AS EQUAÇÕES DE BOUSINESQ GENERALIZADAS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Sebastián A. Lorca Pizarro e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 09 de fevereiro de 1994

José Luiz Boldrini

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

AS EQUAÇÕES DE BOUSSINESQ GENERALIZADAS

ALUNO: SEBASTIÁN ANTONIO LORCA PIZARRO 883

ORIENTADOR: JOSÉ LUIZ BOLDRINI

IMECC–UNICAMP
1994

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Boldrini, pela orientação exemplar.

Aos professores do IMECC, pelo apoio e incentivo.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Aos meus pais

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Consideraremos neste trabalho as equações de Boussinesq Generalizadas que descrevem em primeira aproximação a convecção termicamente induzida em fluídos com viscosidade e condutividade térmica dependentes da própria temperatura. As equações são

$$\begin{cases} \rho_0 \partial_t u - div(\nu(\theta)\nabla u) + \rho_0 u.\nabla u + \nabla p = (\rho_0 - \alpha\rho_0(\theta - \theta_0))g, \\ div \;\; u = 0, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} - div(k(\theta)\nabla\theta) + u.\nabla\theta = 0 \quad \text{em} \;\; (0,T) \times \Omega, \end{cases}$$

onde $u(t,x) \in I\!R^n$ denota a velocidade do fluído num ponto $x \in \Omega \subseteq I\!R^n$ (região de escoamento) e instante $t; \rho_0 > 0$ é a densidade do fluido (suposta constante); $p(t,x) \in I\!R$ é a pressão hidrostática; $\theta(t,x) \in I\!R$ representa a temperatura do fluído; $\nu(\cdot) > 0$ e $k(\cdot) > 0$ são a viscosidade e a condutividade térmica do fluído, respectivamente; g é o vetor aceleração da gravidade; ∇, Δ e div representam os operadores gradiente, Laplaciano e divergente, respectivamente (também denotaremos o operador ∇ por $grad$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ por u_t); $u.\nabla u$ indica o operador de convecção, cuja componente i-ésima em coordenadas cartesianas e dado por $(u.\nabla u)_i = u_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ (na notação de Einstein, onde índices repetidos se somam e u_j indica a j-ésima componente da velocidade u em coordenadas cartesianas). A equação $div \;\; u = 0$ indica que o fluído é incompressível; α é o coeficiente de expansão volumétrica; θ_0 é uma temperatura de referência e $u.\nabla\theta = u_j \dfrac{\partial \theta}{\partial x_j}$ é o operador de advecção (veja Drazin e Reid [5] para uma derivação desta equação).

Notemos que neste tipo de fluído a densidade é assumida contante (igual a ρ_0 que é a densidade quando a temperatura do fluído é θ_0), com exceção da mudança de densidade que produz a força de flutuação.

As Equações de Aproximação de Boussinesq (ou de Bénard) correspondem ao caso particular em que a viscosidade ν e a condutividade térmica k são constantes e nós chamaremos de equações clássicas de Boussinesq. Elas tem sido estudadas por Korenev, Oeda e Rabinowitz entre outros.

As técnicas empregadas na análise das equações de Navier–Stokes usuais têm sido muito bem sucedidas nas equações de Boussinesq clássicas, obtendo-se resultados similares (veja Rojas-Medar e Lorca [24], [25]). Em geral, espera-se igual comportamentos ao das equações de Navier–Stokes devido a que as equações clássicas de Boussinesq são, basicamente, as equações de Navier–Stokes acopladas com a equação do calor de modo relativamente simples; de fato, os operadores de ordem mais alta envolvidos são lineares e os acoplamentos não lineares são de ordem mais baixa.

Entretanto, existem fluídos nas quais a dependência da viscosidade e condutividade térmica com respeito a temperatura, não pode ser ignorada.

Para esse tipo de fluídos temos as Equações de Boussinesq Generalizadas. Evidentemente, este tipo de sistema apresenta um grau maior de dificuldade, devido principalmente aos termos não lineares que aparecem nos operadores de ordem mais alta $div(\nu(\theta)\nabla u)$ e $div(k(\theta)\nabla\theta)$.

Para tais fluídos a dependência da viscosidade com a temperatura é fundamental na determinação dos detalhes do escoamento. É sabido, por exemplo, que um líquido usualmente sobe no meio de uma célula poligonal de convecção, enquanto que um gás usualmente desce. Graham [8] Sugeriu que isto acontece porque tipicamente a viscosidade de um líquido descrece com a temperatura, enquanto que ela tipicamente aumenta em um gás. Esta sugestão foi confirmada por experimentos de Tippelkirch [30] sobre a convecção gerada termicamente em enxofre líquido, no qual a viscosidade tem um mínimo perto de 153°C. ele decobriu que a direção do escoamento no meio das células de convecção dependiam do fato da temperatura estar acima ou abaixo de 153°C. Palm [19] foi o primeiro a analisar o efeito da variação da viscosidade com a temperatura; outros artigos relacionados são, por exemplo, Busse [3] e Palm, Ellingsen, Gjevik [20]. Todos esses artigos fazem análises típicas da Mecânica de Fluídos Teórica (empregando métodos de perturbação e linearização não totalmente justificados matematicamente). Uma análise matemática rigorosa deste problema é mais difícil do que aquela de ser feita no caso das equações clássicas de Boussinesq; isto devido aos fortes acoplamentos não lineares.

Entretanto, dada a importância física de tais fluídos, tal análise deve ser feita para embasar, inclusive, métodos numéricos empregados na obtenção de escoamentos convectivos. Para isto é necessário saber se existem soluções e em que espaços funcionais (regularidade), saber se certas aproximações convergem para a solução exata (e se possível obter estimativas de erro).

O nosso trabalho aborda as questões mencionadas anteriormente. As técnicas por nós utilizadas serão *"construtivas"*. Uma vez que estaremos interessados na obtenção de estimativas de erro.

Consideraremos o seguinte problema com valores iniciais para as Equações de Boussinesq Generalizadas: achar u, p e θ satisfazendo

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u - div(\nu(\theta)\nabla u) + u.\nabla u + \nabla p = \alpha\theta g, \\ div \quad u = 0, \\ \partial_t \theta - div(k(\theta)\nabla\theta) + u\nabla\theta = 0 \quad \text{em} \ (0,T)\times\Omega. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} u = 0; \ \ \theta = \eta \quad \text{sobre} \ (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) = u_0; \ \theta(0) = \theta_0 \quad \text{em} \ \Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \in I\!R^n$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega; g, \eta, u_0$ e θ_0 são funções dadas e $T > 0$.

Uma breve descrição dos capítulos é feita a seguir:

No primeiro capítulo estudaremos o caso estacionário e fixaremos a nomenclatura e os espaços a serem utilizados.

No Capítulo 2 deduziremos alguns teorema de existência local no tempo no caso de evolução. Eles serão provados via as aproximações de Galerkin para as duas equações (da velocidade e da temperatura).

O terceiro capítulo será dedicado ao assunto da regularidade da solução e a partir dos resultados obtidos no Capítulo 2 deduziremos um teorema de existência global no tempo.

No último capítulo, dicutiremos a questão da possibilidade de obtenção de estimativas de erro (locais e uniformes no tempo).

Finalmente, gostaríamos de fazer a seguinte observação: relaxamos as hipóteses sobre a força g já que o modelo de Boussinesq poderia ser útil em fenômenos relacionados com a geofísica.

CAPÍTULO 1

O PROBLEMA ESTACIONÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos um estudo do caso estacionário correspondente ao problema (1)–(2). Neste caso as equações são

$$(1.1) \qquad \begin{cases} - & div(\nu(T)\nabla u) + u.\nabla u - \alpha T g + \nabla p = 0, \\ & div\ u = 0 \\ - & div(k(T)\nabla T) + u.\nabla T = 0 \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

$$(1.2) \qquad u = 0 \quad , T = T_0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Apresentaremos um resultado de existência de soluções (generalizadas) do problema, via a técnica de aproximação de Galerkin espectral. Estudaremos também a regularidade e unicidade das soluções obtidas.

A seguir faremos alguns breves comentários sobre problemas relacionados ao nosso.

O trabalho de Gil' [7], nos mostra um estudo de um modelo onde as equações de Boussinesq clássicas (isto é, com viscosidade e coeficiente de condutividade térmica constantes) são acopladas com uma outra equação que descreve a concentração de uma substância diluída no fluido. Gil' obtem soluções generalizadas, pelo uso de uma técnica que consiste em linearização e ponto fixo (método de Leray–Schauder). Para obter existência ele necessita supor dados pequenos na fronteira.

Em [15],[16] Morimoto nos apresenta existência de soluções fracas para o problema de Boussinesq clássico. Seus resultados não precisam de pequenez para o dado na fronteira, isto devido a escolha adequada da extensão de T_0, que é usada na homogeneização do problema.

Nosso primeiro resultado (Existência de soluções fracas) pode ser considerado uma generalização do aquele de Morimoto.

Para obter soluções mais regulares, trabalharemos com uma base especial (base espectral) a semelhança do que acontece no caso das equações de Navier–Stokes. Porém, gostaríamos de destacar que a obtenção de estimativas melhores que as obtidas no Teorema de Existência de soluções fracas, diferentemente do que acontece no caso de viscosidade constante, exigem um aproveitamento das estimativas conhecidas para a pressão associada à decomposição de Helmholtz. Estas estimativas serão também importantes nos próximos capítulos.

1. PRELIMINARES.

Recordamos em primeiro lugar alguns espaços funcionais clássicos que utilizaremos ao longo deste trabalho. Os mesmos símbolos serão utilizados para denotar os espaços de campos vetoriais e reais definidos sobre Ω, a distinção será clara do contexto empregado.

O produto e a norma de $L^2(\Omega)$ serão denotadas por $(\ )$ e $|\ |$, respectivamente; as normas em $L^p(\Omega)$, por $|\ |p$.

$W^{m,p}(\Omega)$ denotará o espaço de Sobolev usual; no caso $p = 2$ usaremos a notação padrão: $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

$H_0^1(\Omega)$ é o subespaço fechado de $H^1(\Omega)$ formado pelas funções que tem o valor na fronteira igual a zero (no sentido do traço).

$W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ é o espaço de traços com a norma

$$|\gamma|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} = inf\Big\{\|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}; v \in W^{1,p}(\Omega), v = \gamma \text{ sobre } \partial\Omega\Big\}$$

Da mesma forma, quando $\partial\Omega$ é suficientemente regular, podemos definir o espaço $W^{k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$. No caso $p = 2 : W^{k-\frac{1}{2};2}(\partial\Omega) = H^{k-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (Adams [1]).

$C_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ denotará o espaço das funções regulares com divergente nulo; os fechos deste espaço com respeito a $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ serão denotados H e V, respectivamente.

Denotamos por P a projeção ortogonal de $L^2(\Omega)$ sobre H, obtida pela decomposição usual de Helmholtz. Consideramos o operador de Stokes $\tilde{\Delta} = -P\Delta : V \bigcap H^2(\Omega) \to H$; é conhecido que $\tilde{\Delta}$ define sobre $V \cap (H^2(\Omega))^n \subseteq H$ um operador positivo definido, simétrico, que possui uma inversa compacta (Temam [29]), logo ele possui uma sequência $\{\alpha^k\}$ de autovalores positivos $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots$, satisfazendo $\alpha_k \to +\infty$ quando $k \to \infty$. As correspondentes autofunções $\{v^k(x)\}$ formam um sistema completo ortonormal em H. Além disso, as autofunções v^k também formam um sistema ortogonal completo em V (dotado do produto interno $(\nabla\cdot, \nabla\cdot)$) e em $V \bigcap H^2(\Omega)$ (dotado do produto interno $(\tilde{\Delta}\cdot, \tilde{\Delta}\cdot)$).

Denotaremos respectivamente por $\{\psi^k\}$ e $\{\lambda_k\}$ as autofunções e os autovalores do operador Laplaciano $-\Delta : H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Como é bem conhecido, temos propriedades análogas às enunciadas para o operador de Stokes.

Assumindo que podemos encontrar uma função S definida em Ω satsfazendo $S = T_0$ sobre $\partial\Omega$, podemos transformar o problema (1.1)–(1.2) introduzindo a nova variável $\varphi = T - S$. As equações obtidas serão então

$$
(1.3) \quad \begin{cases} - \;\; div(\nu(\varphi + S)\nabla u) + u.\nabla u - \alpha\varphi g - \alpha S g + \nabla p = 0, \\ \quad\; div\ u = 0, \\ - \;\; div(k(\varphi + S)\nabla\varphi) + u.\nabla\varphi - div(k(\varphi + S)\nabla S) + u.\nabla S = 0 \ \text{ em } \Omega, \\ \quad\; u = 0 \ \text{ e } \ \varphi = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}
$$

Supondo que $S \in H^1(\Omega)$, podemos reformular (1.3) em forma variacional da seguinte maneira: Achar $u \in V$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$
(1.4) \quad \begin{cases} (\nu(\varphi + S)\nabla u, \nabla v) + B(u, u, v) - \alpha(\varphi g, v) - \alpha(S g, v) = 0, \\ \forall v \in V, \\ (k(\varphi + S)\nabla\varphi, \nabla\psi) + b(u, \varphi, \psi) + (k(\varphi + S)\nabla S, \nabla\psi) + b(u, S, \psi) = 0, \\ \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}
$$

onde

$$
B(u, v, w) = (u.\nabla v, w) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N u_j(x) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x) w_i(x) dx
$$

e

$$
b(u, \varphi, \psi) = (u.\nabla\varphi, \psi) = \int_\Omega \sum_{j=1}^N u_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \psi(x) dx.
$$

Agora, definimos uma solução fraca de (1.1) - (1.2).

DEFINIÇÃO. Um par de funções $(u, T) \in V \times H^1(\Omega)$ é chamado uma solução fraca de (1.1), (1.2) se existe uma função $S \in H^1(\Omega)$ tal que $u \in V, \varphi = T - S \in H_0^1(\Omega), S = T_0$ sobre $\partial\Omega$ e (u, φ) é solução de (1.4)

Ao longo deste capítulo suporemos o seguinte:

$$
(1.5) \qquad \nu(\tau) > 0; k(\tau) > 0 \ \text{ para todo } \ \tau \in \mathbb{R}.
$$

Observamos que a suposição (1.5) permite os casos $\lim\inf_{T\to+\infty} \nu(T) = 0$ ou $\lim\sup_{T\to+\infty} \nu(T) = +\infty$ (o mesmo é válido para $k(\cdot)$).

A seguir, usaremos C como uma constante genérica que só depende de Ω através das constantes que aparecem nas desigualdades de Poincaré e Sobolev.

2. ESTIMATIVAS A PRIORI

Nesta seção mostraremos inicialmente que o problema (1.1) - (1.2) satisfaz um princípio do máximo fraco.

LEMA 1.1: Seja $\{u, T\}$ uma solução fraca de (1.1), (1.2). Então

$$\inf_{\partial\Omega}\text{ess}\, T_0 \leq T(x) \leq \sup_{\partial\Omega}\text{ess}\, T_0 \quad q.t.p. \text{ em } \overline{\Omega}. \tag{1.6}$$

PROVA. Seja $l = \sup_{\partial\Omega}\text{ess}\, T_0 < \infty$ (se $l = \infty$, (1.6) é trivial). Tomando $\psi = T^+$ em (1.4), onde $T^+ = \sup_\Omega\{T - l, 0\}$ obtemos

$$(k(T)\nabla T, \nabla T^+) = -b(u, T, T^+).$$

Um cálculo fácil então mostra que

$$(k(T)\nabla T^+, \nabla T^+) = (k(T)\nabla T, \nabla T^+) = -b(u, T, T^+) = -b(u, T^+, T^+)$$

e

$$b(u, T, T^+) = b(u, T^+, T^+) = 0.$$

Assim, temos $\int_\Omega k(T)|\nabla T^+|^2 = 0$.

Logo, $k(T)|\nabla T^+|^2 = 0$ q.t.p. em Ω, e conseqüentemente $|\nabla T^+|^2 = 0$ q.t.p em Ω. Como $T^+ \in H_0^1(\Omega)$, obtém-se: $T^+ = 0$ e conclui-se a desigualdade à direita de (1.6). A desigualdade à esquerda de (1.6) é obtida de maneira similar. □

Uma consequência interessante do Lema 1.1 é que, podemos transformar o problema (1.1), (1.2) num problema equivalente mais adequado ao nosso tratamento. No caso em que $\inf\{k(t); t \in I\!R\} = 0$ ou $\sup\{k(t), t \in I\!R\} = +\infty$ e $\sup_{\partial\Omega}|T_0| < +\infty$, consideremos a função modificada $\tilde{k}$, com a mesma regularidade de k e satisfazendo

$$\tilde{k}(\tau) = k(\tau) \quad \forall|\tau| \leq \sup_{\partial\Omega}|T_0|$$

e

$$\frac{1}{2}\inf\{k(t); |t| \leq \sup_{\partial\Omega}|T_0|\} \leq \tilde{k}(\tau) \leq 2\sup\{k(t); |t| \leq \sup_{\partial\Omega}|T_0|\} \;\; \forall\tau \in I\!R.$$

Considerações análogas podem ser feitas para $\nu(\cdot)$.

É claro que (u, T) é uma solução fraca de (1.1), (1.2) se e somente se é solução fraca do seguinte problema

$$(1.7) \qquad \begin{cases} -div(\tilde{\nu}(T)\nabla u) + u.\nabla u + \nabla\, p = \alpha T g, \\ div\; u = 0, \\ -div(\tilde{k}(T)\nabla T) + u.\nabla T = 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0, T = T_0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Isto é, daqui para frente podemos supor que as funções $\nu(\cdot)$ em $k(\cdot)$ satisfazem

$$(1.8) \qquad \begin{cases} 0 < \nu_0(T_0) \leq \nu(\tau) \leq \nu_1(T_0), \\ 0 < k_0(T_0) \leq k(\tau) \leq k_1(T_0) \;\; \forall \;\; \tau \in I\!R. \end{cases}$$

onde $\nu_0(T_0) = \dfrac{1}{2}\inf\{\nu(t); |t| \leq \sup\limits_{\partial\Omega}|T_0|\}$, $\nu_1(T_0) = 2\sup\{\nu(t); |t| \leq \sup\limits_{\partial\Omega}|T_0|\}$ com definições análogas para $k_0(T_0)$ e $k_1(T_0)$.

Observe-se que, obviamente, se tivermos

$$\inf\{\nu(t), k(t); t \in I\!R\} > 0, \sup\{\nu(t), k(t), t \in I\!R\} < +\infty,$$

então as modificações anteriores são desnecessárias.

Agora, provaremos uma estimativa a priori para os gradientes das soluções. Seja $\{u, \varphi\}$ uma solução de (1.4). Tomando $v = u$ e $\psi = \varphi$ em (1.4), temos

$$\begin{aligned} &(\nu(\varphi + S)\nabla u, \nabla u) + B(u, u, u) - \alpha(\varphi g, u) - \alpha(Sg, u) = 0, \\ &(k(\varphi + S)\nabla\varphi, \nabla\varphi) + b(u, \varphi, \varphi) + (k(\varphi + S)\nabla S, \nabla\varphi) + b(u, S, \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Observando que $B(u, u, u) = 0$ e fazendo uso da desigualdade de Hölder e (1.8), obtém-se

$$\nu_0(T_0)|\nabla u|^2 \leq \alpha(\varphi g, u) + \alpha(Sg, u) \leq \alpha|g|(|\varphi|_3 + |S|_3)|u|_6;$$

e das imersões de Sobolev se deduz que

$$(1.9) \qquad |\nabla u| \leq \alpha\frac{C}{\nu_0(T_0)}(|g||\nabla\varphi| + |g|\; ||S||_{H^1(\Omega)}).$$

Similarmente temos

$$(1.10) \qquad |\nabla\varphi| \leq \frac{C}{k_0(T_0)}|S|_3|\nabla u| + \frac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}||S||_{H^1(\Omega)}.$$

Substituindo (1.10) em (1.9), obtemos então

$$\Big(1-\frac{\alpha C^2}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}|g||S|_3\Big)|\nabla u| \leq \frac{\alpha C}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}|g|||S||_{H^1(\Omega)}(k_1(T_0)+k_0(T_0)).$$

Observe que se assumirmos

$$\alpha\frac{C^2}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}|g||S|_3 < \frac{1}{2}, \tag{1.11}$$

teremos que

$$\left\{\begin{array}{lcl} |\nabla u| & \leq & \dfrac{2\alpha C}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}|g|||S||_{H^1(\Omega)}(k_1(T_0)+k_0(T_0)) \equiv F_1(||S||_{H^1(\Omega)}), \\ \\ |\nabla\varphi| & \leq & \Big(\dfrac{2k_1(T_0)}{k_0(T_0)}+1\Big)||S||_{H^1(\Omega)} \equiv F_2(||S||_{H^1(\Omega)}). \end{array}\right. \tag{1.12}$$

3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS

Nosso primeiro resultado é

TEOREMA 1.2: Seja Ω um domínio limitado em $I\!R^n (n = 2$ ou $3)$ com fronteira Lipschitz contínua, suponha que ν, k são contínuas, $g \in L^2(\Omega)$ e $T_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)\bigcap L^\infty(\partial\Omega)$. Então, existe uma solução fraca do problema (1.1), (1.2). No caso que $\inf\{\nu(\tau),k(\tau);\tau\in I\!R\} > 0$ e $\sup\{\nu(\tau),k(\tau);\tau\in I\!R\} < \infty$ é suficiente assumir $T_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Antes de provar o Teorema 1.2, enunciaremos o seguinte resultado

LEMA 1.3: Seja Ω um domínio limitado em $I\!R^n, n = 2$ ou 3, com fronteira Lipschitz. Suponha que $T_0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, então para todo número positivo ε e $1 \leq p \leq 6$ se $n = 3$ ou qualquer $1 \leq p < \infty$ se $n = 2$, existe uma extensão $S \in H^1(\Omega)$ de T_0 tal que $|S|_p < \varepsilon$.

PROVA: Da definição de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ podemos obter uma extensão $\tilde{T}_0 \in H^1(\Omega)$ de T_0. Seja $\delta > 0$, consideremos $\partial\Omega_\delta = \{x \in I\!R^N; d(x,\partial\Omega) < \delta\}$ e $\beta(\cdot) \in C_0^\infty(I\!R^N)$ tal que $0 \leq \beta(\cdot) \leq 1, \beta(\cdot) \equiv 1$ em $\partial\Omega_{\delta/2}, \beta(\cdot) \equiv 0$ em $I\!R^N\backslash\partial\Omega_\delta$ (β pode ser obtida aplicando uma versão diferenciável do Lema de Urysohn).

Definimos $S(x) = \beta(x)\tilde{T}_0(x)$; em virtude da desigualdade

$$|S|_p \leq \Big(\int_{\Omega\cap\partial\Omega_\delta}|\tilde{T}_0(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leq c||\tilde{T}_0||_{H^1(\Omega)}, \tag{1.13}$$

podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de maneira que $\left(\int_{\Omega\cap\partial\Omega\delta} |\tilde{T}_0(x)|^p dx\right)^{1/p}$ seja menor que ε.

Consequentemente $S(\cdot)$ satisfaz os requisitos do lema. $\square$

Agora estamos em condições de iniciar a prova do Teorema de Existência.

PROVA DO TEOREMA 1.2: Em virtude do lema anterior, podemos escolher uma extensão S de T_0 tal que $S \in H^1(\Omega)$ e satisfaz (1.11).

Seja $k \in I\!N$, consideremos as aproximações de Galerkin $u^k(x) = \sum_{j=1}^{k} c_{k,j} v^j(x)$ e $\varphi^k(x) = \sum_{j=1}^{k} d_{k,j} \psi^j(x)$ satisfazendo o problema aproximado

$$(1.14)\quad (\nu(\varphi^k + S)\nabla u^k, \nabla v^j) + B(u^k, u^k, v^j) - \alpha(\varphi^k g, v^j) - \alpha(Sg, v^j) = 0,$$
$$(1.15)\quad (k(\varphi^k + S)\nabla \varphi^k, \nabla \psi^j) + b(u^k, \varphi^k, \psi^j) + (k(\varphi^k + S)\nabla S, \nabla \psi^j) + b(u^k, S, \psi^j) = 0,$$

para $1 \le j \le k$.

Assumamos primeiro, a existência de (u^k, φ^k) para todo $k \in I\!N$. Notemos que as aproximações (u^k, φ^k) satisfazem a estimativa (1.9) – (1.10). De fato a desigualdade (1.9) para u^k obtém-se multiplicando (1.14) por $c_{k,j}$ e somando em j de 1 até k. Similarmente, temos (1.10) para φ^k.

Estimativa (1.12) para (u^k, φ^k) pode ser obtida da mesma forma que obtivemos (1.12) na seção anterior. Portanto a sequência (u^k, φ^k) é limitada em $V \times H_0^1(\Omega)$.

Do fato que V é compactamente imerso em H e $H_0^1(\Omega)$ é compactamente imerso em $L^2(\Omega)$, conluí-se que existe uma subsequência de (u^k, φ^k), ainda denotada por (u^k, φ^k), e existem $u \in V$ e $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, tais que

$$\begin{aligned} u^k &\to u, \ \text{fraco em } V \text{ e forte em } H, \\ \varphi^k &\to \varphi, \ \text{fraco em } H_0^1, \ \text{forte em } L^2 \text{ e } q.t.p. \text{ em } \Omega. \end{aligned}$$

Ademais, podemos supor

$$\begin{aligned} \nabla u^k &\to \nabla u, \ \text{fraco em } L^2, \\ \nabla \varphi^k &\to \nabla \varphi, \ \text{fraco em } L^2. \end{aligned}$$

Logo passando ao limite quando k converge para ∞ em (1.14), (1.15), obtém-se

$$(1.16)\quad \begin{cases} (\nu(\varphi+S)\nabla u, \nabla v^j) + B(u,u,v^j) - \alpha(\varphi g, v^j) - \alpha(Sg, v^j) = 0, \\ (k(\varphi+S)\nabla\varphi, \nabla\psi^j) + b(u,\varphi,\psi^j) + (k(\varphi+S)\nabla S, \nabla\psi^j) + b(u,S,\psi^j) = 0, \\ \text{para todo } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De fato, é conhecido que nas condições acima (Temam [29])

$$\begin{aligned} B(u^k,u^k,v) &\to B(u,u,v) \ ,\forall v \in V, \\ b(u^k,\varphi^k,\psi) &\to b(u,\varphi,\psi) \ ,\forall \psi \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

os outros termos não lineares satisfazem

$$(\nu(\varphi^k+S)\nabla u^k, \nabla v^j) = (\nabla u^k, \nu(\varphi^k+S)\nabla v^j) \to (\nabla u, \nu(\varphi+S)\nabla v^j) = (\nu(\varphi+S)\nabla u, \nabla v^j)$$

já que $\nu(\varphi^k+S)\nabla v^j \to \nu(\varphi+S)\nabla v^j$, forte em $L^2(\Omega)$ em virtude do Teorema da Convergência dominada de Lebesgue.

Similarmente temos,

$$(k(\varphi^k+S)\nabla\varphi^k, \nabla\psi^j) \to (k(\varphi+S)\nabla\varphi, \nabla\psi^j).$$

Usando o fato que as sequências $\{v^j\}$ e $\{\psi^j\}$ são completas em V e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente, e usando a identidade (1.16), concluí-se que (u,φ) satisfaz (1.4). Isto é, $(u,\varphi+S)$ é a solução procurada.

Demostraremos agora que o sistema (1.14),(1.15) tem solução para todo $k \in \mathbb{N}$, aplicando o Teorema do ponto fixo de Brouwer. Os argumentos são similares aos usados por Heywood [9].

Seja V_k o subespaço gerado por $\{v^1,\dots,v^k\}$, e seja M_k o subespaço gerado por $\{\psi^1,\dots,\psi^k\}$. Para cada $(w,\xi) \in V_k \times M_k$, consideramos a única solução $L(w,\xi) = (v,\psi) \in V_k \times M_k$ da equação linear

$$(1.17)\qquad (\nu(\xi+S)\nabla v, \nabla v^j) + B(w,v,v^j) - \alpha(\psi g, v^j) - \alpha(Sg, v^j) = 0,$$

$$(1.18)\qquad (k(\xi+S)\nabla\psi, \nabla\psi^j) + b(w,\psi,\psi^j) + (k(\xi+S)\nabla S, \nabla\psi^j) + b(w,S,\psi^j) = 0,$$

para $1 \leq j \leq k$. (1.17), (1.18) é um sistema de $2k$ equações lineares para os coeficientes das expansões

$$v = \sum_{j=1}^{k} c_j v^j \ , \ \psi = \sum_{j=1}^{k} d_j \psi^k.$$

O sistema (1.17), (1.18) tem uma única solução porque o sistema homogêneo associado ($S = 0$) tem uma única solução. De fato, se (v, ψ) é solução do sistema homogêneo, multiplicando (1.17) por c_j e (1.18) por d_j, e somando com $j = 1 \ldots, k$, obtemos

$$\nu_0(T_0)|\nabla v|^2 = 0, \quad k_0(T_0)|\nabla \psi|^2 = 0.$$

Assim, $v = 0$ e $\psi = 0$.

A continuidade de L pode ser demostrada usando argumentos similares aos utilizados para passar ao limite em (1.14), (1.15).

Por outro lado, temos as seguintes estimativas

$$|\nabla v| \leq \frac{\alpha C}{\nu_0(T_0)}(|g|\,|\nabla \psi| + |g|\,\|S\|_{H^1(\Omega)}), \tag{1.19}$$

$$|\nabla \psi| \leq \frac{C}{k_0(T_0)}|S|_3|\nabla w| + \frac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\|S\|_{H^1(\Omega)}, \tag{1.20}$$

as quais são provadas da mesma forma que antes substituindo (1.20) em (1.19) tem-se

$$|\nabla v| \leq \frac{\alpha C^2}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}|g|\,|S|_3|\nabla w| + \frac{\alpha C}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}|g|\,\|S\|_{H^1(\Omega)}(k_1(T_0) + k_0(T_0)).$$

Assim, em virtude de (1.11) temos

$$|\nabla v| \leq \frac{1}{2}|\nabla w| + \alpha\frac{C}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}|g|\,\|S\|_{H^1(\Omega)}(k_1(T_0) + k_0(T_0)). \tag{1.21}$$

Em vista de (1.20) e (1.21), obtém-se

$$|\nabla v| \leq F_1(\|S\|_{H^1(\Omega)}) \ \text{ e } \ |\nabla \psi| \leq F_2(\|S\|_{H^1(\Omega)}) \ \text{ quando } \ |\nabla w| \leq F_1(\|S\|_{H^1(\Omega)}).$$

Conseqüentemente, (1.19) e (1.20) definem uma aplicação contínua $L : M \to M$, onde $M = \{(w, \xi) \in V_k \times M_k; |\nabla w| \leq F_1(\|S\|_{H^1(\Omega)}) \text{ e } |\nabla \xi| \leq F_2(\|S\|_{H^1(\Omega)})\}$. Observe que M é um conjunto fechado e convexo de um espaço de dimensão finita, logo aplicando o Teorema do ponto fixo de Brower obtemos um ponto fixo de L. Claramente esse ponto fixo é solução de (1.14), (1.15). Isto completa a prova do teorema. □

4. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FORTES

Nesta seção apresentaremos um resultado que fornece soluções mais regulares que as obtidas na seção anterior. Os argumentos que utilizaremos são similares aos usados por Temam [29], a dificuldade adicional é estimar os termos não lineares de maior ordem que aparecem nas equações. Eles não podem ser tratados de forma tradicional, para isto precisaremos de estimativas para a pressão associada à decomposição de Helmholtz.

TEOREMA 1.4: Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n (n = 2$ ou $3)$ de classe $C^{1,1}$, suponha que ν e k são de classe $C^1, g \in L^3(\Omega)$ e $T_0 \in H^{3/2}(\partial\Omega)$. Então, se $\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$ é suficientemente pequeno, existe uma solução forte de (1.1), (1.2), isto é existe um par $(u, T) \in (V \bigcap H^2(\Omega)) \times H^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} P(-div(\nu(T)\nabla u) + u \cdot \nabla u - \alpha T g) &= \text{ em } L^2(\Omega), \\ -div(k(T)\nabla T) + u \cdot \nabla T &= 0 \text{ em } L^2(\Omega), \\ T &= T_0 \quad q.t.p \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned}$$

PROVA: Escolhemos a extensão S de T_0 tal que

$$-\Delta S = 0 \text{ em } \Omega, \quad S = T_0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

É conhecido que $S \in H^2(\Omega)$ e satisfaz

$$\|S\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}. \tag{1.22}$$

Multiplicando (1.17) por $\alpha_j c_j$ e somando em j de 1 até k, obtém-se

$$(div(\nu(\xi + S)\nabla v), \tilde{\Delta} v) - B(w, v, \tilde{\Delta} v) + \alpha(\psi g, \tilde{\Delta} v) + \alpha(Sg, \tilde{\Delta} v) = 0$$

Usando a identidade

$$div(\nu(\xi + S)\nabla v) = \nu(\xi + S)\Delta v + \nu'(\xi + S)\nabla(\xi + S)\nabla v,$$

onde $\nabla(\xi + S)\nabla v$ denota o vetor que tem a i-ésima componente dada por $[\nabla(\xi + S)\nabla v]_i = (\nabla(\xi + S), \nabla v_i)_{\mathbb{R}^n}$, obtemos

$$\begin{aligned} (\nu(\xi + S)\Delta v, \tilde{\Delta} v) &= B(w, v, \tilde{\Delta} v) - \alpha(\psi g, \tilde{\Delta} v) - \alpha(Sg, \tilde{\Delta} v) \\ &- (\nu'(\xi + S)\nabla(\xi + S)\nabla v, \tilde{\Delta} v). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Agora, da decomposição de Helmoltz $-\Delta v = \tilde{\Delta} v + \nabla q$ temos a estimativa (Temam [29])

$$\|q\|_{H^1(\Omega)} \leq C|\Delta v|.$$

Portanto, (1.23) transforma-se em

$$
\begin{aligned}
(\nu(\xi+S)\tilde{\Delta}v,\tilde{\Delta}v) &= -B(w,v,\tilde{\Delta}v)+\alpha(\psi g,\tilde{\Delta}v)-\alpha(Sg,\tilde{\Delta}v)\\
&- (\nu'(\xi+S)\nabla(\xi+S)\nabla v,\tilde{\Delta}v)-(\nu(\xi+S)\nabla q,\tilde{\Delta}v)
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, imersões de Sobolev e (1.8), obtém-se

$$
\begin{aligned}
(1.24)\qquad |\tilde{\Delta}v|^2 &\leq \frac{C}{\nu_0(T_0)}(|\nabla w|+\nu'(T_0)(|\nabla\xi|+\|S\|_{H^2(\Omega)}))|\tilde{\Delta}v|^2\\
&+ \frac{\alpha C}{\nu_0(T_0)}|g|_3(|\nabla\psi|+\|S\|_{H^1(\Omega)})|\tilde{\Delta}v|+\left|\left(\frac{\nu(\xi+S)}{\nu_0(T_0)}\nabla q,\tilde{\Delta}v\right)\right|,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\nu_1'(T_0)=2\sup\{|\nu'(s)|;|s|\leq\sup_{\partial\Omega}|T_0|\}.
$$

Observe-se que

$$
(\nu(\xi+S)\nabla q,\tilde{\Delta}v)=-(q,div(\nu(\xi+S)\tilde{\Delta}v))=-(q,(\nu'(\xi+S)\nabla(\xi+S),\tilde{\Delta}v)_{\mathbb{R}^n})
$$

já que $div\ \tilde{\Delta}v=0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
(1.25)\qquad |(\frac{\nu(\xi+S)}{\nu_0(T_0)}\nabla q,\tilde{\Delta}v)| &\leq \frac{\nu_1'(T_0)}{\nu_0(T_0)}|q|_4|\nabla(\xi+S)|_4|\tilde{\Delta}v|\\
&\leq C\frac{\nu_1'(T_0)}{\nu_0(T_0)}(|\Delta\xi|+\|S\|_{H^2})\|q\|_{H^1(\Omega)}|\tilde{\Delta}v|.
\end{aligned}
$$

Combinando estimativas (1.24), (1.25) e a estimativa para q temos

$$
\begin{aligned}
(1.26)\qquad |\tilde{\Delta}v| &\leq \frac{\overline{C}}{\nu_0(T_0)}(|\tilde{\Delta}w|+2\nu_1'(T_0)(|\Delta\xi|+\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}))|\tilde{\Delta}v|\\
&+ \alpha\frac{\overline{C}}{\nu_0(T_0)}|g|_3(|\Delta\psi|+\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}).
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
(1.27)\ |\Delta\psi| &\leq \frac{\overline{C}}{k_0(T_0)}(|\tilde{\Delta}w|+k_1'(T_0)(|\Delta\xi|+\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}))(|\Delta\psi|+\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)})\\
&+ \frac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)},
\end{aligned}
$$

onde $k_1'(T_0) = 2\sup\{|k'(s)|; |s| \leq \sup_{\partial\Omega}|T_0|\}$ e $\overline{C}$ é uma constante positiva. Suponha $|\tilde{\Delta} w| \leq \dfrac{4\alpha\overline{C}}{\nu_0(T_0)}|g|_3\Big(1+\dfrac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\Big)\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$, $|\Delta\xi| \leq \Big(1+2\dfrac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\Big)\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$ e $\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$ suficientemente pequeno tal que

$$\frac{\overline{C}}{k_0(T_0)}\left[1+2k_1'(T_0)\left(1+\frac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\right)\right]\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} < \frac{1}{2}$$

e

$$\frac{\overline{C}}{\nu_0(T_0)}\left[\frac{4\alpha\overline{C}}{\nu_0(T_0)}|g|_3 + 4\nu_1'(T_0)\right]\left(1+\frac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\right)\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} < \frac{1}{2}$$

Observe-se que isto é possível porque $\lim\limits_{\delta\to 0+}\nu(\delta) > 0$ e $\lim\limits_{\delta\to 0+}k(\delta) > 0$.

Logo, das expressões anteriores e das estimativas (1.26), (1.27) deduzimos

$$\begin{aligned}
|\tilde{\Delta} v| &\leq 4\frac{\alpha\overline{C}}{\nu_0(T_0)}|g|_3\left(1+\frac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\right)\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} \equiv \ell \\
|\Delta\psi| &\leq \left(1+2\frac{k_1(T_0)}{k_0(T_0)}\right)\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} \equiv m
\end{aligned}$$

Consequentemente, se $\|T_0\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)}$ é suficientemente pequeno, podemos achar um ponto fixo (u^k,φ^k) de L tal que $(u^k,\varphi^k) \in \{(w,\xi) \in V_k \times M_k; |\tilde{\Delta} w| \leq \ell \text{ e } |\Delta\xi| \leq m\}$. Logo temos uma sequência (u^k,φ^k) limitada em $H^2(\Omega)$ e satisfazendo (1.14), (1.15). Isto prova o Teorema. □

5. REGULARIDADE DAS SOLUÇÕES FORTES

Consideremos a solução obtida na Seção 4, existe uma única função p (a pressão) em $H^1(\Omega)\bigcap L_0^2(\Omega)$, onde $L_0^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); (f,1) = 0\}$, que satisfaz (veja Temam [29])

$$-\,div(\nu(T)\nabla u) + u\cdot\nabla u - \alpha T g = -grad\ p. \tag{1.28}$$

Nesta seção apresentaremos um resultado de regularidade para a solução (u, T, p).

TEOREMA 1.5: Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n (n = 2$ ou $3)$ de classe $C^{k+1,1}$; asuma que as funções ν e k são de classe C^{k+1}, $g \in W^{k,3}(\Omega)$ e $T_0 \in W^{k+7/4,4}(\partial\Omega)$. Então a solução forte (u, T) satisfaz $u \in H^{k+2}(\Omega)$ e $T \in W^{k+2}(\Omega)$ e a pressão associada satisfaz $p \in H^{k+1}(\Omega)\bigcap L_0^2(\Omega)$.

Antes de provar o teorema, precisamos de alguns lemas técnicos.

LEMA 1.6: Seja h uma função de classe C^k tal que $sup\{|\dfrac{d^i h}{dt^i}(t)|, t \in I\!R\} \leq C, i = 0, \ldots, k$. Então existem constantes $C(k)$ e $C_1(k)$ tais que

(i) $\|h(T)\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} \leq C(k) \sum_{\ell=0}^{k} \|T\|^{\ell}_{W^{k+1,4}(\Omega)}$,

(ii) $\|h(T)\|_{W^{k,4}(\Omega)} \leq C_1(k) \sum_{\ell=0}^{k} \|T\|^{\ell}_{W^{k,4}(\Omega)}$

para todo $T \in W^{k+1,4}(\Omega)$.

PROVA. Provaremos (i) por indução em k, a outra desigualdade pode ser provada de maneira análoga.

Para $k = 0$, o resultado é trivial. Suponha que o resultado é verdadeiro para todo $j \in I\!N$ tal que $0 \leq j < k$. Tomando $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \beta_i \in I\!N, |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n = k$, se $i \in \{1, \ldots, n\}$ é tal que $\beta_i > 0$, temos.

$$\begin{aligned} \partial^\beta(h(T)) &= \partial^{\beta'}(\partial_{x_i}(h(T)) = \partial^{\beta'}(h'(T)\partial_{x_i}T) \\ &= \sum_{\gamma+\delta=\beta'} c(\gamma,\delta)\partial^\gamma(h'(T))\partial^\delta(\partial_{x_i}T), \end{aligned}$$

onde $\beta' = \beta - \beta_i e_i, e_i$ é o i-ésimo vetor da base canônica de $I\!R^n, c(\gamma, \delta)$ são constantes positivas e $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n), \gamma_j, \delta_j \in I\!N$.

Logo, pela hipótese de indução e as imersões de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} |\partial^\beta(h(T))|_\infty &\leq \sum_{\gamma+\delta=\beta'} c(\gamma,\delta)|\partial^\gamma(h'(T))|_\infty|\partial^\delta(\partial_{x_i}T)|_\infty \\ &\leq \sum_{\gamma+\delta=\beta'} c(\gamma,\delta)M(|\gamma|)\sum_{\ell=1}^{|\gamma|}|T|^{\ell}_{W^{|\gamma|+1,4}(\Omega)}|T|_{W^{|\delta|+1,\infty}(\Omega)} \\ &\leq \sum_{\gamma+\delta=\beta'} c(\gamma,\delta)M(|\gamma|)C\sum_{\ell=1}^{|\gamma|}|T|^{|\gamma|}_{W^{|\gamma|+1,4}(\Omega}|T|_{W^{|\delta|+2,4}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Observando que $|\gamma| \leq k-1, |\delta| \leq k-1$ deduzimos

$$|\partial^\beta(h(T))|_\infty \leq C(k)\sum_{\ell=1}^{k}\|T\|^{\ell}_{W^{k+1,4}(\Omega)}. \quad \square$$

LEMA 1.7: Suponha que h satisfaz as condições do Lema 1.6, então

$$|h(T)f|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C_1(k)(\sum_{\ell=1}^{k} \|T\|^{\ell}_{W^{k+1,4}(\Omega)})\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

para toda $T \in W^{k+1,4}(\Omega)$ e toda $f \in W^{k,p}(\Omega)$.

PROVA. Seja $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \beta_i \in I\!N, \quad |\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n = k$, tem-se

$$\partial^{\beta}(h(T)f) = \sum_{\gamma+\delta=\beta} c(\gamma,\delta)\partial^{\gamma}(h(T))\partial^{\delta} f$$

devido ao lema anterior temos

$$\begin{aligned}
|\partial^{\beta}(h(T)f)|_p &\leq \sum_{\gamma+\delta=\beta} c(\gamma,\delta)|\partial^{\gamma}(h(T))|_{\infty}|\partial^{\delta} f|_p \\
&\leq \sum_{\gamma+\delta=\beta} c(\gamma,\delta)C(\gamma,\delta)\sum_{\ell=1}^{|\gamma|} |T|^{\ell}_{W^{|\ell|+1,4}(\Omega)}|\partial^{\delta} f|_p \\
&\leq C_1(k)(\sum_{\ell=1}^{k} |T|^{\ell}_{W^{k+1,4}(\Omega)})|f|_{W^{k,p}(\Omega)} \quad \Box.
\end{aligned}$$

LEMA 1.8: Seja (u,T) uma solução forte do problema (1.1), (1.2), assuma $T_0 \in W^{7/4,4}(\partial\Omega)$. Então $T \in W^{2,4}(\Omega)$.

PROVA. Observe-se que $T \in H^2(\Omega)$ satisfaz

$$(1.29) \qquad \begin{cases} -\Delta T + \dfrac{k'(T)}{k(T)}|\nabla T|^2 + \dfrac{1}{k(T)}u.\nabla T = 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ T = T_0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Da inclusão $W^{7/4,4}(\partial\Omega) \subseteq W^{5/3,3}(\partial\Omega)$ e das estimativas

$$\begin{aligned}
|\frac{k'(T)}{k(T)}|\nabla T|^2|_3 &\leq \frac{k_1'(T_0)}{k_0(T_0)}|\nabla T|_6^2 \leq \frac{k_1'(T_0)}{k_0(T_0)}C|\Delta T|^2, \\
|\frac{u\nabla T}{k(T)}|_3 &\leq \frac{1}{k_0(T_0)}|u|_6|\nabla T|_6 \leq \frac{C}{k_0(T_0)}|\nabla u||\Delta T|,
\end{aligned}$$

e usando as bem conhecidas propriedades de regularidade L^p para o operador Laplaciano, obtemos T in $W^{2,3}(\Omega)$. Logo $\nabla T \in L^r(\Omega)$, para todo $r \in [1,\infty)$, consequentemente

$$\left|\frac{k'(T)}{k(T)}|\nabla T|^2\right|_4 < \infty \quad \text{e} \quad \left|\frac{1}{k(T)}u.\nabla T\right|_4 < \infty.$$

Aplicando regularidade L^p de novo, temos $T \in W^{2,4}(\Omega)$. $\square$

PROVA DO TEOREMA 1.5: A prova é por indução em k. De acordo com o Lema 1.8 o resultado segue-se para $k = 0$. Agora suponha que temos o teorema para $k-1$ (logo $T \in W^{k+1,4}(\Omega)$). Tomando $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \beta_i \in I\!N, |\beta| = \beta_i + \ldots + \beta_n = k$, obtém-se

$$\partial^\beta(u\nabla T) = \sum_{\gamma+\delta=\beta} c(j)\partial^\gamma u \partial^\delta(\nabla T) + u\partial^\beta(\nabla T),$$

onde $c(j)$ é uma constante positiva, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n), \gamma_i, \delta_i \in I\!N$. Assim temos que,

$$|\partial^\beta(u\nabla T)|_4 \leq \sum_{\gamma+\delta=\beta} c(j)|\partial^\gamma u|_4 |\partial^\delta(\nabla T)|_\infty + |u|_\infty |\partial^\beta(\nabla T)|_4.$$

Pelas imersões de Sobolev e a hipótese de indução conclue-se que

$$\|u\nabla T\|_{W^{k,4}} \leq C_{\Omega,k}\|u\|_{W^{k+1,2}}\|T\|_{W^{k+1,4}} + C_{\Omega,k}\|u\|_{H^2}\|T\|_{W^{k+1,4}} < \infty.$$

Em virtude do Lema 1.5.3 temos $\dfrac{1}{\nu(T)}u\nabla T \in W^{k,4}$.

Em forma similar vem que

$$\begin{aligned} |\partial^\beta|\nabla T|^2|_4 &\leq \sum_{\gamma+\delta=\beta} c(j)|\partial^\gamma \nabla T|_\infty |\partial^\delta \nabla T|_4 + |\partial^\beta \nabla T|_4 |\nabla T|_\infty \\ &\leq C_{\Omega,k}|T|^2_{W^{k+1,4}} + C_{\Omega,k}|T|_{W^{k+1,4}}|T|_{W^{2,4}} < \infty \end{aligned}$$

e, consequentemente, $\dfrac{k'(T)}{k(T)}|\nabla T|^2 \in W^{k,4}(\Omega)$.

Em virtude da regularidade L^p para a equação (1.29) obtém-se $T \in W^{k+2,4}(\Omega)$.

Agora, observamos que u é a solução do seguinte problema de Stokes

$$(1.30)\begin{cases} -\Delta u + \nabla\left(\dfrac{p}{\nu(T)}\right) = -\dfrac{\nu'(T)}{\nu(T)^2}p\nabla T - \dfrac{1}{\nu(T)}u.\nabla u + \alpha\dfrac{T}{\nu(T)}g + \dfrac{\nu'(T)}{\nu(T)}\nabla T.\nabla u, \\ div\ u = 0 \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

donde p satisfaz (1.28).

Da mesma forma que antes, usando indução e resultados de regularidade L^p para a equação (1.30) (Cattabriga [4], Amrouche e Girault [2]), conclui-se que $u \in H^{k+2}(\Omega)$, $\dfrac{p}{\nu(T)} \in H^{k+1}(\Omega)$. Pelo Lema 1.7 tem-se então $p \in H^{k+1}(\Omega)$. Isto completa a prova. □

6. UNICIDADE

Nesta seção provaremos um resultado de unicidade para soluções *"pequenas"*.

TEOREMA 1.9: Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n (n = 2$ ou $3)$ de classe $C^{1,1}$. Assuma que as funções ν, k e k' são Lipschitz contínuas. Existe $\varepsilon > 0$ tal que se (u, T) é uma solução fraca do problema (1.1), (1.2) satisfazendo $|\nabla u| + \|T\|_{H^2(\Omega)} < \varepsilon$, então dita solução é única.

PROVA. Sejam $(u_1, T_1), (u_2, T_2)$ duas soluções de (1.1), (1.2) tais que T_1 e T_2 são funções de $H^2(\Omega)$. Denotando $w = u_1 - u_2, \xi = T_1 - T_2$, temos $w \in V$ e $\xi \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
&(\nu(T_1)\nabla w, \nabla v) + B(w, u_1, v) + B(u_2, w, v) - \alpha(\xi g, v) + ((\nu(T_1) - \nu(T_2))\nabla u_2, \nabla v) = 0 \\
-\ &(div(k(T_1)\nabla \xi), \psi) + b(w, T_1, \psi) + b(u_2, \xi, \psi) - (div((k(T_1) - k(T_2))\nabla T_2), \psi) = 0, \\
&\forall v \in V, \forall \psi \in L^2(\Omega)
\end{aligned}$$

Tomando $v = w$ e $\psi = -\Delta\xi$ nesta última expressão obtemos

$$\begin{aligned}
(1.31) \qquad |\nabla w| &\leq \frac{\alpha C}{\nu_0(T_0)}|g||\Delta\xi| + \frac{C_B}{\nu_0(T_0)}|\nabla u||\nabla u_1| + \frac{C_1}{\nu_0(T_0)}|\xi|_\infty|\nabla u_2| \\
(1.32) \qquad |\Delta\xi| &\leq \frac{C}{k_0(T_0)}||T_1||_{H^2}|\nabla w| + \frac{C}{k_0(T_0)}|\nabla u_2||\Delta\xi| \\
&+ \frac{C_1}{\nu_0(T_0)}|\xi|_\infty|\Delta T_2| + \frac{k_1'(T_0)}{k_0(T_0)}C||T_2||_{H^2}|\Delta\xi| + \frac{C_1}{k_0(T_0)}||T_2||_{H^2}^2|\xi|_\infty
\end{aligned}$$

aqui C_1 é uma constante positiva tal que $|k'(t) - k'(s)| + |k(t) - k(s)| + |\nu(t) - \nu(s)| \leq C_1|t - s|$ para todo t, s em $\mathbb{R}$. Isto pode ser mostrado da mesma forma que na prova do Teorema 1.4.

Note que $|\xi|_\infty \leq C|\Delta\xi|$, logo (1.32) implica

$$|\Delta\xi| \leq \frac{C}{k_0(T_0)}||T_1||_{H^2}|\nabla w| + \frac{C}{k_0(T_0)}\left[|\nabla u_2| + (C_1 + k_1'(T_0))||T_2||_{H^2} + C_1||T_2||_{H^2}^2\right]|\Delta\xi|$$

Assumindo $\dfrac{C}{k_0(T_0)}\left[|\nabla u_2| + (C_1 + k_1'(T_0))||T_2||_{H^2} + C_1||T_2||_{H^2}^2)\right] < \dfrac{1}{2}$, obtém-se

$$|\Delta\xi| \leq \frac{2}{k_0(T_0)}||T_1||_{H^2}|\nabla w| \tag{1.33}$$

substituindo (1.33) em (1.31), temos

$$|\nabla w| \leq \left[\frac{C}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}||T_1||_{H^2}(\alpha C|g| + C_1|\nabla u_2|) + \frac{C_B}{\nu_0(T_0)}|\nabla u_1|)\right]|\nabla w|.$$

Conseqüentemente, se $\frac{C}{\nu_0(T_0)k_0(T_0)}||T_1||_{H^2}(\alpha c|g|+C_1|\nabla u_2|)+\frac{C_B}{\nu_0(T_0)}|\nabla u_1| < 1$, então $|\nabla w| = |\Delta\xi| = 0$. $\square$

CAPÍTULO 2

O CASO DE EVOLUÇÃO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudamos a existência e unicidade de soluções do problema (1)–(2) no caso de evolução. A técnica consiste em construir tal solução via aproximações de Galerkin. Continuaremos usando as bases espectrais como base de aproximação. Isto será importante ainda no caso de solução fraca, devido à prova de convergência das aproximações.

Em [17], Morimoto obtém uma solução fraca para o caso clássico com condições mixtas na fronteira, porém o argumento usado por Morimoto para obter uma limitação uniforme para as derivadas temporais das aproximações, é inviável no caso geral. Apresentamos no Teorema 2.4, um caminho fácil para a obtenção de tais estimativas, baseado em argumentos de Lions [13].

No caso ν e k constante (clássico) é possível obter soluções fortes via semigrupos [11], da mesma forma como foi feito para as equações de Navier–Stokes [31].

Como já foi observado no capítulo anterior, os termos extras da equação generalizada fornecem um grau de dificuldade maior, o que obriga a fazer hipótese um pouco mais restritivas (por exemplo: dados iniciais mais regulares).

2. PRELIMINARES

Neste capítulo adotaremos as mesmas notações do Capítulo 1. Além disso, quando B é um espaço de Banach, $L^q(0,T,B)$ denotará o espaço das funções com valores em B, definidas em $(0,T)$ e que são L^q-integrável no sentido de Bochner.

Também, P_k denotará a projeção $P_k : (L^2(\Omega))^n \to V_k =< v^1, \dots, v^k >$ e $\tilde{P}_k$ denotará a projeção $\tilde{P}_k : L^2(\Omega) \to W_k =< \psi^1, \dots, \psi^k >; H^{-1}(\Omega)$ é o espaço dual (no sentido topológico) de $H_0^1(\Omega)$ e V' é o espaço dual de V.

Seja S uma função definida em $[0,T) \times \Omega$ que satisfaz $S = \eta$ sobre $[0,T) \times \partial\Omega$, então mediante a mudança de variáveis $\varphi = \theta - S$ obtemos

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u - div(\nu(\varphi + S)\nabla u) + u.\nabla u - \alpha\varphi g - \alpha S g + \nabla p = 0, \\ div \ \ u = 0, \\ \partial_t\varphi - div(k(\varphi + S)\nabla\varphi) + u.\nabla\varphi + \partial_t S = \\ -div(k(\varphi + S)\nabla S) + u\nabla S \ \ \text{em} \ \ (0,T) \times \Omega, \end{cases}
$$

$$
(2.2) \qquad u = 0 \ \ ; \ \ \varphi = 0 \ \ \text{sobre} \ \ (0,T) \times \partial\Omega,
$$

$$
(2.3) \qquad u(0) = \varphi_0 \ ; \ \varphi(0) = \varphi_0 \equiv \theta_0 - S(0).
$$

supondo que $S \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ e $\partial_t S \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$, podemos reformular o problema (2.1) - (2.2) da seguinte maneira

$$
(2.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u,v) + (\nu(\varphi + S)\nabla u, \nabla v) + B(u,u,v) - \alpha((\varphi + S)g, v) = 0 \\ \text{em} \ \ D'(0,T), \ \ \text{para todo} \ \ v \in V, \\ \dfrac{d}{dt}(\varphi + S, \psi) + (k(\varphi + S)\nabla(\varphi + S), \nabla\psi) + b(u, \varphi + S, \psi) = 0 \\ \text{em} \ \ D'(0,T), \ \ \text{para todo} \ \ \psi \in H_0^1(\Omega). \end{cases}
$$

Adotaremos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO: Um par $\{u, \theta\}$ é chamado uma solução fraca de (2.1) – (2.3) se existe uma função $S \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ tal que $u \in L^2(0,T; V)), \varphi = \theta - S \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), S = \eta$ sobre $(0,T) \times \partial\Omega$ e (u, φ) é solução de (2.4).

Neste capítulo suporemos

$$
(2.5) \qquad 0 < \nu_0 < \nu(\sigma) < \nu_1 < +\infty \ \ ; \ \ 0 < k_0 < k(\sigma) < k_1 < +\infty \ \ ; \ \ \forall\sigma \in \mathbb{R}.
$$

Escolheremos a extensão S de η tal que

$$
\begin{cases} -\Delta S(t) = 0 \ \ \text{em} \ \ \Omega, \\ \quad S(t) = \eta(t) \ \ \text{sobre} \ \ \partial\Omega, \end{cases}
$$

para $t \in [0,T]$.

OBSERVAÇÃO 2.1: É bem conhecido que se Ω é de classe $C^{0,1}$ e $\eta(t) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, então $S(t) \in H^1(\Omega)$ e tem-se a estimativa $\|S(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\eta(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$. No caso Ω de classe $C^{1,1}$, podemos aplicar um argumento de dualidade devido a Lions-Magenes [14] para concluir que se $\eta(t)$ e $H^m(\Omega)(m = -1, \ldots, 2)$ então $S(t) \in H^m(\Omega)$. Além disso,

$$\|S(t)\|_{H^m(\Omega)} \leq C\|\eta(t)\|_{H^{m-1/2}(\partial\Omega)} \quad ,m = -1, \ldots, 2. \tag{2.6}$$

Se temos somente que $u \in L^2(0,T;V)$ e $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, não é claro que a condição (2.3) tenha sentido. Porém, as condições sob η, u_0 e θ_0 serão suficiente para obter $u_t \in L^1(0,T;V')$ e $\varphi_t \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$, logo u e φ serão escolhidas como sendo funções absolutamente contínuas de $[0,T]$ em V' e $H^{-1}(\Omega)$ respectivamente. Portanto, $u(0), \varphi(0)$ terão sentido nesses espaços (de fato no caso $n = 2, u$ e φ serão contínuas na norma $L^2(\Omega)$).

Finalmente, provaremos os seguintes lemas que serão usados na seção 3.

LEMA 2.2. Sejam φ e ψ funções positivas tais que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) + \psi(t) &\leq C\varphi^3(t) + h(t)\varphi + f(t) \quad ,t \in (0,T] \\ \varphi(0) &= \varphi_0 \end{aligned}$$

onde $h(\cdot)$ e $f(\cdot)$ são funções positivas e contínuas. Considere $T_1, 0 < T_1 \leq T$, tal que

$$C\int_0^T (2\varphi_0 + 2\int_0^s f(\tau)d\tau)^2 ds + \int_0^T h(s)ds \leq \frac{1}{e} \quad ,\forall t \in [0,T_1]. \tag{2.7}$$

Então,

$$\varphi(t) + \int_0^t \psi(s)ds < (2\varphi_0 + 2\int_0^t f(s)ds) \ \ \forall t \in [0,T_1]. \tag{2.8}$$

PROVA: Observemos primeiro, que se t for suficientemente pequeno então vale (2.8).

Suponhamos por contradição que (2.8) não é válido e seja $0 < T_2 < T_1$ o primeiro tempo tal que vale a igualdade em (2.8). Então φ satisfaz no intervalo $[0,T_2)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)ds &\leq \int_0^t (C(2\varphi_0 + 2\int_0^s f(\sigma)d\sigma)^2 + h(s))\varphi(s)ds \\ &+ \int_0^t f(s)ds + \varphi(0). \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall e (2.7), obtém-se

$$\varphi(t) \leq (\varphi_0 + \int_0^t f(s)ds)\exp(\frac{1}{e}).$$

Logo reemplazando esta expressão na desigualdade integral anterior, conclue-se

$$\varphi(t) + \int_0^t \psi(s)ds \leq (\varphi_0 + \int_0^t f(s)ds)(exp(\frac{1}{e} - 1) + 1) \quad , \forall t \in [0, T_2).$$

Por continuidade temos

$$\begin{aligned} \varphi(T_2) + \int_0^{T_2} \psi(s)ds &\leq (\varphi_0 + \int_0^{T_2} f(s)ds)(exp(\frac{1}{e} - 1) + 1) \\ &< 2(\varphi_0 + \int_0^{T_2} f(s)ds). \end{aligned}$$

Esta contradição demonstra o Lema. □

O seguinte lema nos dá uma estimativa fundamental para a obtenção de soluções fortes (Teorema 2.5).

LEMA 2.3. Seja $v \in V \bigcap (H^2(\Omega))^n$, consideremos a decomposição de Helmholtz $\Delta v = \tilde{\Delta} v + \nabla q$, onde $q \in L_0(\Omega) \bigcap H^1(\Omega)$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante positiva C_ε tal que vale

$$|q| \leq C_\varepsilon |\nabla v| + \varepsilon |\Delta v|.$$

PROVA: Para simplificarmos a demonstração assumiremos $v \in (C^2(\Omega))^n$. Notemos que $div \tilde{\Delta} v = 0$ e podemos aplicar a fórmula de Green para obter

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi \Delta v . \nu d\sigma &= (\Delta v, grad\varphi) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} (\nabla v_i, \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial X_i}) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial \nu} . \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad , \forall \varphi \in H^2(\Omega) \end{aligned}$$

onde ν é o vetor unitário normal a $\partial\Omega$. Conseqüentemente, temos

$$(2.9) \qquad \|\Delta v . \nu\|_{H^{-3/2}(\partial\Omega)} \leq \sum_{i=1}^{n} (|\nabla v_i| + \|\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}).$$

Para calcular a norma $\|\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$, consideremos $\gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tal que $\|\gamma\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = 1$.

Aplicando a fórmula de Green de novo, obtém-se

$$(2.10) \qquad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\gamma d\sigma = (\nabla v_i, \nabla\varphi) + (\Delta v_i, \varphi),$$

onde $\varphi \in H^1(\Omega)$ é uma extensão arbitrária de γ.

Seja $\varepsilon > 0$, então podemos escolher uma extensão φ de γ tal que $|\nabla\varphi| < C_\varepsilon$ e $|\varphi| < \varepsilon$, onde C_ε não depende de γ (veja a prova do Lema 1.3). Logo, a identidade (2.10) para essa extensão particular implica $|\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial \nu}\gamma| \leq C_\varepsilon|\nabla v_i| + \varepsilon|\Delta v_i|$, $\forall\gamma \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ tal que $\|\gamma\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = 1$, e conseqüentemente:

$$\|\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \leq C_\varepsilon|\nabla v_i| + \varepsilon|\Delta v_i|.$$

Agora, é suficiente observar que q é solução do seguinte problema de Newmann

$$\Delta q = -div\Delta v = 0 \text{ em } \Omega \ ; \ \frac{\partial q}{\partial \nu} = -\Delta v \ \text{ sobre}\partial\Omega$$

Logo, temos a estimativa

$$|q| \leq C\|\Delta v \cdot \nu\|_{H^{-3/2}(\partial\Omega)}.$$

As últimas desigualdades junto com (2.9) nos dão a estimativa desejada. □

2. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS

Nesta seção provaremos o seguinte resultado.

TEOREMA 2.4. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n (n = 2$ ou $3)$; sejam ν, k funções satisfazendo (2.5) e $g \in L^\infty(0,T; L^p(\Omega))(p \geq 3/2$ se $n = 3$ e $p > 1$ se $n = 2)$.

Além disso, suponhamos que uma das duas condições seguintes é satisfeita

$$(2.11) \qquad \Omega \text{ é de classe } C^{0,1}, \eta \in C([0,T]; H^{1/2}(\partial\Omega)) \ \text{ e } \ \partial_t\eta \in L^2(0,T; H^{1/2}(\partial\Omega))$$

(2.12) Ω é de classe $C^{1,1}, \eta \in L^{\frac{2n}{4-n}}(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \bigcap C([0,T];H^{-1/2}(\partial\Omega))$ e $\partial_t \eta \in L^2(0,T;H^{-3/2}(\partial\Omega))$.

Então, para todo par (u_0, θ_0) e $H \times L^2(\Omega)$ existe uma solução fraca (u,θ) de (2.1) – (2.2) tal que $u \in L^\infty(0,T;H), \theta \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e além disso

$$|u(t) - u_0| \to 0 \text{ e } |\theta(t) \to \theta_0| \to 0 \text{ quando } t \to 0^+. \tag{2.13}$$

PROVA: Se assumimos (2.11), é claro que S satisfaz (2.6) para $m = 1$; mais ainda $S \in C([0,T];H^1(\Omega))$. Por outro lado, observe-se que $\partial_t S(t)$ é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta \partial_t S(t) = 0 \text{ em } \Omega, \\ \partial_t S(t) = \partial_t \eta(t) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, $\partial_t S(t) \in H^1(\Omega)$ e satisfaz $\|\partial_t S(t)\|_{H^1} \leq C\|\partial_t \eta(t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ quase sempre em $[0,T]$. Se assumirmos (2.10), então pela Observação 2.1 e estimativas (2.6) segue-se que $S \in L^{\frac{2n}{4-n}}(0,T;H^1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ e $\partial_t S \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

Agora para cada $k \in I\!N$ consideramos as aproximações de Galerkin $u^k(t,x) = \sum_{j=1}^{k} c_{k,j}(t) v^j(x)$; $\varphi^k(t,x) = \sum_{j=1}^{k} d_{k,j}(t)\psi^j(x)$ que satisfazem o problema aproximado

$$(u_t^k, v^j) + (\nu(\varphi^k + S)\nabla u^k, \nabla v^j) + B(u^k, u^k, v^j) - \alpha((\varphi^k + S)g, v^j) = 0, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} &(\partial_t \varphi^k, \psi^j) + (k(\varphi^k + S)\nabla\varphi^k, \nabla\psi^j) + b(u^k, \varphi^k, \psi^j) = \\ &-(S_t, \psi^j) - (k(\varphi^k + S)\nabla S, \nabla\psi^j) - b(u^k, S, \psi^j), \end{aligned} \tag{2.15}$$

para $1 \leq j \leq k$.

$$u^k(0) = P_k u_0 \quad , \quad \varphi^k(0) = \tilde{P}_k \varphi_0 \tag{2.16}$$

As equações acima constituem um sistema de equações diferenciais ordinárias para o qual vale o Teorema de Existência Local de Soluções. Assim, para cada $k \in I\!N$ existe $t_k > 0$ tal que (u^k, φ^k) é solução do sistema no intervalo $[0, t_k]$. As estimativas a serem provadas a seguir, mostram que na verdade podemos tomar $t_k = T$.

Multiplicando (2.14) por $c_{k,j}$, somando com respeito a j e notando que $B(u^k, u^k, u^k) = 0$, obtém-se:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^k|^2 + (\nu(\varphi^k + S)\nabla u^k, \nabla u^k) = \alpha((\varphi^k + S)g, u^k)$$

Em virtude de (2.5) e da desigualdade de Hölder tem-se,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^k|^2 + \nu_0|\nabla u^k|^2 \leq \alpha|g|_p(|\varphi^k|_{\frac{2p}{p-1}} + |S|_{\frac{2p}{p-1}})|u^k|_{\frac{2p}{p-1}}.$$

Usando as imersões de Sobolev e a desigualdade de Young, obtemos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^k|^2 + \frac{k_0}{2}|\nabla u^k|^2 \leq \alpha^2 C(|g|_p^2\ (|\nabla\varphi^k|^2 + \|S\|_{H^1}^2).$$

Analogamente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi^k|^2 + \frac{k_0}{2}|\nabla\varphi^k|^2 \leq C(\|\partial_t S\|_{H^{-1}}^2 + |\nabla S|^2 + |u^k|_4^2|S|_4^2).$$

Agora integrando as duas últimas expressões conclue-se

$$(2.17)\quad |u^k(t)|^2 + \nu_0\int_0^t |\nabla u^k|^2 ds \leq 2\alpha^2 C\|g\|_{L^\infty(0,T;L^p)}^2 \int_0^t (|\nabla\varphi^k|^2 + \|S\|_{H^1}^2)ds + |P_n u_0|^2$$

$$(2.18)\qquad \begin{aligned} |\varphi^k(t)|^2 + k_0\int_0^t |\nabla\varphi^k|^2 ds \;&\leq\; 2C\int_0^t (\|\partial_t S\|_{H^{-1}}^2 + |\nabla S|^2)ds \\ &+\; 2C\int_0^t |S|_4^2|u^k|_4^2 ds + |\tilde{P}_n\varphi_0|^2 \end{aligned}$$

Combinando (2.17) e (2.18) e notando que $\|P_k\|; \|\tilde{P}_k\| \leq 1$ vem que

$$\begin{aligned} |u^k(t)|^2 + \nu_0\int_0^t |\nabla u^k|^2 ds \;&\leq\; \frac{4\alpha^2 C^2}{k_0}\|g\|_{L^\infty(0,T;L^p)}^2 \int_0^t (\|\partial_t S\|_{H^{-1}}^2 + |\nabla S|^2)ds \\ &+\; \frac{4\alpha^2 C^2}{k_0}\|g\|_{L^\infty(0,T;L^p)}^2 \int_0^t |S|_4^2|u^k|_4^2 ds \\ &+\; 2\alpha^2 C\|g\|_{L^\infty(0,T;L^p)}^2\left(\int_0^t \|S\|_{H^1}^2 ds + \frac{1}{k_0}|\varphi_0|^2\right) + |u_0|^2 \end{aligned}$$

Em virtude da desigualdade $|f|_4 \leq C|f|^{\frac{4-n}{4}}\|f\|_{H^1}^{\frac{n}{4}}$ (veja [29]) e da desigualdade de Young temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t |u^k|_4^2 |S|_4^2 &\le C \int_0^t |u^k|^{\frac{4-n}{2}} |\nabla u^k|^{\frac{n}{2}} |S|^{\frac{4-n}{2}} \|S\|_{H^1}^{\frac{n}{2}} \\
&\le C_\varepsilon \int_0^t |u^k|^2 |S|^2 \|S\|_{H^1}^{\frac{2n}{4-n}} + \varepsilon \int_0^t |\nabla u^k|^2
\end{aligned}
$$

Logo, escolhendo ε convenientemente conclue-se

$$
\begin{aligned}
|u^k(t)|^2 + \frac{\nu_0}{2} \int_0^t |\nabla u^k|^2 ds &\le C_1 \alpha^2 \|g\|^2_{L^\infty(0,T;L^p)} \Big(\int_0^t (\|\partial_t S\|^2_{H^{-1}} + \|S\|_1^2) ds + |\varphi_0|^2 \Big) \\
&+ C_1 \alpha^2 \|g\|^2_{L^\infty(0,T;L^p)} \int_0^t \|S\|_{H^1}^{\frac{2n}{4-n}} |u^k|^2 ds + |u_0|^2
\end{aligned}
$$

Assim, o Lema de Gronwall implica

$$
|u^k(t)|^2 + \int_0^t |\nabla u^k|^2 ds \le G(t), \tag{2.19}
$$

onde $G(\cdot)$ é uma função contínua e limitada independente de $k \in I\!N$ e $t \in [0, t_k]$. Logo podemos tomar $t_k \equiv T$.

A seqüência $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0,T;V)$ e também é limitada em $L^\infty(0,T;H)$. Argumentos similares implicam que a seqüência $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ é limitada em $L^2(0,T;H^1)$ e $L^\infty(0,T;L^2)$.

Agora provaremos uma estimativa para a seqüência $\{u_t^k\}_{k=1}^\infty$. Considere-se os seguintes operadores definidos por:

$$
\begin{aligned}
\langle A(u,\theta), v\rangle &= (\nu(\theta)\nabla u, \nabla v) \\
\langle D(u), v\rangle &= B(u,u,v) \\
\langle E(t)(u,\theta), v\rangle &= \alpha(\theta g, v)
\end{aligned}
$$

A seguir, usando os argumentos de Lions ([13], pp. 76) consideramos P_k como um operador em $L(V,V)$ com norma $\|P_k\| \le 1$ (isto é possível devido a escolha de base $\{v^k\}$). Portanto u^k satisfaz

$$
\partial_t u^k = -P_k^*(A(u^k, \varphi^k + S) + Du^k + E(u^k, \varphi^k + S)) \text{ em } V' \tag{2.20}
$$

onde P_k^* é o operador adjunto de P_k. Por outro lado é fácil ver que

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\|A(u^k, \varphi^k + S)\|_{V'} \le \nu_1 |\nabla u^k|; \quad \|Du^k\|_{V'} \le \left\{ \begin{array}{ll} C|\nabla u^k|^2 & , n = 3 \\ C|u^k||\nabla u^k| & , n = 2 \end{array} \right. \\
\\
\|E(\varphi^k + S)\|_{V'} \le C|g|_p(|\nabla \varphi^k| + \|S\|_{H^1}).
\end{array}
\right. \tag{2.21}
$$

Logo, a equação (2.20) e estimativa (2.21) implicam que $\{\partial_t u^k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência limitada em $L^1(0,T;V')$ se $n=3$ ou $L^2(0,T;V')$ se $n=2$. Usando um resultado de Simon ([28], Corolário 6) conclue-se que a seqüência $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ é relativamente compacta em $L^q(0,T;H)$, para todo $q \in [1,\infty)$.

Similarmente prova-se que a seqüência $\{\varphi^k\}_{k=1}^{\infty}$ é relativamente compacta em $L^q(0,T,L^2(\Omega))$,. Conseqüentemente existe uma subseqüência de $\{(u^k,\varphi^k)\}$, ainda denotada da mesma forma, tal que $u^k \to u$ fraco em $L^2(0,T;V)$, fraco $*$ em $L^\infty(0,T;H)$ e forte em $L^2(0,T,H)$. Análogos resultados valem para φ^k.

Mais ainda, podemos escolher a subseqüência satisfazendo

$$\begin{aligned} \nabla u^k &\to \nabla u \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \nabla\varphi^k &\to \nabla\varphi \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \text{ e} \\ \varphi^k &\to \varphi \text{ q.t.p em } [0,T]\times\Omega. \end{aligned}$$

Agora tomemos uma função $\phi \in C^1[0,T]$ tal que $\phi(T)=0$, multiplicando (2.14) com $\phi(t)$ e integrando obtém-se

$$-\int_0^T (u^k,v^j)\phi' dt + \int_0^T (\nu(\varphi^k+S)\nabla u^k,\nabla v^j)\phi dt - \int_0^T B(u^k,u^k,v^j)\phi dt = \alpha\int_0^T ((\varphi^k+S)g,v^j)\phi dt + (P_k u_0,v^j)\phi(0).$$

Tomando o limite quando k tende ao ∞, têm-se

$$-\int_0^T (u,v^j)\phi' dt + \int_0^T (\nu(\varphi+S)\nabla u,\nabla v^j)\phi dt + \int_0^T B(u,u,v^j)\phi dt = \alpha\int_0^T ((\varphi+S)g,v^j)\phi dt + (u_0,v^j)\phi(0). \tag{2.22}$$

De fato, a convergência do termo não linear $B(u^k,u^k,v^j)$ pode ser demonstrada da maneira usual (veja [9]) e para o outro termo não linear têm-se

$$\int_0^T (\nu(\varphi^k+S)\nabla u^k,\phi(t)v^j)dt = \int_0^T (\nabla u^k,\nu(\varphi^k+s)\phi(t)v^j)dt \to \int_0^T (\nabla u,\nu(\varphi+S)\phi(t)v^j)dt$$

já que $\nabla u^k \to \nabla u$ fraco em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\nu(\varphi^k+S)\phi(t)v^j \to \nu(\varphi+S)\phi(t)v^j$ forte em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Aplicando argumentos de densidade e continuidade, temos que (2.22) é válido para todo $v \in V$ em lugar de v^j. Logo, u satisfaz (2.4). Da mesma maneira φ satisfaz (2.4). Um argumento padrão mostra então que $u(0) = u_0$ e $\varphi(0) = \varphi_0$.

Note-se que $(u, \varphi) \in C([0,T]; H \times L^2)$ se $n = 2$ e, portanto, $\{u, \varphi + S\}$ satisfaz as condições do Teorema.

No caso $n = 3$ sabemos que $u \in C([0,T]; V')$, logo

$$(2.23) \qquad u(t) \to u_0 \quad \text{fraco em} \quad H \quad \text{quando} \quad t \to 0^+.$$

Além disso u satisfaz q.t.p em $[0,T]$ a seguinte desigualdade:

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 + \alpha^2 C \int_0^t |g|_p^2 (|\nabla \varphi|^2 + ||S||_{H^1}^2) ds$$

Conseqüentemente, $\limsup_{t\to 0^+} |u(t)|^2 \leq |u_0|^2$ e então pela convergência (2.23) conclue-se que $u(t) \to u_0$ forte em H. Da mesma maneira podemos mostrar que $\varphi(t) \to \varphi_0$ forte em $L^2(\Omega)$ quando $t \to 0^+$. Portanto $(u, \varphi + S)$ satisfaz os requisitos do Teorema. $\square$.

3. EXISTÊNCIA LOCAL DE SOLUÇÕES FORTES

Apresentaremos um resultado para solução fortes, igual que no caso estacionário (Capítulo 1) precisaremos de estimativas extras para a pressão associada a decomposição de Helmholtz.

TEOREMA 2.5. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n (n = 2$ ou $3)$ de classe $C^{1,1}$; sejam ν e k de classe C^1 satisfazendo (2.5). Suponhamos $\sup_{\mathbb{R}} |\nu'(\tau)| < \nu_1' < \infty$ e $\sup_{\mathbb{R}} |k'(\tau)| < k_1' < \infty, g \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \eta \in L^\infty(0,T; H^{3/2}(\partial\Omega)) \bigcap C([0,T]; H^{1/2}(\partial\Omega)); \partial_t \eta \in L^2(0,T; H^{1/2}(\partial\Omega)) \bigcap L^\infty(0,T; H^{-1/2}(\partial\Omega)); \partial_t^2 \eta \in L^2(0,T; H^{-3/2}(\partial\Omega)); \eta(0) = \theta(0)$ em $\partial\Omega; u_0 \in V$ e $\theta_0 \in H^2(\Omega)$. Então existe um número positivo $T^* = T^*(\Omega, u_0, \theta_0, k, \nu, g, \eta) \leq T$ tal que o problema (2.1) – (2.3) tem uma solução (u, θ) satisfazendo

$$(2.24) \qquad u \in L^\infty(0,T^*; V) \cap L^2(0,T^*; V \cap H^2) \;\text{ e }\; \partial_t u \in L^2(0,T^*; L^2(\Omega)),$$

$$(2.25) \qquad \theta \in L^\infty(0,T^*; H^2(\Omega)) \;\text{ e }\; \partial_t \theta \in L^\infty(0,T^*; L^2(\Omega)),$$

$$(2.26) \qquad u(t) \to u_0 \;\text{ forte em }\; V \;\text{ e }\; \theta(t) \to \theta_0 \;\text{ fraco em }\; H^2 \;\text{ quando }\; t \to 0^+,$$

e

$$(2.27)\qquad P(\partial_t u - div(\nu(\theta)\nabla\theta) + u\nabla\theta - \alpha\theta g) = 0 \text{ em } L^2(0,T^*;H),$$

$$(2.28)\qquad \partial_t\theta - div(k(\theta)\nabla\theta) + u\nabla\theta = 0 \text{ em } L^\infty(0,T^*;L^2(\Omega)),$$

$$(2.29)\qquad \theta = \eta \text{ em } L^\infty(0,T^*;H^{3/2}(\partial\Omega)).$$

Se k e ν são constantes, basta supor:

$\eta \in L^\infty(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))\cap L^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega)); \partial_t\eta \in L^2(0,T;H^{-1/2}(\partial\Omega)), u_0 \in V$ e $\theta_0 \in H^1$,

para obter uma solução (u,θ) que satisfaz (2.24), (2.27) e

$$(2.30)\qquad \theta \in L^\infty(0,T^*;H^1(\Omega))\bigcap L^2(0,T^*;H^2(\Omega)) \text{ e } \partial_t\theta \in L^2(0,T^*;L^2(\Omega)),$$

$$(2.31)\qquad u(t) \to u_0 \text{ forte em } V \text{ e } \theta(t) \to \theta_0 \text{ forte em } H^1 \text{ quando } t \to 0^+,$$

$$\begin{aligned}(2.32)\qquad \partial_t\theta - div(k(\theta)\nabla\theta) + u\nabla\theta &= 0 \text{ em } L^2(0,T^*;L^2(\Omega)),\\ (2.33)\qquad \theta &= \eta \text{ em } L^\infty(0,T^*;H^{1/2}(\partial\Omega)).\end{aligned}$$

PROVA: Note-se que as equações (2.14) – (2.15) são equivalentes a

$$(2.34)\qquad P_k(u_t^k - div(\nu(\varphi^k + S)\nabla u^k) + u^k\nabla u^k - \alpha(\varphi^k + S)g) = 0,$$

$$\begin{aligned}(2.35)\qquad &\tilde{P}_k(\varphi_t^k - div(k(\varphi^k + S)\nabla\varphi^k) + u^k\nabla\varphi^k) =\\ &\tilde{P}_k(-S_t + div(k(\varphi^k + S)\nabla S) - u^k\nabla S).\end{aligned}$$

Denotando $\varphi_0^k = \tilde{P}_k\varphi_0, \xi^k = \varphi^k - \varphi_0^k$ e $\tilde{S} = \varphi_0^k + S$ temos que as equações (2.34) – (2.35) transformam-se da seguinte forma

$$(2.36)\qquad P_k(u_t^k - div(\nu(\xi^k + \tilde{S})\nabla u^k) + u^k\nabla u^k - \alpha(\xi^k + \tilde{S})g) = 0,$$

$$\begin{aligned}(2.37)\qquad &\tilde{P}_k(\xi_t^k - div(k(\xi^k + \tilde{S})\nabla\xi^k) + u^k\nabla\xi^k) =\\ &\tilde{P}_k(-\tilde{S}_t + div(k(\xi^k + \tilde{S})\nabla\xi^k) - u^k\nabla\tilde{S})\end{aligned}$$

e as condições iniciais (2.14) transformam-se em

$$(2.38)\qquad u^k(0) = P_k u_0; \;\; \xi^n(0) = 0.$$

Como na seção 2, usando a Observação 2.1 conclue-se que

$S \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega)); \partial_t S \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$; $\partial_t^2 S \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e $S(0) = \theta(0)$ sobre $\partial\Omega$. Logo $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Tomamos o produto de (2.36) com $\tilde{\Delta}u^k$ em $(L^2(\Omega))^n$, para obter (por simplicidade de notação, na seqüência de cálculos que se seguem omitiremos o superíndice k)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + (\nu(\xi+\tilde{S})\Delta u), \tilde{\Delta}u) - B(u,u,\tilde{\Delta}u) - \alpha((\xi+\tilde{S})g, \tilde{\Delta}u) = 0$$

Como na Seção 4 do Capítulo 1 usamos a identidade

$$div(\nu(\xi+S)\nabla u) = \nu(\xi+S)\Delta u + \nu'(\xi+S)\nabla(\xi+S)\nabla u,$$

para obter

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + (\nu(\xi+\tilde{S})\Delta u), \tilde{\Delta}u) &= B(u,u,\tilde{\Delta}u) - \alpha((\xi+\tilde{S})g, \tilde{\Delta}u) \\ &- (\nu'(\xi+\tilde{S})\nabla(\xi+\tilde{S})\nabla u, \tilde{\Delta}u) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Utilizando a decomposição $\Delta u = \tilde{\Delta}u + \nabla q$ com $\int_\Omega q = 0$, reescrevemos (2.39) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + (\nu(\xi+\tilde{S})\tilde{\Delta}u, \tilde{\Delta}u) &= B(u,u,\tilde{\Delta}u) - \alpha((\xi+\tilde{S})g, \tilde{\Delta}u) \\ &- (\nu'(\xi+\tilde{S})\nabla(\xi+\tilde{S})\nabla u, \tilde{\Delta}u) \\ &- (\nu(\xi+\tilde{S})\nabla q, \tilde{\Delta}u) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Agora estimamos os termos da direita como se segue usando a desigualdade de Hölder, imersões de Sobolev, desigualdade de Young e estimativas das pelo Lema 2.3:

$$\begin{aligned} &|B(u,u,\tilde{\Delta}u)| \le |u|_6|\nabla u|^{1/2}|\nabla u|_6^{1/2}|\tilde{\Delta}u| \le C|\nabla u|^{3/2}|\tilde{\Delta}u|^{3/2} \le C_\delta|\nabla u|^6 + \delta|\tilde{\Delta}u|^2, \\ &|\alpha((\xi+\tilde{S})g, \tilde{\Delta}u)| \le \alpha|g||\xi+\tilde{S}|_\infty|\tilde{\Delta}u| \le C_\delta|g|^2(|\nabla\xi|_4^2 + |\tilde{S}|_4^2) + \delta|\tilde{\Delta}u|^2, \\ &|(\nu'(\xi+\tilde{S})\nabla(\xi+\tilde{S})\nabla u, \tilde{\Delta}u)| \le \nu_1'|\nabla(\xi+\tilde{S})|_4|\nabla u|_4|\tilde{\Delta}u| \\ &\qquad\qquad \le C|\nabla(\xi+\tilde{S})|_4|\nabla u|^{1/4}|\tilde{\Delta}u|^{7/4} \\ &\qquad\qquad \le C_\delta(|\nabla\xi|_4^8 + |\nabla\tilde{S}|_4^8)|\nabla u|^2 + \delta|\tilde{\Delta}u|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\nu(\xi+\tilde{S})\nabla q, \tilde{\Delta}u)| &\le \nu_1'|q|_4|\nabla(\xi+\tilde{S})|_4|\tilde{\Delta}u| \le C|q|^{1/4}\|q\|_H^1(\Omega)^{3/4}|\nabla(\xi+\tilde{S})|_4|\tilde{\Delta}u| \\ &\le C_\varepsilon|\nabla(\xi+\tilde{S})|_4|\nabla u|^{1/4}|\tilde{\Delta}u|^{7/4} + \varepsilon(|\nabla\xi|_4 + +\nabla\tilde{S}|_4)|\tilde{\Delta}u|^2 \\ &\le C_{\varepsilon,\delta}(|\nabla\xi|_4^8 + |\nabla\tilde{S}|_4^8)|\nabla u|^2 + \delta|\tilde{\Delta}u|^2 + \varepsilon(|\nabla\xi|_4 + |\nabla\tilde{S}|_4)|\tilde{\Delta}u|^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \dfrac{\nu_0}{16}$ e usando (2.40), têm-se

$$(2.41)\quad \begin{aligned}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + \frac{3}{2}\nu_0|\tilde{\Delta} u|^2 &\leq C_\varepsilon(|\nabla u|^4 + |\nabla\xi|_4^8 + |\nabla\tilde{S}|_4^8)|\nabla u|^2 \\ &+ C_\varepsilon|g|^2(|\nabla\xi|_4^2 + |\tilde{S}|_{1,4}^2) + \varepsilon(|\nabla\xi|_4 + |\nabla\tilde{S}|_4)|\tilde{\Delta} u|^2.\end{aligned}$$

Analogamente obtemos as desigualdades

$$(2.42)\quad \begin{aligned}\frac{d}{dt}|\nabla\xi|^2 + k_0|\Delta\xi|^2 &\leq C_2(|\nabla u|^4 + |\nabla\xi|_4^8 + |\nabla\tilde{S}|_4^8).(|\nabla\tilde{S}|^2 + |\nabla\xi|^2) \\ &+ C_2(||\tilde{S}||_2^2 + |\partial_t\tilde{S}|^2)\end{aligned}$$

$$(2.43)\quad \begin{aligned}&\frac{d}{dt}|\partial_t\xi|^2 + k_0|\nabla\partial_t\xi|^2 \leq C_3|\partial_t u|^2(|\nabla\xi|_4^2 + |\nabla\tilde{S}|_4^2) + C_3||\partial_t^2\tilde{S}||_{H^{-1}}^2 \\ &+C_3(|\nabla u|^2+1)|\nabla\partial_t\tilde{S}|^2 + C_3||\partial_t\tilde{S}||_1^2(|\nabla\xi|_4^2 + |\nabla\tilde{S}|_4^2) \\ &+C_3|\partial_t\xi|^2(|\nabla\xi|_4^8 + |\nabla\tilde{S}|_4^8)\end{aligned}$$

A estimativa (2.43) é obtida diferenciando (2.37) com respeito a t e tomando o produto com $\partial_t\varphi^k$ para depois estimar de forma semelhante ao que foi feito antes.

A seguir mostraremos que as estimativas (2.41) – (2.43) são suficientes para achar $T^* > 0$ tal que a seqüência $\{\xi^k\}_{k=1}^\infty$ é limitada em $L^\infty(0,T^*;H^2(\Omega))$. A estimativa (2.42) e o Lema de Gronwall implicam

$$(2.44)\quad |\nabla\xi(t)|^2 \leq M_2(t)\exp M_1(t)t \equiv H_0(t;||\nabla u||_{L^\infty(0,t;L^2)};||\nabla\xi||_{L^\infty(0,t;L^4)})$$

onde

$$\begin{aligned}M_1(t) &= C_2(||\nabla u||_{L^\infty(0,t;L^2)}^4 + ||\nabla\xi||_{L^\infty(0,t;L^4)}^8 + ||\nabla\tilde{S}||_{L^\infty(0,t;L^4)}^8), \\ M_2(t) &= M_1(t)\int_0^t |\nabla\tilde{S}|^2 ds + C_2\int_0^t (||\tilde{S}||_2^2 + |\partial_t\tilde{S}|^2)ds.\end{aligned}$$

Observemos que H_0 é uma função estritamente crescente em cada uma das suas variáveis. Por outro lado, fazendo o produto de (2.36) com u_t obtém-se

$$|u_t|^2 = (div(\nu(\varphi+\tilde{S})\nabla u), u_t) - B(u,u,u_t) + \alpha((\varphi+S)g, u_t).$$

Pelas estimativas anteriores, conclue-se

$$(2.45) \qquad |u_t|^2 \leq C_4(|\Delta u|^2 + |\nabla(\xi+\tilde{S})|_4^8 |\nabla u|^2 + |g|^2 |\nabla(\xi+\tilde{S})|_4^2 + |\nabla u|^6)$$

e também temos

$$(2.46) \qquad |\xi_t|^2 \leq C_4(|\Delta(\xi+\tilde{S})|^2 + |\nabla(\xi+\tilde{S})|_4^4 + |\nabla u|^4 |\nabla(\xi+\tilde{S})|^2 + |\tilde{S}_t|^2)$$

Disto, claramente obtém-se

$$|\xi_t(0)|^2 \leq C_4(|\Delta\tilde{S}(0)|^2 + |\nabla\tilde{S}(0)|_4^4 + |\nabla u_0|^4 |\nabla\tilde{S}(0)|^2 + |\tilde{S}_t(0)|^2).$$

Aplicando então a desigualdade de Gronwall na inequação (2.43), vem que

$$(2.47) \qquad |\xi_t(t)|^2 \leq H_1(t; \|\nabla u\|_{L^\infty(0,t;L^2)}; \|\nabla\xi\|_{L^\infty(0,t;L^4)}; \|\tilde{\Delta} u\|_{L^2(0,t;L^2)}).$$

onde H_1 é uma função estritamente crescente em cada uma de suas variáveis.

Fazendo o produto de (2.37) com $-\Delta\xi$ e pelas estimativas obtidas, conclue-se

$$\begin{aligned} |\Delta\xi|^2 &\leq C_5(|\nabla u|^4 + |\nabla\xi|_4^8 + \nabla\tilde{S})|_4^8)(\nabla\tilde{S}|^2 + |\nabla\xi|^2) + C_5(\|\tilde{S}\|_{H^2}^2 + |\partial_t\tilde{S})|^2) + C_5|\partial_t\xi|^2 \\ &\equiv H_2(t, \|\nabla u\|_{L^\infty(0,t;L^2)}; \|\nabla\xi\|_{L^\infty(0,t;L^4)}; \|\tilde{\Delta} u\|_{L^2(0,t;L^2)}). \end{aligned}$$

De novo observamos que H_2 é uma função estritamente crescente em cada uma de suas variáveis.

Em virtude das estimativas (2.44) - (2.47), temos

$$(2.48) \qquad |\nabla\xi(t)|_4 \leq C_6 |\nabla\xi(t)|^{1/4} |\Delta\xi(t)|^{3/4} \leq C_6 H_0^{1/8}(t) \cdot H_2^{3/8}(t).$$

Agora, escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon(1+\|\nabla S\|_{L^\infty(0,T;L^4)}) \leq \dfrac{1}{2}$ e seja $T^* \leq T$ satisfazendo a seguinte desigualdade

$$(2.49) \qquad F(T^*) \equiv C_\varepsilon \int_0^{T^*} \gamma^2(s)ds + C_\varepsilon \int_0^{T^*} (1 + |\nabla\tilde{S}|_4^8)ds < e^{-1}$$

e

$$(2.50) \qquad H_3(T^*) \equiv C_6 H_0^{1/8}(T^*, \gamma(T), 1) H_2^{3/8}(T^*, \gamma(T^*), 1, \gamma(T^*)/\nu_0) < 1$$

onde $\gamma(t) \equiv 2(|\nabla u_0|^2 + C_\varepsilon \int_0^t (1 + \|\tilde{S}\|_{W^{1,4}}^2)|g|^2 ds$ e C_ε é a constante obtida em (2.41).

Note-se que T^* existe porque $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} H_0(t, \gamma(t), 1) = 0$ e

$$H_2(t,\gamma(t),1,\gamma(t)/\gamma_0) \leq H_2(T,\gamma(T),1,\gamma(T)/\nu_0).$$

As desigualdades (2.49), (2.50) implicam

$$(2.51) \qquad F(t) < \frac{1}{e} \text{ e } H_3(t) < 1 \quad \text{para todo} \quad t \in [0,T^*].$$

Mostraremos que

$$(2.52) \qquad |\nabla\xi(t)|_4 < 1 \;\; \forall\, t \in [0,T^*]$$

De fato, dado que $|\nabla\xi(0)|_4 = 0$, por continuidade segue-se (2.52) para tempos pequenos. Suponha agora por contradição que existe $0 < T_1 < T^*$ tal que vale (2.52) para $0 < t < T_1$ e $|\nabla\xi(T_1)|_4 = 1$. Então de (2.41) e da escolha de ε temos

$$\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + \nu_0|\tilde{\Delta}u|^2 \leq C_\varepsilon(|\nabla u|^4 + 1 + |\nabla\tilde{S}|_4^8)|\nabla u|^2 + C_\varepsilon(1 + \|\tilde{S}\|_{W^{1,4}}^2)|g|^2$$

para todo $t \in [0,T_1]$.

Pelo Lema 2.2 com $\varphi(t) = |\nabla u(t)|^2, \psi(t) = \nu_0|\tilde{\Delta}u(t)|^2, h(t) = C_\varepsilon(|\nabla u(t)|^4 + 1 + |\nabla\tilde{S}(t)|_4^8)$ e $f(t) = C_\varepsilon(1 + \|\tilde{S}(t)\|_{W^{1,4}}^2)|g(t)|^2$; e pela escolha de T^*, temos

$$|\nabla u(t)|^2 + \nu_0\int_0^t |\tilde{\Delta}u|^2 ds \leq \gamma(t) \leq \gamma(T^*) \;\text{ for }\; t \in [0,T_1]$$

Portanto, as estimativas (2.48) e (2.49) implicam

$$|\nabla\xi(t)| \leq H_0(t,\gamma(T^*),1); \quad |\Delta\xi(t)| \leq H_2(t,\gamma(T^*),1,\gamma(T^*)/\nu_0), \;\; \forall t \in [0,T_1].$$

Logo, usando (2.47) tém-se $|\nabla\xi(t)|_4 \leq H_3(t) < 1$. Esta contradição demostra (2.51).

Podemos construir uma solução fraca (u,θ), com $\theta = \varphi + S$, (como na Seção 2) satisfazendo as condições (2.24) e (2.25) (logo satisfaz (2.27) – (2.29)).

Para provar que a velocidade inicial e assumida fortemente em H^1 é suficiente mostrar que $\limsup_{t\to 0^+}|\nabla u(t)| \leq |\nabla u_0|$, já que sabemos que $u(t) \to u_0$ fraco em H^1 quando $t \to 0^+$ (isto é uma conseqüência do fato que $|\nabla u(t)|$ é limitado no intervalo $[0,T^*]$ e do fato que $u(t) \to u_0$ forte em $L^2(\Omega)$).

Basta observar que

$$|\nabla u(t)|^2 \leq (|\nabla u_0|^2 + C_1\int_0^t (1 + \|\tilde{S}\|_{W^{1,4}}^2)|g|^2 ds)e^{F(t)}$$

onde $F(t) \to 0$ quando $t \to 0^+$.

Além disso, a estimativa (2.47) implica que $|\nabla\theta(t)| \leq C$. Logo, em virtude da convergência $\theta(t) \to \theta_0$ forte $L^2(\Omega)$ temos que $\theta(t) \to \theta_0$ fraco em $H^2(\Omega)$.

Observe que se assumimos que ν e k são constante, temos em lugar de (2.41) - (2.42)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\nabla u^k|^2 + \nu_0|\tilde{\Delta} u^k|^2 &\leq C_1|\nabla u^k|^6 + C_1|g|^8(|\nabla\xi^k|^2 + ||\tilde{S}||^2_{H^1}), \\
\frac{d}{dt}|\nabla\xi^k|^2 + k_0|\Delta\xi^k|^2 &\leq C_2|\nabla u^k|^4(|\nabla\xi^k|^2 + |\nabla\tilde{S}|^2) \\
&+ C_2(||\tilde{S}||^2_2 + |\partial_t\tilde{S}|^2).
\end{aligned}$$

Logo, vém que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(|\nabla u^k|^2 + |\nabla\xi^k|^2) &\leq C_3(|\nabla u^k|^2 + |\nabla\xi^k|^2)^3 + C_3(|\nabla u^k|^4|\nabla\tilde{S}|^2 + |\nabla\xi^k|^2|g|^8) \\
&+ C_3(|g|^8||\tilde{S}||^2_{H^1} + ||\tilde{S}||^2_{H^2} + |\partial_t\tilde{S}|^2).
\end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $|\nabla u^k(t)|^2 + |\nabla\xi^k(t)|^2 \leq h(t)$, onde h é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned}
&h' = C_3(h^3 + h^2|\nabla\tilde{S}|^2 + h|g|^8 + |g|^8||\tilde{S}||^2_1 + ||\tilde{S}||^2_2 + |\partial_t\tilde{S}|^2) \\
&h(0) = 0.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente h permanece finito em algum intervalo $[0, T^*]$. Logo podemos obter uma solução com as condições (2.30) - (2.33), (2.24) e (2.27) como no caso geral. □

Se o dado inicial da velocidade é mais regular, temos:

TEOREMA 2.6. Sob as condições do Teorema 2.5. Assuma $u_0 \in H^2 \bigcap V$ e $\partial_t g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, então podemos escolher T^* tal que a solução do Teorema 2.5 satisfaz

$$u \in L^\infty(0, T^*; H^2(\Omega)) \ \text{ e } \ u(t) \to u_0 \ \text{ fraco em } \ H^2 \ \text{ quando } \ t \to 0^+. \quad \square$$

No que diz respeito a unicidade das soluções temos o seguinte resultado:

TEOREMA 2.7. A solução obtida no Teorema 2.5 é única.

PROVA: Sejam $(u_1,\theta_1);(u_2,\theta_2)$ duas soluções do problema (2.1) - (2.3) com as propriedades (2.24) - (2.29). Subtraindo as correspondentes equações e denotamos $w = u_1 - u_2, \xi = \theta_1 - \theta_2$, temos

$$\frac{d}{dt}(w,v)+(\nu(\theta_1)\nabla w,\nabla v)+B(w,u_1,v)+B(u_2,w,v) = \alpha(\xi g,v)-((\nu(\theta_1)-\nu(\theta_2))\nabla u_2,\nabla v),$$

$$\frac{d}{dt}(\xi,\psi)+(div(k(\theta_1)\nabla\xi),\psi)+b(w,\theta_1,\psi)+b(u_2,\xi,\psi) = (div((k(\theta_1)-k(\theta_2))\nabla\theta_2),\psi).$$

Fazendo $v = w, \psi = \Delta\xi$, obtemos

$$\frac{d}{dt}|w|^2+\nu_0|\nabla w|^2 \leq C|w|^2|u_1|_4^8+C|g|^2|\xi|_4^2+C|\xi|_\infty^2|\nabla u_2|^2, \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\nabla\xi|^2+k_0|\Delta\xi|^2 &\leq C|w|_4^2|\nabla\theta_1|_4^2+C|u_2|_4^8|\nabla\xi|^2+C|\xi|_\infty^2|\Delta\theta_2|^2\\ &+ C|\nabla\xi|_4^2|\nabla\theta_2|_4^2+C|\xi|_\infty^2|\nabla\theta_2|_4^4+C|\nabla\theta_1|_4^8|\nabla\xi|^2.\end{aligned} \tag{2.54}$$

Usando a identidade

$$\nu'(\theta_1)\nabla\theta_1-\nu'(\theta_2)\nabla\theta_2 = \nu'(\theta_1)\nabla\xi+(\nu'(\theta_1)-\nu'(\theta_2))\nabla\theta_2.$$

Estimativas (2.53) e (2.54) e as imersões de Sobolev implicam

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(|w|^2+|\nabla\xi|^2)+\nu_0|\nabla w|^2+k_0|\Delta\xi|^2 &\leq C_1|w|^2|u_1|_4^8+C_1|w|_4^2|\nabla\theta_1|_4^2\\ &+ C_1|\nabla\xi|^{1/2}|\Delta\xi|^{3/2}(|g|^2+|\nabla u_2|^2+|\Delta\theta_2|^2+|\nabla\theta_2|_4^4)\\ &+ C_1(|w|^2+|\nabla\theta_1|_4^8)|\nabla\xi|^2.\end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Young temos

$$\frac{d}{dt}(|w(t)|^2+|\nabla\xi(t)|^2)+\frac{\nu_0}{2}|\nabla w(t)|^2+\frac{k_0}{2}|\Delta\xi(t)|^2 \leq M(t)|w(t)|^2+N(t)|\nabla\xi(t)|^2$$

onde

$$\begin{aligned}M(t) &= C_2(|u_1(t)|_4^8+|\nabla\theta_1(t)|_4^8),\\ N(t) &= C_2(|g(t)|^8+|\nabla u_2(t)|^8+|\nabla\theta_2(t)|^8+|\nabla\theta_2(t)|_4^{16}+|\nabla\theta_1(t)|_4^8+|w(t)|_6^2).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(|w|^2+|\nabla\xi|^2) \leq (M+N)(|w|^2+|\nabla\xi|^2).$$

Como $M(\cdot)+N(\cdot)$ é uma função integrável e $w(0)=0, \xi(0)=0$, temos o resultado. O caso $k_1' = \nu_1' = 0$ é feito de maneira similar. □

CAPÍTULO 3

REGULARIDADE E EXISTÊNCIA GLOBAL NO CASO DE EVOLUÇÃO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo mostraremos que a solução obtida no Teorema de Existência Local é mais regular para $t > 0$, se os dados foram mais regulares.

As técnicas usadas no Capítulo 2 serão de grande ajuda para obter estimativas das derivadas de ordem mais alta da solução. Isto, justamente com adaptação de argumentos devido à Heywood [9], permite que obtenhamos um resultado de regularidade similar àquele válido para a equação clássica de Navier–Stokes.

Para facilidade de exposição, consideremos o problema

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u - div(\nu(\varphi)\nabla u) + u.\nabla u - \alpha\varphi g + \nabla p = h, \\ div \;\; u = 0, \\ \partial_t\varphi - div(k(\varphi)\nabla\varphi) + u.\nabla\varphi = f \quad \text{em} \quad (0,T)\times\Omega. \end{cases}$$

$$(3.2) \qquad \begin{cases} u = 0 \;, \;\; \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) = u_0 \;, \varphi(0) = \quad \varphi_0 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{cases}$$

Segue-se do capítulo anterior que tal redução do problema não altera a demonstração dos resultados de uma maneira essencial.

Apresentamos também um Teorema de Existência Global. Gostaríamos de ressaltar que no caso geral precisaremos algumas condições de pequenez sob os dados iniciais, mesmo no caso bidimensional. Porém, esse tipo de requisito não é necessário no caso Boussinesq clássico (com a viscosidade e condutividade térmica independentes da temperatura), recuperando assim os resultados conhecidos para as equações de Navier–Stokes

(Rojas–Medar e Lorca [25]).

A notação é a mesma dos capítulos anteriores e continuaremos supondo que ν e k satisfazem (2.5).

1. OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO CLÁSSICA

O seguinte lema, será muito útil nos argumentos envolvidos no Teorema de Regularidade.

No que segue, $\partial_t^k \varphi$ denota a k-ésima derivada de φ em relação a t e $\partial_x^\ell \varphi$ representa uma derivada de ordem ℓ arbitrária em relação às variáveis espaciais.

LEMA 3.1. Segue h um função de classe $C^j, j \geq 1$, tal que $\sup_{\mathbb{R}} |\frac{d^i h}{dt^i}(s)|_{\mathbb{R}} \leq C < \infty; i = 0, 1, \ldots, j$. Seja $\varphi \in C^j([0,T]; H^2(\Omega))$.

Definamos

$$M_\ell(\varphi(t)) = \sum_{i=0}^{\ell} \|\partial_t^i \varphi(t)\|_{H^2(\Omega)}, t \in [0,T], \quad \ell = 0, 1, \ldots, j.$$

Então

$$|\partial_t^j h(\varphi(t))|_\infty \leq J_j(M_{j-1}(\varphi(t))) + C_j |\partial_t^j \varphi(t)|_\infty, \quad \forall t \in [0,T],$$

onde J_j é contínua e C_j e uma constante positiva que depende de h.

PROVA: Se $j = 1$, podemos tomar $J_1 \equiv 0$ e $C_1 \geq \sup_{\mathbb{R}} |h'(s)|_{\mathbb{R}}$. Suponhamos que o resultado é válido para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $0 < i < j$. Então, têm-se

$$\begin{aligned} \partial_t^j h(\varphi) &= \partial_t^{j-1}(h'(\varphi)\partial_t \varphi) = \sum_{i=0}^{j-1} C(j) \partial_t^i h'(\varphi) \partial_t^{j-i} \varphi \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} C(i) \partial_t^i h'(\varphi) \partial_t^{j-i} \varphi + h'(\varphi) \partial_t^j \varphi \end{aligned}$$

Logo, pela hipótese de indução e as imersões de Sobolev

$$\begin{aligned}
|\partial_t^j h(\varphi)|_\infty &\leq \sum_{i=1}^{j-1} C(i)|\partial_t^i h'(\varphi)|_\infty |\partial_t^{j-i}\varphi|_\infty + C_j|\partial_t^j\varphi|_\infty \\
&\leq \sum_{i=1}^{j-1} C(i)(J_i(M_{i-1}(\varphi)) + C_i|\partial_t^i\varphi|_\infty)|\partial_t^{j-1}\varphi|_\infty + C_j|\partial_t^j\varphi|_\infty \\
&\leq J_j(M_{j-1}(\varphi)) + C_j|\partial_t^j\varphi|_\infty
\end{aligned}$$

Isto finaliza a demonstração do lema. □

De maneira similar prova-se:

LEMA 3.2. Sob as hipóteses do Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned}
\|\partial_t^j h(\varphi(t))\|_{W^{1,4}(\Omega)} &\leq L_j(M_{j-1}(\varphi(t))) + C_k|\nabla\partial_t^j\varphi(t)|_4 \\
&+ C_j|\partial_t^j\varphi(t)|_\infty|\nabla\varphi(t)|_4 \quad \forall t\in[0,T]
\end{aligned}$$

onde L_j é uma função contínua.

Enunciaremos agora, o principal resultado da seção:

TEOREMA 3.3. Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^n (n = 2$ ou $3)$, de classe C^∞. Assuma ν e k de classe C^∞ satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.6, $g, h \in C^\infty(\overline{\Omega}\times[0,T^*]), f \in C^\infty(\overline{\Omega}\times[0,T^*]), \varphi_0 \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e $u_0 \in V\cap(H^2(\Omega))^n$. Então, a solução (u,φ) obtida no Teorema de Existência Local (Teorema 2.6) é uma solução clássica do problema (3.1) – (3.2), isto é, $u \in (C^\infty(\overline{\Omega}\times(0,T^*]))^n\cap(C(\overline{\Omega}\times[0,T^*])^n$ e $\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}\times(0,T^*])\cap C(\overline{\Omega}\times[0,T^*])$.

Para provar este teorema, precisamos de estimativas a priori das derivadas de qualquer ordem da solução. Começaremos obtendo a regularidade com respeito a t.

LEMA 3.4. Sob as condições do Teorema 3.3. Para todo $j = 0,1,2,\ldots$ e qualquer $0<\varepsilon<T^*$; existem funções contínuas $F_j(t,\varepsilon), G_j(t,\varepsilon)$ e $H_j(t,\varepsilon)$ tal que

$$(3.3) \qquad |\nabla\partial_t^j u^k(t)|^2 + |\nabla\partial_t^j\varphi^k(t)|^2 + \int_\varepsilon^t(|\tilde{\Delta}\partial_t^j u^k|^2 + |\Delta\partial_t^j\varphi^k|^2)ds \leq F_j(t,\varepsilon)$$

$$(3.4) \qquad |\partial_t^{j+1}u^k(t)|^2 + |\partial_t^{j+1}\varphi^k(t)|^2 + \int_\varepsilon^t(|\nabla\partial_t^{j+1}u^k|^2 + |\nabla\partial_t^{j+1}\varphi^k|^2 ds \leq G_j(t,\varepsilon)$$

$$(3.5) \qquad |\tilde{\Delta}\partial_t^j u^k(t)|^2 + |\Delta\partial_t^j\varphi^k(t)|^2 \leq H_j(t,\varepsilon)$$

para todo $t \in [\varepsilon, T^*]$. As funções $F_j(\cdot,\varepsilon), G_j(\cdot,\varepsilon)$ dependem só de j, ε e dos dados iniciais. O extremo direito T^* do intervalo onde as estimativas (3.3) – (3.5) são válidas, é o mesmo do Teorema 2.6.

PROVA: As estimativas (3.3) – (3.5) serão provadas por indução sobre j. Para $j = 0$ as estimativas (3.3) – (3.5) foram provadas no teorema de existência local (Teorema 2.6). Mais ainda, neste caso podemos tomar $\varepsilon = 0$. Suponha agora que o resultado vale para $i \in I\!N$ tal que $0 \le i \le j$.

Derivando (2.34) j vezes com respeito a t e multiplicando o resultado com $\tilde{\Delta}\partial_t^j u^k$ temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\partial_t^j u|^2 - (div\partial_t^j(\nu(\varphi)\nabla u), \tilde{\Delta}\partial_t^j u) = \\
&-(\partial_t^j(u\nabla u), \tilde{\Delta}\partial_t^j u) - (\partial_t^j(\alpha\varphi g) + \partial_t^j h, \tilde{\Delta}\partial_t^j u).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Como no capítulo anterior, por simplicidade de notação, omitimos o superíndice k.

Os termos não lineares na direita da equação (3.6) são os termos da equação de Navier–Stokes. Podemos usar as estimativas dadas por Heywood [9],

$$
\begin{aligned}
|(\partial_t^i u\nabla\partial_t^{j-i}u, \tilde{\Delta}\partial_t^j u)| &\le |\partial_t^i u|_6|\nabla\partial_t^{j-1}u|_3|\tilde{\Delta}\partial_t^j u| \\
&\le C_\delta|\nabla\partial_t^i u|^2|\tilde{\Delta}\partial_t^{j-i}u|^2 + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

para $1 \le i \le j$, e

$$
\begin{aligned}
|(u\nabla\partial_t^j u, \tilde{\Delta}\partial_t^j u)| &\le |u|_\infty|\nabla\partial_t^j u||\tilde{\Delta}\partial_t^j u| \\
&\le C_\delta|\tilde{\Delta}u|^2|\nabla\partial_t^j u|^2 + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Agora, estimamos os termos lineares na direita de (3.6)

$$
\begin{aligned}
|(\partial_t^{j-i}\varphi\partial_t^i g, \tilde{\Delta}\partial_t^j u)| &\le |\partial_t^i g||\partial_t^{j-i}\varphi|_\infty|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 \\
&\le C_\delta|\partial_t^i g|^2|\Delta\partial_t^{j-i}\varphi|^2 + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

para $0 < i \le j$, e

$$
\begin{aligned}
|(\partial_t^j\varphi g, \tilde{\Delta}\partial_t^j u)| &\le |g||\partial_t^j\varphi|_\infty|\tilde{\Delta}\partial_t^j u| \\
&\le C|g||\nabla\partial_t^j\varphi|_4|\tilde{\Delta}\partial_t^j u| \\
&\le C|g||\nabla\partial_t^j\varphi|^{1/4}|\Delta\partial_t^j\varphi|^{3/4}|\tilde{\Delta}\partial_t^j u| \\
&\le C_\delta|g|^8|\nabla\partial_t^j\varphi|^2 + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 + \delta|\Delta\partial_t^j\varphi|^2.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Para estimar os *"novos"* termos da esquerda de (3.6), observamos que

$$(3.11)\qquad \begin{cases} div\partial_t^j(\nu(\varphi)\nabla u) = div(\nu(\varphi)\nabla\partial_t^j u) + \sum_{i=1}^j C(i)div(\partial_t^i\nu(\varphi)\partial_t^{j-i}u) \\ div(\partial_t^i\nu(\varphi)\partial_t^{j-i}u) = \partial_t^i\nu(\varphi)\Delta\partial_t^{j-i}u + \nabla\partial_t^i\nu(\varphi)\nabla\partial_t^{j-i}u, \end{cases}$$

onde $\nabla\partial_t^i\nu(\varphi)\nabla\partial_t^{j-i}u$ denota o vetor com ℓ-ésima componente dada por

$$[\nabla\partial_t^i\nu(\varphi)\nabla\partial_t^{j-i}u]_\ell = (\nabla\partial_t^i\nu(\varphi), \nabla\partial_t^{j-i}u_\ell)_{\mathbb{R}^n}.$$

Em virtude das expressões anteriores, obtém-se

$$(3.12)\qquad \begin{aligned} |(div(\partial_t^i\nu(\varphi)\nabla\partial_t^{j-i}u), \tilde{\Delta}\partial_t^j u)| &\leq C_\delta|\partial_t^i\nu(\varphi)|_\infty^2|\Delta\partial_t^{j-i}u|^2 \\ &+ C_\delta|\nabla\partial_t^i\nu(\varphi)|_4^2|\nabla\partial_t^{j-i}u|_4^2 + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq j$.

Usando os Lemas 3.1 e 3.2, têm-se

$$(3.13)\qquad \begin{cases} |\partial_t^i\nu(\varphi)|_\infty^2|\Delta\partial_t^{j-i}u|^2 \leq \tilde{J}_i(M_{j-1}(\varphi))|\tilde{\Delta}\partial_t^{j-i}u|^2 \\ |\nabla\partial_t^i\nu(\varphi)|_4^2|\nabla\partial_t^{j-i}u|_4^2 \leq \tilde{L}_i(M_{j-1}(\varphi))|\tilde{\Delta}\partial_t^{j-i}u|^2 \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, j-1$, onde $\tilde{J}_i$ e $\tilde{L}_i$ são funções contínuas.

No caso $i = j$, temos a estimativa

$$(3.14)\qquad \begin{aligned} |\partial_t^j\nu(\varphi)|_\infty^2|\Delta u|^2 &\leq (\tilde{J}_j(M_{j-1}(\varphi)) + C|\partial_t^j\varphi|_\infty^2)|\tilde{\Delta}u|^2 \\ &\leq \tilde{J}_j(M_{j-1}(\varphi))|\tilde{\Delta}u|^2 + C|\nabla\partial_t^j\varphi|^{1/2}|\Delta\partial_t^j\varphi|^{3/2}|\tilde{\Delta}u|^2 \\ &\leq \tilde{J}_j(M_{j-1}(\varphi))|\tilde{\Delta}u|^2 + C_\delta|\nabla\partial_t^j\varphi|^2|\tilde{\Delta}u|^8 + \delta|\Delta\partial_t^j\varphi|^2 \end{aligned}$$

e

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} |\nabla\partial_t^j\nu(\varphi)|_4^2|\nabla u|_4^2 &\leq (\tilde{L}_j(M_{j-1}(\varphi)) + C|\nabla\partial_t^j\varphi|_4^2 + C|\partial_t^j\varphi|_\infty^2|\nabla\varphi|_4^2)|\tilde{\Delta}u|^2 \\ &\leq \tilde{L}_j(M_{j-1}(\varphi))|\tilde{\Delta}u|^2 + C|\nabla\partial_t^j\varphi|_4^2(|\tilde{\Delta}u|^2 + |\nabla\varphi|_4^2|\tilde{\Delta}u|^2) \\ &\leq \tilde{L}_j(M_{j-1}(\varphi))|\tilde{\Delta}u|^2 + C_\delta|\nabla\partial_t^j\varphi|^2(|\tilde{\Delta}u|^2 + |\nabla\varphi|_4^2|\tilde{\Delta}u|^2) \\ &+ \delta|\Delta\partial_t^j\varphi|^2 \end{aligned}$$

onde $\tilde{J}_j$ e $\tilde{L}_j$ são funções contínuas. Combinando as estimativas (3.7) – (3.15) e (3.6), conclue-se

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\partial_t^j u|^2 - (div(\nu(\varphi)\partial_t^j u),\tilde{\Delta}\partial_t^j u) &\leq C_\delta(\tilde{J}(M_{j-1}(\varphi)\sum_{\ell=0}^{j-1}|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 + \sum_{\ell=0}^{j-1}|\nabla\partial_t^{j-\ell}u|^2|\tilde{\Delta}\partial_t^\ell u|^2) \\
&+ C_\delta(\sum_{\ell=0}^{j-1}|\partial_t^{j-\ell}g|^2|\Delta\partial_t^\ell\varphi|^2 + |\partial_t^j h|^2 + |\tilde{\Delta}u|^2|\nabla\partial_t^j u|^2) \\
&+ C_\delta(|g|^2 + |\tilde{\Delta}u|^2 + |\tilde{\Delta}u||\Delta\varphi|^2)^4|\nabla\partial_t^j\varphi|^2 \\
&+ \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 + \delta|\Delta\partial_t^j\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

No que segue, usaremos a descomposição de Helmholtz $\tilde{\Delta}\partial_t^j u + \nabla\partial_t^j q$ no segundo termo da esquerda em (3.6).

Assim, pelas estimativas similares as utilizadas no Teorema 2.5, tem-se

$$
\begin{aligned}
|(\nu'(\varphi)\nabla\varphi\nabla\partial_t^j u,\tilde{\Delta}\partial_t^j u)| &\leq C_\delta|\nabla\varphi|_4^2|\nabla\partial_t^j u|_4^2 + \delta/2|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 \\
&\leq C_\delta|\nabla\varphi|_4^8|\nabla\partial_t^j u|^2 + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 \\
|(\nu(\varphi)\nabla\varphi\nabla\partial_t^j q,\tilde{\Delta}\partial_t^j u)| &= |(\partial_t^j q, div(\nu(\varphi)\tilde{\Delta}\partial_t^j u)| \\
&= |(\partial_t^j q, \nu'(\varphi)\nabla\varphi\tilde{\Delta}\partial_t^j u)| \\
&\leq C|\partial_t^j q|_4|\nabla\varphi|_4|\tilde{\Delta}\partial_t^j u| \\
&\leq C_\delta|\nabla\varphi|_4|\nabla\partial_t^j u|^{1/4}|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^{7/4} + \varepsilon|\nabla\varphi|_4|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 \\
&\leq C_\delta|\nabla\varphi|_4^8|\nabla\partial_t^j u|^2 + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 + \varepsilon|\nabla\varphi|_4|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2.
\end{aligned}
$$

Em virtude das estimativas anteriores e escolhendo ε de maneira adequada obtém-se

$$
\begin{aligned}
(3.16)\quad & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\partial_t^j u|^2 + \frac{\nu_0}{2}|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 \leq C_\delta(\widehat{J}(M_{j-1}(\varphi), M_{j-1}(u)\sum_{\ell=0}^{j-1}|\partial_t^{j-\ell}g|^2) \\
& + C_\delta|\partial_t^j h|^2 + C_\delta\widehat{L}(|g|,|\tilde{\Delta}u|,|\Delta\varphi|)(|\nabla\partial_t^j\varphi|^2 + |\nabla\partial_t^j u|^2) + \delta|\tilde{\Delta}\partial_t^j u|^2 + \delta|\Delta\partial_t^j\varphi|^2,
\end{aligned}
$$

onde $\widehat{J}$ e $\widehat{L}$ são funções contínuas.

A prova da seguinte estimativa é completamente análoga

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}|\nabla\partial_t^j\varphi|^2 + k_0|\Delta|\partial_t^j\varphi|^2 &\leq C_\delta(\widehat{J}_1(M_{j-1}(\varphi), M_{j-1}(u)) + C_\delta|\partial^j f|^2 \\
&+ \widehat{L}_1(|\tilde{\Delta}u|,|\Delta\varphi|)(|\nabla\partial_t^j u|^2 + |\nabla\partial_t^j\varphi|^2) + \delta|\Delta\partial_t^j\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

Finalmente, mediante uma escolha conveniente de δ, podemos deduzir a seguinte inequação diferencial

$$(3.17)\qquad \frac{d}{dt}\mathcal{N}^k(t)+\tau^k(t) \le \hat{J}_2(M_{j-1}(u^k),M_{j-1}(\varphi^j))+C(|\partial_t^j h|^2+|\partial_t^j f|^2) + \hat{L}_2(|g|,|\tilde{\Delta}u^k|,|\Delta\varphi^k|)\mathcal{N}^k(t)),$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^k(t) &= |\nabla\partial_t^j u^k(t)|^2+|\nabla\partial_t^j\varphi^k(t)|^2;\\ \tau^k(t) &= |\tilde{\Delta}\partial_t^j u^k(t)|^2+|\Delta\partial_t^j\varphi^k(t)|^2,\end{aligned}$$

e $\hat{J}_2,\hat{L}_2$ são funções contínuas.

Agora precisamos estimar, independente de k, o *"valor inicial"* de $\mathcal{N}^k(t)$. Usando a hipótese de indução (3.4), para todo $\varepsilon>0$ obtém-se

$$\int_{\varepsilon/2}^t(|\nabla\partial_t^j u^k|^2+|\nabla\partial_t^j\varphi^k|^2)ds\le G_{j-1}(t,\varepsilon/2)$$

onde $t\in[\varepsilon/2,T^*]$. Portanto conclue-se que para cada aproximação (u^k,φ^k) existe $\gamma_k,\varepsilon/2<\gamma_k<\varepsilon$, tal que

$$(3.18)\qquad |\nabla\partial_t^j u^k(\gamma_k)|^2+|\nabla\partial_t^j\varphi^k(\gamma_k)|^2\le(\varepsilon/2)^{-1}G_{j-1}(t,\varepsilon/2).$$

Podemos integrar (3.17) de γ_k até t e utilizar o Lema de Gromwall, para então obter

$$\mathcal{N}^k(t)+\int_{\gamma_k}^t\tau^k(s)ds\le F_j(t,\varepsilon)$$

para $t\in[\gamma_k,T^*]$, onde $F_j(t,\varepsilon)$ é uma função contínua. Do fato que $\gamma_k<\varepsilon$, obtém-se (3.3).

A seguir, provaremos (3.4). Derivando (2.34) $j+1$ vezes com respeito a t e multiplicando por $\partial_t^{j+1}u(t)$, temos

$$(3.19)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\partial_t^{j+1}u|^2+(\partial_t^{j+1}(\nu(\varphi)\nabla u),\nabla\partial_t^{j+1}u)=(\partial_t^{j+1}(u\nabla u+\alpha\varphi g+h),\partial_t^{j+1}u).$$

Usando estimativas similares as utilizadas por Heywood [9] para a equação de Navier–Stokes, podemos obter uma limitação para os termos à direita de (3.19). Os outros termos à esquerda de (3.19) podem ser limitados da mesma maneira que foi feito para demonstrar (3.17). Por exemplo, tem-se

$$\begin{aligned}|(\partial_t^j\nu(\varphi)\nabla\partial_t u,\nabla\partial_t^{j+1}u)| &\le |\partial_t^j\nu(\varphi)|_\infty|\nabla\partial_t u||\nabla\partial_t^{j+1}u|\\ &\le C_\delta(\tilde{J}_{j-1}(M_{j-1}(\varphi))+|\partial_t^j\varphi|_\infty^2)|\nabla\partial_t u|^2\\ &+ \delta|\nabla\partial_t^{j+1}u|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\partial_t^{j+1}\nu(\varphi)\nabla u, \nabla\partial_t^{j+1}u)| &= |(\partial_t^j(\nu'(\varphi)\partial_t\varphi)\nabla u, \nabla\partial_t^{j+1}u)| \\
&= |\sum_{i=0}^{j} C(i)(\partial_t^i\nu'(\varphi)\partial_t^{j+1-i}\varphi\nabla u, \nabla\partial_t^{j+1}u)| \\
&\leq C_\delta(|\nabla u|_6^4|\partial_t^{j+1}\varphi|^2 + \sum_{i=1}^{j}\tilde{J}(M_{j-1}(\varphi))|\nabla u|_4^2|\partial_t^{j+1-i}\varphi|_4^2) \\
&+ C_\delta|\partial_t^j\varphi|_\infty^2|\partial_t\varphi|_4^2|\nabla u|_4^2) + \delta|\nabla\partial_t^{j+1}u|^2 + \delta|\nabla\partial_t^{j+1}\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

Logo, podemos obter a seguinte expressão

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}|\partial_t^{j+1}u|^2 + \nu_0|\nabla\partial_t^{j+1}u|^2 &\leq C_\delta(\hat{J}(M_{j-1}(\varphi)\sum_{\ell=1}^{j}(|\nabla\partial_t^\ell u|^2 + |\nabla u|_4^2|\nabla\partial_t^\ell\varphi|^2) \\
&+ C_\delta(\sum_{\ell=1}^{j}|\nabla\partial_t^\ell u|^2|\nabla\partial_t^{j+1-\ell}u|^2 + \sum_{\ell=1}^{j+1}|\partial_t^\ell g|^2|\nabla\partial_t^{j+1-\ell}\varphi|^2) \\
&+ C_\delta|\Delta\partial_t^j\varphi|^2(|\nabla\partial_t u|^2 + |\nabla\partial_t\varphi|^2|\nabla u|_4^2) + C_\delta|\partial_t^{j+1}h|^2 \\
&+ C_\delta(|g|^4 + |\tilde{\Delta}u|^4)|\partial_t^{j+1}\varphi|^2 + C_\delta|\nabla u|^4|\partial_t^{j+1}u|^2. \\
&+ \delta|\nabla\partial_t^{j+1}u|^2 + \delta|\nabla\partial_t^{j+1}\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}|\partial_t^{j+1}\varphi|^2 + \nu_0|\nabla\partial_t^{j+1}\varphi|^2 &\leq C_\delta\hat{J}(M_{j-1}(\varphi))\sum_{\ell=1}^{j}(|\nabla\partial_t^\ell\varphi|^2 + |\nabla\varphi|_4^2|\nabla\partial_t^\ell\varphi|^2) \\
&+ C_\delta(\sum_{\ell=1}^{j}|\nabla\partial_t^\ell u|^2|\nabla\partial_t^{j+1-\ell}u|^2 + |\Delta\partial_t^j\varphi|^2|\nabla\partial_t\varphi|^2(1 + |\nabla\varphi|_4^2)) \\
&+ C_\delta|\Delta\varphi|^4(|\partial_t^{j+1}\varphi|^2 + |\partial_t^{j+1}u|^2) + C_\delta|\partial_t^{j+1}f|^2 \\
&+ \delta|\nabla\partial_t^{j+1}u|^2 + \delta|\nabla\partial_t^{j+1}\varphi|^2.
\end{aligned}
$$

Logo, para um apropriado $\delta > 0$ conclue-se

$$
\begin{aligned}
(3.20)\ \frac{d}{dt}\mathcal{N}_1^k(t) + \tau_1^k(t) &\leq \hat{J}_3(M_{j-1}(\varphi^k), \sum_{\ell=1}^{k}|\nabla\partial_t^\ell u^k|^2) \\
&+ C(|\partial_t^{j+1}f|^2 + |\partial_t^{j+1}h|^2) + C\hat{L}_3(|g|, |\tilde{\Delta}u^k|, |\Delta\varphi^k|)\mathcal{N}_1^k(t) \\
&+ C|\Delta\partial_t^j\varphi^k|^2(|\nabla\partial_t u^k|^2 + |\nabla\partial_t\varphi^k|^2)(1 + |\Delta u^k|^2 + |\Delta\varphi^k|^2),
\end{aligned}
$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1^k(t) &= |\partial_t^{j+1}u^k(t)|^2 + |\partial_t^{j+1}\varphi^k(t)|^2;\\ \tau_1^k(t) &= |\nabla\partial_t^{j+1}u^k(t)|^2 + |\nabla\partial_t^{j+1}\varphi^k(t)|^2,\end{aligned}$$

e $\widehat{J}_3, \widehat{L}_3$ são funções contínuas.

Agora, consideramos a igualdade

$$\begin{aligned}|\partial_t^{j+1}u^k|^2 &= (div(\partial_t^j(\nu(\varphi^k)\nabla u^k)), \partial_t^{j+1}u^k) + \alpha\partial_t^j(\varphi^k g)\\ &+ \partial_t^j h - (\partial_t^j(u^k\nabla u^k), \partial_t^{j+1}u^k)\end{aligned}$$

a qual é obtida derivando (2.34) j-vezes em relação a t e multiplicando por $\partial_t^{j+1}u^k(t)$. Usamos as estimativas (3.7) – (3.15) junto com (3.17) para concluir

$$\int_\varepsilon^t |\partial_t^{j+1}u^k|^2 ds \leq I_j(t,\varepsilon)$$

para $t \in [\varepsilon, T^*], \varepsilon > 0$. Analogamente, temos

$$\int_\varepsilon^t |\partial_t^{j+1}\varphi^k|^2 ds \leq I_j(t,\varepsilon).$$

Portanto, procedendo como antes, conclue-se que para cada aproximação (u^k,φ^k) existe γ_k, $\varepsilon/2 < \gamma_k < \varepsilon$, tal que

$$|\partial_t^{j+1}u^k(\gamma_k)|^2 + |\partial_t^{j+1}\gamma_k)|^2 \leq (\varepsilon/2)^{-1}I_j(t,\varepsilon/2).$$

Integrando (3.20) e observando que ε é arbitrário, obtemos (3.4). Finalmente, observamos que (3.17) implica

$$\begin{aligned}\tau^k(t) &\leq \widehat{J}_2(t) + C(|\partial_t^j h(t)|^2 + |\partial_t^j f(t)|^2) + \widehat{L}_2(t)\mathcal{N}^k(t)\\ &+ (\partial_t^{j+1}u(t), \tilde{\Delta}\partial_t^{j+1}u(t)) + (\partial_t^{j+1}\varphi(t), \tilde{\Delta}\partial_t^{j+1}u(t))\\ &\leq \widehat{J}_2(t) + C(|\partial_t^j h(t)|^2 + |\partial_t^j f(t)|^2) + \widehat{L}_2(t)\mathcal{N}^k(t)\\ &+ C\sqrt{\mathcal{N}_1^k(t)}\ \sqrt{\tau^k(t)}\end{aligned}$$

e segue-se a estimativa (3.5). Isso completa a prova do lema. $\square$.

Uma conseqüência imediata do Lema 3.4 é:

COROLÁRIO 3.5. Sob as hipóteses do Teorema 3.3. A solução (u,φ) obtida no Teorema 2.6 satisfaz $(u,\varphi) \in C^\infty((0,T^*];(H^2(\Omega))^{n+1}) \cap C([0,T^*];(H^2(\Omega))^{n+1})$.

PROVA: Seguindo os argumentos de Rautmann [22] podemos concluir que $(u,\varphi) \in C^j((0,T^*];V \times (H_0^1(\Omega)))$, para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Isto junto com as estimativas (3.3) – (3.5) implicam

$$\partial_t^j u \in C((0,T^*];(H^2(\Omega))^n); \partial_t^j \varphi \in C((0,T^*];H^2(\Omega)) \text{ para todo } j = 0,1,2,\ldots.$$

Conseqüentemente $(u,\varphi) \in C^\infty((0,T^*];(H^2(\Omega))^{n+1})$. De maneira similar obtem-se $(u,\varphi) \in C([0,T^*];H^2(\Omega))$. □

Agora, estamos em condições de obter a regularidade clássica para a solução.

PROVA DO TEOREMA 3.3. Notemos que é suficiente mostrar que

$$(3.21\ \ell) \quad u \in (C^\infty((0,T^*];H^{\ell+2}(\Omega)))^n; \varphi \in C^\infty((0,T^*],W^{\ell+2,4}(\Omega)) \quad \forall\, \ell = 0,1,2,\ldots.$$

Faremos a prova de (3.21 ℓ) por indução sobre ℓ. Começamos notando que para t fixo e para qualquer $j = 0,1,2,\ldots$, $\partial_t^j u$ e $\partial_t^j \varphi$ são solução do problema

$$(3.22) \qquad \begin{cases} -div(\nu(\varphi)\nabla\partial_t^j u) + \nabla\partial_t^j p = \tilde{h}_j, \\ div \quad \partial_t^j u = 0, \\ -div(k(\varphi)\nabla\partial_t^j\varphi) = \tilde{f}_j \text{ em } \Omega, \\ \partial_t^j u = 0; \partial_t^j \varphi = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde

$$\begin{aligned} \tilde{h}_j &= \sum_{i=0}^{j} C(i)(\partial_t^i u \nabla \partial_t^{j-i} u + \alpha \partial_t^{j-i}\varphi \partial_t^i g) \\ &+ \sum_{i=1}^{j} C(i) div(\partial_t^i \nu(\varphi)\nabla\partial_t^{j-i} u) + \partial_t^j h - \partial_t^{j+1} u, \\ \tilde{f}_j &= \sum_{i=0}^{j} C(i)(\partial_t^i u \nabla\partial_t^{j-i}\varphi) + \sum_{i=1}^{j} C(i) div(\partial_t^i k(\varphi)\nabla\partial_t^{j-i}\varphi) + \partial_t^j f - \partial_t^{j+1}\varphi. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de regularidade no caso estacionário (Teorema 1.5) e observando que $\tilde{f}_0 \in C((0,T^*];L^4(\Omega))$ podemos concluir que $\varphi \in C((0,T^*];W^{2,4}(\Omega))$. Este fato e a regularidade conhecida para (u,φ) implicam $\tilde{f}_1 \in C((0,T^*];L^4(\Omega))$. Logo, aplicando regularidade L^p de novo, obtemos $\partial_t\varphi \in C((0,T^*];W^{2,4}(\Omega))$. Por indução tém-se então $\partial_t^j\varphi \in C((0,T^*];W^{2,4}(\Omega))$ para todo j natural e logo $\varphi \in C^\infty((0,T^*];W^{2,4}(\Omega))$, e portanto (3.21 0) é válido.

Agora, suponhamos que vale (3.21 ℓ) isto é, $u \in (C^\infty((0,T^*];H^{\ell+1}(\Omega)))^n$ e $\varphi \in C^\infty((0,T^*];W^{\ell+1,4}(\Omega))$. Então pela regularidade do problema (3.22) (que pode ser provada a partir do Teorema 1.5) temos que

$$\varphi \in C((0,T^*].W^{\ell+2,4}(\Omega)), u \in (C((0,T^*];H^{\ell+2}(\Omega)))^n.$$

Podemos demostrar por indução sobre j (combinando argumentos da prova do Teorema 1.5 e da prova dos Lemas 1.6 e 1.7) que $\tilde{f}_j \in C((0,T^*];W^{\ell,4}(\Omega))$ e $\tilde{h}_j \in C((0,T^*];H^\ell(\Omega))$, segue-se que $\partial_t^j\varphi \in C((0,T^*];W^{\ell+2,4}(\Omega))$ e $\partial_t^j u \in (C((0,T^*];H^{\ell+2}(\Omega)))^n$ para qualquer $j \in I\!N$. Assim, obtém-se (3.21). □

OBSERVAÇÃO 3.6. Podemos obter informação sobre a pressão associada ao problema (3.1) – (3.2) mediante argumentos padrões. De fato, sob as hipóteses do Teorema 3.3, se (u,φ) é uma solução clássica de (3.1) – (3.2) então existe $p \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (0,T^*])$ tal que $\int_\Omega p(t,x)dx = 0,\ \forall t \in (0,T^*]$, e (u,φ,p) satisfaz (3.1).

Isto é uma conseqüência direta dos resultados de regularidade para o problema de Stokes (Cattabriga [4], Amrouche e Girault [2]).

OBSERVAÇÃO 3.7. Por facilidade de exposição o Teorema de regularidade foi enunciado em termos de regularidade C^∞, porém enunciados similares com regularidade C^j poderiam ser escritos.

2. EXISTÊNCIA GLOBAL

Nesta seção apresentaremos uma seqüência de estimativas para a solução forte e suas aproximações espectrais. Estas estimativas serão importantes para obter uma solução global, e também para obter estimativas de erro uniformes no tempo (Capítulo 4).

TEOREMA 3.8. Seja Ω um domínio limitado de $I\!R^n (n = 2$ ou $3)$, de classe $C^{1,1}$; suponha que ν, k satisfazem as hipóteses do Teorema 2.5.
Assumamos $g \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), h \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), f \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), \partial_t f \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), u_0 \in V$ e $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Se as normas $|\nabla u_0|, |\Delta\varphi_0|, \|f\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}, \|\partial_t f\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}$ e $\|h\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}$ forem suficientemente pequenas, então a solução (u,φ) obtida no Teorema 2.5, existe globalmente. Além disso existem constantes positivas $\beta = \beta(u_0,\varphi_0,f,h)$ e $M = M(u_0,\varphi_0,f,h)$ tal que

$$(3.23) \qquad \sup_{t\geq 0} |\Delta\varphi(t)| \leq \beta, \quad \sup_{t\geq 0}\{|\nabla u(t)| + |\nabla\varphi(t)|\} \leq M$$

O mesmo tipo de estimativa vale uniformemente em k para as aproximações de Galerkin.

PROVA: As estimativas seguintes provam-se, primeiro para as aproximações, e logo deduzidas para (u, φ) no limite aplicando um procedimento padrão. Por facilidade de notação, mais uma vez omitiremos os índices das soluções aproximadas.

Como na prova da existência local (Teorema 2.5), tem-se

$$(3.24) \qquad \frac{d}{dt}|\nabla u|^2 + |\tilde{\Delta} u|^2 \leq C|\nabla u|^6 + C|\Delta\varphi|^2|\tilde{\Delta} u|^2 + C|g|^2|\Delta\varphi|^2 + C|h|^2,$$

$$(3.25) \qquad |\partial_t u|^2 \leq C|\nabla u|^6 + C|\Delta\varphi|^2|\tilde{\Delta} u|^2 + C|g|^2|\Delta\varphi|^2 + C|\tilde{\Delta} u|^2 + C|h|^2,$$

$$(3.26) \qquad \frac{d}{dt}|\partial_t\varphi|^2 + |\nabla\partial_t\varphi|^2 \leq C|\Delta\varphi|^2|\partial_t u|^2 + C|\nabla\partial_t\varphi|^2|\Delta\varphi|^2 + C|\partial_t f|^2,$$

$$(3.27) \qquad |\partial_t\varphi|^2 \leq C(|\nabla u|^4 + |\Delta\varphi|^2)|\Delta\varphi|^2 + C|f|^2 + C|\Delta\varphi|^2,$$

$$(3.28) \qquad |\Delta\varphi|^2 \leq C(|\nabla u|^4 + |\Delta\varphi|^2|)\Delta\varphi|^2 + C|f|^2 + C|\partial_t\varphi|^2.$$

Combinando (3.24) – (3.26), obtemos

$$(3.29) \qquad \frac{d}{dt}(|\nabla u|^2 + |\partial_t\varphi|^2) + |\tilde{\Delta} u|^2 + |\nabla\partial_t\varphi|^2 \leq C|\Delta\varphi|^2|\nabla\partial_t\varphi|^2 + C|\partial_t f|^2$$
$$+C|\Delta\varphi|^2|\tilde{\Delta} u|^2 + C(1 + C|\Delta\varphi|^2)(|\nabla u|^6 + |\Delta\varphi|^2|\tilde{\Delta} u|^2 + |\Delta\varphi|^2|g|^2 + |h|^2).$$

Assuma $|\Delta\varphi_0|^2 < \beta$ onde β satisfaz

$$(3.30) \qquad C\beta < \frac{1}{8}.$$

Queremos mostrar que para dados iniciais e forças suficientemente pequenos tem-se

$$(3.31) \qquad \sup_{t\geq 0} |\Delta\varphi(t)|^2 < \beta.$$

Suponha por contradição que (3.31) não é válido. Então existe $t_1 > 0$ tal que $|\Delta\varphi(t)|^2 < \beta$ se $0 \leq t < t_1$ e $|\Delta\varphi(t_1)|^2 = \beta$.

Fazendo $\eta(t) = |\nabla u(t)|^2 + |\partial_t\varphi(t)|^2$ na expressão (3.29) e usando (3.30), para $t \in [0, t_1]$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\eta + \frac{1}{2}(|\tilde{\Delta} u|^2 + |\nabla \partial_t \varphi|^2) \leq 2C\eta^3 + 2C(\beta|g|^2 + |h|^2 + |\partial_t f|^2). \tag{3.32}$$

A seguir, observamos que existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1(|\nabla u|^2 + |\partial_t\varphi|^2) \leq \frac{1}{2}(|\tilde{\Delta} u|^2 + |\nabla\partial_t\varphi|^2).$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta &\leq 2C\eta^3 - C_1\eta + C_2, \\ \eta(0) &= |\nabla u_0|^2 + |\partial_t\varphi(0)|^2, \end{aligned}$$

onde $C_2 = 2C \sup_{t\geq 0}\{\beta|g(t)|^2 + |h(t)|^2 + |\partial_t f(t)|^2\}$.

O teorema de comparação para inequações diferenciais implica que $\eta(t) \leq \phi(t)$ para todo t no intervalo $[0, t_1]$, onde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi &= 2C\phi^3 - C_1\phi + C_2 = F(\phi, C_2), \\ \phi(0) &= \eta(0). \end{aligned}$$

Agora, observe-se que $F(\phi, 0) = 2C\phi^3 - C_1\phi$ tem uma raiz simples $r(0) \equiv \left(\frac{C_1}{2C}\right)^{1/2}$, a qual é inestável. Conseqüentemente, para C_2 pequeno, $F(\phi, C_2)$, tem uma raiz simples inestável $r(C_2)$ perto de $r(0)$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que se

$$C_2 < \delta \quad \text{e} \quad \eta(0) = \phi(0) < r(C_2) \tag{3.33}$$

então tem-se

$$0 \leq \eta(t) \leq \phi(t) \leq \phi(0) = \eta(0) \tag{3.34}$$

para todo $t \in [0, t_1]$.

Notemos que a estimativa (3.27) implica

$$|\partial_t\varphi(0)|^2 \leq C(|\nabla u_0|^4 + |\Delta\varphi_0|^2)|\Delta\varphi_0|^2 + C|f(0)|^2 + C|\Delta\varphi_0|^2. \tag{3.35}$$

Logo, combinando as estimativas (3.34) e (3.35) tem-se $|\nabla u(t)|^2 + |\partial_t\varphi(t)|^2 \leq |\nabla u_0|^2 + |\partial_t\varphi(0)|^2, 0 \leq t \leq t_1$, para $\beta, |\nabla u_0|, |\Delta\varphi_0|, \|h\|_{L^\infty(0,\infty;L^2)}, \|f\|_{L^\infty(0,\infty;L^2)}$ e $\|\partial_t f\|_{L^\infty(0,\infty,L^2)}$ suficientemente pequenas.

Agora, observamos que as desigualdades (3.28) e (3.30) implicam

$$|\Delta\varphi|^2 \leq C|\nabla u|^4|\Delta\varphi|^2 + \frac{1}{8}|\Delta\varphi|^2 + C|f|^2 + C|\partial_t\varphi|^2, \tag{3.36}$$

e portanto para $0 \leq t \leq t_1$ temos

$$|\Delta\varphi(t)|^2 < \beta$$

se $|\nabla u_0|, |\Delta\varphi_0|$ e $\|f\|_{L^\infty(0,\infty,L^2)}$ forem suficientemente pequenas.

Esta contradição demostra (3.31). Conseqüentemente, obtemos as estimativas (3.23).
□

No caso $u_0 \in V \bigcap H^2(\Omega)$ podemos melhorar as estimativas:

TEOREMA 3.9 Sob as condições do Teorema 3.8; assuma $\partial_t g \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), \partial_t h \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$ e $u_0 \in V \bigcap H^2$. Se $\|u_0\|_{H^2(\Omega)}$ e $\|\partial_t h\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}$ são suficientemente pequenas, então a solução obtida no Teorema 3.8 satisfaz também as estimativas

$$\sup_{t\geq 0}\{|\tilde{\Delta} u(t)| + |\partial_t u(t)|\} < +\infty. \tag{3.37}$$

Além disso, o mesmo tipo de estimativa (uniforme em k) são válidas para as aproximações. □

Observamos que não conseguimos, em geral, obter um teorema similar ao das equações de Navier–Stokes ou Boussinesq clássicas para $n = 2$. Nesses casos não é necessário supor nenhum tipo de pequenez para as forças e dados iniciais. É claro que a dificuldade apresentada no nosso trabalho probem, em grande parte, dos novos termos acoplados nas equações.

CAPÍTULO 4

ESTIMATIVAS DE ERRO

INTRODUÇÃO

Neste capítulo vamos apresentar algumas estimativas do erro cometido ao aproximar a solução do problema pelo método de Galerkin espectral.

Em [22], Rautmann estudou o erro no caso das equações de Navier–Stokes, apresentando várias estimativas locais no tempo. É natural esperar então, obter o mesmo tipo de resultados para nossas equações. De fato, tais estimativas podem ser obtidas; entretanto, elas não serão ótimas no caso geral, como veremos a seguir. Porém, no caso ν e k constantes é possível recuperar os resultados do Rautmann (veja a Observação 4.7).

Por outro lado, se a solução do problema existe globalmente no tempo, com uma certa regularidade, estas estimativas locais fornecem uma taxa de erro que cresce exponencialmente com o tempo.

Para o caso Navier–Stokes, Heywood [10] demonstrou que podem ser obtidas estimativas de erro uniformes no tempo, na norma H^1, quando se supõe que a solução exata satisfaz certas condições de estabilidade exponencial também na norma H^1.

Rojas–Medar e Boldrini [23] mostraram que é possível obter estimativas uniformes otimais para o erro sem supor explicitamente a estabilidade para uma classe de soluções determinadas por condições adicionais para as forças. A prova é direta e simples.

Nossos resultados sobre estimativas de erro uniforme no tempo combinam os argumentos de Rojas–Medar e Boldrini, com as estimativas obtidas nos capítulos anteriores.

Adotamos as mesmas notações do Capítulo 2 e suporemos que ν, k satisfazem

$$(4.1) \qquad \begin{cases} 0 < \nu_0 < \nu(\sigma) < \nu_1 & ; |\nu'(\sigma)| < \nu_1', \\ 0 < k_0 < k(\sigma) < k_1 & ; |k'(\sigma)| < k_1' \ \text{ para todo } \ \sigma \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Neste capítulo Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n (n = 2 \text{ ou } 3)$ de classe $C^{1,1}$.

A seguir enunciaremos alguns fatos básicos que podem ser encontrados no artigo de Rautmann [22].

LEMA 4.1. Se $v \in V$, então vale a estimativa

$$|v - P_k v|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} |\nabla v|^2.$$

Se ademais $v \in V \bigcap (H^2(\Omega))^n$, então

$$\begin{aligned} |v - P_k v|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}^2} |\tilde{\Delta} v|^2 \\ |\nabla v - \nabla P_k v|^2 &\leq \frac{1}{\lambda_{k+1}} |\tilde{\Delta} v|^2. \end{aligned}$$

Além disso, o mesmo tipo de estimativas é válida para o Operador Laplaciano. □

Como no Capítulo 3, consideraremos o problema homogeneizado (3.1) – (3.2).

1. ESTIMATIVAS DE ERRO LOCAIS NO TEMPO

Comecemos notando que o problema (3.1) – (3.2) pode ser escrito da seguinte maneira

$$(4.2) \qquad \begin{cases} u_t - P(div(\nu(\varphi)\nabla u)) + P(u.\nabla u) - P(h + \alpha\varphi g) = 0 \\ \varphi_t - div(k(\varphi)\nabla\varphi) + u.\nabla\varphi - f = 0 \end{cases}$$

$$(4.3) \qquad u(0) = u_0 \ \ , \ \ \varphi(0) = \varphi_0.$$

Por outro lado, temos que as aproximações de Galerkin

$$u^k(t,x) = \sum_{i=1}^{k} c_{k,i}(t) v^i(x) \ \text{ e } \ \varphi^k(t,x) = \sum_{i=1}^{k} d_{k,i}(t) \psi^i(x)$$

para u e φ respectivamente, satisfazem

$$(4.4) \qquad u_t^k - P_k(div(\nu(\varphi^k)\nabla u^k)) + P_k(u^k.\nabla u^k) - P_k(h + \alpha\varphi^k g) = 0$$

$$(4.5) \qquad \varphi_t^k - \tilde{P}_k(div(k(\varphi^k)\nabla\varphi^k)) + \tilde{P}_k(u^k\nabla\varphi^k) - \tilde{P}_k f = 0$$

$$(4.6) \qquad u^k(0) = \tilde{P}_k u_0 \;\; ; \;\; \varphi^k(0) = \tilde{P}_k\varphi_0.$$

Como vimos nos capítulos anteriores, as aproximações (u^k, φ^k) convergem em diferentes normas à solução (u, φ) quando $k \to \infty$. Apresentaremos a seguir estimativas de erro, isto é, estimativas para $\|u^k - u\|, \|\varphi^k - \varphi\|$ em termos de potências de $\dfrac{1}{\alpha_{k+1}}$ e $\dfrac{1}{\lambda_{k+1}}$. Para isto, suporemos as seguintes condições sob os dados

$$(4.7) \qquad g \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^n); g_t, h \;\text{ e }\; h_t \in L^2(0, T(L^2(\Omega))^n)$$

$$(4.8) \qquad f, f_t \in L^2(0, T; (L^2(\Omega)), u_0 \in V \cap H^2(\Omega) \;\text{ e }\; \varphi_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Note-se que se assumirmos (4.1), (4.7) e (4.8), então pelo Teorema 2.6, se conclue que existe um número positivo $T^* \leq T$ tal que o problema (3.1) – (3.2) tem uma única solução forte (u, φ) satisfazendo

$$(4.9) \qquad \begin{cases} |\nabla u(t)|^2 + |\nabla\varphi(t)|^2 + \int_0^t (|\tilde{\Delta} u|^2 + |\Delta\varphi|^2) d\sigma \leq H_1(t) \\ |\tilde{\Delta} u(t)|^2 + |\Delta\varphi(t)|^2 \leq H_2(t) \\ |u_t(t)|^2 + |\varphi_t(t)|^2 + \int_0^t (|\nabla u_t|^2 + |\nabla\varphi_t|^2) d\sigma \leq H_3(t) \end{cases}$$

para todo $t \in [0, T^*]$, onde $H_1(\cdot), H_2(\cdot)$ e $H_3(\cdot)$ são funções contínuas. Mais ainda, a estimativa (4.9) também é satisfeita pelas aproximações (u^k, φ^k) (uniformemte em k).

Agora, consideremos a expansão em série de u e φ

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) v^i(x) \;\; ; \;\; \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t)\psi^i(x).$$

Sejam $w^k = P_k u = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) v^i(x)$ e $\xi^k = \tilde{P}_k \varphi = \sum_{i=1}^{k} b_i(t)\psi^i(x)$ e seja

$$(4.10) \qquad \begin{cases} E^k = u - w^k \;\; , \;\; F^k = \varphi - \xi^k \\ r = w^k - u^k \;\; , \;\; s = \xi^k - \varphi^k \end{cases}$$

Então tem-se $u - u^k = E^k + r$ e $\varphi - \varphi^k = F^k + s$, com essa notação temos o seguinte resultado:

LEMA 4.2. Sob a hipóteses (4.1), (4.7) e (4.8) vale a seguinte estimativa

$$|r(t)|^2 + |s(t)|^2 + \int_0^t (|\nabla r|^2 + |\nabla s|^2) d\sigma \leq G_1(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big),$$

onde $G_1(t)$ é uma função contínua que depende das funções à direita de (4.9).

PROVA: Observe-se que w^k e ξ^k satisfazem

$$w_t^k - P_k(div(\nu(\varphi)\nabla u)) + P_k(u\nabla u - \alpha\varphi g - h) = 0 \tag{4.11}$$

$$\begin{gathered} \xi_t^k - \tilde{P}_k(div(k(\varphi)\nabla\varphi)) + \tilde{P}_k(u\nabla\varphi - f) = 0 \\ w^k(0) = P_k u_0 \ , \ \ \xi^k(0) = \tilde{P}_k\varphi_0 \end{gathered} \tag{4.12}$$

subtraindo (4.11) de (4.4), obtemos

$$\begin{gathered} r_t - P_k(div(\nu(\varphi)\nabla u)) + P_k(div(\nu(\varphi^k)\nabla u^k)) = \\ -P_k(u\nabla(E^k + r) + (E^k + r)\nabla u^k) + P_k((F^k + s)g) = \ell, \end{gathered} \tag{4.13}$$

e usando a identidade

$$\begin{gathered} -div(\nu(\varphi)\nabla u) + div(\nu(\varphi^k)\nabla u^k) = \\ -div(\nu(\varphi)\nabla(E^k + r)) - div((\nu(\varphi) - \nu(\varphi^k))\nabla u^k), \end{gathered}$$

conclue-se

$$\begin{aligned} r_t - P_k(div(\nu(\varphi)\nabla r)) &= \ell + P_k(div(\nu(\varphi)\nabla E^k)) \\ &+ P_k(div((\nu(\varphi) - \nu(\varphi^k))\nabla u^k)). \end{aligned}$$

Fazendo o produto interior em $(L^2(\Omega))^n$ desta identidade com r, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}|r|^2 + (\nu(\varphi)\nabla r, \nabla r) &= (\ell, r) + (div(\nu(\varphi)\nabla E^k), r) \\ &+ (div((\nu(\varphi) - \nu(\varphi^k))\nabla u^k), r). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Usando estimativas similares à usadas por Rautmann [22] ou Heywood [10], podemos limitar (ℓ, r) da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
|(u\nabla(E^k+r),r)| &= |(u\nabla E^k,r)| = |(u\nabla r,E^k)| \\
&\leq |u|_\infty|\nabla r| \ |E^k| \leq C_\delta|\tilde{\Delta}u|^2|E^k|^2+\delta|\nabla r|^2 \\
|((E^k+r)\nabla u^k,r)| &= |((E^k+r)\nabla r,u^k)| \\
&\leq C_\delta|\tilde{\Delta}u^k|^2(|E^k|^2+|r|^2)+\delta|\nabla r|^2.
\end{aligned}
$$

Os outros termos da direita de (4.14) são limitados como se segue:

$$
\begin{aligned}
|(F^k g,r)| &\leq |F^k|_3|g||r|_6 \\
&\leq C_\delta|F^k||\nabla F^k||g|^2+\delta|\nabla r|^2 \\
|(sg,r)| &\leq |s|_3|g||r|_6 \\
&\leq C_\delta|s||\nabla s||g|^2+\delta|\nabla r|^2 \\
&\leq C_\delta|s|^2|g|^4+\delta|\nabla s|^2+\delta|\nabla r|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|(div(\nu(\varphi)\nabla E^k),r)| &= |(\nu(\varphi)\nabla E^k,\nabla r)| \\
&\leq C|\nabla E^k||\nabla r| \\
&\leq C_\delta|\nabla E^k|^2+\delta|\nabla r|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|(div((\nu(\varphi)-\nu(\varphi^k))\nabla u^k),r)| &= |((\nu(\varphi)-\nu(\varphi^k))\nabla u^k,\nabla r)| \\
&\leq |(\nu(\varphi)-\nu(\varphi^k))|_3|\nabla u^k|_6|\nabla r| \\
&\leq C|\varphi-\varphi^k|_3|\tilde{\Delta}u^k||\nabla r| \\
&\leq C_\delta|F+s|_3^2|\tilde{\Delta}u^k|^2+\delta|\nabla r|^2 \\
&\leq C_\delta|F||\nabla F||\tilde{\Delta}u^k|^2+C_\delta|s||\nabla s||\tilde{\Delta}u^k|^2+\delta|\nabla r|^2 \\
&\leq C_\delta|F||\nabla F||\tilde{\Delta}u^k|^2+C_\delta|s|^2|\tilde{\Delta}u^k|^4 \\
&+ \delta|\nabla r|^2+\delta|\nabla s|^2
\end{aligned}
$$

em virtude das imersões de Sobolev e as desigualdades de Hölder e Young. Usando essas estimativas em (4.11), temos

$$
\begin{aligned}
(4.15) \quad & \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}|r|^2+\nu_0|\nabla r|^2 \leq C_\delta|\nabla E^k|^2+C_\delta|\tilde{\Delta}u^k|^2|r|^2+C_\delta(|g|^4+|\tilde{\Delta}u^k|^4)|s|^2 \\
& +C_\delta(|\tilde{\Delta}u^k|^2+|\tilde{\Delta}u|^2)|E^k|^2+C_\delta|F^k||\nabla F^k|(|g|^2+|\tilde{\Delta}u^k|^2)+\delta|\nabla r|^2+\delta|\nabla s|^2
\end{aligned}
$$

A seguir, obteremos estimativas para $|s|^2$, subtraindo (4.12) de (4.5), tem-se

$$(4.16)\qquad \begin{aligned} s_t - \tilde{P}_k(div(k(\varphi)\nabla s)) &= \ell_1 + \tilde{P}_k(div(k(\varphi)\nabla F^k)) \\ &+ \tilde{P}_k(div(k(\varphi) - k(\varphi^k))\nabla\varphi^k)) \end{aligned}$$

onde $\ell_1 = u\nabla(F^k+s)+(E^k+r)\nabla\varphi^k$. Usando estimativas similares às anteriores conclue-se

$$(4.17)\ \begin{aligned} \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}|s|^2 + k_0|\nabla s|^2 &\leq C_\delta(|\tilde{\Delta}u|^2|F^k|^2 + |\Delta\varphi^k|^2|E^k|^2 + |F^k||\nabla F^k|^2|\Delta\varphi^k|^2 \\ &+ C_\delta|\nabla F^k|^2 + C_\delta|\Delta\varphi^k|^2|r|^2 + C_\delta|\Delta\varphi^k|^4|s|^2 + \delta|\nabla s|^2. \end{aligned}$$

Somando (4.15) e (4.17), e escolhendo δ pequeno, vem que

$$(4.18)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}(|r|^2 + |r|^2) + |\nabla r|^2 + |\nabla s|^2 &\leq M(t)(|\nabla E^k|^2 + |\nabla F^k|^2) \\ &+ N(t)(|r|^2 + |s|^2) \end{aligned}$$

onde $M(t) = C(|\tilde{\Delta}u|^2 + |\tilde{\Delta}u^k|^2 + |\Delta\varphi^k|^2 + |g|^2 + 1)(t)$ e $N(t) = (|\tilde{\Delta}u^k|^4 + |\Delta\varphi^k|^4 + |\tilde{\Delta}u^k|^2 + |\Delta\varphi^k|^2 + |g|^4)(t)$. A inequação diferencial (4.18) implica a seguinte desigualdade integral:

$$\begin{aligned} |r(t)|^2 + |s(t)|^2 + \int_0^t(|\nabla r|^2 + |\nabla s|^2 d\sigma &\leq \int_0^t M(\sigma)(|\nabla E^k|^2 + |\nabla F^k|^2)d\sigma \\ &+ \int_0^t N(\sigma)(|r|^2 + |s|^2)d\sigma. \end{aligned}$$

Aqui, usamos que $r(0) = s(0) = 0$. Agora, aplicando o Lema de Gronwall, obtém-se

$$(4.19)\qquad \begin{aligned} &|r(t)|^2 + |s(t)|^2 + \int_0^t(|\nabla r|^2 + |\nabla s|^2 d\tau \leq \\ &(\int_0^t M(\tau)(|\nabla E^k|^2 + |\nabla F^k|^2)d\tau)(1 + \int_0^t N(\tau)d\tau exp\int_0^t N(\tau)d\tau). \end{aligned}$$

Aplicando as estimativas do Lema 4.1, obtemos o resultado desejado com

$$G_1(t) = CH_4(t)[1 + exp(\int_0^t N(\tau)d\tau)\int_0^t M(\tau)d\tau]\int_0^t M(\tau)d\tau,$$

já que $\tau \to M(\tau)$ e $\tau \to N(\tau)$ são funções integráveis, devido à (4.9). □

Agora estamos pronto para provar o seguinte:

TEOREMA 4.3. Sob as hipóteses (4.1), (4.7) e (4.8), as aproximações de Galerkin satisfazem:

$$|u^k(t) - u(t)|^2 + |\varphi^k(t) - \varphi(t)|^2 + \int_0^t (|\nabla u^k(\tau) - \nabla u(\sigma)|^2 + |\nabla \varphi^k(\tau) - \nabla \varphi(\tau)|^2) d\tau \leq G_2(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)$$

para todo $t \in [0, T^*]$. onde $G_2(t)$ é uma função contínua que depende das funções à direita de (4.9).

PROVA: Observe que $|u^k - u|^2 \leq |E^k|^2 + |r|^2$ e $|\varphi^k - \varphi|^2 \leq |F^k| + |s|^2$.

Logo, pelos Lemas 4.1 e 4.2 obtemos a estimativa do teorema. □

A seguir, uma estimativa local do erro na norma H^1 será provada.

TEOREMA 4.4. Sob as hipóteses (4.1), (4.7) e (4.8), temos que as aproximações u^k e φ^k satisfazem:

$$|\nabla u^k(t) - \nabla u(t)|^2 + |\nabla \varphi^k(t) - \nabla \varphi(t)|^2 + \int_0^t (|u_t^k - u_t|^2 + |\varphi_t^k - \varphi_t|^2) d\tau \leq G_3(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)^{1/2}$$

para todo $t \in [0, T^*]$. Onde $G_3(t)$ é uma função contínua que depende das funções à direita de (4.9).

Como na prova do Teorema 4.3, só precisamos demonstrar o seguinte:

LEMA 4.5. Sob as hipóteses (4.1), (4.7) e (4.8) temos

$$|\nabla r(t)|^2 + \int_0^t |r_t|^2 d\tau \leq G_4(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)^{1/2}, \tag{4.20}$$

$$|\nabla s(t)|^2 + \int_0^t |s_t|^2 d\tau \leq G_5(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)^{1/2}, \tag{4.21}$$

onde $G_4(t)$ e $G_5(t)$ são contínuas e depende das funções à direita de (4.9).

PROVA: Tomando o produto em $(L^2(\Omega))^n$ da identidade (4.13) com r_t, obtemos

$$
\begin{aligned}
|r_t|^2 + (\nu(\varphi)\nabla r, \nabla r_t) &= (\ell, r_t) + (div(r(\varphi)\nabla E^k), r_t) \\
&+ (div((\nu(\varphi) - \nu(\varphi^k))\nabla u^k), r_t)
\end{aligned}
$$

Usando então a identidade

$$
(\nu(\varphi)\nabla r_t) = \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}|\nu^{1/2}(\varphi)\nabla r|^2 - \frac{1}{2}(\varphi_t \nabla r, \nabla r),
$$

vem que

$$
\begin{aligned}
|r_t|^2 + \frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}|\nu^{1/2}(\varphi)\nabla r|^2 &= (\ell, r_t) + (div(\nu(\varphi)\nabla E^k), r_t) \\
&+ (div((\nu(\varphi) - \nu(\varphi^k))\nabla u^k), r_t) + \frac{1}{2}(\varphi_t \nabla r, \nabla r).
\end{aligned}
$$

Agora estimamos os termos à direita da identidade anterior, usando as desigualdades de Hölder e Young junto com as imersões de Sobolev, obtendo

$$
\begin{aligned}
|(u\nabla(E^k + r), r_t)| &\leq C_\delta(|\tilde{\Delta} u|^2(|\nabla E^k|^2 + |\nabla r|^2) + \delta|r_t|^2, \\
|((E^k + r)\nabla u^k, r_t)| &\leq C_\delta|\tilde{\Delta} u^k|^2(|\nabla E^k|^2 + |\nabla r|^2) + \delta|r_t|^2, \\
|(div((\nu(\varphi) - \nu(\varphi^k))\nabla u^k), r_t)| &= |((\nu(\varphi) - \nu(\varphi^k))\nabla u^k, \nabla r_t)| \\
&\leq C|\varphi - \varphi^k|_3|\nabla u^k|_6|\nabla r_t| \\
&\leq C|\tilde{\Delta} u^k|(|\nabla F^k| + |\nabla s|)|\nabla r_t|, \\
|(div(\nu(\varphi)\nabla E^k), r_t)| &\leq |(\nu(\varphi)\nabla E^k, \nabla r_t)|, \\
&\leq C|\nabla E^k||\nabla r_t| \\
|(\varphi_t \nabla r, \nabla r)| &\leq |\varphi_t|_3|\nabla r|_6|\nabla r|, \\
&\leq C|\nabla \varphi_t||\Delta r||\nabla r|,
\end{aligned}
$$

também aplicamos a desigualdade de Nirenberg $|v|_\infty \leq C(|v|_6^{1/2}|\nabla v|_6^{1/2} + |v|_6), v \in H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$ (veja [6]) para obter

$$
\begin{aligned}
|((F^k + s)g, r_t)| &\leq |F^k + s|_\infty |g||r_t| \\
&\leq C(|\nabla F^k|^{1/2}|\Delta F^k|^{1/2} + |\nabla F^k| + |\nabla s|^{1/2}|\Delta s|^{1/2} + |\nabla s|)|g||r_t| \\
&\leq C_\delta(|\nabla F^k||\Delta F^k| + |\nabla s||\Delta s| + |\nabla F^k|^2 + |\nabla s|^2)|g|^2 + \delta|r_t|^2.
\end{aligned}
$$

As estimativas anteriores e (4.22) implicam

$$
\begin{aligned}
|r_t|^2 + \frac{d}{dt}|\nu^{1/2}(\varphi)\nabla r|^2 &\leq M_1(t)(|\nabla E^k|^2 + |\nabla F^k|^2 + |\nabla r|^2 + |\nabla s|^2)\\
&+ N_1(t)(|\nabla E^k| + |\nabla F^k| + |\nabla s| + |\nabla r|)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
M_1(t) &= C(|\tilde{\Delta} u(t)|^2 + |\tilde{\Delta} u^k(t)|^2 + |g(t)|^2),\\
N_1(t) &= C|g(t)|^2(|\Delta F^k(t)| + |\Delta s(t)|) + |\Delta u^k(t)||\nabla r_t(t)| + |\nabla \varphi_t(t)||\Delta r(t)| + |\nabla r_t(t)|).
\end{aligned}
$$

Integrando a inequação anterior e usando a estimativa (4.9) e as estimativas dadas pelos Lemas 4.1 e 4.2, vem que

$$
\int_0^t |r_t|^2 d\tau + |\nu^{1/2}(\varphi(t))\nabla r(t)|^2 \leq \tilde{G}(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big) + \tilde{G}_1(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)^{1/2}.
$$

Portanto, temos demonstrado (4.20). A prova de (4.21) é muito parecida. □

Agora, podemos obter facilmente o seguinte:

PROPOSIÇÃO 4.6. Sob as hipóteses (4.1), (4.7) e (4.8) temos

$$
\int_0^t |\tilde{\Delta} u^k - \tilde{\Delta} u|^2 d\tau + \int_0^t |\Delta \varphi^k - \Delta \varphi|^2 d\tau \leq G_6(t)\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)^{1/2}
$$

onde $G_6(t)$ é contínua e depende das funções que aparecem à direita de (4.9). □

OBSERVAÇÃO 4.7: Note-se que as estimativas obtidas no Teorema 4.3 e no Teorema 4.4 não são ótimas; de fato espera-se obter convergência da ordem $\dfrac{1}{\alpha_{k+1}^2} + \dfrac{1}{\lambda_{k+1}^2}$ em lugar de somente $\dfrac{1}{\alpha_{k+1}} + \dfrac{1}{\lambda_{k+1}}$ no Teorema 4.3. Do mesmo modo, espera-se obter $\dfrac{1}{\alpha_{k+1}} + \dfrac{1}{\lambda_{k+1}}$ em vez de $\left(\dfrac{1}{\alpha_{k+1}} + \dfrac{1}{\lambda_{k+1}}\right)^{1/2}$ no Teorema 4.4.

A dificuldade deve-se, mais uma vez, aos termos $div(\nu(\varphi)\nabla E^k)$ e $div(k(\varphi)\nabla F^k)$. Porém, tais termos não aparecem no caso clássico, e logo é possível obter taxas ótimas nesse caso (Rojas–Medar e Lorca [26], [27]).

2. ESTIMATIVAS DE ERRO UNIFORME NO TEMPO

Nesta seção assumiremos $g \in L^\infty(0,\infty;(L^2(\Omega))^n), u_0 \in V\bigcap H^2(\Omega)$ e $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$. Suporemos também que existe solução global no tempo do problema (3.1) – (3.2) satisfazendo

$$(4.22) \qquad \begin{cases} \sup_{t\geq 0}\{\|u(t)\|_{H^2} + \|\varphi(t)\|_{H^2}\} < +\infty \\ \sup_{t\geq 0}\{|\partial_t u(t)| + |\partial_t\varphi(t)|\} < +\infty. \end{cases}$$

No Teorema 3.9 obtemos condições para os dados iniciais e para os termos forçantes, que garantem a existência de uma solução global que satisfaz (4.22).

Para obter uma estimativa uniforme de erro, consideraremos uma classe especial de forças que fornece mais informação da solução.

PROPOSIÇÃO 4.8. Seja (u,φ) solução do problema (3.1) – (3.2) satisfazendo (4.22); suponha que $\int_0^\infty (|h(\tau)|^2 + |f(\tau)|^2 d\sigma < +\infty$. Então, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$\int_0^t |\tilde{\Delta} u(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |\Delta\varphi(\tau)|^2 d\tau \leq C_1,$$

$$\int_0^t |u_t(\tau)|^2 d\tau + \int_0^t |\varphi_t(\tau)|^2 d\tau \leq C_2, \forall t \geq 0.$$

As aproximações de Galerkin satisfazem a mesma estimativas.

PROVA: É fácil concluir as seguintes desigualdades de energia

$$(4.23) \qquad \begin{cases} |u(t)|^2 + \nu_0\int_0^t |\nabla u|^2 d\tau \leq |u_0|^2 + c\int_0^t |g|^2|\nabla\varphi|^2 d\tau + c\int_0^t |h|^2 d\tau, \\ |\varphi(t)|^2 + k_0\int_0^t |\nabla\varphi|^2 d\tau \leq |\varphi_0|^2 + c\int_0^t |f|^2 d\tau. \end{cases}$$

Do teorema de existência local (Teorema 2.5), temos a inequação diferencial

$$(4.24) \qquad \frac{d}{dt}|\nabla\varphi|^2 + k_0|\Delta\varphi|^2 \leq C(|\nabla u|^4 + |\nabla\varphi|_4^8)|\nabla\varphi|^2 + C|f|^2.$$

Logo, integrando com respeito ao tempo, temos

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(t)|^2 + k_0\int_0^t |\Delta\varphi|^2 d\tau &\leq |\nabla\varphi_0|^2 + C\sup_{t\geq 0}(|\nabla u(t)|^4 + |\nabla\varphi(t)|_4^8)\int_0^t |\nabla\varphi|^2 d\tau + C\int_0^t |f|^2 d\tau \\ &\leq C + C\int_0^t |\nabla\varphi|^2 d\tau \\ &\leq C_1 \end{aligned}$$

devido a (4.22) e (4.23). Da mesma forma prova-se

$$\begin{aligned}|\nabla u(t)|^2+\nu_0\int_0^t|\tilde{\Delta}u|^2d\tau &\leq |\nabla u_0|^2+C\sup_{t\geq 0}(|\nabla u(t)|^4+|\nabla\varphi(t)|_4^8)\int_0^t|\nabla u|^2d\tau\\ &+ C\sup_{t\geq 0}|g(t)|^2\int_0^t|\nabla\varphi|_4^2d\tau+C\int_0^t|h|^2d\tau\leq C_1\end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}|u_t|^2 &\leq C(|\Delta u|^2+|\nabla\varphi|_4^8|\nabla u|^2+|g|^2|\nabla\varphi|_4^2+|\nabla u|^6+|h|^2),\\ |\varphi_t|^2 &\leq C|\Delta\varphi|^2+|\nabla\varphi|_4^4+|\nabla u|_4^2|\nabla\varphi|^2+|f|^2).\end{aligned}$$

e conseqüentemente podemos concluir que

$$\int_0^t|u_t|^2d\tau+\int_0^t|\varphi_t|^2d\tau\leq C_2$$

A prova para as aproximações (u^k,φ^k) é exatamente igual à já feita. □

O seguinte resultado pode ser provado de maneira similar:

PROPOSIÇÃO 4.9. Seja (u,φ) solução do problema (3.1) – (3.2) satisfazendo (4.22); suponha que $\int_0^\infty(|h(\tau)|^2+|h_t(\tau)|^2+|f(\tau)|^2+|f_t(\tau)|^2)d\tau<+\infty$. Então existem constantes C_1,C_2 e C_3 tais que, além das estimativas da Proposição 4.8, tem-se

$$\int_0^t(|\nabla u_t|^2+|\nabla\varphi_t|^2)d\tau\leq C_3,\ \ \forall t\geq 0.$$

A mesma estimativa é válida para as aproximações de Galerkin. □

Agora, apresentamos uma estimativa na norma L^2.

TEOREMA 4.10. Seja (u,φ) solução do problema (3.1), (3.2) satisfazendo (4.22), suponha que $\int_0^\infty(|h(\tau)|^2+|f(\tau)|^2)d\tau<+\infty$. Então, as aproximações (u^k,φ^k) satisfazem:

$$|u^k(t)-u(t)|^2+|\varphi^k(t)-\varphi(t)|^2+\int_0^t(|\nabla u^k-\nabla u|^2+|\nabla\varphi^k-\nabla\varphi|^2)d\tau\leq C\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}}+\frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)$$

para todo $t \geq 0$. Onde C é uma constante positiva que depende de $\partial\Omega$ e das constantes dadas por (4.22) e pela Proposição 4.8.

Como na seção anterior, com as mesmas notações, somente precisamos provar:

LEMA 4.11.

$$|r(t)|^2 + |s(t)|^2 + \int_0^t (|\nabla r|^2 + |\nabla s|^2)d\tau \leq C\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big), \ \forall t \geq 0.$$

PROVA: Deduzimos o resultado usando as estimativas dadas pelo Lema 4.2, Proposição 4.8 e Lema 4.1. □

Podemos obter também, estimativas na norma H^1.

TEOREMA 4.12. Seja (u,φ) solução do problema (3.1), (3.2) satisfazendo (4.22); suponha que $\int_0^\infty (|h(\tau)|^2 + |h_t(\tau)|^2 + |f(\tau)|^2) + |f_t(\tau)|^2)d\tau < +\infty$. Então, as aproximações (u^k,φ^k) satisfazem:

$$|\nabla u^k(t) - \nabla u(t)|^2 + |\nabla\varphi^k(t) - \nabla\varphi(t)|^2 + \int_0^t |u_t^k - u_t|^2 d\tau + \int_0^t |\varphi_t^k - \varphi_t|^2 d\tau \leq C\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)^{1/2},$$

$$\int_0^t |\tilde{\Delta} u^k - \Delta u|^2 d\tau + \int_0^t |\Delta\varphi^k - \Delta\varphi|^2 d\tau \leq C\Big(\frac{1}{\alpha_{k+1}} + \frac{1}{\lambda_{k+1}}\Big)^{1/2}, \ \forall t \geq 0.$$

para todo $t \geq 0$. Onde C é uma constante positiva que depende de $\partial\Omega$ e das constantes dadas por (4.22) e pela Proposição 4.9. □

REFERÊNCIAS

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] C. Amrouche, V. Girault, *On the existence and regularity of the solution of Stokes problem in arbitrary dimension*, Proc. Japan Acad. 67, 1991, pp. 171-75.

[3] F. H. Busse, *The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremun principle*, J. Fluid Mech. 30, 1967, pp. 625-49.

[4] I. Cattabriga, *Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes*, Rend. Sem. Univ. Padova, 31, 1961, pp. 308-40.

[5] P.G. Drazin, W.H. Reid, *Hidrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 1981.

[6] G.F.D. Duff, *Derivative estimates for the Navier–Stokes equations in a three dimensional region*, Acta Math. 164, 1990, pp. 145-210.

[7] M.I. Gil', *Solvability of a system of stationary Boussinesq equations*, Diff. Urav. 27, 1991.

[8] A. Graham, *Shear patterns in a unstable layer of air*, Phil. Trans. Royal Soc. A 232, 1933, pp. 285-96.

[9] J.G. Heywood, *The Navier-Stokes equations: on the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J. 29, 1980, pp. 639-81.

[10] J.G. Heywood, *An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations of the Navier–Stokes problem*, Pacific J. Math. 98, 1982, pp. 333-45.

[11] T. Hishida, *Existence and regularizing properties of solutions for the nonstationary convection problem*, Funkcial Ekvac. 34, 1991, pp. 449-74.

[12] N.K. Korenev, *On some problems of convection in a viscous incompressible fluid*, Vestnik Leningrad Univ. Math. 4, 1977, pp. 125-37.

[13] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limits Non Linéares*, Dunod, Paris, 1969.

[14] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux Lïmites Non Homogènes et Applications*, V.1, Dunod, Paris, 1968.

[15] H. Morimoto, *On the existence of weak solutions of equation of natural convection*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math. 36, 1989, pp. 87-102.

[16] H. Morimoto, *On the existence and uniqueness of the stationary solution to the equations of natural convection*, Tokyo J. Math. 14, 1991, pp. 220-26.

[17] H. Morimoto, *Nonstationary Boussinesq equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 39, 1992, pp. 61-75.

[18] K. Óeda, *On the initial value problem for the heat convection equation of Boussinesq approximation in a time-dependent domain*, Proc. Japan Acad. 64, Ser. A, 1988, pp. 143-46.

[19] E. Palm, *On the tendency towards hexagonal cells in steady convection*, J. Fluid Mech. 8, 1960, pp. 183-92.

[20] E. Palm, T. Ellingsen, B. Gjevik, *On the ocurrence of cellular motion in Bénard convection*, J. Fluid Mech. 30, 1967, pp. 651-61.

[21] P.H. Rabinowitz, *Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Bénard problem*, Arch. Rational Mech. Anal. 29, 1968, pp. 32-57.

[22] R. Rautmann, *On convergence rate of nonstationary Navier–Stokes approximations*, Proc. IUTAM Symp. 1979, Approx. Math. for Navier–Stokes Problem, Lect. Notes in Math. 771, Springer, 1980, pp. 235-48.

[23] M.A. Rojas-Medar, J.L. Boldrini, *Spectral Galerkin approximations for the Navier-Stokes equations: uniform in time error estimates*, Rev. Mat. Apl. 14, pp. 63-74, 1993.

[24] M.A. Rojas-Medar, S.A. Lorca, *The equations of a viscous incompressible chemical active fluid I: uniquiness and existence of the local solutions*, submetido à publicação, 1993.

[25] M.A. Rojas-Medar, S.A. Lorca, *Global strong solution of the equations for the motion of a chemical active fluid*, Relatório de Pesquisa, R.P. 43/93, IMECC–UNICAMP, submetido à publicação, 1993.

[26] M.A. Rojas-Medar, S.A. Lorca, *On the convergence rate of spectral approximation for the equations for chemical active fluid*, Relatório de Pesquisa, R.P. 23/93, IMECC–UNICAMP, submetido à publicação, 1993.

[27] M.A. Rojas-Medar, S.A. Lorca, *An error estimate uniform in time for spectral Galerkin approximations for the equations for the motion of a chemical active fluid*, Relatório de Pesquisa, R.P. 52/93, IMECC–UNICAMP, aceito para publicação, 1994.

[28] J. Simon, *Compacts sets in the space $L^p(0,T;B)$*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Serie quarta, tomo CXLVI, 1987, pp. 65-96.

[29] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[30] H. von Tippelkirch, *Über Konvektionszeller insbesondere im flüssigen Schwefel*, Beiträge Phys. Atmos. 20, 1956, pp. 37-54.

[31] W. von Wahl, *The Equations of Navier–Stokes and Abstract Parabolic Equations*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985.