Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado

Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária

Heron Silva Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

2010

Introdução ao Cálculo de Ordem Arbitrária

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Heron Silva Oliveira e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 30 de Setembro de 2010.

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
Orientador

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (Imecc-Unicamp)
Prof. Dr. Hamilton Germano Pavão (UFMS)
Prof. Dr. João Maurício Rosário (FEM-Unicamp)

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Oliveira, Heron Silva
OL41i Introdução ao cálculo de ordem arbitrária/Heron Silva Oliveira-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Edmundo Capelas de Oliveira

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Cálculo fracionário. 2.Equações diferenciais fracionárias. 3.Integrais generalizadas. 4.Espaços generalizados. 5.Funções de Mittag-Leffler. 6. Funções hipergeométricas. I. Oliveira, Edmundo Capelas de. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Introduction to the arbitrary order calculus

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Fractional calculus. 2. Fractional differential equations. 3. Integrals, Generalized. 4. Generalized spaces. 5. Mittag-Leffler functions. 6.Hypergeometric functions.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Hamilton Germano Pavão (UFMS)
Prof. Dr. João Maurício Rosário (FEM - UNICAMP)

Data da defesa: 30/09/2010

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 30 de setembro de 2010 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). ÈDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof. (a). Dr (a). JOÃO MAURICIO ROSARIO

Prof. (a). Dr (a). HAMILTON GERMANO PAVÃO

Dedico este trabalho ao Deus (Jeová), Criador do vasto Universo e da vida, pois sem ele nada seria possível, por usar as pessoas que precisei para escrever esta dissertação: meus pais Nenosa e Solano (pelo amor deles, significado de eternidade), minha esposa Mayara (pelo nosso amor e feliz companheirismo), meus filhos Júlia, Isadora e o que está por vir (pelo amor incondicional) e meu amigo e orientador Edmundo Capelas (primeiro, por acreditar em mim; depois, pelo apoio e toda ajuda e; por fim, pela excelente orientação em COA).

Agradecimentos

Por reconhecer que sempre precisamos e contamos com o apoio de outras pessoas para realizarmos nossos objetivos, agradecemos às pessoas que contribuíram para a realização deste trabalho. Às pessoas espirituais: primeiramente, a Deus (Jeová), o verdadeiro e perfeito matemático, pela vida e por permitir este acontecimento, depois; ao Mestre (Jesus Cristo) por me guiar até aqui. À toda minha família: pais (Maria e Francisco Solano), pela formação pessoal; irmãos (Eliene e Erivan), pelo companheirismo desde sempre; esposa (Mayara), que me faz uma pessoa melhor, completa e muito feliz, pelo amor, carinho, compreensão e apoio em todos os momentos; filhas (Júlia e Isadora), pelo privilégio de ser pai e fazer rever todos os meus valores; sogros (Antonia e Zacarias), pelo zelo de verdadeiros pais, cunhados (Mayra, Mayna, Jr.) que ganhei de presente. Às intituições: Uema, Fapema, Capes e Imecc-Unicamp pelo suporte financeiro e por permitir meus estudos de mestrado. À coordenação do curso deste mestrado pelo apoio constante. Aos colegas do curso: Bosco, Remi, Gilson, Ociran, Adão, Danilo, Felix, Emerson..., por toda ajuda. Aos professores e tutores, com quem tive aula, pelo que aprendi e por contribuírem para realização deste trabalho. Em especial, ao meu orientador professor Edmundo Capelas de Oliveira, exemplar, principal responsável por este trabalho e a quem dedico, na terra, os méritos do mesmo, pelo excelentíssimo curso ministrado em Equações Diferenciais, que foi decisivo para a escolha deste tema, pela dedicação na leitura e correção de cada capítulo desta dissertação, bem como pelos úteis comentários que contribuíram para a melhoria da redação; ao tutor Rubens por ter me fornecido gentilmente um exemplar da sua tese em cálculo fracionário, que muito contribuiu para entrar no mundo das equações diferenciais fracionárias. A minha amiga Orleane Santana, doutoranda em Letras, pela assesoria, leitura e correção da redação da dissertação. Aos membros da banca examinadora por terem aceito o convite para compor a banca e por seus comentários sobre a dissertação.

Resumo

Efetuamos um levantamento histórico concernente ao cálculo integral e diferencial de ordem arbitrária, também conhecido como cálculo de ordem fracionária ou ainda cálculo fracionário, com o intuito de justificar sua importância, nos dias de hoje, a partir de uma audaciosa e profética frase proferida por Leibniz. A partir das várias definições para derivada de ordem arbitrária, em particular, as definições de Riemann, Liouville, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Weyl e Caputo, elucidamos e justificamos a importância de cada uma delas, nas aplicações, quando associadas ao estudo de uma equação diferencial parcial de ordem arbitrária. Justificamos que, para problemas modelados pelas assim chamadas equações diferenciais de ordem arbitrária, o enfoque conforme proposto por Caputo parece ser o mais conveniente..

Palavras-Chave: Cálculo de ordem arbitrária, Cálculo fracionário, Derivadas fracionárias, Riemann, Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl.

Abstract

We propose a hystorical review associated with the integral and differential calculus of arbitrary order, known as calculus of fractional order or also fractional calculus with the objective to justify its importance nowadays as of an audacious and profetic phrasis said by Leibniz. By means of several definitions associated with the derivative of fractional order, specifically, the definitions of Riemann, Liouville, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Weyl and Caputo, we discuss and justify the importance of each one, in the applications, when associated with the study to the so-called differential equations of arbitrary order. We also justify that the derivative as proposed by Caputo is the most convenient in problems modelled by a fractional differential equation.

Keywords: Calculus of arbitrary order, Fractional calculus, Fractional derivatives, Riemann, Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov, Weyl.

Sumário

Introdução

O cálculo de ordem arbitrária, que faz parte do ramo da matemática que conhecemos por análise matemática, é uma generalização do cálculo de ordem inteira e trata da investigação e aplicações das integrais e derivadas de ordens arbitrárias em ciências, tecnologias, engenharia, economia e outros campos do conhecimento. Assim como o cálculo de ordem inteira, o seu objeto principal de estudo são as funções. Por exemplo, obter e estudar uma função incógnita, geralmente, a partir de métodos de resolução de uma equação diferencial de ordem arbitrária.

A história deste cálculo é tão antiga quanto a do cálculo diferencial e integral de ordem inteira, visto ser do tempo de Newton e Leibniz, os dois construtores do cálculo diferencial e integral de ordem inteira. O termo cálculo de ordem arbitrária é mais apropriado, porém é costume chamá-lo de cálculo fracionário talvez em alusão à correspondência (Leibniz [1], 1695)[1] assinada por ℓ'Hôpital[2] e endereçada ao colega Leibniz onde questionava a interpretação do significado da expressão $d^{\frac{1}{2}}x$.

As três questões básicas deste cálculo são: o que queremos dizer por derivada e integral de ordem arbitrária; como se poderia abordar o problema de achar uma solução de uma equação diferencial ordinária ou parcial de ordem arbitrária e onde podemos aplicar os operadores do cálculo de ordem arbitrária. Estas questões nos fascinam a todos desde daquele ano (1695), quando o assim chamado cálculo fracionário foi conceitualizado em conexão com o cálculo infinitesimal.

Muitos matemáticos e outros estudiosos têm estado interessados nestas questões durante toda sua história e algumas notáveis aplicações do cálculo de ordem arbitrária emergiram como resultado.

Subsequentes menções às derivadas fracionárias foram feitas, em um ou outro contexto. Considerando o ano de 1695, ano em que ocorreu a troca de correspondência entre ℓ'Hôpital e Leibniz, como sendo o marco zero para esta teoria, podemos mencionar uma gama bastante grande de nomes, muitos deles considerados pilares, em suas respectivas áreas, que dedicaram algum tempo para contribuir com a construção da teoria, até hoje, porém sem uma linha ordenada, isto é, colaboradores esporádicos e muitas vezes esparsos. Citamos, em ordem cronológica, a partir da aparição do primeiro trabalho, apenas alguns nomes pois são, também, considerados criadores e têm seus nomes associados aos vários enfoques a saber: Euler, em 1730; Lagrange,

[1] Na estrutura "(Leibniz [1], 1859)", Leibniz, se refere ao nome do autor da publicação; [1], designa a ordem numérica de entrada da publicação em nossas referências, listadas no fim desta dissertação e 1859 corresponde ao ano de publicação, sendo que, em cada ano em ordem alfabética de autores.

[2] Cada Matemático, Físico, Químico ou outro pesquisador, cujo nome aparece no texto, associado aos vários enfoques do cálculo fracionário, localizamos no tempo (em ordem cronológica) e no espaço (nacionalidade), com a seguinte estrutura: Nome científico [ano de nascimento - nome completo (nacionalidade) - ano de morte ou vivo].

em 1772; Laplace, em 1812; Lacroix, em 1819; Fourier, em 1822; Abel, em 1823; Liouville, em 1832; Peacock, em 1833; Greatheed, em 1839; Kelland, em 1839; Gregory, em 1841; De Morgan, em 1842; Riemann, em 1847; Hargreve, em 1848; Center, em 1848; Greer, em 1859; Wastchenxo, em 1861; Holmgren, em 1865; Grünwald, em 1867; Letnikov, em 1868; Sonin, em 1869; Cayley, em 1880; Laurent, em 1884; Nekrassov, em 1888; Krug, em 1890; Hadamard, em 1892; Heaviside, em 1892; Oltramare, em 1893; Moritz, em 1902; Pincherle, em 1902; Hardy, em 1917; Weyl, em 1917; Schuyler, em 1918; O'Shaughnessy, em 1918; Post, em 1919; Naraniengar, em 1919; Bromwich, em 1919; Hardy, em 1922; Brenke, em 1922; Levy, em 1923; Berg, em 1924; Davis, em 1924; Stephens, em 1925; Pennell, em 1927; Hardy, em 1928; Blumental, em 1931; Cole, em 1933; Zygmund, em 1935; Poritsky, em 1936; Davis, em 1936; Fabian, em 1936; Young e Love, em 1938; Erdélyi, em 1939; Kober, em 1940; Widder, em 1941; Riesz, em 1949; Stuloff, em 1950; Kuttner, em 1953; Hirschmann, em 1953; Lions, em 1959; Bassam, em 1961; Courant, em 1961; Peters, em 1961; Liverman, em 1964; Gel'fand, em 1964; Buschman, em 1964; Higgins, em 1964; Wolfersdorf, em 1965; Sneddon, em 1966; Kesarwani, em 1967; Welland, em 1968; Caputo, em 1969; Osler, em 1970; Shinbrot, em 1971; Prabakar, em 1972; Ross, em 1974; Oldham e Spanier, em 1974; McBride, em 1979, Samko, Kilbas e Marichev, em 1987; Nishimoto, em 1991; Gorenflo e Vessela, em 1991; Kiryakova, em 1994; Rubin, em 1996; Carpinteri e Mainardi, em 1997; Podlubny, em 1999; Hilfer, em 2000; Loverro, em 2004; Sabatier, Agrawal e Tenreiro Machado, em 2007; Capelas e Camargo, em 2007; Rosendo, em 2008; Uchaikin, em 2009; Vaz Jr., em (2009); Charnet, em 2009. À esta lista devem ser adicionados os nomes de muito outros matemáticos e estudiosos citados, alguns deles, nas referências no final desta dissertação, particularmente aqueles da geração mais jovem.

Dos estudos destes pequisadores emergiram, desde 1695, várias obras publicadas (entre outras): livros, artigos, monografias, dissertações e teses, bem como diários e revistas dedicados em parte e inteiramente ao cálculo de ordem arbitrária.

Livros contendo capítulos ou seções que lidam com aspectos de cálculo fracionário, publicados de 1695 até hoje (2010), incluem: Lacroix [7], em 1819; Davis [60], em 1936; Courant [74], em 1961; Fenyo e Stolle [75], em 1963; Ditkin e Prudkinov [76], em 1963; Gel'fand e Shilov [77], 1964; Srivastava e Manocha [81], em 1966; Sneddon [82], em 1966; Dzherbashyan [84], em 1966; Zygmund [88], em (1968); Butzer e Trebels [89], em 1968; Okikiolu [92], em 1971; Butzer e Nessel [94], em 1971; Gorenflo e Vessella [117], em 1991.

Já os livros exclusivamente dedicados ao cálculo fracionário publicados de 1974 a 2010, incluem: Oldham e Spanier [99], publicado em 1974; Ross [100], em 1975; McBride [102], em 1979; Samko et al. [110], em 1987; Nishimoto [116], em 1991; Miller e Ross [119], em 1993; Samko et al. [121], em 1993; Kiryakova [122], em 1994; Rubin [126], em 1996; Carpinteri e Mainardi [130], em 1997; Podlubny [137], em 1999. Onze destes livros, mais recentes, neste campo são os escritos por Hilfer [139], em 2000, West et al. [143], em 2003; Zaslavsky [156], em 2005; Kilbas et al. [158], em 2006; Oldham e Spanier [159], 2006; Magin [161], em 2006; Sabatier et al. [163], em 2007; Shantanu [170], em 2008; Uchaikin [179], em 2009; Caponetto et al. [181] e [182], em 2010, dentre outros.

Atuamente existe uma grande variedade de artigos que lidam com a história, teoria e aplicações do cálculo de ordem arbitrária relacionados aos vários enfoques, publicados a partir de 1695, dentre eles, por exemplo: Moritz [41], 1902; Davis [52], 1924; Caputo [83], em 1966; Ross [101], publicado em 1977; Srivastava e M. Saigo [109], publicado em 1987; Gorenflo e Mainard [128], publicado em 1996; Al-Saqabi e Kiryakova [133], 1997; Lorenzo e Hartley [138], 2000; Debnath [151], em 2004. Entre os mais recentes, temos: Kiryakova [171], em 2008; Ait, Benchohra e Hamani [173], em 2009 e Soubhia, Camargo, Capelas de Oliveira e Vaz Jr. [180], em 2010.

Exitem também pelo menos três periódicos internacionais, que são dedicados completamente ao assunto cálculo fracionário, a saber: Journal of Fractional Calculus (editado por Nishimoto [125], 1995), Fractional Calculus and Applied Analysis (fundado por V. Kiryakova [136], 1998) e Fracalmo. Ainda mais, outros que são quase completamente dedicados ao assunto como: Journal of Mathematical Analysis and Applications.

Durante o desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, foram formuladas mais de uma definição de integral e também de derivada de ordem arbitrária, às vezes não equivalentes, na tentativa de justificar a solução de Leibniz. Aqui vamos estudar as definições conforme propostas por Riemann, Riemann-Liouville, Liouville, Weyl, Grünwald-Letnikov no sentido de se concentrar na definição de Caputo, quando associada ao estudo de uma equação diferencial parcial de ordem arbitrária. A partir destas definições vários autores mostraram que o cálculo de ordem arbitrária oferece uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo de ordem inteira.

O campo desenvolveu-se intensivamente, em especial, a partir de 1974, quando aconteceu a primeira conferência internacional, na Universidade de New Haven (EUA), em 1974; continuada com a segunda na Universidade de Strathclyde, Glasgow, Escócia, em 1984; a terceira na Universidade de Nihon, Tóquio, Japão, em 1989; a quarta em Varna, Bulgária, em 1996; e outras tantas até hoje.

O assunto tem ganho popularidade e importância considerável durante as últimas três décadas, devido principalmente às suas aplicações demonstradas e difundidas em diversos campos da ciência e engenharia. Realmente oferece várias ferramentas potencialmente úteis para resolver equações diferenciais e integrais e vários outros problemas envolvendo funções especiais da física-matemática como também suas possíveis extensões e generalizações em uma e mais variáveis.

Apenas para mencionar dos trabalhos recentes, o cálculo fracionário pode ser aplicado em controle e modelagem de sistemas e sua efetividade tem sido provada em muitos trabalhos e rotinas de simulação teórica [181] bem como em viscoelasticidade [182], ambos de 2010.

Um campo de aplicação do cálculo de ordem arbitrária é o de equações diferenciais de ordens arbitrárias. A história destas equações pode ser resumida, inicialmente, como a história da busca de metodologias de resolução para uma equação geral de ordem arbitrária. Alguns modelos de processos anômalos em termos de equações diferenciais de ordens arbitrárias são: movimento Browniano fracionário, difusão anômala, subdifusão, super-difusão, dinâmica anômala, processos anômalos, modelos fracionários, relaxamento fracionário, cinética fracionária, equação de difusão fracionária, equação de Fokker-Planck fracionária, dentre outros.

Existem vários métodos de resolução de equações ordinárias ou parciais, associadas a problemas concretos dentre eles mencionamos: método direto, método da redução à equação integral de Volterra, método composicional, método Operacional, transformadas integrais, justaposição de transformadas integrais e métodos numéricos, dentre outros.

Como, em geral, a metodologia adotada depende do tipo de equação, destacamos os métodos das transformadas integrais e a justaposição de transformadas, por não distinguirem uma equação diferencial ordinária de uma equação diferencial parcial.

Esta dissertação tem como objetivo principal contextualizar o cálculo fracionário a partir de uma exposição histórica a partir dos primórdios bem como discutir as várias definições da derivada fracionária a fim de, futuramente, abordarmos um problema envolvendo a derivada fracionária. Justificar que para problemas modelados pelas equações diferenciais fracionárias, o enfoque proposto por Caputo é o mais conveniente. Para a consecução destes objetivos, dividimos e organizamos esta dissertação em dois capítulos e uma longa lista de referências, aquelas que julgamos mais representativas. No Capítulo 1, apresentamos uma contextualização histórica, a partir de um levantamento histórico do desenvolvimento do cálculo fracionário, desde o marco inicial, caracterizado pela troca de correspondência entre Leibniz e ℓ'Hôpital, datada de 30 de setembro de 1695 até os dias de hoje.

No Capítulo 2, apresentamos o cálculo de ordem arbitrária e descrevemos os fundamentos básicos e formalizamos as definições e algumas propriedades de diferentes tipos de derivadas de ordens arbitrárias. Uma conclusão e trabalhos futuros, envolvendo, por exemplo, a discussão de uma equação diferencial fracionária e uma extensa, mas não completa, lista de referências conclui o trabalho.

Em relação às referências bibliográficas[3] mencionamos que, para cada publicação que tivemos acesso e a oportunidade de ler tentamos, através da análise do ano da sua publicação relacionada ao enfoque abordado, identificar fases de pesquisas em cálculo fracionário para melhor descrever o assunto. Nesta descrição, quando os textos eram em outro idioma, fez-se esforço de captar, o dinamismo, a franqueza e o sentido dos textos originais, e transmitir estas características em português moderno. Além disso, referenciamos cada afirmação feita para respaldar o trabalho e, ao mesmo tempo, não aceitar atenção e honra indevidas.

Esperamos sinceramente que esta dissertação aprofunde o apreço pelo cálculo fracionário, cálculo de ordem arbitrária, e dê maior perspicácia quanto ao significado da sua teoria, e que sirva para induzir mais pesquisadores a aplicar o conteúdo dela mais plenamente na descrição de fenômenos reais.

[3]Para várias referências citadas na dissertação elaboramos um resumo/comentário sobre o conteúdo.

Capítulo 1

Contextualização Histórica

Neste capítulo, efetuamos um levantamento histórico do cálculo integral e diferencial de ordem arbitrária, a partir do questionamento de ℓ'Hôpital, com o objetivo de justificar sua importância nos dias de hoje. Abordamos o assunto em duas seções: na primeira, tendo como início o ano de 1695 até o ano de 1995, descrevemos o período correspondente aos primeiros 300 anos do Cálculo Fracionário, a partir do problema da ordem fracionária conforme formulado por ℓ'Hôpital e de uma consequente, audaciosa e visionária resposta de Leibniz; na segunda, continuamos com a abordagem para o período subsequente, ou seja, iniciando-se no ano de 1996 até os dias de hoje, mantendo como marco final o recente trabalho [55].

1.1 Cálculo de Ordem Arbitrária: 1695 - 1995

Começamos comentando brevemente sobre as ideias básicas do tradicional cálculo integral e diferencial de ordem inteira e algumas de suas propriedades essenciais como fundamentos para o que se segue.[1]

O cálculo de ordem inteira (COI) ou simplesmente "O cálculo" é um ramo da Matemática cujo objetivo principal é tratar o estudo dos fenômenos que envolvem movimento e variação, bem como quantidades que tendem a outras quantidades, que estão associados aos dois conceitos básicos a saber: área e tangente. A teoria do cálculo essencialmente ocupa-se da formulação exata e da resolução de dois problemas geométricos particulares: o problema das áreas e o problema das tangentes. Esses dois problemas originaram os dois ramos principais do cálculo: o cálculo integral, que trata do problema das áreas e o cálculo diferencial, que trata do problema das tangentes. Esses ramos foram abordados por matemáticos de diferentes épocas.

O primeiro ramo, o cálculo integral, remonta à antiga Grécia, a mais de 2000 anos, quando Arquimedes

[1]Estudamos e redigimos esta seção tomando como referências básicas os livros de Oldham e Spanier, o original ([99], 1974) e a reimpressão ([159], 2006). Outras informações históricas contidas nesta seção foram obtidas também em livros mais recentes, dentre eles Samko et al.([121], 1993) e Rubin ([126], 1996). Ressaltamos que, por razões de espaço, muitos colaboradores que contribuíram para o tema não têm o nome explicitamente mencionado.

[287 a.C.-Arquimedes de Siracura (Filósofo e Matemático-Grego)-212 a.C.], considerado o maior matemático dos tempos antigos, desenvolveu e aplicou o chamado “método da exaustão” para tentar resolver o problema da determinação de áreas. As ideias fundamentais deste método são elementares e podem ser descritas, brevemente, do seguinte modo: dada uma região cuja área pretende-se determinar, inscreve-se nela uma região poligonal que se aproxima desta região e cuja área seja de cálculo fácil. Em seguida escolhe-se outra região poligonal que dá aproximação melhor e continua-se o processo tomando linhas poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a cobrir a região dada. Arquimedes usou este método para obter fórmulas exatas de áreas de círculos e outras figuras particulares. No século XVI com a criação da álgebra simbólica a ideia de um método simbólico torna-se parte usual do cálculo. Por conseguinte, no século XVII, este ramo recebeu maior impulso, quando Newton [1642-Isaac Newton (Matemático e Físico-Inglês)-1727] e Leibniz [1646- Gottfried Wilhelm Leibniz (Filósofo e Matemático-Alemão)-1716], independentemente um do outro, algebrizam o método da exaustão com poder e criatividade, o qual passou, gradualmente, a ser chamado como hoje de “cálculo integral” uma nova ferramenta para resolver não só problemas geométricos associados à área, mas também problemas de outras ciências.

O segundo ramo, o cálculo diferencial, contrariamente ao integral, desenvolveu-se muito mais tarde na história da Matemática. O conceito não tinha ainda sido formulado até ao início do século XVII, quando Fermat[1601 - Pierre de Fermat (Matemático-Francês) - 1665] procurou obter os máximos e mínimos de certas funções especiais. A ideia de Fermat era resolver este problema pelo “método das tangentes”, que em termos gerais pode ser enunciado do seguinte modo: encontrar um número que dá o declive de uma reta, ou ainda, determinar a direção da tangente num ponto arbitrário da curva. Leibniz, na segunda metade do século XVII, algebriza esse problema introduzindo os conceitos de variáveis, constantes e parâmetros, bem como a notação $\frac{dy}{dx}$ como um quociente de quantidades “infinitesimais”, onde dx e dy chamadas de “diferenciais” designam “a menor possível das diferenças em x e em y”. Desta notação surge o conceito de derivada que mede a taxa de variação de uma função e o ramo da matemática conhecido hoje como “cálculo infinitesimal” ou “Cálculo Diferencial”, o qual também conduziu ao cálculo de velocidade e de modo geral ao estudo de variação de função.

Barrow [1630- Isaac Barrow (Matemático-Inglês)-1677], um professor de Newton, parece ter sido o primeiro a descobrir a conexão entre esses dois ramos do cálculo. Porém Newton e Leibniz foram os primeiros a compreender a verdadeira importância desta relação e a explorá-la tão completamente. Daí, em meados dos séculos XVII e XVIII eles, independentemente um do outro, desenvolveram o cálculo diferencial e integral, fundiram os dois ramos do cálculo, relacionando esses dois problemas através do chamado teorema fundamental do cálculo, o qual demonstra que os dois problemas são inversos, ou seja, a solução do problema da área pode ser usada para resolver o problema da tangente, tornando o cálculo integral e diferencial um instrumento cada vez mais indispensável pela sua aplicabilidade aos mais diversos campos da ciência.

De acordo com este cálculo o símbolo,

$$D \equiv D_x \equiv \frac{d}{dx}, \tag{1.1}$$

sendo x subscrito a variável independente, representa o operador diferencial, que isoladamente não tem significação prática; seguido de uma expressão à direita, entretanto, denotam uma derivada e dizemos que D ou D_x ou $\frac{d}{dx}$ opera sobre a expressão.

Assim, para a função de uma variável $y(x)$, sua derivada ordinária de primeira ordem é expressa por

$$Dy(x) \equiv \frac{dy}{dx} \tag{1.2}$$

e definida por

$$Dy(x) \equiv \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.3}$$

que pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x.

A notação de Leibniz (atualmente popular)

$$D_x^n y(x) \equiv D^n y(x) \equiv y^{(n)}(x) \equiv D^n y \equiv \frac{d^n y}{dx^n} \tag{1.4}$$

denota a derivada de ordem n de y, em relação a x, sendo n um inteiro positivo, ou a n-ésima derivada da função y, que se obtém partindo de y e diferenciando n vezes.

As integrais e derivadas no sentido ordinário são operações inversas através das relações:

$$\int [D_x f(x)] dx = f(x) + C \tag{1.5}$$

com C uma constante, e

$$D_x \left[\int f(x) dx \right] = f(x). \tag{1.6}$$

Para as funções de várias variáveis $w = y(x_1, \ldots, x_\kappa)$, suas derivadas parciais são expressas por

$$D_{x_i} y(x_1, \ldots, x_\kappa) \equiv \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_\kappa) \equiv y_{x_i}(x_1, \ldots, x_\kappa) \equiv \frac{\partial w}{\partial x_i} \equiv y_{x_i} \tag{1.7}$$

e definidas, semelhantemente, por

$$D_{x_i} y(x_1, \ldots, x_\kappa) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{y(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_\kappa) - y(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_\kappa)}{\Delta x_i}. \tag{1.8}$$

as derivadas parciais em relação a x_i.

De modo geral, para as derivadas parciais de ordens superiores, se n é um inteiro positivo então

$$D_{x_i}^n y(x) \equiv \frac{\partial^n y}{\partial x_i^\kappa}(x_1, \ldots, x_\kappa) \tag{1.9}$$

denota a derivada parcial de ordem n de y em relação a x_i.

Já as correspondentes integrais múltiplas podem ser denotadas por

$$\int f(x_1, \ldots, x_\kappa) dx_i. \tag{1.10}$$

O desenvolvimento do cálculo de ordem inteira continuou e foram ampliados até o século XIX, quando surge o ramo da Matemática chamado de Análise Matemática, data em que analistas como Gauss [1777 -

Karl Friedrich Gauss (Matemático - Alemão) - 1855], Cauchy [1789 - Augustin Louis Cauchy (Matemático - Francês)-1857], Weierstrass [1815 - Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (Matemático-Alemão) - 1897] e Riemann [1826 - Georg Friedrich Bernard Riemann (Matemático - Alemão) - 1866], deram-lhe, com clareza e elegância, através de suas obras, uma base matemática sólida, introduzindo formalmente os conceitos de limites, derivadas e integrais. Por conseguinte, introduziram o rigor na Matemática. Posteriores aperfeiçoamentos e extensões da teoria e suas aplicações estão ainda a ser levados a cabo na Matemática contemporânea.

1.1.1 No Século XVII

O conceito de cálculo fracionário está popularmente acreditado, tendo-se originado de uma pergunta formulada no ano de 1695, em uma correspondência (Leibniz [1], 1695) assinada por ℓ'Hôpital [1661 - Guillaume François Antonie ℓ'Hôpital (Matemático-Francês) - 1704], Marquês de St. Mesme, e endereçada ao colega Leibniz onde ℓ'Hôpital questionava (buscava) a interpretação do significado da notação de Leibniz $\frac{d^n y}{dx^n}$, em (1.4) para derivada de ordem $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$, quando $n = 1/2$, que equivale a derivar a função $y(x)$ meia vez, ou seja,

$$D^{1/2}y(x) = \frac{d^{1/2}y(x)}{dx^{1/2}}, \tag{1.11}$$

uma raiz quadrada ou ainda uma potência fracionária.

Leibniz, em sua resposta (Leibniz [2], 1695) profética, datada de 30 de setembro de 1695, muito antes de existirem as ferramentas tecnológicas que existem hoje, assegurava, para $y(x) = x$, que a igualdade

$$d^{1/2}x = x\sqrt[2]{dx : x} \tag{1.12}$$

aparentemente um oxímoro (paradoxo) ou um procedimento metafísico, "algum dia gerará muitas consequências frutíferas". Efetivamente tem-se o primeiro registro do cálculo fracionário.

A resposta afirmativa levou ao assim chamado cálculo fracionário. O termo fracionário tinha o significado de "ordem de uma equação diferencial", um erro de significado para a teoria dos operadores de integração e diferenciação de ordem arbitrária e suas aplicações (Samko et al [110], 1987 e [121], 1993).

Foi neste momento, no binômio pergunta-resposta, que esses cálculos, complementares, iniciados em tempos e por motivações diferentes, vêm se encontrar.

Com efeito, parece que Leibniz foi o primeiro a tentar estender o significado de uma derivada y de ordem inteira n (Samko et al [110], 1987 e [121], 1993), possivelmente, substituindo em (1.4) n por q, no mesmo ano (1695), com a invenção da notação

$$D_x^q y(x) \equiv y^{(q)}(x) \equiv \frac{d^q y}{dx^q} \tag{1.13}$$

onde q é um racional fracionário.

Em 1697, Leibniz em uma correspondência (Leibniz [3], 1697) com John Wallis, discutiu o produto infinito de Wallis para o número π e mencionou que o cálculo diferencial poderia ter sido usado para calcular este resultado e usou a notação $d^{1/2}y$ para denotar uma derivada de ordem $1/2$.

Desde então muitos matemáticos (puros e aplicados) e pesquisadores, de seus tempos, contribuíram para este campo. Na tentativa de justificar a resposta afirmativa de Leibniz, estenderam e aplicaram o cálculo fracionário em vários campos da Matemática, Física, Química, Biologia e outras áreas do conhecimento.

A ideia, em geral, desses pesquisadores, era estender a teoria para operadores generalizados, atingindo assim um nível adequado para o seu desenvolvimento como ponto de partida para um moderno matemático (veja Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006).

Com este ponto de vista, continuamos com o desenvolvimento histórico do cálculo de ordem arbitrária, teoria e aplicações, seguindo a cronologia dos seus pesquisadores, tentando obedecer a sequência histórica (onde é apresentada a evolução temporal de determinados tópicos), a ordem cronológica, bem como a lógica natural dos acontecimentos: primeiro da data da contribuição, depois da publicação mencionada.

1.1.2 No Século XVIII

Os primeiros "processos rudimentares" se deram, no início do século XVIII, com Euler, Lagrange e outros. Euler [1707-Leonardo Euler (Matemático e Físico-Suíço)-1783] atento ao cálculo fracionário deu uma contribuição importante para o assunto numa dissertação de 1730, onde escreveu (em Euler [4], 1730): "Quando n é um inteiro positivo e se p é uma função de x, a relação $d^n p$ por dx^n pode sempre ser expressa algebricamente, de forma que se $n = 2$ e $p = x^3$, então d^2x^3 por dx^2 é $6x$ por 1. Agora é perguntado que tipo de relação pode então ser feita se n é uma fração. A dificuldade neste caso pode facilmente ser entendida. Se n for um inteiro positivo $d^n p$ pode ser obtida por diferenciação continuada. Tal modo, porém, não é evidente se n é uma fração. Mais ainda, a dificuldade em se obter a derivada de ordem fracionária poderia ser melhor compreendida com auxílio de interpolações na derivada" (Miller e Ross [119], 1993).

Esta ideia de uma derivada de ordem arbitrária associada a interpolações talvez seja uma trilha, usando análise numérica, para resolver uma questão indeterminada na teoria até hoje: dar uma interpretação geométrica e/ou física da derivada fracionária.

Lagrange [1736-Joseph Louis Lagrange (Matemático-Italiano)-1813], que viveu praticamente toda sua vida na França, em 1772, contribuiu indiretamente para o cálculo de ordem arbitrária (Lagrange [5], 1772), quando desenvolveu a lei dos expoentes:

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{m+n} y}{dx^{m+n}}. \tag{1.14}$$

Em notação moderna o ponto em (1.14) é omitido, por ele não denotar uma multiplicação. Depois, quando a teoria de cálculo fracionário se desenvolvia os matemáticos estavam interessados em saber que restrições tinham que ser impostas em $y(x)$ de forma que uma regra análoga continuasse verdadeira para m e n arbitrários (Miller e Ross [119], 1993).

Apesar de ter sido demonstrado que esta lei não é válida para toda função y, quando m e n são números arbitrários, foi de grande utilidade no desenvolvimento do cálculo genérico (Miller e Ross [119], 1993). Até hoje, em 2010, 238 anos depois, não diminuiu o brilho ou importância deste trabalho.

1.1.3 No Século XIX

Embora Euler, Lagrange e outros pesquisadores contribuíram para o assunto muito mais cedo, os primeiros estudos mais ou menos sistemáticos realizados em cálculo fracionário parecem ter sidos feitos no início e meio do século XIX por Liouville, Riemann e Holmgren (Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006). Entrementes, neste século, outros contribuíram para o mesmo até chegar a esses estudos.

Passemos, portanto, a partir desta data, a efetuar os registros em períodos menores, conforme mencionado a seguir.

COA: 1810-1819

Um destes foi Laplace [1749-Pierre Simon de Laplace (Matemático-Francês)-1827] que, em 1812, definiu uma derivada fracionária (em Laplace [6], 1812) por meio de uma integral.

Outro, Lacroix [1765-Silvestre François Lacroix (Matemático-Francês)- 1843], em 1819, o primeiro a mencionar as derivadas de ordens arbitrárias, em seu livro de cálculo, um texto (Lacroix [7], 1819) de exatas 700 páginas, dedicou menos de duas destas a um problema que visava obter a fórmula para a n-ésima derivada para funções polinomiais do tipo $y = x^m$, dada por (Debnath [151], 2004).

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = D^n x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \tag{1.15}$$

onde $m \in \mathbb{Z}_+$ (m é um inteiro positivo) e $n \leq m$. Introduzindo a função gama (Capelas [154], 2005) , substituindo o símbolo de fatorial, obtém-se

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = D^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \tag{1.16}$$

Substituindo n por α e m por β, ele estendeu (1.16) e obteve a fórmula para a derivada de ordem arbitrária

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, \tag{1.17}$$

onde α e β são números fracionários.

Em particular, para $y = x$ e $m = 1/2$, ele mostrou que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} x = D^{\frac{1}{2}} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = 2\sqrt{x/\pi} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \tag{1.18}$$

é o mesmo resultado obtido, nos dias atuais, pela definição de Riemann-Liouville. Esta extensão heurística é consistente com a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville, a mais aceita atualmente, como vamos ver adiante. Em princípio, a relação (1.15) pode ser usada para diferenciação de funções analíticas (Hilfer [139], 2000).

COA: 1820-1829

Mais tarde, Fourier e outros deram significados para derivadas de ordem arbitrária, mas sem exemplos e/ou aplicações (Samko et al. [121], 1993).

Fourier [1768-Jean Baptista Joseph Fourier (Matemático-Francês)-1830], no seu estudo de derivadas de ordens arbitrárias, em 1822 obteve a representação integral para a função $f(x)$, (em Fourier [8], 1822),

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\xi)d\xi \int_{\mathbb{R}} \cos t(x-\xi)dt \tag{1.19}$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \cos t(x-\xi)dt, \tag{1.20}$$

cujas derivadas de ordens inteiras são

$$D^n f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos\left[t(x-\xi)+\frac{n\pi}{2}\right] dt, \tag{1.21}$$

substituindo o inteiro n por α real arbitrário obteve formalmente a versão generalizada para suas derivadas de ordens arbitrárias

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha \cos\left[t(x-\xi)+\frac{\alpha\pi}{2}\right] dt, \tag{1.22}$$

levando-o a afirmar: "O número α que aparece na fórmula acima será considerado como alguma quantidade qualquer, positiva ou negativa." (Hilfer [139], 2000). A versão (1.22) é conhecida hoje como representação integral generalizada de Fourier (Camargo [157], 2005).

Enquanto se desenvolvia a teoria, paralelamente a estes começos teóricos, ocorria o desenvolvimento das aplicações do cálculo fracionário a vários problemas na própria matemática e em outras áreas do conhecimento. Apesar de Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Lacroix, Fourier e de outros notáveis matemáticos terem se dedicado ao cálculo fracionário, não tinham ainda uma aplicação bem definida (veja Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006).

Nesse sentido, Abel [1802-Niels Henrik Abel (Matemático-Norueguês)-1829], em 1823, teve a honra de efetuar a primeira aplicação da técnica do cálculo fracionário (em Abel [9], 1823) para obter a solução de uma equação integral que surge da formulação do chamado problema da tautócrona ou isócrona. Este problema lida com a determinação da forma de uma curva plana $f(\eta)$, lisa, passando pela origem em um plano vertical tal que uma partícula de massa m pode cair sobre ela e sujeita à ação da gravidade cujo tempo de descida é o mesmo, independente da posição inicial (veja por exemplo Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006); (Samko et al. [110], 1987 e [121], 1993); (Miller e Ross [119], 1993) e (Debnath [151], 2004). Nesse caso se T é constante, então a equação integral de Abel que modela este problema é

$$\sqrt{2g}T = \int_0^\eta (\eta-t)^{-1/2} f'(t)dt \tag{1.23}$$

onde g é a aceleração devido a gravidade, (ξ,η) é a posição inicial e $s = f(\eta)$ é a equação da curva. A equação (1.23) é equivalente à integral fracionária

$$T\sqrt{2g} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) {}_0D_\eta^{-1/2} f'(\eta) \tag{1.24}$$

ou, equivalentemente,

$$f'(\eta) = T\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\,{}_0D_\eta^{-1/2}(1) = \sqrt{\frac{2a}{\eta}} \tag{1.25}$$

onde $a = gT^2/\pi^2$. Finalmente, a solução (1.25) é

$$f(\eta) = \sqrt{8a\eta} = 4a \operatorname{sen}\psi \tag{1.26}$$

onde $d\eta/ds = \operatorname{sen}\psi$. Esta curva é a ciclóide com o vértice na origem e tangente no eixo-x. A solução do problema de Abel é baseada no fato que a derivada de uma função constante não é sempre igual a zero, conforme (Lacroix [7], 1819).

Abel estudou equações integrais mais gerais com núcleos da forma $(x-t)^\alpha$. É normalmente reivindicado que Abel resolveu, em 1823, a equação integral emergente do problema da braquistócrona, a saber (Hilfer [139], 2000):

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt = f(x), \qquad 0<\alpha<1 \tag{1.27}$$

com a solução

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt. \tag{1.28}$$

COA: 1830-1839

Liouville [1809-Joseph Liouville (Matemático-Francês)-1882], provavelmente foi atraído pela solução "elegante" de Abel e fez o primeiro estudo importante para dar uma definição lógica de uma derivada fracionária (Hilfer [139], 2000), a partir de dois pontos de vista diferentes (Samko et al. [110], 1987 e [121], 1993). Com base nos trabalhos de Abel e Fourier, publicou nove documentos sobre o assunto entre 1832 e 1837, o último no campo em 1855 (Hilfer [139], 2000). Ele publicou três memórias em 1832 (Liouville [10]; [11] e [12]), onde expandiu funções em série de potências e definiu a derivada de ordem n operando como se n fosse um inteiro positivo. O ponto de partida para seu desenvolvimento teórico foi o bem conhecido resultado para derivada de ordem n (Miller e Ross [119], 1993 e Debnath [151], 2004)

$$D^n \mathrm{e}^{ax} = a^n \mathrm{e}^{ax}, \tag{1.29}$$

onde $D = d/dx$ e $n \in \mathbb{N}$, e estendeu este, em princípio no caso particular $\alpha = 1/2$ e $a = 2$ e, então formalmente para derivada de ordem arbitrária $\alpha \in \mathbb{R}_+$

$$D^\alpha \mathrm{e}^{ax} = a^\alpha \mathrm{e}^{ax}. \tag{1.30}$$

Ele considerou a expansão em série para a função $f(x)$ como

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k \exp(a_k x), \qquad \mathrm{Re}(a_k) > 0 \tag{1.31}$$

e definiu a derivada de ordem arbitrária por

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k a_k^\alpha \mathrm{e}^{a_k x}. \tag{1.32}$$

que é conhecida como a primeira fórmula de Liouville para derivada de ordem arbitrária. Porém, esta definição somente pode ser usada para funções da forma (1.31). Devido a esta restrição e a fim de estender sua primeira definição, Liouville formulou outra definição para a derivada fracionária baseada na função gama. Esta segunda abordagem foi aplicada para a função explícita x^{-a}. Ele considerou a integral

$$I = \int_0^\infty t^{a-1} \mathrm{e}^{-xt} dt, \qquad a > 0, x > 0.$$

Substituindo $xt = u$ obteve o resultado

$$I = x^{-a} \int_0^\infty t^{a-1} \mathrm{e}^{-u} du = x^{-a}\Gamma(a)$$

para $\mathrm{Re}(a) > 0$. Operando com D^α em ambos os lados de

$$x^{-a} = \frac{I}{\Gamma(a)}$$

e usando

$$D^\alpha(\mathrm{e}^{-xt}) = (-1)^\alpha t^\alpha \mathrm{e}^{-xt},$$

obteve

$$D^\alpha x^{-a} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + a)}{\Gamma(a)} x^{-\alpha - a}, \qquad a > 0, \tag{1.33}$$

que é chamada segunda definição de Liouville para derivada de ordem arbitrária. Contudo esta definição é útil somente para funções racionais do tipo x^{-a} (com $a > 0$). Liouville[2] foi bem sucedido em aplicar posteriormente suas definições para investigar problemas na clássica teoria do potencial.

Deve-se mencionar que Liouville em uma de suas muitas memórias (Liouville [14], 1834), foi o primeiro a tentar resolver equações diferenciais envolvendo operadores fracionários, cujo objeto de investigação era uma função complementar emergente de uma equação diferencial de ordem arbitrária. Para justificar a existência de uma função complementar, ele escreveu: “A equação diferencial ordinária $d^n y/dx^n = 0$ tem a solução complementar $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}$. Assim $d^\alpha y/dx^\alpha = 0$ (α Arbitrário) devia ter uma apropriada solução complementar correspondente”(Hilfer [139], 2000 e Miller e Ross [119], 1993).

Existem trabalhos adicionais de G. Peacock (1833), Greatheed (1839), D. F. Gregory (1841), Augustus de Morgan (1842), P. Kelland (1846), Willian Center (1848). Sobre o assunto, especialmente básico, é o trabalho de, enquanto estudante de graduação, Riemman de 1847 (Hilfer [139], 2000).

Em 1833, Peacock [1791-George Peacock (Matemático - Inglês)-1858] publicou um documento (Peacock [13], 1833) que, em parte, lidava com a função complementar (veja Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006). Peacock [13] deu maior crédito a fórmula de Lacroix (1.17) para derivadas fracionárias, considerando que outros matemáticos preferiam as definições de Liouville. Apesar do progresso sobre o assunto de cálculo fracionário, esta controvérsia continua sendo de difícil solução (conforme Debnath [151], 2004).

[2] O exame mais sério e detalhado do trabalho de Liouville é o apresentado por (Lützen [111], 1990).

A questão da existência de uma função complementar causava uma considerável confusão. Liouville cometeu um erro quando deu uma avaliação explícita de sua própria interpretação de uma função complementar. Ele não considerou o caso especial para $m = 0$ em $y = x^m$, que levou a uma contradição (Davis [60], 1936).

S.S. Greatheed, em 1839, também publicou um documento (Greatheed [15], 1839) que, em parte, lidava com a função complementar, porém ele foi o primeiro a chamar atenção para a natureza indeterminada da função complementar.

COA: 1840-1849

Em 1841, Gregory [1813-Duncan Farquharson Gregory (Matemático)-1844], (em Gregory [16], 1841), provavelmente o fundador do que foi então chamado o cálculo de operações que mais tarde passou a ser chamado por cálculo operacional, deu a solução da equação do calor

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{dz}{dy} \qquad z = z(x,y)$$

em termos de um operador simbólico da forma:

$$z = Ae^{\alpha\beta^{\frac{1}{2}}} + Be^{-\alpha\beta^{\frac{1}{2}}},$$

onde $\beta = a^{-1}\frac{d}{dx}$. Esta forma foi mais tarde usada por Heaviside (em Heaviside [38], 1892).

De Morgan [1806-Augustus De Morgan (Matemático e Lógico - Britânico)- 1871], em 1842, dedicou três páginas para o cálculo fracionário (De Morgan [17], 1842), com relação aos sistemas de Lacroix e Liouville e afirmou: "Ambos sistemas podem muito possivelmente ser partes de um sistema mais geral, mas no momento eu prefiro ser partidário de ambos os sistemas".

Boole [1814 - George Boole (Matemático e Filósofo-Inglês)-1864], criador da Álgebra Booleana, base da atual aritmética computacional, em 1844, forneceu um estímulo poderoso ao uso do cálculo fracionário para resolver problemas (Boole [18], 1844), com seu desenvolvimento usou métodos simbólicos para resolver equações diferenciais lineares com os coeficientes constantes. A essência da ideia de Boole é a expansão formal de uma função arbitrária $f(D)$ do operador diferencial como uma série e de poder dar solução de equações diferenciais pela inversão formal de tal série.

P. Kelland (em Kelland [19]), em 1846, admite que o princípio da permanência de formas equivalentes, declarado para álgebra, é válido para todas as operações simbólicas. Este princípio foi usado antes por Peacock (em Peacock [13], 1833 e Boole em (Boole [18], 1884), um trabalho que desenvolveu a teoria formal de operadores. Kelland afirma, "As fórmulas algébricas que são resultados destas leis e nada mais, devem ser corretas também quando os símbolos algébricos são substituídos por símbolos de operações." A desconfiança que Heaviside encontrou décadas mais tarde, quando submeteu seus resultados obtidos pelo uso de operadores simbólicos, poderiam ser encontrados erros destes matemáticos que aplicaram mal o princípio da permanência de formas equivalentes.

Em 1847, o matemático Riemann [1826-Georg Friedrich Bernard Riemann - Alemão -1866], enquanto aluno de graduação, escreveu um artigo (Riemann [20], 1847) que foi eventualmente publicado postumamente, na qual deu a definição, cuja modificação é agora conhecida como a integral de Riemann-Liouville (Samko et al. [110], 1987 e [121], 1993). Riemann reteve a publicação; contudo, depois de sua morte, foram descobertos escritos, e foi publicado em seu *Gesammelte Werke*, em 1892, um trabalho onde ele buscou e sugeriu uma generalização para a expansão da série de Taylor e para derivadas de ordens arbitrárias, donde resultou a seguinte definição para a integração fracionária:

$$\frac{d^{-\gamma}}{dx^{-\gamma}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_c^x (x-k)^{\gamma-1}u(k)dk. \tag{1.34}$$

semelhante a divulgada por Liouville. Entretanto, por causa da ambiguidade no limite inferior de integração c, Riemann julgou conveniente fazer um ajuste adicionando à definição acima uma função complementar $\psi(x)$, como tentativa para prover uma medida da divergência na lei dos expoentes de Lagrange. Daí veio para o meio acadêmico uma definição de derivada fracionária com a forma

$$\frac{d^{-\gamma}}{dx^{-\gamma}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_c^x (x-k)^{\gamma-1}u(k)dk + \psi(x). \tag{1.35}$$

que devido a introdução dessa função complementar, em detrimento de uma sofisticada definição de c, a definição acima tornou-se "ineficiente" e "bastante complexa" para não dizer obsoleta.[3]

Hoje, esta definição está no uso comum como uma definição para a integração fracionária, que na notação moderna introduzida por (Kilbas et al. [158], em 2006), equivale a

$$({}_aI_x^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.36}$$

A versão mais usada atualmente da equação acima é aquela em que o limite inferior de integração a é tomado zero, ou seja:

$$({}_0I_x^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \tag{1.37}$$

que coincide com a definição de integral de ordem arbitrária denominada pelos pesquisadores atuais de integral de Liouville.

Hargreave [1820-Charles James Hargreave (Matemático - Inglês)-1866], em 1848, é importante assinalar, estendeu (em Hargreave [21], 1848) a regra de Leibniz da derivada de ordem n-ésima de um produto (conforme Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006)

$$D_x^n[f(x)g(x)] \tag{1.38}$$

onde D_x^n é o operador de diferenciação ordinária de ordem n, para a derivada de ordem $n = \alpha$ na forma (conforme Miller e Ross [119], 1993)

$$D_x^\alpha[f(x)g(x)] = \sum_{\gamma=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\alpha-\gamma}f(x)D^\gamma g(x) \tag{1.39}$$

onde é D_x^α um operador fracionário, D^γ é o operador diferencial fracionário de ordem γ, $D^{\alpha-\gamma}$ é um operador integral fracionário de ordem $\alpha-\gamma$ e $\binom{\alpha}{\gamma}$ o coeficiente binomial generalizado $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\gamma!\Gamma(\alpha-\gamma+1)}$, que substituído na

[3]Para detalhes em funções complementares (vejam Nishimoto e Shih-Tong [120], 1993).

expressão acima pode ser reescrita como (conforme Debnath [151], 2004)

$$D_x^\alpha[f(x)g(x)] = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\gamma!\Gamma(\alpha-\gamma+1)} D^{\alpha-\gamma}f(x)D^\gamma g(x), \tag{1.40}$$

desde que as séries sejam convergentes. A generalização da regra de Leibniz pode ser encontrada em muitas aplicações modernas (Ross [100], 1975).

Em 1848, William Center, explicitamente discute (Center [22], 1848) uma controvérsia sobre os sistemas de Liouville e Lacroix, considerando o caso, que tanto Lacroix como Liouville, não consideraram, isto é, da função constante. Para tanto, fez $\beta = 0$ na função $f(x) = x^\beta$ e obteve $f(x) = x^0 = 1$ para denotar a função unidade constante. Inicialmente, calculando a derivada fracionária de ordem $1/2$ dessa função pela definição de Lacroix (1.17), Center observou que o resultado é,

$$D^{1/2}x^0 = \frac{1}{\Gamma(1/2)}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}. \tag{1.41}$$

E concluiu que em geral, a definição de Lacroix dá um valor diferente de zero para a derivada fracionária de uma função constante ($\beta = 0$) na forma

$$D^\alpha x^0 = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \neq 0, \tag{1.42}$$

contrariando o cálculo de ordem inteira.

Por outro lado, calculando a derivada da função constante ($\beta = 0$), usando a segunda definição de Liouville (1.33)

$$D^{1/2}x^0 = (-1)^{1/2}\frac{\Gamma(1/2+\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{-1/2-\beta}, \tag{1.43}$$

tomando o limite $\beta \longrightarrow 0^+$ e usando o resultado $\lim\limits_{\beta\to 0}\Gamma(\beta) = \infty$ (em Capelas [154]), concluiu que o resultado é, ou seja,

$$D^{1/2}x^0 = \lim_{\beta\to 0} D^{1/2}x^{-\beta} = \lim_{\beta\to 0}\frac{(-1)^{1/2}\Gamma(1/2+\beta)}{\Gamma(\beta)} = 0, \tag{1.44}$$

conforme o cálculo de ordem inteira.

Diante do dilema: dois resultados distintos para a derivada de uma constante; Center analisando-o percebeu erros por matemáticos notáveis e não concluindo qual dos dois resultados era o correto, sensatamente continua: “A questão toda fica claramente reduzida para o que é exatamente $\frac{d^\alpha x^0}{dx^\alpha}$. Quando isto for determinado devemos ter a conclusão, ao mesmo tempo, do sistema correto”. E como o cálculo arbitrário deve generalizar o cálculo de ordem inteira, é necessário que esta questão seja elucidada de forma que a teoria do cálculo de ordem arbitrária seja consistente.

A situação reclamada sobre a questão por De Morgan e Center naquele momento foi completamente elucidada. O julgamento de De Morgan provou ser correto, para os dois sistemas que Center pensou serem irreconciliáveis. Os resultados foram incorporados em um sistema mais geral. É justo que os matemáticos naquele tempo estavam apontando para uma definição plausível de integração e diferenciação generalizadas.

Existem também trabalhos adicionais de Center ([22], 1848; [23], 1848 e [24], 1849), especialmente dedicados à diferenciação fracionária (conforme Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006).

COA: 1850-1859

Em 1855, Liouville publica (Liouville [25], 1855) o seu último trabalho no campo (conforme Hilfer [141], 2000).

Em 1859, H. R. Greer (em Greer [26], 1859) derivou fórmulas para derivadas fracionárias de funções trigonométricas baseadas na equação (1.29), isto é, obteve

$$\begin{aligned} D^{\alpha}\mathrm{e}^{iax} &= i^{\alpha}a^{\alpha}\mathrm{e}^{iax} = i^{\alpha}a^{\alpha}(\cos ax + i \operatorname{sen} ax) \\ &= a^{\alpha}(\cos\frac{\pi\alpha}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{2})(\cos ax + i \operatorname{sen} ax) \end{aligned} \tag{1.45}$$

de tal forma que as derivadas fracionárias de $\cos ax$ e $\operatorname{sen} ax$ são dadas por

$$D^{\alpha}(\cos ax) = a^{\alpha}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}\cos ax - \operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sen} ax\right) = a^{\alpha}\cos\left(ax + \frac{\pi\alpha}{2}\right) \tag{1.46}$$

e

$$D^{\alpha}(\operatorname{sen} ax) = a^{\alpha}\left(\cos ax \operatorname{sen}\frac{\pi\alpha}{2} + \operatorname{sen} ax \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right) = a^{\alpha}\operatorname{sen}\left(ax + \frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{1.47}$$

Quando $\alpha = 1/2$ e $a = 1$, as fórmulas de Greer se reduzem às seguintes:

$$D^{1/2}\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.48}$$

e

$$D^{1/2}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \tag{1.49}$$

Semelhantemente, podem ser obtidas fórmulas para derivadas fracionárias de funções hiperbólicas (conforme Debnath [151], 2004). Greer escreveu sobre diferenças finitas de ordem fracionária. Surpreendentemente, um recente acesso para uma derivada fracionária é por meio de diferenças finitas, em análise numérica.

COA: 1860-1869

A menção também deve ser feita a um documento escrito por Z. Wastchenxo (em Wastchenxo [27], 1861), que desenvolve fórmulas adicionais para aquelas de Greer acima em 1861. Ele aperfeiçoa o trabalho de Greer e finaliza seu artigo com uma nota divertida, que nenhum matemático moderno admitiria, relativo à sua pesquisa em um tópico: "Eu sei que Liouville, Peacock e Kelland escreveram sobre este tópico, mas eu não tive a oportunidade de ler seus trabalhos."

H. Holmgren, em 1865, usou (em Holmgren [28], 1865) a definição de integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville reportada por Liouville (em Liouville (Liouville [10], [11] e [12]) e por Riemann (em (Riemann [20], 1847), como seu ponto de partida, para escrever uma longa monografia em derivadas e integrais fracionárias e suas aplicações, onde achou soluções de equações diferenciais ordinárias. Na introdução deste trabalho, ele afirma que seus antecessores Liouville e Spitzer obtiveram os resultados muito restritivos. Holmgren [29] partiu do trabalho de Liouville, a fim de obter as soluções de uma equação diferencial não sujeita às restrições na variável independente, conforme efetuado por seus antecessores. Por exemplo, a lei dos índices é usada:

$$D^\alpha y'' = D^\alpha D^2 y = D^{\alpha+2} y.$$

Embora esta regra seja válida para α inteiro positivo, os modernos matemáticos buscariam justificá-la quando α é arbitrário (Miller e Ross [119], 1993).

Grünwald [1838-Anton Karl Grünwald (Alemão)-1920], evidentemente, unificou os resultados de Riemann e Liouville. No ano de 1867, insatisfeito e inquieto com as restrições da derivada de Liouville, adotou como ponto de partida a definição de uma derivada como um limite de um quociente de diferenças o que resultou em fórmulas de integrais definidas para as derivadas de ordem n. Mostrou que uma integral definida de Riemann teve que ser interpretada como tendo um limite inferior finito. Enquanto que a definição de Liouville, não aparece limite inferior finito, mas, limite inferior menos infinito. Naquele ano, Grünwald (em Grünwald [30], 1867) introduziu a ideia de derivada fracionária como o limite de uma soma dada por (conforme Debnath [151], 2004)

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{\gamma=0}^{n} (-1)^\gamma \frac{\Gamma(\alpha+1) f(x-rh)}{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\alpha-\gamma+1)}. \tag{1.50}$$

Uma das aplicações que Grünwald fez foi a inversão: Se θ é uma função conhecida de x, então por operações fracionárias pode-se determinar a função desconhecida $f(t)$ na equação integral.

$$\theta = \int_0^x (x-t)^p f(t) dt \tag{1.51}$$

Nesta década, a partir dos anos 1860, começou a crescer o estudo sobre os operadores de integrais e derivadas fracionárias, que são essencialmente baseados na familiar fórmula integral de Cauchy [1789 - Augustin Louis Cauchy - 1827]-Goursat [1858 - Edouard Gousart - 1936]. Estes operadores foram considerados (entre outros) por Letnikov [1837- Aleksey Vasilievich Letnikov (Russo)-(1888)] em 1868 e 1872, N. Y. Sonin em 1869, Laurent [1813 - Pierre Alphonse Laurent (Francês)-1854] em 1884, P. A. Nekrassov em 1888, A. Krug em 1890 e Heaviside [1850-Oliver Heaviside (Matemático e físico - Inglês)-1925], em 1892.

Neste estudo, Letnikov escreveu quatro documentos neste tópico, de 1868 até 1872. Em 1868, primeiro Letnikov (em Letnikov [31], 1868) provou para as ordens arbitrárias que:

$$[D^q D^p f(x)]_{x_0}^x = [D^{q+p} f(x)]_{x_0}^x.$$

Depois, descreveu (em Letnikov [32], 1868) sobre o desenvolvimento histórico da teoria da diferenciação de ordem fracionária discutindo detalhadamente os trabalhos de Liouville, Kelland, Peacock, Center e outros.

O primeiro trabalho que levou ao que agora chamamos definição de Riemann-Liouville parece ser o documento escrito por Sonin [1849 Nikolay Yakovlevich Sonin (Matemático-Russo)-1915], em 1869 (em Sonin [33], 1869). Neste, Sonin tomou como base (ponto de partida) a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n de uma função analítica (ou função complexa), que em análise complexa é dada por

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, \tag{1.52}$$

onde C é um contorno fechado. Ele usou como contorno um círculo fechado em uma superfície de Riemann para chegar à sua formulação em cálculo de ordem arbitrária em que $f(z)$ é analítica, z um pólo e $t = z$ qualquer ponto dentro de C.

COA: 1870-1879

Três anos depois, em 1872, Letnikov estendeu o trabalho de Sonin em seu documento (Letnikov [34], 1872). Neste trabalho, o tema principal é a generalização da fórmula integral de Cauchy. Para tanto, Letnikov, assim como Sonin, tomou como referência a própria fórmula integral de Cauchy e como contorno um círculo fechado em uma superfície de Riemann.

COA: 1880-1889

H. Laurent, em 1884, após discutir os trabalhos de Sonin e Letnikov, publicou seu trabalho (Laurent [35], 1884) sobre operadores generalizados, o marco inicial para o moderno desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, onde generaliza a fórmula integral de Cauchy, tomando como ponto de partida também a fórmula integral de Cauchy e fazendo algumas modificações nas ideias de Letnikov e Sonin, que em contraste com o círculo fechado destes, seu contorno foi aberto em uma superfície de Riemann. Usando o método de integração no plano complexo, introduziu a definição fundamental de integral de ordem arbitrária α

$$ {}_aD_x^{-\alpha} f(x) = {}_a\Im_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{1.53} $$

onde ${}_aD_x^{-\alpha} \equiv {}_a\Im_x^{\alpha}$ é o operador integral de Riemann-Liouville. A definição acima é uma das versões hoje chamada de definição de integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville divulgada por Liouville (em Liouville [10], 1832) e por Riemann (em Riemann [20], 1847). Notamos que a definição para integral arbitrária de Laurent (1.53) coincide com a formulada por Abel (1.23) quando $\alpha = \frac{1}{2}$ e com a de Riemann em (1.35), quando $x > a$ sem a função complementar.

Por outro lado quando $a = 0$ a expressão em (1.53), toma a forma da expressão seguinte

$$ {}_0D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \tag{1.54} $$

que corresponde a atual definição de integral de ordem arbitrária de Liouville. É interessante notar que o resultado obtido por Lacroix, na maneira típica (ingênua) dos formalistas clássicos daquele período, é o mesmo dado pela expressão acima. Esta permite várias aplicações.

Depois de discutidas as condições para que essa integral seja considerada de classe de Riemann ou de Liouville, pode-se resolver a questão, proposta por Center, para derivada fracionária de uma constante.

Por outro lado, a definição de derivada de ordem arbitrária de Riemann-Liouville, com base no fato da derivação ser a operação inversa da integração e na lei dos expoentes, foi definida por

$$ {}_0D_x^{\beta} f(x) = D^n[\Im^{\alpha} f(x)], \qquad x > 0 \tag{1.55} $$

onde, $\Im^{\alpha} f(x)$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville e ${}_0D_x^{\beta} f(x)$ é a derivada fracionária de Riemann-Liouville, $\beta > 0$ e $\alpha = n - \beta$.

Conforme mencionamos o objetivo, em geral, daqueles pesquisadores era estender a teoria para operadores generalizados, atingindo assim um nível adequado para o seu desenvolvimento como ponto de partida para um moderno matemático. E se isso não ocorreu até 1884 com o trabalho de Laurent, a teoria tinha sido estendida de modo a incluir operadores D^{α} onde α poderia ser racional, irracional, real ou complexo. Assim, a teoria do cálculo arbitrário ficou intimamente conectada com a teoria de operadores generalizados.

Por conseguinte, o termo cálculo fracionário, terminologia em uso desde os dias de ℓ'Hôpital, tornou-se, nesse momento (1884), impreciso, sendo a nomenclatura "cálculo de ordem arbitrária" ou "cálculo de ordem generalizada" mais adequada para permitir tal generalização (conforme Hilfer [139], 2000).

Assim, o COA, como uma generalização natural do cálculo clássico, passou a ser o campo da análise matemática que lida com equações integrodiferenciais, ou seja, trata da investigação e das aplicações das integrais e das derivadas de ordem arbitrária, isto é, com n da notação anterior podendo ser real ou complexo.

Contudo, é costume chamá-lo ainda hoje de cálculo fracionário (abreviamos com CF), talvez em alusão à correspondência assinada por ℓ'Hôpital e endereçada ao colega Leibniz. Assim, o cálculo de ordem inteira e o cálculo fracionário tornam-se casos particulares do cálculo de ordem arbitrária, no sentido deste generalizar aqueles. E quando usarmos (por razões históricas) a nomenclatura cálculo fracionário, respeitando a tradição, ficará sempre subentendida a ideia de tratar-se das integrais e diferenciais de ordem arbitrária.

Considerando esta extensão, naturalmente, esperamos um comportamento análogo, isto é, assim como o COI, o COA seja também, um instrumento natural e poderoso para resolver uma variedade de problemas, que envolvam as noções de variação e movimento: relacionadas com velocidade, área, volume, taxa de crescimento, continuidade, tangente a uma curva e com outros conceitos, que aparecem nas ciências exatas, naturais, sociais e tecnologias como: Astronomia, Engenharia, Física, Química, Biologia, Geologia, Sociologia, Computação e noutros campos. Da mesma forma consideramos também o seu poder de síntese, ou seja, que muitos destes conceitos possam ser formulados de maneira que se reduzam, de forma análoga, a dois problemas puramentes geométricos: o problema das áreas e o das tangentes.

Em 1888, Nekrassov [1853-Nekrasov Pavel Alekseevich (Matemático - Russo)-1924] (em Nekrassov [36], 1888), também obteve a definição fundamental (1.53) da fórmula integral do Cauchy através de seus métodos que diferem na escolha de um contorno de integração. Porém, estes generalizaram operadores de integração e sua conexão com a fórmula integral de Cauchy teve sucesso.

Vários escritores usaram os operadores generalizados. Mas foram as aplicações brilhantes de Heaviside que aceleraram o desenvolvimento destes operadores. Durante as últimas décadas do século XIX, Heaviside publicou vários documentos em que ele mostrou o quão certas equações diferenciais lineares podem ser resolvidas pelo uso de operadores generalizados. Seus métodos mostraram-se úteis para engenheiros resolverem problemas em física-matemática na teoria da transmissão de correntes elétricas em cabos e foram colecionadas sob o nome famoso de cálculo operacional de Heaviside (Veja também Hadamard [1865 -Jacques Salomon Hadamard (Matemático – Francês)-1963] (Hadamard [37], 1892]).

COA: 1890-1899

Este cálculo operacional, cujo objetivo era recuperar funções lineares, que são os seus objetos de estudo, foi desenvolvido com sucesso por Heaviside a partir de 1892, quando publicou vários artigos originais (em Heaviside [38], 1892; [39], 1893 e [40], 1899), onde introduziu a ideia de derivadas fracionárias em seu estudo do potencial e em linhas de transmissão elétrica. Inspirado no operador simbólico de Gregory (em Gregory [16], 1841) da solução da equação do calor, Heaviside introduziu a letra p para o operador diferencial d/dt e deu a solução da equação de difusão (conforme Debnath [151], 2004):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 p \tag{1.56}$$

para a distribuição de temperatura $u(x,t)$ na forma simbólica

$$u(x,t) = A\exp(ax\sqrt{p}) + B\exp(-ax\sqrt{p}) \tag{1.57}$$

onde $p \equiv \frac{d}{dt}$, a, A e B eram tratados como constantes. Realmente, Heaviside deu uma interpretação de $\sqrt{p} = D^{1/2}$ de forma que ${}_0D_t^{1/2}1 = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ está em completo acordo com as equações (1.33) e (1.41). E, em 1899, Heaviside (em Heaviside [40], 1899), aplica o seu cálculo operacional à teoria eletromagnética.

Contudo, Heaviside não era um cientista habilidoso matematicamente como observado por Kelland. Deste modo quando Heaviside publicou seu trabalho na última década do século XIX, ele estava orgulhoso, não somente porque exacerbou a situação com seu alegre concorde por matemáticos, mas também porque os matemáticos tinham uma desconfiança geral da teoria de operadores fracionários (conforme Oldham e Spanier [99], 1974 e [159], 2006).

O desenvolvimento do cálculo operacional de Heaviside foi semelhante ao do cálculo. Newton e Leibniz, não ofereceram uma formulação rigorosa deste. A teoria rigorosa foi desenvolvida só no século XIX. É bem conhecido que somente os matemáticos do século XX forneceram uma formulação rigorosa do cálculo operacional de Heaviside.

Considerando os aspectos teóricos e aplicados do cálculo de ordem arbitrária, até o final do século XIX, o desenvolvimento se deu estritamente nas partes teóricas da Matemática, sem grandes aplicações em outras áreas.

1.1.4 No Século XX

Durante o Século XX, a teoria e suas aplicações tiveram notáveis contribuições. Uma grande quantidade de pesquisa, em derivadas e integrais fracionárias e suas aplicações, foram publicadas por muitos autores. Porém, de 1900 até 1970 seu desenvolvimento foi menos intenso e esparso, comparado com o período subsequente, ou seja, de 1971 até 1999, como vamos ver a seguir.

COA: 1900-1909

Na primeira década do Século XX alguns dos colaboradores eram, dentre outros, Moritz (Moritz [41], 1902);

Pincherle [1853 Salvatore Pincherle (Matemático - Italiano) 1936] (Pincherle [42], 1902) e Hardy[1877-Godfrey Harold Hardy-(Matemático - Inglês)-1947)([Hardy [47], 1917).

COA: 1910-1919

No campo teórico, Weyl [1885-Hermann Krauss Hugo Weyl (Matemático - Alemão) - 1955], num texto de 1917 (Weyl [48], 1917), obtém uma outra definição para integral de ordem arbitrária na forma

$$ {}_xD_{\infty}^{-\alpha}f(x) = {}_x W_{\infty}^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.58} $$

Por outro lado a derivada fracionária de Weyl foi definida como

$$ D\left[W^{\alpha}f(t)\right] = W^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}f(x+t)dx, \tag{1.59} $$

cuja formalização matemática e aplicação discutimos no Capítulo 2.

Em 1918, E. Schyler[4] formulou o Problema 360 da seguinte forma: Que interpretação deve-se dar para

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} $$

tal que

$$ \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{dy}{dx}? $$

No mesmo ano (1918), I. O'Shaughnessy[5] registrou em seu trabalho o Problema 433 com o enunciado: Resolva a equação

$$ \frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{x}. $$

Post [1897 Emil Post, (Matemático e Lógico - Polonês) 1954], em 1919, discute duas soluções diferentes para o Problema 433, e aproveita a oportunidade para responder o Problema 360 ao mesmo tempo [49]. Ele explica que as duas soluções são corretas; porém, cada solução é baseada em uma definição diferente. O proponente, em sua solução, usou a definição de Liouville de integração de ordem fracionária que é equivalente a integral definida

$$ {}_cD_x^{-v}f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_c^x(x-t)^{v-1}f(t)dt $$

com limite inferior de integração c infinito e negativo, enquando Post, em sua solução, usou a definição de Riemann, que é a integral acima com o c igual a zero. Infelizmente, Post não faz nenhuma referência ao trabalho de Center [22].

Os resultados de Heaviside eram corretos, mas ele foi incapaz de justificar seus procedimentos. Estes somente foram justificados, em 1919, por Bromwich [1875- Thomas John Ianson Bromwich (Matemático - Inglês) - 1929], que formalizou os resultados de Heaviside de forma consistente e declarou que o propósito de seu trabalho era encorajar o uso de métodos operacionais na solução de problemas físicos (Bromwich [50], 1919).

[4] Amer. Math. Montly, **25**, 173 (1918).
[5] Amer. Math. Montly, **25**, 172-173 (1918).

COA: 1920-1929

Berg [1871-Ernst Julius Berg (Engenheiro Elétrico- Suíço)- 1941], em 1924, aplicou os operadores de Heaviside em Engenharia e Física [51]. Em 1925, Hardy e Littlewood [1885-John Edensor Littlewood (Matemático - Inglês-1977) (em Hardy e Littlewood [56], 1925) obtêm alguns resultados das integrais fracionárias. Em 1927, A. Marchaud, introduziu (em Marchaud [57], 1927) a derivada fracionária de ordem arbitrária α na forma

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha}} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \tag{1.60}$$

onde $0 < \alpha < 1$.

COA: 1930-1939

E. L. Post, em 1930, usou (Post [58], 1930) quocientes de diferenças para estender a definição de derivada de ordem arbitrária de Grünwald e definir a diferenciação para operadores generalizados *f(D)*, onde D denota a diferenciação e f uma função apropriadamente restrita. Esta definição dada por

$$D^{\alpha} f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left(\frac{x_0}{n}\right)^{-\alpha} \sum_{n-1}^{k=0} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)} f\left(x_0 - k\frac{x_0}{n}\right) \tag{1.61}$$

é denominada atualmente como derivada de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov. Alguns autores, posteriormente, demonstraram que esta definição é uma ferramenta muito eficiente na resolução de problemas numéricos.

Em 1931, Watanabe (em Watanabe [59], 1931) derivou a regra de produto de Leibniz usando a fórmula (1.40) (em Hargreave [21], 1848). Em 1936, Davis (em Davis [60], 1936) descreveu a teoria de operadores lineares com cálculo fracionário e suas aplicações.

Em 1939, A. Erdèlyi começa a introduzir definições para as chamadas diferintegrais com respeito às funções arbitrárias (em Erdèlyi, [62], 1939).

COA: 1940-1949

A partir de 1940, em uma série de documentos Erdèlyi ([63], 1940) e Kober ([64], 1940) investigaram as propriedades da integral fracionária para η e α complexos com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$

$$\Im_1^{\eta,\alpha} f(x) = \frac{x^{-\alpha-\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} t^{\eta} f(t) dt, \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \tag{1.62}$$

que é obviamente uma generalização da integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville (1.53) na sua versão mais usada, e a integral arbitrária para η e α complexos com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$

$$K_1^{\eta,\alpha} f(x) = \frac{x^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} t^{-\alpha+\eta} f(t) dt, \qquad 0 < x < \infty, \tag{1.63}$$

que é generalização da integral fracionária de Weyl (1.58).[6]

[6] Algumas destas definições e resultados foram apresentados em McBride ([102], 1979), Sanko et al.([110], 1987; [121], 1993), Kiryakova ([122], 1994) e Kilbas et al. ([158], 2006).

Os operadores integrais $\Im_m^\alpha$ e K_m^α, definidos por Kober, em 1940, para $\text{Re}(\alpha) > 0$ e apropriadas funções f, são (Debnath [151], 2004)

$$\Im_m^\alpha f(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^m - t^m)^{\alpha-1} t^{m-1} f(t)dt, \quad 0 < x < \infty \tag{1.64}$$

$$K_m^\alpha f(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^m - x^m)^{\alpha-1} t^{m-1} f(t)dt, \quad 0 < x < \infty. \tag{1.65}$$

Quando $m = 1$, (1.64) e (1.65) reduzem-se à (1.53) e (1.58), respectivamente.

Dos resultados de Kober [64], úteis para considerar particulares operadores integrais $\Im_1^{\eta,\alpha}$ e $K_1^{\eta,\alpha}$ definidos, para $\text{Re}(\alpha) > 0$, números complexos apropriados η e funções apropriadas f, por

$$\Im_1^{\eta,\alpha} f(x) = x^{\eta-\alpha} \Im_1^\alpha [x^\eta f(x)] \tag{1.66}$$

e

$$K_1^{\eta,\alpha} f(x) = x^\eta K_1^\alpha [x^{-m(\alpha+\eta)} f(x)] \tag{1.67}$$

onde $0 < x < \infty$.

Combinando estas duas generalizações obtemos operadores integrais mais gerais no intervalo $0 < x < \infty$, a saber:

$$\Im_m^{\eta,\alpha} f(x) = x^{-m(\eta+\alpha)} \Im_m^\alpha [x^{m\eta} f(x)] \tag{1.68}$$

e

$$K_m^{\eta,\alpha} f(x) = x^{m\eta} K_m^\alpha [x^{-m(\alpha+\eta)} f(x)]. \tag{1.69}$$

Usando as equações (1.64) e (1.65) e introduzindo $t = xu$, os operadores definidos por (1.68) e (1.69) são dados

$$\Im_m^{\eta,\alpha} f(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - u^m)^{\alpha-1} u^{m\eta+m-1} f(xu)du \tag{1.70}$$

e

$$K_m^{\eta,\alpha} f(x) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (u^m - 1)^{\alpha-1} u^{-m(\eta+\alpha)+m-1} f(xu)du. \tag{1.71}$$

Estes operadores integrais são normalmente referidos aos operadores de Erdèlyi-Kober.

Em 1949, na sua clássica memória Riesz ([65], 1949) encontrou integrais do tipo de Riemann e de Liouville que emergem da teoria de equações diferenciais ordinárias lineares onde elas são conhecidas como transformadas de Euler do primeiro tipo e do problema de Cauchy para equações hiperbólicas (conforme Debnath [151], 2004).

COA: 1950-1959

Na década de 1950 alguns dos colaboradores ao assunto: N. Stuloff ([66], 1950), B. Kuttner ([67], 1953), I. I. Hirschmann ([68], 1953), A. Erdèlyi ([71], 1954) e J. L. Lions ([72], 1959).

Por exemplo, em 1953, Kuttner [1908 Brian Kuttner (Matemático - Inglês) 1992], considerou (Kuttner [67], 1953) a relação entre as integrais:

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_0^x (x-t)^{n-k-1} f(t)dt$$

e

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{\Gamma(n-k)} \int_x^1 (t-x)^{n-k-1} f(t)dt.$$

COA: 1960-1969

Em 1964, Buschman ([78], 1964), mostrou que se as funções $\Im^{\eta,\alpha}$ e $K^{\eta,\alpha}$ são definidas por

$$\Im^{\eta,\alpha}(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}(x^2-1)^{\alpha-1}x^{-(2\alpha+2\eta)}H(x-1) \tag{1.72}$$

e

$$K^{\eta,\alpha}(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)}(1-x^2)^{\alpha-1}x^{2\eta}H(1-x) \tag{1.73}$$

onde $H(x)$ é função de Heaviside, então

$$\Im_{\eta,\alpha}f(x) = (\Im^{\eta,\alpha} * f)(x) \tag{1.74}$$

e

$$K_{\eta,\alpha}f(x) = (K^{\eta,\alpha} * f)(x) \tag{1.75}$$

onde os operadores $\Im_{\eta,\alpha}$ e $K_{\eta,\alpha}$ são definidos por

$$\Im_{\eta,\alpha}f(x) = \frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}t^{2\eta+1}f(t)dt \tag{1.76}$$

e

$$K_{\eta,\alpha}f(x) = \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t^2-x^2)^{\alpha-1}t^{-2(\alpha+\eta)+1}f(t)dt \tag{1.77}$$

onde, $\alpha > 0, 2\eta > -1$ e $*$ denota a convolução de Mellin de f e g definida por

$$(f*g)(x) = \int_0^\infty f(t)g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}. \tag{1.78}$$

Subsequentemente, em 1965, Cooke ([79], 1965) generaliza os operadores integrais de Erdèlyi-Kober. Demonstra a utilidade destes operadores para obter soluções (duais e triplas) de equações integrais em eletrostática (veja Erdèlyi e Sneddon ([73], 1960). Em particular, as integrais fracionárias envolvendo funções especiais são introduzidas pelos operadores de Lowndes na forma

$$\Im_\lambda^{(\eta,v+1)}f(x) = \frac{2^{v+1}}{\lambda^v}x^{-(\eta+v+1)} \int_0^x t^{2\eta+1}(x^2-t^2)^{v/2}\Im_v\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)dt \tag{1.79}$$

e

$$K_\lambda^{(\eta,v+1)}f(x) = \frac{2^{v+1}x^{2\eta}}{\lambda^v} \int_x^\infty t^{-(2\eta+2v+1)}(t^2-x^2)^{v/2}\Im_v\left(\lambda\sqrt{t^2-x^2}\right)f(t)dt, \tag{1.80}$$

onde estes operadores são relacionados ao operador diferencial de Bessel

$$B_\eta = x^{-(1+2\eta)}\frac{d}{dx}\left(x^{1+2\eta}\right)\frac{d}{dx}. \tag{1.81}$$

Higgins em 1967, usou (Higgins [86], 1967) os operadores integrais fracionários para resolver equações diferenciais.

Até a década de setenta, tivemos poucos pesquisadores contribuidores ao tópico (Sabatier et al [163], 2007).

A partir daquela data, o paradigma começou a mudar das formulações da matemática pura até aplicações em vários campos. Estas aplicações, pelo grau de credibilidade que proporcionam, foram um dos principais responsáveis pelo progresso do cálculo fracionário verificado a partir daquele momento. Provavelmente, a parte computacional, que teve um grande avanço, contribuiu para o seu crescente desenvolvimento.

Então, em 1968, foi publicada a primeira monografia sobre o cálculo fracionário aplicado à Química, elaborada em uma colaboração comum entre Keith B. Oldham (Químico) e Jerome Spanier (Matemático).

Depois, em 1969, Caputo [1927 - Michele Caputo (Físico - Italiano) - vivo], propôs (em Caputo [90], 1969) uma nova definição para derivada de ordem arbitrária definida por

$$D_*^{\beta} f(x) = {}_c\Im_x^{\alpha}[D^n f(x)] \tag{1.82}$$

e com ela resolveu um problema de viscoelasticidade.

A esse respeito, nosso objetivo no Capítulo 2 deste trabalho é discutir a conveniência das diversas maneiras de se introduzir a derivada fracionária, comparando-as de modo a se concentrar na formulação de Caputo, justificando a sua importância nas aplicações envolvendo equações diferenciais parciais.

COA: 1970-1979

A partir de 1970 o cálculo de ordem arbitrária experimentou um acelerado desenvolvimento. Por exemplo, em uma série de documentos Osler estudou (em Osler [91], 1970; [95], 1971 e [97], 1972) completamente a regra de produto de Leibniz de derivadas de ordem arbitrária α e provou um resultado geral

$$D_x^{\alpha}[f(x)g(x)] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma-r+1)\Gamma(\gamma+r+1)} D_x^{\alpha-\gamma-r} f(x) D_x^{r+\gamma} g(x) \tag{1.83}$$

onde γ é arbitrário. Quando $\gamma = 0$, o resultado de Osler (1.83) se reduz ao resultado de Hargreave (1.40). Osler também provou uma generalização da regra de produto de Leibniz (1.40) na forma integral

$$D_x^{\alpha}[f(x)g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\gamma-r+1)\Gamma(\gamma+r+1)} D_x^{\alpha-\gamma-r} f(r) D_x^{\gamma+r} g(r)\, dr. \tag{1.84}$$

Esta é uma fórmula muito útil para avaliar integrais definidas inclusive uma versão generalizada da fórmula de Parseval em análise de Fourier.

Até este momento o desenvolvimento de cálculo fracionário, como outras ideias matemáticas, passou por vários erros, absurdos, controvérsias, que às vezes fizeram alguns matemáticos desconfiarem do conceito geral de operadores fracionários.

Já nos primeiros anos da década de 70, os operadores de cálculo fracionário já tinham sido úteis em vários campos como Reologia, Biologia quantitativa, Eletroquímica, Difusão, Teoria de transporte, Probabilidade, Estatísticas, Teoria potencial e Elasticidade. Assim, enquanto a teoria desenvolvia-se, seu uso tinha sido deixado para trás (Samko et al. [121], 1993). Esta razão incentivou o professor B. Ross a tomar a dianteira de organizar a primeira conferência no asssunto.

Assim, somente em junho do ano 1974, depois de 279 anos, quase três séculos depois do início, ou seja, desde a pergunta de ℓ'Hôpital, a primeira conferência internacional sobre cálculo fracionários e suas aplicações às ciências matemáticas foi realizada na Universidade de New Haven, Estados Unidos da América, sob a organização de B. Ross, patrocinado pela Fundação Nacional de Ciência. Com duração somente de dois dias, com 22 participantes e 72 frequentadores, teve uma aglomeração excepcional. Muitos matemáticos notáveis a frequentaram, entre estes, incluiu-se R. Askey, M. Mikolas e muitos dos matemáticos mencionados nessa abordagem. Esta conferência teve vários objetivos: popularizar o assunto na esperança que induziria cientistas para incluir isto em suas pesquisas e encorajá-los em descobrir novos métodos formais para representar fenômenos físicos por modelos matemáticos que podiam ser tratados com a elegância através do cálculo fracionário (conforme Samko et al. [121]). Vários assuntos foram tratados como cálculo fracionário operadores generalizados e aplicações do cálculo fracionário à Teoria das probabilidades e Estatística. Também, neste colóquio, a solução de Abel foi descrita pelos matemáticos como "elegante", 151 anos depois desta aplicação e quase 300 anos depois do início do cálculo fracionário. Os trabalhos ali apresentados e discutidos foram coletados e geraram a publicação (Ross [98], 1974).

Esta conferência foi a grande contribuição ao assunto no século XX, os resultados deste congresso foram positivos e notáveis, pois desde então, o campo desenvolveu-se intensivamente, o movimento cresceu, o número de pesquisadores voltados para o cálculo fracionário aumentou significativamente, certamente estimulou uma grande quantidade de publicações como mostram os fatos e dizem os livros. E não há o que negar: sem a criação e manutenção de um congresso dessa grandeza, para melhor divulgar o assunto mundialmente, muito raramente a teoria e suas aplicações deixaria o seu desenvolvimento lento, descontínuo, local e se desenvolveria mais rapidamente em diversos lugares do mundo, numa forma mais ordenada.

No ano deste congresso (1974), depois de uma colaboração entre Oldham e Spanier, iniciada em 1968, houve a publicação do primeiro livro (Oldham e Spanier [99], 1974) reportado exclusivamente ao cálculo fracionário aplicado, isto é, direcionado às aplicaçõees, onde pode ser encontrada uma excelente sequência histórica, descrita por B. Ross, do desenvolvimento da integração e diferenciação fracionária e sua aplicação, de 1695 até 1974, e também algumas de suas aplicações (conforme Samko et al. [121], 1993).

Curiosamente, neste livro, não é referenciado o nome de Caputo que, como mencionamos, escreveu antes um documento (em Caputo [90], 1969) onde aplicou o cálculo fracionário para resolver o problema da viscoelasticidade. Quais as razões? Uma razão podia ser que, até este momento (década de 1970), os fatos básicos da teoria não eram prontamente acessíveis até na literatura matemática (conforme Hilfer [139], 2000). Outra é que, possivelmente ele (Caputo) era pouco conhecido pelas suas aplicações. O período intermediário (1695-1974) foi descrito por Ross em sua bibliografia cronológica do cálculo fracionário com comentários, incluindo mais de 150 artigos. Esta descrição pode ser encontrada no livro escrito por Oldham e Spanier ([99], 1974 e [159], 2006), veja também Samko et al. ([110], 1987). No ano seguinte, 1975, houve o lançamento no importante periódico de um trabalho de Ross ([100], 1975) expondo a história da teoria fundamental do cálculo fracionário.

Além destas contribuições, devemos mencionar ainda o livro (McBride [102], 1979) de A. C. McBride (Escocês), editado em 1979, onde é discutido o cálculo fracionário e as transformadas integrais fracionárias. Neste livro McBride, como vários pesquisadores mais cedo, considerou os operatores $\Im$ e K definidos por (Debnath [151])

$$\Im f(x) = \frac{\mu x^{-(1+\eta)}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x {}_2F_1\left(\alpha, \beta+m; \gamma; a\left(\frac{t}{x}\right)^{\mu}\right)^{\mu} xt^{\eta} f(t)dt \tag{1.85}$$

e

$$Kf(x) = \frac{\mu x^{\eta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^{\infty} {}_2F_1\left(\alpha, \beta+m; \gamma; a\left(\frac{x}{t}\right)^{\mu}\right)^{\mu} x)t^{-(\eta+1)} f(t)dt \tag{1.86}$$

onde ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica de Gauss e α, β; γ; η; μ e a são parâmetros complexos.

Em 1979, foi publicada a primeira tese Ph.D, escrita por Bagley orientada por Torvik ([103] e [104], 1979), no Instituto de Força Aérea do Laboratório de Tecnologia e Material de Ohio, para aplicar as equações diferenciais de ordens arbitrárias na modelagem do comportamento de materiais viscoelásticos. Depois muitos pesquisadores, atenciosos, aplicaram as equações diferenciais fracionárias para viscoelasticidade de materiais e outros processos complexos, inclusive fenômenos de difusão anômala.

COA: 1980-1989

Na década de 1980 a atividade matemática em cálculo fracionário se intensifica de forma considerável em diversas partes do mundo.

Nessa década, dez anos após o primeiro congresso, devido ao sucesso do primeiro, foi promovido o segundo congresso internacional em CF pela University of Stratchclyde, Glasgow, na Escócia, em 1984, organizado também por B. Ross, organizador do primeiro congresso, seguindo as diretrizes do primeiro congresso (conforme Samko et al. [121], 1993). Vários pesquisadores colaboraram para o ato, incluindo, entre outros, P. Heywood, S. Kalla, W. Lamb, J. S. Lowndes, K. Nishimoto, P. G. Rooney e H. M. Srivastava, como também alguns dos matemáticos que tomaram parte no ano de 1974, no congresso em New Heaven. Algumas questões em aberto ainda estavam intrigando. Por exemplo: É possível achar uma interpretação geométrica para uma derivada fracionária de ordem não inteira? (conforme Miller e Ross [119], 1993). Esta questão mexe com o pensamento de muitos pesquisadores e cria-se um tipo de obsessão na busca de sua resposta. Com esse congresso o assunto ganhou mais força, mais voz. Mais pesquisadores são estimulados a pesquisar e escrever sobre o assunto. A lista dos textos e contribuições devotadas unicamente ou em parte ao cálculo fracionário e às suas aplicações aumentam sensivelmente.[7]

Por exemplo, K. Nishimoto (Japonês), em 1984, começou a publicar uma série de trabalhos (Nishimoto [107], 1984) dedicados principalmente às aplicações do cálculo fracionário em equações diferenciais ordinárias e parciais.

Na União Soviética, em 1987 surge a obra dos três matemáticos soviéticos S. Samko, O. Marichev e A. Kilbas, que escreveram o livro enciclopédico de cálculo fracionário Samko et al. ([110], 1987); que ao julgar pelo conteúdo, lembra mais uma enciclopédia, onde podemos encontrar um farto material associado ao

[7] Para detalhes veja McBride [108], 1985.

cálculo arbitrário e suas aplicaçẽs. Este livro foi traduzido para o Inglês pela *Gordon and Breach Publishing Company*, em 1993.

COA: 1990-1999

Em 1990, Lützen (Lützen [111], 1990), demonstrou que Abel nunca resolveu o problema da braquistócrona através do cálculo fracionário, mas somente mostrou como a solução achada podia ser escrita como uma derivada fracionária. Lützen também brevemente resumiu o que Abel realmente fez. Porém, quem realmente resolveu a equação integral (1.27) foi Liouville (em Liouville [10], 1832).

O terceiro congresso internacional em cálculo de ordem arbitrária foi realizado na Universidade de Nihon, em Tóquio, Japão em 1989 [Nishimoto [112], 1990]. Alguns dos muitos colaboradores foram M. Al-Bassam, R. Bagley, Y. A. Brychkov, L. M. B. C. Campos, R. Gorenflo, J. M. C. Joshi, S. Kalla, E. R. Love, M. Mikolas, K. Nishimoto, S. Owa, A. P. Prudnikov, B. Ross, S. Samko, H. M. Srivastava (conforme Miller e Ross [119], 1993). Este congresso ocorreu por ocasião do centésimo aniversário da Universidade de Nihon. Para aqueles que frequentaram a conferência foi proposto um problema bastante engenhoso, a saber: - O que é a dimensão fracionária do metrô de Tokyo?. As contribuições para problemas mais sérios da teoria recente do cálculo fracionário foram publicadas por Nishimoto ([112], 1990) e Bagley ([113], 1990) conforme Hilfer ([139], em 2000).

Em uma série de documentos citados em seu livro, Kalla e Kiryakova (em [114], 1990 discutiram os operadores mais gerais fracionários integrais envolvendo tanto a função de Meijer, função G, quanto a função de Fox, função H, definidas por (Debnath [151])

$$R_G f(x) = x^{-(1+\eta)} \int_0^x G_{p,q}^{m,n}\left[a\left(\frac{t}{x}\right)^r |_{(b_k)_1^q}^{(a_j)_1^p}\right] t^\eta f(t)dt. \tag{1.87}$$

e

$$R_H f(x) = x^{-(1+\eta)} \int_0^x H_{p,q}^{m,n}\left[a\left(\frac{t}{x}\right)^r |_{(b_k,B_k)_1^q}^{(a_j,A_j)_1^p}\right] t^\eta f(t)dt. \tag{1.88}$$

Em 1991, usando a fórmula integral de Cauchy para derivadas de ordens arbitrárias, Nishimoto (em Nishimoto [116], 1991) deu uma nova prova da fórmula do produto de Leibniz $D_z^\alpha[f(z)g(z)]$ para funções analíticas $f(z)$ e $g(z)$. É importante mencionar as fórmulas de Nishimoto para derivadas e integrais arbitrárias da função logarítmica, a saber:

$$D^\alpha(\log az) = -\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}\Gamma(\alpha)z^{-\alpha} \tag{1.89}$$

e

$$D^{-\alpha}(z^{-\alpha}) = -\frac{\mathrm{e}^{-i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\log z \tag{1.90}$$

onde $a \neq 0$, $\arg a < \frac{\pi}{2}$, z e α são números complexos.

É relevante mencionar que, Nishimoto (em Nishimoto [116], 1991) forneceu a definição e propriedades do cálculo fracionário de funções de uma e de várias variáveis complexas.

Em Polack (Polack [115], 1991), são consideradas aplicações do cálculo fracionário em ciência e engenharia e resolvidas muitas equações integrais e diferenciais fracionárias ordinárias e parciais em mecânica dos fluidos.

Kenneth Miller e Bertram Ross, em 1993 publicam o clássico livro (Miller e Ross [119], 1993), em que é apresentada uma introdução às equações diferenciais fracionárias. Neste livro o autor faz uma estimativa sobre a quantidade de publicações sobre o assunto: "No período 1974 até 1993, mais ou menos 400 documentos foram publicados relativo ao cálculo fracionário".

Em 1993, após a mundialização do capitalismo (acesso às informações) em dezembro de 1991, quase vinte anos após o primeiro congresso, o livro de Samko et al. ([110]), em russo, foi traduzido para o inglês [121]. A partir desta data, vários trabalhos em diversos lugares do mundo, emergem numa forma mais ordenada de onde vários outros livros começaram a ser publicados. A ideia de pagar tributo aos pequisadores deste assunto, como forma de reconhecer as contribuições científicas surgiu no livro enciclopédico de Samko et al. (Samko et al. ([110]), onde encontramos: "Pagamos tributo para investigadores de décadas recentes citando os nomes de matemáticos que fizeram contribuições científicas valiosas para o desenvolvimento do cálculo fracionário de 1941 até o presente (1987). Estes são Laplace, Fourier, ... e outros". Nesta lista devem ser adicionados nomes de pesquisadores até Samko et al. [121] e muitos outros matemáticos e investigadores da geração antiga e, particularmente, aqueles da geração mais jovem.

Além do texto escrito [90] em 1969, Caputo publica, em 1992-1993, o livro (Caputo [118], 1992), onde é proposta uma importante mudança na definição da derivada fracionária, importante, por exemplo, na resolução de uma equação diferencial fracionária cuja solução satisfaz condições de contorno. A outra forma para derivada fracionária segundo Caputo é definida por

$$D_*^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau, \qquad m-1 \leq \beta < m \tag{1.91}$$

ou, em particular, quando $\beta = n$

$$D_*^{\beta} f(x) = \frac{d^n}{dt^n} f(t), \qquad \beta = n. \tag{1.92}$$

O autor utilizou sua definição para descrever problemas de sismologia.

Em 1994, inicia-se o primeiro dos tradicionais seminários internacionais: *Transform Methods and Special Functions* abreviadamente *TMSF 94 de Varna* (Métodos das transformadas e Funções Especiais), realizado em Varna, na Bulgária.

V. Kiryakova, publica, em 1994, o seu livro (Kiryakova [122], 1994), onde apresenta o cálculo fracionário generalizado e suas aplicações, ou seja, é dedicado para sistematizar e unificar o desenvolvimento de um novo cálculo fracionário generalizado, relacionado a muitos casos especiais e várias aplicações.

Parece que dificilmente nenhum campo da ciência ou engenharia permaneceu intocável por este tópico da Matemática, tendo sido usado em muitos campos da ciência e engenharia, inclusive fluxo de fluidos, reologia, transporte difusivo similar para difusão, redes elétricas, teoria eletromagnética e probabilidade. Alguns documentos usaram o cálculo fracionário em estatísticas; outros encontraram uso do mesmo em viscoelasticidade e eletroquímica de corrosão, dentre outros.

1.2 Cálculo de Ordem Arbitrária: 1996 - 2010

Damos sequência, nesta seção, ao levantamento histórico da teoria e aplicações do cálculo de ordem arbitrária, ao período subsequente, isto é, a partir de 1996 até os dias de hoje, bem como um levantamento na Internet, em sites especializados, para melhor descrever sobre o estado da arte, isto é, o que já foi produzido e/ou escrito sobre o assunto no mundo e no Brasil, nesse período.[8]

Devido a uma considerável regularidade que o assunto toma à medida que seu desenvolvimento chega aos dias atuais, diferente da primeira seção, a cronologia é feita dentro de cada subseção dessa seção, começando do primeiro ano 1996 até o último, respectivamente.

Resumindo, dentro de cada subseção e de cada ano, alguns aspectos (teóricos e aplicados) e fatos (reuniões e documentos publicados) importantes relativos ao COA.

Nesse período o interesse em cálculo fracionário continua ainda mais intenso, à medida que se aproxima de 2010, vem sendo mostrado em exposições do seu desenvolvimento teórico em muitas reuniões mundiais e publicação internacional de atividades de pesquisa, publicação de documentos e principalmente pelas novas aplicações demonstradas em diversos campos da ciência e engenharias.

Com efeito, devido a alta credibilidade que o assunto vem ganhando em função de sua aplicabilidade, a teoria e suas aplicações ganham popularidade e importância considerável e se desenvolve mais rapidamente em diversos lugares do mundo, numa forma, agora, ainda mais ordenada.

Intensificam-se também as contribuições com documentos sobre o assunto, a aparição de periódicos especializados e a realização de reuniões, simpósios e/ou congressos internacionais sejam na teoria que nas aplicações do COA.[9]

Periódicos no mundo

Atuamente existem pelo menos dois periódicos internacionais, que são completamente ou quase completamente dedicados à teoria e aplicações do cálculo fracionário.

Periódicos especializados em COA

Descrevemos a seguir dois diários especializados, em que documentos de cálculo fracionário têm sido publicados, por razão de especialização e por serem os jornais de maior publicação de documentos e distribuição mundial nesse período a saber: Journal of Fractional Calculus (editado por Nishimoto [125]) e Fractional Calculus and Applied Analysis (fundado por V. Kiryakova [136]).

Journal of Fractional Calculus

Este periódico especializado em cálculo fracionário foi criado em 1996 e é editado por Nishimoto ([125]).

Fractional Calculus and Applied Analysis

Em março de 1998 foi criado por V. Kiryakova ([136], 1998), em Sofia, na Bulgária, pelo Instituto de

[8]Estudamos e redigimos esta seção tomando como referência básica recente o texto (Debnath [151], 2004) bem como um levantamento em sites na Internet. Fixamos nossa data limite em junho de 2010.

[9]Enquanto finalizávamos esta dissertação emerge o trabalho [55], referência mais recente a ser mencionada pois fixamos o mês de junho como data limite.

Matemática e Informática, da Academia Búlgara de Ciências, um dos mais importantes e especializados periódicos na área de cálculo fracionário o intitulado *Fractional Calculus and Applied Analysis* (Cálculo fracionário e análise aplicada) ou abreviadamente “FCAA” (já famoso), como um jornal internacional para teoria e aplicações do cálculo integrodiferencial. Os tópicos abordados são: Cálculo fracionário, funções especiais, transformações integrais e algumas áreas relacionadas a análise aplicada. A revista foi concebida como um suplemento para a continuação dos periódicos e atos existentes de várias conferências internacionais nestes tópicos, começando com New Haven (1974), Glasgow (1984), Tóquio (1989) e continuando nos anos recentes com reuniões em áreas fechadas na Polônia, Belarus, Iugoslávia, e seminários internacionais intitulados: “Transform Methods and Special Functions” ou abreviadamente “TMSF” (Métodos de Transformadas e Funções Especiais), “TMSF, Sofia, 1994” e “TMSF, Varna, 1996”. Para aqueles que expressam interesse nos tópicos acima e nos seminários internacionais, o diário oferece foro para a discussão e troca de resultados e problemas abertos. De certo modo, o objetivo desse diário é continuar as discussões de mesa-redonda: “Significados físicos e geométricos e aplicações dos operadores de cálculo fracionário”, iniciadas durante o segundo seminário “TMSF, Varna 1996”. Como tal, recebe e submete a apreciação documentos enfatizando as aplicações das possíveis técnicas do cálculo integrodiferencial para resolver equações diferenciais e integrais e problemas que surgem de Física, Química, Astronomia, Estatísticas, Economia e Engenharia; como também interações com Fractais e Geometria Fractal.

Periódicos quase especializados em COA

Dentre vários outros que são quase completamente dedicados ao assunto, destacamos:

Journal of Mathematical Analysis and Applications

Em 1996, foi criado o *Journal of Mathematical Analysis and Applications* ou JMAA (Revista de Análise Matemática e Aplicações), apresentando documentos que tratavam de análise matemática e suas numerosas aplicações. O periódico enfatiza artigos dedicados ao tratamento matemático de questões que surgem em Física, Química, Biologia e Engenharia, particularmente aqueles de aspectos analíticos e problemas inovadores e suas soluções.

Os documentos que são buscados neste jornal empregam um ou mais das seguintes áreas de análise clássica: teoria analítica de números, análise e teoria de operador funcional, análise real e harmônica, análise complexa, análise numérica, matemática aplicada, equações diferenciais parciais, sistemas dinâmicos, controle e otimização, probabilidade, biologia matemática, combinatória e física-matemática. O ano 2007, foi muito bem sucedido para o “JMAA”, pois durante este ano, recebeu 3000 novas submissões, um aumento de mais de 10 por cento comparado a 2006, segundo seus administradores.

Sites Especializados

Duarte Valério, http://web.ist.utl.pt/duarte.valerio/ninteger/ninteger.htm.

Igor Podlubny, http://people.tuke.sk/igor.podlubny/fc.html.

YangQuan Chen, http://mechatronics.ece.usu.edu/foc/.

FraCalMo, http://www.fracalmo.org/.

Equipe CRONE, http://www.ims-bordeaux.fr/IMS//pages/accueilEquipe.php?guidPage=les-equipes. Power Law & Fractional Dynamics: http://www.ismm.ac.cn/ismmlink/PLFD/index.html.

Passemos agora a elencar a evolução de reuniões internacionais. Destacamos a seguir algumas reuniões importantes realizadas no campo no período 1996-1999:

Reuniões em 1996

Em 1996, ocorreu o segundo seminário internacional de *Transform Methods and Special Functions* abreviadamente *TMSF*, 96 de Varna, em Varna, Bulgária. [www.diogenes.bg/fcaa]

Reuniões em 1998

Em 1998, foi realizada a *Djrbashian Memorial Conference* ou *DMC98* (Conferência comemorativa de Djrbashian), em Erevan, na Armênia. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Em 1998 foi realizado o *Colloquium on fractional differential systems*, um colóquio em sistemas diferenciais fracionários: modelos, métodos e aplicações. Este colóquio foi realizado na Academia Nacional da Escola Nacional de Telecomunicações em Paris, França.

Reuniões em 1999

Em 1999 ocorreu o terceiro seminário internacional de *Transform Methods and Special Functions* ou *TMSF99 de Varna* também em Varna, Bulgária.

Em 1999 foi realizada a Conferência internacional em "Equações diferenciais e análise de métodos analíticos"(AMADE) em Minsk, Belarus; organizada pelo Instituto de Matemática de Academia de Belarusian a Universidade Nacional do Estado de ciências de Belarusian junto com a Universidade do Estado de Moscou e Centro de Computação de Ciências de Academia Russas, em Minsk, Belarus. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Em 1999 foi realizada a Conferência internacional em "Análise Algébrica e Tópicos Relacionados" ou abreviadamente "AA" organizada pelo Instituto de Matemática da Academia polonesa de Ciências, de Warszawa, Polônia. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Publicações

Neste período a lista de documentos e as continuações devotadas unicamente ou em parte ao cálculo fracionário e às suas aplicações incluem aproximadamente centenas de títulos entre livros, artigos e outras publicações.

Artigos

Existe também uma grande relação de artigos publicados (desde 1996). A seguir comentamos sobre alguns:

Em 1996, são discutidas equações arbitrárias associadas com diversos fenômenos físicos como movimentos oscilatórios, propagação de onda e difusão, substituindo a derivada temporal de ordem inteira por uma de ordem arbitrária. Além destes artigos, para este tópico do cálculo fracionário, Gorenflo [132], contribuiu com um artigo devotado aos métodos numéricos e Mainard [127] com outro a respeito das aplicações na Mecânica. Em 1998, Lorenzo e Hartley ([134]), devido a falta de uma interpretação geométrica evidente para a derivada fracionária, propuseram, com análise numérica, uma interpretação para a mesma utilizando a definição de Grünwald-Letinikov.

Livros

Inicialmente, em relação ao livros, destacamos o livro ([126]) de Boris Rubin, publicado em 1996, onde o autor apresenta o desenvolvimento do cálculo fracionário de funções de uma e várias variáveis reais, mostra a relação deste campo com uma variedade de áreas em Matemática pura e aplicada, discute integrais fracionárias aplicadas ao estudo de potenciais, problemas que surgem em mecânica, teoria de difração e outras áreas da física-matemática.

Na segunda metade da década dos anos 1990, o interesse considerável no cálculo fracionário foi estimulado pelas aplicações que este cálculo encontra na análise numérica (que usa o computador como principal ferramenta para auxiliar no pensamento) e em áreas diferentes de Física e de Engenharia, possivelmente incluindo os fenômenos dos fractais.

Por exemplo, em 1997, A. Carpinteri e Francesco Mainardi, ambos do Departamento de Física da Universidade da Bologna - Itália, reúnem uma série de artigos de pesquisa interessantes envolvendo cálculo de ordem arbitrária e suas aplicações, "Pensando nas leis de Fractalidade em Mecânica de quantidade contínua: Uma Pesquisa dos métodos baseados em grupo de renormalização e cálculos fracionários" e editam o livro (Carpinteri e Mainardi [130]). Cabe lembrar que a definição de Grünwald-Letnikov, aqui mostrou-se bastante eficiente para resolver problemas numéricos.

Fechando o século vinte, em 1999, foi publicado o importante livro de I. Podlubny ([137], 1999), reunindo o essencial do cálculo fracionário para estudo inicial, inclusive várias funções especias necessárias à teoria e bastante exemplos inspiradores de aplicações, em particular, aplicações envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais fracionárias. Suas aplicações são baseadas na derivada fracionária conforme Caputo. Por razões históricas, a palavra 'fracionária' é usada em vez da palavra "arbitrária".

1.2.1 No Século XXI

No início do século XXI a palavra fracionária já estava bastante em alta. De fato achamos esta em muitos campos científicos aparentemente diferentes que em um primeiro olhar parece não ter qualquer conexão.

O assunto tem ganho mais popularidade e importância considerável nesta última década, devido, principalmente, às suas aplicações demonstradas e difundidas em diversos campos da ciência e engenharia. Realmente oferece várias ferramentas potencialmente úteis para resolver equações diferenciais e integrais e vários outros problemas envolvendo funções especiais da física-matemática, como também suas extensões e generalizações em uma e mais variáveis.

Vários pesquisadores declararam que esta teoria é extraordinária e excelente. E quando uma nova teoria é declarada extraordinária e excelente, tem que enfrentar crítica e ceticismo, porque está além do conceito convencional. O cálculo fracionário, entretanto, não sendo novo, não foi discutido ou desenvolvido por muito tempo, particularmente por falta de suas aplicações a problemas vitalícios reais. É extraordiário porque não lida com cálculo diferencial de ordem inteira. É excelente porque pode agora ser aplicado à situações nas quais as teorias existentes falham em dar resultados satisfatórios.

Nos dez primeiros anos do século XXI, os livros de Oldham e Spanier (1974), Miller e Ross (1993), Samko, Kilbas e Marichev (1993), Kiryakova (1994), Carpinteri e Mainardi (1997), Podlubny (1999) e Hilfer (2000) têm sido úteis em introduzir o campo da Matemática pura e aplicada para as comunidades da Engenharia, Economia, Finanças e Sistemas de Transaporte Inteligente [183, 184].

Devido as conexões entre certas EDF envolvendo os operadores de integrais e derivadas fracionárias (Rieman-Liouville, Caputo, Liouville, Weyl e Riesz) e modelos de outras áreas, como os modelos estatísticos, o uso das ferramentas do cálculo fracionário em pesquisa científicas tornou-se mais intensivo, durante os primeiros anos do século XXI, como mostram os livros, artigos, monografias, teses e periódicos sobre esse assunto.

Em anos recentes, muitos autores demonstraram a utilidade de tais tipos de operadores de cálculo fracionário em obter soluções particulares de famílias numerosas de equações diferenciais homogêneas (como também não homogêneas) lineares ordinárias e parciais que são associadas, por exemplo, com muitas equações célebres da física-matemática como (entre outras) a equação hypergeométrica de Gauss:

$$z(1-z)\frac{d^2\omega}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\,\frac{d\omega}{dz}-\alpha\beta\omega=0, \quad \omega=\omega(z) \tag{1.93}$$

e aquela relativamente mais familiar, a equação de Bessel:

$$z^2\frac{d^2\omega}{dz^2}+z\frac{d\omega}{dz}+\left(z^2-v^2\right)\omega=0, \quad \omega=\omega(z). \tag{1.94}$$

No caso de equações diferenciais de ordens mais altas (ordinária como também parcial), que originaram naturalmente da equação hypergeométrica de Gauss, a equação de Bessel e suas muitas famílias e extensões, existem vários, aparentemente independentes, para apresentar um número grande de resultados em uma maneira unificada.

Durante a última década, o cálculo fracionário foi aplicado a quase todo campo da Ciência, Engenharia e Matemática. Algumas das áreas onde proporcionou um profundo choque inclui Viscoelasticidade e Reologia, Engenharia elétrica, Eletroquímica, Biologia, Biofísica e Bioengenharia, Processos de sinais e imagens, Mecatrônica, Física e Teoria de controle. Embora alguns dos assuntos matemáticos permanecem não solucionados, a maior parte das dificuldades foram superadas e a maior parte da chave dos assuntos matemáticos documentados no campo foram solucionados de um ponto de vista onde muitas das ferramentas matemáticas para ambos o cálculo de ordem inteira e fracionário são as mesmas.

Apesar do progresso recente feito no campo do cálculo fracionário e suas aplicações, muitos pesquisadores, já no século XXI, continuam a perguntar "O que são as aplicações deste campo?" Existem ainda muitos problemas não solucionados e perguntas abertas incluindo: (i) uma consistente interpretação geométrica ou física de uma derivada de ordem arbitrária e consequente integral fracionária; (ii) existência de uma derivada de ordem não inteira de uma função que não tem derivada de ordem inteira; (iii) existência de definições não equivalentes; (iv) falta de métodos efetivos para resolver equações diferenciais oriundas de modelagens e simulações com cálculo de ordem arbitrária e (v) aplicações possíveis das derivadas ou integrais de ordens complexa em Ciência e Engenharia (Debnath [151]).

Nessa nova versão do cálculo, os operadores de diferenciação e integração de ordem arbitrária são mais misteriosos, porque apesar dos esforços recentes de brilhantes matemáticos, não têm nenhuma resposta óbvia as questões acima, ao longo das linhas da introdução habitual para derivadas e integrais: áreas e tangentes. Mas, o progresso neste campo continua.

Uma das importantes vantagens do cálculo fracionário é poder ser considerado como um superconjunto do cálculo de ordem inteira. Deste modo, o cálculo fracionário tem potencial para realizar o que o cálculo de ordem inteiro não realiza. Muitos especialistas no assunto afirmam que muitos dos grandes desenvolvimentos futuros virão das aplicaçēs de cálculo fracionário para diferentes campos.

Neste século XXI, a lista de documentos e as continuações devotadas unicamente ou em parte ao cálculo fracionário e às suas aplicações incluem entre os títulos: livros, artigos, revistas, brochuras, dissertações, teses e outras publicações. Destacamos os seguintes:

COA: 2000- 2009

Vejamos a seguir algumas publicações e reuniões realizadas no período 2000 - 2009 no campo, nesse período.

Livros: 2000 - 2009

Já no início do século XXI, em 2000, compondo estes títulos, podemos citar o livro (Hilfer [139], 2000) editado por Rudolf Hilfer, onde o autor provê uma introdução para o cálculo fracionário para físicos e são encontradas várias aplicações do cálculo fracionário em Física. Neste livro também é estimada, até a data de sua publicação, a quantidades de artigos produzidos em cálculo arbitrário afirmando: "No período de 1975 até o ano 2000, mais ou menos 600 artigos foram publicados relativos ao cálculo arbitrário".

Alguns livros recentes, no período mencionado, neste campo são os escritos por West et al. (2003); Zalavasky (2005), Kilbas et al. (2006), Oldham e Spanier (2006), Magin (2006), Shantanu (2008) e Uchaikin (2009), descritos como segue:

O livro de West et al. ([143]), publicado em 2003, descreve como os fenômenos dos fractais transformam-se com o passar do tempo usando o cálculo fracionário.

Em 2005, Zaslavsky publica o livro ([156], 2005) especialmente dedicado a modelos fracionários de cinética anômala de processos complexos.

Também, recentemente, em 2006, Kilbas-Srivastava-Trujillo, editam o livro (Kilbas et al. [158]), orientado à aplicação, onde além de uma vasta revisão da teoria do cálculo integrodiferencial, encontramos várias aplicações da teoria, inclusive uma generalização do método de Frobenius clássico. Além disso, contém uma bibliografia atual. Pode ser usado como um livro de ensino em nível de pós-graduação em muitas disciplinas diferentes dentro de ciência e engenharia.

Em 2006, é reeditado o livro (Oldham e Spanier [159]) de Keith B. Oldham e Jerome Spanier, que é uma edição revisada do original datado de 1974, onde são feitos alguns ajustes no seu conteúdo através de uma errata. Trata principalmente do desenvolvimento histórico de propriedades gerais dos operadores diferintegrais e às aplicações destas propriedades matemáticas a problemas de difusão. Magin, em seu livro ([161], 2006), propõe modelos fracionários para descrever certos fenômenos em bioengenharia.

É publicado em 2007, o livro Sabatier et al [163] intitulado: *Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in physics and engeneering* (Avanços em cálculo fracionário: desenvolvimentos teóricos e aplicações em física e engenharia), escrito por Jocelyn Sabatier (Universidade de Bordeaux), Om Prakash Agrawal (Universidade de Illinois) e J. A. Tenreiro Machado (Universidade do Porto), cujo alcance é apresentar o estado da arte no estudo de sistemas fracionários e a aplicação da diferenciação fracionária. Estas aplicações recentes, em cálculo fracionário, são de interesse para engenheiros, cientistas e matemáticos aplicados.

Shantanu no livro ([170], 2008) discute não somente abstrações matemáticas, mas também várias aplicações práticas dadas particularmente para identificação e descrição de sistema de controles eficientes.

E fechando esse período, em 2009, foi publicado o livro de Uchaikin ([179]), em russo, que apresenta alguns métodos em derivadas fracionárias.

Artigos 2000 - 2009

Foram publicados artigos dedicados à modelagem de alguns sistemas complexos pelo uso inclusive equações diferenciais de ordens arbitrárias. Comentamos sobre alguns destes artigos publicados neste campo, que apareceram basicamente durante o período 2000 - 2009.

Em 2002, Igor Podlubny, publicou, o artigo ([142]), onde o autor fornece uma solução para o problema (de mais de 300 anos) da interpretação geométrica e física para integração e diferenciação de ordem arbitrária usando a integração e diferenciação de Riemann-Liouville, a diferenciação fracionária de Caputo, o potencial de Riesz e o potencial de Feller. Além disto, é sugerida uma interpretação física utilizando a definição de derivada segundo Grünwald-Letinikov. Por outro lado, Tenreiro Machado [53, 54] fornece uma interpretação probabilística para a diferenciação fracionária.

Na sequência, mencionamos quatro trabalhos recentes de L. Debnath ([145], 2003; [146], 2003; [147], 2003; [148], 2003). O primeiro, apresenta várias aplicações do cálculo fracionário associado às equações integrais e diferenciais arbitrárias em ciência e engenharia como fenômenos de transporte e redes elétricas; o segundo apresenta várias aplicações do cálculo fracionário associado às equações integrais e diferenciais arbitrárias em mecânica dos fluidos.

No seu mais recente trabalho Debnath ([151], 2004) fornece uma breve abordagem histórica do cálculo integrodiferencial com ideias básicas, definições e resultados das integrais e das derivadas da ordem arbitrária, bem como apresenta várias aplicações dessas definições associadas às equações integrais e diferenciais fracionárias, em diversas áreas do conhecimento.

Já, em 2004, o artigo, de S. D. Lin, Jaw-Chian Shyu, K. Nishimoto e H. M. Srivastava ([152], 2004), oferece soluções explícitas de algumas famílias de equações diferenciais ordinárias e parciais associadas com a equação de Bessel por meio do cálculo arbitrário.

Reuniões Internacionais 2000 - 2009

Destacamos a seguir algumas reuniões importantes realizadas no campo nesta primeira década do século XXI:

Reuniões em 2000

Em 2000, ocorreu o terceiro Congresso internacional de Isaac Berlim. A "Sociedade Internacional para Análise, Aplicações e Computações" (Isaac), desde 1997, tem organizado o Congresso Internacional de Isaac bianualmente em diferentes áreas geográficas. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Reuniões em 2001

Outras reuniões internacionais já tradicionais ocorreram: Congresso Internacional ISAAC (Berlim, 2001) e a Conferência Internacional *AMADE-2001* Minsk com características básica semelhantes as realizadas anteriormente. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Reuniões em 2003

Em 2003 aconteceu a terceira Conferência Internacional em *Analytic Methods Analises and Differential Equations*. A *AMADE-2003* foi organizada pela Universidade do Estado de Belarusian com o Instituto de Matemática de Academia de Belarusian Nacional de Ciências. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Em 2003, em Borovets, Bulgária, ocorreu uma reunião periódica conhecida como "TMSF": quarto Simpósio Internacional em *Transform Methods and Special Functions*.

Reuniões em 2004

Em 2004 ocorreu a Conferência internacional *Generalized Functions 2004* - Tópicos em PDE, Harmônico, Análise e Física-Matemática, Novi Sad (Serbia e Montenegro), organizado pelo Departamento de Matemática e Informática Universidade de Academia de Novi Sad e Sérvio de Ciência e Artes. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Reuniões em 2005

Em 2005 ocorreu o *International Symposium on Analytic Function Theory, Fractional Calculus and Their Applications*, Shigeyoshi Owa (Universidade de Kinki, Higashi-Osaka, Japão). [www.diogenes.bg/fcaa]]

Reuniões em 2006

Em 2006 ocorreu o segundo *"Fractional Differentiation and its Applications"*, (FDA-06), realizado no Instituto de Engenharia do Porto (ISEP), no Campus Politécnico do Porto, Portugal.

Ainda, em 2006, ocorreu a quarta Conferência Internacional conhecida como *Analytic Methods Analises and Differential Equations* (AMADE-2006), dedicada a um século do acadêmico F.D. Gakhov, Minsk, Belarus. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Em 2006, foi realizada em Sousse, na Tunísia, a *International Conference on Harmonic Analysis and Applications* ou (*ICHAA-06*). [www.diogenes.bg/fcaa]]

Reuniões em 2007

Em 2007, em Las Vegas, Nevada, EUA, ocorreu a sexta conferência intitulada *Multibody Systems, Nonlinear Dynamics and Control*. [www.diogenes.bg/fcaa]]

Reuniões em 2008

Em 2008 ocorreu a *Fourth Conference on Numerical Analysis and Applications*, em Lozenetz, Bulgária. [www.diogenes.bg/fcaa]] A *'3^{rd} International conference Fractional Differentiation and Applications ou (FDA08)*, na Universidade de Cankaya, Turquia.

Reuniões em 2009

O último congresso em cálculo de ordens arbitrárias: Simpósio em Sinais e Sistemas Fracionários, foi realizado em 2009, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Nova Lisboa, na cidade de Lisboa, Portugal; organizado pelos professores J. A. Tenreiro Machado e Manuel Duarte Ortigueira. Áreas principais: Cálculo fracionário, Transformada de Fourier Fracionária, Processos Estocásticos Fracionários. Áreas Específicas: Controle automático, Engenharia Eletrônica, Eletromagnetismo, Filtros Fracionários, Modelo de Ordem Fracionária e Controle em Engenharia Biomédica, Fase Fracionários-Laços Bloqueados, Princípios Variacionais Fracionários, Mecânica, Física, Robótica, Processamento de Sinal, Sistema Diferencial Fracionário, Engenharia Térmica, Viscoelasticidade e outras aplicações de modelos fracionários. O site da web do Simpósio é: https://www.fct.unl.pt/fss09.

COA: 2010

Finalmente restrigimos ainda mais o estudo para um período de tempo mais curto, ou seja passamos a acompanhar o assunto: ano a ano.

Livros em 2010

Enfim, além dos livros anteriormente citados, vamos mencionar o recente livro de Caponetto et. al ([181]), em 2010, que propõe implementações de hardware e aplicações de Sistemas de Ordem Fracionária (FOS) em modelagem de sistemas reais. Uma seção é dedicada para modelagem de FOS com a combinação do Metal Polímero Iônico (IPMC), um novo material que pode ter aplicações em Robótica, Aeroespacial e Biomedicina.

Reuniões em 2010

As próximas reuniões em fracionários, previstas para 2010, são:

Mini-Simpósio em *Fractional Dynamics and Control"* na terceira Conferência Internacional: *On Dynamics, Vibration and Control*, previsto para ser realizado no período de 12 a 14 Maio de 2010, em Hanzhou.

O *I CNPAA 2010 World Congress, 8th Intern. Conf. on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences* está previsto para ser realizado no Brasil no período de 30 Junho a 3 Julho de 2010.

Até aqui descrevemos sobre aspectos gerais do COA em nível mundial, sem referir especificamente ao Brasil. A seguir particularizamos o desenvolvimento teórico e aplicado do cálculo arbitrário no Brasil, no período 2000 - 2010.

1.2.2 No Brasil

Realizamos uma pesquisa bibliográfica e levantamento na Internet com o objetivo de saber sobre o estado da arte do assunto também no Brasil, nesse período de realização desta dissertação. Com base nessas pesquisas constatamos que: As pesquisas científicas e o interesse neste assunto no Brasil, assim como no resto do mundo é crescente comparado com os períodos anteriores; isto é, evidencia-se observando o já considerável número de documentos no assunto (artigos, monografias, dissertações e teses, livros) publicados por pesquisadores brasileiros. Contudo, não existe nenhum livro publicado por autor brasileiro, nesse período.

Não houve, reunião científica devotada exclusivamente ao tema. E sim algumas reuniões importantes realizadas em algumas universidades brasileiras onde foram discutidos trabalhos associados ao campo, como por exemplo o "I Encontro Científico de Alunos de Pós-Graduação, Unicamp (Universidade de Campinas), 2004". Não encontramos nenhum periódico dedicado exclusivamente ao assunto. Por outro lado, existem pesquisadores brasileiros publicando, sobre o assunto, em periódicos internacionais, por exemplo no FCCA.

Até agora a Unicamp e a Usp (Universidade de São Paulo) são as universidades que dominam nacionalmente o assunto em função das pesquisas e trabalhos publicados.[10] Por tal razão selecionamos e citamos na seção seguinte alguns dos títulos dos trabalhos desenvolvidos nessas duas universidades e publicados em editores nacionais e internacionais, a saber:

Em 2004, o aluno da Usp V. Alegreti apresenta o resumo do seu trabalho ([153], 2004) intitulado *Cálculo Fracionário de Riemann Liouville aplicado ao Problema da Tautócrona* no "I Encontro Científico de Alunos de Pós-Graduação, 2004, Unicamp-Campinas" e publica em anais de congressos.

Em abril de 2006, R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira, Ary O. Chiacchio e, apresentam o artigo ([160], 2006) intitulado *Sobre a Função de Mittag-Leffler*. Neste trabalho os autores destacam, como aplicação da chamada função de Mittag-Leffler, o estudo de equações diferenciais fracionárias onde as soluções, em geral, funções transcendentes, podem ser conduzidas a uma destas funções. Além de várias propriedades, relações de recorrência, função geratriz e relações com outras funções especiais, em particular, as funções hipergeométricas confluentes, mostram que a função erro é um caso particular da função de Mittag-Leffler. Também apresentam e discutem problemas de aplicação.

Em maio de 2007, R. Figueiredo de Carmargo, E. Capelas de Oliveira e F. A. M. Gomes, apresentaram o artigo ([164], 2007) *The Replacement of Lotka-Volterra Model by a Formulation Involving Fractional Derivatives*. Este artigo propõe uma generalização para o sistema de Lotka-Volterra utilizando derivadas de ordem não inteira. O principal objetivo desta generalização é refinar a descrição do fenômeno de maneira análoga a que foi feita em recentes trabalhos envolvendo fenômenos de viscoelasticidade de fluidos. Em julho de 2007, R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio e E. Capelas de Oliveira, apresentaram ao Imecc (Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica) da Unicamp o artigo ([165], 2007): *Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation*, onde os autores, usando métodos do cálculo diferencial e integral, apresentam e discutem o cálculo de uma função de Green fracionária, associada com o caso unidimensional da asssim chamada equação geral fracionária do telégrafo com uma variável espacial, que é uma equação diferencial parcial fracionária com coeficientes constantes. Em novembro de 2007, R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio e E. Capelas de Oliveira, apresentaram ao Imecc o artigo ([166], 2007): *Addition Theorems Associated with the Generalized Mittag-Leffler Function*, onde os autores, usando dois problemas físicos envolvendo a equação do telégrafo fracionária, mostram dois novos teoremas associados com a função de Mittag-Leffler generalizada.

[10] Convém ressaltar que existem grupos isolados, em particular de Físicos, que trabalham com cálculo fracionário associado ao problema da difusão. Mencionamos os grupos de Ervin e colaboradores e Fa, ambos na Universidade Estadual de Maringá.

Em 2008, D. C. Rosendo, orientado pelo professor E. Capelas de Oliveira, publica sua dissertação de mestrado ([168], 2008), onde discute uma equação diferencial ordinária advinda do cálculo de ordem arbitrária como uma aplicação da função de Mittag-Leffler. Provavelmente é a primeira dissertação, em língua portuguesa, apresentada no Brasil.

Em abril de 2008, R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio e E. Capelas de Oliveira, publicaram o artigo ([169], 2008) *Equação do Telégrafo Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler*, onde os autores utilizando métodos de cálculo diferencial e integral fracionários apresentam e discutem dois modos distintos de se calcular a função de Green, associada ao caso unidimensional, da assim chamada equação do telégrafo fracionária. Esta é uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes e é resolvida através da metodologia da justaposição das transformadas de Fourier, na parte espacial e Laplace, na parte temporal. Obtêm uma outra expressão para a função de Green e através da comparação entre os resultados obtidos a partir das duas maneiras, são obtidas novas relações e um teorema de adição para as funções de Mittag-Leffler. É apresentada uma demonstração formal do teorema assim obtido e casos particulares do mesmo são discutidos.

De 08 a 11 de setembro de 2009, os pesquisadores da Unicamp, A. L. Soubhia e E. Capelas de Oliveira apresentam o trabalho ([172], 2009) *Electrical circuit and the fractional calculus* no XXXII CNMAC, em Cuiabá, Brasil.

Em 2009, R. Figueiredo Camargo, A.O. Chiacchio, R. Charnet e E. Capelas de Oliveira, publicam o trabalho ([174], 2009) *Solution of the fractional Langevin equation and the Mittag-Leffler functions*.

Em 2009, R. Figueiredo de Camargo, publica sua tese de doutorado ([175], 2009), em português, orientado pelo professor E. Capelas de Oliveira e coorientado pelo professor Ary O. Chiacchio, o primeiro texto escrito em português a fazer um estudo completo sobre as integrais e derivadas de ordem arbitrárias, onde o autor apresenta resultados originais, dando ênfase às abordagens diretamente relacionadas às aplicações reais usando, na maioria dessas aplicações, a definição de Caputo para derivada de ordem arbitrária. Provavelmente é a primeira tese, em língua portuguesa, apresentada no Brasil.

Os trabalhos mais recentes, publicados na Unicamp, foram os artigos, em 2009: *On the anomalous difusion and the fractional generalized Langevin equation*, (Capelas de Oliveira et al [176], 2009) publicado por Capelas de Oliveira et al.; *On the generalized Mittag-Leffler function and its application in a fractional telegraph equation*, (Capelas de Oliveira et al. [177], 2009), submetido à publicação por R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira e J. Vaz Jr. e *On some fractional Green's functions*,(R. Figueiredo Camargo, R. Charnet e E. Capelas de Oliveira [178], 2009), por R. Figueiredo Camargo, R. Charnet e E. Capelas de Oliveira.

E, por fim, o artigo (Capelas et al [180], 2010) dos pesquisadores brasileiros: A. L. Soubhia, R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr. intitulado: *Theorem for Series in Three-Parameter Mittag-Leffler Function*, no qual é apresentado um novo teorema envolvendo a Função de Mittag-Leffler de três parâmetros. Como uma aplicação obtêm a solução em uma forma fechada de uma equação diferencial fracionária associada com um circuito elétrico RLC, em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

Cabe lembrar, que este trabalho, produzido em 2009, foi apresentado no congresso sobre cálculo fracionário: Simpósio em Sinais e Sistemas Fracionários, realizado de 4 a 6 de novembro de 2009, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Nova Lisboa, na cidade de Lisboa, e o mesmo também foi publicado, agora em 2010, no importante periódico: *Fractional Calculus and Applied Analysis*, que mencionamos acima.

Durante o desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, foram formuladas mais de uma definição de integral e também de derivada de ordem arbitrária, às vezes não equivalente, na tentativa de justificar a solução de Leibniz dada na introdução deste trabalho. A partir destas definições vários autores (conforme relatos de Caputo e Mainardi ([93], 1971) e Sabatier et al. ([163], em 2007) mostraram que a derivada de ordem arbitrária oferece uma descrição mais fina de fenômenos naturais que aquela feita a partir do cálculo de ordem inteira.

Finalizamos este Capítulo mencionando que, com esta abordagem histórica objetivamos garantir a possibilidade de análise dos conteúdos, da notação e da terminologia, relacionando o conhecimento antigo com o atual, nas fases do processo de evolução histórica do cálculo fracionário, melhorando o acesso ao mesmo e assim justificar sua importância nos dias de hoje.

Dada a longa história matemática do cálculo fracionário julgamos apropriado que a dissertação contivesse também uma introdução da teoria matemática deste assunto. No próximo capítulo o nosso objetivo será a formalização matemática desta teoria, onde discutimos, comparativamente, a conveniência de algumas das diversas maneiras de se introduzir as derivadas de ordem arbitrárias.

Capítulo 2

O Cálculo de Ordem Arbitrária

Neste capítulo abordamos a teoria do cálculo de ordem arbitrária. É dedicado ao desenvolvimento da questão: o que queremos dizer por operadores de cálculo de ordem arbitrária. Nele formalizamos as definições e algumas propriedades de diferentes tipos de integrais e derivadas de ordens arbitrárias. Os tópicos discutidos são: fundamentos do cálculo de ordem arbitrária e integração e diferenciação de ordem arbitrária. Para tanto dividimos o mesmo em duas seções: na primeira, apresentamos alguns temas fundamentais da teoria; e na segunda, elaboramos um estudo envolvendo as diversas maneiras de se introduzir a integral e derivada fracionária e formalizamos matematicamente a diferenciação e integração de ordens arbitrárias. Discutimos as definições e algumas propriedades das integrais e derivadas de ordem arbitrária, particularmente, as definições, conforme propostas por Riemann, Riemann-Liouville, Liouville, Weyl, Grünwald-Letnikov e Caputo, elucidando e justificando a importância de cada uma delas nas aplicações envolvendo equações diferenciais, comparando-as de modo a se concentrar na formulação de Caputo.

Ressalte-se, enfim, que como entendemos, a formulação de Caputo parece ser a mais adequada para a discussão de um problema envolvendo uma equação diferencial fracionária com condições dadas na função e na derivada de ordem inteira.

2.1 Fundamentos do Cálculo de Ordem Arbitrária

O estudo sobre integrais e derivadas de ordem arbitrária requer o conhecimento de alguns temas básicos e resultados matemáticos importantes de análise matemática que irão preparar o caminho para o desenvolvimento da teoria, bem como fortalecer e dinamizar nossas aplicações.

Assim, para facilitar o estudo, esta secção é de caracter preliminar e contém definições e propriedades de Análise Matemática como espaços funcionais, funções especiais, transformadas integrais e teoremas do ponto fixo.[1]

[1] Para um estudo mais detalhado deste assunto, veja Kolmogorov e Fomin ([87], 1968) e Kilbas et al. ([158], 2006)).

2.1.1 Espaços Funcionais

Para ilustrar que as derivadas fracionárias parecem surgir geral e universalmente por razões matemáticas profundas (Hilfer [139], em 2000), vamos especificar os principais espaços funcionais X onde os operadores generalizados múltiplos de integração e diferenciação fracionária serão considerados (Samko et al. [121], 1993).

Apresentamos as definições de espaços de funções p-integráveis, absolutamente contínuas e suas modificações, usando conceito e notações conforme Samko et al. ([121], 1993). Damos também caracterizações de espaços modificados que serão usados depois (Kilbas et al. ([158], em 2006).

Definição 2.1.1.1 Espaços de funções integráveis: Seja $\Omega = [a,b](-\infty \leq a \leq b \leq \infty)$ um intervalo finito ou infinito do eixo real $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Denotamos por $L_p(a,b)(1 \leq p \leq \infty)$ o conjunto das funções de medida de Lebesgue [1875-Henri-Léon Lebesgue (Matemático Francês)-1941] a valores-complexos f em Ω para que $||f||_p < \infty$, onde

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{2.1}$$

$$||f||_\infty = \text{ess sup}_{a \leq x \leq b} |f(x)| . \tag{2.2}$$

Aqui ess sup $|f(x)|$ é o máximo essencial da função $|f(x)|$.

Precisamos também do L_p-espaço de potência. Tal espaço, que denotamos por $X_c^p(a,b)(c \in \mathbb{R}; 1 \leq p \leq \infty)$, consiste das funções de Lebesgue de valores complexos f em (a,b) para que $||f||_{X_c^p} < \infty$, com

$$||f||_{X_c^p} = \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{2.3}$$

e

$$||f||_{X_c^\infty} = \text{ess sup}_{a \leq x \leq b} [x^c |f(x)|]. \tag{2.4}$$

Em particular, quando $c = 1/p$, o espaço $X_c^p(a,b)$ coincide com o $L_p(a,b)$-espaço: $x_{1/p}^p(a,b) = L_p(a,b)$.

Definição 2.1.1.2 Espaços de funções absolutamente contínuas: Seja agora $[a,b](-\infty < a < b < \infty)$ um intervalo finito e seja $AC[a,b]$ o espaço de funções f que são absolutamente contínuas em $[a,b]$. É conhecido[2] que $AC[a,b]$ coincide com o espaço de funções primitivas de série de Lesbegue:

$$f(x) \in AC[a,b] \Leftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \varphi(t) dt \qquad (\varphi(t) \in L(a,b)), \tag{2.5}$$

e então uma função absolutamente contínua $f(x)$ tem uma série de derivada $f'(x) = \varphi(x)$ quase em toda parte de $[a,b]$. Assim (2.5) fornece

$$\varphi(t) = f'(t) \qquad \text{e} \qquad c = f(a). \tag{2.6}$$

[2]Kolgomorov e Fomin ([87], 1968) e Kilbas et al. ([158], 2006).

Seja $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. Denotamos por $AC^n[a, b]$ o espaço de funções de valores complexos $f(x)$ que têm derivadas contínuas até ordem $n - 1$ em $[a, b]$ tal que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$:

$$AC^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad \text{e} \qquad [(D^{n-1}f)(x)] \in AC[a,b](D = \frac{d}{dx}) \right\}, \tag{2.7}$$

sendo $\mathbb{C}$ o conjunto de números complexos. Em particular, $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

Este espaço é caracterizado pela afirmação seguinte:[3]

Lema 2.1.1.3 O espaço $AC^n[a, b]$ consiste daquelas, e somente aquelas, funções $f(x)$ que podem ser representadas na forma

$$f(x) = (I^n_{a+}\varphi)(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x - a)^k, \tag{2.8}$$

onde $\varphi(t) \in L(a, b), c_k(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ são constantes arbitrárias, e

$$(I^n_{a+}\varphi)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} \varphi(t) dt. \tag{2.9}$$

Segue de (2.8) que

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(k = 0, 1, \ldots, n - 1). \tag{2.10}$$

Usamos também uma modificação do espaço $AC^n[a, b](n \in \mathbb{N})$, em que uma usual derivada $D = \frac{d}{dx}$ é substituída pela assim chamada δ-derivada, definida por

$$\delta = xD \qquad (D = \frac{d}{dx}). \tag{2.11}$$

Tal modificação, que denotamos por $AC^n_{\delta,\mu}[a, b](n \in \mathbb{N}; \mu \in \mathbb{R})$, envolve as funções de Lebesgue a valores complexos g em (a, b) tal que $x^\mu g(x)$ tem δ-derivadas até ordem $n-1$ em $[a, b]$ e $\delta^{n-1}[x^\mu g(x)]$ é absolutamente contínua em $[a, b]$:

$$AC^n_{\delta,\mu}[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}[x^\mu g(x)] \in AC[a,b], \mu \in \mathbb{R}, \delta = x\frac{d}{dx} \right\}. \tag{2.12}$$

Em particular, quando $\mu = 0$, o espaço $AC^n_\delta[a, b] := AC^n_{\delta,0}[a, b]$ é definido por

$$AC^n_\delta[a,b] = \left\{ g : [a,b] \to \mathbb{C} : \delta^{n-1}[g(x) \in AC[a,b], \delta = x\frac{d}{dx} \right\}. \tag{2.13}$$

Se $\mu = 0$ e $n = 1$, o espaço $AC^1_\delta[a, b]$ coincide com $AC[a, b]$.

Quando $a > 0$, o espaço $AC^n_{\delta,\mu}[a, b]$ é caracterizado pelo resultado seguinte:[4]

Lema 2.1.1.4 Seja $0 < a < b < \infty, n \in \mathbb{N}$ e $\mu \in \mathbb{R}$. O espaço $AC^n_{\delta,\mu}[a, b]$ consiste daquelas, e somente aquelas, funções $g(x)$ que são representadas na forma

$$g(x) = x^\mu \left[\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x \left(\log \frac{x}{t} \right)^{n-1} \varphi(t) \frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{n-1} d_k \left(\log \frac{x}{a} \right)^k \right], \tag{2.14}$$

[3] Conforme Samko et al. [121], 1993 e Kilbas et al. ([158], 2006).
[4] Conforme Samko et al. [121], 1993 e Kilbas et al. ([158], 2006).

onde $\varphi(t) \in L(a,b)$ e $d_k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ são constantes arbitrárias.

Em particular, $g(x) \in AC^n_\delta[a,b]$ se, e somente se,

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} d_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k. \tag{2.15}$$

Notamos que $\varphi(t)$ e d_k em (2.14) são dadas por

$$\varphi(t) = g'_{n-1}(t), d_k = \frac{g_k(a)}{k!} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2.16}$$

com

$$g_k(x) = \delta^k[x^\mu g(x)] \qquad (k = 1, \ldots, n-1), g_0(x) = x^\mu g(x), \tag{2.17}$$

enquanto em (2.15) tomam as formas mais simples

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt}[\delta^{n-1}g(t)], d_k = \frac{\delta^k g(a)}{k!}(k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.18}$$

Definição 2.1.1.5 Espaços de funções continuamente diferenciáveis: Seja $\Omega = [a,b](-\infty \le a < b \le \infty)$ e $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$. Denotamos por $C^m(\Omega)$ um espaço de funções f que são m vezes continuamente diferenciável em Ω com a forma

$$||f||_{C^m} = \sum_{k=0}^{m}\left|\left|f^{(k)}\right|\right|_C = \sum_{k=0}^{m}\max_{x\in\Omega}\left|f^{(k)}(x)\right|, m \in \mathbb{N}_0. \tag{2.19}$$

Definição 2.1.1.6 Espaços de funções contínuas: Em particular, para $m = 0, C^0(\Omega) = C(\Omega)$ é o espaço de funções contínuas f em Ω com a forma

$$||f||_C = \max_{x\in\Omega}|f(x)|. \tag{2.20}$$

Quando $\Omega = [a,b]$ é um intervalo finito e $\gamma \in \mathbb{C}(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1$, introduzimos o espaço $C_\gamma[a,b]$ de funções f dadas em $(a,b]$, tal que a função $(x-a)^\gamma f(x) \in C[a,b]$ e

$$||f||_{C_\gamma} = ||(x-a)^\gamma f(x)||_C, \qquad C_0[a,b] = C[a,b]. \tag{2.21}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $C^n_\gamma[a,b]$ o espaço de Banach de funções $f(x)$ que são continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ até ordem $n-1$ e têm a derivada $f^{(n)}(x)$ de ordem n em $(a,b]$ tal que $f^{(n)}(x) \in C_\gamma[a,b]$:

$$C^n_\gamma[a,b] = \left\{f : ||f||_{C^n_\gamma} = \sum_{k=0}^{n-1}||f^{(k)}||_C + ||f^{(n)}||_{C_\gamma}\right\}, C^0_\gamma[a,b] = C_\gamma[a,b]. \tag{2.22}$$

Desta definição temos a seguinte caracterização[5] do espaço $C^n_\gamma[a,b]$.

Lema 2.1.1.7 Seja $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots, \}$ e $\gamma \in \mathbb{C}(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$. O espaço $C^n_\gamma[a,b]$ consiste daquelas, e

[5] Conforme Samko et al. [121], 1993 e Kilbas et al. ([158], 2006).

somente daquelas, funções f que são representadas na forma

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x-a)^k, \tag{2.23}$$

onde $\varphi(t) \in C_\gamma[a,b]$ e $c_k (k = 0, 1, \ldots, n-1)$ são constantes arbitrárias.

Além disso,

$$\varphi(t) = f^{(n)}(t), c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.24}$$

Em particular, quando $\gamma = 0$, o espaço $C^n[a,b]$ consiste daquelas, e somente daquelas, funções f que são representadas na forma (2.23), onde $\varphi(t) \in C[a,b]$ e $c_k(k = 0, 1 \ldots, n-1)$ são constantes arbitrárias. Além disso, as relações em (2.24) são válidas.

Definimos também dois subespaços $C_a^0[a,b]$ e $C_b^0[a,b]$ do espaço $C[a,b]$ por

$$C_a^0[a,b] = \left\{f(x) \in C_a^0[a,b]; f(a) = 0, ||f||_{C_a} = ||f||_C\right\} \tag{2.25}$$

e

$$C_b^0[a,b] = \left\{f(x) \in C_a^0[a,b]; f(b) = 0, ||f||_{C_a} = ||f||_C\right\}. \tag{2.26}$$

Quando $\Omega = [a,b](0 < a < b < \infty)$ é um intervalo finito e $\gamma \in \mathbb{C}(0 \leq \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$, introduzimos o espaço pesado $C_{\gamma,\log}[a,b]$ de funções g, dadas em $(a,b]$ e tal que $[\log(x/a)]^\gamma g(x) \in C[a,b]$:

$$||g||_{C_{\gamma,\log}} = ||(\log\frac{x}{a})^\gamma f(x)||_C, C_{0,\log}[a,b] = C[a,b]. \tag{2.27}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ denotamos por $C^n_{\delta,\gamma}[a,b]$ o espaço de Banach de funções $g(x)$ que têm δ-derivadas em $[a,b]$ até ordem $n-1$ e derivada $(\delta^n g)(x)$ em $(a,b]$ de ordem n tal que $(\delta^n g)(x) \in C_{\gamma,\log}[a,b]$:

$$C^n_{\delta,\gamma}[a,b] = \left\{g : ||g||_{C^n_{\delta,\gamma}} = \sum_{k=0}^{n-1}||\delta^k g||_C + ||\delta^n g||_{C_{\gamma,\log}}\right\}, C^0_{\delta,\gamma}[a,b] = C_{\gamma,\log}[a,b]. \tag{2.28}$$

Desta definição temos a seguinte caracterização[6] do espaço $C^n_{\delta,\gamma}[a,b]$.

Lema 2.1.1.8 Seja $0 < a < b < \infty, n \in \mathbb{N}_0$ e $\gamma \in \mathbb{C}(0 \leq \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$. O espaço $C^n_{\delta,\gamma}[a,b]$ consiste daquelas, e somente daquelas, funções g que são representadas na forma

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{n-1}\varphi(t)\frac{dt}{t} + \sum_{k=0}^{n-1} d_k\left(\log\frac{x}{a}\right)^k, \tag{2.29}$$

onde $\varphi(t) \in C_{\gamma,\log}[a,b]$ e $d_k(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ são constantes arbitrárias.

Além disso,

$$\varphi(t) = (\delta^n g)(t), d_k = \frac{(\delta^k g)(a)}{k!}(k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.30}$$

Em particular, quando $\gamma = 0$, o espaço $C^n_{\delta,0}[a,b] = C^n_\delta[a,b]$ consiste daquelas, e somente daquelas, funções g que são representadas na forma (2.29), onde $\varphi(t) \in C[a,b]$ e $d_k(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ são constantes arbitrárias. Além disso, as relações em (2.30) são válidas.

[6] Conforme Samko et al. [121], 1993 e Kilbas et al. [158], 2006).

Para os espaços de Banach X e Y, denotamos por $X \to Y$ a inclusão contínua:

$$(a) \qquad \text{Se} \qquad f \in X, \qquad \text{então} \qquad f \in Y; \qquad (b) \qquad ||f||_Y \leq K||f||_X, \tag{2.31}$$

onde a constante $K > 0$ não depende de f.

Das definições (2.22) e (2.28) derivamos a propriedade dos espaços $C^n_\gamma[a,b]$ e $C^n_{\delta,\gamma}[a,b]$.

Propriedade 2.1.1.9 Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja γ_1 e γ_2 números complexos tais que

$$0 \leq \mathrm{Re}(\gamma_1) \leq \mathrm{Re}(\gamma_2) < 1. \tag{2.32}$$

Vale a inclusão seguinte:

$$C^n[a,b] \to C^n_{\gamma_1}[a,b] \to C^n_{\gamma_2}[a,b], \tag{2.33}$$

com

$$||f||_{C^n_{\gamma_2}} \leq K||f||_{C^n_{\gamma_1}}, K = \min\left[1, (b-a)^{\mathrm{Re}(\gamma_2-\gamma_1)}\right]; \tag{2.34}$$

$$C^n_\delta[a,b] \to C^n_{\delta,\gamma_1}[a,b] \to C^n_{\delta,\gamma_2}[a,b], \tag{2.35}$$

com

$$||f||_{C^n_{\delta;\gamma_2}} \leq K_\delta||f||_{C^n_{\delta;\gamma_1}}, K_\delta = \min\left[1, (\log\frac{b}{a})^{\mathrm{Re}(\gamma_2-\gamma_1)}\right]. \tag{2.36}$$

Em particular,

$$C[a,b] \to C_{\gamma_1}[a,b] \to C_{\gamma_2}[a,b], \text{com}||f||_{C_{\gamma_2}} \leq (b-a)^{\mathrm{Re}(\gamma_2-\gamma_1)}||f||_{C_{\gamma_1}}; \tag{2.37}$$

$$C[a,b] \to C_{\gamma_1,\log}[a,b] \to C_{\gamma_2,\log}[a,b], \text{com}||f||_{C_{\delta;\gamma_2}} \leq \left(\log\frac{b}{a}\right)^{\mathrm{Re}(\gamma_2-\gamma_1)}||f||_{C_{\delta,\gamma_1}}. \tag{2.38}$$

2.1.2 Espaços de Funções Generalizadas

Apresentamos a seguir algumas definições e propriedades de certos espaços de funções generalizadas e funções teste.[7]

Definição 2.1.2.1 (Espaços generalizados): Seja R^n o espaço euclidiano n-dimensional, seja $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ são pontos em $R^n, \mathbf{x}\cdot\mathbf{t} = x_1t_1 + \ldots + x_nt_n$ seu produto escalar e $|\mathbf{t}| = (t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{1/2}, d\mathbf{t} = dt_1...dt_n$. Seja

$$\mathbb{N}^n = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n), k_j \in \mathbb{N}; j = 1, \ldots, n\}, \tag{2.39}$$

e

$$\mathbb{N}^n_0 = \{\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n), k_j \in \mathbb{N}_0; j = 1, \ldots, n\}. \tag{2.40}$$

[7] Conforme McBride [102], em 1979, Samko et al. [121], 1993 e Kilbas et al. ([158], 2006).

Os elementos $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n$ são chamados múltiplos-índices. Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{N}_0^n$ devemos usar as notações

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad |\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n, \tag{2.41}$$

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial}{\partial_{x_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial_{x_n}} \right), \qquad \mathbf{D}^{\mathbf{k}} = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}}{(\partial x_1)^{k_1} \dots (\partial x_n)^{k_n}}. \tag{2.42}$$

Denotamos por $\mathbb{C}^n (n \in \mathbb{N})$ o espaço n-dimensional de n números complexos $z = (z_1, \dots, z_n)$ com $(z_j \in \mathbb{C}; j = 1, \dots, n)$. Adotamos as funções generalizadas sobre $\mathbf{\Omega}$, onde $\mathbf{\Omega}$ é um domínio em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.2.2 Função teste: As funções teste em $\mathbf{\Omega}$ são as funções infinitamente diferenciáveis escolhidas nos pontos interiores de $\mathbf{\Omega}$ com comportamento prescrito nos pontos limites de $\mathbf{\Omega}$.

Definição 2.1.2.3 Função regular: Denotamos por $< \mathbf{f}, \varphi >$ o valor da função generalizada $\mathbf{f}$ com uma função teste φ. Uma função generalizada $\mathbf{f}$ é chamada regular se for localmente integrável tal que $\int_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ existe para cada função de teste $\varphi(\mathbf{x})$

$$< \mathbf{f}, \varphi >= \int_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{2.43}$$

É admitido que a forma bilinear $< \mathbf{f}, \varphi >$ é escolhida de tal modo que pode coincidir com (2.43) no caso de uma função regular generalizada.

Admitimos, também, que o espaço de funções teste $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\Omega)$ é um espaço topológico e denotamos por $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'(\Omega)$ o espaço de funções lineares contínuas em $\mathbf{X}$ que é chamado o dual topológico de $\mathbf{X}$.

Recordamos a noção de uma função generalizada concentrada em um ponto. Uma função generalizada $\mathbf{f} \in \mathbf{X}'$ parece ser zero em um conjunto aberto $\mathbf{G}$, $< \mathbf{f}, \varphi >= 0$ se cada função teste $\varphi \in \mathbf{X}$ é zero além de $\mathbf{G}$. A união $\mathbf{O_f}$ de todos conjuntos abertos, onde $\mathbf{f} = 0$ é chamada um conjunto nulo da função $\mathbf{f}$. O complemento do conjunto nulo com respeito a Ω é chamado o suporte da função generalizada e tal complemento é denotado por $\text{supp}(f) = \Omega | O_f$. A função generalizada parece ser concentrada no ponto $\mathbf{t_0}$, se $\text{supp}(f)$ é este ponto $\mathbf{t_0}$.

Definição 2.1.2.4 A função de Dirac: A clássica função de Dirac[1902-Paul Adrian Maurice Dirac - 1984] $\delta(\mathbf{t} - \mathbf{t_0}), \mathbf{t_0}, \in \mathbf{\Omega}$ é definida por

$$< \delta(\mathbf{t} - \mathbf{t_0}), \varphi >= \varphi(\mathbf{t_0}). \tag{2.44}$$

Definição 2.1.2.5 Derivadas da função de Dirac: As derivadas das funções de Dirac são definidas como

$$< (\mathbf{D}^{\mathbf{k}}\delta)(\mathbf{t} - \mathbf{t_0}), \varphi >= (-\mathbf{1})^{|\mathbf{k}|}(\mathbf{D}^{\mathbf{k}}\varphi)(\mathbf{t_0}) \qquad (\mathbf{k} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}), \tag{2.45}$$

e fornecem exemplos simples de funções generalizadas concentradas no ponto $\mathbf{t_0}$.

2.1.3 Funções do Cálculo de Ordem Arbitrária

Assim como no cálculo de ordem inteira, o objeto do cálculo de ordem arbitrária são as funções, por isso passamos a definir, a seguir, as funções associadas ao cálculo de ordem arbitrária as quais um operador conveniente pode ser associado.

Função Gama e Suas Propriedades

Apresentamos a seguir algumas definições e propriedades da função gama de Euler e algumas funções especiais relacionadas com esta função. Existem várias formas de se definir esta função através de somatório ou produtório ou integral.[8]

A função gama completa, denotada por $\Gamma(z)$, introduzida por Euler como uma possível generalização do conceito de fatorial, é genericamente uma função complexa de variável complexa, que desempenha um papel importante na teoria da diferintegração. Consequentemente, é conveniente colecionar aqui algumas fórmulas relativas a esta função.

Definição 2.1.3.1 Função gama em termos de limites: Euler introduziu a função gama completa $\Gamma(z)$, de argumento z em termos de limite definindo-a por (Oldham e Spanier [99], publicado em 1974).

$$\Gamma(z) := \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)}\right],$$

onde inicialmente supomos $\mathrm{Re}(z) > 0$, mas, a definição por meio da transformada integral é frequentemente mais utilizada.[9]

Definição 2.1.3.2 Função gama em termos de integral: A função gama de Euler foi definida através da denominada integral do segundo tipo na forma (conforme Kilbas et al. [158], 2006)

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}\exp(-t)dt = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0, \tag{2.46}$$

onde $t^{z-1} = \mathrm{e}^{(z-1)\log(t)}$, com $\mathrm{Re}(z) > 0$ de tal forma que a integral seja convergente.

Outra versão, no plano complexo é definida por Podlubny ([137], 1999)

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1+iy}dt = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}\exp(iy\log(t))dt,$$

que pode ser reescrita como

$$\Gamma(x+iy) = \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}[\cos(y\log(t)) + i\,\mathrm{sen}\,(y\log(t))]dt. \tag{2.47}$$

A expressão entre colchetes em (2.47) é determinada para todo t, a convergência é dada para e^{-t} e para a convergência em $t = 0$ devemos ter $x = \mathrm{Re}(z) > 0$.

Algumas Propriedades da Função Gama

Passemos agora a apresentar algumas propriedades úteis para este trabalho envolvendo a função gama.

Propriedade 2.1.3.3 Fórmula de redução: Uma das propriedades básicas da função gama é a fórmula de redução que satisfaz a equação funcional:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \qquad (\mathrm{Re}(z) > 0) \tag{2.48}$$

[8] Para uma discussão da função gama veja, (Capelas [154], 2005, Capelas e Rodrigues [155], 2006).

[9] Para representar a parte real de um número complexo podemos usar tanto a notação $\mathrm{Re}(z)$, usada por Miller e Ross ([119], em 1993) e Podlubny ([137], em 1999), bem como $\Re(z)$ usada por Samko et al. ([121], em 1993) e Kilbas et al. ([158], em 2006). Contudo, para uniformizar o trabalho, vamos adotar a notação $\mathrm{Re}(z)$.

que é a propriedade mais importante da função gama, que justifica ser ela uma possível generalização do conceito de fatorial. O mesmo resultado é uma consequência simples da definição de Euler.

Manipulando a equação 2.48 temos

$$\Gamma(z-1)=\Gamma(z)/(z-1), \tag{2.49}$$

o que implica

$$\frac{1}{\Gamma(z-1)}=\frac{(z-1)}{\Gamma(z)}. \tag{2.50}$$

Propriedade 2.1.3.4 Redução no plano complexo: Usando a relação (2.48), a função gama de Euler é estendida para o semi-plano $\mathrm{Re}(z)\leq 0$ por

$$\Gamma(z):=\frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n} \qquad \left(\mathrm{Re}(z)>-n; n\in\mathbb{N}; z\notin\mathbb{Z}_0^-:=\{0,-1,-2,\ldots\}\right), \tag{2.51}$$

onde $(z)_n$ é o símbolo de Pochhammer definido para o complexo $z\in\mathbb{C}$ e inteiro não-negativo $n\in\mathbb{N}_0$ por

$$(z)_n=z(z+1)\ldots(z+n-1) \qquad \text{e} \qquad (z)_0=1 \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{2.52}$$

Propriedade 2.1.3.5 Fórmula Assintótica: Segue de (2.51) que a função gama é analítica em todos lugares no plano complexo $\mathbb{C}$ exceto em $z=0,-1,-2,\ldots$, onde $\Gamma(z)$ tem pólos simples e é representada pela fórmula assintótica

$$\Gamma(z)=\frac{(-1)^k}{z+k}[1+O(z+k)], \qquad (z\to -k; k\in\mathbb{N}_0). \tag{2.53}$$

Propriedade 2.1.3.6 Razões: As razões entre funções gama de inteiros negativos são, porém, finitas; assim se N e n são inteiros positivos (Oldham e Spanier [159], 2006),

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)}=(-N)(-N+1)\cdots(-n-2)(-n-1)=(-1)^{N-n}\frac{N!}{n!} \tag{2.54}$$

Definição 2.1.3.7 Recíproca: A recíproca $1/\Gamma(z)$ da função gama é única e finita para todo z (Oldham e Spanier [159], 2006):

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\approx\frac{z^{t-z}}{\sqrt{2\pi}}\exp(z), \qquad z\to\infty. \tag{2.55}$$

Propriedade 2.1.3.8 Equação funcional: Mencionamos também outras propriedades da função de gama tal como a equação funcional (Kilbas et al. [158], em 2006):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)} \qquad z\notin\mathbb{Z}_0; \quad 0<\mathrm{Re}(z)<1. \tag{2.56}$$

Propriedade 2.1.3.9 Reflexão: A reflexão é dada por (Oldham e Spanier [159], 2006)

$$\Gamma(-z) = \frac{-\pi \csc(\pi z)}{\Gamma(z+1)}. \tag{2.57}$$

Propriedade 2.1.3.10 Duplicação: A fórmula de duplicação devida a Legendre (Oldham e Spanier [159], 2006) (conforme Kilbas et al. [158], em 2006), é

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.58}$$

Propriedade 2.1.3.11 Multiplicação de Gauss: é um caso particular da fórmula de multiplicaçâo de Gauss que segue (Oldham e Spanier [159], 2006)

$$\Gamma(nz) = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left[\frac{n^z}{\sqrt{2\pi}}\right]^n \prod_{\kappa=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{\kappa}{n}\right). \tag{2.59}$$

Definição 2.1.3.12 Multiplicação de Gauss-Legendre: O mais geral teorema da multiplicação de Gauss-Legendre (Kilbas et al. [158], em 2006):

$$\Gamma(mz) = \frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{(m-1)/2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma\left(z+\frac{\kappa}{m}\right) \qquad z \in \mathbb{C}; \qquad m \in \mathbb{N} - -\{1\} \tag{2.60}$$

Valores Notáveis da Função Gama

Como vimos, a função gama de um inteiro positivo n é propriamente um inteiro positivo, enquanto a função gama $\Gamma(-n)$ de um inteiro negativo é invariavelmente infinita. As funções gama $\Gamma(1/2+n)$ e $\Gamma(1/2-n)$ são múltiplos de $\sqrt{\pi}$; assim,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \tag{2.61}$$

e

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}. \tag{2.62}$$

A seguir, alguns valores da função gama

$$\Gamma(1)=1 \qquad \Gamma(2)=1 \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad \Gamma(3)=2 \qquad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \tag{2.63}$$

Finalizamos esta subseção observando que muitas funções estão relacionadas com a função gama. Vejamos, a seguir, algumas relacionadas a este trabalho.

Definição 2.1.3.13 Coeficientes binomiais: Os coeficientes binomiais são definidos para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}$ pela fórmula

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \qquad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.64}$$

Em particular, quando $\alpha = m(m \in \mathbb{N}_0)$, temos

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0; m \geq n) \tag{2.65}$$

e

$$\binom{m}{n} = 0 \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0; 0 \leq m < n). \tag{2.66}$$

Se $\alpha \notin \mathbb{Z}^- := \{-1, -2, -3, \ldots\} =: \mathbb{Z}_0^- - \{0\}$, (2.64) é representada via função gama por

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)} \qquad (\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}^-; n \in \mathbb{N}_0). \tag{2.67}$$

Tal relação pode ser estendida de $n \in \mathbb{N}_0$ para o complexo arbitrário $\beta \in \mathbb{C}$ por

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)\Gamma(\beta+1)} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}; \alpha \notin \mathbb{Z}^-). \tag{2.68}$$

Funções Gama Incompletas

A seguir, apresentamos a definição e propriedades de duas funções associadas com a clássica função gama, as assim chamadas, funções gama incompletas, sendo uma complementar da outra, no sentido que a soma delas é igual à clássica função gama.

Definição 2.1.3.14 Funções gama incompletas: As funções gama incompletas $\gamma(z, \omega)$ e $\Gamma(z, \omega)$ são definidas para $z, \omega \in \mathbb{C}$ através das integrais

$$\gamma(z, \omega) := \int_0^\omega \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt\,, \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{2.69}$$

e

$$\Gamma(z, \omega) := \int_\omega^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} dt, \tag{2.70}$$

respectivamente.

Propriedade 2.1.3.15 A relação seguinte é evidente:

$$\gamma(z, \infty) = \Gamma(z, 0) = \Gamma(z) = \gamma(z, \omega) + \Gamma(z, \omega), \qquad \mathrm{Re}(z) > 0 \tag{2.71}$$

daí o nome complementares.

Função Beta

Em muitos casos é mais conveniente usar a denominada função beta em vez de uma certa combinação de valores envolvendo a função gama.

Definição 2.1.3.16 Função beta: A função beta, denotada por $B(z, \omega)$, é usualmente definida, conforme Euler, pela integral do primeiro tipo, para com $\mathrm{Re}(z) > 0$ e $\mathrm{Re}(\omega) > 0$

$$B(z, \omega) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1} dt. \tag{2.72}$$

Propriedade 2.1.3.17 Relação função beta-gama: A função beta está relacionada com a função gama através da expressão

$$B(z,\omega) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \qquad (z,\omega \notin \mathbb{Z}_0^-). \tag{2.73}$$

Consideradas as devidas condições oriundas das definições.

Prova: A demonstração deste resultado pode ser encontrada em (Camargo [175], 2009).

Funções Hipergeométricas

Vamos apresentar as definições e algumas propriedades de funções hipergeométricas de Gauss, Kummer e funções hipergeométricas generalizadas. As clássicas funções hipergeométricas são funções especiais que emergem como solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem geral, com três pontos singulares regulares, na forma de equação hipergeométrica.

Definição 2.1.3.18 Representação em série da função hipergeométrica: A clássica função hipergeométrica, também conhecida pelo nome de função hipergeométrica de Gauss, denotada por ${}_2F_1(a,b;c;z)$, é definida no disco unitário como a soma da série hipergeométrica, ou seja, a função hipergeométrica em termos de série de potências é definida por

$$f_1(x) = {}_2F_1(a,b;c;z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \tag{2.74}$$

onde, a,b,c são parâmetros, $|z|<1$; $a,b,\in\mathbb{C}$; $c\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_0^-$ e $(a)_k,(b)_k$ e $(c)_k$ são símbolos de Pochhammer definidos em (2.52).

A série em (2.74) é absolutamente convergente para $|z|<1$ e para $|z|=1$, quando $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$, enquanto é condicionalmente convergente para $|z|=1 (z\neq 1)$ se $-1<\mathrm{Re}(c-a-b)\leq 0$. Para outros valores de z, a função hipergeométrica de Gauss é definida como uma continuação analítica da série (2.74).

Uma tal continuação analítica é dada pela representação integral de Euler como segue:

Definição 2.1.3.19 Representação integral para a função hipergeométrica: A clássica representação integral para função hipergeométrica é:

$${}_2F_1(a,b;c;z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 (1-zt)^{-a}t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}dt \tag{2.75}$$

$$(0<\mathrm{Re}(b)<\mathrm{Re}(c); \qquad |\arg(1-z)|<\pi) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Re}(c-b)>0.$$

Definição 2.1.3.20 Representação integral da função hipergeométrica em termos do contorno de Mellin-Barnes: Se $c\notin\mathbb{Z}_0^-$, então ${}_2F_1(a,b;c;z)$ tem outra representação integral em termos do contorno integral de Mellin-Barnes.

$${}_2F_1(a,b;c;z) := \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)}(-z)^{-s}\Gamma(s)ds. \tag{2.76}$$

Aqui $|\arg(-z)| < \pi$, e o caminho de integração começa no ponto $\gamma - i\infty (\gamma \in \mathbb{R})$ e termina no ponto $\gamma + i\infty$, separando todos os pólos $s = -k\,(k = 0, 1, 2, \ldots)$ à esquerda e todos os pólos $s = a + n\,(n \in \mathbb{N}_0)$ e $s = b + m\,(m \in \mathbb{N}_0)$ à direita.

Função hipergeométrica confluente

A função hipergeométrica confluente resulta de uma confluência de duas singularidades da função hipergeométrica.

Definição 2.1.3.21 Representação em série da função hipergeométrica confluente: A função hipergeométrica confluente, também conhecida pelo nome de função de Kummer, denotada por ${}_1F_1(a; c; z)$ é definida em termos de séries por

$$\Phi(a; c; z) = {}_1F_1(a; c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \tag{2.77}$$

onde $z, a \in \mathbb{C}; c \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}_0^-$; mas, em constraste para as séries hipergeométrica em (2.74), esta série é convergente para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Definição 2.1.3.22 Representação integral da função hipergeométrica confluente A representação integral semelhante à (2.75) é definida por

$$\Phi(a; c; z) = {}_1F_1(a; c; z) := \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} \mathrm{e}^{zt} dt \tag{2.78}$$

com as restrições $(0 < \mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(c))$.

Definição 2.1.3.23 Representação integral da função hipergeométrica confluente em termos do contorno de Mellin-Barnes: Definimos na forma semelhante à (2.76) por

$$\Phi(a; c; z) =_1 F_1(a; b; z) := \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\Gamma(a-s)}{\Gamma(c-s)} (-z)^{-s} \Gamma(s) ds, \tag{2.79}$$

onde $|\arg(-z)| < \pi$ e o caminho de integração separa todos os pólos $s = -k\,(k = 0, 1, 2, \ldots)$ à esquerda e todos os pólos $s = a + n\,(n \in \mathbb{N}_0)$ à direita da reta $\mathrm{Re}(s) = \gamma$.

Funções de Bessel

Apresentamos algumas definições e propriedades das funções de Bessel [1784 - Friedrich Wilhelm Bessel - 1846] clássicas e algumas de suas modificações.

Definição 2.1.3.24 Função de Bessel clássica: Definimos a função de Bessel do primeiro tipo $J_v(z)$ por

$$y_1(z) = J_v(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa + v}}{\kappa! \Gamma(v + \kappa + 1)}, \tag{2.80}$$

onde $z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$ e $v \in \mathbb{C}$.

Definição 2.1.3.25 Equação de Bessel: Definimos a equação diferencial de Bessel como uma equação ordinária de segunda ordem da forma

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} + \left(z^2 - v^2\right) u(z) = 0. \tag{2.81}$$

onde, a função de Bessel clássica $u(z) = J_v(z)$ emerge como uma solução.

Definição 2.1.3.26 Função de Bessel modificada: Definimos a função de Bessel modificada $I_v(z)$ por

$$I_v(z) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa+v}}{\kappa!\Gamma(v+\kappa+1)}, \qquad z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]. \tag{2.82}$$

Definição 2.1.3.27 Equação de Bessel modificada: Definimos a equação diferencial de Bessel modificada por

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z\frac{du}{dz} - \left(z^2 + v^2\right) u(z) = 0. \tag{2.83}$$

uma solução é a chamada função de Bessel modificada $u(z) = I_v(z)$.

Funções de Mittag-Leffler

Outra importante função que exerce um papel fundamental no cálculo de ordem arbitrária é a chamada função de Mittag-Leffler. Suas extensões e aplicações são discutidas recentemente em um número crescente de documentos relacionados ao cálculo fracionário, equações diferenciais e sistemas de equações de derivadas e integrais de ordens arbitrárias modelando vários fenômenos. Algumas de suas definições e propriedades serão expostas a seguir.

Funções de Mittag-Leffler Clássicas

Aqui apresentamos as definições e algumas propriedades de duas funções de Mittag-Leffler clássicas, denotadas por $E_\alpha(z)$ e $E_{\alpha,\beta}(z)$.

A função de Mittag-Leffler assim chamada, em homenagem ao matemático Mittag-Leffler [1846 - Magnus Gösta Mittag-Leffler (sueco) - 1927], que, em 1903, introduziu esta função analítica dependente do parâmetro complexo α com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Há várias versões para a mesma, contudo vamos apresentar somente aquelas, que podem ser úteis para o desenvolvimento da redação desta dissertação.

Definição 2.1.3.28 Função de Mittag-Leffler com um parâmetro (Tipo 1): Mittag-Leffler, em 1903, introduziu originalmente (em Mittag-Leffler [43], 1903) esta função dependente de um parâmetro $E_\alpha(z)$ na forma expandida em série definida por

$$E_\alpha(z) := 1 + \frac{z}{\Gamma(1+1\alpha)} + \frac{z^2}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{z^3}{\Gamma(1+3\alpha)} + \cdots + \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)} + \cdots \tag{2.84}$$

onde $\mathrm{R}(\alpha) > 0$ e z é uma variável complexa ($z \in \mathbb{C}$).

Definição 2.1.3.29 Função de Mittag-Leffler com um parâmetro na forma de série condensada: Mittag-Leffler, neste mesmo ano, condensou a expressão acima e a definiu na forma de série por

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad (z \in \mathbb{C}; \mathrm{R}(\alpha) > 0), \tag{2.85}$$

que é uma função inteira de z com ordem $[\mathrm{Re}(\alpha)]^{-1}$ e do tipo 1.

Propriedades da Função de Mittag-Leffler

As propriedades básicas desta função foram estudadas por Mittag-Leffler ([43], 1903; [44], 1904 e [46], 1905) e por Wiman ([45], 1905). Em particular quando $\alpha = 1$, reduz-se a função exponencial

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k)!} = \exp(z) = \mathrm{e}^z. \tag{2.86}$$

Por esta razão a função de Mittag-Leffler é analisada como uma generalização da função exponencial. No caso em que $\alpha = 2$, temos

$$E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}). \tag{2.87}$$

Definição 2.1.3.30 Função de Mittag-Leffler com um parâmetro na forma de integral assintótica: O comportamento assintótico de E_α em (2.85) para qualquer α é mais complicado. É baseado na representação integral de $E_\alpha(z)$ na forma

$$E_\alpha(z) := \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{t^{\alpha-1}\mathrm{e}^t}{t^\alpha - z} dt. \tag{2.88}$$

Aqui o caminho de integração C é um laço que começa e acaba em $-\infty$ e contorna o disco circular $|t| \leq |z|^{1/\alpha}$ no sentido positivo: $|\arg(t)| \leq \pi$ em C. O integrando em (2.88) tem um ponto de ramificação em $t = 0$. O plano-t complexo é cortado ao longo do eixo real negativo e no plano de corte o integrando tem valor único: A ramo principal de t^α é tomado no plano de corte.

Quando $\alpha > 0$, o seguinte lema nos conduz a outra representação integral de $E_\alpha(z)$ como uma integral de contorno do tipo Mellin-Barnes.

Lema 2.1.3.31 Para $\alpha > 0$ e $z \in \mathbb{C}(|\arg(z)| < \pi)$, vale a relação seguinte:

$$E_\alpha(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-\alpha s)} (-z)^{-s} ds, \tag{2.89}$$

onde o caminho de integração separa todos os pólos em $s = -k (k \in \mathbb{N}_0)$ à esquerda e todos os pólos em $s = n + 1 (n \in \mathbb{N}_0)$ à direita da reta $\mathrm{Re}(s) = \gamma$.

Prova: Veja Erdélyi et al. ([105], 1981).

Definição 2.1.3.32 Função de Mittag-Leffler com dois parâmetros (Tipo 2): Uma generalização da clássica função de Mittag-Leffler em (2.85), foi introduzida em um trabalho por Wiman ([45], 1905) e suas propriedades básicas foram investigadas (quase cinco décadas mais tarde) por Humbert e Agarwal ([69], 1953) e Agarwal ([70], 1953). A função $E_{\alpha,\beta}(z)$ tem a representação em série

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \tag{2.90}$$

com $\alpha, \beta \in C$; $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Esta, às vezes, é conhecida como função de Wiman ([45], 1905) ou como primeira generalização da clássica função de Mittag-Leffler, ou reciprocamente, quando $\beta = 1$, $E_{\alpha,1}(z)$ reduz-se (coincide com) à função de Mittag-Leffler de um parâmetro $E_\alpha(z)$ em (2.85), visto que:

$$E_{\alpha,1}(z) := E_\alpha(z), \qquad z \in \mathbb{C}; \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.91}$$

Recordamos também dois outros casos particulares de (2.90):

$$E_{1,2}(z) := \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z} \quad \text{e} \quad E_{2,2}(z) := \frac{\mathrm{senh}\,(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}. \tag{2.92}$$

Definição 2.1.3.33 Função de Mittag-Leffler com dois parâmetros na forma de integral assintótica: A função $E_{\alpha,\beta}(z)$ em (2.90) pode ser representada na forma integral

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{t^{\alpha-\beta}\mathrm{e}^t}{t^\alpha - z} dt, \tag{2.93}$$

que generaliza (2.88) com o mesmo caminho C.

O resultado seguinte, generalizando o lema 2.1.3.31, fornece a representação integral para $E_{\alpha,\beta}(z) \quad (\alpha > 0)$ em termos de uma integral de contorno do tipo Mellin-Barnes.

Lema 2.1.3.34 Para $\alpha > 0$ e $z \in \mathbb{C}(|\arg(-z)| < \pi)$ vale a relação seguinte:

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)} (-z)^{-s} ds, \tag{2.94}$$

onde o caminho de integração separa todos os pólos em $s = -k (k \in \mathbb{N}_0)$ à esquerda e todos os pólos em $s = n + 1 (n \in \mathbb{N}_0)$ à direita da reta $\mathrm{Re}(s) = \gamma$.

Funções de Mittag-Leffler Generalizadas

Há várias versões generalizadas da função de Mittag-Leffler. Apresentamos outras definições e algumas propriedades de funções que generalizam as funções de Mittag-Leffler (2.85) e (2.90). Dentre estas, em 1971, Prabhakar ([96], 1971) propôs uma forma genérica para a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, descritas anteriormente, como segue.

Definição 2.1.3.35 Função de Mittag-Leffler com três parâmetros: Consideramos a função Mittag-Leffler generalizada definida para o complexo $z \in \mathbb{C}, \alpha, \beta, \rho$ e $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ por

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \frac{z^k}{k!}, \tag{2.95}$$

que é uma função inteira de z de ordem $[\mathrm{Re}(\alpha)]^{-1}$, onde $(\rho)_k$ é o símbolo de Pochhammer definido em (2.52), α, β e ρ complexos com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta > 0)$ e $\mathrm{Re}(\rho) > 0$. Suas propriedades foram investigadas também por Kilbas et al. ([150], 2004).

Em particular, quando $\rho = 1$, coincide com a função Mittag-Leffler (2.90):

$$E^1_{\alpha,\beta}(z) := E_{\alpha,\beta}(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2.96}$$

Quando $\alpha = 1$, $E^{\rho}_{1,\beta}(z)$ coincide com a função hipergeométrica confluente de Kummer $\Phi(\rho;\beta;z)$ (veja (2.77)), a menos de um fator constante $[\Gamma(\beta)]^{-1}$, isto é,

$$E^{\rho}_{1,\beta}(z) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\Phi(\rho;\beta;z). \tag{2.97}$$

Para $\alpha > 0$, a representação integral para $E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)$ pode ser expressa em termos de uma integral de contorno tipo Mellin-Barnes. Assim, da mesma maneira que o lema (2.1.3.34), chegamos ao resultado seguinte.

Lema 2.1.3.36: Para $\alpha > 0$ e $z \in \mathbb{C}(|\arg(-z)| < \pi)$ vale a relação seguinte:

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z) := \frac{1}{2\pi i\Gamma(\rho)}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\rho-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s}ds, \tag{2.98}$$

onde o caminho de integração separa todos os pólos em $s = -k(k \in \mathbb{N}_0)$ à esquerda e todos os pólos em $s = n+\rho(n \in \mathbb{N}_0)$ à direita da reta $\mathrm{Re}(s) = \gamma$.

A função $E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)$ é uma generalização da função exponencial $\exp(z)$, da clássica função de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ e da função de Wiman $E_{\alpha,\beta}(z)$. Estas funções têm uma ampla variedade de aplicações e são importantes no estudo de fenômenos modelados por equações diferenciais parciais arbitrárias.[10]

Definição 2.1.3.37: A próxima função generalizando (2.95) é definida por

$$E_\rho((\alpha_j,\beta_j)_1, m; z) := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho)_k}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\alpha_j k+\beta_j)}\frac{z^k}{k!} \tag{2.99}$$

onde $z, \rho, \beta_j \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha_j) > 0, j = 1,\ldots,n$ e $m \in \mathbb{N}$.

Quando $m = 1$, (2.99) coincide com (2.95), isto é, $E_\rho((\alpha_1,\beta_1);z) = E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)$.

O seguinte lema, generalizando o Lema (2.1.3.36), apresenta a representação integral de $E_\rho((\alpha,\beta)_n,;z)$ com $\alpha_j > 0$ via a integral de contorno tipo Mellin-Barnes.

Lema 2.1.3.38: Se $\alpha_j > 0(j = 1,\ldots,m)$, então, para $z \in \mathbb{C}(|\arg(-z)| < \pi)$, vale a relação seguinte:

$$E_\rho((\alpha_j,\beta_j)_1, m; z) := \frac{1}{2\pi i\Gamma(\rho)}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\rho-s)}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\beta_j-\alpha_j s)}(-z)^{-s}ds, \tag{2.100}$$

onde o caminho de integração separa todos os pólos em $s = -k(k \in \mathbb{N}_0)$ à esquerda e todos os pólos em $s = n+\rho \quad (n+\rho \in \mathbb{N})$ à direita da reta $\mathrm{Re}(s) = \gamma$.

[10] Por exemplo ela foi utilizada por Camargo et al. (em [176], 2009) para estudar a equação do telégrafo de ordem arbitrária e contribuir com a teoria obtendo dois novos resultados.

Definição 2.1.3.39 Mais uma generalização da função Mittag-Leffler: Os indianos Shukla e Prajapati publicaram, em 2007, um artigo ([162], 2007), onde introduziram e investigaram a função $E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(z)$ definida para α, β, ρ complexos, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(\rho) > 0$ e $q \in (0,1) \cup \mathbb{N}$

$$E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_{qk}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!} \tag{2.101}$$

na qual

$$(\rho)_{qk} = \frac{\Gamma(\rho + qk)}{\Gamma(\rho)} \tag{2.102}$$

denota a generalização do símbolo de Pochhammer, que, em particular reduz-se a

$$q^{qk} \prod_{r=1}^{q} \left(\frac{\rho + r - 1}{q} \right)_n \qquad \text{se} \qquad (q \in \mathbb{N}) \tag{2.103}$$

Observações 2.1.3.40: A função $E^{\rho,q}_{\alpha,\beta}(z)$ converge absolutamente para todo z se $q < \mathrm{Re}(\alpha) + 1$ e para $|z| < 1$ se $q = \mathrm{Re}(\alpha) + 1$. A expressão (2.101) é um generalização das funções definidas por (2.85), (2.90), (2.95) e (2.99). No estudo da transformada integral obtemos as transformadas integrais da função de Mittag-Leffler e suas generalizações.

Os fatos bem conhecidos a seguir são preparados para estudar várias propriedades das funções Mittag-Leffler e suas generalizações.

2.1.4 Transformadas Integrais

As transformadas integrais são ferramentas fundamentais para o desenvolvimento do cálculo fracionário, particularmente, quando associadas à resolução de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, de ordem arbitrária.

Em geral, o conceito de transformada integral é introduzido como segue.

Definição 2.1.4.1 Transformada integral: Definimos a transformada integral, da função $f(x)$, definida no intervalo, tal que $a \leq x \leq b$, denotada por $\mathcal{T}[f(x)] \equiv T(\xi)$, por meio da integral

$$\mathcal{T}[f(x)] \equiv T(\xi) = \int_a^b G(x,\xi) f(x) dx \tag{2.104}$$

sendo $T(\xi)$ a função transformada ou função imagem correspondente a função objeto $f(x)$, $G(x,\xi)$ o núcleo da transformada, que é uma função de duas variáveis x e ξ, sendo esta última a variável da transformada.

Podemos particularizar, esta definição, para as transformadas de Laplace, de Fourier, de Mellin [1854-Robert Hjalmar Mellin-1933] e de Hankel [1839-Hermann Hankel-1873], dentre outras. Para tanto é necessário definir o núcleo da transformada, o intervalo e as condições que devem satisfazer a função objeto de modo que a integral que define a transformada exista. Vamos particularizá-la a seguir para a transformada de Laplace.

Transformadas de Laplace

Expomos as definições e algumas propriedades da transformada de Laplace uni e multidimensional. Iniciamos com o caso unidimensional.

Transformada de Laplace: caso unidimensional

Aqui devemos nos concentrar na definição de transformada de Laplace e suas propriedades, caso unidimensional, objetivando aplicá-las na resolução de equações diferenciais ordinárias de ordens arbitrárias.

Definição 2.1.4.2 Transformada de Laplace unidimensional: Definimos a transformada de Laplace direta de uma função $f(t)$ de uma variável real $t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, ou seja, definida no intervalo semi-infinito $(0, \infty)$, ou seja, $0 < t < \infty$, denotada por $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, através da integral imprópria

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-st} f(t)dt \qquad (s \in \mathbb{C}), \tag{2.105}$$

sempre que a integral acima seja convergente. Se a integral (2.105) é convergente no ponto $s_0 \in \mathbb{C}$, então ela converge absolutamente para $s \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$. O ínfimo σ_φ de valores s para que a integral de Laplace (2.105) seja convergente é chamado de a abscissa de convergência. Assim a integral de Laplace (2.105) converge para $\mathrm{Re}(s) > \sigma_\varphi$ e diverge para $\mathrm{Re}(s) < \sigma_\varphi$. Neste caso $G(t, s) = \mathrm{e}^{-st}$ é o núcleo da transformada, na qual s, chamado parâmetro da transformada, tal que $\mathrm{Re}(s) > 0$. A função $f(t)$ é a função objeto associada à função imagem $F(s)$. Sendo $s = x + yi$ um número complexo e $x, y \in \mathbb{R}$.

Propriedade 2.1.4.3 linearidade: Uma propriedade importante da transformada de Laplace, para nosso propósito, é a linearidade, que advém do fato das transformadas serem definidas em termos de integrais fracionárias (operadores lineares). Seu enunciado é o seguinte: Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções de ordens exponenciais α e β definidas no intervalo $[0, \infty)$ e A e B duas constantes. Seja $h(x)$ a função combinação linear de $f(x)$ e $g(x)$ também definida no intervalo $[0, \infty)$ dada por

$$h(x) = Af(x) \pm Bg(x)$$

admissível de ordem exponencial maior ou igual a $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

$$\mathcal{L}[h(t)] = A(\mathcal{L}[f(x)] \pm B(\mathcal{L}[g(x)], \tag{2.106}$$

e

$$\mathcal{L}[\lambda h(x)] = \lambda \mathcal{L}[h(x)] \tag{2.107}$$

Propriedade 2.1.4.4 Transformada de Laplace de $f'(x)$ e $f''(x)$: é importante conhecer a transformada de Laplace das derivadas primeira e segunda para aplicações na resolução de equações diferenciais de primeira e segunda ordens. Sejam $f(x)$ e suas derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ admissíveis no intervalo $[0,\infty)$. Inicialmente aplicando a definição de transformada de Laplace, respectivamente, obtemos

$$\mathcal{L}[f'(x)] = s(\mathcal{L}[f(x)] - f(0) = sF(s) - f(0) \tag{2.108}$$

bem como

$$\mathcal{L}[f''(x)] = s^2\mathcal{L}[f(x)] - sf(0) - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \tag{2.109}$$

Estas expressões são relevantes para a resolução de um problema de valor inicial, visto que emergem naturalmente o valor da função e de sua derivada em $t = 0$. É também possível estender este resultado para derivada de ordem n (Capelas e E. Mariorino [144], 2003).

Propriedade 2.1.4.5 Derivada de $F(s)$: Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(x)$, então

$$F'(s) = -\mathcal{L}[xf(x)] \tag{2.110}$$

onde $F'(s)$ é a derivada em relação ao parâmetro s.

Recuperamos a função $f(x)$ por meio da definição da respectiva transformada de Laplace inversa a seguir.

Transformada de Laplace inversa para o caso unidimensional

Uma vez calculada a transformada de Laplace para obter a função original $f(x)$, devemos introduzir a definição de transformada de Laplace inversa. Para tanto é necessário conhecimento de alguns conceitos de Análise Complexa. O teorema que enunciamos a seguir, da teoria das funções analíticas, serve para o cálculo da respectiva transformada inversa.

Teorema 2.1.4.6 Transformada inversa unidimensional: Se $(\mathcal{L}f)(x)$ é a transformada de Laplace da função $f(x)$, então a transformada de Laplace unidimensional inversa $(\mathcal{L}^{-1}g)(x)$ é dada, para $x \in \mathbb{R}^+$, pela fórmula

$$(\mathcal{L}^{-1}g)(x) = \mathcal{L}^{-1}[g(s)](x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathrm{e}^{sx} g(s)ds \qquad \gamma = \mathrm{Re}(s) > \sigma_\varphi. \tag{2.111}$$

cuja integração deve ser efetuada ao longo de uma reta σ_φ no plano complexo, com $s = x + iy$.

Prova: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Ditkin e Prudnikov ([80], 1965) e Camargo ([157], 2005).

As transformadas de Laplace direta e inversa são inversas uma para outra para funções “suficientemente boas” (funções que se adequem às condições de existência da respectiva transformada) φ e g:

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\varphi = \varphi \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}g = g. \tag{2.112}$$

Produto de convolução

Agora, introduzimos um conceito bastante importante, o produto de convolução. A princípio a transformada do produto de duas funções não é o produto das respectivas transformadas. Isto só ocorre quando o produto é o chamado produto de convolução. Vamos ver adiante que esta propriedade é de fundamental importância no cálculo das transformadas de Laplace de integrais. Esta é uma maneira conveniente para calcularmos a inversa a partir de resultados conhecidos, como vamos ver a seguir.

Definição 2.1.4.7 Operador de Convolução de Laplace: caso unidimensional: Sejam $h(t)$ e $\varphi(t)$ duas funções de ordens exponenciais α e β, no intervalo de $[0,\infty)$. Definimos o produto de convolução, ou apenas convolução, de $h(t)$ e $\varphi(t)$, para $x \in \mathbb{R}^+$, denotado por $(h * \varphi(x)$, como a função $H(x)$ dada por

$$H(x) \equiv (h * \varphi)(x) := \int_0^x h(x-t)\varphi(t)dt = \int_0^x \varphi(x-t)h(t)dt. \tag{2.113}$$

que tem a propriedade da comutatividade

$$h * \varphi = \varphi * h. \tag{2.114}$$

A ordem exponencial da convolução é, no mínimo, igual a $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

Transformada de Laplace do Produto de Convolução: caso unidimensional

Outra propriedade útil é a da transformada de Laplace do produto de convolução de Laplace. No caso unidimensional dada pelo teorema que segue.

Teorema 2.1.4.8 Transformada de Laplace do produto de convolução: é o produto das transformadas das funções originais

$$(\mathcal{L}(h * \varphi))(p) = (\mathcal{L}h)(p)(\mathcal{L}\varphi)(p), \tag{2.115}$$

que vale para funções "suficientemente boas" h e φ.

Demonstração: Veja Ditkin e Prudnikov ([80], 1965) e Camargo ([157], 2005).

Transformadas de Fourier

A transformada de Fourier fracionária como uma generalização da transformada de Fourier usual começou tendo algumas aplicações em ótica e depois estendida para outras áreas.

Apresentamos, a seguir, definições e algumas propriedades da transformada de Fourier unidimensional nos espaços de funções p-somável e funções generalizadas.

Definição 2.1.4.12 Transformada de Fourier direta: Definimos a transformada de Fourier de uma função $\varphi(t)$ de variável real $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ por

$$(\mathcal{F}\varphi)(x) = \mathcal{F}[\varphi(t)](x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ixt}\varphi(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.116}$$

Uma vez calculada a transformada de Fourier, para recuperar função original $\varphi(t)$, devemos introduzir a definição de transformada de Fourier inversa, a qual é dada pela definição a seguir.

Definição 2.1.4.13 Transformada de Fourier inversa: A transformada de Fourier inversa é dada pela fórmula

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \mathcal{F}^{-1}[g(t)] := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ixt}g(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.117}$$

As integrais em (2.116) e (2.117) convergem absolutamente para funções $\varphi, g \in L^1(\mathbb{R})$ e na norma do espaço $L^2(\mathbb{R})$ para $\varphi, g \in L^2(\mathbb{R})$. A L^1-teoria e L^2-teoria das integrais de Fourier acima são descritas nos livros escritos por Titchmarsh ([61], 1937) e Sneddon ([124], 1995).

Em particular, cada uma destas transformadas são inversas, uma para outra, para funções "suficientemente boas" φ, g:

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi, \qquad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g, \tag{2.118}$$

e vale a simples relação:

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x). \tag{2.119}$$

Definição 2.1.4.14 Operador de convolução de Fourier: O produto de convolução de Fourier de duas funções h e φ é definido pela integral

$$h * \varphi := (h * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-t)\varphi(t)dt \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{2.120}$$

que tem a propriedade comutativa

$$h * \varphi = \varphi * h. \tag{2.121}$$

A transformada de Fourier do produto de convolução (2.120) é dada pelo teorema de convolução de Fourier.

Teorema 2.1.4.15 Transformada de Fourier da Convolução: Seja $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$ e $\varphi(t) \in L_1(\mathbb{R})$ ou $h(t) \in L_1(\mathbb{R})$ e $\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R})$ ou $h(t) \in L_2(\mathbb{R})$ e $\varphi(t) \in L_2(\mathbb{R})$.

Então a transformada de Fourier da convolução $h * \varphi$ é dada por

$$(\mathcal{F}(h * \varphi))(x) = (\mathcal{F}h)(x)(\mathcal{F}\varphi)(x). \tag{2.122}$$

Transformadas de Mellin

Passemos às definições e algumas propriedades da transformada de Mellin[1854 - Robert Hjalmar Mellin - 1933] unidimensional.

Definição 2.1.4.20 Transformada de Mellin unidimensional: Definimos a transformada de Mellin unidimensional de uma função $\varphi(t)$ de uma variável real $t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, ou seja, definida no intervalo $[0, \infty)$, ou seja, $0 \le t < \infty$, denotada por $\mathcal{M}[\varphi(t)](p) = \varphi * (s)$, através da integral imprópria

$$(\mathcal{M}\varphi)(p) = \mathcal{M}[\varphi(t)](p) \equiv \varphi * (s) := \int_0^{\infty} t^{s-1}\varphi(t)dt\,, \qquad s \in \mathbb{C}. \tag{2.123}$$

Definição 2.1.4.21 Transformada de Mellin inversa unidimensional: A transformada de Mellin inversa unidimensional para $x \in \mathbb{R}^+$ pode ser definida pela fórmula

$$(\mathcal{M}^{-1}g)(x) = \mathcal{M}^{-1}[g(s)](x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-s}g(s)ds\,, \qquad \gamma = \mathrm{Re}(s). \tag{2.124}$$

Estas relações podem ser derivadas de (2.116) e (2.117) se substituirmos $\varphi(t)$ por $\varphi(\mathrm{e}^t)$ e ix por s. Assim, as condições para a existência das integrais em (2.123) e (2.124) podem ser derivadas das condições correspondentes para as transformada de Fourier direta e inversa.

As transformadas de Mellin diretas e inversas são inversas entre si para funções φ e g "suficientemente boas":

$$\mathcal{M}^{-1}\mathcal{M}\varphi = \varphi \qquad \text{e} \qquad \mathcal{M}\mathcal{M}^{-1}g = g. \tag{2.125}$$

Definição 2.1.4.22 Operador de Convolução de Mellin unidimensional: O operador de convolução de Mellin de duas funções $h(t)$ e $\varphi(t)$, dado em $\mathbb{R}^+$, é definido para $x \in \mathbb{R}^+$ pela integral

$$h * \varphi := (h * \varphi)(x) := \int_0^x h\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}, \tag{2.126}$$

que tem a propriedade da comutatividade

$$h * \varphi = \varphi * h. \tag{2.127}$$

Transformada de Mellin do Operador de Convolução de Mellin unidimensional

Segue o teorema correspondente para o operador de convolução de Mellin.

Teorema 2.1.4.23: O teorema de convolução aplicado a (2.126) fornece

$$(\mathcal{M}(h * \varphi))(s) = (\mathcal{M}h)(s)(\mathcal{M}\varphi)(s), \tag{2.128}$$

que vale para funções h e φ "suficientemente boas" .

Este resultado é mais um modo de recuperarmos a função original, bastando reconhecer as transformadas inversas das funções $(\mathcal{M}h)(s)$ e $(\mathcal{M}\varphi)(s)$.

Tendo em vista os fundamentos anteriormente apresentados, é chegada a hora de iniciarmos a teoria propriamente dita.

2.2 Integração e Diferenciação de Ordem Arbitrária

Durante o desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, foram formuladas mais de uma definição de integral e também de derivada de ordem arbitrária, às vezes, não equivalentes, na tentativa de justificar a solução de Leibniz.

2.2.1 Integrais e Derivadas Ordinárias de Ordens Arbitrárias

A seguir formalizamos matematicamente as integrais e derivadas de ordens arbitrárias ordinárias. Nesta formalização a integração é tratada antes da derivação para cada definição. Embora esta ordenação seja pouco frequente no cálculo clássico, parece ser historicamente correta e pedagogicamente adequada, além do que pode ser a melhor maneira de tornar patente a verdadeira conexão entre a integral e a derivada de ordem arbitrária.

Integração e Derivação de Riemann-Liouville em um Intervalo Finito

Caracterizamos as integrais e as derivadas de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville e suas variações, definindo cuidadosamente a classe de funções na qual estes operadores podem ser aplicados.

Integrais de Riemann-Liouville

Damos as definições de integrais de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville em um intervalo finito do eixo real e apresentamos algumas de suas propriedades em espaços de funções contínuas e contínuas por partes (conforme Samko et al. [110], 1987; Samko et al. [121], 1993 e Kilbas et al. [158], em 2006).

Definição 2.2.1.1 Integral de Riemann-Liouville em intervalos finitos: Seja $\Omega = [a,b](-\infty < a < b < \infty)$ um intervalo no eixo real $\mathbb{R}$. As integrais de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville $(I^{\alpha}_{a+}f)(x) \equiv {}_aI^{\alpha}_x f(x)$ e $(I^{\alpha}_{b-}f)(x) \equiv {}_xI^{\alpha}_b f(x)$ ambas de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ são definidas por

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \qquad x > a; \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \tag{2.129}$$

e

$$(I^{\alpha}_{b-}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \qquad x < b; \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \tag{2.130}$$

respectivamente. Aqui $\Gamma(\alpha)$ é a função gama (2.46). Estas integrais são chamadas integrais fracionárias à direita e à esquerda.

Observa-se que quando $a = 0$ em (2.129) esta equação é equivalente a definição de Riemann (sem a função complementar) no semieixo real.

Quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, as definições (2.129) e (2.130) coincidem com as $n-$ésimas integrais da forma

$$(I^{n}_{a+}f)(x) := \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \ldots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \tag{2.131}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.132}$$

e

$$(I^{n}_{b-}f)(x) := \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \ldots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n)dt_n \tag{2.133}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.134}$$

Pode ser verificado diretamente que a integração de ordem generalizada de Riemann-Liouville (2.129) e (2.130) das funções potências $(x-a)^{\beta-1}$ e $(b-x)^{\beta-1}$ resultam em funções potências da mesma forma

Propriedade 2.2.1.2: Se $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{C}$ com $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, então

$$(I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha-1} \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \tag{2.135}$$

e

$$(I^{\alpha}_{b-}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}(b-x)^{\beta+\alpha-1} \qquad \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \tag{2.136}$$

Integrais de Riemann-Liouville da Função de Mittag-Leffler

Damos a fórmula que mostra que a integral de Riemann-Liouville (2.129) da função de Mittag-Leffler (2.90) com parâmetros especiais também fornece uma função do mesmo tipo.

$$(I^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}[\lambda(t-a)^{\mu}])(x) = (x-a)^{\alpha+\beta-1}E_{\mu,\alpha+\beta}[\lambda(x-a)^{\mu}] \tag{2.137}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0$ e $\mathrm{Re}(\mu) \geq 0$.

Indicamos algumas propriedades dos operadores integrais de cálculo fracionário do lado esquerdo e do lado direito I^{α}_{a+} e I^{α}_{b-} basicamente apresentado em Samko et al. ([121], 1993) e Kilbas et al. ([158], 2006). O primeiro rende os resultados para operadores de integração fracionários $I^{\alpha}_{a+}f$ e $I^{\alpha}_{b-}f$ do espaço $L_p(a,b)(1 \leq p \leq \infty)$ com a norma $||f||_p$ definida de acordo com (2.1) e (2.2) com $c = 1/p$ por

$$||F||_P := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} (1 \leq p < \infty), \qquad ||f||_p := \mathrm{esssup}_{a\leq x\leq b}|f(x)|(p=\infty). \tag{2.138}$$

Lema 2.2.1.3: (a) Para os operadores de integração fracionária I^{α}_{a+} e I^{α}_{b-} com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ em $L_p(a,b)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ têm-se

$$||I^{\alpha}_{a+}f||_p \leq K||f||_p, \qquad ||I^{\alpha}_{b-}f||_p \leq K||f||_p \qquad \left(K = \frac{(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)}}{\mathrm{Re}(\alpha)|\Gamma(\alpha)|}\right). \tag{2.139}$$

(b) Se $0 < \alpha < 1$ e $1 < p < 1/\alpha$, então os operadores I^{α}_{a+} e I^{α}_{b-} são limitados de $L_p(a,b)$ até $L_q(a,b)$ onde $q = p/(1-\alpha p)$.

Observação 2.2.1.4: O lema 2.2.1.3 (a) foi provado em Samko et al. ([121], 1993, Teorema 2.6), enquanto o Lema 2.2.1.3 (b) é conhecido como o teorema de Hardy-Littlewood (Samko et al. ([121], 1993, Teorema 3.5).

Propriedade dos semigrupos para integrais de ordem arbitrária

Como vimos Lagrange (Lagrange [5], 1772), contribuiu indiretamente para o cálculo de ordem arbitrária ao desenvolver a denominada lei dos expoentes também conhecida como propriedade dos semigrupos. A propriedade aditiva dos semigrupos dos operadores de integração fracionária I^{α}_{a+} e I^{α}_{b-} é dada pelo resultado seguinte (Samko et al. ([121], 1993).

Lema 2.2.1.5: Se $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, então as equações

$$(I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{a+}f)(x), \qquad \text{e} \qquad (I^{\alpha}_{b-}I^{\beta}_{b-}f)(x) = (I^{\alpha+\beta}_{b-}f)(x) \tag{2.140}$$

são satisfeitas em quase todos os pontos $x \in [a,b]$ para $f(x) \in L_p(a,b)(1 \leq p \leq \infty)$. Se $\alpha + \beta > 1$, então as relações em (2.140) são válidas em qualquer ponto de $[a,b]$. E consequentemente, na propriedade comutativa

$$(I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f)(x) = (I^{\beta}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f)(x), \qquad \text{e} \qquad (I^{\alpha}_{b-} I^{\beta}_{b-} f)(x) = (I^{\beta}_{b-} I^{\alpha}_{b-} f)(x). \tag{2.141}$$

Como extensão para integrais e derivadas de ordem arbitrária, esta propriedade representa também um dos mais importantes resultados para o desenvolvimento dessa teoria.

Integração por partes da Integral de Riemann-Liouville

Agora apresentamos as regras para integração fracionária por partes, que foram provadas em Samko et al. ([121], 1993, Corolário do Teorema 3.5 e Corolário 2 do Teorema 2.4 (a)).

Lema 2.2.1.6: Seja $\alpha > 0, p \geq 1, q \geq 1$ e $(1/p) + (1/q) \leq 1 + \alpha \quad (p \neq 1 \, \text{e} \, q \neq 1$ e no caso quando $(1/p) + (1/q) = 1 + \alpha$. Se $\varphi(x) \in L_p(a,b)$ e $\psi(x) \in L_p(a,b)$, então

$$\int_a^b \varphi(x)(I^{\alpha}_{a+}\psi)(x)dx = \int_a^b \psi(x)(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x)dx. \tag{2.142}$$

Derivadas de Riemann-Liouville

Depois de definir a integral de ordem arbitrária α com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ a derivada de ordem arbitrária torna-se um requisito natural. Considerando que no cálculo de ordem inteira a derivação é a operação inversa da integração, somos tentado a substituir α por $-\alpha$ nas fórmulas consideradas. Porém, esta necessidade de generalização requer alguns cuidados a fim de garantir a convergência das integrais e preservar as propriedades bem conhecidas das derivadas de ordem inteira. Em geral, a integração e derivação de ordens arbitrárias não são inversas entre si.

A derivada de ordem arbitrária, conforme Riemann-Liouville, é formalizada com base no fato da derivação ser operação inversa da integração e na lei dos expoentes (Miller e Ross [119], em 1993). A seguir fornecemos as definições de derivadas de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville em um intervalo finito do eixo real e apresentamos algumas de suas propriedades em espaços de funções contínuas e contínuas por partes. Vejamos sua definição formal, a seguir.

Definição 2.2.1.7 Derivadas de Riemann-Liouville em Intervalos Finitos As derivadas de Riemann-Liouville em um intervalo finito do eixo real $D^{\alpha}_{a+}y$ e $D^{\alpha}_{b-}y$ de ordem $\alpha \in \mathbb{C}(\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0)$ são definidas por

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I^{n-\alpha}_{a+}y\right)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \qquad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1; \; x > a \tag{2.143}$$

e

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{b-}y)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \qquad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1;\ x < b, \tag{2.144}$$

respectivamente, onde $[\mathrm{Re}(\alpha)]$ significa a parte inteira de $\mathrm{Re}(\alpha)$.

Em palavras, a derivada de ordem arbitrária, segundo Riemann-Liouville, equivale à derivada de ordem inteira de uma integral de ordem arbitrária.

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então

$$(D^0_{a+}y)(x) = (D^0_{b-}y)(x) = y(x); \qquad (D^n_{a+}y)(x) = y^{(n)}(x),$$

e

$$(D^n_{b-}y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{2.145}$$

onde $y^{(n)}(x)$ é a usual derivada de $y(x)$ de ordem n.

Se $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, então

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-[\mathrm{Re}(\alpha)]}} \qquad 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1;\ x > a, \tag{2.146}$$

$$(D^\alpha_{b-}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-[\mathrm{Re}(\alpha)]}} \qquad 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1;\ x < b. \tag{2.147}$$

Quando $\alpha \in \mathbb{R}^+$, então (2.143) e (2.144) tomam as formas seguintes:

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \qquad n = [\alpha] + 1;\ x > a \tag{2.148}$$

e

$$(D^\alpha_{b-}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \qquad n = [\alpha] + 1;\ x < b, \tag{2.149}$$

enquanto (2.146) e (2.147) são dadas por

$$(D^\alpha_{a+}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1;\ x > a \tag{2.150}$$

e

$$(D^\alpha_{b-}y)(x) := -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1;\ x < b, \tag{2.151}$$

respectivamente.

Se $\mathrm{Re}(\alpha) = 0 (\alpha \neq 0)$, então (2.143) e (2.144) nos levam às derivadas fracionárias de ordem puramente imaginária:

$$(D^{i\theta}_{a+}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{i\theta}} (\theta \in \mathbb{R}|0; x > a), \tag{2.152}$$

$$(D^{i\theta}_{b-}y)(x) := -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t)dt}{(t-x)^{i\theta}} \qquad \theta \in \mathbb{R}|0;\ x < b. \tag{2.153}$$

Também pode ser diretamente verificado que os operadores de diferenciação fracionária (2.143) e (2.144) das funções potências $(x-a)^{\beta-1}$ e $(b-x)^{\beta-1}$ resultam em funções potências da mesma forma.

Propriedade 2.2.1.8 Se $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{C}(\mathrm{Re}(\beta) > 0)$, então

$$(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1} \qquad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0 \tag{2.154}$$

e

$$(D^{\alpha}_{b-}(b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1} \qquad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0. \tag{2.155}$$

Em particular, se $\beta = 1$ e $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, então as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville de uma constante são, em geral, diferentes de zero:

$$(D^{n}_{a+}1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, (D^{\alpha}_{b-}1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad (0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1). \tag{2.156}$$

Por outro lado, para $j = 1, 2, \cdots, [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$,

$$(D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j})(x) = 0, (D^{\alpha}_{b-}(b-t)^{\alpha-j})(x) = 0. \tag{2.157}$$

De (2.157) derivamos o resultado seguinte.

Corolário 2.2.1.9 Sejam $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $[\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$.

(a) A igualdade $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = 0$ é válida se, e somente se,

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j (x-a)^{\alpha-j}, \tag{2.158}$$

onde $c_j \in \mathbb{R}(j = 1, \cdots, n)$ são constantes arbitrárias.

Em particular, quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq 1$, a relação $(D^{\alpha}_{a+}y)(x) = 0$ vale se, e somente se, $y(x) = c(x-a)^{\alpha-1}$ com qualquer $c \in \mathbb{R}$.

(b) A igualdade $(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = 0$ é válida se, e somente se,

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j (b-x)^{\alpha-j}, \tag{2.159}$$

onde $d_j \in \mathbb{R}(j = 1, \cdots, n)$ são constantes arbitrárias.

Em particular, quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq 1$, a relação $(D^{\alpha}_{b-}y)(x) = 0$ vale se, e somente se, $y(x) = d(b-x)^{\alpha-1}$ com qualquer $d \in \mathbb{R}$.

Mencionamos também algumas propriedades dos operadores diferenciais de cálculo fracionário à esquerda e à direita D^{α}_{a+} e D^{α}_{b-} basicamente apresentado em Samko et al. ([121], 1993) e Kilbas et al. ([158], 2006).

O próximo resultado caracteriza as condições para a existência das derivadas fracionárias D^{α}_{a+} e D^{α}_{b-} no espaço $AC^n[a,b]$ definido em (2.7).

Lema 2.2.1.10 Seja $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$. Se $y(x) \in AC^n[a,b]$, então as derivadas fracionárias $D^{\alpha}_{a+}y$ e $D^{\alpha}_{b-}y$ existem em quase todos pontos em $[a,b]$ e pode ser representadas nas formas

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{2.160}$$

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(b-x)^{k-\alpha} + \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.161}$$

respectivamente.

Prova. A relação (2.160) foi estabelecida em Samko et al. ([121], 1993) e Kilbas et al. ([158], 2006) com base de definição (2.143) e no Lema (2.1.1.3). A fórmula (2.161) é provada semelhantemente usando a Definição (2.144) e a representação para a função da forma (2.8):

$$g(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1}\phi(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} d_k(-1)^k(b-x)^k, \tag{2.162}$$

onde

$$\phi(t) = g^{(n)}(t) \qquad \text{e} \qquad d_k = \frac{g^{(k)}(b)}{k!}. \tag{2.163}$$

Corolário 2.2.1.11: Se $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha) < 1 (\alpha \neq 0)$ e $y(x) \in AC[a,b]$, então

$$(D^{\alpha}_{a+}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(a)}{(x-a)^{\alpha}} + \int_a^x \frac{y'(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} \right] \tag{2.164}$$

e

$$(D^{\alpha}_{b-}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{y(b)}{(b-x)^{\alpha}} - \int_x^b \frac{y'(t)dt}{(t-x)^{\alpha}} \right]. \tag{2.165}$$

Obsevações 2.2.1.12: As relações (2.164) e (2.165) foram provadas em Samko et al. ([121], 1993) e Kilbas et al. ([158], 2006).

A afirmação seguinte mostra que a diferenciação fracionária é um operação inversa para a integração fracionária à esquerda.

Lema 2.2.1.13: Se $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $f(x) \in L_p(a,b)(1 \leq p \leq \infty)$, então as seguintes igualdades

$$(D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = f(x), \qquad \text{e} \qquad (D^{\alpha}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f)(x) = f(x) \qquad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0) \tag{2.166}$$

são asseguradas em $[a,b]$.

Observação 2.2.1.14: A primeira relação em (2.166) para $f(x) \in L(a,b)$ foi estabelecida em Samko et al. ([121], 1993). A segunda pode ser provada similarmente.

Dos Lemas (2.2.1.5), (2.2.1.10) e (2.2.1.13) derivamos as seguintes relações:

Propriedade 2.2.1.15: Se $\mathrm{Re}(\alpha) > \mathrm{Re}(\beta) > 0$, então para $f(x) \in L_p(a,b)(1 \leq p \leq \infty)$, as relações

$$(D^{\beta}_{a+}I^{\alpha}_{a+}f)(x) = I^{\alpha-\beta}_{a+}f(x) \qquad \text{e} \qquad (D^{\beta}_{b-}I^{\alpha}_{b-}f)(x) = I^{\alpha-\beta}_{b-}f(x). \tag{2.167}$$

são asseguradas em $[a,b]$.

Em particular, quando $\beta = k \in \mathbb{N}$ e $\mathrm{Re}(\alpha) > k$, então

$$(D^k I_{a+}^{\alpha} f)(x) = I_{a+}^{\alpha-k} f(x) \qquad \text{e} \qquad (D^k I_{b-}^{\alpha} f)(x) = (-1)^k I_{b-}^{\alpha-\kappa} f(x). \tag{2.168}$$

Propriedade dos Semigrupos para derivadas de ordem inteira: A lei dos expoente para derivadas de ordem inteira é dada pelas equações, respectivamente:

Propriedade 2.2.1.16 aditiva: Na propriedade aditiva

$$D^m D^n = D^{m+n}. \tag{2.169}$$

Propriedade 2.2.1.17 comutativa: Na propriedade comutativa

$$D^m D^n = D^n D^m \tag{2.170}$$

sendo $m, n = 0, 1, 2, ...$

Propriedade dos Semigrupos para derivadas de ordem arbitrária: A propriedade a seguir estende a propriedade dos semigrupos para derivadas de ordens arbitrárias.

Propriedade 2.2.1.18 Sejam $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $D = \frac{d}{dx}$.

(a) Se as derivadas de ordens arbitrárias $(D_{a+}^{\alpha} y)(x)$ e $(D_{a+}^{\alpha+m} y)(x)$ existem, então

$$(D^m D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha+m} y)(x). \tag{2.171}$$

(b) Se as derivadas de ordens arbitrárias $(D_{b-}^{\alpha} y)(x)$ e $(D_{b-}^{\alpha+m} y)(x)$ existem, então

$$(D^m D_{b-}^{\alpha} y)(x) = (-1)^m (D_{b-}^{\alpha+m} y)(x). \tag{2.172}$$

Integração por partes da derivada de Riemann-Liouville de ordem arbitrária Agora apresentamos as correspondentes regras para derivação fracionária por partes, que foram provadas em Samko et al. ([121], 1993, Corolário do Teorema 3.5 e Corolário 2 de Teorema 2.4).

Lema 2.2.1.19 Seja $\alpha > 0, p \geq 1, q \geq 1$ e $(1/p) + (1/q) \leq 1 + \alpha$ $\;(p \neq 1 \, \mathrm{e} \, q \neq 1$ e no caso quando $(1/q) + (1/q) = 1 + \alpha$. Se $f(x) \in I_{-}^{\alpha}(L_p)$ e $g(x) \in I_{a+}^{\alpha}(L_q)$, então

$$\int_a^b f(x)(D_{a+}^{\alpha} g)(x)dx = \int_a^b g(x)(I_{b-}^{\alpha} f)(x)dx. \tag{2.173}$$

Acreditamos que destes lemas acima possamos, pensamos talvez, raciocinando como Newton e Leibniz, em analogia ao cálculo de ordem inteira, estender a ideia e obter o teorema fundamental do cálculo de ordem arbitrária.

Derivada de Riemann-Liouville da função de Mittag-Leffler

Damos, também, a fórmula que mostra que a derivada fracionária de Riemann-Liouville (2.143) da função de Mittag-Leffler (2.90) com parâmetros especiais também rende uma função do mesmo tipo. Uma relação semelhante para a derivada de ordem arbitrária de Riemann-Liouville (2.143) diretamente segue:

$$(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}E_{\mu,\beta}[\lambda(t-a)^{\mu}])(x) = (x-a)^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}[\lambda(x-a)^{\mu}] \tag{2.174}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \mathrm{Re}(\beta) > 0$ e $\mathrm{Re}(\mu) \geq 0$.

Em particular, quando $\beta = \mu = \alpha$, podemos aplicar a conhecida fórmula de limite

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{\Gamma(z)} = 0 \tag{2.175}$$

para derivar de (2.174) a relação seguinte para a função $\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda(x-a)}$ definida em (2.174):

$$\left(D_{0+}^{\alpha}\mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda(t-a)}\right)(x) = \lambda \mathrm{e}_{\alpha}^{\lambda(x-a)} (\mathrm{Re}(\alpha) > 0; \lambda \in \mathbb{C}). \tag{2.176}$$

Quando $\beta = 1$ e $\mu = \alpha$, então (2.174) conforme (2.90) e (2.91), rendem a fórmula seguintes para a função de Mittag-Leffler (2.85):

$$(D_{a+}^{\alpha}E_{\alpha}[\lambda(t-a)^{\alpha}])(x) = \lambda E_{\alpha}[\lambda(x-a)^{\alpha}] \qquad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0); \lambda \in \mathbb{C}). \tag{2.177}$$

Uma Propriedade da Análise

Finalmente, damos uma análoga da propriedade bem conhecida de análise

$$\frac{d}{dx}\int_a^x K(x,t)dt = \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}K(x,t)dt + \lim_{t\to x^{-0}} K(x,t), \tag{2.178}$$

que é válida desde que $K(x,t)$ seja contínua em $[a,b]\times[a,b]$ e que $K(x,t)$ tem uma derivada parcial contínua $(\frac{\partial}{\partial x})K(x,t)$ com respeito a $x \in [a,b]$ para qualquer fixo $t \in [a,b]$ para a derivada de Riemann-Liouville $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ de ordem $\alpha(0 < \alpha < 1)$ no caso quando $K(x,t) = k(x-t)f(t)$. Para isto precisamos da assim chamada derivada parcial de ordem arbitrária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha(0 < \alpha < 1)$ com respeito a x de uma função $y(x,t)$ de duas variáveis $(x,t) \in [a,b] \times [a,b]$ definida por

$$(D_{a+,x}^{\alpha}y)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x \frac{y(u,t)du}{(x-u)^{\alpha}}, \tag{2.179}$$

com $0 < \alpha < 1; x > a; t \in [a,b]$ [veja Seção 2.9 nesta consideração). A notação seguinte também é apropriada para a derivada fracionária de Riemann-Liouville $(D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ em (2.146) e para a integral fracionária de Riemann-Liouville $(I_{a+}^{1-\alpha}f)(x)$ definida por (2.129)

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = D_{a+}^{\alpha}[y(t)](x) \qquad \text{e} \qquad (I_{a+}^{1-\alpha}f)(x) = I_{a+}^{1-\alpha}[f(t)](x) \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{2.180}$$

O seguinte lema pode ser provado razoavelmente de maneira fácil

Lema 2.2.1.20: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $0 < \alpha < 1$. Sejam também a função $f(x)$ e $k(x)$ definida em $[a,b]$ tal que

$$f(x) \in C[a,b] \qquad \text{e} \qquad L(x) = \int_0^x \tau^{-\alpha}\kappa(x-\tau)d\tau \in \mathbb{C}[a,b]. \tag{2.181}$$

Então, para qualquer $x \in [a,b]$,

$$D^{\alpha}_{a+}\left[\int_a^t \kappa(t-u)f(u)du\right](x)$$

$$= \int_a^x D^{\alpha}_{a+}[\kappa(t-a)](u)f(x+a-u)du + f(x)\lim_{x\to a+} I^{1-\alpha}_{a+}[\kappa(t-a)](x). \tag{2.182}$$

Observação 2.2.1.21 O Lema 2.2.1.20 é sastisfeito aqui para $0<\alpha<1$ desde que as condições em (2.181) sejam satisfeitas. De fato, este lema também é válido para $\alpha \in \mathbb{C}(0<\mathrm{Re}(\alpha)<1)$ sob condições diferentes para as funções $f(x)$ e $k(x)$ daquelas em (2.181). Por exemplo, $f(x)$ pode ser medida de Lebesgue $[a,b]$ e que $k(x)$ pode ter uma derivada mensurável $k'(x)$ em todos pontos em $[a,b]$.

Observação 2.2.1.22 Para $a=0$, a relação da forma (2.182) foi formalmente proposta por Podlubny ([137], em 1999), junto com sua generalização da forma (2.178) em que a derivada d/dx é substituída pela derivada de ordem arbitrária de Riemann-Liouville D^{α}_{0+}.

Integração e derivação de Liouville

Apresentamos as definições e algumas propriedades das integrais e derivadas de ordens arbitrárias de Liouville no semieixo $\mathbb{R}^+$. As integrais de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville (2.129) e (2.130) e as derivadas de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville (2.143) e (2.144), definidas em um intervalo finito $[a,b]$ do eixo real $\mathbb{R}$, são naturalmente estendidas para o semieixo $\mathbb{R}^+$.

Integrais de Liouville nos semieixos

A construção das integrais de Liouville, relativa às (2.129) e (2.130), têm as hipótese e formas seguintes:

Definição 2.2.1.23 Integrais de Liouville nos semieixos Seja f uma função contínua por partes no intervalo $(0,\infty)$, integrável em qualquer subintervalo $[0,\infty)$ e $t>0$. As integrais fracionárias de Liouville, correspondentes às (2.129) e (2.130), de ordem α são definidas por

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \qquad (x>0; \mathrm{Re}(\alpha)>0) \tag{2.183}$$

e

$$(I^{\alpha}_{-}f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \qquad (x>0; \mathrm{Re}(\alpha)>0), \tag{2.184}$$

respectivamente.

As expressões para $I^{\alpha}_{0+}f$ e $I^{\alpha}_{-}f$ em (2.183) e (2.184) são chamadas de integrais fracionárias direita e esquerda de Liouville no semieixo $\mathbb{R}^+$.

Teorema 2.2.1.24 Integração de Liouville Na definição de derivada à direita (2.183), por resultados do cálculo usual, a integral de Riemann

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \tag{2.185}$$

existe para todo x pertencente ao intervalo $[0,b]$ e $\alpha>0$.

Em geral obter a integral de ordem arbitrária como a de (2.185) é trabalhoso em função da natureza do núcleo. Porém este núcleo nos possibilita desenvolver metodologias para o cálculo imediato de uma ampla classe de funções. Como, por exemplo, a dada pelo teorema a seguir.

Teorema 2.2.1.25: Seja $f \in E$, onde E é um espaço funcional, e $I^{\alpha} f(x)$ a integral arbitrária de ordem α da função f que satisfaz as hipóteses da definição em (2.183), então

$$I^{\alpha}[xf(x)] = xI^{\alpha} f(x) - \alpha I^{\alpha+1} f(x), \tag{2.186}$$

onde $\alpha > 0$.

Prova: Com efeito, aplicando a definição de Liouville (2.183), segue que

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [tf(t)] dt.$$

Substituindo o termo entre colchetes, da equação acima, por

$$[tf(t)] = [x - (x-t)] f(t),$$

escrevemos

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [x - (x-t)] f(t) dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} x f(t) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} x f(t) dt$$

usando a relação, advinda da função gama

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

na equação acima

$$I^{\alpha}[xf(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} x f(t) dt + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} x f(t) dt$$

de onde resulta

$$= xI^{\alpha} f(x) - \alpha I^{\alpha+1} f(x).$$

o que queríamos demonstrar.

O operador de cálculo fracionário de Liouville I^{α}_{0+} satisfaz a relação (2.129) com $a = 0$, enquanto os operador de cálculo de Liouville fracionário I^{α}_{-} da função potência $x^{\beta-1}$ e função exponencial $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ rende uma função de potência e função exponencial da mesma forma, respectivamente, ambos separadamente de um fator de multiplicação constante.

Propriedade 2.2.1.26: Seja $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$.

(a) Se $\mathrm{Re}(\beta) \geq 0$, então

$$(I^{\alpha}_{0+} t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} x^{\beta+\alpha-1} (\mathrm{Re}(\alpha) > 0); \mathrm{Re}(\beta) > 0). \tag{2.187}$$

(b) Se $\beta \in \mathbb{C}$, então

$$(I_{-}^{\alpha}t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}x^{\beta+\alpha-1}(\mathrm{Re}(\alpha)>0);\mathrm{Re}(\alpha+\beta)<1). \tag{2.188}$$

(c) Se $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, então

$$(I_{-}^{\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda t})(x) = \lambda^{-\alpha}\mathrm{e}^{-\lambda x}(\mathrm{Re}(\alpha)>0). \tag{2.189}$$

As fórmulas (2.187) e (2.188) seguem de (2.135) e (2.136) para $a = 0$. Quando $0 < \alpha < 1$ e $1 \leq p < 1/\alpha$, as integrais I_{0+}^{α} e I_{-}^{α} são definidas para uma função $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$.

Integrais de Liouville da Função de Mittag-Leffler

A fórmula (2.174) envolvendo a função de Mittag-Leffler (2.90) também é válida para a integral de Liouville (2.183):

$$(I_{a+}^{\alpha}t^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda t^{\mu}))(x) = x^{\alpha+\beta-1}E_{\mu,\alpha+\beta}(\lambda x^{\mu}) \tag{2.190}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ e $\mathrm{Re}(\mu) > 0$.

Propriedades dos Semigrupos para integrais de Liouville nos semieixos:

A afirmação seguinte, semelhante ao Lema 2.2.1.5, são válidas (veja Samko et al. ([121], 1993)), Seção 5.1).

A propriedade 2.2.1.27 Seja $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geq 1$ e $\alpha + \beta < 1/p$. Se $f(x) \in L_p(\mathbb{R}^+)$, então as propriedades dos semigrupos (soma dos expoentes)

$$(I_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\beta}f)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\beta}f)(x), \qquad \text{e} \qquad (I_{-}^{\alpha}I_{-}^{\beta}f)(x) = (I_{-}^{\alpha+\beta}f)(x) \tag{2.191}$$

são válidas. As relações em (2.191) também são válidas para funções $f(x)$ "suficientemente boas" (contínuas e diferenciáveis.

Com a transformada de Laplace do produto de convolução (2.115) e usando a relação entre a função gama e beta (2.73) podemos enunciar e demonstrar um teorema relativo a chamada lei dos expoentes para integrais de ordens arbitrárias.

Teorema 2.2.1.28 Seja I o operador integral arbitrário, conforme a propriedade do semigrupo, a propriedade da comutação

$$I^{\alpha}I^{\beta} = I^{\beta}I^{\alpha} \tag{2.192}$$

é satisfeita, onde $\alpha, \beta \leq 0$

Apresentamos a seguir uma prova dos teoremas (2.2.1.27) e (2.2.1.28).

Prova: Introduzimos a função auxiliar $\Phi_{\alpha}(x)$, (conforme Podlubny [137], 1999, p.82)

$$\Phi_a(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases} \tag{2.193}$$

Como a integral de ordem arbitrária é o produto de convolução de duas funções, podemos escrever

$$\Im^{a}f(x) = \Phi_{\alpha}(x) * f(x), \qquad \alpha > 0. \tag{2.194}$$

Mostramos a relação, a saber

$$\Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x) = \Phi_{\alpha+\beta}(x). \tag{2.195}$$

Aplicando o produto de convolução definido por (2.115), escrevemos

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x) &= \int_0^x \frac{\tau^{\alpha-1}(x-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} d\tau \\ &= \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \tau^{\alpha-1}(1-\tau/x)^{\beta-1} d\tau.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = \tau/x$, usando a definição da função beta (2.72) e a relação entre as funções beta e gama (2.73), podemos escrever

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x) &= \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (ux)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}(xdu) \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du \\ &= \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \Phi_{\alpha+\beta}(x)\end{aligned}$$

Finalizamos a demonstração, com base nas relações dadas em (2.194) e (2.195), como segue

$$\begin{aligned}I^\alpha I^\beta f(x) &= \Phi_\alpha(x) * I^\beta f(x) \\ &= \Phi_\alpha(x) * \Phi_\beta(x) f(x) \\ &= I^{\alpha+\beta} f(x)\end{aligned}$$

onde f é tal que $\Im^\gamma f(x)$ tem sentido para todo $\gamma = \alpha + \beta > 0$.

Ainda devemos saber que a lei dos expoentes não se aplica, em geral, para as derivadas de ordens arbitrárias, como veremos a seguir.

Integração por partes da integral de Liouville de ordem arbitrária

A fórmula para integração fracionária por partes, análoga para aquela em Lema 2.2.1.6, para as integrais fracionárias de Liouville (2.183) e (2.184) dada pelo resultado seguinte.

Propriedade 2.2.1.29: Se $\alpha > 0$, então a relação

$$\int_0^\infty \varphi(x)(I_{0+}^\alpha \psi)(x)dx = \int_0^\infty \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx. \tag{2.196}$$

É válida para funções φ e ψ. “suficientemente boas”.

Transformadas de Laplace da Integral de Liouvile de uma função nos semieixos

Nesse ponto, podemos dizer: a definição de integral de ordem arbitrária é a transformada de Laplace do produto de convolução definido em (2.115). Afirmação justificada pelo o seguinte Lema.

Lema 2.2.1.30: Sejam f e g petencentes a K contínuas por partes e de ordem exponencial, $L[f(x)] = F(s)$ e $L[g(x)] = G(s)$ suas respectivas transformadas de Laplace, bem como $\Im^{\alpha}$ a integral arbitrária de ordem α, onde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Seja $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $f(x) \in L_1(0, b)$ para todo $b > 0$. Também seja a estimativa

$$|f(x)| \leq A\mathrm{e}^{p_0 x}(x > b > 0) \tag{2.197}$$

garantida para constantes $A > 0$ e $p_0 > 0$. Se $f(x) \in L_1(0, p)$ para todo $b > 0$, então a relação

$$(\mathcal{L}I^{\alpha}_{0+}f)(s) = s^{-\alpha}(\mathcal{L}f)(p) \qquad \text{ou} \qquad L[I^{\alpha}f(x)] = s^{-\alpha}F(s) \tag{2.198}$$

é válida para $\mathrm{Re}(s) > p_0$.

Prova: Com efeito, pelo teorema da convolução, dado em (2.115),temos

$$\mathcal{L}[(f * g)(x)] = \mathcal{L}[\int_0^x f(x-t)g(t)dt] = F(s)G(s).$$

Adicionalmente, tomando a definição de integral fracionária de Liouville, nos semieixos reais, em (2.183), dada como

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,$$

e aplicando a transformada de Laplace na mesma, temos

$$\mathcal{L}[I^{\alpha}f(x)] = L\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt\right\}.$$

Daí, interpretando a definição de integral arbitrária como o produto de convolução de duas funções, escrevemos

$$\mathcal{L}[I^{\alpha}f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}[t^{\alpha-1}]\mathcal{L}[f(t)]$$

$$(\mathcal{L}I_{0+}\alpha f)(s) = s^{-\alpha}(\mathcal{L}f)(p) \qquad \text{ou} \qquad L[I^{\alpha}f(x)] = s^{-\alpha}F(s)$$

o resultado desejado.

Com este resultado acima podemos calcular a transformadas de Laplace da integral de algumas funções.

Derivadas de Liouville

Damos aqui a construção da diferenciação de ordem α de $y(t)$, no sentido de Liouville, nos semieixos, correspondentes para as definições em (2.143) e (2.144).

Definição 2.2.1.31 Derivada de Liouville nos Semieixos: Sejam f uma função de classe K, sendo K a classe das funções que satisfazem as definições (2.183) e (2.144), $x > 0$ e n o menor inteiro maior que

$\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\beta = n - \alpha > 0$ e $0 < \mathrm{Re}(\beta) \leq 1$. A diferenciação de ordem arbitrária de Liouville de ordem α de $y(t)$, correspondentes para equações em (2.183) e (2.144), são definidas por.

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) =_0 D_x^{\alpha}y)(x) = D^n[{}_0I_x^{\alpha}y(t)] := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{n-\alpha}y\right)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{2.199}$$

e

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_{-}^{n-\alpha}y)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.200}$$

respectivamente, com $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1; \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0; x > 0$.

As expressões para $D_{0+}y$ e $D_{-}y$ em (2.199) e (2.200), são chamadas de derivadas fracionárias direita e esquerda de Liouville no semieixo $\mathbb{R}^+$.

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então

$$(D_{+}^{0}y)(x) = (D_{-}^{0}y)(x) = y(x); \qquad (D_{+}^{n}y)(x) = y^{(n)}(x)$$

e

$$(D_{-}^{n}y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{2.201}$$

onde $y^{(n)}(x)$ é a usual derivada de $y(x)$ de ordem n.

Se $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ e $x > 0$, então

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-[\mathrm{Re}(\alpha)]}} \tag{2.202}$$

$$(D_{-}^{\alpha}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-[\mathrm{Re}(\alpha)]}}. \tag{2.203}$$

Se $\mathrm{Re}(\alpha) = 0(\alpha \neq 0)$, então a derivadas fracionãrias (2.202) e (2.203) são de ordens puramente imaginárias e têm a formas seguintes

$$(D_{0+}^{i\theta}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{i\theta}} \qquad (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x > 0), \tag{2.204}$$

$$(D_{-}^{i\theta}y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-i\theta)}\frac{d}{dx}\int_x^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{i\theta}} \qquad (\theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; x > 0). \tag{2.205}$$

respectivamente.

Em síntese, conforme a definição de derivada de Liouville (2.199) a derivada de ordem arbitrária α de uma função $y(t)$, é a derivada de ordem inteira n da integral de ordem arbitrária $n - \alpha$ da função $y(t)$ de modo que a propriedade dos semi-grupos tenha sentido.

Cálculos de Derivadas de Liouville de uma função

A fim de justificarmos a opção por uma particular maneira de derivar, seguem-se algumas aplicações de expressões envolvendo a derivada no sentido de Liouville, em particular para uma função tipo polinômio.

Exemplo 2.2.1.32: Calcular a derivada de ordem α da função $y(t) = t^\mu$, usando a definição de Liouville.

Raciocínio da Solução: Queremos recuperar o resultado da equação de Lacroix (1.17). Com efeito, uma vez que essa função é de classe K, pode ser calculada pela definição em (2.199), daí temos

$$D^\alpha t^\mu = D^n[I^{n-\alpha} t^\mu]. \tag{2.206}$$

Calculando a integral de ordem arbitrária de t^μ pela definição de Liouville, resulta

$$I^{n-\alpha} t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu}$$

levando este resultado na equação (2.206), temos

$$= D^n \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} x^{\alpha+\mu} \right]$$

ou ainda

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu-n+1)} x^{\alpha+\mu-n} \tag{2.207}$$

sendo $n - \alpha > 0$, segue o resultado

$$D^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}. \tag{2.208}$$

Observamos que esta relação estende a derivada de ordem inteira para ordem arbitrária para uma dada classe de funções.

Exemplo 2.2.1.33: Aplicando a definição Liouville, mostre que a derivada de ordem α da função constante $y(t) = t^0 = 1$ é diferente de zero.

Raciocínio da Resolução: trivialmente, temos

$$D^\alpha t^0 \neq 0, \tag{2.209}$$

que não pode ser interpretada como uma taxa de variação, o que se constitui num primeiro inconveniente desta definição. Dessa forma, Center se equivocou, quando utilizou a definição de Liouville para mostrar que a derivada de uma constante de ordem meio é nula, já que uma função constante é da classe de Riemann e não da classe de Liouville.

O operador de cálculo fracionário de Liouville D^α_{0+} satisfaz a relação (2.154) com $a = 0$, enquanto o operador de cálculo de Liouville fracionário D^α_- da função potência $x^{\beta-1}$ e função exponencial $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ rende uma função do potência e função exponencial da mesma forma, respectivamente, ambas separadamente de um fator de multiplicação constante.

Propriedade 2.2.1.34 Seja $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$.

(a) Se $\mathrm{Re}(\beta) \geq 0$, então

$$(D^{\alpha}_{0+}(t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1} (\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0); \mathrm{Re}(\beta) > 0). \tag{2.210}$$

(b) Se $\beta \in \mathbb{C}$, então

$$(D^{\alpha}_{-} t^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta-\alpha-1} (\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0); \mathrm{Re}(\alpha+\beta-[\mathrm{Re}(\alpha)]) < 1). \tag{2.211}$$

(c) Se $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, então

$$(D^{\alpha}_{-} \mathrm{e}^{-\lambda t}(x) = \lambda^{\alpha} \mathrm{e}^{-\lambda x} (\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0). \tag{2.212}$$

Prova: As fórmulas (2.210) e (2.211) seguem de (2.154) e (2.155) para $a = 0$. A fórmula (2.211) é provada usando as definições (2.200) e (2.188) com α sendo substituído por $n - \alpha$, onde $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$. Usando estas relações e diferenciando a relação obtida n vezes, temos

$$(D^{\alpha}_{-} t^{\beta-1})(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I^{n-\alpha}_{-} t^{\beta-1})(x)$$

$$= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} x^{\beta+n-\alpha-1}\right]$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(1-n+\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha-1}.$$

Da propriedade da função gama (equação funcional) (2.56), temos

$$\Gamma(1-n+\alpha-\beta)\Gamma(\beta+n-\alpha) = \frac{\pi}{\mathrm{sen}[(\beta-\alpha+n)\pi]} = \frac{(-1)^n \pi}{\mathrm{sen}[(\beta-\alpha)\pi]}$$

e

$$\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)} = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\beta)} = \frac{\Gamma(1+\alpha-\beta)\mathrm{sen}[(\beta-\alpha)\pi]}{\pi}.$$

Substituindo estas duas últimas relações na anterior, obtemos (2.211). A propriedade (2.212) é bem conhecida (veja Samko et al. ([121], 1993)) e em Kilbas et al. ([158], publicado em 2006).

Integração por partes da derivada de Liouville

A fórmula para integração fracionária por partes para a derivadas fracionárias de Liouville, análoga àquela no Lema 2.2.1.19, é dada pelo resultado seguinte.

Lema 2.2.1.35 Se $\alpha > 0$, então a relação

$$\int_0^{\infty} f(x)(D^{\alpha}_{0+} g)(x) dx = \int_0^{\infty} g(x)(D^{\alpha}_{-} f)(x) dx. \tag{2.213}$$

é válida para funções f e g.

Prova: Encontrada em Kilbas et al. ([158], publicado em 2006).

Transformada de Laplace da derivada de Liouville

Vamos considerar a metodologia da transformada de Laplace na definição de Liouville para a derivada de ordem arbitrária.

Lema 2.2.1.36 Se $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, y(x) \in AC^n[0, b]$ para todo $b > 0$, estimada da forma

$$|y(x)| \leq B\mathrm{e}^{q_0 x}(x > b > 0) \tag{2.214}$$

garantida para constantes $B > 0$ e $q_0 > 0$ e se $y^{\kappa}(0) = 0(\kappa = 0, 1, \ldots, n-1)$, então a relação

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s). \tag{2.215}$$

é válida para $\mathrm{Re}(s) > q_0$.

Observação 2.2.1.37 Se $\mathrm{Re}(\alpha) > 0, n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, y(x) \in AC^n[0, b]$ para qualquer $b > 0$, a condição em (2.214) é satisfeita e existe os limites finitos

$$\lim_{x\to 0+}[D^{\kappa}I^{n-\alpha}_{0+}y(x)] \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty}[D^{\kappa}I^{n-\alpha}_{0+}y(x)] = 0(D = d/dx; \kappa = 0, 1, \ldots, n-1),$$

então de (2.202) e da transformada de Laplace de $(\mathcal{L}[D^k\varphi(t)](s)$ derivamos uma relação mais geral que em (2.215) da forma

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{n-\kappa-1}D^{\kappa}(I^{n-\alpha}_{0+}y)(0+)(\mathrm{Re}(s) > q_0). \tag{2.216}$$

Em particular, quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ e $y(x) \in AC[0, b]$ para qualquer $b > 0$, então

$$(\mathcal{L}D^{\alpha}_{0+}y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - (I^{1-\alpha}_{0+}y)(0+). \tag{2.217}$$

A transformada de Laplace da definição de Liouville depende de condições físicas sem interpretação imediata, o que representa o segundo grande inconveniente desta definição.

Derivadas de Liouville da função de Mittag-Leffler

A fórmula (2.174) envolvendo a função de Mittag-Leffler (2.90) também é válida para a derivada de fracionária de Liouville (2.199):

$$(D^{\alpha}_{0+}t^{\beta-1}E_{\mu,\beta}(\lambda t^{\mu})(x) = x^{\beta-\alpha-1}E_{\mu,\beta-\alpha}(\lambda x^{\mu}) \tag{2.218}$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ e $\mathrm{Re}(\mu) > 0$.

Quando $\mu = \alpha$ a fórmula (2.218) pode ser reescrita como segue:

$$(D^{\alpha}_{0+}t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}[\lambda t^{\alpha}])(x) = \frac{x^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \lambda x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{\alpha})(\lambda \in \mathbb{C}). \tag{2.219}$$

Uma relação semelhante a (2.219) é válida para a derivada fracionária de Liouville do lado esquerdo de (2.200) com $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\mathrm{Re}(\beta) > [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$:

$$(D^{\alpha}_{-}t^{\alpha-\beta}E_{\alpha,\beta}[\lambda t^{-\alpha}])(x) = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \lambda x^{-\alpha-\beta}E_{\alpha,\beta}(\lambda x^{-\alpha})(\lambda \in \mathbb{C}). \tag{2.220}$$

Os resultados em (2.219) e (2.220) para $\alpha > 0$ e $\beta > [\alpha] + 1$ foram provados por Kilbas e Saigo ([123], 1995) e apresentados em Kilbas e Saigo ([129], 1997) e Saigo e Kilbas ([135], 1998). Eles podem ser extentedidos para α e β complexos por continuação analítica.

Integrais e derivadas de Liouville no eixo real

A seguir apresentamos as definições e algumas propriedades das integrais e derivadas fracionárias de Liouville no eixo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. As integrais e derivadas fracionárias de Liouville em $\mathbb{R}$ são definidas semelhantemente àquelas no semieixo em (2.183), (2.184), (2.199) e (2.200).

Definição 2.2.1.38 Integrais de Liouville no eixo real

As integrais fracionárias de Liouville, semelhantes àquelas no semieixo em (2.183) e (2.184), tem a forma

$$(I_+^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{2.221}$$

e

$$(I_-^\alpha f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \tag{2.222}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

As expressões para $I_+^\alpha f$ e $I_-^\alpha f$ em (2.221) e (2.222) são chamadas integrais fracionárias de Liouville do lado direito e do lado esquerdo no eixo $\mathbb{R}$. Essas duas definições relacionam-se através da identidade de Parseval (Hilfer [139], em 2000).

A segunda definição de Liouville é obtida a partir da primeira através de uma mudança de variável (Miller e Ross [119], em 1993).

Quando $a = 0$ a equação (2.129) é equivalente a definição de integral de Riemann (sem a função complementar) no semieixo real e quando $a = -\infty$ a equação (2.129) equivale à definição de integral de Liouville no eixo real. Geralmente falamos de ${}_aI_x^\alpha$ como a integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de f, uma terminologia introduzida por Holmgrem (em [33], 1866).

Integração por partes da integral de Liouville no Eixo Real

A fórmula para integração fracionária por partes, análoga para aquela em Lema 2.2.1.29, para a derivada de Liouville fracionária em (2.196) no eixo real é dada pelo resultado seguinte.

Propriedade 2.2.1.39 Se $\alpha > 0$, então a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)(I_+^\alpha \psi)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(I_-^\alpha \varphi)(x)dx. \tag{2.223}$$

é válida para funções φ e ψ.

Definição 2.2.1.40 Derivada de Liouville no eixo real:

As derivadas fracionárias correspondentes àquelas em (2.199) e (2.200) são definidas por

$$(D_+^\alpha y)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_+^{n-\alpha} y\right)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{-\infty}^{x} \frac{y(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{2.224}$$

e

$$(D_-^\alpha y)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^n (I_-^{n-\alpha} y)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_{x}^{\infty} \frac{y(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.225}$$

onde $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, respectivamente.

As expressões para $D_+^\alpha f$ e $D_-^\alpha f$ em (2.224) e (2.225) são chamadas derivadas fracionárias de Liouville do lado direito e do lado esquerdo no eixo $\mathbb{R}$.

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então

$$(D_+^0 y)(x) = (D_-^0 y)(x) = y(x); \qquad (D_+^n y)(x) = y^{(n)}(x),$$

$$(D_-^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}), \tag{2.226}$$

onde $y^{(n)}(x)$ é a usual derivada de $y(x)$ de ordem n.

As derivadas fracionárias de Liouville $(D_+^\alpha y)(x)$ e $(D_-^\alpha y)(x)$ existem para funções $y(x)$ "suficientemente boas" $y(x)$; por exemplo, para funções $y(x)$ no espaço $\mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ de todas funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ com suporte compacto. Então, as propriedades, semelhante a propriedades 2.2.1.7 e 2.2.1.10, são válidas.

Integração por partes da derivada ordem arbitrária Liouville no eixo real

A fórmula para integração fracionária por partes, análoga para aquela em Lema 2.2.1.35 para a derivada de Liouville fracionária (2.224) é dada pelo resultado seguinte.

Propriedade 2.2.1.41: Se $\alpha > 0$, então a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(D_+^\alpha g)(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)(D_-^\alpha f)(x)dx. \tag{2.227}$$

é válida para funções f e g.

Vários autores, usualmente referem-se a integral seguinte como integral fracionária de Weyl.

Integração e derivação de Weyl

Weyl, em 1917, no campo teórico obteve, a partir da integral de Liouville no eixo real (2.221), uma outra definição para integral de ordem arbitrária como segue:

Definição 2.2.1.42 Integral de ordem arbitrária de Weyl: A integral fracionária de Weyl de ordem α de uma função f localmente integrável em $(-\infty, \infty)$, sendo $-\infty \leq a < x < \infty$ foi introduzida por Weyl ([48], 1917) e definida por

$$_xW_\infty^\alpha f(x) = _x I_\infty^\alpha f(x) = _x I_\infty^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{2.228}$$

ou ainda

$$_{-\infty}W_x^{\alpha} f(x) =_{-\infty} I_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \tag{2.229}$$

como as integrais de Weyl de ordem α, sendo definidas para f apropriada. A segunda integral acima é obtida da primeira através de uma mudança de variável (Miller e Ross [119], em 1993).

A mais importante diferença entre esta definiçao e a definição de Riemann-Liouville são os limites de integração e o núcleo, aqui sendo $(t-x)^{\alpha-1}$ e $(x-t)^{\alpha-1}$

Já a definição de derivada fracionária de Weyl formalizamos como se segue.

Definição 2.2.1.43 Derivada de ordem arbitrária de Weyl: Sejam $\alpha > 0$ e n o menor inteiro maior que β de forma que $\beta = n - \alpha > 0$. Se, para qualquer função y, I_{∞}^{α} existe e tem derivadas contínuas, definimos então a derivada arbitrária de Weyl de f de ordem α, D_{∞}^{α} por

$$D_{\infty}^{\alpha} y(x) = E^n I_{\infty}^{n-\alpha} y(x) = E^n \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{x}^{\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} y(t)dt \right] \tag{2.230}$$

A aplicação desta definição não depende da validade da lei dos expoentes, ou seja, não depende da ordem de integração e derivação.

A justificativa desta definição pode ser feita com o seguinte argumento: se $D^n y$ é uma equação diferencial não homogênea de n-ésima ordem e sua equação adjunta é $(-1)^n D^n y$, cuja solução com as condições iniciais $D^k y(c) = 0$, $0 \leq k \leq n-1$ é dada (conforme Debnath [151], 2004) por,

$$y(x) =_x W_c^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{x}^{c} (t-x)^{n-1} f(t)dt. \tag{2.231}$$

Substituindo n por α de forma que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, e $c = \infty$, podemos definir a integral arbitrária de Weyl (2.231). Para certo espaço de funções G consistindo em funções f que são diferenciáveis em todos os pontos e todas as suas derivadas são de $O(x^{-N})$ com $x \to \infty$ para todo N e $_xW_{\infty}^{\alpha} y(x)$ definida por (2.228) existe. Introduzindo $t - x = \xi$ na integral (2.228) resulta

$$_xI_{\infty}^{-\alpha} y(x) =_x W_{\infty}^{-\alpha} y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} (\xi)^{\alpha-1} y(\xi + x)d\xi. \tag{2.232}$$

Aplicando o operador D^n em ambos os lados da expressão (2.232) e, omitindo, por comodidade, as subscrições x e ∞ no operador de Weyl, temos

$$D^n W^{-\alpha} y(x) = W^{-\alpha} D^n y(x). \tag{2.233}$$

Semelhantemente, podemos provar que

$$E^n W^{-\alpha} y(x) = W^{-\alpha} E^n y(x) \tag{2.234}$$

onde $E^n = (-1)^n D^n$.

Se $y \in G$, a n-ésima integração da expressão (2.228) por partes fornece

$$W^{-\alpha} y(x) = W^{-(\alpha+n)} [E^n y(x)] \tag{2.235}$$

por (2.234). Temos

$$= E^n[W^{-(\alpha+n)}y(x)] \tag{2.236}$$

Daí emerge a derivada fracionária de Weyl de y de ordem $\alpha > 0$ na forma

$$D_{\infty}^{\alpha}y(x) = E^n I_{\infty}^{n-\alpha}y(x) = E^n\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_x^{\infty}(t-x)^{n-\alpha-1}y(t)dt\right]$$

Como queríamos justificar.

Derivação de Caputo

Para evitar os inconvenientes da derivada não nula de uma constante e de condições fisicamente não interpretáveis, Caputo (1969), em seu livro (Caputo [90], 1969), propôs uma nova definição para derivada de ordem arbitrária, baseada na definição de Riemann-Lioville, bastante semelhante a esta; contudo, com uma inversão na ordem das operações de integração e derivação. Apresentamos seguir as definições e algumas propriedades das derivadas de ordens arbitrárias no sentido de Caputo.

Definição 2.2.1.44 Derivadas de ordens arbitrárias de Caputo em intervalos finitos: Seja $[a, b]$ um intervalo finito do eixo real $\mathbb{R}$ e seja $D_{a+}^{\alpha}[y(t)](x) \equiv (D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ e $D_{b-}^{\alpha}[y(t)](x) \equiv (D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{C}(\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0)$ definida por (2.143) e (2.144), respectivamente. As derivadas fracionárias $({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ e $({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ de ordem $\alpha \in \mathbb{C}(\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0)$ em $[a, b]$ são definidas via derivada de Riemann-Liouville por

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{a+}^{\alpha}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\right)(x) \tag{2.237}$$

e

$$({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x) := \left(D_{b-}^{\alpha}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k\right]\right)(x), \tag{2.238}$$

respectivamente, onde

$$n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1 \qquad \text{para} \qquad \alpha \neq \mathbb{N}_0, \quad n = \alpha \qquad \text{e} \qquad \alpha \in \mathbb{N}_0. \tag{2.239}$$

Estas derivadas são chamadas derivadas fracionárias de Caputo de ordem α direita e esquerda, respectivamente.

Em particular, quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, as relações (2.237) e (2.238) tomam as formas seguintes:

$$({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x) := (D_{a+}^{\alpha}[y(t) - y(a)])(x) \tag{2.240}$$

e

$$({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x) := (D_{b-}^{\alpha}[y(t) - y(b)])(x) \tag{2.241}$$

Se $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ e $y(x)$ é uma função tal que as derivadas de Caputo de ordens arbitrárias $({}^C D_{a+}^{\alpha}y)(x)$ e $({}^C D_{b-}^{\alpha}y)(x)$ de ordens $\alpha \in \mathbb{C}(\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0)$ existem junto com as derivadas de Riemann-Liouville de ordem arbitrária $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ e $(D^{\alpha}_{b-}y)(x)$, então, conforme (2.145) e (2.147), elas são conectadas uma com a outra pelas relações seguintes

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) := (D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha}(n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1) \tag{2.242}$$

e

$$({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x) := (D^{\alpha}_{b-}y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}(n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1). \tag{2.243}$$

Em particular, quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, temos

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}, \tag{2.244}$$

e

$$({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}. \tag{2.245}$$

Se $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, então as derivadas de Caputo de ordem arbitrárias (2.237) e (2.238) coincidem com as derivadas de Riemann-Liouvile fracionárias (2.143) e (2.144) nos seguintes casos:

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = (D^{\alpha}_{a+}y)(x), \tag{2.246}$$

se $y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = 0(n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1)$; e

$$({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (D^{\alpha}_{b-}y)(x), \tag{2.247}$$

se $y(b) = y'(b) = \ldots = y^{(n-1)}(b) = 0(n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1)$.

Em particular, quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, temos

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) := (D^{\alpha}_{a+}y)(x), \qquad \text{quando} \qquad y(a) = 0, \tag{2.248}$$

e

$$({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x) := (D^{\alpha}_{b-}y)(x), \qquad \text{quando} \qquad y(b) = 0. \tag{2.249}$$

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ e a usual derivada $y^{(n)}(x)$ de ordem n existe, então $({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ coincidem com $y^{(n)}(x)$, enquanto $({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ coincide com $y^{(n)}(x)$ exatamente por um multiplicador constantes $(-1)^n$:

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = y^{(n)}(x) \qquad \text{e} \qquad ({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.250}$$

As derivadas de ordens arbitrárias de Caputo $({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ e $({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ são definidas para funções $y(x)$ de forma que as derivadas de ordens arbitrárias de Riemann-Liouville à direita (2.237) e (2.238) existam. Em particular, elas são definidas para $y(x)$ pertencente ao espaço de funções $AC[a,b]$ absolutamente contínuas definidas em (2.7). Deste modo as seguintes afirmações são válidas.

Teorema 2.2.1.45: Seja $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e seja n dado por (2.239). Se $y(x) \in AC^n[a,b]$, então os derivadas de Caputo fracionário $({}^C D^\alpha_{a+}y)(x)$ e $({}^C D^\alpha_{b-}y)(x)$ existe em quase todos pontos de $[a,b]$.
(a) Se $\alpha \notin \mathbb{N}_0, ({}^C D^\alpha_{a+}y)(x)$ e $({}^C D^\alpha_{b-}y)(x)$ são representadas por

$$({}^C D^\alpha_{a+}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: (I^{\alpha-n+1}_{a+} D^n y)(x) \tag{2.251}$$

e

$$({}^C D^\alpha_{b-}y)(x) := \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: (-1)^n (I^{n-\alpha}_{b-} D^n y)(x), \tag{2.252}$$

respectivamente, onde $D = d/dx$ e $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$.

Em particular, quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$ e $y(x) \in AC[a,b]$,

$$({}^C D^\alpha_{a+}y)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y'(t)dt}{(x-t)^\alpha} =: (I^{1-\alpha}_{a+} Dy)(x) \tag{2.253}$$

e

$$({}^C D^\alpha_{b-}y)(x) := -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y'(t)dt}{(t-x)^\alpha} =: (I^{1-\alpha}_{b-} Dy)(x). \tag{2.254}$$

(b) Se $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então $({}^C D^n_{a+}y)(x)$ e $({}^C D^n_{b-}y)(x)$ são representadas por (2.250). Em particular,

$$({}^C D^0_{a+}y)(x) := ({}^C D^0_{b-}y)(x) = y(x). \tag{2.255}$$

Prova: Seja $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Usando (2.237) e (2.143), integrando por partes a integral interna e diferenciando (que é possível pelas condições do teorema), temos

$$\begin{aligned}
&({}^C D^\alpha_{a+}y)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left\{ -\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \Big|_{t=a}^{x} + \right. \\
&\left. + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \frac{d}{dt} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] dt \right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[y'(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{k-1} \right] dt \\
&= \ldots = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \left[y^{(n-1)}(t) - y^{(n-1)}(a) \right] dt.
\end{aligned}$$

Usando novamente o argumento acima, derivamos

$$({}^C D^\alpha_{a+}y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} y^{(n)}(t)dt,$$

que rende o resultado em (2.251). A relação (2.252) é provada semelhantemente.

Se $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então (2.237), conforme a primeira fórmula em (2.145),

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right],$$

e do Lema 2.1.1.3 derivamos $({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x) := y^{(n)}(x)$, que rende o primeiro resultado em (2.250). A segunda é provada semelhantemente.

O Teorema 2.2.1.45 nos informa que a derivada de ordem arbitrária, segundo Caputo, é a integral de ordem arbitrária de uma derivada de ordem inteira.

A afirmação seguinte é análoga ao Teorema 2.2.1.45 para funções $y(x)$ no espaço $C^n[a,b]$ de funções continuamente diferenciáveis em $[a,b]$ até ordem n.

Teorema 2.2.1.46: Seja $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ e seja n dado por (2.239).Seja também $y(x) \in C^n[a,b]$. Então as derivadas de ordens arbitrárias de Caputo $({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x)$ e $({}^C D^{\alpha}_{b-} y)(x)$ são contínuas em $[a,b]$: $({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x) \in C[a,b]$ e $({}^C D^{\alpha}_{b-} y)(x) \in C[a,b]$.

(a) Se $\alpha \notin \mathbb{N}_0$, então$({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x)$ e $({}^C D^{\alpha}_{b-} y)(x)$ são representadas por (2.251) e (2.252), respectivamente. Além disso,

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(a) = ({}^C D^{\alpha}_{b-} y)(b) = 0. \tag{2.256}$$

Em particular, elas têm, respectivamente, as formas (2.253) e (2.254) para $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$.

(b) Se $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, então as derivadas de ordens arbitrárias $({}^C D^{n}_{a+} y)(x)$ e $({}^C D^{n}_{b-} y)(x)$ tem representações dadas em (2.250). Em particular, as relações em (2.255) são válidas.

Prova Dada em Kilbas et al. ([158], em 2006).

Observação 2.2.1.47: Para $n-1 < a < n (n \in \mathbb{N})$, a derivada $({}^C D^{\alpha}_{a+})(x)$ na forma (2.251) foi definida por Caputo ([85], em 1967) e apresentada em seu livro ([90], em 1969), por isso, as derivadas $({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x)$ e $({}^C D^{\alpha}_{b-} y)(x)$ são chamadas derivadas de Caputo. Nesta consideração, veja também Mainardi ([131], em 1997) e Podlubny ([137], em 1999, Seção 2.4.1).

Observação 2.2.1.48 Para $\alpha \geq 0$ e $y(x) \in AC^n[a,b]$, a relação da forma (2.251) foi provada por Diethelm ([140], 2000, Teorema 3.1) para a derivada fracionária $(D^{\alpha}_{*a} y)(x)$ definida por (2.237) com $n = [\alpha]$:

$$({}^C D^{\alpha}_{*a} y)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+} \left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right] \right)(x). \tag{2.257}$$

As derivadas de Caputo $({}^C D^{\alpha}_{a+} y)(x)$ e $({}^C D^{\alpha}_{b-} y)(x)$ têm propriedades análogas às derivadas de Riemann-Liouville fracionárias $(D^{\alpha}_{a+} y)(x)$ e $(D^{\alpha}_{b-} y)(x)$ dadas em (2.154) e (2.155), mas diferente daquelas em (2.156).

Propriedade 2.2.1.49: Seja $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e seja n dada por (2.239). Também seja $\mathrm{Re}(\beta) > 0$. Então as relações seguinte são válidas:

$$({}^C D^{\alpha}_{a+} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-1} (\mathrm{Re}(\beta) > n), \tag{2.258}$$

$$({}^C D^{\alpha}_{b-} (b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-1} (\mathrm{Re}(\beta) > n) \tag{2.259}$$

$$({}^C D^\alpha_{a+}(t-a)^k)(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad ({}^C D^\alpha_{b-}(t-a)^k)(x) = 0 (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.260}$$

Em particular,

$$({}^C D^\alpha_{a+}1)(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad ({}^C D^\alpha_{b-}1)(x) = 0 (k = 0). \tag{2.261}$$

Quando $\mathrm{Re}(\alpha) \notin \mathbb{N}_0$ e $\alpha \in \mathbb{N}$, os operadores de diferenciação fracionária de Caputo ${}^C D_{a+}$ e ${}^C D_{b-}$ fornecem operações inversas para os operadores de integração de Riemann-Liouville I^α_{a+} e I^α_{b-} dados em (2.129) e (2.130) à esquerda. Mas eles não têm tal propriedade quando $\mathrm{Re}(\alpha) \in \mathbb{N}_0$ e $\mathcal{I}(\alpha) \neq 0$.

O seguinte lema análogo do Lema 2.2.1.13 é válido. Esta afirmação mostra, também, que a diferenciação fracionária é uma operação inversa para a integração fracionária à esquerda.

Lema 2.2.1.50: Seja $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e seja $y(x) \in L_\infty(a,b)$ ou $y(x) \in C[a,b]$.

(a) Se $\mathrm{Re}(\alpha) \notin \mathbb{N}$ ou $\alpha \in \mathbb{N}$, então

$$({}^C D^\alpha_{a+} I^\alpha_{a+} y)(x) = y(x), \qquad \text{e} \qquad ({}^C D^\alpha_{b-} I^\alpha_{b-} y)(x) = y(x). \tag{2.262}$$

(b) Se $\mathrm{Re}(\alpha) \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{I}(\alpha) \neq 0$, então

$$({}^C D^\alpha_{a+} I^\alpha_{a+} y)(x) = y(x) - \frac{(I^{\alpha+1-n}_{a+} y)(a+)}{\Gamma(n-\alpha)} (x-a)^{n-\alpha} \tag{2.263}$$

e

$$({}^C D^\alpha_{b-} I^\alpha_{a+} y)(x) = y(x) - \frac{(I^{\alpha+1-n}_{b-}(b-)y}{\Gamma(n-\alpha)} (b-x)^{n-\alpha}. \tag{2.264}$$

Prova: Veja Samko et al. ([110], em 1987) e Kilbas et al. ([158], em 2006).

A próxima afirmação caracteriza a composição do operador de integração com o operador de diferenciação fracionários.

Lema 2.2.1.51: Seja $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e seja n dado por (2.239). Se $y(x) \in AC^n[a,b]$ ou $y(x) \in C^n[a,b]$, então

$$(I^\alpha_{a+} {}^C D^\alpha_{a+} y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \tag{2.265}$$

e

$$(I^\alpha_{b-} {}^C D^\alpha_{b-} y)(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k y^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k. \tag{2.266}$$

Em particular, se $0 < \mathrm{Re}(\alpha) \leq 1$ e $y(x) \in AC[a,b]$ ou $y(x) \in C[a,b]$, então

$$(I^\alpha_{a+} {}^C D^\alpha_{a+} y)(x) = y(x) - y(a) \qquad \text{e} \qquad (I^\alpha_{b-} {}^C D^\alpha_{b-} y)(x) = y(x) - y(b). \tag{2.267}$$

Prova: Veja Samko et al. ([110], em 1987) e Kilbas et al. ([158], em 2006).

Observação 2.2.1.52 Notamos que estes teoremas são formulados para $\alpha \geq 0$, mas o caso $\alpha = 0$ há necessidade de uma explicação adicional.

Definimos as derivadas de Caputo em um intervalo finito $[a, b]$ por (2.237) e (2.238) e mostramos nos Teoremas 2.2.1.45 e 2.2.1.46, que elas podem ser representados nas formas (2.250) ou (2.251) e (2.252), desde que $f(x) \in AC^n[a, b]$ e $f(x) \in C^n[a, b]$.

As fórmulas (2.251) e (2.252) podem ser usadas para as definições das derivadas de ordem arbitrárias de Caputo no semieixo $\mathbb{R}^+$ e no eixo geral $\mathbb{R}$. Deste modo a correspondente derivada de ordem arbitrária de Caputo de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$, ($\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$ no semieixo $\mathbb{R}^+$ e no eixo geral $\mathbb{R}$ podem ser definidas como seguem:

Definição 2.2.1.53 Derivadas de ordem arbitrária de Caputo no semieixo: No semieixo $\mathbb{R}^+$ podem ser definidas por

$$({}^C D^\alpha_{0+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}} \qquad (x \in \mathbb{R}^+) \tag{2.268}$$

e

$$({}^C D^\alpha_{-} y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha+1-n}} \qquad (x \in \mathbb{R}^+). \tag{2.269}$$

Definição 2.2.1.54 Derivadas de ordem arbitrária de Caputo no eixo: No eixo $\mathbb{R}$ estas derivadas podem ser definidas por

$$({}^C D^\alpha_{+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.270}$$

e

$$({}^C D{-}^\alpha y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha+1-n}} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.271}$$

respectivamente.

Quando $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$, as relações (2.268)-(2.269) e (2.270)-(2.271) tomam as seguintes formas:

$$({}^C D^\alpha_{0+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{y'(t)dt}{(x-t)^\alpha} \qquad (x \in \mathbb{R}^+) \tag{2.272}$$

$$({}^C D^\alpha_{-} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y'(t)dt}{(t-x)^\alpha} \qquad (x \in \mathbb{R}^+) \tag{2.273}$$

e

$$({}^C D^\alpha_{+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{y'(t)dt}{(x-t)^\alpha} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.274}$$

$$({}^C D^\alpha_{b-} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty \frac{y'(t)dt}{(t-x)^\alpha} \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.275}$$

Para $\alpha = n \in \mathbb{N}$ definimos as derivadas de Caputo $({}^C D^n_{0+} y)(x), ({}^C D^n_{-} y)(x)$ e $({}^C D^n_{+} y)(x)$, $({}^C D^n_{-} y)(x)$ por

$$({}^C D^n_{0+} y)(x) := y^{(n)}(x), ({}^C D^n_{-} y)(x) := (-1)^n y^{(n)}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^+) \tag{2.276}$$

e

$$({}^C D^n_{+} y)(x) := y^{(n)}(x), ({}^C D^n_{-} y)(x) := (-1)^n y^{(n)}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2.277}$$

As derivadas de Caputo $({}^C D_+^n y)(x)$ e $({}^C D_-^n y)(x)$ têm também propriedades análogas às de Liouville no semieixo real e no eixo real, quando observadas as suas retrições.

Propriedade 2.2.1.55: Se $\text{Re}(\alpha) > 0$ e $\lambda > 0$, então

$$({}^C D_+^\alpha \mathrm{e}^{\lambda t})(x) = \lambda^\alpha \mathrm{e}^{\lambda x} \tag{2.278}$$

e

$$({}^C D_-^\alpha \mathrm{e}^{-\lambda t})(x) = \lambda^\alpha \mathrm{e}^{-\lambda x}. \tag{2.279}$$

Derivada de Caputo da função de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler $E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha]$ é invariante com respeito à derivada de Caputo ${}^C D_{a+}^\alpha$, mas que não é o caso para a derivada de Caputo ${}^C D_-^\alpha$. De fato, as seguintes afirmações são válidas.

Lema 2.2.1.56: Se $\alpha > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então

$$({}^C D_{a+}^\alpha E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha])(x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha] \tag{2.280}$$

e

$$({}^C D_-^\alpha t^{\alpha-1} E_\alpha(\lambda t^{-\alpha}))(x) = \frac{1}{x} E_{\alpha,1-\alpha}(\lambda x^{-\alpha}). \tag{2.281}$$

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$,

$$(D^n E_n[\lambda(x-a)^n])(x) = E_n[\lambda(x-a)^n] \tag{2.282}$$

e

$$(D^n[t^{n-1} E_n(\lambda t^{-n})](x) = \frac{1}{x} E_{n,1-n}(\lambda x^{-n}) = \frac{\lambda}{x^{n+1}} E_n(\lambda x^{-n}). \tag{2.283}$$

Prova: As relações (2.280) e (2.281) são diretamente provadas usando a definição (2.85) da função de Mittag-Leffler E_α e por diferenciação termo-por-termo das séries nos lados esquerdo de (2.280) e (2.281).

Tranformada de Laplace da derivada de Caputo

A proposição seguinte, rende a transformada de Laplace da derivada fracionária de Caputo ${}^C D_{0+}^\alpha$.

Lema 2.2.1.57: Seja $\alpha > 0, n-1 < \alpha \leq n (n \in \mathbb{N})$ tal que $y(x) \in C^n(\mathbb{R}^+), y^{(n)} \in L_1(0,b)$ para todo $b > 0$ a estimativa (2.214) vale para $y^{(n)}(x)$, a transformada de Laplace $(\mathcal{L}y)(p)$ e $\mathcal{L}[D^n y(t)]$ existem e $\lim_{x\to+\infty}(D^k y)(x) = 0$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Então as seguite relações são válidas:

$$(\mathcal{L}{}^C D_{0+}^\alpha y)(s) = s^\alpha (\mathcal{L}y)(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{\alpha-\kappa-1}(D^\kappa y)(0). \tag{2.284}$$

ou ainda, noutra notação, temos

$$(\mathcal{L}[D_*^\beta f(x)] = s^\alpha F(s) - \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{\alpha-\kappa-1} f^{(\kappa)}(0). \tag{2.285}$$

Em particular, se $0 < \alpha \leq 1$, então

$$(\mathcal{L}^C D_{0+}^{\alpha} y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - s^{\alpha-1}y(0). \tag{2.286}$$

A proposição seguinte rende a transformada de Mellin da derivada fracionária de Caputo.

Transformada de Mellin da derivada de ordem arbitrária de Caputo

Semelhantemente, do Lema 2.2.1.36 e da observação da transformada de Mellin da derivadas de Liouville derivamos a transformada de Mellin das derivadas de ordens arbitrárias de Caputo ${}^C D_{0+}^{\alpha} y$ e ${}^C D_{-}^{\alpha} y$.

Lema 2.2.1.58: Seja $\alpha > 0, n-1 < \alpha \leq n (n \in \mathbb{N})$ tal que $y(x) \in C^n(\mathbb{R}^+), y(x) \in X_{s+n-\alpha}^1(\mathbb{R}^+)$ e exista $(\mathcal{M}y^{(n)})(s+n-\alpha)$ e $(\mathcal{M}y)(s-\alpha)$.

(a) Se $\mathrm{Re}(s) < 1 - \mathrm{Re}(n-\alpha)$, então

$$(\mathcal{M}^C D_{0+}^{\alpha} y)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha)$$
$$+\sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+\kappa+\alpha-n-s)}{\Gamma(1-s)}[x^{s+n-\alpha-\kappa-1}y^{(n-\kappa-1)}(x)]_0^{\infty}. \tag{2.287}$$

Em particular, quando $0 < \alpha < 1$,

$$(\mathcal{M}^C D_{0+}^{\alpha} y)(s) = \frac{\Gamma(1+\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha) + \frac{\Gamma(\alpha-s)}{\Gamma(1-s)}[x^{s-\alpha}y(x)]_0^{\infty}. \tag{2.288}$$

(b) Se $\mathrm{Re}(s) > 0$, então

$$(\mathcal{M}^C D_{-}^{\alpha} y)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha)$$
$$+\sum_{\kappa=0}^{n-1}(-1)^{n-\kappa} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+n-\alpha-\kappa)}[x^{s+n-\alpha-\kappa-1}y^{n-\kappa-1}(x)]_0^{\infty}. \tag{2.289}$$

Em particular, quando $0 < \alpha < 1$,

$$(\mathcal{M}^C D_{-}^{\alpha} y)(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\alpha)}(\mathcal{M}y)(s-\alpha) - \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+1-\alpha)}[x^{s-\alpha}y(x)]_0^{\infty}. \tag{2.290}$$

.

A definição de derivada de Riemann-Liouville é comumente usada em círculos matemáticos, enquanto a definição de Caputo é frequentemente preferível em problemas de interesse físico quando condições iniciais forem expressas em termos de derivadas de ordem inteira e são aplicados os métodos da transformada de Laplace.

Definimos na sequência a derivada de Grunwald-Letnikov, entre outras razões, por: ter vasta aplicabilidade em problemas numéricos; não depender da constante c, causadora de muita controvérsia; existir uma relação de equivalência entre as versões de Riemman-Liouville e Grünwald-Letnikov para diferenciação de ordem arbitrária real, conforme Podlubny ([137], 1999), onde são dadas condições exatas de equivalência destas duas abordagens e, finalmente, por apresentar o mesmo resultado da derivada de Riemann-Liouville e Caputo do cálculo da derivada de um polinômio não constante (conforme relato em Miller e Ross [119], 1993).

Diferenciação de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov

Damos as definições de derivadas de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov e algumas de suas propriedades como apresentado no livro de Samko et al. ([121], em 1993) e Kilbas et al. ([158], em 2006).

Primeiro, Grünwald, em 1867, unificou os resultados de Riemann e Liouville e introduziu a ideia de derivada de ordem arbitrária como o limite de uma certa soma. Depois, Post ([58], 1930) em 1930) usando quocientes de diferenças estendeu a definição de derivada arbitrária de Grünwald e definiu formalmente a diferenciação para operadores generalizados *y(D)*, onde D denota a diferenciação e y uma função apropriadamente restrita, quivalente na versão que segue.

Definição 2.2.1.59 Derivada de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov: Suponhamos y uma função definida em um intervalo, x um ponto fixo no interior deste intervalo, as derivadas nomeadas atualmente como derivadas de ordens arbitrárias α de Grünwald-Letnikov direita e esquerda $y_+^\alpha(x)$ e $y_-^\alpha(x)$ são definidas por

$$y_+^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha}(\alpha > 0) \tag{2.291}$$

e

$$y_-^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}(\alpha > 0), \tag{2.292}$$

respectivamente.

Justificativa

Esta definição é baseada na generalização da usual diferenciação de uma função $y(x)$ de ordem $n \in \mathbb{N}$ da forma

$$y^n(x) = \lim_{h\to0} \frac{(\Delta_h^n y)(x)}{h^n}. \tag{2.293}$$

Aqui $(\Delta_h^n y)(x)$ é uma diferença finita de ordem $n \in \mathbb{N}_0$ de uma função $y(x)$ com um passo $h \in \mathbb{R}$ e centrado no ponto $x \in \mathbb{R}$ definida em (2.297).

A propriedade (2.293) é usada para definir uma derivada de ordem arbitrária substituindo diretamente $n \in \mathbb{N}$ em (2.293) por $\alpha > 0$. Para isto, h^n é substituído por h^α, enquanto a diferença finita $(\Delta_h^n y)(x)$ é substituída pela diferença $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ de uma ordem arbitrária $\alpha \in \mathbb{R}$ definida pela série infinita seguinte:

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) := \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \binom{\alpha}{\kappa} y(x - \kappa h)(x, h \in \mathbb{R}; \alpha > 0), \tag{2.294}$$

onde $\binom{\alpha}{\kappa}$ são os coeficientes binomiais (2.64). Quando $h > 0$, a diferença (2.294) é chamada diferença de lado esquerdo, enquanto para $h < 0$ é chamada diferença de lado direito.

A série em (2.294) converge absoluta e uniformemente para todo $\alpha > 0$ e para toda função $y(x)$. A diferença de ordem arbitrária $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ tem as propriedades seguintes.

Propriedade 2.2.1.60: Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então é válida a propriedade do semigrupo

$$(\Delta_h^\alpha \Delta_h^\beta y)(x) = (\Delta_h^{\alpha+\beta} y)(x). \tag{2.295}$$

Propriedade 2.2.1.61: Se $\alpha > 0$ e $y(x) \in L_1(\mathbb{R})$, então a transformada de Fourier (2.116) de Δ_h^α é dada por

$$(\mathcal{F}\Delta_h^\alpha y)(x) = (1 - \mathrm{e}^{ixh})^\alpha (\mathcal{F}y)(x). \tag{2.296}$$

Em particular, quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, então, conforme (2.64) e (2.65), (2.294) coincide com (2.297):

$$(\Delta_h^n y)(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} (-1)^\kappa \binom{n}{\kappa} y(x - \kappa h)(x, h \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}). \tag{2.297}$$

Por (2.64) e (2.65), podemos definir a diferença $\Delta_h^\alpha(x)$ em (2.294) para $\alpha = 0$ por

$$(\Delta_h^0 f)(x) = f(x). \tag{2.298}$$

Seguindo (2.293) emergem as derivadas de ordens arbitrárias de Grünwald-Letnikov direita e esquerda $y_+^\alpha(x)$ e $y_-^\alpha(x)$ definidas em (2.291) e (2.292):

$$y_+^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{(\Delta_h^\alpha y)(x)}{h^\alpha} (\alpha > 0) \tag{2.299}$$

e

$$y_-^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{(\Delta_{-h}^\alpha y)(x)}{h^\alpha} (\alpha > 0), \tag{2.300}$$

respectivamente.

Desenvolvendo (2.299), rende a definição particular:

$$D^\alpha y(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{\kappa=0}^{n} (-1)^\kappa \frac{\Gamma(\alpha+1) y(x - \kappa h)}{\Gamma(\kappa+1)\Gamma(\alpha - \kappa + 1)} \tag{2.301}$$

desde que o limite existe.

Usando a identidade,

$$(-1)^\gamma \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha - \kappa + 1)} = \frac{\Gamma(\kappa - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)}, \tag{2.302}$$

o resultado (2.301) se torna

$$D^\alpha y(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{\Gamma(\kappa - \alpha)}{\Gamma(\kappa+1)} f(x - \kappa h). \tag{2.303}$$

Quando α é igual a um inteiro m, a definição (2.301) reduz-se à derivada de integral de ordem m como

$$D^m f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^m} \sum_{\gamma=0}^{n} (-1)^\gamma \binom{m}{\gamma} f(x - \gamma h) \tag{2.304}$$

onde $\binom{m}{\gamma}$ é o coeficiente do binômio usual.

O resultado (2.304) segue das definições clássicas de $f'(x), f''(x), ...$ como

$$Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x)}{h} \tag{2.305}$$

e

$$D^2 f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} \tag{2.306}$$

onde

$$\Delta f(x) = f(x - \gamma h) - f(x - (\gamma + 1)h) \tag{2.307}$$

As construções em (2.299) e (2.300) coincidem com as derivadas de ordem arbitrária de Marchaud ([57], em 1927)) para $y(x) \in L_p(\mathbb{R})(1 \leq p < \infty)$ (veja Samko et al. [121], em 1993, Teorema 20.4).

A definição (2.294) da diferença de ordem arbitrária $(\Delta_h^\alpha y)(x)$ assume que a função $y(x)$ é dada pelo menos no semieixo. Para a função $y(x)$ dada num intervalo finito $[a,b]$, tal diferença pode ser definida como uma continuação da função $y(x)$ truncada além de $[a,b]$:

$$(\Delta_h^\alpha y)(x) = (\Delta_h^\alpha y^*)(x) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (-1)^\kappa \binom{\alpha}{\kappa} y^*(x - \kappa h)(x, h \in \mathbb{R}; \alpha > 0), \tag{2.308}$$

onde

$$y^*(x) = \begin{cases} y(x), & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases} \tag{2.309}$$

É aceitável para reescrever a diferença de ordem arbitrária (2.308) em termos da função $y(x)$ propriamente, evitando sua continuação como uma função de diferença, nas formas

$$(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x) := \sum_{\kappa=0}^{[\frac{x-a}{h}]} (-1)^\kappa \binom{\alpha}{\kappa} y(x - \kappa h)(x \in \mathbb{R}; h > 0; \alpha > 0) \tag{2.310}$$

e

$$(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x) := \sum_{\kappa=0}^{[\frac{b-x}{h}]} (-1)^\kappa \binom{\alpha}{\kappa} y(x + \kappa h)(x \in \mathbb{R}; h > 0; \alpha > 0). \tag{2.311}$$

Então, em analogia às (2.299) e (2.300) as derivadas de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov de ordem $\alpha > 0$ em um intervalo finito $[a,b]$ são definidas por

$$y_{a+}^{(\alpha)}(x) := \lim_{h\to +0} \frac{(\Delta_{h,a+}^\alpha y)(x)}{h^\alpha} \tag{2.312}$$

e

$$y_{b-}^{(\alpha)}(x) := \lim_{h\to +0} \frac{(\Delta_{h,b-}^\alpha y)(x)}{h^\alpha}, \tag{2.313}$$

respectivamente. As derivadas de ordem arbitrária de Grünwald-Letnikov (2.312) e (2.313) coincidem com as derivadas de ordem arbitrária de Marchaud (Samko et al. [121], 1993, Teorema 20.6) e podem ser representadas nas formas a seguir:

$$y_{a+}^{(\alpha)}(x) := \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(x-a)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{y(x) - y(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt (0 < \alpha < 1) \tag{2.314}$$

e

$$y_{b-}^{(\alpha)}(x) := \frac{y(x)}{\Gamma(1-\alpha)(b-x)^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{y(x) - y(t)}{(t-x)^{1+\alpha}} dt (0 < \alpha < 1). \tag{2.315}$$

Aqui as igualdades são entendidas no sentido de uma convergência especial na norma $L_p(a,b)$.

De (2.314) e (2.315) obtemos as fórmulas seguintes da forma (2.156):

$$l^{\alpha}_{a+}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{\kappa=0}^{[\frac{x-a}{h}]} (-1)^{\kappa} \binom{\alpha}{\kappa} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}(0<\alpha<1), \tag{2.316}$$

e

$$l^{\alpha}_{b-}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{\kappa=0}^{[\frac{b-x}{h}]} (-1)^{\kappa} \binom{\alpha}{\kappa} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}(0<\alpha<1). \tag{2.317}$$

A definição de Grünwald-Letnikov e seus casos particulares são importantes do ponto de vista de numerosos problemas matemáticos aplicados. Alguns autores demonstraram que esta definição é uma ferramenta muito eficiente na resolução de problemas numéricos. Por exemplo: Lorenzo e Hartley, num artigo ([134], 1998), utilizaram esta definição para propor, numericamente, uma interpretação geométrica para a derivada de ordem arbitrária.

Ela também tem outra consequência: é muito importante para formulação de problemas aplicados de valores iniciais, fisicamente significantes, para equações diferenciais de ordem arbitrárias. Por exemplo, Podlubny ([137], 1999) usou a definição de Grünwald-Letnikov e suas variações para propor uma interpretação física para derivada de ordem arbitrária.

Cálculo de ordem arbtrária inicializado

O cálculo fracionário inicializado estuda a profunda relação existente entre uma função complementar e a escolha ótima para a constante c da fórmula (1.35) de Riemann ([20], 1847). Camargo ([167], 2007) apresenta uma leitura do trabalho de Lorenzo e Hartley ([134], 1998), que por sua vez apresentam um estudo profundo sobre a inicialização através de uma função complementar. E com base neste trabalho, Camargo mostra a necessidade de uma inicialização não constante, ou seja, a função Ψ, que é adicionada à integral de ordem arbitrária de Riemann, conforme equação (1.35), é uma função do tempo e não apenas uma constante, contrariando muitos autores renomados no assunto, que implicitamente defendem a inicialização constante na solução de equações diferenciais de ordem arbitrária, ou seja, sem a função complementar, ou com um conjunto de constantes, representando valores da integral e derivadas de ordem arbitrária (em $t=0$) fornecem uma representação adequada para os efeitos de memória (memória, aqui, é entendido como a referência ao período anterior ao que iniciamos a integração, ou seja, os valores de $t \leq c$ para que cada integral e derivada existam).

Prova 2.2.1.62 Inicialização não constante: A prova que procedemos abaixo, conforme os trabalhos anteriores, demonstra a necessidade de uma inicialização não constante. Sejam duas integrais de ordem α da função $f(t)$, ambas com inicialização constante, sendo uma inicializada em $t=a$ e outra em $t=c>a$ e mostremos que para que elas coincidam devemos introduzir uma função que depende do tempo e não uma constante.

Temos

$$ {}_aD_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\alpha}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \tag{2.318}$$

e

$$ {}_cD_t^{-\alpha}f(t) = \frac{1}{\alpha}\int_c^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau. \tag{2.319}$$

Considerando que $f(t)$ é nula para todo $t \leq a$, temos que o período entre $t = a$ e $t = c$ deve ser levado em conta de tal forma que as duas definições coincidam.

Seja a inicialização, Ψ, adicionada a ${}_cD_t^{-\alpha}f(t)$, isto é,

$$ {}_cD_t^{-\alpha}f(t) + \Psi \equiv_a D_t^{-\alpha}f(t), \qquad t > c. \tag{2.320}$$

Isolando Ψ na equação acima, escrevemos

$$\Psi =_a D_t^{-\alpha}f(t) -_c D_t^{-\alpha}f(t) \qquad t > c \tag{2.321}$$

daí, resulta

$$\Psi = \int_a^t (t-c)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \equiv_a D_c^{-\alpha}f(t). \tag{2.322}$$

Portanto a equação acima mostra que Ψ é uma função da variável independente t. Fazendo $\alpha = 1$ no último resultado, recuperamos o caso ordinário, ou seja,

$$\Psi = \int_a^c f(\tau)d\tau.$$

Com base nestas ideias os autores discutem as definições para o cálculo inicializado das definições de Riemann-Liouville e Caputo e concluem que devido a derivada de Caputo dada por (2.237) e (2.238) incorporar o valor da função e de suas derivadas de ordem inteiras e menores que α em $t = 0^+$, ou seja, os efeitos de memória, e uma vez que a subtração do polinômio de Taylor de grau $m - 1$ implica na regularização da derivada de ordem arbitrária, a mesma não nescessita de função de inicialização.

Como estamos motivados a tratar, a priori, problemas analíticos via equações diferenciais de ordens arbitrárias parciais, vamos nos concentrar nas derivadas de ordens arbitrárias parciais de Riemann-Liouville e Caputo.

Definição 2.2.2.5 Derivada parcial de Caputo: A derivada parcial de Caputo pode ser definida por

$$D_t^\alpha y(t,x) \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}y(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_a^t \frac{y^{(n)}(\tau,x)}{(x-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, & \text{se} \quad n-1 < \alpha < n \\ \\ y^{(n)}(t,x), & \text{se} \quad \alpha = n \in N \end{cases} \tag{2.323}$$

com $y^{(n)}(t,x)$ denotando a derivada parcial de ordem inteira n em relação a variável t. Nesta forma pode-se unificar as definições de integrais e derivadas de ordem arbitrária α, $\mathrm{Re}(\alpha) \neq 0$ e para $n \in N$ e se fala frequentemente diferintegral de y de ordem arbitrária. Este processo também é chamado integrodiferenciação fracionária.

Além da definições de operadores fracionários anteriores, muitas outras de suas modificações e generalizações foram usadas na literatura (Samko et al. [121], em 1993). E hoje existem um grande número de outros operadores de cálculo fracionário de uma e várias variáveis que preservam as propriedades de memória diferente. Alguns destes outros operadores de cálculo fracionário são: Erdélyi-Kober, Hadamard, Riesz, dentre outros, cujas definições podem ser encontradas em Samko et al. ([110], em 1987); Miller e Ross ([119], em 1993); Samko et al. ([121], em 1993) e Kilbas et al. ([158], em 2006)). Além disso, é possível introduzir ou definir novos operadores singulares com memória longa e propriedades não locais. Depois de caracterizar as integrais e derivadas de ordem arbitrárias, descritas anteriormente vamos, através de comparações estabeler argumentos que justificam a adoção da derivada de Caputo na procura de soluções analíticas de equações diferenciais.

2.2.2 Adoção da derivada de Caputo

Como vimos, em consequência da comutatação da ordem da derivada de ordem inteira e a integral de ordem arbitrária, a derivada de uma função constante não coincide para as duas definições: para definição de Riemann-Liouvile, resultou não nula; enquanto para Caputo, igual a zero. Matematicamente, para alguns autores, o resultado da derivada de uma função constante ser diferente de zero, constitui-se num inconveniente da definição de Riemann-Liouville, pois não pode ser interpretada como uma taxa de variação.

Fisicamente, alguns autores como Chen e Holm ([149], 2003), baseados na interpretação física do fato de que afirmar que a derivada de uma função constante não é nula, significaria que em um sistema em equilíbrio a energia não se dissipa, por conseguinte, julgam que a derivada de ordem arbitrária de Caputo é mais conveniente que a de Riemann-Louville. Consequentemente, as transformadas de integrais de Caputo dependem de condições fisicamente interpretáveis, enquanto que a de Riemann-Liouville de condições físicas sem interpretação imediata, o que representa outro inconveniente desta definição. Outro argumento que justifica a adoção da derivada de Caputo é a teoria da inicialização, vista anteriormente, uma vez que a mesma não necessita da função de inicialização.

Com estes argumentos e o fato de vários estudiosos terem aplicado a definição de Caputo com sucesso em diversas áreas do conhecimento, a mesma parece ser a mais adequada para, pelo menos, abordar o estudo das equações diferenciais de ordens arbitrárias.

Conclusões

Esta dissertação teve como objetivo tratar da contextualização história e as maneiras de se introduzir o conceito de derivada fracionária, associadas à teoria do cálculo de ordem arbitrária. Com base na abordagem feita, o cálculo fracionário é uma generalização do cálculo tradicional que nos leva a conceitos e ferramentas semelhantes, mas com uma aplicabilidade muito mais ampla. Pode ser considerado um tópico antigo por ser do tempo de Newton e Leibniz, porém pode ser considerado recente, pois ganhou popularidade e importância considerável durante as últimas três décadas, devido principalmente, às suas numerosas aplicações demonstradas em diversos campos difundidos da ciência e engenharia. Seu desenvolvimento é nada convencional, pois está além do senso comum e, às vezes, é colocado à parte.

No Capítulo 1, efetuamos um levantamento histórico do cálculo integral e diferencial de ordem arbitrária com o intuito de justificar sua importância nos dias de hoje. Nele abordamos, de forma geral, as três questões básicas do cálculo fracionário, que fascinam a todos desde 1695: o que queremos dizer por derivada e integral de ordens arbitrárias; como se poderia abordar o problema de achar uma solução de uma equação diferencial de ordem arbitrária, seja ela ordinária que parcial e onde podemos aplicar os operadores de cálculo de ordem arbitrária.

No Capítulo 2, elaboramos um estudo envolvendo as diversas maneiras de se introduzir a integral e a derivada fracionárias de ordens arbitrárias. Neste capítulo, formalizamos matematicamente a diferenciação e integração de ordens arbitrárias, onde discutimos as definições e algumas propriedades das integrais e derivadas de ordens arbitrárias, particularmente, as definições de Riemann, Riemann-Liouville, Liouville, Weyl, Grünwald-Letnikov e Caputo, elucidando e justificando a importância de cada uma delas nas aplicações envolvendo equações diferenciais, comparando-as de modo a se concentrar na formulação de Caputo. Nesta comparação, verificamos que a definição da derivada de Riemann-Liouville é a mais usada e conhecida porém, possui dois inconvenientes: a derivada de uma constante é diferente de zero (o que matematicamente não poderia ser interpretada como uma taxa de variação e fisicamente significaria que em um sistema em equilíbrio a energia não se dissipa) e suas transformadas integrais dependem de condições físicas com interpretação associada a um problema específico, apenas. Já a derivada de Caputo, embora seja baseada na definição de Riemann-Liouville, evita estes problemas, ou seja, a derivada de Caputo de uma função constante é nula e a transformada de Laplace depende de condições fisicamente interpretáveis.

Por outro lado, conforme a teoria da inicialização, a derivada formulada por Caputo, não necessita da função de inicialização. Por conseguinte, vários pesquisadores no assunto julgam que a derivada de ordem arbitrária de Caputo é mais precisa do que a de Riemann-Louville e parece ser a mais adequada para pelo menos no estudo das equações diferenciais de ordem arbitrárias, onde devemos, em geral, interpretar a solução. Devido a grande importância desta definição, uma continuação natural deste trabalho, o objetivo é discutir uma aplicação real da derivada conforme introduzida por de Caputo.

Por outro lado, a fim de disseminarmos o assunto, temos por objetivo organizar uma Semana de Matemática, junto à Universidade Estadual do Maranhão, onde uma seção será dedicada especificamente ao Cálculo de Ordem Arbitrária e suas possíveis aplicações. Com esta proposta temos a intenção de, na medida do possível, influenciar jovens a participarem de programas de Iniciação Científica sob nossa orientação.

Referências Bibliográficas

[1] G. W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany, to G. A. L'Hospital, September 30, 1695, in Mathematische Schriften, Vol. 2, pp. 301-302, Olms Verlag, Hildesheim, Germany, 1962. First published in 1849, reprinted 1962, (1695).

Leibniz escreveu "Deste modo segue que $d^{1/2}x$ será igual a $d^{1/2}x = x\sqrt{dx : x}$, um paradoxo aparente, do qual consequências úteis um dia serão extraídas".

[2] G. W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany, to Johann Bernoulli, December 28, 1695, in Mathematische Schriften, reprinted 1962, Olms Verlag, Hildesheim, Germany 3, 226, (1695).

Leibniz, em uma correspondência com Johann Bernoulli, faz menções às derivadas de "ordem geral".

[3] G. W. Leibniz, Letter from Hanover, Germany, May 28, 1697 to John Wallis, Leibnizen Mathematische Schriften, Vol. 4, p. 25, Olms Verlag, Hildesheim, Germany, 1962. First published in 1859, reprinted in 1962, (1697).

Nesta correspondência com John Wallis, Leibniz discute o produto infinito de Wallis para o número π.

[4] L. Euler, *De Progressionibus Transcentibus, sev Quarum Termini Algebraice Dari Nequeunt*, Comment. Acad. Sci. Imperialis Petropolitanae 5, 38-57, (1730).

Na página 55: Relativo as progressões transcendentais cujos termos não podem ser dados algebricamente, Euler escreveu, "Quando n é um inteiro positivo, a relação $d^n p$, onde p é uma função de x, para dx pode sempre ser expressa algebricamente.

[5] J. L. Lagrange, *Sur une nouvelle espéce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantitès variables*, Oeuvres de Lagrange, Vol. 3, pp. 441-476. Gauthier-Villars, Paris, 1849. First appeared in Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. Belles-Lett. Berlim 3, 185-206, (1772).

A contribuição de Lagrange neste trabalho foi a lei dos exponentes para operadores de ordem inteira.

[6] P. S. Laplace, Théorie Analytique des Probabilitès, Courcier, Paris, 1820. First appeared in (1812).

Nas páginas 85 e 186 da terceira edição, Laplace escreve expressões para certas derivadas fracionárias.

[7] S. F. Lacroix, Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, 2nd ed., Vol. 3 pp. 409-410. Courcier, Paris, (1819).

Neste texto de 700 páginas duas páginas são devotadas ao cálculo fracionário. Lacroix desenvolve uma fórmula para a diferenciação fracionária para a derivada de ordem n de v^m por indução.

[8] J. B. J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, Oeuvres de Fourier, Vol. 1, p. 508. Didot, Paris, (1822).

Fourier faz a seguinte generalização:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha \cos\left[t(x-\xi)+\frac{\pi\alpha}{2}\right] dt,$$

e a condição de que o número α será considerado como uma quantidade qualquer positiva ou negativa.

[9] N. H. Abel, *Solution de quelques problémes et l'aide d'intégrales définites*, Oeuvres Completes, Vol. 1, pp. 16-18. Grondahl, Christiana, Norway, 1881. This papers first appeared in Mag. Naturvidenkaberne (1823).

Abel foi provavelmente o primeiro a dar uma aplicação de cálculo fracionário. Ele usou derivadas de ordem arbitrária para resolver o problema da tautócrona (isócrona). A integral com que ele trabalhou foi:

$$T = \int_0^\eta (\eta - t)^{-1/2} f(t)dt$$

que é justamente da mesma forma que Riemann costumava definir operações fracionárias.

[10] J. Liouville, *Mémoire sur quelques Quéstions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quéstions*, J. Ecole Polytech. 13, Section 21, pp. 1-69, (1832).

O primeiro estudo importante do cálculo fracionário começa com Liouville. Na pag. 3, Liouville considera $\left(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\right)\mathrm{e}^{2x}$. Nesta memória, são resolvidos alguns problemas em mecânica e geometria pelo uso de operaçes fracionárias.

[11] J. Liouville, *Mémoire sur le Calcul des différentielles à indices quelconques*, J. Ecole Polytech. 13, Section 21, pp. 71-162, (1832).

Na página 94, Liouville considera a existência de uma função complementar para ser adicionada à definição de uma operação fracionária. Liouville foi levado ao erro nesta área particular. Na página 117, ele expõe um método para a derivada fracionária de um produto de duas funções.

[12] J. Liouville, *Mémoire sur l'intégration de l'équation* $(mx^2+nx+p)d^2y/dx^2+(qx+r)dy/dx+sy=0$ *et l'aide des différentielles à indices quelconques*, J. Ecole Polytech. 13, Section 21, pp. 163-186, (1832).

[13] G. Peacock, *Report on the recent Progress and Present State of Affairs of Certain Branches of Analysis*, Rep. Britsh Assoc. Advancement Sci. 185-352.

Ele enunciou o princípio da permanência de equivalentes formas, depois ecoou por Kelland em 1846. Peacock foi conduzido ao erro sobre o assunto de operaçẽs fracionárias por supor que o princípio acima declarado era válido para todas as operações simbólicas. Por exemplo, embora $DD^{-l} = D^0, D \neq \frac{1}{D^{-1}}$, onde $D = d/dx$.

[14] J. Liouville, *Mémoire sur une formule d'analyse*, J. Reine Angew. Math.(Crelle's Journal) 12, 273-287, (1834).

Liouville discute o problema da tautócrona.

[15] S. S. Greatheed, *On General Differentiation I.* Cambridge Math. J., **1**, 11-21. *On General Differentiation II*, Cambridge Math. J., **1**, 109-117; *On the Expansion of a Function of a Binomial*, Cambridge Math. J., **1**, 67-74, (1839).

Nos primeiros dois documentos acima, Greatheed usa a definição de Liouville para desenvolver fórmulas para a diferenciação fracionária. No terceiro trabalho, suplementa o teorema de Taylor pelo uso de derivadas fracionárias.

[16] D. F. Gregory, *Examples of the Processes of the Differential and Integral Calculus*, 1st ed., p. 350, 2nd ed., 1846, p. 354. J. J. Deighton. Cambridge, England, (1841).

Gregory foi provavelmente o fundador do que foi então chamado o cálculo de operações. Ele dá a solução da equação do calor

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{dz}{dy}$$

em operador simbólico da forma:

$$z = A\mathrm{e}^{\alpha\beta^{\frac{1}{2}}} + B\mathrm{e}^{-\alpha\beta^{\frac{1}{2}}},$$

onde $\beta = a^{-1}\frac{d}{dx}$. Esta forma foi mais tarde usada por Heaviside.

[17] A. De Morgan, *The Differential and Integral Calculus Combining Differentiation*, Baldwin and Cradock, London, published under the superintendence of the Society for the diffusion of useful knowledge. First published in twenty-five parts, (1842).

Neste longo texto, De Morgan dedica três páginas ao cálculo fracionário. Ele afirma que nem o sistema de operações fracionárias como dado por Peacock nem aquele de Liouville tem qualquer reivindicação para ser considerado como dando a forma $D^u x^n$, entretanto qualquer uma pode ser uma forma. A controvérsia acima dos diferente sistemas de operações fracionárias foi evidenciada por Center, e nas últimas décadas do século 19, foi novamente levantada por Post.

[18] G. Boole, *On a general method in analysis*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **134**, 225, (1844).

Boole, faz uso do cálculo fracionário para resolver problemas e desenvolve métodos simbólicos para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes.

[19] P. Kelland, *On General Differentiation*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, **16**, 241-303 (1846).

Kelland admite que o princípio da permanência de equivalentes formas, declarado para álgebra, é válido para todas as operações simbólicas. Este princípio foi usado antes por Peacock e Boole em *On a General Method in Analysis*, um trabalho que desenvolveu a teoria formal de operadores.

[20] B. Riemann, *Versuch einer Auffassung der Integration und Differentiation*, Gesainmelte Werke, 1876. ed. publ. posthumously, pp. 331-344; 1892 ed., pp. 353 - 366. Teubner, Leipzig. Also in Collected Works (H. Weber, ed.), pp. 354-360. Dover, New York, 1953, (1847).

Riemann buscou uma generalização da expansão da série de Taylor e derivou a seguinte definição para a integração fracionária:

$$\frac{d^{-\gamma}}{dx^{-\gamma}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_c^x (x-k)^{\gamma-1}u(k)dk.$$

Hoje, esta definição está no uso comum como uma definição para a integração fracionária mas com a função complementar tomada a exame para ser idêntica a zero e o limite inferior de integração c é geralmente zero.

[21] C. J. Hargreave, *On the Solution of Linear Differential Equations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, **138**, 31-54, (1848).

Este trabalho é notável porque parece ser o primeiro a generalizar a regra de Leibniz para derivada de ordem n de um produto: $D_x^n[(f(x)g(x)]$, sendo n um inteiro, generalizado para

$$D_x^{\alpha}[(f(x)g(x)] = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\gamma!\Gamma(\alpha-\gamma+1)} D^{\alpha-r} f(x) D^{\gamma} g(x)$$

sendo α arbitrário.

[22] W. Center, *On the Value of* $(\frac{d}{dx})^{\alpha}x^0$ *When* α *Is a Positive Proper Fraction*, Cambridge and Dublin Math. J., **3**, 163-169, (1848).

Center considera a derivada fracionária de x^0 e confronta os sistemas de Peacock e de Liouville.

[23] W. Center, *On Differentiation with Fractional Indices, and on General Differentiation*, Cambridge and Dublin Math. J., **3**, 274-285, (1848).

[24] W. Center, *On Fractional Differentiation*, Cambridge and Dublin Math. J., **4**, 21-26, (1849).

[25] J. Liouville, *Sur une formule pour les différentielles à indices quelconques l'occasion d'une Mémoire de M. Tortolini*, J. Math. Pures Appl., **20**, páginas não numeradas, (1855).

Liouville adiciona à sua discussão uma definição de série para uma derivada fracionária.

[26] H. R. Greer, *On Fractional Differentiation*, Quart. J. Math. Oxford, **3**, 327-330, (1859).

Greer desenvolve fórmulas para as semiderivadas fracionárias de funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ usando como ponto de partida o desenvolvimento de Liouville $d^{1/2}e^{ax} = a^{1/2}e^{ax}$. Ele também lida com diferenças finitas de ordem $\frac{1}{2}$, $\Delta^{\frac{1}{2}}$.

[27] Z. Wastchenxo, *On Fractional Differentiation*, Quart. J. Math., **4**, 237-243, (1861).

As fórmulas adicionais para aquelas de Greer acima são desenvolvidas.

[28] H. Holmgren, *On differentialkalkylen med indices af havd natur som helst*, Kongliga Svenska Ventenkaps-Akademiens Handlingar, **5**, 1-83 (1865).

Holmgren tomou a mesma representação integral admitida por Riemann em 1847 como seu ponto de partida para uma monografia em diferenciação fracionária.

[29] H. Holmgren, *Sur l'intégration de l'équation différentielle*

$$(a_2 + b_2x + c_2x^2)d^2y/dx^2 + (a_1 + b_1x)dy/dx + a_0y = 0,$$

Kongliga Svenska Ventenkaps-Akadamiens, **7**, 1-58, (1867).

[30] A. K. Grünwald, *Ueber begrenzte Derivationen und deren Anwendung*, Z. Math. Phys., **12**, 441-480, (1867).

Uma das três aplicações é a inversão p. 478. Se θ for uma função conhecida de x, a seguir pelas operações fracionárias uma pode determinar a função desconhecida *f(t)* na equação integral

$$\theta = \int_0^x (x-t)^p(t)dt.$$

[31] A. V. Letnikov, *Theory of Differentiation of Fractional Order*, Mat. Sb., **3**, 1-68, (1868).

Letnikov prova para as ordens arbitrárias, pp. 56-58, que:

$$[D^qD^pf(x)]_{x_0}^x = [D^{q+p}f(x)]_{x_0}^x.$$

[32] A. V. Letnikov, *Historical Development of the Theory of Differentiation of Fractional Order*, Mat. Sb., **3**, 85-119, (1868).

Letnikov discute os trabalhos de Liouville, Peacock e Kelland.

[33] N. Y. Sonin, *On differentiation with arbitrary index*, Mat. Sb., **6**, 1-38, (1869).

[34] A. V. Letnikov, *An Explanation of Fundamental Notions of the Theory of Differentiation of Fractional Order*, Mat. Sb., **6**, 413-445, (1872).

O tema principal aqui é a generalização da fórmula integral de Cauchy.

[35] H. Laurent, *Sur le calcul des dérivées à indices quelconques*, Nouv. Ann. Math., **3**, 240-252, (1884).

Laurent generaliza a fórmula integral de Cauchy. Ele trabalha na regra generalizada do produto de Leibniz, mas deixa o resultado na forma de integral.

[36] P. A. Nekrassov, *General Differentiation*, Mat. Sb., **14**, 45-168, (1888).

Usando o proposto por Liouville como ponto de partida para a diferenciação, $\frac{d^p \mathrm{e}^{mx}}{dx^p} = m^p \mathrm{e}^{mx}$, de ordem p, Nekrassov, na página 152, determina a derivada de ordem arbitrária de $(x-a)^q$.

[37] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur developpement de Taylor*, J. Math. Pures Appl, , 101-186. (1892).

[38] O. Heaviside, *Electrical Papers*, The Macmillan Company, London, (1892).

[39] O. Heaviside, *On Operators in Physical Mathematics*, Proc. Roy. Sci. London, **52**, 504-529 (1893); **54**, 105-143, (1894).

[40] O. Heaviside, *Electromagnetic theory*, Vol. 2. The Electrician printing and publishing company, ltd., London. Reprinted by Benn, London 1922, (1899).

[41] R. E. Moritz, *On the Generalization of the Differentiation Process*, Amer. J. Math., **24**, 257-302, (1902).

Aqui usa-se muitos símbolos novos e condições que fazem este trabalho extremamente difícil de ser lido.

[42] S. Pincherle, *Sulle derivate ad indice qualunque*, Mem. Reale Accad. Inst. Sci. Bologna, **9**, 745-758, (1902).

[43] G. M. Mittag-Leffler, *Sur La Nouvelle fonction $E_\alpha(x)$*, C. R. Acad. Sci. Paris, **137** 554-558, (1903).

[44] G. M. Mittag-Leffler, *Sopra la funzione $E_\alpha(x)$*, Rend. Accad. Lincei, Ser. 5, **13**, 3-5, (1904).

[45] A. Wiman, *ï¿$\frac{1}{2}$berden fundamentalsatz in der theorie der funktionen $E_\alpha(x)$*, Acta Math., **29**, 191-201, (1905).

[46] G. M. Mittag-Leffler, *Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene*, Acta Math., **29**, 101-182, (1905).

[47] G. H. Hardy, *On Some Properties of Integrais of Fractional Order*, Messenger Math., **47**, 145-150, (1917).

Hardy examina algumas propriedades especiais, mas naturais das diferintegrais das funções que pertencem às classes de Lebesgue e de Lipschitz.

[48] H. Weyl, *Bemerkungen zum begriff des differentialquotienten gebrochener ordnung*, Zurich Naturf. Ges., **62**, 296-302, (1917).

Weyl, assim como Hardy, examina algumas propriedades especiais, mas naturais das diferintegrais das funções que pertencem às classes de Lebesgue e de Lipschitz.

[49] E. Post, *Discussion of Problems 360 and 433*, Amer. Math. Monthly, **26**, 37-39, (1919).

Quando duas soluções diferentes são apresentadas ao Problema 433, Post aproveita a oportunidade de responder o Problema 360 ao mesmo tempo.

[50] T. J. I. Bromwich, *Examples of Operational Methods in Mathematica1 Physics*, Philos. Mag., **37**, 407-419, (1919).

Ele declara que o propósito deste documento é encorajar o uso de métodos operacionais na solução de problemas físicos. Na maneira de abordar a equação do calor e problemas de indução, Bromwich é levado a algumas regras gerais que confirmam a precisão (exatidão) dos métodos de Heaviside.

[51] E. J. Berg, *Heaviside's Operators in Engineering and Physics*, J. Franklin Inst., **198**, 647-702, (1924).

Berg aplicou os operadores de Heaviside em engenharia e física.

[52] H. T. Davis, *Fractional Operations as Applied to a Class of Volterra Integral Equations*, Amer. J. Math. **46**, 95-109, (1924).

[53] J. A. Tenreiro Machado, *A Probabilistic Interpretation of the Fractional-Order Differentiation*, J. Fract. Cal. & Appl. Anal., **6**, 73-80, (2003).

[54] J. A. Tenreiro Machado, *Fractional Derivatives: Probability Interpretation and Frequency Response of Rational Approximations*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations, Elsevier, **14**, 3492-3497, (2009).

[55] J. Tenreiro Machado, Virginia Kyriakova and Francesco Mainardi, *Recent History of Fractional Calculus*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, elsevier, (in press), (2010).

[56] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some Properties of Fractional Integrals*, Proc. London Math. Soc., **24**, 37-41, (1925).

Hardy também examinou em alguns documentos especiais, mas natural, as propriedades das diferintegrais (integrais e diferenciais) das funções que pertencem às classes de Lebesgue e de Lipschitz.

[57] A. Marchaud, *Sur les dérivees et sur les differences de fonctions des variables réeles*, F. Math. Pure Appl., **6**, 337-425, (1927).

[58] E. L. Post, *Generalized Differentiation*, Trans. Amer. Math. Soc., **32**, 723-781, (1930).

Post usou quocientes de diferenças para definir a diferenciação para operadores generalizados $f(D)$, onde D denota a diferenciação e f uma função apropriadamente restrita.

[59] Y. Watanabe, *Notes on the Generalized Derivative of Riemann-Liouville and its Application to Leibniz's Formula*, Tôhoku Math. J., **34**, 8-41, (1931).

[60] H. T. Davis, *The Theory of Linear Operators*, Principia Press, Bloomington, Indiana, (1936).

Este texto contém uma bibliografia extensa da teoria do operador nas páginas 571-616. Davis desenvolve o cálculo fracionário nas páginas 64-75 fornece aplicações nas páginas 276-292.

[61] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Chelsea Publishing Company, New York, (1986).

[62] A. Erdèlyi, *Transformation of Hypergeometric Integrais by Means of Fractional Integration by Parts*, Quart. J. Math. Oxford, **10**, 176-189, (1939).

Erdèrlyi deu definições das diferintegrais com respeito às funções arbitrárias.

[63] A. Erdèlyi, *On fractional integration and its applications to the theory of Hankel transforms*, Quart. Math., **11**, 293-303, (1940).

[64] H. Kober, *On Fractional Integrals and Derivatives*, Quart. J. Math. Oxford, **11**, 193-211, (1940).

Na primeira parte do documento, Kober estende alguns resultados de Hardy e de Littlewood de 1925. Na segunda parte do documento, ele lida com transformações de Mellin e também com um teorema de singularidade para uma solução para a equação

$$g(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt.$$

[65] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le Problème de Cauchy*, Acta Math., **81**, 1-223, (1949).

Este trabalho, em colaboração com Hagstrom, foi começado em 1933. Os aspectos fundamentais do cálculo fracionário são deixados na pp. 10-16. O restante do texto trata dos vários aspectos da integral fracionária

$$I^v f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_a^x (x-t)^v f(t)dt.$$

na teoria dos potenciais, do expansão de Lorentz da teoria relativista e da equação de onda no espaço de Riemann.

[66] N. Stuloff, *Die Differentiation beliebiger reelen Ordnung*, Math. Ann., **122**, 400-410, (1950).

As diferenças de ordem fracionária são discutidas:

$$\Delta^\alpha x_n = \Sigma_{v=0}^{\infty} (-1)^v \binom{\alpha}{v} x_{n+v}.$$

[67] B. Kuttner, *Some Theorems on Fractional Derivatives*, Proc. London Math. Soc., **3**, 480-497, (1953).

Kuttner considerou a relação entre as seguintes integrais:

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\Gamma(n-k)}\int_0^x (x-t)^{n-k-1}f(t)dt.$$

e

$$(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\Gamma(n-k)}\int_x^1 (t-x)^{n-k-1}f(t)dt.$$

[68] I. I. Hirsehmann, *Fractional Integration*, Amer. J. Math., **75**, 531-546, (1953).

[69] P. Humbert and R. P. Agarwal, *Sur la Fonction de Mittag-Leffler et Quelques-unes de ses Generalisations*, Bulletin des Sciences Matematiques, **77**, 180-185, (1953).

[70] R. P. Agarwal, *A propos d'une note de M. Pierre Humbert*, C. R. Acad. Sci. Paris, **236**, 2031-2032. (1953).

[71] A. Erdèlyi and staff of the Bateman Manuscript Project, Tables of Integral Transforms, Vol. 2, pp. 181-214. McGraw-Hill, New York, (1954).

Uma bibliografia de vinte entradas na p. 184, sem comentários, lida principalmente com integrais fracionárias. Erdèrlyi deu definições das diferintegrais com respeito às funções arbitrárias.

[72] J. L. Lions, *Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes*, C. R. Acad. Sci., **248**, 2847-2849, (1959).

Uma solução fraca para as equações de Navier-Stokes é uma função $u(t)$ de números reais negativos para L^2, satisfazendo uma certa equação funcional. Lions foi o primeiro a questionar se uma solução fraca possui um derivada fracionária com respeito a t. Então prossegue a mostrar que se o número de dimensões não exceder quatro, então, correspondendo para quaisquer dados iniciais, existe uma solução fraca com uma derivada fracionária de qualquer ordem menor que $\frac{1}{2}$.

[73] A. Erdèlyi and I. N. Sneddon, *Fractional Integration and Dual Integral Equations*, Canad. J. Math., **14**, 685-693, (1960).

[74] R. Courant, Differential and Integral Calculus (translated by E. J. MeShane), Vol. 2, pp. 339-341. Wiley (Interscience), New York, (1961).

[75] S. Fenyo and H. W. Stolle, "Theory und Praxis der Linearen Integralgleichungen." Deustscher Verlag d. Wiss., Berlin, (1963).

[76] V. A. Ditkin and A. P. Prudnikov, On the theory of operational calculus Stemming from the Bessel equation, Z. Vychisl. Mat. i Mai. Fiz, 3, 223- 238. (1963).

[77] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, Generalized Functions, Vol. 1, pp. 115-122. Academic Press, New York, (1964). Muitas funções especiais podem ser escritas como derivadas de ordem arbitrária de funções elementares. Gel'fand e Shilov dõ dois exemplos, a função hipergeométrica e a funçõ de Bessel.

[78] R. G. Buschman, *Fractional Integration*, Math. Japon., **9**, 99-106, (1964).

Na análise de problemas de valores de contornos mistos, as equações integrais duplas são encontradas frequentemente, como por exemplo $\int_0^\infty y^p J_u(xy)f(y)dy = g(x)$ e $\int_0^\infty y^s J_v(xy)f(y)dy = h(x)$, onde $J_\mu(z)$ é a função de Bessel usual, $g(x)$ e $h(x)$ são dadas e $f(x)$ deve ser determinada. Mostrando a conexão entre os operadores integrais fracionários e a álgebra das funções que têm a convolução de Mellin como produto, Buschman mostra que certas identidades podem ser obtidas previamente como casos especiais. Usando operadores fracionários, mostra como as equações duplas acima podem ser reduzidas a uma única equação integral do tipo $\int_0^\infty y^t J_\lambda(xy)F(x)dx = F(x)$.

[79] J. C. Cooke, *The solution of triple integral equations in operational form*, Quart. F. Mech. Appl. Math., **18**, 57-72, (1965).

[80] V. A. Ditkin and A. P. Prudnikov, *Integral Transforms and Operational Calculus*, Pergamon Press, Oxford, (1965).

[81] H. M. Srivastava and H. L. Manocha, A Treatise on Generating Functions, Cambridge University Press, Cambridge, (1966).

[82] I. N. Sneddon, Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory, pp. 46-52. Wiley, New York, (1966).

[83] M. Caputo, Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Anna, di Geofis., 19, 3-393, (1966).

[84] M. M. Dzherbashyan, Integral Transforms and Representations of Functions in Complex Domain, (Russia), Nauka, Moskow, (1966).

[85] M. Caputo, *Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II*, Geophys. J. Royal Astronom. Soc., **13**, 529-539, (1967).

[86] T. P. Higgins, *The Use of Fractional Integral Operators for Solving Nonhomogeneous Differential Equations*, Document DI-82-0677, Boeing Sci. Res. Lab., Seattle, Washington, (1967).

Neste documento, são dadas algumas aplicações das equações diferenciais não homogêneas. Higgins usou operadores integrais fracionários para resolver equações diferenciais.

[87] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Fundamentals of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka, Moscow, (1968).

[88] A. Zygmund, Trigonometric Series, Vol. I, II., Cambridge Univ. Press, Cambridge (2. Edition, reprinted), (1968).

[89] P. L. Butzer and W. Trebels, ”Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation”. Wesdeutscher Verlag, Köln and Opladen, 81 pp, (1968).

[90] M. Caputo, Elasticità e Dissipazione, Zanichelli, Bologna, (1969).

Caputo, resolveu o problema de viscoelasticidade utilizando uma nova definição, proposta por ele, para derivada de ordem fracionária. Além disso, o autor utilizou sua definição para descrever problemas de sismologia.

[91] T. J. Osler, *Leibniz Rule for Fractional Derivatives Generalized and an Application to Infinite Series*, SIAM J. Appl. Math. **16**, 658-674, (1970).

Certas generalizações da regra de Leibniz para a derivada do produto de duas funções foram examinadas e usadas para gerar várias expansões de séries infinitas relativas a funções especiais.

[92] G. O. Okikiolu, Aspects of the Theory of Bounded Integral Operators in L_p-spaces, Academic Press, London, (1971).

[93] M. Caputo and F. Mainardi, *Linear models of dissipation in anelastic solids*, Riv. Nuovo Cimento, **1**, 161-198, (1971).

[94] P. Butzer and R. Nessel, Fourier Analysis with Approximation, pp. 400-403. Academic Press, New York, (1971).

[95] T. J. Osler, *Fractional Derivatives and Leibniz Rule*, Amer. Math. Monthly, **78**, 645-649, (1971).

A derivada fracionária é definida generalizando a fórmula integral de Cauchy. Esta definição é usada para generalizar a regra de Leibniz para a derivada de um produto por meio do que o valor da função hipergeométrica de argumento igual à unidade é avaliada em termos de uma função gama.

[96] T. R. Prabhakar, *A singular integral equation with a generalized Mittag-LefHer function in the kernel*, Yokohama Math. J., **19**, 7-15, (1971).

[97] T. J. Osler, *A Further Extension of the Leibniz Rule to Fractional Derivatives and Its Relation to Parseval's Formula*, SIAM J. Math. Anal., **3**, 1-15, (1972).

[98] B. Ross, (Ed.), *Fractional Calculus and Its Applications*: Proceedings of the International Conference, New Haven, June 1974, Springer Verlag, New York, (1974).

[99] K. B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York-London, (1974).

Este livro é o produto de uma colaboração comum entre um matemático (Spanier) e um químico (Oldham), o primeiro e portanto o mais antigo livro reportado exclusivamente ao cálculo fracionário aplicado, isto é, direcionado às aplicações. Apesar disso continua a ser, talvez, a melhor introdução ao campo, nele pode ser encontrada uma excelente sequência histórica.

[100] B. Ross, *A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of the Fractional Calculus*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 457, Springer Verlag, New York, (1975).

Neste livro é exposta a história da teoria fundamental do cálculo fracionário.

[101] B. Ross, The development of fractional calculus: 1695-1900, Historia Math., 4, (1) 75-89, (1977).

[102] A.C. McBride, *Fractional Calculus and Integral Transform of Generalized Functions*, Research Notes in Math., Vol. 31, Pitman Press, San Francisco, (1979).

É um livro onde é discutido o cálculo fracionário e as transformadas integrais fracionárias.

[103] R. L. Bagley and P. J. Torvik, *A generalized derivative model an elastomer damper*, Shock Vibr. Bull, **49**, 135-143, (1979).

[104] R. L. Bagley, *Applications of Generalized Derivatives to Viscoelasticity*, Ph.D. thesis, Air Force Institute of Technology, (1979).

[105] A. Erdelyi and W. F. Magnus Oberhettinger and F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, vol. I-III, Krieger Pub., Melbourne, Florida, (1981).

[106] A. N. Kolmogorov, and S. V. Fomin, *Elements of Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover, New York, (1984).

[107] K. Nishimoto, Fractional Calculus, Vol. 1, 2, 3 e 4. Descartes Press, Koriyama, Japan, (1984, 1989, 1991 e 1996).

Nishimnoto comeaça compilar uma série de estudos envolvendo o cálculo fracionário.

[108] A. McBride and G. Roach, (Eds.), *Fractional Calculus and its applications*, vol. 138 of Research Notes in Math., Pitman, London, (1985).

[109] H. M. Srivastava and M. Saigo, Multiplication of fractional calculus operators and boundary value problems involving the Euler-Darboux equation, J. Math. Anal. Appl., 121(2), 325-369, (1987).

[110] S. Samko, A.A. Kilbas and O. Marichev, *Fractional Integral and Derivatives and some Their Applications*, Nauba, USSR, (1987).

Este livro que, ao julgar pelo contúdo, lembra mais uma enciclopédia onde podemos encontrar farto material associado ao cálculo fracionário.

[111] J. Lützen, *Joseph Liouville 1809-1882. Master of pure and applied mathematics*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, (1990).

[112] K. Nishimoto (Ed.), *Fractional calculus and its applications*, College of Engineering, Nihon University, Japan (1990).

[113] R. L. Bagley, *On the fractional order initial value problem and its engineering applications*, in: Nishimoto, K. (Ed.), International Conf. on Fractional Calculus and its Applications, College Engrg. Nihon University, Japan, Tokyo, 1990, 12-20. (1990).

[114] S. L. Kalla and V. Kiryakova, An H-function generalized fractional calculus based upon compositions of Erdèlyi-Kober in L_p, Math. Japon., **35**, 1151-1171, (1990).

[115] J. D. Polack, *Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases: a diffusion process*, SFA F. Acoustique, **4**, 47-67, (1991).

[116] K. Nishimoto, *An Essence of Nishimoto's Fractional Calculus*, Descartes Press, Koriyama, (1991).

[117] R. Gorenflo and S. Vessela, Abel Integral Equations: Analysis and Applications, Springer, Berlin, (1991).

[118] M. Caputo, *Lectures on Seismology and Rheological Tectonics*, Univ. degli Studi di Roma, La Sapienza, (1992-1993).

Caputo propõe uma importante mudança na definição da derivada fracionária, importante, por exemplo, na resolução de uma equação diferencial fracionária cuja solução satisfaz condições de contorno.

[119] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1993).

É um livro clássico onde é apresentada uma introdução às equações diferenciais fracionárias.

[120] K. Nishmoto and Shih-Tong Tu, *Complementary functions in Nishimoto's calculus*, J. Frac. Calc. **3**, 39-48, (1993).

[121] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, (1993).

[122] V. S. Kiryakova, *Generalized Fractional Calculus and Applications*, Pitman Research Notes in Math., Número 301, Longman, Harlow, (1994).

Este trabalho apresenta o cálculo fracionário generalizado e suas aplicações, ou seja, é dedicado a sistematizar e unificar o desenvolvimento de um novo cálculo fracionário generalizado, relacionado a muitos casos especiais e várias aplicações.

[123] A. A. Kilbas and M. Saigo, *Solutions of Abel integral equations of the second kind and of differential equations of fractional order*, Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi, **39**, 29-34, (1995).

[124] I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Dover Publications, New York, (1995).

[125] K. Nishimoto (Ed), "Journal of Fractional Calculus" Descartes Pres, Koriyama, Japan 963 (Volume 8 appeared in November 1995), (1995).

[126] B. Rubin, *Fractional Integrals and Potentials*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol.82, Longman, Harlow, (1996).

Discute-se integrais fracionárias aplicadas ao estudo de potenciais.

[127] F. Mainardi, *The Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave Phenomena*, Chaos, Solitons and Fractals, **9**, 1461-1477, (1996).

[128] R. Gorenflo and F. Mainardi, Fractional oscillations and Mittag-Leffler functions, in: University Kuwait, D. M. C. S. (Ed.), International Workshop on the Recent Advances in Applied Mathematics (Kuwait, RAAM'96), Kuwait, 193-208, (1996).

[129] A. A. Kilbas and M. Saigo, *Solution in closed form of a class of linear differential equations of fractional order*, Differntial'nye. Uravnenija., **33B**, 195-204,(1997).

[130] A. Carpinteri and F. Mainardi (eds), *Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer Verlag, Viena-New York, 1997.

Neste livro Carpinteri e Mainardi reúnem uma série de artigos envolvendo o cálculo fracionário e aplicações, dentre elas os fractais.

[131] F. Mainardi, *Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics*, in: CISM courses and lectures, vol. 378, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 291-348, (1997).

[132] R. Gorenflo, *Fractional calculus: Some numerical methods*, in: Carpinteri, A. and Mainardi, F.(Eds.), Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, vol. 378 of CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, 277-290. (1997).

[133] V. S. Kiryakova and B. N. Al-Saqabi, Transmutation method for solving Erdelyi-Kober fractional differintegral equations, J. Math. Anal. Appl, 211(1), 347-364, (1997).

[134] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, *Initialization, conceptualization, and application in the generalized fractional calculus*, NASA/TP-1998-208415, (1998).

[135] M. Saigo and A. A. Kilbas, *On Mittag-Leffler type function and applications*, Integral Transform. Spec. Func., **7**, 97-112, (1998).

[136] V. Kiryakova (Chief-Ed.), "Fractional Calculus & Applied Analysis." Inst. of Math & Informatics, Bulg. Acad. Sci., Sofia (a primeira aparição data de 1998), (1998).

[137] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 198, Academic Press, San Diego, (1999).

Neste livro Podlubny reunindo o essencial do cálculo fracionário, em particular, aplicações envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais fracionárias. O mesmo além de ser bastante completo tem um enfoque bastante prático, sem deixar de ser rigoroso, e tem suas aplicações baseadas na derivada fracionária segundo Caputo.

[138] C. F. Lorenzo and T. T. Hartley, Initialized Fractional Calculus, NASA/TP-2000-209943, (2000).

[139] R. Hilfer (ed), *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Sci. Publishing, New York, (2000).

Neste livro que compila vários artigos, são encontradas várias aplicações do cálculo fracionário em problemas oriundos da Física.

[140] K. Diethelm, *Fractional differential equations. Theory and numerical treatment*, Technical University of Braunschweig, (2003).

[141] E. Hilfer, *Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives*, J. Phys. Chem. B, **104**, 914-924, (2000).

[142] I. Podlubny, *Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integral and Fractional Differentiation*, Frac. Cal. Appl. Anal., **5**, 367-386, (2002).

Igor Podlubny fornece uma solução para o problema da interpretação geométrica e física para integração e diferenciação de ordem arbitrária.

[143] B. J. West, M. Bologna and P. Grigolini, *Physics of Fractal Operators*, Springer-Verlag, New York and Berlin, (2003).

Este livro descreve como os fenômenos dos fractais transformam-se com o passar do tempo usando o cálculo fracionário.

[144] E. Capelas de Oliveira e J. Emílio Mariorino, *Introdução aos Métodos da Matemática Aplicada*, Editora da Unicamp, Segunda Edição, Campinas, (2003).

[145] L. Debnath, *Applications of Fractional Calculus in Science and Enginering*, Int. J. Math. Sci., **2003**, 1-30, (2003).

Neste trabalho Debnath apresenta várias aplicações do cálculo fracionário associado às equações integrais e diferenciais fracionárias em ciência e engenharia.

[146] L. Debnath, *Applications of Fractional Integral and Differential Equations in Fluid Mechanics*, Fract. Cal. Appl. Anal., **6**, 119-155, (2003).

Aqui Debnath apresenta varias aplicações do cálculo fracionário associado às equações integrais e diferenciais fracionárias em mecânica dos fluidos.

[147] L. Debnath, *Fractional integral and fractional differential equations in fluid mechanics*, Fract. Calc. Appl. Anal., **6**, 119-156, (2003).

[148] L. Debnath, *Recent applications of fractional calculus to Science and Engineering*, Int. J. Math. Appl. Sci., **54**, 3413-3442, (2003).

[149] W. Chen and S. Holm, *Modified Szabo's wave equation models for lossy media obeying frequency power law*, J. Acoust. Soc. Amer., **114** 1570-2574, (2003).

[150] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, *Approximate method for solution of a class of differential equations of fractional order*, (Rusian), Vesci Nats. Akad. Navuk Belarusi, Ser. Fiz.-Mat. Navuk, **3**, 5-9, (2004).

[151] L. Debnath, *A Brief Historical Introduction to Fractional Calculus*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., **35**, 487-501, (2004).

Neste artigo Debnath oferece uma excepcional e breve exposição da história das integrais e das derivadas de ordem arbitrária e apresenta várias aplicações do cálculo fracionário associado às equações integrais e diferenciais fracionárias em diversas áreas do conhecimento.

[152] S. D. Lin, Jaw- Chian Shyu, K. Nishimoto and H. M. Srivastava, *Explicit Solutions of Some General Families of Ordinary and Partial Differential Equations Associated with the Bessel equation by Means of Fractional Calculus*, J. Frac. Calc., **25**, 33-45, (2004).

[153] V. Alegreti, "Cálculo Fracionário de Riemann Liouville aplicado ao Problema da Tautócrona", Meza-USP-Resumos publicados em anais de congressos-I Encontro Científico de Alunos de Pós-Graduação, 2004, UNICAMP-Campinas. poster, (2004).

Alegreti usa o cálculo fracionário de Riemann Liouville para resolver o Problema da Tautócrona.

[154] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livraria da Física, Sõ Paulo, (2005).

[155] E. Capelas de Oliveira e W. A. Rodrigues Jr., *Funções Analíticas e Aplicações*, Editora Livraria da Física, Sõ Paulo, (2006).

[156] G. M. Zaslavsky, *Chaos and Fractional Dynamics*, vol. 511, Lect. Notes in Phys., Oxford University Press, Oxford, (2005).

Neste livro Zaslavsky, apresenta modelos fracionários para cinética anômala de processos complexos.

[157] R. F. Camargo, *Do Teorema de Cauchy ao Método de Cagniard*, Dissertação de Mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas, (2005).

[158] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam (2006).

Neste livro, além de uma vasta revisão da teoria associada às equações diferenciais fracionárias, encontramos várias aplicações.

[159] K. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Dover, New York, (2006).

Este livro é uma edição da Dover, na realidade uma ligeira republicação corrigida do livro originalmente publicado por Academic Press, New York, datado de 1974. Nele são feitas algumas correções no seu conteúdo através de uma errata preparada para esta reedição. Lida principalmente com seu desenvolvimento histórico e propriedades gerais dos operadores diferintegrais e as aplicações destas propriedades matemáticas a problemas de difusão.

[160] R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira e Ary O. Chiacchio, *Sobre a Função de Mittag-Leffler*, Relatório de Pesquisa RP15/06 - Abril de 2006, Imecc-Unicamp, (2006).

Neste trabalho, os autores destacam como aplicação da chamada função de Mittag-Leffler, o estudo de equaçẽs diferenciais fracionárias, onde as soluções, em geral, funções transcendentes, podem ser conduzidas a uma destas funções. Além de várias propriedades, relações de recorrência, função geratriz e relações com outras funções especiais, em particular, as funções hipergeométricas confluentes, mostram que a função erro é um caso particular da função de Mittag-Leffler. Também apresentam e discutem problemas de aplicação.

[161] R. L. Magin, *Fractional calculus in bioengineering*, Editora Begell House Publishers, 684 páginas, (2006).

Este livro propõe modelos fracionários para descrever certos fenômenos em bioengenharia.

[162] A. K. Shukla and J. C. Prajapati, *On a generalization of Mittag-Leffler Function its Properties*, J. Math. Anal. Appl., **336**, 797-811, (2007).

[163] J. Sabatier, O. P. Agrawal and J. A. Tenreiro Machado, *Advances in fractional calculus: theoretical developments and applications in Physics and Engeneering*, 552 páginas, Springer, (2007).

O objetivo deste livro é apresentar o estado da arte (atuais avanços) no estudo de sistemas fracionários e aplicações da diferenciação fracionária em Física e Engenharia.

[164] R. F. Camargo, Ary O. Chiacchio, E. Capelas de Oliveira and Francisco A.M. Gomes, *The Replacement of Lotka-Volterra Model by a Formulation Involving Fractional Derivatives*, Relatório de Pesquisa de maio, (2007).

Este artigo propõe uma generalização para o sistema de Lotka-Volterra utilizando derivadas de ordem não inteira. O principal objetivo desta generalização é refinar a descrição do fenômeno de maneira análoga a que foi feita em recentes trabalhos envolvendo fenômenos de viscoelasticidade de fluidos.

[165] R. F. Camargo, Ary O. Chiacchio and E. Capelas de Oliveira, *Differentiation to Fractional Orders and the Fractional Telegraph Equation*, Relatório de Pesquisa RP32/07, (2007).

Usando métodos do cálculo diferencial e integral, apresentam e discutem o cálculo de uma função de Green fracionária, associada com o caso unidimensional da asssim chamada equação geral fracionária do telégrafo com uma variável espacial, que é uma equação diferencial parcial fracionária com coeficientes constantes.

[166] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and Ary O. Chiacchio, *Addition Theorem Associated with the Generalized Mittag-Leffler Functions*, Relatório de Pesquisa RP34/07, (2007).

Usando dois problemas físicos envolvendo a equação do telégrafo fracionária, é mostrado um resultado envolvendo dois novos teoremas associadas à função de Mittag-Leffler generalizada.

[167] R. Figueiredo Camargo, *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, (2007).

Em 2007, Rubens Figueiredo de Camargo, escreve sua tese de doutorado, orientado pelo professor Capelas, o primeiro texto escrito em português a fazer um estudo completo sobre as integrais e derivadas de ordem arbitrárias, onde o autor apresenta resultados originais, dando ênfase às abordagens diretamente relacionadas às aplicações reais usando, na maioria dessas aplicações, a definição de Caputo para derivada de ordem arbitrária.

[168] D. C. Rosendo, Dissertação de Mestrado: *A Função de Mittag-Leffler*, Imecc-Unicamp, (2008).

Em 2008, na Unicamp, Rosendo, orientado pelo professor Capelas, publica sua dissertação de mestrado, onde é discutida uma equação diferencial ordinária advinda do cálculo arbitrário como uma aplicação da função de Mittag-Leffler.

[169] R. Figueiredo Camargo, Ary O. Chiacchio e E. Capelas de Oliveira, *Equação do Telégrafo Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler*, Relatório de Pesquisa, Imecc-Unicamp, (2008).

Utilizando métodos de cálculo diferencial e integral fracionários apresentam-se e discutem-se dois modos distintos de se calcular a função de Green, associada ao caso unidimensional, da assim chamada equação do telégrafo fracionária. Esta é uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes e é resolvida através da metodologia da justaposição das transformadas de Fourier, na parte espacial, e Laplace, na parte temporal. Obtém-se uma outra expressão para a função de Green e através da comparaçõ entre os resultados obtidos a partir das duas maneiras, são obtidas novas relações e um teorema de adição para as funções de Mittag-Leffler. É apresentada uma demonstração formal do teorema assim obtido e casos particulares do mesmo são discutidos.

[170] Shantanu Das, *Functional fractional calculus for system identification and controls*, 239 páginas, Springer, (2008).

Neste livro são discutidas várias aplicações práticas dadas particularmente para identificação e descrição de sistema de controles eficientes.

[171] V. Kiryakova, *A Brief Story About the Operators of the Generalized Fractional Calculus*, Fract. Calc. Anal. Appl., **11**, (2008).

[172] A. L. Soubhia and E. Capelas de Oliveira, *Cálculo Fracionário e o Circuito Elétrico RLC*, XXXII CNMAC, Cuiabá, Brasil, (2009).

[173] E. Ait Dads., M. Benchohra and S. Hamani, *Impulsive Fractional Differential Inclusions Involving the Caputo Fractional Derivative*, Fract. Cal. Anal. Appl., **12**, (2009).

[174] R. Figueiredo Camargo, A.O. Chiacchio, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, Solution of the fractional Langevin equation and the Mittag-Leffler functions. J. Math. Phys., **50**, 063507, (2009).

[175] R. Figueiredo Camargo, *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Imecc-Unicamp, (2009).

Em 2009, Camargo, publica sua tese de doutorado, orientado pelo professor Capelas, o primeiro texto escrito em português a fazer um estudo completo sobre as integrais e derivadas de ordem arbitrárias, onde o autor apresenta resultados originais, dando ênfase às abordagens diretamente relacionadas às aplicações reais usando, na maioria dessas aplicações, a definição de Caputo para derivada de ordem arbitrária.

[176] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr., *On the anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation*, J. Math. Phys., **50**, 123518, (2009).

[177] R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr., *On the generalized Mittag-Leffler function and its application in a fractional telegraph equation*, Submetido à publicação (2009).

[178] R. Figueiredo Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *On some fractional Green's functions*, J. Math. Phys., **50**, 043514, (2009).

[179] V. V. Uchaikin, *Method of Fractional Derivatives* (In Russian), (2009).

Neste livro, em russo, Uchaikin apresenta alguns métodos em derivadas fracionárias.

[180] A. L. Soubhia, R. Figueiredo Camargo, E. Capelas de Oliveira and J. Vaz Jr., *Theorem for Series in Three-Parameter Mittag-Leffler Function*, Fract. Cal. & Appl. anal., **13**, 9-20, (2010).

Neste artigo os autores apresentam um novo resultado: um teorema envolvendo a função de Mittag-Leffler de três parâmetros. Como uma aplicação, obtêm a solução em uma forma fechada de uma equação diferencial fracionária associada com um circuito elétrico RLC, em termos da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

[181] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna and I. Petras, Fractional order systems: modeling and control applications, 200 páginas, (2010).

Este livro propõe implementações de hardware e aplicações de Sistemas de Ordem Fracionária (FOS) em modelagem de sistemas reais. Uma seção é dedicada para modelagem de FOS com a combinação do Metal Polímero Iônico (IPMC), um novo material que pode ter aplicações em Robótica, Aeroespacial e Biomedicina.

[182] F. Mainardi, *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models*, Imperial College, (2010).

[183] R. E. Gutierrez, J. M. Rosário, and J. A. Tenreiro Machado, *Fractional Order Calculus: Basic Concepts and Engineering Applications*, J. Math. Probl. Engin., Hindawi Publishing Corp, **2010** (2010).

[184] R. E. Gutierrez, J. M. RosÃ¡rio, and J. A. Tenreiro Machado, *Intelligent Maintenance of Linear Systems: A Fractional Order Identification Approach, Mathematical Methods in Engineering*, International Symposium MME'10, ISEC, October 2010, Coimbra, Portugal.