Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Dissertação de Mestrado

As equações da onda imagem para remigração em meios elipticamente anisotrópicos

Autor: **Rafael Aleixo de Carvalho**
Orientador: **Prof. Dr. Jörg Schleicher**

Campinas, SP

Janeiro 2007

As equações da onda imagem para remigração em meios elipticamente anisotrópicos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rafael Aleixo de Carvalho e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de janeiro de 2007.

Prof. Dr. Jörg Schleicher
Orientador

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jörg Schleicher

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa

Dissertação de Mestrado apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues – CRB8a / 2116

	Carvalho, Rafael Aleixo de
C254e	As equações da onda imagem para remigração em meios elipticamente anisotrópicos / Rafael Aleixo de Carvalho -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.
	Orientador : Jörg Dietrich Wilhelm Schleicher
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Diferenças finites. 2. Análise numérica. 3. Ondas sísmicas. I. Schleicher, Jörg Dietrich Wilhelm. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The image wave equations for remigration in elliptically anisotropic media.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Finite difference. 2. Numerical analysis. 3. Seismic wave.

Área de concentração: Geofísica Computacional

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca examinadora: Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa (UFPA)
Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Jörg Dietrich Wilhelm Schleicher (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 30/01/2007

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 30 de janeiro de 2007 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. (a). Dr (a). JÖRG DIETRICH WILHELM SCHLEICHER

Prof. (a). Dr (a). JESSÉ CARVALHO COSTA

Prof. (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Resumo

Palavras-chave: Remigração, onda imagem, meios elipticamente anisotrópicos, diferenças-finitas.

As equações da onda imagem para os problemas de remigração na profundidade e no tempo em meios elipticamente anisotrópicos são equações diferenciais parciais de segunda ordem similares a equação da onda acústica. A variável de propagação é a velocidade vertical ou a elipticidade do meio. Essas equações são deduzidas a partir das propriedades cinemáticas da remigração em meios anisotrópicos. O objetivo é propiciar a construção de imagens do subsolo que correspondam a diferentes velocidades verticais e/ou diferentes graus de anisotropia do meio diretamente de uma imagem migrada. "Painéis de anisotropia" podem ser obtidos de maneira completamente análoga aos painéis de velocidade para a análise de velocidade de migração.

Um exemplo numérico mostra a validade desta teoria.

Abstract

Keywords: Remigration, image-wave, elliptically anisotropic media, finite-difference.

The image-wave equations for the problems of depth and time remigration in elliptically anisotropic media are second-order partial differential equations similar to the acoustic wave equation. The propagation variable is the vertical velocity or the medium ellipticity. These differential equations are derived from the kinematic properties of anisotropic remigration. The objective is to enable the construction of subsurface images that correspond to different vertical velocity and/or different degrees of medium anisotropy directly from a single migrated image. In this way, "anisotropy panels" can be obtained in a completely analogous way to velocity panels for a migration velocity analysis. A simple numerical example demonstrates the validity of the theory.

Agradecimentos

Aos meus pais por terem sempre me apoiado em minhas decisões.

À Tati pelo amor, por estar sempre comigo e pelo constante incentivo.

Ao meu orientador Jörg por ter acreditado em meu potencial.

À Amélia pelas inúmeras sugestões e idéias apresentadas, ajudando no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos da UNICAMP que estiveram ao meu lado nos momentos bons e ruins desde o início da graduação.

À UNICAMP e ao IMECC por terem me acolhido e oferecido toda a infraestrutura que necessitei.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho derivamos as equações da onda imagem para o problema de remigração na profundidade e no tempo em meios elipticamente anisotrópicos. Cada equação da onda imagem é uma equação diferencial parcial de segunda ordem semelhante à equação da onda acústica.

O problema da remigração provém do processamento sísmico e o seu objetivo é a construção de uma nova imagem do subsolo a partir de uma obtida anteriormente pelo processo de migração, utilizando outros parâmetros do meio (Hubral et al., 1996b). Por migração se conhece o processo que, na geofísica, tem como objetivo a reconstrução de uma imagem das camadas geológicas no subsolo a partir da imagem distorcida no tempo, obtida mediante um levantamento sísmico, i.e., mediante geração de ondas no subsolo e registro do movimento resultante das partículas da superfície da terra. Para a realização da migração é necessário conhecer um modelo das velocidades de propagação das ondas no subsolo em consideração, as chamadas velocidades de migração.

Porém, o modelo de velocidade usado para a primeira migração, geralmente não é perfeito, resultando em uma imagem incorreta. Esta, por sua vez, pode fornecer informações que permitem a atualização do modelo de velocidade. Alternativamente, é interessante possuir um leque de imagens referentes a diferentes modelos de velocidade,

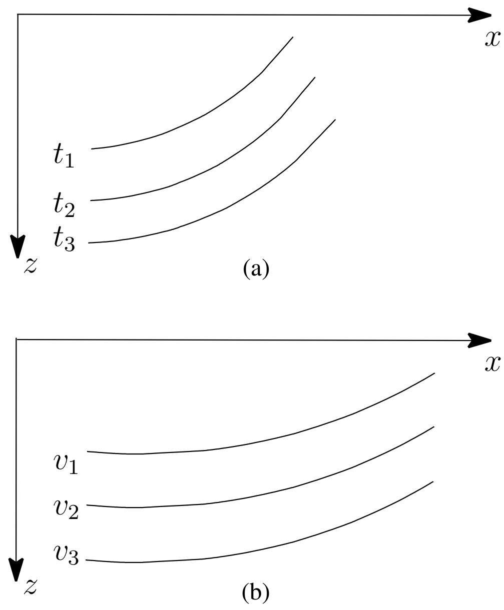

Figura 1.1: (a) Frentes de onda se propagando em três instantes de tempo diferentes. (b) Ondas imagens em três velocidades de migração diferentes.

para escolher entre eles o geologicamente mais fidedigno ou aquele que melhor coincide com informações adicionais, tais como medidas em poços na área.

Desta forma, torna-se necessária a construção de uma nova imagem do subsolo referente a este modelo atualizado. Esta nova imagem pode ser construída mediante uma nova migração dos dados originais ou pelo processo de remigração (Fomel, 1994; Hubral et al., 1996a,b). Para esta atualização, foram sugeridos na literatura operadores diferenciais (Fomel, 1994; Hubral et al., 1996b) e integrais (Hubral et al., 1996a). Jaya (1997) estudou os operadores diferenciais e apresentou as primeiras aplicações práticas em dados reais. Baseado na equação diferencial de Fomel (1994), Hubral et al. (1996b) observaram que as novas imagens de um refletor (i.e., uma fronteira entre camadas geológicas) para diferentes modelos de velocidade de migração comportam-se de maneira análoga à propagação de frentes de onda. Para entender melhor a analogia com a propagação de uma onda, veja Figura 1.1. Na Figura 1.1(a) podemos ver esquematicamente como uma frente de onda se propaga. A mesma frente de onda é mostrada em três instantes de tempo diferentes. Vemos na Figura 1.1(b) três imagens migradas diferentes de um mesmo refletor sísmico, obtido com três modelos de velocidade de migração diferentes. Se compararmos a situação com a Figura 1.1(a), não é difícil aceitar que pode ser, conceitualmente, entendida como uma "onda se propagando". Neste caso é a imagem de um refletor sísmico que se "propaga". Hubral et al. (1996b) deram a este fenômeno o nome de onda imagem. Da mesma forma que a Figura 1.1(a) mostra três frentes de onda em três diferentes instantes do tempo, a Figura 1.1(b) mostra a frente da onda imagem de três diferentes "instantes de velocidade de migração". A variável de propagação, que no caso da propagação de ondas físicas é representada pelo tempo, é, no caso das ondas-imagem, a velocidade de migração.

Os trabalhos citados acima estudam a propagação da onda imagem em função do valor da velocidade de migração (considerada a mesma no modelo inteiro), tanto no tempo (Fomel, 1994; Hubral et al., 1996b) quanto na profundidade (Hubral et al., 1996b; Mann, 1998). Aqui estamos interessados na remigração em meios elipticamente anisotrópicos em função tanto da velocidade quanto da anisotropia. Definimos o parâmetro de elipticidade do meio como a razão entre os quadrados das velocidades na vertical e na horizontal. Chamamos este parâmetro de φ. O nosso objetivo é estudar a variação da imagem do refletor em função da variação deste parâmetro φ. Em outras palavras, φ assume o papel da variável de propagação para a onda imagem em meios elipticamente anisotrópicos.

Neste trabalho derivamos as equações da onda imagem na profundidade e no tempo, para variações da elipticidade e da velocidade vertical e ambas variações em meios elipticamente anisotrópicos. Para isso nos baseamos na metodologia proposta por Hubral et al. (1996b). Posteriormente, com mudanças de variáveis, demonstramos que todas a equações deduzidas poderiam se transformar em uma mesma equação com coeficientes constantes, exceto a equação da onda imagem na profundidade com variação da velocidade vertical. Analisamos a equação, proposta para a resolução, do ponto de vista da análise numérica (Strikwerda, 1989; Thomas, 1995), ou seja, analisamos consistência, estabilidade, dispersão e dissipação, nessa parte nos apoiamos no estudo de Schleicher et al. (2004). De posse de informações de nossa equação usamos um programa (Novais et al., 2005) para resolver tal equação numericamente. Com esse programa geramos alguns casos hipotéticos de refletores e analisamos os resultados encontrados.

Resultados parciais deste trabalho já foram publicados em Aleixo e Schleicher (2004); Schleicher e Aleixo (2004, 2005b); Aleixo e Schleicher (2005a); Schleicher e Aleixo (2005a); Aleixo e Schleicher (2005b); Schleicher et al. (2006); Schleicher e Aleixo (2007); Schleicher et al. (2007).

Capítulo 2

Remigração na profundidade

2.1 Dedução da onda imagem

Neste capítulo descrevemos a propagação da onda imagem como uma função da anisotropia do meio. Para tal, estudamos como um ponto isolado em uma *imagem de um refletor* se comporta quando a *elipticidade do meio e a velocidade vertical* variam. Esta situação pode ser entendida de maneira análoga à propagação de uma onda de Huygens a partir de uma fonte secundária pontual. Esta descreve como um ponto isolado, em uma *frente de onda*, se comporta quando o *tempo* varia. Como o problema do imageamento sísmico é linear, o comportamento de uma imagem pode ser obtida por superposição dos resultados de todos os pontos dos quais ela consiste.

Derivamos a equação da onda imagem a partir da metodologia desenvolvida na aplicação da teoria dos raios para a equação da onda. Tal metodologia está resumida abaixo. A idéia é separar a onda em suas partes cinemática e dinâmica, i.e., tempo de trânsito e amplitude. Assim, a partir da equação onda, pode ser encontrada a equação iconal que descreve a cinemática da onda, isto é, a localização das frentes de onda. O procedimento se baseia na equação da onda acústica em duas dimensões

$$p_{xx} + p_{zz} = \frac{1}{v^2} p_{tt}. \tag{2.1}$$

Uma solução aproximada da equação acima é obtida utilizando a candidata da teoria dos raios,

$$p(x,z,t) = p_0(x,z) f[t - T(x,z)]. \tag{2.2}$$

Aqui, $f(t)$ é um pulso de máxima freqüência supostamente fixo. As quantidades $p_0(x,z)$ e $T(x,z)$ representam o fator de amplitude e tempo de trânsito da onda, respectivamente. A candidata (2.2) é uma aproximação da solução da equação (2.1) em meios fracamente não-homogêneos, onde o pulso muda, no máximo, lentamente sua forma e amplitude, ao longo de uma frente da onda $t = T(x,z)$. Sugerimos ao leitor interessado neste assunto procurar, por exemplo, o livro de Červený (2001).

Derivando a candidata (2.2) duas vezes em relação a x, z e t, e substituindo os resultados na equação (2.1), temos

$$\begin{aligned} p_0\left(T_x^2 + T_z^2 - v^{-2}\right) f'' - [2(p_{0x}T_z + p_{0z}T_z) + p_0(T_{xx} + T_{zz})]\, f' & \\ +(p_{0xx} + p_{0zz}) f &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para que a equação (2.3) seja satisfeita para qualquer pulso f, cada coeficiente das derivadas de f precisa ser zero. A partir do coeficiente de f'' temos a equação iconal

$$T_x^2 + T_z^2 = \frac{1}{v^2}. \tag{2.4}$$

A solução $t = T(x,z)$ desta equação para a condição inicial de uma fonte pontual em (x_0, z_0) no instante t_0 descreve a localização $z(x,t;x_0,z_0,t_0)$ da chamada onda de Huygens. Ela representa a localização da onda como o resultado de uma fonte pontual secundária em (x_0, z_0) iniciada em $t = t_0$. Tais fontes secundárias são excitadas a cada ponto de uma frente de onda se propagando (princípio de Huygens). Para outras condições iniciais, a equação (2.4) descreve a cinemática de qualquer propagação de ondas.

Correspondentemente, a equação da onda imagem em meios elipticamente anisotrópicos a ser determinada tem uma equação iconal associada. Esta decreve a cinemática da propagação onda imagem, i.e., localiza as suas frentes de onda. Sua solução para uma fonte pontual pode ser chamada de onda imagem de Huygens. Neste trabalho, ao contrário da ordem da abordagem acima, descrevemos primeiramente a localização da onda de Huygens da onda imagem. Posteriormente, obtemos a equação iconal por eliminação das constantes da condição inicial. Finalmente, estabelecemos a equação da onda imagem, sendo ela a equação diferencial parcial de segunda ordem mais simples com a propriedade de que a metodologia acima possa ser aplicada nela para reproduzir a equação iconal associada.

2.2 Parametrização dos meios elipticamente anisotrópicos

Estamos interessados na remigração em meios elipticamente anisotrópicos. Estes são caracterizados por serem meios com simetria vertical. O seu tensor de elasticidade normalizado na densidade é dado por uma matriz da forma (Vanelle, 2002)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix},$$

com as restrições adicionais

$$\begin{aligned} A_{12} &= A_{11} - 2A_{66}, \\ (A_{13} + A_{44})^2 &= (A_{11} - A_{44})(A_{33} - A_{44}). \end{aligned}$$

Desta forma, um meio com tal anisotropia é descrito por quatro parâmetros elásticos independentes.

Para fins de imageamento sísmico, o parâmetro do meio mais importante é a velocidade da propagação de ondas. Adicionamos aqui uma pequena discussão sobre a velocidade em meios com anisotropia elíptica. Mais detalhes sobre meios com anisotropia elíptica podem ser encontrados em Helbig (1983) ou Vanelle (2002). Nestes meios, o vetor velocidade de grupo da onda compressional ou quase-P (qP), $\vec{v}^{(\mathrm{g})}$, é dado por

$$\vec{v}^{(\mathrm{g})} = \left(\frac{A_{11}}{V} \mathrm{sen}\,\phi, 0, \frac{A_{33}}{V} \cos\phi \right),$$

onde ϕ é o ângulo entre a normal à frente de onda e o eixo z, e

$$V = \sqrt{A_{11}\mathrm{sen}^2\phi + A_{33}\cos^2\phi}$$

é a velocidade de fase da onda.

Concluímos que o valor da velocidade de grupo varia com a direção de propagação de acordo com

$$||\vec{v}^{(\mathrm{g})}|| = v^{(\mathrm{g})}(\theta) = \frac{\sqrt{A_{11}^2\mathrm{sen}^2\phi + A_{33}^2\cos^2\phi}}{V} = \left[\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{A_{11}} + \frac{\cos^2\theta}{A_{33}} \right]^{-1/2}, \tag{2.5}$$

onde θ é o ângulo entre o vetor da velocidade de grupo $\vec{v}^{(\mathrm{g})}$ e o eixo z, chamado de ângulo de propagação. A relação entre ϕ e θ é dada pela seguinte equação (Vanelle, 2002)

$$\tan\theta = \frac{A_{11}}{A_{33}} \tan\phi.$$

Em função da anisotropia, as velocidades de propagação de uma onda na vertical e na horizontal são diferentes. Pela equação (2.5) podemos ver que as velocidades nas direções vertical ($\theta = 0$) e horizontal ($\theta = \pi/2$) são

$$v = v^{(\mathrm{g})}(\theta = 0) = \sqrt{A_{33}} \quad \mathrm{e} \quad u = v^{(\mathrm{g})}(\theta = \pi/2) = \sqrt{A_{11}}. \tag{2.6}$$

Utilizando as velocidades horizontal e vertical, a velocidade de grupo pode ser parametrizada como

$$v^{(\mathrm{g})}(\theta) = \left[\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{u^2} + \frac{\cos^2\theta}{v^2} \right]^{-1/2} = v \left[\frac{v^2}{u^2}\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta \right]^{-1/2}. \tag{2.7}$$

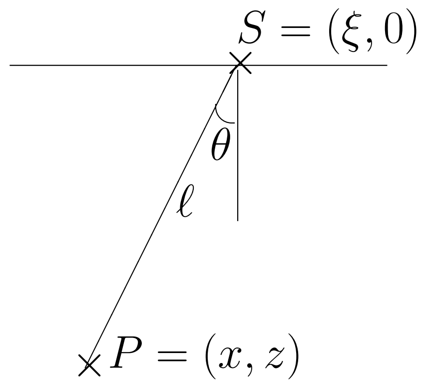

Figura 2.1: Representação gráfica do raio conectando a fonte S em $(\xi, 0)$ e o ponto $P = (x, z)$ no refletor sísmico.

2.3 Geometria do levantamento sísmico

Analisamos a situação de um levantamento sísmico de afastamento nulo, onde o par coincidente de fonte e receptor está localizado na superfície da terra ($z = 0$) no ponto $S = (\xi, 0)$ (Figura 2.1).

Sendo x e z as coordenadas de um certo ponto P no meio em questão e ℓ a sua distância da fonte S, tal que $\ell^2 = (x - \xi)^2 + z^2$, o ângulo de propagação de uma onda que se propaga de $S = (\xi, 0)$ até $P = (x, z)$, satisfaz

$$\cos\theta = \frac{z}{\ell} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{x - \xi}{\ell}.$$

Para melhor visualização, veja Figura 2.1.

Assim, obtemos a representação alternativa da velocidade de propagação, que depende do ângulo de propagação, em função das coordenadas do ponto P

$$\begin{aligned} v^{(g)}(x, z) &= \ell \left[\frac{(x - \xi)^2}{u^2} + \frac{z^2}{v^2} \right]^{-1/2} \\ &= \ell v \left[\varphi (x - \xi)^2 + z^2 \right]^{-1/2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde introduzimos o parâmetro $\varphi = A_{33}/A_{11} = v^2/u^2$, denominado *elipticidade do meio.*

Com os resultados desta pequena discussão sobre a velocidade de propagação nesses meios em função da direção, podemos descrever o tempo de trânsito T da onda emitida e registrada em $S = (\xi, 0)$ e refletida em P. A partir da fórmula para a velocidade, sabemos que o tempo que uma onda leva quando parte de uma fonte e chega em um receptor no mesmo ponto da fonte é

$$T(\xi; x, z) = \frac{2\ell}{v(x,z)} = \frac{2}{v}\left[\varphi(x-\xi)^2 + z^2\right]^{1/2}. \tag{2.9}$$

O fator 2 se deve à observação na equação (2.5) que $v(\theta) = v(\theta + \pi)$, que implica que o tempo para a onda chegar ao ponto no refletor é o mesmo do ponto no refletor ao detector.

2.4 Variação da elipticidade

A remigração tenta estabelecer uma relação entre dois meios de propagação de ondas sísmicas, tais que os levantamentos sísmicos resultariam nos mesmos dados. Um destes meios representa o modelo de velocidade errado usado originalmente para a migração. O outro representa o modelo atualizado no qual a nova imagem do refletor precisa ser construída.

Nesse capítulo deduzimos as equações da onda imagem para remigração na profundidade, permitindo a variação da velocidade vertical v ou da elipticidade φ do meio.

Supomos inicialmente que a migração original tenha sido realizada com um modelo caracterizado pela mesma velocidade vertical v, mas uma outra elipticidade φ_0. Neste meio, o mesmo tempo T da equação (2.9), consumido por uma outra onda refletida em outro ponto $P_0 = (x_0, z_0)$ é dado por

$$T(\xi; x_0, z_0) = \frac{2\ell_0}{v(x_0,z_0)} = \frac{2}{v}\left[\varphi_0(x_0-\xi)^2 + z_0^2\right]^{1/2}. \tag{2.10}$$

A parte superior da Figura 2.2 mostra o tempo descrito pela equação (2.10) para um conjunto realístico de parâmetros (x_0, z_0, φ_0, v). Adotamos a convenção de chamar o meio com elipticidade φ de meio M, e o meio com elipticidade φ_0 de meio M_0.

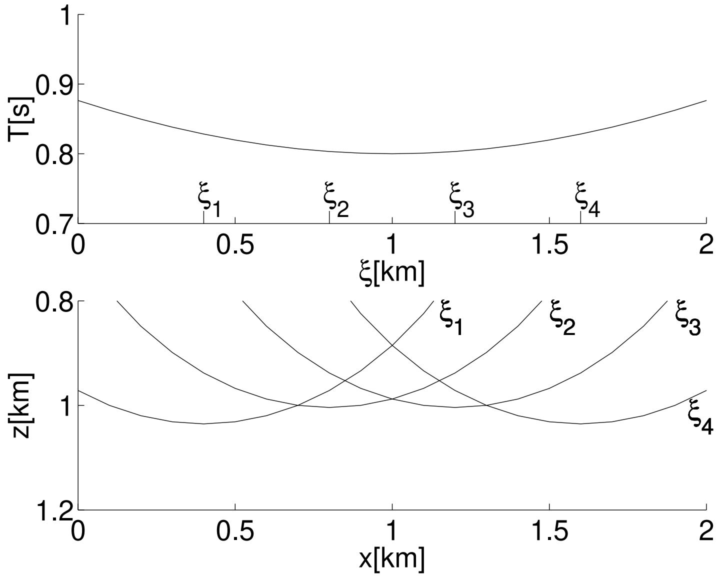

Figura 2.2: Acima: Gráfico do tempo descrito pela equação (2.10) com $x_0 = 1$ km, $z_0 = 1$ km, $\varphi_0 = 0.2$, $\varphi = 0.8$ e $v = 2.5$ km/s. Abaixo: Família de curvas dada pela equação (2.11) com $x_0 = 1$ km, $z_0 = 1$ km, $\varphi_0 = 0.2$ e $\varphi = 0.8$ e o parâmetro ξ tomando os valores 0.4 km, 0.8 km, 1.2 km e 1.6 km.

2.4.1 Onda imagem de Huygens

Para derivarmos a equação da onda imagem, seguimos a metodologia proposta em Hubral et al. (1996b). Primeiramente, queremos encontrar todos o pontos $P = (x, z)$ no meio M tais que o seu tempo de reflexão, descrito pela equação (2.9), seja igual ao tempo de reflexão (2.10) do ponto $P_0 = (x_0, z_0)$ no meio M_0 para *todos os pontos* ξ. Em outras palavras, estamos interessados em localizar a chamada onda de Huygens para esta propagação da onda imagem, i.e., o local da imagem $z(x)$ no "instante" φ, que se "originou" no "instante" φ_0 no ponto P_0. Primeiramente, localizamos os pontos P em M tais que os tempos de trânsito são iguais *para um* ξ fixo. Para tal, igualamos os tempos T das equações (2.9) e (2.10), resultando em

$$F(x, z, \xi, \varphi) = \varphi(x-\xi)^2 + z^2 - \varphi_0(x_0-\xi)^2 - z_0^2 = 0. \tag{2.11}$$

Esta equação representa uma família de curvas $z(x;\xi)$ que, para um ξ fixo, conecta todos o pontos P no meio M que possuem o mesmo tempo de reflexão $T(\xi; x, z)$ que P_0 no meio M_0. Na parte inferior da Figura 2.2 vemos quatro curvas obtidas da equação (2.11) para diferentes valores de ξ.

O conjunto, $z(x)$, de pontos P tais que $T(\xi; x, z)$ é igual a $T(\xi; x_0, z_0)$ para *todo* ξ é dado pelo envelope desta família de curvas $z(x;\xi)$. Esta curva é a mencionada onda de Huygens da onda imagem, uma vez que ela representa a imagem no meio M do ponto P_0. Sabemos que a condição de envelope da família de curvas é

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0,$$

que, substituída na equação (2.11), fornece a curva desejada. Derivando a equação (2.11), obtemos

$$\varphi(x-\xi) - \varphi_0(x_0-\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\varphi-\varphi_0)\xi = \varphi x - \varphi_0 x_0.$$

Logo,

$$\xi = \frac{\varphi x - \varphi_0 x_0}{(\varphi-\varphi_0)} = \frac{\alpha x - x_0}{\alpha - 1} = \frac{x_0 - \alpha x}{1-\alpha}, \tag{2.12}$$

onde $\alpha = \varphi/\varphi_0$. De (2.11), concluímos que

$$z^2 = \varphi_0(x_0-\xi)^2 + z_0^2 - \varphi(x-\xi)^2, \tag{2.13}$$

e (2.12) fornece

$$\begin{aligned}
(x_0-\xi)^2 = \left[x_0 - \frac{x_0-\alpha x}{1-\alpha}\right]^2 &= \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2, \\
(x-\xi)^2 = \left[x - \frac{x_0-\alpha x}{1-\alpha}\right]^2 &= \frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2.
\end{aligned}$$

A substituição destas relações em (2.13), resulta em

$$\begin{aligned} z^2 &= z_0^2 + \varphi_0 \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 - \varphi\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 \\ &= z_0^2 + \frac{\varphi\alpha}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 - \frac{\varphi}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 \\ &= z_0^2 - \frac{\varphi(x-x_0)^2}{1-\alpha}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

que pode ser reescrito como

$$z = \sqrt{z_0^2 + \varphi\varphi_0 \frac{(x-x_0)^2}{\varphi - \varphi_0}}, \tag{2.15}$$

onde escolhemos a raiz positiva de acordo com a convenção geofísica de que z descreve a profundidade, i.e., o eixo z aponta para baixo. A equação acima descreve a localização da onda de Huygens da onda imagem para a condição inicial $(x_0, z_0; \varphi_0)$. Veja a Figura 2.3 (a) para vizualizar o formato do envelope das curvas dadas pela equação (2.11), ou seja, a onda imagem de Huygens. A Figura 2.3 (b) mostra vários destes envelopes para diferentes valores de φ.

2.4.2 Equação iconal

Para deduzirmos a equação iconal, precisamos eliminar as constantes x_0, z_0 e φ_0 da equação (2.15) em favor de derivadas, para então podermos descrever a propagação da onda imagem para qualquer condição inicial arbitrária. Para isso, permitimos que a equação (2.15) descreva uma curva $\varphi = \Phi(x,z)$, ou seja, substituímos $\varphi = \Phi(x,z)$ na equação (2.15), onde $\Phi(x,z)$ é o iconal da onda imagem. Por diferenciação da equação resultante, encontramos uma equação diferencial para Φ cuja solução com as condições iniciais $(x_0, z_0; \varphi_0)$ é a equação (2.15) resolvida por φ. Tal equação diferencial será a equação iconal da onda imagem.

Derivando a equação (2.15) em relação a z, chegamos a

$$1 = \frac{-1}{2z}\left[\varphi_0\Phi_z \frac{(x-x_0)^2}{\Phi-\varphi_0} - \varphi_0\Phi\frac{(x-x_0)^2}{(\Phi-\varphi_0)^2}\Phi_z\right] = \frac{\Phi_z}{2z}\frac{\varphi_0^2(x-x_0)^2}{(\Phi-\varphi_0)^2}.$$

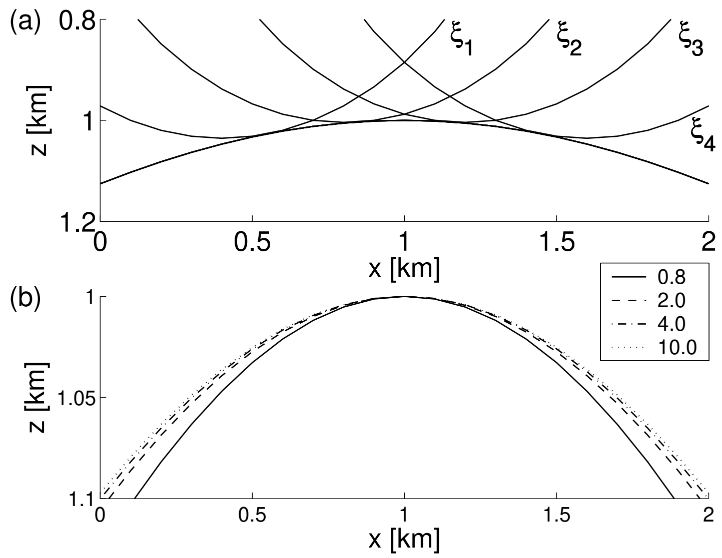

Figura 2.3: Acima: Gráfico da família de curvas (2.11) com o seu respectivo envelope (2.15), com os parâmetros $x_0 = 1$ km, $z_0 = 1$ km, $\varphi_0 = 0.2$ e $\varphi = 0.8$. Abaixo: Gráfico das ondas-imagem de Huygens (2.15) com o parâmetro φ tomando os valores 0.8, 2.0, 4.0 e 10.

A partir da igualdade acima, obtemos

$$\frac{\varphi_0^2(x-x_0)^2}{(\Phi-\varphi_0)^2} = \frac{2z}{\Phi_z}. \tag{2.16}$$

Diferenciação da equação (2.15) em relação a x resulta em

$$0 = \frac{-1}{2z}\left[-\Phi_x\frac{\varphi_0^2(x-x_0)^2}{(\Phi-\varphi_0)^2} + \Phi\varphi_0\frac{2(x-x_0)}{\Phi-\varphi_0}\right] = \frac{-1}{2z}\left[\frac{\Phi_x}{\Phi_z}2z + 2\Phi\frac{\varphi_0(x-x_0)}{\Phi-\varphi_0}\right],$$

e, portanto,

$$\frac{\Phi_x}{\Phi_z} = \frac{\Phi}{z}\left[\frac{\varphi_0(x-x_0)}{\Phi-\varphi_0}\right].$$

Elevando esta expressão ao quadrado e substituindo nela a equação (2.16), obtemos

$$\frac{\Phi_x^2}{\Phi_z^2} = \frac{\Phi^2}{z^2}\frac{2z}{\Phi_z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi_x^2}{\Phi_z^2} = \frac{2\Phi^2}{z\Phi_z}.$$

Simplificando a equação acima, chegamos à equação iconal da onda imagem

$$\Phi_x^2 - \frac{2\Phi^2}{z}\Phi_z = 0. \tag{2.17}$$

2.4.3 Equação da onda imagem

Agora queremos encontrar uma equação diferencial parcial tal que a equação acima seja a equação iconal associada. Para isso, utilizamos a candidata correspondente à teoria dos raios

$$p(x, z, \varphi) = p_0(x, z) f[\varphi - \Phi(x, z)]. \tag{2.18}$$

Derivando a candidata (2.18) duas vezes com respeito a x, temos

$$p_{xx} = \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}(x, z) f(\varphi - \Phi(x, z)) - 2\frac{\partial p_0}{\partial x}(x, z) f'(\varphi - \Phi(x, z)) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, z) +$$

$$p_0(x, z) f''(\varphi - \Phi(x, z)) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, z)\right)^2 - p_0(x, z) f'(\varphi - \Phi(x, z)) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, z). \tag{2.19}$$

Correspondentemente, a derivada mista com respeito a z e φ é

$$p_{z\varphi} = \frac{\partial p_0}{\partial z}(x, z) f'(\varphi - \Phi(x, z)) - p_0(x, z) f''(\varphi - \Phi(x, z)) \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, z). \tag{2.20}$$

Aplicando a metodologia inversa das equações (2.1)-(2.4), e observando os termos que multiplicam f'', devemos ter

$$p_{xx} + \frac{2\varphi^2}{z} p_{z\varphi} = 0, \tag{2.21}$$

para assim podermos reproduzir a equação iconal (2.17). Note que a equação acima é a mais simples que tem a propriedade desejada. Termos adicionais envolvendo as primeiras derivadas de p com respeito a x, z, ou φ não alterariam a equação iconal associada e, portanto, também não afetariam o comportamento cinemático da solução. Como estamos interessados neste momento somente no comportamento cinemático correto da solução, podemos então optar por esta forma mais simples. Chamamos a equação (2.21) de *equação da onda imagem para remigração na profundidade com variação da elipticidade em meios elipticamente anisotrópicos*.

2.4.4 Forma alternativa

Considere a transformação de variáveis

$$\begin{aligned} \tau &= q\frac{z^2}{2}, \\ \mu &= \frac{-1}{2\varphi q}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde q é uma constante arbitrária. Por exemplo, utilizando $q = 2/v^2$, e introduzindo a noção do tempo vertical $t = 2z/v$, temos que

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t^2}{4}, \\ \mu &= \frac{-u^2}{4}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Com as transformações (2.22) encontramos as seguintes derivadas

$$\begin{aligned} d\tau/dz &= qz, \\ d\mu/d\varphi &= \frac{1}{2\varphi^2 q}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Supondo que o campo p seja duas vezes diferenciável, podemos escrever

$$p_{\varphi z} = p_{\mu\tau}\frac{d\mu}{d\varphi}\frac{d\tau}{dz}, \tag{2.25}$$

de onde concluímos que,

$$p_{xx} + p_{\mu\tau} = 0. \tag{2.26}$$

Portanto, para resolver a equação (2.21), precisamos apenas resolver uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes.

2.5 Variação da velocidade vertical

Supomos agora que a migração original tenha sido realizada com um modelo caracterizado pela mesma elipticidade φ, mas uma outra velocidade vertical v_0. Neste meio, o mesmo tempo T da equação (2.9), consumido por uma outra onda refletida em outro ponto $P_0 = (x_0, z_0)$ é dado por

$$T(\xi; x_0, z_0) = \frac{2\ell_0}{v(x_0, z_0)} = \frac{2}{v_0}\left[\varphi(x_0 - \xi)^2 + z_0^2\right]^{1/2}. \tag{2.27}$$

Adotamos a convenção de chamar o meio com velocidade vertical v de meio M, e o meio com velocidade vertical v_0 de meio M_0.

2.5.1 Onda imagem de Huygens

Para derivarmos a equação da onda imagem na profundidade com variação da velocidade vertical, seguimos a metodologia proposta em Hubral et al. (1996b). Primeiramente, queremos encontrar todos o pontos $P = (x, z)$ no meio M tais que o seu tempo de reflexão, descrito pela equação (2.9), seja igual ao tempo de reflexão (2.27) do ponto $P_0 = (x_0, z_0)$ no meio M_0. Para tal, igualamos os tempos T das equações (2.9) e (2.27), resultando em

$$F(x, z, \xi, v) = \frac{\varphi}{v^2}(x - \xi)^2 + z^2 - \frac{\varphi}{v_0^2}(x_0 - \xi)^2 - z_0^2 = 0. \tag{2.28}$$

O conjunto de pontos P tais que $T(\xi; x, z)$ é igual a $T(\xi; x_0, z_0)$ para *todo* ξ é dado pelo envelope desta família de curvas $z(x; \xi)$. A aplicação da condição de envelope para a equação (2.28) gera

$$\xi = \frac{v^2 x_0 - v_0^2 x}{v^2 - v_0^2}, \tag{2.29}$$

que, quando substituída de volta na equação (2.28) fornece

$$z = \frac{v}{v_0}\sqrt{z_0^2 - \varphi v_0^2 \frac{(x - x_0)^2}{v^2 - v_0^2}}. \tag{2.30}$$

A equação (2.30) descreve a posição da onda imagem de Huygens para a remigração na profundidade com a condição inicial $(x_0, z_0; v_0)$. Para um meio isotrópico, onde $\varphi = 1$, a expressão acima se reduz à deduzida por Fomel (1994) ou Hubral et al. (1996b).

2.5.2 Equação iconal

Para deduzir a equação iconal, precisamos eliminar as constantes x_0, z_0 e v_0 da equação (2.30) em favor de derivadas, e então podemos descrever a propagação da onda imagem para qualquer condição inicial arbitrária. Para isso, permitimos que a equação (2.30) descreva uma curva $v = \mathcal{V}(x,z)$, ou seja, substituímos $v = \mathcal{V}(x,z)$ na equação (2.30), onde $\mathcal{V}(x,z)$ é o iconal da onda imagem. Por diferenciação da equação resultante, encontramos uma equação diferencial para $\mathcal{V}$ cuja solução com as condições iniciais $(x_0, z_0; v_0)$ é a equação (2.30) resolvida para v. Tal equação diferencial será a equação iconal da onda imagem. Tomando as derivadas, encontramos

$$\mathcal{V}_x^2 + \varphi\mathcal{V}_z^2 - \frac{\varphi\mathcal{V}}{z}\mathcal{V}_z = 0. \tag{2.31}$$

Sua solução para a condição inicial $(x_0, z_0; v_0)$ é a equação (2.30) resolvida para v. Essa equação diferencial parcial (2.31) é a equação iconal da onda imagem para remigração na profundidade com variação da velocidade vertical em meios elipticamente anisotrópicos. Ela descreve a cinemática da propagação da onda imagem para um conjunto arbitrário de condições iniciais como uma função da velocidade vertical. Como no caso da equação (2.30), ao substituir $\varphi = 1$ também a equação (2.31) se reduz à equação do meio isotrópico (Hubral et al., 1996b).

2.5.3 Equação da onda imagem

Agora queremos encontrar uma equação diferencial parcial tal que a equação (2.31) seja a equação iconal associada. Para isso, utilizamos a candidata correspondente à teoria dos raios

$$p(x,z,v) = p_0(x,z)f[v - \mathcal{V}(x,z)]. \tag{2.32}$$

Utilizando o mesmo raciocínio desenvolvido para encontrar a equação da onda imagem com variação da elipticidade e aplicando a metodologia inversa das equações

(2.1)-(2.4), concluímos que devemos ter

$$p_{xx} + \varphi p_{zz} + \frac{\varphi v}{z} p_{vz} = 0. \tag{2.33}$$

Como no caso da equação (2.21), a equação acima é a mais simples que tem a propriedade desejada, ou seja a equação (2.31) é a equação iconal associada à equação (2.33). Termos adicionais envolvendo as primeiras derivadas de p com respeito a x, z, ou v não alterariam a equação iconal associada e, portanto, também não o comportamento cinemático da solução. Como estamos interessados, neste momento, somente no comportamento cinemático correto da solução, podemos então optar por esta forma mais simples. Chamamos a equação (2.33) de *equação da onda imagem para remigração na profundidade com variação da velocidade vertical em meios elipticamente anisotrópicos.* Note que, a equação (2.33) não pode ser transformada em uma equação com coeficientes constantes. Note que, como anteriormente, quando $\varphi = 1$ a equação (2.33) é a equação da onda imagem na profundidade em meios isotrópicos.

Capítulo 3

Remigração no tempo

Neste capítulo deduzimos as equações da onda imagem para remigração no tempo, permitindo a variação da velocidade vertical v, da elipticidade φ e de ambos simultaneamente.

A migração no tempo se distingue da migração na profundidade pelo fato de usar, como coordenada vertical, o tempo $t = 2z/v$ ao invés da profundidade z. Como queremos descrever a remigração no tempo, substituímos a coordenada espacial z na equação (2.9) pelo tempo vertical t. Logo,

$$T(\xi; x, t) = \left[\frac{4\varphi}{v^2}(x-\xi)^2 + t^2\right]^{1/2} \tag{3.1}$$

descreve o tempo de trânsito de um ponto P com as coordenadas (x, t) no domínio migrado no tempo.

3.1 Variação da elipticidade

Nessa seção, consideramos que a migração original tenha sido realizada com um modelo caracterizado por uma elipticidade incorreta φ_0, mas por uma velocidade vertical correta v. Nesse modelo M_0, o mesmo tempo T da equação (3.1) corresponde a uma onda refletida em um ponto diferente $P_0 = (x_0, z_0)$. Portanto, o mesmo T pode ser representado como

$$T(\xi; x_0, t_0) = \left[\frac{4\varphi_0}{v^2}(x_0 - \xi)^2 + t_0^2\right]^{1/2}. \tag{3.2}$$

O fato de T das equações (3.1) e (3.2) serem idênticas, reflete a equivalência cinemática dos modelos M_0 e M.

3.1.1 Onda imagem de Huygens

Para derivar a equação da onda imagem, seguimos novamente a metodologia proposta por Hubral et al. (1996b). Primeiro, queremos encontrar todos os pontos $P = (x, t)$ no meio M tais que seu tempo de reflexão, que é descrito pela equação (3.1), é o mesmo que o tempo (3.2) do ponto $P_0 = (x_0, t_0)$ no meio M_0. Em outras palavras, estamos interessados em encontrar a chamada onda de Huygens para essa propagação de onda imagem, i.e., a posição da imagem $t(x)$ no "instante" φ, que "originou" no "instante" φ_0 no ponto P_0. Portanto, nós igualamos os tempos T das equações (3.1) e (3.2), resultando em

$$F(x, t, \xi, \varphi) = \frac{4\varphi}{v^2}(x - \xi)^2 + t^2 - \frac{4\varphi_0}{v^2}(x_0 - \xi)^2 - t_0^2 = 0. \tag{3.3}$$

Essa equação representa uma família de curvas $t(x; \xi)$ cada qual, para um fixado ξ, conecta todos pontos P no meio M que têm o mesmo tempo de reflexão $T(\xi; x, t)$ que P_0 no meio M_0.

O conjunto dos pontos P tais que $T(\xi; x, t)$ são os mesmos que $T(\xi; x_0, t_0)$ para *todo* ξ são dados pelo envelope dessa família de curvas $t(x; \xi)$. Esse envelope é a mencionada onda imagem de Huygens. Esta representa a imagem no meio M do ponto P_0. A condição para o envelope é

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = 0, \tag{3.4}$$

que, resolvida para ξ e substituída na equação (3.3), nos dá a curva desejada. Derivando a equação (3.3) com respeito a ξ, obtemos

$$\xi = \frac{\varphi x - \varphi_0 x_0}{(\varphi - \varphi_0)} = \frac{\alpha x - x_0}{\alpha - 1} = \frac{x_0 - \alpha x}{1 - \alpha}, \tag{3.5}$$

onde $\alpha = \varphi/\varphi_0$.

A substituição da expressão na equação (3.3) resulta em

$$\begin{aligned} t^2 &= t_0^2 + \frac{4\varphi_0}{v^2}\frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 - \frac{4\varphi}{v^2}\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 \\ &= t_0^2 + \frac{4\varphi\alpha}{v^2(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 - \frac{4\varphi}{v^2(1-\alpha)^2}(x-x_0)^2 \\ &= t_0^2 - \frac{4\varphi(x-x_0)^2}{v^2(1-\alpha)}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

a qual pode ser reescrita na seguinte forma

$$t = \sqrt{t_0^2 + 4\frac{\varphi\varphi_0}{v^2}\frac{(x-x_0)^2}{\varphi-\varphi_0}}. \tag{3.7}$$

Essa equação descreve a localização da onda imagem de Huygens com condições iniciais $(x_0, t_0; \varphi_0)$. Note que para $\varphi = 1$ (meio isotrópico), a expressão se reduz a encontrada por Hubral et al. (1996b).

3.1.2 Equação iconal

Nosso próximo objetivo é descrever a propagação de uma onda imagem para uma condição inicial arbitrária. Com este propósito, entendemos a expressão (3.7) como uma expressão para a onda imagem iconal $\varphi = \Phi(x,t)$. Para encontrar a correspondente equação iconal, precisamos eliminar as constantes x_0, t_0 e φ_0 da equação (3.7) substituindo por derivadas de $\Phi(x,t)$. Derivando a equação (3.7) implicitamente com repeito a x e t, encontramos uma equação diferencial parcial para $\Phi(x,t)$ cuja solução com as condições iniciais $(x_0, t_0; \varphi_0)$ é a equação (3.7) resolvida por φ. Essa equação diferencial parcial é a equação iconal da onda imagem. Substituindo esta na equação (3.7) e diferenciando o resultado com respeito a t, obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \left\{\frac{1}{2t}\left[\frac{4\varphi_0\Phi_t(x-x_0)^2}{v^2(\Phi-\varphi_0)} - \frac{4\varphi_0\Phi\Phi_t(x-x_0)^2}{v^2(\Phi-\varphi_0)^2}\right]\right\} \\ &= \frac{\Phi_t}{2t}\left[\frac{4\varphi_0(\Phi-\varphi_0)(x-x_0)^2}{v^2(\Phi-\varphi_0)^2} - \frac{4\varphi_0\Phi(x-x_0)^2}{v^2(\Phi-\varphi_0)^2}\right] \\ &= -\frac{2\Phi_t}{t}\,\frac{\varphi_0^2(x-x_0)^2}{v^2(\Phi-\varphi_0)^2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Da equação (3.8), concluímos que

$$\frac{\varphi_0^2(x-x_0)^2}{(\Phi-\varphi_0)^2}=\frac{-v^2t}{2\Phi_t}. \tag{3.9}$$

Diferenciando a equação (3.7) com respeito a x, obtemos

$$\begin{aligned}0 &= \left[\frac{-2\Phi_x}{tv^2}\frac{\varphi_0^2(x-x_0)^2}{(\Phi-\varphi_0)^2}+\frac{4\Phi}{tv^2}\frac{\varphi_0(x-x_0)}{(\Phi-\varphi_0)}\right]\\ &= \left[\frac{\Phi_x}{\Phi_t}+\frac{4\Phi}{tv^2}\frac{\varphi_0(x-x_0)}{(\Phi-\varphi_0)}\right]\end{aligned} \tag{3.10}$$

e, portanto,

$$\frac{\Phi_x}{\Phi_t}=-\frac{4\Phi}{tv^2}\frac{\varphi_0(x-x_0)}{(\Phi-\varphi_0)}. \tag{3.11}$$

Elevando ao quadrado a equação acima e substituindo na equação (3.9), concluímos que

$$\Phi_x^2+\frac{8\Phi^2}{tv^2}\Phi_t=0, \tag{3.12}$$

que é a equação iconal da onda imagem para remigração no tempo em meios elipticamente anisotrópicos com variação da elipticidade.

3.1.3 Equação da onda imagem

Agora, queremos encontrar uma equação diferencial parcial tal que a equação (3.12) seja a equação iconal associada. Com este propósito, usaremos a candidata proposta pela teoria dos raios

$$p(x,t,v)=p_0(x,t)f[\varphi-\Phi(x,t)]. \tag{3.13}$$

Diferenciando a candidata (3.13) duas vezes em x, obtemos

$$p_{xx}=p_{0xx}f(\varphi-\Phi)-2p_{0x}f'(\varphi-\Phi)\Phi_x+p_0f''(\varphi-\Phi)\left(\Phi_x\right)^2-p_0f'(\varphi-\Phi)\Phi_{xx}. \tag{3.14}$$

Da mesma forma, a derivada mista com respeito a t e φ é

$$p_{t\varphi}=p_{0t}f'(\varphi-\Phi)-p_0f''(\varphi-\Phi)\Phi_t. \tag{3.15}$$

Observando os termos que envolvem f'', devemos ter

$$p_{xx} - \frac{8\varphi^2}{tv^2} p_{\varphi t} = 0, \qquad (3.16)$$

então a substituição da candidata (3.13) na equação (3.16), e observando os termos em f'' encontramos a equação iconal (3.12). A equação (3.16) é a *equação da onda imagem para remigração no tempo em meios elipticamente anisotrópicos com variação da elipticidade.* Note que a equação acima é a mais simples com a propriedade desejada. Termos adicionais envolvendo as primeiras derivadas de p com respeito a x, t, ou φ não alteram a equação iconal associada e, portanto, também o comportamento cinemático da sua solução. Como estamos apenas interessados no comportamento cinemático correto da solução, podemos escolher a forma mais simples. Novamente, a substituição de $\varphi = 1$ reduz essa equação a uma já encontrada em (Hubral et al., 1996b; Fomel, 1994) derivada para um meio isotrópico.

3.1.4 Transformação de variável

Note agora que a mudança de variável

$$\nu = \frac{v}{\sqrt{\varphi}} \quad \Rightarrow \quad p_{\varphi t} = -\frac{1}{2} p_{\nu t} \frac{\nu^3}{v^2} \qquad (3.17)$$

transforma a equação (3.16) novamente na equação da onda imagem no tempo em meios isotrópicos

$$p_{xx} + \frac{4}{\nu t} p_{\nu t} = 0, \qquad (3.18)$$

a qual é exatamente a equação da onda imagem para a remigração no tempo em meios isotrópicos (Hubral et al., 1996b).

Em outras palavras, a equação da onda imagem no tempo em meios isotrópicos se mantém em meios elipticamente anisotrópicos, com uma mudança no significado da variável de propagação.

3.2 Variação da velocidade vertical

Nesta seção supomos que a migração original tenha sido realizada com o modelo caracterizado por uma velocidade vertical incorreta v_0, mas uma elipticidade correta φ. Nesse modelo M_0, o mesmo tempo T da equação (3.1) corresponde a uma onda refletida em um ponto diferente $P_0 = (x_0, z_0)$. Portanto, o mesmo T pode ser representado como

$$T(\xi; x_0, t_0) = \left[\frac{4\varphi}{v_0^2}(x_0 - \xi)^2 + t_0^2\right]^{1/2}. \tag{3.19}$$

3.2.1 Onda imagem de Huygens

Igualando o tempos (3.1) e (3.19), temos a família

$$F(x, t, \xi, \varphi) = \frac{4\varphi}{v^2}(x - \xi)^2 + t^2 - \frac{4\varphi}{v_0^2}(x_0 - \xi)^2 - t_0^2 = 0. \tag{3.20}$$

Diferenciando a equação (3.20) com respeito a ξ, temos

$$\xi = \frac{\beta x - x_0}{\beta - 1} = \frac{x_0 - \beta x}{1 - \beta}, \tag{3.21}$$

onde $\beta = v_0^2/v^2$.

Com a expressão para ξ, e da expressão (3.20) temos

$$t = \sqrt{t_0^2 + 4\varphi\frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 - v^2}}. \tag{3.22}$$

Essa equação descreve a localização da onda imagem de Huygens com condições iniciais $(x_0, t_0; v_0)$. Note que para $\varphi = 1$ (meio isotrópico), a expressão se reduz a encontrada por Hubral et al. (1996b).

3.2.2 Equação iconal

Derivando a equação (3.22) com respeito a t, temos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2t}\left[-\frac{4\varphi(x - x_0)^2}{(v_0^2 - \mathcal{V}^2)^2}(-2\mathcal{V}\mathcal{V}_t)\right] \\ &= \frac{8\varphi\mathcal{V}\mathcal{V}_t}{2t}\,\frac{(x - x_0)^2}{(v_0^2 - \mathcal{V}^2)^2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Da equação (3.23), concluímos que

$$\frac{(x-x_0)^2}{(v_0^2-\mathcal{V}^2)^2}=\frac{t}{4\varphi\mathcal{V}\mathcal{V}_t}. \tag{3.24}$$

Derivando a equação (3.22), com respeito a x temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2t}\left[-\frac{4\varphi\mathcal{V}_x(x-x_0)^2}{(v_0^2-\mathcal{V}^2)^2}(-2\mathcal{V}\mathcal{V}_x)+\frac{8\varphi(x-x_0)}{v_0^2-\mathcal{V}^2}\right] \\ &= \frac{1}{2t}\left[\frac{2t\mathcal{V}_x}{\mathcal{V}_\sqcup}+\frac{8\varphi(x-x_0)}{v_0^2-\mathcal{V}^2}\right], \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde fizemos uso de (3.24). A equação (3.25) pode ser reescrita na seguite forma

$$\frac{\mathcal{V}_x}{\mathcal{V}_t}=\frac{-4\varphi(x-x_0)}{t(v_0^2-\mathcal{V}^2)}. \tag{3.26}$$

Elevando ao quadrado a equação e substituindo na equação (3.24), obtemos

$$\mathcal{V}_x^2-\frac{4\varphi}{t\mathcal{V}}\mathcal{V}_t=0, \tag{3.27}$$

que é a desejada equação iconal para a equação da onda imagem para remigração em meios elipticamente anisotrópicos. Como antes, a substituição de $\varphi=1$ gera a equação iconal em meio isotrópicos, veja (A16) de Hubral et al. (1996b).

3.2.3 Equação da onda imagem

Queremos encontrar uma equação diferencial parcial tal que a equação (3.12) seja a equação iconal associada. Com este propósito, usamos a candidata proposta pela teoria dos raios

$$p(x,t,v)=p_0(x,t)f[v-\mathcal{V}(x,t)]. \tag{3.28}$$

Dos termos envolvendo f'' na segunda derivada da candidata (3.28) com respeito a x e da derivada mista com respeito a t e v, conclui-se que precisamos ter

$$p_{xx}+\frac{4\varphi}{vt}p_{vt}=0. \tag{3.29}$$

A substituição da candidata (3.28) nesta equação reproduz a equação iconal (3.27). A equação (3.29) é a *equação da onda imagem para remigração no tempo em meios elipticamente anisotrópicos com variação da velocidade vertical.*

3.2.4 Transformação de variável

Note que por uma simples mudança de escala para a velocidade vertical

$$v' = \frac{v}{\sqrt{\varphi}} \quad \Rightarrow \quad p_{vt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}} p_{v't}, \tag{3.30}$$

transforma a equação (3.29) em

$$p_{xx} + \frac{4}{v't} p_{v't} = 0, \tag{3.31}$$

Em outras palavras, a mesma equação da onda imagem também descreve a mudança de elipticidade no meio, apenas mudando o significado da variável de propagação.

3.3 Variação da velocidade vertical e da elipticidade

Nessa seção, deixamos a velocidade vertical e a elipticidade variarem, isto é, supomos que a migração original tenha sido realizada com um modelo caracterizado por uma velocidade vertical errada v_0, e por uma elipticidade errada φ_0. Nesse meio, o mesmo tempo T da equação (3.1), pode ser representado como

$$T(\xi; x_0, t_0) = \left[\frac{4\varphi_0}{v_0^2}(x_0 - \xi)^2 + t_0^2 \right]^{1/2}. \tag{3.32}$$

3.3.1 Onda imagem de Huygens

Usando a mesma metodologia descrita na Seção 3.2, temos

$$F(x, t, \xi, \varphi) = \frac{4\varphi}{v^2}(x - \xi)^2 + t^2 - \frac{4\varphi_0}{v_0^2}(x_0 - \xi)^2 - t_0^2 = 0. \tag{3.33}$$

A condição de envelope nos dá

$$\frac{\varphi}{v^2}(x - \xi) - \frac{\varphi_0}{v_0^2}(x_0 - \xi) = 0. \tag{3.34}$$

Aqui, recombinamos as equações (3.33) e (3.34) que só dependem dos parâmetros $\psi = \varphi/v^2$ e $\psi_0 = \varphi_0/v_0^2$.

Resolvendo (3.34) para ξ, temos

$$\xi = \frac{\psi x - \psi_0 x_0}{(\psi - \psi_0)} = \frac{\gamma x - x_0}{\gamma - 1} = \frac{x_0 - \gamma x}{1 - \gamma}, \tag{3.35}$$

onde $\gamma = \psi/\psi_0$. Substituindo a equação (3.35) na equação (3.33), concluímos que a onda imagem de Huygens tem a seguinte forma

$$t = \sqrt{t_0^2 + 4\psi\psi_0 \frac{(x - x_0)^2}{\psi - \psi_0}}. \tag{3.36}$$

Note que essa expressão é quase idêntica à equação (3.7).

3.3.2 Equação iconal

Da comparação das equações (3.7) e (3.36), é fácil ver que a equação iconal com variação de v e φ é dada por

$$\Psi_x^2 + \frac{8\Psi^2}{t}\Psi_t = 0, \tag{3.37}$$

onde $\psi = \Psi(x, t)$, ou seja, utilizamos o raciocínio já elaborado nas seções anteriores para eliminação das constantes, para podermos encontrar a equação iconal.

3.3.3 Equação da onda imagem

A correspondente equação da onda imagem é

$$p_{xx} - \frac{8\psi^2}{t} p_{t\psi} = 0, \tag{3.38}$$

que é *equação da onda imagem para remigração no tempo em meios elipticamente anisotrópicos com variação da velocidade vertical e da elipticidade.*

3.3.4 Transformação de variável

Utilizando as idéias das seções anteriores, essa equação pode ser transformada por uma simples mudança de variáveis,

$$w = \frac{1}{\sqrt{\psi}} \quad \Rightarrow \quad p_{\psi t} = -\frac{1}{2} p_{wt} w^3, \tag{3.39}$$

na forma da equação da onda imagem isotrópica

$$p_{xx} + \frac{4}{wt} p_{wt} = 0. \tag{3.40}$$

Essa equação diferencial parcial, portanto, descreve a propagação da imagem para todas as mudanças de velocidade em um meio elipticamente homogêneo, com a correspondente interpretação da variável de propagação.

3.4 Forma comum da equação da onda imagem

3.4.1 Variável de propagação

A variável de propagação em todos os casos acima tem, na verdade, o mesmo significado físico. Temos

$$\begin{aligned} \text{variação de } v \text{ equação (3.30):} \quad & v' = v/\sqrt{\varphi} = v/\sqrt{v^2/u^2} = u; \\ \text{variação de } \varphi \text{ equação (3.17):} \quad & \nu = v/\sqrt{\varphi} = u; \\ \text{variação de } v \text{ and } \varphi \text{ equação (3.39):} \quad & w = 1/\sqrt{\psi} = 1/\sqrt{\varphi/v^2} = u, \end{aligned} \tag{3.41}$$

onde u é a velocidade horizontal como definido na equação (2.6). Portanto, concluímos que em meios elipticamente anisotrópicos, a remigração no tempo é governada apenas pela velocidade horizontal, i.e.,

$$p_{xx} + \frac{4}{ut} p_{ut} = 0, \tag{3.42}$$

a qual é a equação da onda imagem no tempo mais geral para a remigração no tempo em meios elipticamente anisotrópicos.

3.4.2 Forma alternativa

Por razões computacionais, é interessante notar que pela seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \tau &= t^2/4, \\ \mu &= u^2/4, \end{aligned} \tag{3.43}$$

a equação (3.42) pode ser transformada em uma com coeficientes constantes,

$$p_{xx} + p_{\mu\tau} = 0, \tag{3.44}$$

contanto que a solução seja duas vezes diferenciável. Esta condição geralmente é satisfeita por campos de onda a serem remigrados. Note que esta é a mesma equação que a equação (2.26), portanto, realizar remigração na profundidade ou no tempo para variação da elipticidade são descritos pela mesma equação a menos de transformações. Observe que a transformação τ é a mesma para as remigrações na profundidade e no tempo. Porém, a transformação μ considera valores com sinal oposto.

Capítulo 4

Análise numérica da equação da onda imagem para remigração no tempo

Nos três primeiros capítulos introduzimos o conceito de meio elipticamente anisotrópico (Vanelle, 2002) e o problema da remigração. Utilizando a metodologia proposta por Hubral et al. (1996b) derivamos as equações da onda imagem, na profundidade e no tempo, para meios elipticamente anisotrópicos. No capítulo anterior mostramos que, para resolver as equações deduzidas para a remigração no tempo, precisamos apenas solucionar a equação do seguinte tipo

$$p_{xx} + p_{\mu\tau} = 0, \tag{4.1}$$

onde a variável de propagação é μ. Esta equação apresenta uma condição inicial

$$p(x, \tau, \mu = 0) = p_0(x, \tau).$$

Neste capítulo procuramos esquemas de diferenças finitas para resolvermos a equação acima proposta. Ou seja, procuramos esquemas tais que a solução numérica convirja para a solução analítica.

4.1 Considerações teóricas

Para utilizar o esquema de diferenças finitas definimos a malha dos pontos (x, μ, τ). Sejam $\Delta x, \Delta\mu$ e $\Delta\tau$ números positivos, então a malha tem os seguintes pontos $(x_l, \tau_m, \mu_n) = (x_0 + l\Delta x, \tau_0 + m\Delta\tau, \mu_0 + n\Delta\mu)$ com l, m e n inteiros arbitrários e (x_0, τ_0, μ_0) ponto inicial da malha. Para uma função p definida nos pontos da malha escrevemos $p^n_{l,m}$ para o valor de p no ponto (x_l, τ_m, μ_n) da malha.

Basicamente analisamos a estabilidade dos métodos por nós propostos, e para isso utilizamos análise de von Neumann, ou seja, substituímos $p^n_{l,m}$ por $g^n e^{il\theta_x} e^{im\theta_\tau}$, onde g é o fator de amplificação e θ_x e θ_τ são os ângulos de fase referentes aos eixos x e τ, respectivamente. Para analisar a estabilidade dos esquemas propostos utilizamos o seguinte teorema:

Teorema 1: *Um esquema de diferenças finitas de um passo com coeficientes constantes para uma equação diferencial parcial linear é estável se, e somente se, existe uma constante K, independente de $\theta_x, \theta_\tau, \Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu$, e algum espaçamento de grid, Δx_0 , $\Delta\tau_0$ e $\Delta\mu_0$ tais que*

$$|g(\theta_x, \theta_\tau, \Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu)| \leq 1 + K\Delta\mu, \tag{4.2}$$

para todo θ_x e θ_τ, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$, $0 < \Delta\tau \leq \Delta\tau_0$ e $0 < \Delta\mu \leq \Delta\mu_0$. Mas, se $g(\theta_x, \theta_\tau, \Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu)$ é independente de Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$, a condição de estabilidade (4.2) *pode ser escrita da seguinte forma*

$$|g(\theta_x, \theta_\tau)| \leq 1. \tag{4.3}$$

A demonstração deste teorema e a discussão de alguns exemplos podem ser encontrados em Strikwerda (1989) para equações diferenciais parciais de duas variáveis independentes. Esse teorema mostra que, para determinar a estabilidade de um esquema de diferenças finitas precisamos apenas considerar o fator de amplificação $g(\theta_x, \theta_\tau)$. Essa observação foi feita por von Neumann, e por causa disto, essa análise é chamada de análise de von Neumann.

Como estamos interessados em encontrar uma solução para a equação (4.1), devemos saber como utilizar a estabilidade de um esquema e encontrar um esquema convergente. Isso é o que diz o Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer, mas antes de enunciar este teorema definimos dois conceitos que são necessários para o entendimento do enunciado do teorema.

Definição 1: *Um esquema de diferenças de um passo aproximando uma equação diferencial parcial é convergente se para alguma solução da equação diferencial parcial,* $p(x, \tau, \mu)$, *e soluções do esquema de diferenças finitas,* $p^n_{l,m}$, *tais que* $p^0_{l,m}$ *converge para* $p_0(x, \tau)$ *quando* x_l *converge para* x *e* τ_m *converge para* τ, *então* $p^n_{l,m}$ *converge para* $p(x, \tau, \mu)$, *quando* $(x_l, \tau_m, \mu_n) \to (x, \tau, \mu)$ *quando* $\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu \to 0$.

Também definimos consistência, que junto com o conceito de estabilidade permite mostrar a convergência de métodos.

Definição 2: *Dada uma equação diferencial parcial* $\mathcal{D}p = f$ *e um esquema de diferenças finitas,* $\mathcal{D}_{\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu} p = f$, *dizemos que o esquema de diferenças finitas é consistente com a equação diferencial parcial, se para qualquer função suave* $\phi(x, \tau, \mu)$

$$\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu}\phi \to 0, \tag{4.4}$$

quando $\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu \to 0$.

De posse dos conceitos de convergência, consistência e estabilidade podemos enunciar o Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer (Strikwerda, 1989).

Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer (para EDP's lineares): *Um esquema de diferenças finitas consistente com uma equação diferencial parcial para a qual o problema de valor inicial é bem posto é convergente se, e somente se, é estável.*

Portanto, para analisarmos se um esquema para a equação (4.1) é convergente devemos analisar apenas se o esquema é consistente e estável.

4.2 Discretizações

Nesta seção discretizamos as derivadas da equação (4.1) com a finalidade de criar alguns esquemas para tentar resolvê-la. Para tais discretizações utilizamos série de Taylor.

A idéia básica para esquemas de diferenças é aproximar as derivadas de uma função por diferenças finitas. Isso pode ser feito de várias maneiras, duas delas são as seguintes

$$\frac{\partial p}{\partial \mu}(x_l, \tau_m, \mu_n) \approx \frac{p(x_l, \tau_m, \mu_{n+1}) - p(x_l, \tau_m, \mu_n)}{\Delta \mu} \tag{4.5}$$

$$\approx \frac{p(x_l, \tau_m, \mu_n) - p(x_l, \tau_m, \mu_{n-1})}{\Delta \mu}. \tag{4.6}$$

Portanto, das aproximações acima, criamos os esquemas que chamamos de avançado e atrasado, que têm a seguinte forma, respectivamente,

$$\begin{array}{cc} \text{Esquema Avançado:} & \text{Esquema Atrasado:} \\ p_\mu \approx \tilde{p}_\mu = \dfrac{p_{l,m}^{n+1} - p_{l,m}^{n}}{\Delta \mu} & p_\mu \approx \tilde{p}_\mu = \dfrac{p_{l,m}^{n} - p_{l,m}^{n-1}}{\Delta \mu}. \end{array} \tag{4.7}$$

Expandindo a função p até segunda ordem nos pontos em torno de x_l para $p(x_{l+1}, \tau, \mu)$ e $p(x_{l-1}, \tau, \mu)$ e somando encontramos uma discretização para p_{xx}, que é o esquema centrado para a discretização da segunda derivada, ou seja,

$$p_{xx} \approx \tilde{p}_{xx} = \frac{p_{l+1,m}^{n} - 2p_{l,m}^{n} + p_{l-1,m}^{n}}{\Delta x^2} = \mathfrak{D}_x p_{l,m}^{n}. \tag{4.8}$$

Com estas discretizações estamos prontos para discretizarmos a equação (4.1). Até agora fizemos as discretizações das derivadas em μ e x. Generalizando, podemos escrever as derivadas em τ, apenas devemos utilizar o índice adequado em nossa malha. Para a derivada p_{xx} da equação (4.1) utilizamos a fórmula centrada e para a derivada $p_{\mu\tau}$ utilizamos quatro discretizações: avançada-avançada, atrasada-atrasada, atrasada-avançada e avançada-atrasada. A primeira denominação diz respeito a derivada em τ e a segunda denominação diz repeito a derivada em μ. Além destas, utilizamos ainda uma quinta discretização, que é uma média na célula para o cálculo da segunda derivada e, avançada-avançada na derivada mista, denominaremos daqui por diante, este método, de esquema centrado.

Lembrando que $p_{\mu\tau} = (p_\tau)_\mu$, criamos quatro esquemas para resolver a equação (4.1), que são:

$$
\begin{aligned}
\text{Primeiro Esquema: } \mathfrak{D}_x p_{l,m}^n + \frac{p_{l,m+1}^{n+1} - p_{l,m}^{n+1} - p_{l,m+1}^n + p_{l,m}^n}{\Delta\mu\Delta\tau} &= 0, && (4.9)\\
\text{Segundo Esquema: } \mathfrak{D}_x p_{l,m}^n + \frac{p_{l,m}^n - p_{l,m-1}^n - p_{l,m}^{n-1} + p_{l,m-1}^{n-1}}{\Delta\mu\Delta\tau} &= 0, && (4.10)\\
\text{Terceiro Esquema: } \mathfrak{D}_x p_{l,m}^n + \frac{p_{l,m}^{n+1} - p_{l,m-1}^{n+1} - p_{l,m}^n + p_{l,m-1}^n}{\Delta\mu\Delta\tau} &= 0, && (4.11)\\
\text{Quarto Esquema: } \mathfrak{D}_x p_{l,m}^n + \frac{p_{l,m+1}^n - p_{l,m}^n - p_{l,m+1}^{n-1} + p_{l,m}^{n-1}}{\Delta\mu\Delta\tau} &= 0. && (4.12)
\end{aligned}
$$

Além disso, definimos um quinto esquema, o qual faz uma aproximação para p_{xx} no centro da célula. Por isso, tomamos a média dos valores das aproximações de p_{xx} nos quatro nós da célula.

$$
\begin{aligned}
\text{Quinto Esquema: } & \frac{1}{4}\mathfrak{D}_x \left\{ p_{l,m}^{n+1} + p_{l,m}^n + p_{l,m+1}^{n+1} + p_{l,m+1}^n \right\} \\
& + \frac{p_{l,m+1}^{n+1} - p_{l,m}^{n+1} - p_{l,m+1}^n + p_{l,m}^n}{\Delta\mu\Delta\tau} = 0. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Queremos que estes esquemas convirjam, mas a demonstração de que um esquema de diferenças finitas é convergente, geralmente é difícil. Por isso, utilizamos o Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer. Para utilizar tal teorema, primeiro calculamos a consistência dos esquemas e depois a estabilidade dos mesmos.

4.3 Consistência

Nesta seção estudamos a consistência dos esquemas propostos. A hipótese básica do Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer é a consistência, por isso para aplicar tal teorema verificamos primeiramente a consistência dos esquemas de diferenças finitas propostos.

4.3.1 Esquema avançado-avançado

O operador, $\mathcal{D}$ associado a equação (4.1), é $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \tau}$. Portanto, dada uma função suave ϕ

$$\mathcal{D}\phi = \phi_{xx} + \phi_{\mu\tau}. \tag{4.14}$$

Para o esquema avançado-avançado (4.9), o operador de diferenças $\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}$ aplicado a uma função ϕ é

$$\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi = \frac{\phi^n_{l+1,m} - 2\phi^n_{l,m} + \phi^n_{l-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\phi^{n+1}_{l,m+1} - \phi^{n+1}_{l,m} - \phi^n_{l,m+1} + \phi^n_{l,m}}{\Delta\mu\Delta\tau}, \tag{4.15}$$

onde $\phi^n_{l,m} = \phi(x_l, \tau_m, \mu_n)$.

Neste momento, calculamos a série de Taylor de ϕ em x, τ e μ em torno de (x_l, τ_m, μ_n). Portanto,

$$\phi^n_{l+1,m} = \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta x^k}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}, \tag{4.16}$$

$$\phi^n_{l-1,m} = \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta x^k}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}, \tag{4.17}$$

$$\phi^n_{l,m+1} = \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \tau^k}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial \tau^k}, \tag{4.18}$$

$$\phi^{n+1}_{l,m} = \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \mu^k}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial \mu^k}, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}_{l,m+1} = {} & \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \mu^k}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial \mu^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \tau^k}{k!} \frac{\partial^k \phi}{\partial \tau^k} + \Delta\tau\Delta\mu\phi_{\tau\mu} + \frac{3}{3!}\Delta\tau^2\Delta\mu\phi_{\tau\tau\mu} + \\ & \frac{3}{3!}\Delta\tau\Delta\mu^2\phi_{\tau\mu\mu} + O(\Delta\tau\Delta\mu^3) + O(\Delta\tau^2\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau^3\Delta\mu),\end{aligned} \tag{4.20}$$

onde as derivadas são calculadas em (x_l, τ_m, μ_n), logo

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi = {} & \phi_{xx} + \phi_{\tau\mu} + \frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} + \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} + \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + \\ & O(\Delta x^3) + O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Então,

$$\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi = -\frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} - \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} - \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + O(\Delta x^3) +$$

$$O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2). \tag{4.22}$$

Note que,

$$\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \to 0,$$

quando $\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu \to 0$. Note que, para este esquema a ordem de consistência é de segunda ordem em Δx e de primeira ordem em $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$.

4.3.2 Esquema atrasado-atrasado

Para o esquema atrasado-atrasado (4.10), o operador de diferenças $\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}$ aplicado a uma função suave ϕ é

$$\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi = \frac{\phi^n_{l+1,m} - 2\phi^n_{l,m} + \phi^n_{l-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\phi^n_{l,m} - \phi^n_{l,m-1} - \phi^{n-1}_{l,m} + \phi^{n-1}_{l,m-1}}{\Delta\mu\Delta\tau}, \tag{4.23}$$

onde $\phi^n_{l,m} = \phi(x_l, \tau_m, \mu_n)$.

Neste momento, calculamos a série de Taylor de ϕ em x, τ e μ em torno de (x_l, τ_m, μ_n). Além das séries (4.16) e (4.17) necessitamos

$$\phi^n_{l,m-1} = \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\Delta\tau^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\tau^k}, \tag{4.24}$$

$$\phi^{n-1}_{l,m} = \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\Delta\mu^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\mu^k}, \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\phi^{n-1}_{l,m-1} = {} & \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\Delta\mu^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\mu^k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\Delta\tau^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\tau^k} + \Delta\tau\Delta\mu\phi_{\tau\mu} - \\ & \frac{3}{3!}\Delta\tau^2\Delta\mu\phi_{\tau\tau\mu} - \frac{3}{3!}\Delta\tau\Delta\mu^2\phi_{\tau\mu\mu} + \\ & O(\Delta\tau\Delta\mu^3) + O(\Delta\tau^2\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau^3\Delta\mu),\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde as derivadas são calculadas em (x_l, τ_m, μ_n). Daí, e das equações (4.16) e (4.17), obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi = {} & \phi_{xx} + \phi_{\tau\mu} + \frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} - \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} - \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + \\ & O(\Delta x^3) + O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2).\end{aligned} \tag{4.27}$$

Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi &= -\frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} + \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} + \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + O(\Delta x^3) + \\ &\quad O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Note que,

$$\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \to 0,$$

quando $\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu \to 0$. Para este esquema a ordem de consistência é igual ao caso anterior.

4.3.3 Esquema atrasado-avançado

Para o esquema atrasado-avançado (4.11), o operador de diferenças $\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}$ aplicado a uma função suave ϕ é

$$\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi = \frac{\phi^n_{l+1,m} - 2\phi^n_{l,m} + \phi^n_{l-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\phi^{n+1}_{l,m} - \phi^{n+1}_{l,m-1} - \phi^n_{l,m} + \phi^n_{l,m-1}}{\Delta\mu\Delta\tau}, \tag{4.29}$$

onde $\phi^n_{l,m} = \phi(x_l, \tau_m, \mu_n)$.

Neste momento, calculamos a série de Taylor de ϕ em x, τ e μ em torno de (x_l, τ_m, μ_n). Necessitamos, além das séries (4.16), (4.17), (4.19) e (4.24), de

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}_{l,m-1} &= \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta\mu^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\mu^k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\Delta\tau^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\tau^k} - \Delta\tau\Delta\mu\phi_{\tau\mu} + \frac{3}{3!}\Delta\tau^2\Delta\mu\phi_{\tau\tau\mu} - \\ &\quad \frac{3}{3!}\Delta\tau\Delta\mu^2\phi_{\tau\mu\mu} + O(\Delta\tau\Delta\mu^3) + O(\Delta\tau^2\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau^3\Delta\mu), \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde as derivadas são calculadas em (x_l, τ_m, μ_n). Usando as equações (4.16), (4.17), (4.19), (4.24) e (4.30), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi &= \phi_{xx} + \phi_{\tau\mu} + \frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} - \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} + \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + \\ &\quad O(\Delta x^3) + O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi &= -\frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} + \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} - \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + O(\Delta x^3) + \\ &\quad O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto,

$$\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \to 0,$$

quando $\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu \to 0$. Para este esquema a ordem de consistência é a mesma dos casos anteriores.

4.3.4 Esquema avançado-atrasado

Para o esquema avançado-atrasado (4.12), o operador de diferenças $\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}$ aplicado a uma função suave ϕ é

$$\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi = \frac{\phi^n_{l+1,m} - 2\phi^n_{l,m} + \phi^n_{l-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\phi^n_{l,m+1} - \phi^n_{l,m} - \phi^{n-1}_{l,m+1} + \phi^{n-1}_{l,m}}{\Delta\mu\Delta\tau}, \tag{4.33}$$

onde $\phi^n_{l,m} = \phi(x_l, \tau_m, \mu_n)$.

Agora, precisamos das séries (4.16) até (4.18) e (4.25), bem como de

$$\begin{aligned}\phi^{n-1}_{l,m+1} \;=\;& \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\Delta\mu^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\mu^k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta\tau^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial\tau^k} - \Delta\tau\Delta\mu\phi_{\tau\mu} - \frac{3}{3!}\Delta\tau^2\Delta\mu\phi_{\tau\tau\mu} + \\ & \frac{3}{3!}\Delta\tau\Delta\mu^2\phi_{\tau\mu\mu} + O(\Delta\tau\Delta\mu^3) + O(\Delta\tau^2\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau^3\Delta\mu),\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde as derivadas são calculadas em (x_l, τ_m, μ_n). Agora, usando as equações (4.16) até (4.18), (4.25) e (4.34), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \;=\;& \phi_{xx} + \phi_{\tau\mu} + \frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} - \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} + \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + \\ & O(\Delta x^3) + O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2).\end{aligned} \tag{4.35}$$

Então,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \;=\;& -\frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx} + \frac{3}{3!}\Delta\tau\phi_{\tau\tau\mu} - \frac{3}{3!}\Delta\mu\phi_{\tau\mu\mu} + O(\Delta x^3) + \\ & O(\Delta\mu^2) + O(\Delta\tau\Delta\mu) + O(\Delta\tau^2).\end{aligned} \tag{4.36}$$

Logo,

$$\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \to 0,$$

quando $\Delta x, \Delta\tau, \Delta\mu \to 0$. Novamente a consistência é segunda ordem em Δx e primeira ordem em $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$.

4.3.5 Esquema centrado

Para o esquema centrado (4.13), o operador de diferenças $\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}$ aplicado a uma função suave ϕ é

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \quad = \quad & \frac{\phi^n_{l+1,m} - 2\phi^n_{l,m} + \phi^n_{l-1,m}}{4\Delta x^2} + \\ & \frac{\phi^{n+1}_{l+1,m} - 2\phi^{n+1}_{l,m} + \phi^{n+1}_{l-1,m}}{4\Delta x^2} + \\ & \frac{\phi^n_{l+1,m+1} - 2\phi^n_{l,m+1} + \phi^n_{l-1,m+1}}{4\Delta x^2} + \\ & \frac{\phi^{n+1}_{l+1,m+1} - 2\phi^{n+1}_{l,m+1} + \phi^{n+1}_{l-1,m+1}}{4\Delta x^2} + \\ & \frac{\phi^{n+1}_{l,m+1} - \phi^{n+1}_{l,m} - \phi^n_{l,m+1} + \phi^n_{l,m}}{\Delta\mu\Delta\tau},\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde $\phi^n_{l,m} = \phi(x_l, \tau_m, \mu_n)$.

Neste momento, calculamos a série de Taylor de ϕ em x, τ e μ em torno de (x_l, τ_m, μ_n) e aplicamos no operador acima. Para isso utilizamos as séries (4.16) até (4.20), calculadas no centro da célula, além das séries para $\phi^{n+1}_{l+1,m}$, $\phi^{n+1}_{l-1,m}$, $\phi^n_{l+1,m+1}$, $\phi^n_{l-1,m+1}$, $\phi^{n+1}_{l+1,m+1}$ e $\phi^{n+1}_{l-1,m+1}$. Explicitamos as séries $\phi^{n+1}_{l+1,m}$, $\phi^n_{l+1,m+1}$ e $\phi^{n+1}_{l+1,m+1}$, pois as outras seguem o mesmo raciocínio.

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}_{l+1,m} \quad = \quad & \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta x^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \mu^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial \mu^k} + \Delta\mu\Delta x\phi_{\mu x} + \frac{3}{3!}\Delta\mu^2\Delta x\phi_{\mu\mu x} + \\ & \frac{3}{3!}\Delta\mu\Delta x^2\phi_{\mu xx} + O(\Delta\mu\Delta x^3) + O(\Delta\mu^2\Delta x^2) + O(\Delta\mu^3\Delta x),\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\phi^{n}_{l+1,m+1} \quad = \quad & \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta x^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \tau^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial \tau^k} + \Delta\tau\Delta x\phi_{\tau x} + \frac{3}{3!}\Delta\tau^2\Delta x\phi_{\tau\tau x} + \\ & \frac{3}{3!}\Delta\tau\Delta x^2\phi_{\tau xx} + O(\Delta\tau\Delta x^3) + O(\Delta\tau^2\Delta x^2) + O(\Delta\tau^3\Delta x),\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}_{l+1,m+1} \quad = \quad & \phi^n_{l,m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta x^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial x^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \tau^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial \tau^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta \mu^k}{k!}\frac{\partial^k\phi}{\partial \mu^k} + \\ & (\Delta x\Delta\tau\phi_{x\tau} + \Delta x\Delta\mu\phi_{x\mu} + \Delta\tau\Delta\mu\phi_{\tau\mu}) +\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3!}\left(3\Delta x^2\Delta\tau\phi_{xx\tau}+3\Delta x^2\Delta\mu\phi_{xx\mu}+3\Delta x\Delta\tau^2\phi_{x\tau\tau}+6\Delta x\Delta\tau\Delta\mu\phi_{x\tau\mu}+\right.$$
$$\left.3\Delta x\Delta\mu^2\phi_{x\mu\mu}+3\Delta\tau^2\Delta\mu\phi_{\tau\tau\mu}+3\Delta\tau\Delta\mu^2\phi_{\tau\mu\mu}\right)+$$
$$O(\Delta x^3\Delta\tau)+O(\Delta x^3\Delta\mu)+O(\Delta x\Delta\tau^3)+O(\Delta\mu\Delta\tau^3)+O(\Delta x\Delta\mu^3)+$$
$$O(\Delta\tau\Delta\mu^3)+O(\Delta x^2\Delta\tau^2)+O(\Delta x^2\Delta\mu^2)+O(\Delta\tau^2\Delta\mu^2)+$$
$$O(\Delta x^2\Delta\tau\Delta\mu)+O(\Delta x\Delta\tau^2\Delta\mu)+O(\Delta x\Delta\tau\Delta\mu^2). \tag{4.40}$$

Após algumas manipulações algébricas chegamos a condição de consistência para o esquema (4.13), ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\phi-\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi \;&=\; -\frac{2}{4!}\Delta x^2\phi_{xxxx}+\frac{4}{4!}\Delta\tau^2\phi_{\tau\tau\tau\mu}+\frac{4}{4!}\Delta\mu^2\phi_{\tau\mu\mu\mu}+O(\Delta x^3)+\\ &\quad O(\Delta\mu^3)+O(\Delta\tau^3)+O(\Delta x^2\Delta\tau^2)+O(\Delta x^2\Delta\mu^2).\end{aligned} \tag{4.41}$$

Note que

$$\mathcal{D}\phi-\mathcal{D}_{\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu}\phi\to 0,$$

quando $\Delta x,\Delta\tau,\Delta\mu\to 0$. A consistência é segunda ordem em Δx e segunda ordem em $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$.

Note que os cinco esquemas de diferenças finitas propostos se mostram consistentes com a equação (4.1).

4.4 Estabilidade

Conhecendo a consistência dos esquemas (4.9)–(4.13), calculamos a estabilidade dos mesmos, pois, com estas duas condições asseguramos que estes esquemas são convergentes, pelo Teorema da Equivalência de Lax-Richtmyer. Para o cálculo da estabilidade utilizamos a análise de von Neumann.

4.4.1 Esquema avançado-avançado

Passemos agora ao estudo da estabilidade do esquema (4.9), que demoninamos avançado-avançado. Fazendo a substituição $p_{l,m}^n$ por $g^n \mathrm{e}^{il\theta_x}\mathrm{e}^{im\theta_\tau}$ e introduzindo a constante

$$\alpha = \frac{\Delta x^2}{\Delta\mu\Delta\tau}, \tag{4.42}$$

encontramos a seguinte identidade

$$\mathrm{e}^{i\theta_x} - 2 + \mathrm{e}^{-i\theta_x} + \alpha\left(g\mathrm{e}^{i\theta_\tau} - g - \mathrm{e}^{i\theta_\tau} + 1\right) = 0. \tag{4.43}$$

Isolando o fator de amplificação na identidade acima, obtemos

$$g = \frac{\alpha(\mathrm{e}^{i\theta_\tau} - 1) + 2(1 - \cos\theta_x)}{\alpha(\mathrm{e}^{i\theta_\tau} - 1)}. \tag{4.44}$$

Eliminando o fator complexo no denominador, obtemos

$$g = \left[1 - \frac{2\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha}\right] - i\left[\frac{2\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})\mathrm{cotg}(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha}\right]. \tag{4.45}$$

Portanto,

$$|g|^2 = 1 - \frac{4\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha} + \frac{4\mathrm{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2} + \frac{4\mathrm{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})\mathrm{cotg}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha^2}. \tag{4.46}$$

Mas, a condição de estabilidade diz que devemos ter $|g| \leq 1$, ou também, $|g|^2 \leq 1$ e, portanto,

$$-\frac{4\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha} + \frac{4\mathrm{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2} + \frac{4\mathrm{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})\mathrm{cotg}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha^2} \leq 0. \tag{4.47}$$

De onde concluímos que, lembrando da identidade $1 + \mathrm{cotg}^2\theta = 1/\mathrm{sen}^2\theta$,

$$\alpha \geq \frac{\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}, \tag{4.48}$$

que é a condição de estabilidade do esquema (4.9). Portanto, o passo na variável de propagação tem que satisfazer a condição

$$\Delta\mu \leq \frac{\Delta x^2\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\Delta\tau\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}. \tag{4.49}$$

Como vemos em (4.49), não é possível escolher os incrementos Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$ para todos os ângulos de fase. Nota-se, porém, que $\theta_\tau = k_\tau \Delta\tau$ e $\theta_x = k_x \Delta x$, onde k_τ e k_x são as freqüências associadas às coordenadas τ e x, respectivamente. Assim, somente será possível escolher incrementos Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$ de modo que a equação (4.49) seja satisfeita quando as imagens a serem propagadas têm conteúdo de freqüências limitado.

4.4.2 Esquema atrasado-atrasado

Passemos agora ao estudo da estabilidade do esquema (4.10), que denominamos atrasado-atrasado. Fazendo a substituição $p^n_{l,m}$ por $g^n \mathrm{e}^{il\theta_x} \mathrm{e}^{im\theta_\tau}$, encontramos a seguinte identidade

$$\mathrm{e}^{i\theta_x} - 2 + \mathrm{e}^{-i\theta_x} + \alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau} - g^{-1} + g^{-1}\mathrm{e}^{-i\theta_\tau}\right) = 0. \tag{4.50}$$

Isolando o fator de amplificação na identidade acima, obtemos

$$g = \frac{\alpha(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau})}{\alpha(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau}) + 2(\cos\theta_x - 1)}. \tag{4.51}$$

Daí,

$$|g|^2 = \frac{|\alpha(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau})|^2}{|\alpha(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau}) + 2(\cos\theta_x - 1)|^2}. \tag{4.52}$$

Mas,

$$|(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau})|^2 = \left(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{i\theta_\tau}\right) = 2(1 - \cos\theta_\tau) = 4\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right), \tag{4.53}$$

e,

$$\begin{aligned}\left|\alpha(1 - \mathrm{e}^{-i\theta_\tau}) - 4\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\right|^2 &= 4\alpha\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right)\left[\alpha - 4\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\right] \\ &+ 16\mathrm{sen}^4\left(\frac{\theta_x}{2}\right).\end{aligned} \tag{4.54}$$

Substituindo as equações (4.53) e (4.54) na equação (4.52) e usando o fato que $|g|^2 \leq 1$ implica que o esquema é estável; devemos ter

$$|g|^2 = \frac{1}{\left[1 - 4\frac{\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\alpha}\right] + 4\frac{\mathrm{sen}^4\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\alpha^2\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right)}} \leq 1. \tag{4.55}$$

Logo,

$$1 \leq 1 - 4\frac{\text{sen}^{\,2}\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\alpha} + 4\frac{\text{sen}^{\,4}\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\alpha^2\text{sen}^{\,2}\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right)}. \tag{4.56}$$

Assim, concluímos que,

$$\alpha \leq \frac{\text{sen}^{\,2}\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\text{sen}^{\,2}\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right)}, \tag{4.57}$$

que é a condição de estabilidade do esquema (4.10). Portanto, o passo na variável de propagação tem que satisfazer a condição

$$\Delta\mu \geq \frac{\Delta x^2\text{sen}^{\,2}(\frac{\theta_\tau}{2})}{\Delta\tau\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}. \tag{4.58}$$

Como vemos em (4.58), não é possível escolher os incrementos Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$ para todos os ângulos de fase. O comentário feito sobre este fato para o esquema avançado-avançado vale também para este esquema.

4.4.3 Esquema atrasado-avançado

Passemos agora ao estudo da estabilidade do esquema (4.11), que denominamos atrasado-avançado. Fazendo a substituição $p^n_{l,m}$ por $g^n\text{e}^{il\theta_x}\text{e}^{im\theta_\tau}$, encontramos a seguinte identidade

$$\text{e}^{i\theta_x} - 2 + \text{e}^{-i\theta_x} + \alpha\left(g - g\text{e}^{-i\theta_\tau} - 1 + \text{e}^{-i\theta_\tau}\right) = 0. \tag{4.59}$$

Isolando o fator de amplificação na identidade acima, obtemos

$$g = \frac{\alpha(1-\text{e}^{-i\theta_\tau}) + 2(1-\cos\theta_x)}{\alpha(1-\text{e}^{-i\theta_\tau})}. \tag{4.60}$$

Com raciocínio semelhante ao utilizado para encontrar a condição de estabilidade do esquema (4.9), obtemos

$$g = \left[1 + \frac{2\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha}\right] - \text{i}\left[\frac{2\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})\text{cotg}(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha}\right]. \tag{4.61}$$

E, portanto,

$$|g|^2 = 1 + \frac{4\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})\text{cotg}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha^2}. \tag{4.62}$$

Para o esquema ser estável devemos ter $|g|^2 \leq 1$, que implica na seguinte relação

$$\alpha \leq -\frac{\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\text{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}, \tag{4.63}$$

que é a condição de estabilidade do esquema (4.11). Portanto, o passo na variável de propagação tem que satisfazer a condição

$$\Delta\mu \leq -\frac{\Delta x^2 \text{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\Delta\tau \text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}. \tag{4.64}$$

Neste caso, note que, devemos ter $\Delta\mu$ negativo, portanto, na remigração devemos utilizar velocidade decrescentes. Como vemos em (4.64), não é possível escolher os incrementos Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$ para todos os ângulos de fase. O comentário feito sobre este fato para o esquema avançado-avançado vale também para este esquema.

4.4.4 Esquema avançado-atrasado

Passemos agora ao estudo da estabilidade do esquema (4.12), que denominamos avançado-atrasado. Fazendo a substituição $p^n_{l,m}$ por $g^n e^{il\theta_x} e^{im\theta_\tau}$, encontramos a seguinte identidade

$$e^{i\theta_x} - 2 + e^{-i\theta_x} + \alpha\left(e^{i\theta_\tau} - 1 - g^{-1}e^{i\theta_\tau} + g^{-1}\right) = 0. \tag{4.65}$$

Isolando o fator de amplificação na identidade acima, obtemos

$$g = \frac{\alpha(e^{i\theta_\tau} - 1)}{\alpha(e^{i\theta_\tau} - 1) + 2(\cos\theta_x - 1)}. \tag{4.66}$$

Daí,

$$|g|^2 = \frac{|\alpha(e^{i\theta_\tau} - 1)|^2}{|\alpha(e^{i\theta_\tau} - 1) + 2(\cos\theta_x - 1)|^2}. \tag{4.67}$$

Mas,

$$|(e^{i\theta_\tau} - 1)|^2 = \left(e^{i\theta_\tau} - 1\right)\left(e^{-i\theta_\tau} - 1\right) = 2(1 - \cos\theta_\tau) = 4\text{sen}^2\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right), \tag{4.68}$$

e,

$$\begin{aligned} \left|\alpha(e^{i\theta_\tau} - 1) - 4\text{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\right|^2 &= 4\alpha\text{sen}^2\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right)\left[\alpha + 4\text{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\right] \\ &+ 16\text{sen}^4\left(\frac{\theta_x}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.69}$$

A condição de estabilidade diz que devemos ter $|g| \leq 1$, ou também, $|g|^2 \leq 1$,

$$|g|^2 = \frac{1}{\left[1 + 4\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha}\right] + 4\frac{\operatorname{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}} \leq 1. \tag{4.70}$$

Logo,

$$1 \leq 1 + 4\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\alpha} + 4\frac{\operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\alpha^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right)}. \tag{4.71}$$

Assim, concluímos que

$$\alpha \geq -\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\tau}{2}\right)}, \tag{4.72}$$

que é a condição de estabilidade do esquema (4.12). Portanto, o passo na variável de propagação tem que satisfazer a condição

$$\Delta\mu \geq -\frac{\Delta x^2 \operatorname{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\Delta\tau \operatorname{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}. \tag{4.73}$$

Como vemos em (4.73), não é possível escolher os incrementos Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$ para todos os ângulos de fase, assim, novamente o esquema só poderá ser estável para dados com conteúdo de freqüência limitado.

4.4.5 Esquema centrado

Passemos agora ao estudo da estabilidade do esquema (4.13), que denominamos centrado. Fazendo a substituição $p^n_{l,m}$ por $g^n e^{il\theta_x} e^{im\theta_\tau}$, encontramos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} g\left[\alpha e^{i\theta_\tau} - e^{i\theta_\tau}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right) - \alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\right] = \\ \left[\alpha e^{i\theta_\tau} + e^{i\theta_\tau}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right) - \alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{4.74}$$

Isolando o fator de amplificação na identidade acima, obtemos

$$g = \frac{\alpha e^{i\theta_\tau} + e^{i\theta_\tau}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right) - \alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}{\alpha e^{i\theta_\tau} - e^{i\theta_\tau}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right) - \alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)}, \tag{4.75}$$

que é equivalente a

$$g = \frac{\cos\theta_\tau[\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] - [\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] + i[\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]\operatorname{sen}\theta_\tau}{\cos\theta_\tau[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] - [\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] + i[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]\operatorname{sen}\theta_\tau}. \tag{4.76}$$

Calculando $|g|^2$, obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
|g|^2 &= \frac{[\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2 + [\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2 - 2\cos\theta_\tau[\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)][\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]}{[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2 + [\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2 - 2\cos\theta_\tau[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)][\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]} \\
&= 1, \qquad (4.77)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|g| = 1. \qquad (4.78)$$

E, portanto, o esquema (4.13) é incondicionalmente estável.

Escolhemos cinco esquemas de diferenças finitas para resolver numericamente a equação (4.1). Os quatro primeiros esquemas se mostraram condicionalmente estáveis e, portanto, para ter convergência dos esquemas precisamos garantir as condições de estabilidade. Vimos que estas condições só podem ser satisfeitas para dados com conteúdo de freqüência limitado. Já o esquema centrado é estável e, portanto, convergente.

4.5 Dispersão numérica

Para entender o conceito de dispersão foram utilizadas os trabalhos de (Strikwerda, 1989; Munerato, 2006). Primeiramente estudamos uma onda no tempo. Na propagação de uma onda sem dispersão é de se esperar que um pulso de onda deslocado para (x_1, τ_1), no tempo μ_1, tenha as mesmas propriedades que possuia na sua posição original (x_0, τ_0), no tempo μ_0. É de nosso interesse que a onda imagem se comporte desta maneira quando propagada, utilizando um esquema numérico. Assim, como mencionado anteriormente, espera-se que um pulso de onda $f(x, \tau, \mu)$ no instante μ_0 e no tempo $\mu_1 = \mu_0 + \Delta\mu$ sejam iguais, a não ser pelo seu deslocamento. Com isso, esperamos que $f(x_0, \tau_0, \mu_0) = f(x_1, \tau_1, \mu_1)$.

Podemos obter as transformadas de Fourier no domínio das freqüências. As suas transformadas inversas são dadas por, desde que f satisfaça todas as condições ne-

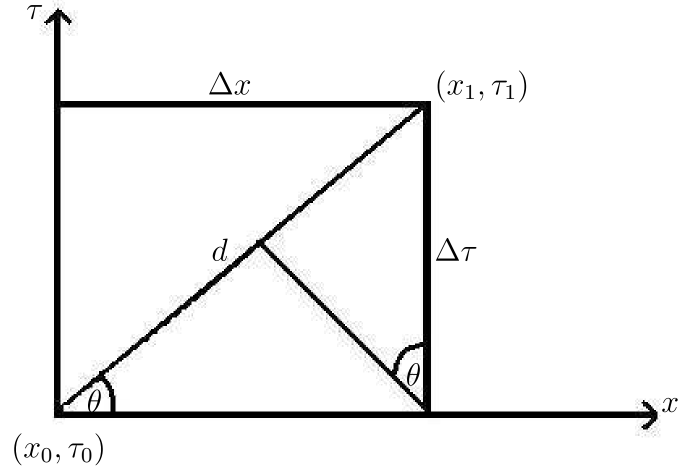

Figura 4.1: Visualização da distância de propagação.

cessárias para que as seguintes transformadas existam,

$$f(x_0,\tau_0,\mu_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x,k_\tau,\mu_0)e^{ik_x x_0}e^{ik_\tau \tau_0}dk_x dk_\tau,$$
$$f(x_1,\tau_1,\mu_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k_x,k_\tau,\mu_1)e^{ik_x x_1}e^{ik_\tau \tau_1}dk_x dk_\tau. \tag{4.79}$$

Lembrando que a transformada de Fourier é única, devemos ter

$$\hat{f}(k_x,k_\tau,\mu_0)e^{ik_x x_0}e^{ik_\tau \tau_0} = \hat{f}(k_x,k_\tau,\mu_1)e^{ik_x x_1}e^{ik_\tau \tau_1}, \tag{4.80}$$

logo,

$$\hat{f}(k_x,k_\tau,\mu_0+\Delta\mu) = e^{-i(k_x\Delta_x + k_\tau\Delta_\tau)}\hat{f}(k_x,k_\tau,\mu_0). \tag{4.81}$$

Para visualizar melhor a equação acima, consideramos, então d o deslocamento que o pulso de onda teve de μ_0 para μ_1, assim temos

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta\tau)^2} = a\Delta\mu, \tag{4.82}$$

onde a é a velocidade de propagação da onda nas coordenadas (x,τ).

Da Figura 4.1, temos

$$d = \Delta x\cos\theta + \Delta\tau \text{sen }\theta, \tag{4.83}$$

do qual, ao considerarmos $k_x = k\cos\theta$ e $k_\tau = k\text{sen }\theta$ (isto é, $k^2 = k_x^2 + k_\tau^2$), chegamos em

$$k_x\Delta_x + k_\tau\Delta_\tau = k(\Delta x\cos\theta + \Delta\tau\text{sen }\theta) = kd = ka\Delta\mu. \tag{4.84}$$

Assim, a equação (4.81) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\hat{f}(k_x, k_\tau, \mu_0 + \Delta\mu) = e^{-ika\Delta\mu}\hat{f}(k_x, k_\tau, \mu_0). \tag{4.85}$$

Portanto, queremos que um esquema de diferenças finitas realize esta propagação no tempo, isto é, multiplique a transformada de Fourier do campo de onda a cada passo por um fator de multiplicação igual a $e^{-ika\Delta\mu}$. Ou, em tradução ao nosso problema, queremos que um esquema de diferenças finitas da equação da onda imagem multiplique a transformada de Fourier por $e^{-ika\Delta\mu}$, onde neste caso as coordenadas são agora as coordenadas que geraram a transformação para a equação (4.1), logo

$$\hat{p}(k_x, k_\tau, \mu_0 + \Delta\mu) = e^{-ika\Delta\mu}\hat{p}(k_x, k_\tau, \mu_0). \tag{4.86}$$

Mas este fenômeno pretendido quase nunca acontece, pois sempre há perda de energia na propagação da onda ou as velocidades de ondas de diferentes freqüências são distintas, quando propagadas pelo esquema de diferenças finitas.

O que pretendemos é determinar quão boa é a aproximação para o termo $e^{-ika\Delta\mu}$ que o esquema de diferenças finitas realiza. Para isso, consideramos um passo no esquema de diferenças finitas no domínio das freqüências k_x e k_τ. Temos que o esquema realiza o cálculo de $\hat{p}^{n+1}$ a partir de $\hat{p}^n$. Em símbolos,

$$\hat{p}^{n+1} = g(k_x\Delta x, k_\tau\Delta\tau)\hat{p}^n, \tag{4.87}$$

onde g é o chamado *fator de amplificação.*

O fator g pode ser escrito da seguinte forma

$$g(k_x\Delta x, k_\tau\Delta\tau) = |g(k_x\Delta x, k_\tau\Delta\tau)|e^{-ikc\Delta\mu}. \tag{4.88}$$

Observamos, pela comparação das equações (4.86) e (4.88), que um esquema ideal seria aquele que realizasse a propagação com $|g| = 1$ e $c = a$.

O fenômeno associado às ondas de diferentes freqüências, propagando com diferentes velocidades do que corresponderia a respectiva equação diferencial, é chamado de *dispersão numérica*. Em outras palavras, se $c(\Delta_x, \Delta\tau, k_x, k_\tau) = a$ para todas k_x e k_τ, então ondas propagar-se-iam com a velocidade correta e sem dispersão numérica, mas isto não acontece para quase nenhum esquema de diferenças finitas para equações diferenciais parciais hiperbólicas, exceto em casos triviais.

Para estudar a dispersão numérica precisamos encontrar a função $c(\Delta x, \Delta\tau, k_z, k_\tau)$ que aproxima a velocidade de propagação a da equação da onda imagem, observando a equação (4.88), temos que calcular o argumento do fator de amplificação g, que é dado por

$$-kc\Delta\mu = \arg(g) = \arctan\left(\frac{\text{Im } g}{\text{Re } g}\right). \tag{4.89}$$

Para ver se é possível amenizar o efeito da dispersão numérica, é útil estudar a sua expansão em série de Taylor. Para encontrar uma aproximação para a velocidade c utilizamos o software *Mathematica* para realizar tais cálculos, e fizemos a expansão em série até quarta ordem em $\Delta\mu$, e até segunda ordem em Δx e $\Delta\tau$. Os resultados obtidos se encontram nas seções abaixo.

4.5.1 Esquema avançado-avançado

Usando a expressão (4.45) e a definição de c apresentada na equação (4.89), temos que teoricamente o valor de c é dado por

$$c = \frac{1}{k\Delta\mu}\arctan\left(\frac{2\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})\text{cotg}(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha - 2\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}\right). \tag{4.90}$$

Para o esquema avançado-avançado obtivemos a seguinte aproximação para c,

$$c \approx \frac{k_x^2}{kk_\tau} - \frac{k_x^6\Delta\mu^2}{3\left(kk_\tau^3\right)} + \frac{\Delta\tau k_x^4\Delta\mu}{2kk_\tau} - \frac{\left(\Delta\tau k_x^8\right)\Delta\mu^3}{2\left(kk_\tau^3\right)} -$$

$$\frac{\Delta x^2 k_x^4 + \Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^2}{12(kk_\tau)} + \frac{(\Delta x^2 k_x^8 + 4\Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^6)\,\Delta\mu^2}{12kk_\tau^3}.$$

4.5.2 Esquema atrasado-atrasado

Pela definição de c apresentada na equação (4.89), temos que teoricamente o valor de c é dado por

$$c = \frac{1}{k\Delta\mu}\arctan\left(\frac{-2\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_\tau(\cos\theta_x - 1)}{\alpha^2(1-\cos\theta_\tau)^2 + 2\alpha(1-\cos\theta_\tau)(\cos\theta_x - 1) + \alpha^2\mathrm{sen}^2\theta_\tau}\right). \quad (4.91)$$

Para o esquema atrasado-atrasado obtivemos a seguinte aproximação para c,

$$\begin{aligned} c \;\approx\; & \frac{k_x^2}{kk\tau} - \frac{k_x^6\Delta\mu^2}{3\,(kk_\tau^3)} + \frac{\Delta\tau k_x^4\Delta\mu}{2kk_\tau} - \frac{(\Delta\tau k_x^8)\,\Delta\mu^3}{2\,(kk_\tau^3)} - \\ & \frac{\Delta x^2 k_x^4 + \Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^2}{12(kk_\tau)} + \frac{(\Delta x^2 k_x^8 + 4\Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^6)\,\Delta\mu^2}{12kk_\tau^3}. \end{aligned}$$

4.5.3 Esquema atrasado-avançado

Pela definição de c apresentada na equação (4.89), temos que teoricamente o valor de c é dado por

$$c = \frac{1}{k\Delta\mu}\arctan\left(\frac{2\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})\mathrm{cotg}(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha + 2\mathrm{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}\right). \quad (4.92)$$

Para o esquema atrasado-avançado obtivemos a seguinte aproximação para c,

$$\begin{aligned} c \;\approx\; & \frac{k_x^2}{kk_\tau} - \frac{k_x^6\Delta\mu^2}{3\,(kk_\tau^3)} - \frac{(\Delta\tau k_x^4)\,\Delta\mu}{2(kk_\tau)} + \frac{\Delta\tau k_x^8\Delta\mu^3}{2kk_\tau^3} - \\ & \frac{\Delta x^2 k_x^4 + \Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^2}{12(kk_\tau)} + \frac{(\Delta x^2 k_x^8 + 4\Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^6)\,\Delta\mu^2}{12kk_\tau^3}. \end{aligned}$$

4.5.4 Esquema avançado-atrasado

Pela definição de c apresentada na equação (4.89), temos que teoricamente o valor de c é dado por

$$c = \frac{1}{k\Delta\mu}\arctan\left(\frac{-2\alpha\,\mathrm{sen}\,\theta_\tau(\cos\theta_x - 1)}{\alpha^2(\cos\theta_\tau - 1)^2 + 2\alpha(\cos\theta_\tau - 1)(\cos\theta_x - 1) + \alpha^2\mathrm{sen}^2\theta_\tau}\right). \quad (4.93)$$

Para o esquema avançado-atrasado obtivemos a seguinte aproximação para c,

$$\begin{aligned} c \;\approx\; & \frac{k_x^2}{kk_\tau} - \frac{k_x^6 \Delta\mu^2}{3\,(kk_\tau^3)} - \frac{(\Delta\tau k_x^4)\,\Delta\mu}{2(kk_\tau)} + \frac{\Delta\tau k_x^8 \Delta\mu^3}{2kk_\tau^3} - \\ & \frac{\Delta x^2 k_x^4 + \Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^2}{12(kk_\tau)} + \frac{(\Delta x^2 k_x^8 + 4\Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^6)\,\Delta\mu^2}{12kk_\tau^3}. \end{aligned}$$

4.5.5 Esquema centrado

Pela definição de c apresentada na equação (4.89), temos que teoricamente o valor de c é dado por

$$c = \frac{1}{k\Delta\mu}\arctan\left(\frac{-2\left[\alpha^2 - \operatorname{sen}^4\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\right] + \cos\theta_\tau \left\{[\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2\right\}}{\left\{[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2 - [\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]^2\right\} \operatorname{sen}\theta_\tau} \right). \tag{4.94}$$

Para o esquema centrado obtivemos a seguinte aproximação para c,

$$\begin{aligned} c \;\approx\; & \frac{k_x^2}{kk_\tau} - \frac{k_x^6 \Delta\mu^2}{12\,(kk_\tau^3)} - \\ & \frac{\Delta x^2 k_x^4 + \Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^2}{12(kk_\tau)} + \frac{(\Delta x^2 k_x^8 + \Delta\tau^2 k_\tau^2 k_x^6)\,\Delta\mu^2}{48kk_\tau^3}. \end{aligned} \tag{4.95}$$

4.5.6 Controle da dispersão numérica

O primeiro termo destas somas, que é igual em todas e não depende de Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$, é a dispersão intrínseca da solução, e representa a velocidade de fase realizada pela própria equação da onda imagem. Os demais termos, que diminuem junto com os incrementos, descrevem a dispersão numérica. Para amenizar o seu efeito gostaríamos de escolher os incrementos de modo que os primeiros destes termos adicionais se cancelassem. Observamos que em todos os esquemas, não é possível determinar uma relação entre Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$ que elimine os primeiros termos das séries de Taylor para todas as freqüências. Isso significa que a dispersão numérica somente pode ser reduzida por diminuição dos incrementos Δx, $\Delta\tau$ e $\Delta\mu$.

4.6 Dissipação numérica

Quando o fator de amplificação g de um esquema tem módulo menor que um, perde-se amplitude do campo propagado a cada passo. Neste caso, fala-se de *dissipação numérica*. Se um esquema apresenta $|g| = 1$, dizemos que este esquema não apresenta dissipação numérica. No caso, $|g| > 1$, a realização computacional do esquema apresenta instabilidades numéricas, como vimos na Seção 4.4.

4.6.1 Esquema avançado-avançado

Para este esquema, obtivemos

$$\begin{aligned} |g|^2 &= 1 - \frac{4\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})\text{cotg}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha^2} & (4.96) \\ &= 1 - \frac{4\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2}\frac{1}{\text{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}. & (4.97) \end{aligned}$$

Se supormos que o conteúdo de freqüências na direções x e τ é amostrado de forma equivalente, podemos escrever que, aproximadamente, $\theta_x \approx \theta_\tau$. Com esta hipótese, encontramos

$$|g|^2 = 1 + \frac{4}{\alpha^2}\text{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)(1-\alpha). \tag{4.98}$$

Mas,

$$\alpha = \frac{\Delta x^2}{\Delta\mu\Delta\tau}. \tag{4.99}$$

Logo, se $\Delta x^2 > \Delta\mu\Delta\tau$, então $\alpha > 1$ e pela equação (4.98) temos que $|g|^2 < 1$. Daí, concluímos que o esquema apresenta pequena dissipação numérica. E se $\alpha = 1$ o esquema não apresenta dissipação numérica e, se $\alpha < 1$ então temos instabilidade.

4.6.2 Esquema atrasado-atrasado

Para este esquema, obtivemos

$$|g|^2 = \frac{1}{\left[1 - 4\frac{\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha}\right] + 4\frac{\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2\text{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}}. \tag{4.100}$$

Assim, se $\theta_x \approx \theta_\tau$, encontramos

$$|g|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha^2}\text{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)(1-\alpha)}. \tag{4.101}$$

Logo, se $\Delta x^2 < \Delta\mu\Delta\tau$, então $\alpha < 1$. Portanto, pela equação (4.101) temos que $|g|^2 < 1$. Daí, concluímos que o esquema apresenta dissipação numérica. E se $\alpha = 1$ o esquema não apresenta dissipação numérica.

4.6.3 Esquema atrasado-avançado

Para este esquema, obtivemos

$$\begin{aligned} |g|^2 &= 1 + \frac{4\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})\text{cotg}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}{\alpha^2} && (4.102) \\ &= 1 + \frac{4\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha} + \frac{4\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2}\frac{1}{\text{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}. && (4.103) \end{aligned}$$

Assim, se $\theta_x \approx \theta_\tau$, encontramos

$$|g|^2 = 1 + \frac{4}{\alpha^2}\text{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)(1+\alpha). \tag{4.104}$$

Para o esquema apresentar uma dissipação numérica deveríamos ter $\alpha < -1$, pela equação (4.99) implica que $\Delta\mu\Delta\tau < 0$ e $\Delta x^2 > |\Delta\mu\Delta\tau|$. Note que para este esquema não apresentar dissipação numérica deveríamos ter $\alpha = -1$, para isto basta ter $\Delta\mu\Delta\tau < 0$ e $\Delta x^2 = |\Delta\mu\Delta\tau|$.

4.6.4 Esquema avançado-atrasado

Para este esquema, obtivemos

$$|g|^2 = \frac{1}{\left[1 + 4\frac{\text{sen}^2(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha}\right] + 4\frac{\text{sen}^4(\frac{\theta_x}{2})}{\alpha^2\text{sen}^2(\frac{\theta_\tau}{2})}}. \tag{4.105}$$

Assim, se $\theta_x \approx \theta_\tau$, encontramos

$$|g|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4}{\alpha^2}\text{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)(1+\alpha)}. \tag{4.106}$$

Para o esquema apresentar uma pequena dissipação numérica deveríamos ter $\alpha > -1$, pela equação (4.99) implica que $\Delta\mu\Delta\tau < 0$ e $\Delta x^2 < |\Delta\mu\Delta\tau|$. Note que para este esquema não apresentar dissipação numérica deveríamos ter $\alpha = -1$, para isso, basta ter $\Delta\mu\Delta\tau < 0$ e $\Delta x^2 = |\Delta\mu\Delta\tau|$.

4.6.5 Esquema centrado

Para este esquema, obtivemos

$$|g|^2 = \frac{|\cos\theta_\tau[\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] - [\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] + i[\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]\operatorname{sen}\theta_\tau|^2}{|\cos\theta_\tau[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] - [\alpha + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)] + i[\alpha - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_x}{2}\right)]\operatorname{sen}\theta_\tau|^2} = 1. \quad (4.107)$$

Como $|g| = 1$, o esquema não apresenta dissipação numérica. Este esquema é de muito interesse, pois pode-se utilizar qualquer valor de α para a execução de um programa de diferenças finitas.

Capítulo 5

Exemplo numérico

Para validar os resultados teóricos deste trabalho, apresentamos um exemplo numérico simples para a remigração no tempo para meios homogêneos elipticamente anisotrópicos usando a equação da onda imagem. O modelo, descrito na Figura 5.1, é uma estrutura sinclinal simples abaixo de uma camada homogênea, elipticamente anisotrópica. O conjunto sintético de dados de afastamento nulo foi modelado usando um código de diferenças finitas e um modelo de exploding-reflector. 767 pares fonte-receptor posicionados a cada 12 m entre $x = 0$ km e $x = 9.192$ km, a uma profundidade de 250 m. Os dados sintéticos são descritos na Figure 5.2. A sombra do refletor é causada por absorção imcompleta da reflexão da superfície pela condição de fronteira absorvente.

Esses dados são a entrada para implementação de Novais et al. (2005) para um esquema de diferenças finitas implícito para a remigração no tempo para meios isotrópicos. Devido as identidades mostradas nos Capítulos 2 e 3, esta implementação pode ser usada para a percepção numérica da propagação da onda imagem em meios elipticamente anisotrópicos.

Alguns momentos da propagação da onda imagem para diferentes valores da variável de propagação são mostrados na Figura 5.3. Como previsto na teoria desenvolvida a velocidade de propagação em meios isotrópicos é igual a velocidade vertical em meios

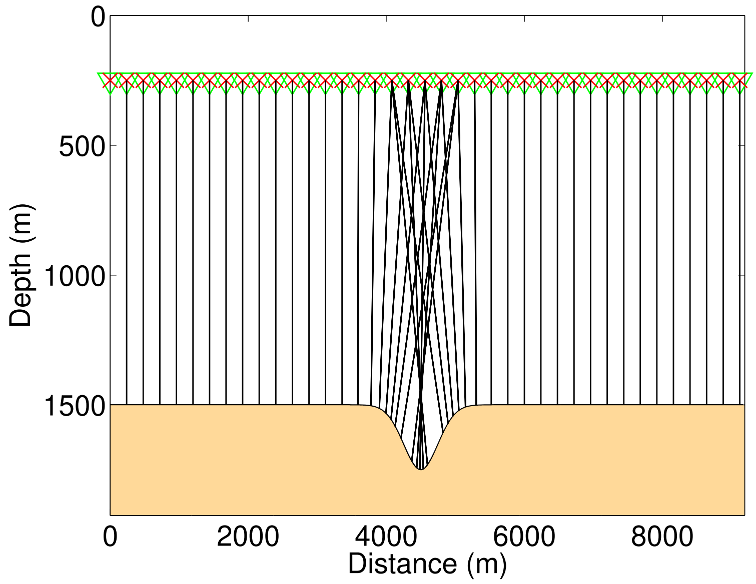

Figura 5.1: Modelo com uma camada por cima de um refletor sinclinal homogênea, elipticamente anisotrópica com uma velocidade horizontal de 4.5 km/s e velocidade vertical de 3.0 km/s. Também é mostrado o família de raios para a configuração utilizada.

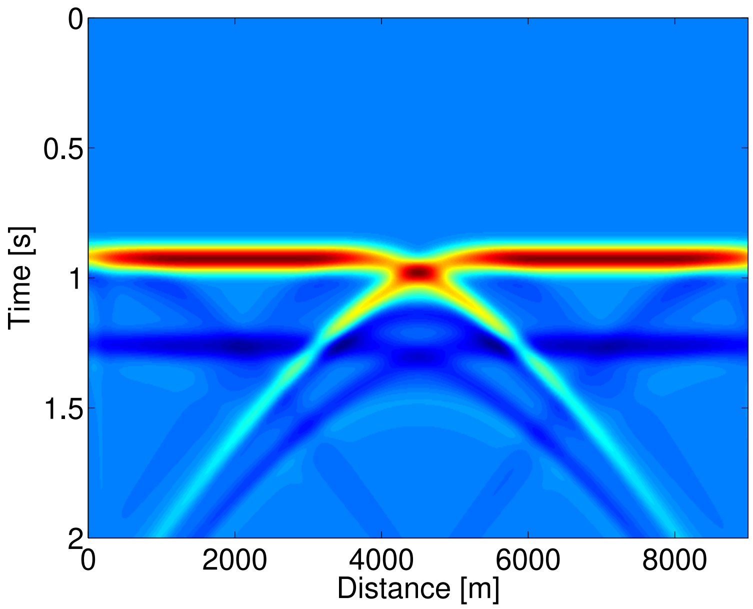

Figura 5.2: Dado sintético de afastamento nulo para o modelo da Figura 5.1.

elipticamente anisotrópicos.

Note que, a partir do desdobramento da estrutura de gravata, bem como da distribuição de amplitude ao longo da imagem do refletor e do focamento da energia nos flancos do vale, é possível estabelecer limitantes para uma estimativa da velocidade horizontal. Certamente, na Figura 5.3a, a estrutura de gravata não está totalmente desdobrada, enquanto na Figura 5.3f, o vale já é “sobremigrado”. Assim, se a velocidade fosse desconhecida, poderia-se determinar que deve estar entre 4.2 km/s e 4.7 km/s.

Note que as imagens migradas anteriormente parecem idênticas às obtidas pela migração dos dados de entrada com as correspondentes velocidades. A idéia da continuação de velocidade não é criar algumas imagens para umas dadas velocidades, mas gerar imagens para muitas velocidades em um curto tempo. Nesse sentido, velocidades que criam imagens de feições geológicas podem ser determinadas pela comparação das imagens ao invés de ter que saber a priori qual velocidade deve ser usada. Em nosso exemplo, 200 imagens foram criadas em meio minuto. As imagens da Figura 5.3 são representantes deste conjunto de imagens.

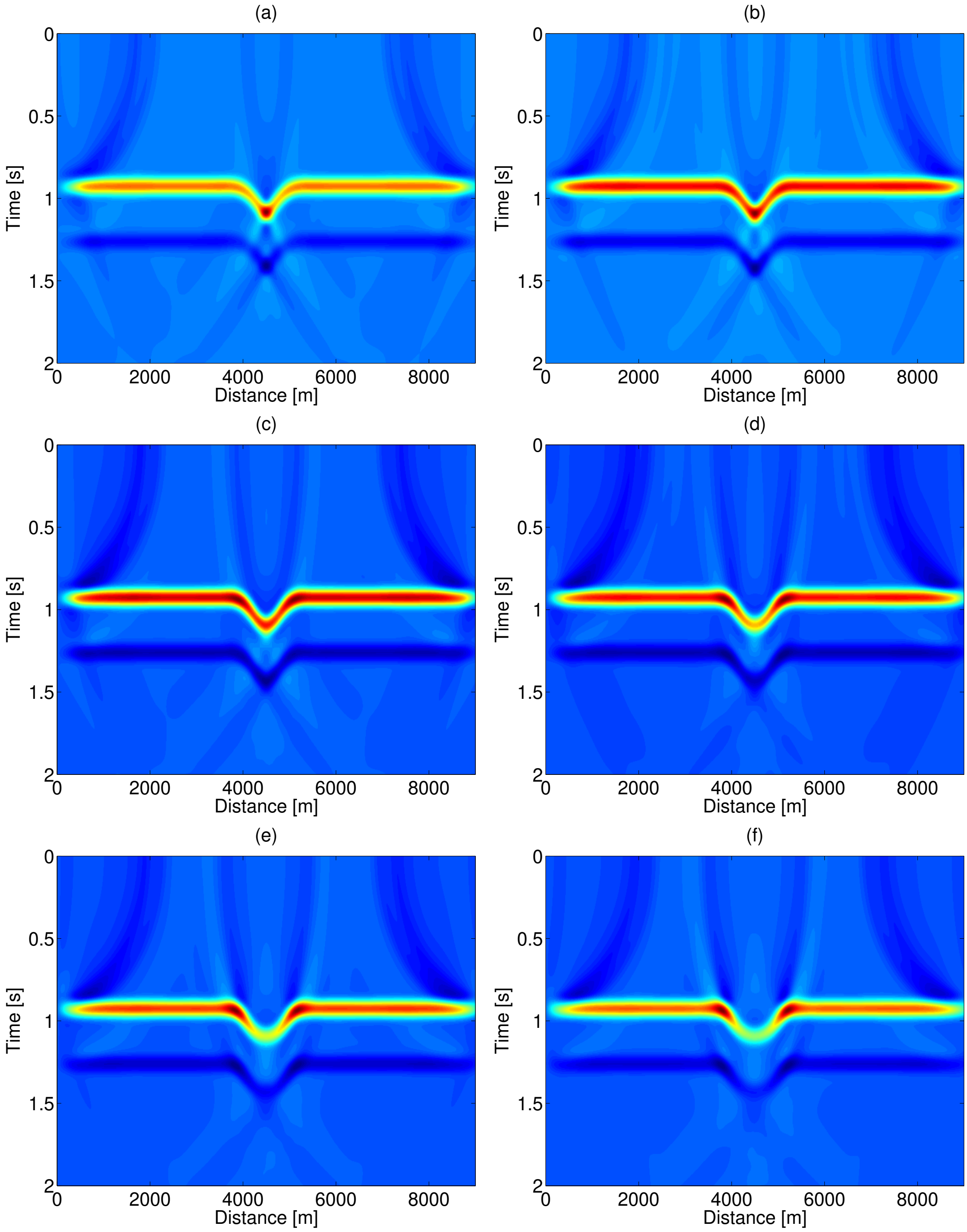

Figura 5.3: Momentos propagação da onda imagem em (a) $u = 4.2$ km/s, (b) $u = 4.3$ km/s, (c) $u = 4.4$ km/s, (d) $u = 4.5$ km/s, (e) $u = 4.6$ km/s, (f) $u = 4.7$ km/s.

Capítulo 6

Conclusão

Como discutido em Fomel (1994) e Hubral et al. (1996b), a mudança da posição de uma imagem de um refletor sísmico com a variação do modelo de velocidade de migração pode ser entendido de maneira análoga à propagação de uma onda física.

As equações da onda imagem para a remigração em meios elipticamente anisotrópicos são equações diferenciais parciais de segunda ordem que descrevem a propagação da imagem de um refletor no tempo e na profundidade como uma função da velocidade vertical e da elipticidade do meio.

Neste trabalho, deduzimos um conjunto de equações diferenciais parciais de segunda ordem que são equações da onda imagem para a remigração em meios elipticamente anisotrópicos. Elas descrevem a propagação da imagem de um refletor no tempo e na profundidade como função da velocidade vertical e da elipticidade do meio. Para este fim, estudamos a cinemática da onda imagem em tais meios para deduzir as equações iconais correspondentes. Por um processo inverso ao da teoria dos raios encontramos as equações da onda imagem desejadas, ou seja, são soluções das equações iconais que exibem o correto comportamento cinemático.

No caso da remigração no tempo, a equação da onda imagem mostra que a posição da imagem do refletor em meios elipticamente anisotrópicos depende apenas da velocidade horizontal. Esta previsão teórica está de acordo com o encontrado por Alkhalifah e Tsvankin (1995), e esta previsão foi confirmada com nosso exemplo numérico. Isto implica que a análise de velocidade de migração no tempo pode apenas detectar apenas este parâmetro. Em particular, isto significa que não há maneira de distinguir um meio elipticamente anisotrópico de um isotrópico, analisando apenas a velocidade de migração no tempo.

Vamos comentar o fato que as derivações anteriores das equações da onda imagem para a remigração na profundidade e no tempo estão baseadas no fato de utilizarmos meios homogêneos, isto é, valores constantes da velocidade vertical e da elipticidade. Em meios não-homogêneos, os valores constantes da velocidade vertical e da elipticidade fazem sentido localmente. Então, a distinção de remigração no tempo e na profundidade se tornam necessárias já que o simples estiramento do eixo de um domínio para outro não é mais válido e as velocidades médias são diferentes. Os primeiros exemplos para um método em meios isotrópicos não-homogêneos na profundidade foi apresentado por Schleicher et al. (2004) e no tempo por Novais et al. (2005). A este respeito é importante observar que a equação da onda imagem para remigração sob variação da elipticidade, tanto na profundidade quanto no tempo, não depende da velocidade vertical. Isto indica que existe um potencial para utilizar o presente modelo de velocidade mesmo quanto este meio apresenta não-homogeneidade, contanto que a elipticidade não varie muito.

A descrição da posição da imagem do refletor como uma função da elipticidade do meio pode ser muito útil para a descrição deste parâmetro. O conjunto de imagens migradas para diferentes elipticidades de meio podem ser obtidas a partir de apenas uma imagem migrada sem a necessidade de múltiplas migrações neste meio. Com informações adicionais da exata posição do refletor pode-se determinar o valor correto da elipticidade do meio.

Provavelmente, a aplicação mais interessante deste procedimento seria utilizar como condição inicial a elipticidade unitária, isto é, $\varphi_0 = 1$. Como a migração em meios isotrópicos é um campo com bastante estudos, a equação da onda imagem poderia transformar uma imagem migrada em meio isotrópico, o qual pode ser obtido com um dos sofisticados métodos de migração que estão disponíveis, em uma imagem que corresponde a um meio elipticamente anisotrópico.

Anisotropia elíptica não é muito prática para ser utilizada em meios reais já que é raro que um meio apresente este tipo de anisotropia (Helbig, 1983). Entretanto, tem a vantagem de que todas as deduções são exatas para meios homogêneos. Para meios mais realísticos, aproximações são necessárias. Por exemplo, meios VTI, uma abordagem linearizada foi desenvolvida por Alkhalifah e Fomel (1997). Em meios não-homogêneos, perturbações locais com respeito aos parâmetros de velocidade foram estudados, para isotropia, por Adler (2002) e para anisotropia geral por Iversen (2002). Todavia, anisotropia elíptica pode ser pensada como uma aproximação de situações mais realísticas.

Referências Bibliográficas

Adler, F., 2002, Kirchhoff image propagation: Geophysics, **67**, 126–134.

Aleixo, R. e J. Schleicher, 2004, A equação da onda-imagem para remigração na profundidade em meios elipticamente anisotrópicos: XXVII CNMAC, 333.

———, 2005a, A equação da onda-imagem para remigração na profundidade em meios elipticamente anisotrópicos: TEMA: Tendências em Matemática Aplicada, **6**, 187–196.

———, 2005b, Image-wave remigration in elliptically anisotropic media: 9o Congresso Internacional, Sociedade Brasileira de Geofísica, Resumos Expandidos, 310:1–4.

Alkhalifah, T. e S. Fomel, 1997, Residual migration in VTI media using anisotropy continuation: Stanford Exploration Project, **SEP-94**, 327–338.

Alkhalifah, T. e I. Tsvankin, 1995, Velocity analysis for transversely isotropic media: Geophysics, **60**, 1550–1566.

Červený, V., 2001, Seismic ray theory: Cambridge University Press.

Fomel, S., 1994, Method of velocity continuation in the problem of seismic time migration: Russian Geology and Geophysics, **35**, no. 5, 100–111.

Helbig, K., 1983, Elliptical anisoptropy—its significance and meaning: Geophysics, **48**, 825–832.

Hubral, P., J. Schleicher, e M. Tygel, 1996a, A unified approach to 3-D seismic reflection imaging – part I: Basic concepts: Geophysics, **61**, 742–758.

Hubral, P., M. Tygel, e J. Schleicher, 1996b, Seismic image waves: Geophysical Journal

International, **125**, 431–442.

Iversen, E., 2002, From approximate to accurate velocity rays: 64th Annual International Meeting, EAGE, Expanded Abstracts, P107:1–4.

Jaya, M., 1997, Imaging reflection seismic data using the method of velocity continuation: Dissertation, Universität Karlsruhe (TH).

Mann, J., 1998, Derivation and implementation of the seismic image wave theory and its application to seismic reflection data: Master's thesis, Universität Karlsruhe (TH).

Munerato, F., 2006, Remigração na profundidade mediante a equação da onda imagem: Dissertação, Universidade Estadal de Campinas.

Novais, A., J. Costa, e J. Schleicher, 2005, Velocity determination by image-wave remigration: Relatório Anual WIT, **9**, 66–75.

Schleicher, J. e R. Aleixo, 2004, Image-wave remigration in elliptically isotropic media: Relatório Anual WIT, **8**, 131–139.

———, 2005a, Image-wave remigration in elliptically isotropic media: 74o Congresso Internacional, EAGE, Resumos Expandidos, P003:1–4.

———, 2005b, Time and depth remigration in elliptically anisotropic media using image-wave propagation: Relatório Anual WIT, **9**, 76–87.

———, 2007, Time and depth remigration in elliptically anisotropic media: Geophysics, **72**, S1–S9.

Schleicher, J., A. Novais, R. Aleixo, e J. Costa, 2006, Parameter estimation using seismic image waves: 9o Simpśio Internacional em Geofísica Aplicada em Homenagem a Martin Tygel, 21–21.

Schleicher, J., A. Novais, J. Costa, e R. Aleixo, 2007, Parameter estimation in elliptic media using seismic image waves: Making Waves about Seismics—Um Tributo a Peter Hubral, 7–7.

Schleicher, J., A. Novais, e F. Munerato, 2004, Migration velocity analysis by depth remigration: First results: Geophysical Prospecting, **52**, 559–574.

Strikwerda, J., 1989, Finite difference schemes and partial differential equations: Wadsworth and Brooks, Inc.

Thomas, J., 1995, Numerical partial differential equations: Springer-Verlag.

Vanelle, C., 2002, A tutorial on elliptical anisotropy: Relatório Anual WIT, **6**, 267–275.