos a quantidade não-negativa r como sendo

$$r = \sup_{\substack{x>0 \\ x\neq 0}} \{r_x\} \qquad (1)$$

Agora,

Seja P o espaço de vetores $x \geq \Phi$ com $||x|| = 1$, ou seja Q o espaço de vetores $y = (I+A)^{n-1} x$ onde $x \in P$ e $y > \Phi$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade $Ax \geq r_x\, x$ por $(I+A)^{n-1}$, obtemos

$$Ay \geq r_x\, y ,$$

de onde se conclui que $r_y \geq r_x$. Além do mais, r pode ser definido como

$$r = \sup_{y \in Q} \{r_y\} \qquad (2) .$$

Como P é um espaço compacto de vetores e Q também o é, e como r_y é uma função contínua em Q, existe necessariamente um vetor positivo z para o qual

$$Az \geq rz , \qquad (1)$$

e não existe um vetor $w \geq \Phi$ para qual $Aw > rw$.

Definimos então, que todos os vetores não negativos z satisfazendo (1) são chamados VETORES EXTREMOS da matriz A.

LEMA 3.2.1: [27] - Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ uma matriz irredutível. Então a quantidade r (Def. 3.2.3) é positiva. Além do mais, cada VETOR EXTREMO z é um autovetor positivo da matriz A com o correspondente autovalor r , isto é $Az = rz$ e $z > \Phi$.

DEM. 1ª Parte:

Seja ξ um vetor positivo cujas componentes são todas iguais a um. Desde que a matriz A é irredutível, nenhuma linha se rá nula e consequentemente nenhuma componente de A se anula. Então $r_\xi > 0$, provando que $r > 0$.

$2^{\underline{a}}$ Parte:

Seja z um vetor extremo com $Az - rz = \eta$, onde $\eta \geq 0$. Se $\eta \neq 0$, então alguma componente de η é positiva; multiplicando pela matriz $(I+A)^{n-1}$ nós temos

$$Aw - rw > 0$$

onde $w = (I+A)^{n-1}z > \Phi$. Então $r_w > r$. Mas isto contradiz a definição de r em (2). Logo,

$$Az = rz \quad ,$$

e uma vez que $w \geq \Phi$ e $w = (1+r)^{n-1}z$, então $z > \Phi$, o que completa a prova.

LEMA 3.2.2: [27] - Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ uma matriz irredutível e seja $B_{n\times n} = (b_{ij})$ uma matriz complexa com $|B| \leq A$. Se β é qualquer autovalor de B, então

$$|\beta| \leq r \;, \quad (3)$$

onde r é a constante positiva. Além disso, a igualdade é válida em (3), isto é

$$\beta = re^{i\phi} \text{ , se e somente se}$$

$|B| = A$ e onde B tem a forma

$$B = e^{i\theta}DAD^{-1} \;,$$

e D é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal têm módulo unitário.

DEM:

Se $\beta y = By$ onde $y \neq \Phi$, então

$$\beta y_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}\, y_i \ , \ 1 \leq i \leq n \ .$$

Usando as hipóteses do lema temos que

$$|\beta|\ |y| \leq |B|\ |y| \leq A\ |y| \ , \qquad (4)$$

o que implica que $|\beta| \leq r_{|y|} \leq r$, provando (3)

Se $|\beta| = r$, então $|y|$ é um vetor extremo de A. Além do mais, do lema 3.2.1, $|y|$ é um autovetor positivo de A correspondendo a um autovalor positivo r. Então

$$r\ |y| = |B|\,|y| = A\ |y| \ , \qquad (5)$$

e desde que $|y| > 0$, nós concluímos de (5) e da hipótese de que $|B| \leq A$ que

$$|B| = A \ .$$

Para o vetor y, onde $|y| > 0$, seja

$$D = \mathrm{diag}\ \{\frac{y_1}{|y_1|} \ , \ \ldots \ , \ \frac{y_n}{|y_n|}\} \ .$$

Claramente os elementos da diagonal de D têm módulo unitário e

$$y = D\ |y| \qquad (6)$$

Sendo $\beta = re^{i}$, então $B_y = \beta_y$ pode ser escrito como

$$C\ |y| = r\ |y| \quad (7)$$

onde $$C \equiv e^{-i\theta}D^{-1}BD \quad (8)$$

De (5) e (7), igualando os termos iguais a $r\ |y|$ nós temos

$$C\ |y| = |B|\,|y| = |A|\,|y| \quad (9)\ .$$

Da definição da matriz C em (8), $|C| = |B|$. Combinando com $|B| = A$ nós temos

$$|C| = |B| = A \qquad (11)\ .$$

Então, de (9) nós concluímos que $C\ |y| = |C\ |y|$, e como $|y| > \phi$, $C = |C|$ e $C = A$ de (11)

Combinando este resultado com (8) obtemos o que queremos, isto é,

$$B = e^{i\theta}DAD^{-1} \quad .$$

Por outro lado, se B tem a forma $B = e^{i\theta}DAD^{-1}$, então $|B| = A$ e B tem um autovalor β com $|\beta| = r$, completando a prova.

Um corolário imediato deste lema é o seguinte:

COROLÁRIO: Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ uma matriz irredutível; então o autovalor positivo r do Lema 3.2.1 é igual ao raio espectral $\rho(A)$, sendo $B = A$ no lema

LEMA 3.2.3: [27] - Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ uma matriz irredutível e B qualquer submatriz principal quadrada de A. Então $\rho(B)<\rho(A)$.

DEM:

Se B é qualquer submatriz principal de A, então existe uma matriz de permutação P tal qur $B = A_{11}$ onde

$$C \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \; ; \; PAP^T = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} .$$

Aqui A_{11} e A_{22} são submatrizes principais quadradas respectivamente de ordens $(m\times m)$ e $(n-m)\times(n-m)$ de PAP^T, $1 \leq m \leq n$. Claramente $0 \leq C \leq PAP^T$ e $\rho(C) = \rho(B) = \rho(A_{11})$.

Mas como $C = |C| \neq PAP^T$, a conclusão se segue no Lema 3.2.2 e de seu corolário.

Agora estamos aptos a abordar o Teorema de Perron-Frobenius.

Historicamente, Perron provou este Teorema (1907) assumindo que $A > 0$ e sendo a matriz A irredutível. Mais tarde Frobenius (1912) extendeu os resultados de Perron também para a classe de matrizes irredutíveis e não-negativas.

TEOREMA 3.2.1 - O TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS: [27]

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ uma matriz irredutível. Então:

1) A tem um autovalor real positivo e igual a seu raio espectral.

2) Para $\rho(A)$ corresponde um autovalor $x > \phi$

3) $\rho(A)$ aumenta quando qualquer elemento de A aumenta.

4) $\rho(A)$ é um autovalor simples de A.

DEM:

Para a prova das partes 1 e 2, os argumentos se encontram no Lema 3.2.1 e no Corolário do Lema 3.2.2.

Para a prova da parte 3 vamos supor que aumentamos algum elemento da matriz A, nos dando uma nova matriz irredutível $\tilde{A}$, onde $\tilde{A} \geq A$ e $\tilde{A} \neq A$. Aplicando o Lema 3.2.2, concluimos que $\rho(\tilde{A}) > \rho(A)$.

Para provar a parte 4, isto é, que $\rho(A)$ é um zero de multiplicidade um do polinômio característico $\phi(t) = \det(tI-A)$, podemos usar o fato de que $\phi'(t)$ é a soma dos determinante das submatrizes principais $(n-1)\times(n-1)$ de $(tI-A)$.

Se A_i é qualquer submatriz principal do Lema 3.2.3, o $\det[tI-A_i]$ não pode tender a zero para qualquer $t \geq \rho(A)$. Disto segue-se que

$$\det[\rho(A)I - A_i] > 0 ,$$

e então

$$\phi'(\rho(A)) > 0 .$$

Consequentemente, $\rho(A)$ não pode ser um zero de $\phi(t)$ de multiplicidade maior que um, e então $\rho(A)$ é um autovalor simples de A.

OBS: Notemos que estes resultados nos mostram também que, se $Ax = \rho(A)x$ onde $x > \phi$ e $||x|| = 1$, nós não podemos encontrar um outro autovalor $y = \gamma\, n$, γ um escalar, sendo $Ay = \rho(A)$, de modo que o autovetor x assim normalizado é determinado de maneira única.

Daremos agora uma forma mais generalizada do Teorema de Perron-Frobenius:

TEOREMA 3.2.2: [27] - Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ uma matriz qualquer. Então:

1) A tem um autovalor real não-negativo igual a seu raio espectral. Além do mais este autovalor é positivo a menos que A seja redutível e a "forma normal" de A estritamente triangular superior.

2) Para $\rho(A)$ corresponde um autovetor $x \geq \phi$.

3) $\rho(A)$ não decresce quando qualquer elemento de A é aumentado.

DEM:

Quando A é uma matriz IRREDUTÍVEL:

A demonstração é dada pelo Teorema 3.2.1, de Perron-Frobenius.

Quando A é uma matriz REDUTÍVEL:

Assumamos que A está na sua "forma normal". Se qualquer submatriz R_{jj} da forma normal é irredutível, então R_{jj} tem um autovalor positivo igual a seu raio espectral.

Da mesma forma, se R_{jj} é uma matriz nula 1×1, seu autovalor simples é zero. Então, A tem autovalores reais não-negativos iguais a seu raio espectral.

Se $\rho(A) = 0$, então cada R_{jj} é uma matriz nula 1×1, o que prova que a matriz na forma normal é estritamente triangular superior.

As demais afirmações se seguem das demonstrações de argumentos semelhantes aos utilizados no Teorema 3.2.1, completando a prova.

3.3 - OS MÉTODOS ITERATIVOS

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in C^{n,n}$ uma matriz qualquer e o sistema matricial $Ax = b$.

Se A é uma matriz não-singular, o sistema mencionado tem uma única solução x que pode ser escrita na forma

$$x = A^{-1}b \ .$$

Assumimos agora que A é uma matriz não singular.

Em geral a matriz A pode ser expressa na forma

$$A = D - E - F \qquad (1)$$

onde

$$D = \mathrm{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn}) \ .$$

$$E = \begin{cases} e_{ij} = a_{ij} & , \quad i > j \\ e_{ii} = 0 & , \quad i = j \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} f_{ij} = a_{ij} & , \quad i > j \\ f_{ii} = 0 & , \quad i = j \end{cases}$$

A partir da expressão (1) dada à matriz A, podemos associar a ela os conhecidos métodos iterativos:

3.3.1 - O MÉTODO ITERATIVO DE JACOBI

Seja $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$

Então $Ax = b$ pode ser escrito na forma

$$x_i^{(m+1)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right) x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad , \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad m \geq 0$$

logo

$$\boxed{x^{(m+1)} = D^{-1}(E+F)\; x^{(m)} + D^{-1}b} \quad , \; m \geq 0 \qquad (2)$$

onde $B = D^{-1}(E+F)$ é a matriz iterativa de Jacobi.

3.3.2 - O MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL

Seja $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$

Então $Ax = b$ pode ser escrito na forma

$$a_{ii}x_i^{(m+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} + b_i, \; 1\leq i\leq n, \; m\geq 0$$

logo

$$(D-E)x^{(m+1)} = Fx^{(m)} + b \quad , \quad m \geq 0$$

e como $(D-E)$ é não singular temos :

$$\boxed{x^{(m+1)} = (D-E)^{-1} Fx^{(m)} + (D-E)^{-1}b} \qquad m \geq 0 \qquad (3)$$

onde $C = (D-E)^{-1}F$ é a matriz iterativa de Gauss-Seidel.

É importante em nosso trabalho estabelecermos critérios de convergência para os métodos iterativos (2) e (3), quando a matriz A do sistema $Ax = b$ for uma M-matriz.

Para tanto, necessitamos dois resultados estabelecidos a seguir:

TEOREMA 3.3.1 (STEIN-ROSENBERG) [27] - Seja a matriz $B = L + U$, onde L e U são matrizes positivas estritamente triangulares inferior e superior respectivamente.

Seja também a matriz $L_1 = C$ (em (3)) que é a matriz iterativa de Gauss-Seidel.

Então, uma e somente uma das relações abaixo são válidas exclusivamente:

a) $\rho(B) = \rho(L_1) = 0$

b) $0 \leq \rho(L_1) < \rho(B) < 1$

c) $1 = \rho(B) = \rho(L_1)$

d) $1 < \rho(B) < \rho(L_1)$

OBS: Isto quer dizer que o método de Jacobi e o método de Gauss - Seidel ou são ambos convergentes ou ambos divergentes.

TEOREMA 3.3.2: [27] - Seja $A_{n\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times n} = (b_{ij})$ com $0 \le |B| \le A$.

Então $\rho(B) \le \rho(A)$.

Agora estamos aptos a abordar estes critérios no Teorema que se segue.

TEOREMA 3.3.3: [27] - Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in C^{n,n}$ uma matriz Estritamente ou Irredutivelmente Diagonal Dominante. Então as matrizes iterativas de Jacobi em (2) e de Gauss-Seidel em (3) são convergentes para a resolução do sistema matricial $Ax = b$ para qualquer vetor de aproximação inicial $x^{(0)}$.

Da Definição 3.1.3 e do Teorema 3.1, concluímos que a matriz A é não-singular e $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$.

A matriz de Jacobi em (2) é tal que :

$$B_{n\times n} = (b_{ij}) \begin{cases} b_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & , \quad i \neq j \\ b_{ij} = 0 & , \quad i = j \end{cases}$$

Pela definição 3.1.3 temos que

$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| < 1$, $1 \le i \le n$ quando a matriz for Estritamente Diagonal Dominante e

$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \le 1$, $1 \le i \le n$ quando a matriz for Irredutivelmente Diagonal Dominante.

Pela definição 3.2.1, a matriz $|B|$ é não-negativa, $\rho(|B|) < 1$ e todos os elementos $|b_{ij}|$ são não-negativos.

Aplicando o Teorema 3.3.2, podemos afirmar que $\rho(B) \leq \rho(|B|) < 1$. Isto significa que o método iterativo (2) converge.

Da mesma forma, pelo Teorema 3.3.1 observamos que

$$\text{se} \quad B = L + U \quad \text{e} \quad L_1 = (I-L)^{-1}U, \quad \text{então}$$

$$\rho\{(I-|L|)^{-1}|U|\} \leq \rho(|B|) < 1 .$$

Logo, o método iterativo (3) também converge, completando a prova.

No capítulo seguinte, mostramos que as matrizes Estritamente ou Irredutivelmente Diagonal Dominante são também M-matrizes não-singulares.

Isto é importante porque observaremos que a convergência destes métodos iterativos se processa para qualquer matriz A do sistema $Ax = b$, sendo A uma M-matriz não-singular

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

Primeiramente abordaremos algumas propriedades das M-matrizes que nos serão úteis no decorrer do texto, uma vez que as inversas destas M-matrizes são matrizes não-negativas.

A seguir introduziremos o conceito de "partição" de uma matriz, relacionando este conceito com as M-matrizes e sua relevante importância quando aplicado à convergência dos Métodos Iterativos para a resolução do sistema $Ax = b$ onde A é uma matriz não singular.

Nos tópicos seguintes serão abordadas com ênfase outras aplicações ressaltando entre elas alguns teoremas provando em especial a convergência do Método Iterativo de Gauss-Seidel quando a matriz A do sistema $Ax = b$ é uma M-matriz.

Serão vistos também os critérios de estabilidade de um Sistema de Controle, a estreita relação entre D-estabilidade de uma matriz qualquer com as M-matrizes e finalmente, a importância das M-matrizes quando aplicadas a diversos campos da Ciência.

4.1 - PROPRIEDADES

Propriedade 1: [27]

Seja M uma matriz complexa de ordem n com $\rho(M) < 1$. Então $(I-M)^{-1}$ é não-singular e

$$(I-M)^{-1} = I+M+M^2+\ldots \quad \text{com a série convergente.}$$

Por outro lado, se a série acima converge, então $\rho(M) < 1$

DEM:

Assumamos $\rho(M) < 1$.

Seja μ um autovalor de M. Então $(1-\mu)$ é um autovalor de $(I - M)$.

Como $\rho(M) < 1$, todos os autovalores de $(I - M)$ têm módulos menores do que 1. Isto implica em ser $(I - M)$ uma matriz não-singular.

Para mostrar a convergência da série consideremos a se- identidade:

$$I - (I - M)(I + M + M^2 + \ldots + M^R) = M^{R+1} .$$

Pré multiplicando ambos os lados por $(I - M)^{-1}$ obtemos:

$$(I - M)^{-1} - (I + M + M^2 + \ldots + M^R) = (I - M)^{-1} M^{R+1}$$

Aplicando a norma temos:

$$\| (I - M)^{-1} - (I - M + M^2 + \ldots + M^R) \| \leq \| (I - M)^{-1} \| \cdot \| M^{R+1} \| , R \geq 0$$

Como M é uma matriz convergente, quanto mais for o valor de R, $\| M^{R+1} \|$ tenderá a zero

Logo a série

$$I + M + M^2 + \ldots \text{ é convergente e igual a } (I - M)^{-1} .$$

Suponhemos agora ser a série $I + M + M^2 \ldots$ convergente.

Seja μ um autovalor de M e x o autovalor correspon -

dente. Assim

$$(I + M + M^2 + \dots)\, x = (1 + \mu + \mu^2 + \dots)x .$$

A convergência da série matricial implica na convergência da série dos números complexos $(1 + \mu + \mu^2 + \dots)$.

Para que esta série convirja é necessário que $|\mu| < 1$.

Logo $\rho(M) < 1$

PROPRIEDADE 2: [27]:

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \geq 0$ uma matriz. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\alpha > \rho(A)$

b) $(\alpha I - A)$ é não singular e $(\alpha I - A)^{-1} \geq 0$

DEM:

Assumamos primeiramente $\alpha > \rho(A)$.

Então a matriz $M = (\alpha I - A)$ é não-singular.

Escrevamos agora

$$M = \alpha(I - \frac{A}{\alpha})$$

Assim temos que

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha}\,(I - \frac{A}{\alpha})^{-1}$$

Como $\alpha > \rho(A)$, o raio espectral de $\frac{A}{\alpha}$ é menor do que a unidade.

Aplicando a Propriedade 1 temos :

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha}\{I - \frac{A}{\alpha} + \frac{A^2}{\alpha^2} + \dots\dots\}$$

Logo $M^{-1} = (\alpha I - A)^{-1} \geq 0$

e consequentemente $(\alpha I - A)$ é não-singular.

Reciprocamente, assumamos $(\alpha I - A)$ não-singular e $(\alpha I - A)^{-1} \geq 0$.

Seja $x \geq \phi$ um autovalor assosiado com $\rho(A)$.

Então

$$Ax = \rho(A)x \quad \text{e}$$

$$(\alpha' I - A)x' = (\alpha - \rho(A))x .$$

Como a matriz $(\alpha I - A)$ é não-singular, isto implica em ser $(\alpha - \rho(A) \neq 0$.

Agora,

$$(\alpha I - A)^{-1}x = \frac{x}{(\alpha - \rho(A))} \quad \text{e desde que}$$

$x \geq \Phi$, $(\alpha I - A)^{-1} \geq 0$, segue-se que

$$\alpha > \rho(A) .$$

PROPRIEDADE 3: [27]

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ uma matriz com $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$. Então as afirmações abaixo são equivalentes :

1) A é não singular e $A^{-1} \geq 0$

2) Os elementos da diagonal principal de A são números

reais e positivos e sendo a matriz diagonal

$D = \mathrm{diag}(\frac{1}{a_{11}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}})$, então a matriz

$B = I - DA$ é não-negativa e convergente.

DEM:

Assumindo a primeira parte:

Seja $A^{-1} = (r_{ij})$. Como A tem os elementos fora da diagonal não-positivos, então:

$$r_{ii}a_{ii} - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} |a_{ji}| = 1 , \; 1 \leq i \leq n .$$

Então, $A^{-1} \geq 0$ implica que todos os elementos da diagonal de A são números positivos e reais. Co os elementos da matriz diagonal D definido na propriedade, segue-se que a matriz $B = I - DA$ é não-negativa.

Além do mais, como $I - B = DA$, então $(I - B)$ é não-singular e

$$A^{-1}D^{-1} = (I - B)^{-1}$$

e desde que A^{-1} e D^{-1} são ambas matrizes não-negativas, segue-se que $(I - B)^{-1} \geq 0$.

Então, da Propriedade 1 segue-se que $\rho(B) < 1$.

Assumindo agora a segunda parte:

Da Propriedade 1 temos que $(I - B)$ é não-singular e $(I - B)^{-1} \geq 0$.

PROPRIEDADE 4: [27] -

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ uma matriz com $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$. Então as afirmações abaixo são equivalentes:

1) A é não-singular e $A^{-1} > 0$

2) Os elementos da diagonal de A são números reais e positivos. Se D é a matriz diagonal tal que $D = \text{dig}\ (\frac{1}{a_{11}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}})$, então a matriz

$B = I - DA$ é não-negativa, irredutível e convergente.

DEM:

A demonstração é análoga à feita na propriedade anterior, apenas levando-se em consideração o caráter de irredutilidade.

PROPRIEDADE 5: [27] -

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ uma matriz irredutivelmente dominante com $a_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$ e $a_{ii} > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Então $A^{-1} > 0$.

DEM:

Do Teorema 3.3.3 temos que a matriz iterativa de Jacobi $\tilde{B}$ associada à matriz A do sistema $Ax = b$ é convergente, sendo $\tilde{B}$ da forma

$$\tilde{B} = (b_{ij}) = \begin{cases} 0 & , \quad i = j \\ -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}} & , \quad i \neq j \end{cases}$$

$\tilde{B}$ é não-negativa e irredutível pela Propriedade 5.

Mas como os elementos da diagonal de A são positivos, segue-se que a matriz B da Propriedade 4 é igual à matriz $\tilde{B}$. Portanto a demonstração se segue agora da Propriedade 4.

PROPRIEDADE 6: [27] -

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R_{\pi}^{n,n}$ uma matriz simétrica, não-singular e irredutível com $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$.

Então $A^{-1} > 0$ se e somente se A é positiva definida.

DEM:

Seja $A_{n\times n}^{-1} = (r_{ij})$. Como $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$,

$$r_{ii}a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} r_{ij}\,|a_{ji}| = 1\,, \quad 1 \leq i \leq n \quad ,$$

$A^{-1} \geq 0$ e os elementos da diagonal principal de A são todos números reais e positivos novamente.

Por outro lado, sendo A uma matriz positiva definida isto também se verifica.

Com a positividade dos elementos da diagonal de A, a matriz $B = I - DA$ da Propriedade 4 é não-negativa e irredutível, como também é a matriz de Jacobi associado à matriz A do sistema $Ax = b$.

Da Propriedade 4, $A^{-1} > 0$ se e somente se $\rho(B) < 1$, e do Teorema 3.3.1 concluímos que $A^{-1} > 0$ se e somente se a matriz iterativa de Gauss-Seidel é uma matriz convergente.

Uma vez que $a_{ii} > 0$, $i = 1,\ldots,n$, $A^{-1} > 0$ se e somente se A é positiva definida.

Abordamos agora a Definição da matriz de Stieltjs e sua estreita relação com as M-matrizes .

Historicamente, Stieltjs provou que se A é uma matriz real, simétrica e positiva definida de ordem n, com todos os elementos fora da diagonal principal negativos, então $A^{-1} > 0$.

Mais tarde Frobenius alargou estes resultados provando que, se B é uma matriz quadrada positiva de ordem n e se α é um número real com $\alpha > \rho(B)$, então a matriz $(\alpha I - B)$ é não-singular e $(\alpha I - B)^{-1} > 0$, do que já tivemos oportunidade de apresentar a demonstração.

DEFINIÇÃO 4.1.1: [27] -

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ com $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$. Esta matriz é chamada Matriz de Stieljs se A é simétrica e positiva definida.

Pela caracterização P_{15} no Capítulo II sabemos que uma M-matriz não-singular pode ser expressa na forma

$$A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R^{n,n} \quad \text{com} \quad a_{ij} \leq 0 \ , \ i \neq j \quad \text{e}$$

$$A^{-1}$$

é uma matriz não-negativa, ou seja

$$A^{-1} \geq 0 \ .$$

Na sessão 2.2 do Capítulo II, a classe de matriz conhecida (c) é uma matriz de Stieljs, portanto uma M-matriz.

4.2 - PARTIÇÕES

Um dos nossos particulares interesses é observar a convergência dos métodos iterativos na resolução do sistema $Ax = b$ onde A é uma M-matriz não-singular.

Para tanto definiremos partição de uma matriz e partição convergente da mesma.

DEFINIÇÃO 4.2.1: [27] -

Seja $A = M - N$ (1)

onde M e N são matrizes quadradas de ordem n. Se M é não-singular, dizemos que a expressão (1) representa uma partição de A.

Dada esta decomposição de A podemos estabelecer o método iterativo

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b \ , \quad m \geq 0$$

ou

$$x^{(m+1)} = M^{-1}Nx^{(m)} + M^{-1}b \ , \ m \geq 0 \qquad (2)$$

onde $M^{-1}N$ é a matriz iterativa.

DEFINIÇÃO 4.2.2: [27] -

Sejam as matrizes A, M, N todas de ordem n e reais. Dizemos que a expressão (1) é uma partição regular de A

se M é não-singular com $M^{-1} \geq 0$ e $N \geq 0$.

Em termos da matriz iterativa $M^{-1}N$ de (1), podemos expressar o produto matricial da seguinte maneira:

$$M^{-1}N = (A + N)^{-1}N \quad \text{ou}$$

$$M^{-1}N = (I + G)^{-1}G \quad \text{onde} \quad G = A^{-1}N \qquad (3) .$$

Se x é um autovetor qualquer de G e τ é um autovalor correspondente temos:

$$Gx = \tau x$$

$$(I + G)^{-1}Gx = \frac{\tau}{1 + \tau} \, x ,$$

donde se segue que x é também um autovetor de $M^{-1}N$ correspondendo o autovalor μ dado por

$$\mu = \frac{\tau}{1 + \tau} \qquad (4) .$$

Por outro lado, se μ é um autovetor de $(I + G)^{-1}G$ com

$$(I + G)^{-1}Gz = \mu z , \quad \text{então}$$

$$Gz = \mu(I + Gz) .$$

Desta expressão segue-se que μ nunca poderá ser a unidade e assim podemos escrever

$$Gz = (\frac{\mu}{1 + \mu}) z = \tau z$$

Agora, retornemos à matriz A.

Quando os elementos da diagonal principal de A são todos não-nulos podemos expressar esta matriz A como sendo a soma das matrizes:

$$A = D - E - F \qquad (5)$$

onde

$$D = \text{dig}\,(a_{11}, \ldots, a_{nn})$$

$$- \; E_{n\times n} = (e_{ij}) \text{ onde } \begin{cases} e_{ij} = a_{ij} \,, & i > j \\ e_{ij} = 0 \,, & i \leq j \end{cases}$$

$$- \; F_{n\times n} = (f_{ij}) \text{ onde } \begin{cases} f_{ij} = a_{ij} \,, & i < j \\ f_{ij} = 0 \,, & i \geq j \end{cases}$$

Escolhendo convenientemente as matrizes M e N associadas à decomposição (5) e aplicadas ao método iterativo (2) temos:

a) $M = D \qquad N = E + F$

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(m)} + D^{-1}b, \quad m \geq 0 \qquad (6)$$

que é o método iterativo de Jacobi.

b) $M = D - E$ $\quad N = F$

$$x^{(m+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(m)} + (D - E)^{-1}b, \quad m \geq 0 \qquad (7)$$

que é o método iterativo de Gauss-Seidel.

4.3 - APLICAÇÕES DE M-MATRIZES NA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS ITERATIVOS.

TEOREMA 4.3.1: [27] -

Seja $A = M - N$ uma partição regular da matriz A e $A^{-1} \geq 0$. Então a matriz $M^{-1}N$ de (1) é convergente e o método iterativo de Gauss-Seidel converge para qualquer vetor inicial $x^{(o)}$.

DEM:

Pela Definição 4.2.2 temos que a matriz $M^{-1}N$ é não-negativa, ou seja, $M^{-1}N \geq 0$.

Então, para determinarmos $\rho(M^{-1}N)$ podemos aplicar o Teorema de Perron-Frobenius e retringir nossa atenção aos autovetores x de $M^{-1}N$ e G, os quais são não-negativos.

Mas de (3) e da hipótese, G é também uma matriz não-negativa e então o autovalor associado τ de G é necessariamente não negativo.

Como $\frac{\tau}{(1+\tau)}$ é uma função monótona de τ para $\tau \geq 0$, μ em (4) é maximizado em módulo escolhendo-se $\tau = \rho(G)$ o que prova ser $\rho(M^{-1}N) < 1$. Então a matriz $M^{-1}N$ é convergente.

Pela escolha conveniente de M e N em (7) podemos concluir que o método iterativo de Gauss-Seidel é convergente.

TEOREMA 4.3.2:

Seja A uma M-matriz não-singular . Então o método iterativo de Gauss-Seidel converge para qualquer vetor inicial $x^{(o)}$.

DEM:

Como A é uma M-matriz não-singular, ela admite uma partição $A = M - N$ onde

$$M = A \quad e \quad N = 0 .$$

Pela propriedade P_{15} do Capítulo II, $A^{-1} \geq 0$ e consequentemente $M^{-1} \geq 0$.

Então temos que $M^{-1} \geq 0$, $N = 0$, logo A possue uma partição regular (def. 4.2.2).

Logo, aplicando-se o Teorema 4.3.1 concluímos que o método iterativo de Gauss-Seidel converge quando A é uma M-matriz não-singular.

TEOREMA 4.3.3

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R_{\pi}^{n,n}$ uma matriz estritamente diagonal dominante tal que $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$.

Então o método iterativo de Gauss-Seidel converge para qualquer vetor inicial $x^{(o)}$.

DEM:

Do Teorema 3.1 sabemos que as partes reais de todos os autovalores de A são positivas, o que é equivalente a dizer que $A^{-1} \geq 0$ (Capítulo II).

Logo A é uma M-matriz não-singular e a conslusão se segue de forma análoga à apresentada no Teorema 4.3.2.

OBS: É bem conhecido que o método de Gauss-Seidel converge para qualquer matriz estritamente diagonal dominante.

O nosso enfoque é apresentado de maneira nova, destacando o caso especial em que essa matriz $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R_{\pi}^{n,n}$ tem todos os elementos fora da diagonal principal não-negativos, originando uma demonstração nova da convergência do método.

TEOREMA 4.3.4:

Seja $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R_{\pi}^{n,n}$ uma matriz tal que $a_{ij} < 0$, $i \neq j$, simétrica e positiva definida.

Então o Método Iterativo de Gauss-Seidel converge para qualquer vetor inicial $x^{(o)}$.

DEM:

Uma matriz $A_{n\times n} = (a_{ij}) \in R_{\pi}^{n,n}$ simétrica é positiva definida se e somente se todos os menores principais líderes de A são positivos.

Então, pelas equivalentes do Capítulo II podemos da mesma maneira afirmar que $A^{-1} \geq 0$.

Logo A é uma M-matriz não-singular e a conclusão igualmente se segue do Teorema 4.3.1.

OBS: Também é bem conhecido que o método iterativo de Gauss converge se e somente se a matriz A do sistema $Ax = b$ é positiva definida.

Da mesma maneira demos uma nova demonstração neste aspecto, enfocando a matriz A como uma M-matriz não-singular.

Um outro fato que se salienta neste Teorema é a constatação de que, sendo A uma M-matriz simétrica ela o será necessariamente positiva definida. Por outro lado, se ela for positiva definida, será necessariamente simétrica.

4.4. APLICAÇÕES DE M-MATRIZES NOS PROBLEMAS DE ESTABILIDADE DOS SISTEMAS DINÂMICOS.

DEFINIÇÃO 4.4.1 (Estabilidade) [2]

A fase de equilíbrio x_e do sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x,h(t);\ t) \qquad (1) \qquad -\infty < t < -\infty$$

é dita estável se, para cada número real $\varepsilon > 0$ existe um número real $\delta(\varepsilon, t_o) > 0$ tal que $\|x_o - x_1\| \leq \delta$ implica

$$\|\varphi\ (t;\ x_o,\ t_o) - x_e\| < \varepsilon \text{ para todos os } t \geq 0$$

onde a função φ é uma solução do sistema (1) e x_o e t_o são a fase e o tempo inicial respectivamente.

DEFINIÇÃO 4.4.2 (Estabilidade assintótica): [2]

A fase x_e de equilíbrio de um sistema dinâmico é dita assintoticamente estável se :

a) o sistema é estável

e

b) se cada movimento iniciado suficientemente perto de x_o convergir a este a este x_e com $t \to \infty$.

DEFINIÇÃO 4.4.3:[2]

Uma função de valor real $v_i(x_i, t)$ de x_i e t é dita positiva-definida se $v_i(x_i, t)$ tem derivadas parciais contínuas em relação a todos os seus argumentos $v_i(0,t) = 0$ e existe uma uma função positiva definida $v_i^o(x_i)$ de x_i tal que

$$v_i(x_i, t) \geq v_i^o(x_i) .$$

OBS: A função assim definida $v_i(x_i, t)$ é dita redicalmente ilimitada se $v_i^o(x_i) \to \infty$ para $\|x_i\| \to \infty$.

DEFINIÇÃO 4.4.4: [2] -

A função $v_i(x_i, t)$ é dita decrescente se existe uma função positiva-definida $v_i^1(x_i)$ tal que

$$|v_i(x_i, t)| \leq v_i^1(x) .$$

Consideremos agora um sistema de tempo contínuo na seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, t) + g_i(x_1,\ldots,x_n, t) \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (2)$$

$$-\infty < t < \infty \quad ,$$

com as condições iniciais

$$f_i(0, t) = 0$$

$$g_i(0,0,0,\ldots,0, t) = 0$$

(isto significa que $x_1 = 0,\ldots,x_n = 0$ é um estado de e^q^uilíbrio).

O sistema (2) pode ser decomposto em n subsistemas dados por:

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x_i, t) + y_i \qquad (3)$$

e n relações interligadas.

$$y_i = g_i(x_1,\ldots,x_n, t) \qquad (4) \ .$$

O sistema (3) com $y_i = 0$ é referenciado como sendo o i-ésimo subsistema isolado.

Assumamos que, para cada subsistema isolado existe uma função decrescente radialmente ilimitada e positiva definida

$v_i(x_i, t)$ de x_i e t satisfazendo a desigualdade

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\text{grad}_i\ v_i)^T f_i(x_i, t) \leq -\alpha_i u_i(x_i)^2 \tag{5}$$

onde $u_i(x_i)$ é uma função positiva definida de x_i.

Assumamos ainda que

$$(\text{grad}_i v_i)^T g_i(x_1,\ldots,x_n, t) \leq u_i(x_i) \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_j(x_j) \tag{6}$$

onde $\beta_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$.

De (5) e (6) temos:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_3 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left.\frac{dv_i}{dt}\right|_3$$

onde $\left.\frac{dv}{dt}\right|_3$ significa a solução da derivada de v na direção da trajetória de (3).

Efetuando os cálculos temos:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_3 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left\{\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\text{grad}_i v_i)^T f_i + (\text{grad}_i v_i)^T g_i\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left\{-\alpha_i u_i(x_i)^2 + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} u_i(x_i) u_j(x_j)\right\}$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_i(x_i) u_j(x_j) \quad , \qquad (7)$$

onde

$$b_{ij} = \omega_i a_{ij} + \omega_j a_{ji} \qquad (8)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha_i - \beta_{ii} & (i = j) \\ - \beta_{ij} & (i \neq j) \end{cases} \qquad (9) \ .$$

Na notação matricial em relação a a_{ij} e b_{ij} podemos escrever:

$$B = A^T W + WA \qquad (10)$$

onde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $W = dig(\omega_i)$

O CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA COMPOSTO DE TEMPO CONTÍNUO: [1]

A fase inicial do sistema (3) é assintoticamente estável se os menores líderes de A são todos positivos.

Observemos que a matriz $A = (a_{ij})$ de (9) tem todos os elementos fora da diagonal principal não-positivos, isto é, $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$.

Além do mais sabemos que uma matriz A com esta propriedade e ainda possuindo todos os seus menores principais líderes positivos é uma M-matriz não-singular.

Assim enunciamos:

TEOREMA 4.4.1: [1]

O estado nulo do sistema (3) é assintoticamente estável se a matriz A de (10) é uma M-matriz não-singular.

OBS: Podemos obter um critério análogo para a Estabilidade de um sistema de Tempo discreto .

4.5 - M-MATRIZES E D-ESTABILIDADE

DEFINIÇÃO 4.5.1: [8]

Uma matriz real $A = (a_{ij})$ é dita positivamente estável (negativamente) se as partes reais de todos os seus elementos são positivos (negativos).

DEFINIÇÃO 4.5.2: [8]

Uma matriz $A = (a_{ij})$ é dita D-estável se DA é estável para toda matriz diagonal positiva D.

O conceito de Estabilidade surge em várias aplicações no campo da Economia.

Infelizmente não existe ainda nenhuma condição necessária e suficiente para a D-Estabilidade.

Os trabalhos de Ostrowski and Schneider [17], Carlson [7], Carlson and Schneider [6] e os mais recentes trabalhos de Datta [8], e Johnson [12] identificaram somente algumas classes importantes de matrizes D-estáveis.

Se A é uma M-matriz, os elementos fora da diagonal principal são não-positivos e os menores principais líderes de A são positivos.

Claramente esta condição é invariante sob a multiplicação de A por qualquer matriz diagonal D, positiva.

Então, temos:

TEOREMA 4.5.1 [8] :

Uma M-matriz é positivamente D-estável.

4.6 - DEMAIS APLICAÇÕES

Notamos que além das palicações mencionadas neste capítulo, existem algumas outras aplicações importantes de M-matrizes tais como:

a) No desenho dos sistemas controles multivariáveis [3]

b) Na estabilização por realimentação [25]

c) Na corrida de armamentos entre as nações [26]

d) Certos tipos de M-matrizes singulares são especialmente importantes no estudo dos Métodos iterativos que visão resolver sistemas lineares com soluções indeterminadas [15]

e) Na análise das cadeias de Markov [14]

f) Na programação matemática [5,13]

CAPÍTULO V

UMA CARACTERIZAÇÃO EFETIVA DE M-MATRIZES E SUAS APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentamos uma caracterização efetiva das M-matrizes.

Usando esta caracterização, damos um critério novo para determinar se uma matriz tridiagonal é uma M-matriz.

5.1 - UMA CARACTERIZAÇÃO EFETIVA

TEOREMA 5.5.1

Seja $A_{n\times n}=(a_{ij})$, $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j$ e $a_{ii} > 0$, $i = 1,\ldots,n$.

Então A é uma M-matriz não singular se e somente se existe uma fatorização $A = LU$ onde L e U sãc respectivamente M-matrizes não-singulares triangulares inferior e superior, $\ell_{ii} = 1$, $i = 1,\ldots,n$.

DEM.

Por indução

Claramente o teorema é verdadeiro para $n = 1$ pois $A = 1\cdot a_{11} = LU$ e L e U são M-matrizes não singulares.

Agora suponhemos o teorema verdadeiro para $(n-1)$

Seja $A = \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & b \\ \hline c^T & a_{nn} \end{array}\right]$ onde b e c^T são vetores não positivos

e A_{n-1} é uma M-matriz não-singular de dimensão $(n-1)$.

Pela hipótese, temos uma fatorização triagular tal que

$$A_{n-1} = L_{n-1}\, U_{n-1} \quad \text{onde} \quad L_{n-1} \text{ e } U_{n-1}$$

são M-matrizes não-singulares.

Pela equivalência P_{15}(Cap. II), suas inversas são matrizes não-negativas, isto é, $L_{n-1}^{-1} \geq 0$ e $U_{n-1}^{-1} \geq 0$.

Sejam as decomposições de L_n e U_n :

$$L_n = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \Phi \\ \hline \alpha^T & 1 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad U_n = \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & \gamma \\ \hline \Phi^T & u_{nn} \end{array}\right]$$

Efetuando o produto matricial obtemos:

$$\left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \Phi \\ \hline \alpha^T & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & \gamma \\ \hline \Phi^T & u_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} L_{n-1}\, U_{n-1} & L_{n-1}\, \gamma \\ \hline \alpha^T\, U_{n-1} & \alpha^T \gamma + u_{nn} \end{array}\right]$$

Esta será a fatorização desejada se

(1) $L_{n-1}\, U_{n-1} = A_{n-1}$

(2) $L_{n-1}\, \gamma = b$ (2.1) $\gamma \leq \Phi$

(3) $\alpha^T U_{n-1} = c^T$ (3.1) $\alpha^T \leq \Phi$

(4) $\alpha^T \gamma + u_{nn} = a_{nn}$

(5) $L_{n-1}^{-1} \geq 0$ e $U_{n-1}^{-1} \geq 0$

Observemos que (1) é verificada pela hipótese:

Como L_{n-1} e U_{n-1} são matrizes não-singulares, então γ é uma solução única de (2) e α^T é também a solução única de (3).

Além do mais, sendo A uma M-matriz não-singular $\Rightarrow$ $b \leq \Phi$ e $c^T \leq \Phi$. Então, estudando o sinal:

De (2) vem : $\gamma = L_{n-1}^{-1}\, b \Longrightarrow \gamma \leq \Phi$

De (3) vem : $\alpha^T = U_{n-1}^{-1}\, c^T \Longrightarrow \alpha^T \leq \Phi$,

verificando (2.1) e (3.1).

Para provarmos (5) nos utilizamos de método da Escada , invertendo a matriz por partes para estudarmos os sinais das matrizes:

$$\bar{L}_n = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \Phi \\ \hline \alpha^T & 1 \end{array}\right] \quad , \quad L_n^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline z^T & x \end{array}\right]$$

$$L_n \times L_n^{-1} = I \text{ ; daí temos :}$$

i) $L_{n-1}\, X + \Phi z^T = I$

Então $X = L_{n-1}^{-1}\, I \geq 0$

ii) $L_{n-1}\, y + \Phi = \Phi$

Então $y = -\, L_{n-1}^{-1}\, \Phi = 0$

iii) $\alpha^T X + 1 \cdot z^T = \Phi^T$

Então $z^T = -\, \alpha^T\, L_{n-1}^{-1} \geq 0$

iv) $\alpha^T y + 1\, x = 1$

$\alpha^T \Phi + x = 1$

$x = 1 \geq 0$

Logo $L_n^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \geq 0 & \Phi \\ \hline \geq \Phi & > 0 \end{array}\right) \Longrightarrow L_n^{-1} \geq 0$

Seja $U_n = \left(\begin{array}{c|c} U_{n-1} & \gamma \\ \hline \Phi^T & u_{nn} \end{array}\right)$ e $U_{n-1} = \left(\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline z^T & x \end{array}\right)$

$U_n \times U_n^{-1} = I$; daí temos :

i') $U_{n-1}X + \gamma z^T = I$

ii') $U_{n-1}y + \gamma x = \Phi$

Então $y = -(U_{n-1}^{-1}\gamma \times u_{nn}) \geq 0$

iii') $\Phi^T X + U_{nn} z^T = \Phi^T$

$u_{nn} z^T = \Phi^T$

$\bar{z}^T = \Phi$

iv') $\Phi y + u_{nn} x = 1$

$x = \dfrac{1}{u_{nn}}$

Substituindo (iii') em (i') vem :

$U_{n-1}X + \gamma\Phi = I$

$X = U_{n-1}^{-1} I \geq 0$

Então,

$$U_n = \left(\begin{array}{c|c} \geq 0 & \geq \Phi \\ \hline \Phi & \dfrac{1}{u_{nn}} \end{array}\right)$$

Temos ainda que provar que $m_{nn} \geq 0$.

Como A é uma M-matriz não-singular, pelo processo de eliminação de Gauss, temos :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{21}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Como A é uma M-matriz não-singular, os menores principais líderes de A positivos. Daí, temos:

$$\det A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow a_{11} \geq 0$$

$$\det A\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} = \det A^{(1)}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} \Longrightarrow a_{11},\ a_{22}^{(1)} > 0$$

Então $a_{22}^{(1)} > 0$

$$\det A\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \det A^{(2)}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} \Longrightarrow a_{11}\, a_{22}^{(1)}\, a_{33}^{(2)} > 0$$

Então $a_{33}^{(2)} > 0$

$$\vdots$$

$$\det A\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix} = \det A^{(n-1)}\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\1 & 2 & \dots & n\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_{11}a_{22}^{(1)}\dots a_{nn}^{(n-1)} > 0 \Longrightarrow a_{nn}^{(n-1)} > 0$$

Na matriz de fatorização , $a_{nn}^{(n-1)} = u_{nn}$

Logo $u_{nn} > 0$ e

$$U_n^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \geq 0 & \Phi \\ \hline \geq \Phi & \geq 0 \end{array}\right) \Longrightarrow U_{n-1}^{-1} \geq 0$$

satisfazendo (5) .

Por outro lado, se A admite uma fatorização triangular na forma $A = LU$, onde L e U são respectivamente M-matrizes triangulares inferior e superior e não-singulares, então:

$$L^{-1} \geq 0 \quad \text{e} \quad U^{-1} \geq 0 \; .$$

$$\text{Assim} \quad A^{-1} = U^{-1} L^{-1} \geq 0$$

mostrando que A é uma M-matriz não-singular.

5.2 - UM NOVO CRITÉRIO PARA QUE UMA MATRIZ TRIDIAGONAL SEJA UMA M-MATRIZ NÃO-SINGULAR.

As matrizes tridiagonais surgem em várias aplicações nos sistemas de equações diferenciais.

Então é muito útil, na prática, sabermos quando uma dada matriz tridiagonal é uma M-matriz.

O critério usado em relação a este fato é dado a seguir:

TEOREMA 5.2.1 -

Seja A uma matriz tridiagonal

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}$$

Se $a_i \le 0$, $b_i > 0$, $c_i \le 0$, $i = 1,2,\ldots,n$

e

$$b_j - a_j c_{j-1} > 0 , \quad j = 2,\ldots,n$$

Então A é uma M-matriz não-singular.

DEM:

Supounhemos $b_1 > 0$ e $b_j - a_j\, c_{j-1} > 0$,

$j = 2,\ldots,n$

Definimos $d_1 = b_1$

$$d_j = b_j - a_j\, c_{j-1}/d_{j-1} \qquad 2 \le j \le n$$

$$\ell_j = a_j/d_{j-1} \qquad 2 \le j \le n$$

$$u_j = c_j/d_j \qquad 1 \le j \le n$$

Assim sendo

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ \ell_2 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ell_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & \ell_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & d_1u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & d_2u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \bigcirc & & & \ddots & d_{n-1}u_{n-1} \\ & & & & & d_n \end{pmatrix}$$

Então é fácil verificar que

$$A = LU$$

Como $d_j > 0$ e a_j e c_j são negativos, L e U são M-matrizes. Então A é uma M-matriz.

Por outro lado, vamos supor que A é uma M-matriz.

Então A admite uma fatorização na forma $A = LU$ e L e U são M-matrizes. Como a fatorização triangular de uma matriz é única, L e U são as matrizes que definimos acima.

Como c_j e ℓ_j devem ser negativos, d_j é positivo e então as condições se verificam.

CAPÍTULO VI

CONCLUSOÊS E ALGUMAS QUESTÕES ABERTAS

Um grande número de problemas em ciências matemáticas são geralmente pesquisados reduzindo primeiramente os problemas à modelos matemáticos que envolvem sistemas de equações lineares, desigualdades lineares ou cálculos de autovalores com propriedades particulares.

Uma situação muito comum é quando a matriz em questão tem elementos não positivos fora da diagonal e quando os autovalores têm partes reais não-negativas. Matrizes desse tipo são conhecidas como M-matrizes.

Devido à importância das M-matrizes, elas foram estudadas por diversos pesquisadores nos campos mais variados tais como: Economia, Física, Engenharia, Biologia, etc.

Até o presente momento existem 50 caracterizações diferentes de M-matrizes, recentemente compiladas por Plemmons [21] num artigo a ser publicado.

Nesta tese, apresentamos as caracterizações mais importantes e interessantes de acordo com o esquema por nós seguido bem como as diversas aplicações elaboradas em detalhes. Também demos uma caracterização efetiva sobre as M-matrizes e um novo critério para que uma matriz tridiagonal seja uma M-matriz, cuja relevante importância já tivemos oportunidade de mencionar.

Finalmente apresentamos algumas questões abertas em relação a alguns problemas ainda insolúveis, porém interessante, rela cionadas com as M-matrizes e suas aplicações, que deveriam ser considaradas para pesquisas futuras [21] .

1) Seja $A = (a_{ij}) \in R^{n,n}$ com $A = D - L - U$, onde D, $-L$ e $-U$ são a Diagonal, a parte inferior e a parte superior da matriz A, respectivamente. Assumamos D não-singular.

Seja J, $L(= L_1)$ e L_ω denotando as matrizes iterativas de Jacobi, Gauss-Seidel e S.O.R respectivamente, dadas por

$$J = D^{-1}(L + U)$$
$$L = (D - L)^{-1}U$$
$$L = (D - \omega L)^{-1} \ (1-\omega)D + \omega U \quad , \quad \omega > 0 \ .$$

É conhecido de Varga [28] que, se A é uma M-matriz não-singular então $\rho(L_\omega) < 1$ para

$$0 < \omega < \frac{2}{1+ (|J|)} \equiv \omega' \ .$$ É verdade que,

se $\rho(L_{\omega}') < 1$ então $\rho(L_\omega) < 1$ para $0 < \omega < 2$?

2) Como pode ser a M-matriz A caracterizada, para a qual existe uma M-matriz não-singular triangular inferior L e uma M-matriz triangular inferior U tal que

$$A = LU \ ?$$

BIBLIOGRAFIA

1. ARAKI, M. - Application of M-matrices to the stability problems of composite dynamical systems, J. Math. Appl. 52 (1975), 309-321.

2. ARAKI, M. and KOND, B. - Stability and transient behaviour of composite nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Contr. AC - 17 (1972), 532-541.

3. ARAKI, M. and NIOKAH, O.J. - Computing and control Rept 74/64 Imperial College, London.

4. BERMANN, A. and PLEMMONS, R. - Matrix group monotonicity, Proc. Amer. Math. Soc. 46 (1974), 355-359.

5. COLTLE, R.W. - On Minkounski matrices and linear complementavity problem in: optimization and optimal control. Proceeding of a Conference hold at Oberwolfach , Lecture Notes in Math. 477, Springer Verlag, Berlin.

6. CARLSON, D. and SCHNEIDER, H. - Inertia theorems of matrices: The semi-definite case, J. Math. Anal. Appl. 6 (1963), 430-446.

7. CARLSON, D. - A new criterion for M-stability of complex matrices, Lin. Alg. 1 (1968), 59-64.

8. DATTA, B.N. - Stability and D-stability, Lin. Alg. Appl. 21 (1978), 135-141.

9. FIEDLER, M. and PTAK, V. - On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors, J. Czech. Math. 12 (1962), 382-400.

10. GERSTEIN, L.J. - A local approach to matrix equivalence, Lin. Alg. Appl. 16 (1977), 221-232.

11. JACOBSON, D.H. - Factorization of simmetric M-matrices, Lin. Alg. Appl. 9 (1974), 275-278.

12. JOHNSON, C.R. - Sufficient condition for D-stability, J.Econ. Theory 9 (1974), 53-62.

13. KENEKO, K. - Linear complementativity problems and characterizations of Minkouski matrices, Lin. Alg. Appl.20 (1975), 111-130.

14. MEYER, C.D. - The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains, SIAM Rev.,17(1975), 443-464.

15. NEUMANN, M. and PLEMMONS, R.J. - Convergent non-negative matrices and iterative methods for consistent linear systems, Numer. Math., to appear.

16. OSTROWSKI, A. - Über die determinaten mit überwiegender Hauptdiagonal, Comment. Math., Melv 10 (1937), 69-96.

17. OSTROWSKI, A. and SCHNEIDER, H. - Some theorems on the inertia of a general matrices, J. Math. Appl. 4 (1962), 72-84.

18. PLEMMONS , R.J. - Monoticity and iterative approximations involving retangular matrices, Math. Comp. 26 (1972), 853-858.

19. PLEMMONS, R.J. - M-matrix leading to semi-convergent splittings, Lin. Alg. Appl. 15 (1976), 243-252.

20. PLEMMONS, R.J. - M-matrix characterizations. Non-singular M-matrix, Lin. Alg. Appl. 18 (1977), 175-188.

21. PLEMMONS, R.J. and NEUMANN, M. - M-matrix characterization II: General M-matrices, (a ser publicado).

22. POOLE, G. D. and BOULIIAN, T. - A survey on M-matrices, SIAM Rev. 16 (1974), nº 4.

23. POOLE, G. D. - Generalized M-matrices and applications, Comp. Math. 29, nº 131, (1975), 903-910.

24. SCHNEIDER, H. - The elementary divisors associated with 0, of a singular M-matrix, Proc. Edinb. Math. Soc. 10 (1956), 108-122.

25. SILJAK, D.D. and VUKCEVIC, M.B. - Proc. 8th Asilomar Conf. Circuits, Systems, Computers, Pacific Grove, California (1974).

26. SILJAK, D.D.- On the stability of the arms race, Electrical Eng., Rept. Univ. Santa Clara, California.

27. VARGA, R.S. - Matrix iterarive analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1962)

28. VARGA, R. S. - On recurring theorems on diagonal dominance , Lin. Alg. Appl. 13 (1976), 1-9.

29. WIMMER, H. K. - An inertia theorem for tridiagonal matrices and a criterion of Wall on continued fractions , TH Graz, Austria.