Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

A Geometria de Curvas Fanning e de suas Reduções Simpléticas

por

Henrique de Barros Correia Vitório

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq e da CAPES.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Durán Fernandez

A Geometria de Curvas Fanning e de suas Reduções Simpléticas

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Henrique de Barros Correia Vitório e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de Agosto de 2010

Prof. Dr:. Carlos Eduardo Durán Fernandez
Orientador

Marcos Jardim

Prof. Dr:. Marcos Benevenuto Jardim
Co-orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernandez
Prof. Dr. Alcibiades Rigas
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Prof. Dr. Miguel Angel Javaloyes
Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewic

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Bibliotecária: Maria Fabiana Bezerra Müller – CRB8 / 6162

Vitório, Henrique de Barros Correia

V833g A geometria de curvas fanning e de suas reduções simpléticas/Henrique de Barros Correia Vitório-- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : Carlos Eduardo Durán Fernandez ; Marcos Benevenuto Jardim

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1.Invariantes diferenciais. 2.Invariantes geométricos. 3.Variedades de Grassmann. 4.Grassmanniana lagrangeana. 5.Subespaços lagrangeanos. I. Dúran Fernandes, Carlos Eduardo. II. Jardim, Marcos Beneventuo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: The geometry of fanning curves and of their symplectic reductions

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Differential invariants. 2. Geometric invariants. 3. Grassmann manifolds. 4. Lagrangian Grassmannian. 5. Lagrangian subspaces.

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Carlos Eduardo Durán Fernández (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Alcibiades Rigas (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC – UNICAMP)
Prof. Dr. Miguel Ángel Javaloyes Victoria (Univ. Múrcia)
Prof. Dr. Umberto Leone Hryniewicz (UFRJ)

Data da defesa: 20/08/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 20 de agosto de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Carlos Durán

Prof. (a). Dr (a). CARLOS EDUARDO DURÁN FERNANDEZ

Alcibíades Rigas

Prof. (a). Dr (a). ALCIBÍADES RIGAS

Luiz A. B. San Martin

Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

Prof. (a). Dr (a). MIGUEL ÁNGEL JAVALOYES VICTORIA

Prof. (a) Dr. (a) UMBERTO LEONE HRYNIEWICZ

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Afonso e Simone pelo lar afetivo e intelectual que construíram, pelo apoio incondicional que sempre me foi dado em todos os aspectos da minha vida. Devo a vocês tudo que alcancei até hoje.

Agradeço a Durán pela sua orientação, pela constante disposição em me ajudar e pelas palavras de apoio moral que me foram ditas nos momentos em que precisei. Agradeço a Rigas por sua sensibilidade em perceber os momentos de dificuldades pelos quais passei, dando-me apoio e conselhos que sempre seguirei. A Sérgio Santa Cruz agradeço os constantes incentivo e apoio que tenho recebido desde o início de minha trajetória acadêmica. Aprendi muito com todos vocês.

Agradeço à minha tia Maéve por ter me acolhido no meu primeiro ano em Campinas, e por ter estado presente, sempre que possível, oferecendo o seu companheirismo. A Viviane e Roberta agradeço os apoios afetivos que tive, em diferentes épocas, ao longo deste doutorado. Agradeço aos companheiros de casa, antigos e novos, Anderson, Edcarlos, Douglas, Alison e Rafael pela amizade e ótimo convívio que tivemos ao longo de quase quatro anos, e a Bruno, Elisandra, Cíntia, Milda, Carlos e Llohann pelas suas amizades. Vocês tornaram minha estada em Campinas sempre bastante agradável.

Aos eternos amigos de Recife, com os quais dei início à minha incursão matemática: Adim, Larissa, Kildare, Severo, Luis Henrique, Gersonilo, Flávio, Fred, Pascal, Cristhyano e Alexandre. Dedico a vocês este trabalho!

Agradeço à tia Maéve pelo trabalho de revisão ortográfica desta tese, e a Tânia, Cidinha e Ednaldo pela excelência de seus serviços prestados na secretaria de pós-graduação.

Agradeço também à banca examinadora pelas sugestões dadas a fim de melhorar este trabalho. Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro prestado ao longo deste projeto.

Resumo

A presente tese dá continuidade ao recente trabalho de J.C . Álvarez e C.E. Durán acerca dos invariantes geométricos de uma classe genérica de curvas em variedades de Grassmann, ditas "curvas fanning". Mais precisamente, considera-se como tais curvas de planos lagrangeanos comportam-se mediante uma redução simplética, e conclui-se a existência de dois novos invariantes que desempenham um papel fundamental neste contexto, mais notavelmente a maneira pela qual eles generalizam as bem conhecidas fórmulas de O'Neill para submersões isométricas.

Abstract

The present thesis gives continuity to the recent work of J.C.Álvarez e C.E.Durán about the geometric invariants of a generic class of curves in the Grassmann manifolds, called "fanning curves". More precisely, we look at how such curves of lagrangean planes behave under a symplectic reduction, and establish the existence of two new invariants which play a fundamental role in that context, more notably the way they generalize the well known O'Neill's formulas for isometric submersions.

Sumário

Introdução

Curvas em variedades Grassmanianas aparecem com frequência em geometria e dinâmica através da seguinte construção: Sejam X uma variedade, Δ uma distribuição em X, e F_t um fluxo em X. Então, para cada ponto x em X, obtemos uma curva

$$\ell(t) = DF_{-t}(\Delta(F_t(x)))$$

de subespaços de T_xX, chamada, nesta tese, de *curva de Jacobi* do *plano móvel* (X, Δ, F_t). É natural perguntar-se como a geometria de (X, Δ, F_t) está refletida em suas curvas de Jacobi. Este foi o ponto de vista adotado em [Ahd89] por S. Ahdout para o caso de fluxos geodésicos, em cujo trabalho se estabelece que

Teorema 0.1. *A distribuição horizontal de Levi-Civita e a curvatura de uma variedade riemanniana podem ser recuperadas como certos invariantes das curvas de Jacobi associadas ao fluxo geodésico.*

De fato, Ahdout percebeu que tais curvas de planos lagrangeanos satisfazem uma certa condição genérica, chamada lá de condição *fanning*. Uma curva $\ell(t)$ na Grassmanniana Lagrangeana $\Lambda(\mathbb{R}^{2m})$ é fanning se, via a identificação

$$T_\ell\Lambda(\mathbb{R}^{2m}) = \mathrm{Sym}(\ell),$$

cada vetor velocidade $\dot{\ell}(t)$ corresponder a uma forma não-degenerada. Esta condição permitiu a Ahdout associar a $\ell(t)$ dois invariantes simpléticos $h(t)$ e $\mathbf{K}(t)$ que dependem dos 2-jatos e 3-jatos, respectivamente, de $\ell(t)$. O primeiro é ainda uma curva em $\Lambda(\mathbb{V})$, dita *curva horizontal*, e o segundo é, para cada t, um endomorfismo de $\ell(t)$, dito *endomorfismo* *de Jacobi.* Estes são os invariantes mencionados no teorema acima. Em particular, pode-se associar análogos de conexão e curvatura à uma classe genérica de planos móveis (X, Δ, F_t) oriundos de sistemas lagrangeanos.

Inspirados pelos trabalhos de J. Grifone [Gri72a] e P. Foulon [Fou86], acerca dos invariantes associados a equações diferenciais de ordem 2, J. Álvarez e C. Durán no trabalho recente [ÁPD09] desenvolveram um estudo sistemático da geometria das curvas fanning, primeiro estendendo esta condição para curvas em Grassmannianas de tipo metade $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{R}^{2m})$, e então associando a tais curvas um novo invariante de seus 1-jatos, o *endomorfismo fundamental* $\mathbf{F}(t)$, cujas sucessivas derivadas recuperam os invariantes $h(t)$ e $\mathbf{K}(t)$ considerados por Ahdout. A abordagem em [ÁPD09] é bastante clara e elegante, e é baseada num uso sistemático de referenciais; em particular, introduzindo os chamados *referenciais normais* os autores dão uma bela solução ao problema de congruência para curvas fanning em $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{R}^{2m})$ e $\Lambda(\mathbb{R}^{2m})$. Na continuação [ÁPD], os autores mostram como a geometria por trás do formalismo de Grifone [Gri72a] e Foulon [Fou86], para construção de conexões e curvatura para métricas de Finsler e semi-sprays, pode ser recuperada a partir do formalismo desenvolvido em [ÁPD09], simplificando e generalizando a abordagem de Ahdout.

A presente tese foi motivada pela seguinte situação: dada uma submersão isométrica

$$p : M \longrightarrow N$$

entre variedades riemannianas ou, mais geralmente, entre variedades de Finsler [ÁPD01], como estão relacionadas as respectivas curvas de Jacobi associadas aos fluxos geodésicos de M e N? E, uma vez feito isso, como o formalismo desenvolvido por O'Neill em [O'N66], para o caso riemanniano, se traduz no formalismo de curvas fanning desenvolvido em [ÁPD09]? A observação chave para responder estas perguntas consta em [ÁPD01]:

Toda submersão pode ser interpretada como uma redução simplética.

Abstraindo então para o contexto de curvas fanning em $\Lambda(\mathbb{R}^{2m})$, somos levados a considerar como uma curva $\ell(t)$ se comporta mediante a redução simplética de $\mathbb{R}^{2m}$ por um subespaço coisotrópico $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^{2m}$, em cujo caso $\ell(t)$ "desce" a uma curva $\ell_R(t)$ em $\Lambda(\mathbb{W}/\mathbb{W}^{\perp})$ via a aplicação natural

$$\Lambda(\mathbb{R}^{2m}) \longrightarrow \Lambda(\mathbb{W}/\mathbb{W}^{\perp}). \tag{1}$$

Se o par $(\ell(t), \mathbb{W})$ satisfaz uma certa condição genérica natural, mostramos que $\ell(t)$ admite uma decomposição natural $\ell(t) = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{v}(t)$, e concluímos a existência de dois invariantes

$$\mathbf{A}(t), \mathbf{T}(t) \in \mathrm{End}(\ell(t))$$

dos 2-jatos de $\ell(t)$, ditos os *endomorfismos de O'Neill* de $\ell(t)$. Por exemplo, mostramos o seguinte

Teorema 0.2. *Se $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ são nulos para todo t, então existem uma decomposição simplética $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, e curvas fanning $\ell_1(t) \in \Lambda(\mathbb{V}_1)$ e $\ell_2(t) \in \Lambda(\mathbb{V}_2)$, tais que*

1. *$\ell(t) = \ell_1(t) \oplus \ell_2(t)$;*

2. *$\ell_2(t)$ é a curva fanning trivial, isto é, $h_2(t)$ é constante.*

A condição no par $(\ell(t), \mathbb{W})$ garante que a curva $\ell_R(t)$ seja também fanning, e o principal resultado desta tese é a seguinte fórmula para o cálculo do endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}_R(t)$ de $\ell_R(t)$:

Teorema 0.3. *Para todo $v \in \mathfrak{h}(t)$,*

$$W_R(t)(\mathbf{K}_R(t)\overline{v}, \overline{v}) = W(t)(\mathbf{K}(t)v, v) + 3W(t)(\mathbf{A}(t)v, \mathbf{A}(t)v),$$

onde $\overline{v}$ é a imagem de v no quociente $\ell_R(t)$.

Também, mostramos como a restrição de $\mathbf{K}(t)$ a $\mathfrak{v}(t)$ pode ser calculada em termos dos endomorfismos $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$:

Teorema 0.4. *Para todo $v \in \mathfrak{v}(t)$,*

$$W(t)(\mathbf{K}(t)v, v) = W(t)(\mathbf{A}(t)v, \mathbf{A}(t)v) - W(t)(\mathbf{T}(t)^2 v, v) + W(t)(\gamma(\mathbf{T})(t)v, v),$$

onde $\gamma(\mathbf{T})(t)$ é a derivada dinâmica de $\mathbf{T}(t)$.

Estas “fórmulas de O'Neill” para reduções simpléticas de curvas fanning generalizam as bem conhecidas fórmulas de O'Neill em submersões riemannianas, em particular estabelecendo a existência das mesmas em submersões de Finsler. Mais geralmente, obtemos a existência de tais fórmulas no contexto de reduções simpléticas de planos móveis lagrangeanos:

Teorema 0.5. *Sejam $\mathscr{P} = (X, \Delta, F_t)$ um plano móvel lagrangeano e $\mathcal{N} \subset X$ uma subvariedade coisotrópica, tal que Δ e F_t desçam a uma distribuição Δ_R e um fluxo $\hat{F}_t$ na redução simplética $\mathcal{N}_R$ de X por $\mathcal{N}$. Então, sob certas condições genéricas, podemos associar análogos de curvatura a $\mathscr{P}$ e a $\mathscr{P}_R := (\mathcal{N}_R, \Delta_R, \hat{F}_t)$, e elas satisfazem fórmulas análogas às de O'Neill.*

Um outro aspecto considerado nesta tese é o de focalidade de curvas numa redução simplética. É bem sabido que as propriedades de focalidade de uma geodésica em geometria (semi-riemanniana, Finsler, ...) podem ser recuperadas a partir da teoria de intersecção das curvas de Jacobi associadas ao fluxo geodésico. Portanto, ao tentar compreender como a focalidade de uma geodésica de M está relacionada com a focalidade de sua projeção em N, numa submersão isométrica, fomos levados ao seguinte resultado:

Teorema 0.6. *Seja $\ell(t)$ uma curva suave em $\Lambda(\mathbb{R}^{2m})$ tal que, para todo t, $\ell(t) \cap \mathbb{W}^{\perp} = \{0\}$. Então, se $L \in \Lambda(\mathbb{R}^{2m})$ é tal que $L \supset \mathbb{W}^{\perp}$, temos que um instante t_0 é L-focal não-degenerado, com multiplicidade k, para $\ell(t)$ se, e somente se, for L_R-focal não-degenerado para $\ell_R(t)$, com multiplicidade k.*

Este resultado tem como consequência imediata:

Teorema 0.7. *Seja S uma subvariedade de N, e denotemos por P a subvariedade de M dada por $p^{-1}(S)$. Então, se $\gamma(t)$ é uma geodésica de M que parte ortogonalmente à P, um instante t_0 é P-focal ao longo de $\gamma(t)$ se, e somente se, for S-focal ao longo de $p(\gamma(t))$. Também, as respectivas multiplicidades coincidem.*

Na verdade, este último resultado consta em [O'N67] para o caso em que S se reduz a um ponto, e serviu de inspiração para considerarmos focalidade no contexto de redução simplética de curvas.

A presente tese está organizada da seguinte maneira. No capítulo 1, introduzimos planos móveis e suas curvas de Jacobi, em particular os de tipos lagrangeano e legendriano.

O capítulo 2 contém a principal contribuição desta tese. Em §2.1 fazemos uma revisão da teoria de curvas fanning, seguindo o trabalho [ÁPD09]. Nesta revisão, introduzimos um novo conceito, o de *derivada dinâmica*, e provamos dois pequenos resultados que não constam em [ÁPD09]; todos os demais resultados são apenas mencionados. Começamos §2.2 com uma rápida revisão de redução simplética linear, e provamos um resultado acerca da derivada de (1). Este simples resultado é de fundamental importância para o que segue. A redução simplética de uma curva fanning é então considerada, a existência dos endomorfismos de O'Neill é estabelecida e o capítulo encerra com as demonstrações das já mencionadas fórmulas de O'Neill.

No capítulo 3 nos voltamos para os planos móveis, estabelecendo a condição de regularidade que eles têm que satisfazer afim de podermos associar-lhes certos invariantes, que chamamos de *distribuição horizontal* e *endomorfismo de curvatura*. Ainda no capítulo 3, consideramos a redução simplética de um plano móvel lagrangeano e, como consequência dos resultados do capítulo 2, estabelecemos a existência de fórmulas de O'Neill neste contexto. Mencionamos, ao final deste capítulo, que o mesmo pode ser feito no contexto de planos móveis legendrianos e de suas reduções de contato, usando a noção de redução de contato desenvolvida no apêndice A.

O capítulo 4 tem como objetivo mostrar como os invariantes de curvas fanning recuperam as noções de conexão e curvatura associadas a sprays e métricas de Finsler, seguindo a referência [ÁPD]. Para tal, em §4.2 começamos fazendo uma introdução à teoria de sprays sob o ponto de vista da estrutura quase-tangente, seguindo Grifone [Gri72a]. A parte referente à derivação covariante e endomorfismo de curvatura, por a escrevermos de maneira conveniente aos nossos propósitos, segue apenas em partes [Gri72b], de modo que a escrevemos de maneira totalmente auto-contida; também, fazemos uma exposição auto-contida de campos de Jacobi e da diferencial do fluxo geodésico em geometria de sprays. Em §4.3, fazemos uma introdução mais ou menos padrão à geometria de Finsler, enfatizando os pontos de vista hamiltoniano e da geometria de contato do fibrado esférico unitário. Uma possível referência é [ÁPD98].

No capítulo 5, introduzimos a noção de submersão isométrica em geometria de Finsler, seguindo [ÁPD01]. Além da caracterização por reduções simpléticas estabelecida em [ÁPD01], incluímos uma descrição em termos de reduções de contato do fibrado esférico unitário, usando a noção de redução de contato desenvolvida no apêndice A. Encerramos este capítulo com as fórmulas de O'Neill para curvaturas bandeira numa submersão isométrica entre variedades de Finsler.

Por fim, no capítulo 6 falamos um pouco de focalidade no contexto de curvas em $\Lambda(\mathbb{R}^{2m})$, e no de geometria de Finsler, e provamos os resultados já mencionados nesta introdução.

Alguns trabalhos relacionados

Durante a elaboração deste trabalho, o autor tomou conhecimento do artigo [ACZ05] no qual os autores, motivados por outros problemas provenientes da mecânica e da teoria de controle, são também levados a considerar as reduções simpléticas de sistemas lagrangeanos e de suas curvas de Jacobi, chegando a uma fórmula parecida com a do teorema 2.2 (embora lá os autores não tenham, aparentemente, percebido a existência dos invariantes $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$). O conteúdo desta tese foi obtido de maneira independente e com técnicas diferentes à [ACZ05].

Também, recentemente o autor conheceu os artigos [JP08] e [CP] nos quais os autores consideram os aspectos de focalidade e índice de Maslov em reduções simpléticas de curvas, e em submersões isométricas em geometria semi-riemanniana. Entre outras coisas, os autores destes trabalhos chegam às mesmas conclusões que as nossas no que se refere aos teoremas 6.1 e 6.2.

Capítulo 1

Planos Móveis e Curvas de Jacobi

Definição 1.1. *Um* plano móvel *é uma quádrupla* $\mathscr{P} = (X, \Delta_r, \Delta_k, F_t)$*, onde* X *é uma variedade diferenciável,* Δ_r *e* Δ_k *são distribuições diferenciáveis ao longo de* X*, de dimensões* r *e* k*, respectivamente, e* F_t *é um fluxo em* X*, satisfazendo:*

1. *Para todo* x *em* X*,* $\Delta_k(x) \subset \Delta_r(x)$*;*

2. *A distribuição* Δ_r *é invariante por* F_t*.*

Uma tal estrutura pode ser estudada considerando-se como a distribuição Δ_k se movimenta através do fluxo F_t: para cada x em X, denotando por $\mathbb{V}$ o espaço vetorial $\Delta_r(x)$, a propriedade 2 acima nos garante que

$$\ell_x(t) = DF_{-t}(\Delta_k(F_t(x)))$$

é uma curva de subespaços $k-$dimensionais de $\mathbb{V}$, isto é, uma curva na grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{V})$.

Definição 1.2. *Chamamos* $\ell_x(t)$ *de a* curva de Jacobi *de* $\mathscr{P}$ *baseada em* x*.*

Nesta tese, consideraremos apenas planos móveis com $r = 2k$. Entre estes, estaremos particularmente interessados nos seguintes tipos:

Definição 1.3. *Um plano móvel* $\mathscr{P}$ *é dito:*

1. Lagrangeano*, se (X, ω) for uma variedade simplética, $\Delta_r = TX$, Δ_k for uma distribuição lagrangeana L, e F_t consistir em simplectomorfismos.*

2. Legendriano*, se (X, α) for uma variedade de contato exata, $\Delta_r = \mathrm{Ker}(\alpha)$, Δ_k for uma distribuição legendriana L, e F_t consistir em contactomorfismos (i.e., preservarem a distribuição de contato* $\mathrm{Ker}(\alpha)$*).*

Em ambos os casos, denotaremos $\mathscr{P}$ simplesmente pela tripla (X, L, F_t).

Em particular, sendo $\mathscr{P}$ lagrangeano/legendriano, a curva de Jacobi $\ell_x(t)$ será uma curva de subespaços lagrangeanos do espaço vetorial simplético $(\mathbb{V}, \omega_x)$, isto é, uma curva na Grassmanniana Lagrangeana $\Lambda(\mathbb{V})$; no caso legendriano, ω_x representa $(d\alpha)_x|_{\mathbb{V}}$.[1]

Encerraremos este capítulo exibindo os exemplos arquétipos de planos móveis, os quais são provenientes de fluxos geodésicos:

1. Sejam $X = T_0M$ o fibrado tangente, com a seção nula excetuada, de uma variedade M^m, Δ_m a distribuição em X dada pelos espaços tangentes verticais $\mathcal{V}TM$, Δ_{2m} a "distribuição total" TT_0M, e F_t o fluxo em X associado a um spray S em M^m.

2. Quando, na situação acima, o spray em questão for o spray geodésico associado a uma métrica de Finsler φ em M^m, consideramos T_0M munida da estrutura simplética ω_φ induzida por φ, relativamente a qual a distribuição $\mathcal{V}TM$ é lagrangeana e o fluxo F_t consiste em transformações simpléticas.

3. Ainda na presença de uma métrica de Finsler φ, consideramos $X = SM$, o fibrado esférico unitário, munido da $1-$forma de contato α_φ induzida por φ. O fluxo geodésico F_t age em SM por transformações de contato, e a distribuição $\mathcal{V}SM$, tangente às fibras de $SM \to M$, é legendriana.

[1] Embora $(DF_t)|_{\mathrm{Ker}(\alpha)} : \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\alpha)$ não seja uma transformação simplética (relativamente a $d\alpha$), ela é conformemente simplética, de modo que a natureza lagrangeana de subespaços de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ é por ela preservada.

Capítulo 2

Curvas Fanning e suas Reduções Simpléticas

2.1 Curvas fanning

2.1.1 Curvas fanning na grassmanniana metade

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão $2m$. Denotamos por $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{V})$ a variedade grassmanniana de subespaços m-dimensionais de $\mathbb{V}$.

Definição 2.1. *Dizemos que uma curva suave $\ell(t)$ em $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{V})$ é* fanning *se, dado um referencial*

$$\mathcal{A}(t) = \{a_1(t), \cdots, a_m(t)\}$$

para $\ell(t)$, tivermos que

$$(\mathcal{A}(t)|\dot{\mathcal{A}}(t)) := \{a_1(t), \cdots, a_m(t), \dot{a}_1(t), \cdots, \dot{a}_m(t)\} \tag{2.1}$$

é uma base para $\mathbb{V}$, para todo t. Verifica-se que esta condição independe da particular escolha do referencial.

Nota 2.1. Uma definição intrínseca da condição fanning usa a identificação canônica

$$T_\ell \mathrm{Gr}_m(\mathbb{V}) = \mathrm{Lin}(\ell, \mathbb{V}/\ell),$$

e o fato de que, por hipótese de dimensão, faz sentido considerar as transformações em $\mathrm{Lin}(\ell, \mathbb{V}/\ell)$ que são invertíveis: uma curva $\ell(t)$ é fanning se, e somente se, para todo t a sua velocidade $\dot{\ell}(t)$ corresponder a uma transformação linear invertível.

Fixemos, até o final desta seção, uma curva fanning $\ell(t)$ em $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{V})$. Dado um referencial $\mathcal{A}(t)$ para $\ell(t)$, a condição fanning nos permite definirmos um endomorfismo

$$\mathbf{F}(t) : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t)(a_i(t)) &= 0, \\ \mathbf{F}(t)(\dot{a}_i(t)) &= a_i(t), \end{aligned}$$

para $i = 1, \cdots, m$. Verifica-se que esta definição independe da escolha do referencial, mas apenas da curva $\ell(t)$.

Definição 2.2. *A curva de endomorfismos* $\mathbf{F}(t)$ *de* $\mathbb{V}$ *é dita* o endomorfismo fundamental *de* $\ell(t)$.

O endomorfismo fundamental constitui o principal invariante dos 1-jatos de curvas fanning.

Proposição 2.1. *Para cada* t*, a derivada* $\dot{\mathbf{F}}(t)$ *é uma reflexão (isto é,* $(\dot{\mathbf{F}}(t))^2 = \mathbf{I}$*) cujo autoespaço associado ao autovalor* -1 *é* $\ell(t)$*.*

Esta proposição nos permite definirmos o principal invariante dos 2-jatos de curvas fanning:

Definição 2.3. *A* curva horizontal *de* $\ell(t)$ *é a curva* $h(t)$ *em* $\mathrm{Gr}_m(\mathbb{V})$ *que, para cada* t*, é igual ao autoespaço com autovalor* 1 *de* $\dot{\mathbf{F}}(t)$*.*

Consequentemente, para cada t temos uma decomposição

$$\mathbb{V} = h(t) \oplus \ell(t), \tag{2.2}$$

relativamente a qual definimos projetores

$$\mathbf{P}_\ell(t)\ ,\ \mathbf{P}_h(t) : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$$

com imagens $\ell(t)$ e $h(t)$, respectivamente.

Proposição 2.2. *Para cada t, a segunda derivada $\ddot{\mathbf{F}}(t)$ reverte a decomposição* (2.2).

Portanto, o quadrado $(\ddot{\mathbf{F}}(t))^2$ preserva a decomposição (2.2), e obtemos assim o principal invariante de curvas fanning:

Definição 2.4. *O* endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}(t)$ *de* $\ell(t)$ *é o endomorfismo de* $\ell(t)$ *dado pela restrição de* $1/4(\ddot{\mathbf{F}}(t))^2$ *à* $\ell(t)$*:*

$$\mathbf{K}(t) = \frac{1}{4}(\ddot{\mathbf{F}}(t))^2\big|_{\ell(t)}.$$

A condição fanning nos garante que, dado um referencial $\mathcal{A}(t)$ para $\ell(t)$, existem matrizes quadradas $m \times m$ $P(t)$ e $Q(t)$ tais que

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \dot{\mathcal{A}}(t)P(t) + \mathcal{A}(t)Q(t) = \mathrm{O}. \tag{2.3}$$

Definição 2.5. *A* derivada Schwarziana *de* $\mathcal{A}(t)$ *é a seguinte função:*

$$\{\mathcal{A}(t), t\} := 2Q(t) - (1/2)P(t)^2 - \dot{P}(t).$$

No caso particular em que $\mathcal{A}(t)$ é dado por uma matriz (referente a uma identificação $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{2m}$) do tipo

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} I \\ S(t) \end{pmatrix},$$

obtemos que

$$\{\mathcal{A}(t), t\} = (\dot{S})^{-1}\dddot{S} - \frac{3}{2}(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}\ddot{S}. \tag{2.4}$$

Proposição 2.3. *Dada uma base qualquer $\mathcal{B}$ de $\ell(\tau)$, existe um único referencial $\mathcal{A}(t)$ de $\ell(t)$ tal que $\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{B}$ e $\ddot{\mathcal{A}}(t)$ é gerado por $\mathcal{A}(t)$ para todo t. Um tal referencial é dito* normal.

Consequentemente, se $\mathcal{A}(t)$ é um referencial normal, então

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(t)\{\mathcal{A}(t), t\} = 0.$$

Proposição 2.4. *A matriz do endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}(t)$ no referencial $\mathcal{A}(t)$ é igual a* $(1/2)\{\mathcal{A}(t), t\}$.

Encerraremos esta seção com mais dois conceitos.

Definição 2.6. *A* derivada horizontal *associada a $\ell(t)$ é o isomorfismo $H(t) : \ell(t) \to h(t)$ definido da seguinte maneira: dado $a \in \ell(\tau)$, seja $a(t)$ uma curva em $\mathbb{V}$ tal que $a(\tau) = a$ e $a(t) \in \ell(t)$ para todo t. Então, definimos*

$$H(\tau)(a) := \mathbf{P}_h(\tau)(\dot{a}(\tau)). \tag{2.5}$$

Verifica-se que $H(\tau)(a)$ está bem definido, isto é, independe da escolha da curva $a(t)$.

Aplicando-se a derivada horizontal a um referencial $\mathcal{A}(t)$ de $\ell(t)$, obtemos um referencial $H(\mathcal{A})(t)$ para a curva horizontal $h(t)$. Sendo $P(t)$ e $Q(t)$ como em (2.3), então

$$H(\mathcal{A})(t) = \dot{\mathcal{A}}(t) + (1/2)\mathcal{A}(t)P(t). \tag{2.6}$$

Definição 2.7. *Dada uma curva $a(t)$ ao longo de $\ell(t)$ (isto é, $a(t) \in \ell(t)$ para todo t), a* derivada dinâmica *de $a(t)$ é a curva $\gamma(a)(t)$ ao longo de $\ell(t)$ dada por*

$$\gamma(a)(t) := \mathbf{P}_\ell(t)(\dot{a}(t)).$$

Note que a derivada dinâmica satisfaz a seguinte regra de Leibnitz:

$$\gamma(fa)(t) = f(t)\gamma(a)(t) + \dot{f}(t)a(t). \tag{2.7}$$

2.1.2 Curvas fanning na Lagrangeana Grassmanniana

Suponhamos agora que o espaço vetorial $\mathbb{V}$ esteja munido de uma estrutura simplética ω. Neste caso, denotamos por $\Lambda(\mathbb{V})$ a variedade *Grassmanniana Lagrangeana*, que consiste em todos os subespaços lagrangeanos de $\mathbb{V}$.

Definição 2.8. *Dada uma curva suave qualquer $\ell(t)$ em $\Lambda(\mathbb{V})$, o seu* wronskiano *$W(t)$ é a curva de formas bilineares simétricas ao longo de $\ell(t)$ (isto é, $W(t) \in \mathrm{Sym}(\ell(t))$ para todo t) definida da seguinte maneira: dados a e b em $\ell(\tau)$, sejam $a(t)$ e $b(t)$ curvas ao longo de $\ell(t)$ tais que $a(\tau) = a$ e $b(\tau) = b$. Definimos, então*

$$W(\tau)(a, b) := \omega(\dot{a}(\tau), b(\tau)).$$

O caráter lagrangeano da curva $\ell(t)$ garante que esta definição independe da escolha das curvas $a(t)$ e $b(t)$, e que $W(t)$ é bilinear e simétrica.

O wronskiano depende apenas dos 1-jatos de curvas em $\Lambda(\mathbb{V})$, e estabelece uma identificação canônica

$$T_L\Lambda(\mathbb{V}) = \mathrm{Sym}(L), \tag{2.8}$$

para todo $L \in \Lambda(\mathbb{V})$.

Nota 2.2. Descreveremos a identificação (2.8) de uma forma que será conveniente em §2.2.1. Para cada $L \in \Lambda(\mathbb{V})$, denotemos por $L^{\pitchfork}$ o seguinte aberto de $\Lambda(\mathbb{V})$:

$$L^{\pitchfork} := \{L' \,:\, L' \cap L = \{0\}\}.$$

Então, temos que $U \in L'^{\pitchfork}$ se, e somente se, U for o gráfico de uma transformação linear $T : L \to L'$ tal que a forma bilinear $\omega(T(\cdot), \cdot)$ em L seja simétrica. Isto fornece um difeomorfismo

$$\phi_{L,L'} : L'^{\pitchfork} \longrightarrow \mathrm{Sym}(L)$$

cuja derivada em L

$$(D\phi_{L,L'})_L : T_L\Lambda(\mathbb{V}) \longrightarrow \mathrm{Sym}(L)$$

independe da escolha de L' e coincide com a identificação (2.8) dada pelo wronskiano. Veja [Ahd89] para mais detalhes.

Por um momento, identifiquemos $\mathbb{V}$ com $\mathbb{R}^{2m}$ munido da forma simplética

$$\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{J} \mathbf{w}, \quad \text{onde } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathrm{O} & -I \\ I & \mathrm{O} \end{pmatrix}$$

Então, dados uma curva $\ell(t)$ em $\Lambda(\mathbb{V})$ e um referencial matricial $\mathcal{A}(t)$ para $\ell(t)$, a condição de subespaço lagrangeano de $\ell(t)$ é equivalente a

$$\mathcal{A}(t)^T \mathbf{J} \mathcal{A}(t) = \mathrm{O}, \tag{2.9}$$

e a matriz do wronskiano de $\ell(t)$ no referencial $\mathcal{A}(t)$ é

$$W(t)(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}(t)) = -\mathcal{A}(t)^T \mathbf{J} \dot{\mathcal{A}}(t). \tag{2.10}$$

No caso particular em que $\mathcal{A}(t)$ é da forma

$$\mathcal{A}(t) = \begin{pmatrix} I \\ S(t) \end{pmatrix},$$

a condição (2.9) é equivalente a $S(t)$ ser simétrica, e a expressão (2.10) é simplesmente

$$W(t)(\mathcal{A}(t), \mathcal{A}(t)) = -\dot{S}(t). \tag{2.11}$$

Neste contexto de curvas em $\Lambda(\mathbb{V}) \subset \mathrm{Gr}_m(\mathbb{V})$, a condição fanning é equivalente a:

Lema 2.1. *Uma curva $\ell(t)$ em $\Lambda(\mathbb{V})$ é fanning se, e somente se, $W(t)$ for não-degenerado para todo t.*

Os invariantes $\mathbf{F}(t)$, $h(t)$ e $\mathbf{K}(t)$ de uma curva fanning em $\Lambda(\mathbb{V})$ possuem as seguintes propriedades adicionais:

Proposição 2.5. *Seja $\ell(t)$ uma curva fanning em $\Lambda(\mathbb{V})$. Então,*

1. *$\mathbf{F}(t)$ é infinitesimalmente simplético, isto é, $\mathbf{F}(t) \in \mathfrak{sp}(\mathbb{V})$.*

2. *A curva $h(t)$ é a valores em $\Lambda(\mathbb{V})$.*

3. *$\mathbf{K}(t)$ é $W(t)$-simétrico.*

Demonstração. Provaremos apenas a propriedade 1., que é a única que não consta em [ÁPD09]. Verificaremos a ω-anti-simetria de $\mathbf{F}(t)$ na base (2.1) referente a um referencial $\mathcal{A}(t)$. Por simplicidade, omitiremos o t. Como $\mathbf{F}(\ell) = 0$, então $\omega(\mathbf{F}(a_i), a_j) = 0 = -\omega(a_i, \mathbf{F}(a_j))$. Também, como $\mathbf{F}(\dot{a}_i) = a_i$ e $\omega(a_i, a_j) = 0$, obtemos $\omega(\mathbf{F}(\dot{a}_i), a_j) = 0 = -\omega(\dot{a}_i, \mathbf{F}(a_j))$. Por fim,

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{F}(\dot{a}_i), \dot{a}_j) + \omega(\dot{a}_i, \mathbf{F}(\dot{a}_j)) &= \omega(a_i, \dot{a}_j) + \omega(\dot{a}_i, a_j) \\ &= \frac{d}{dt}\omega(a_i, a_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nota 2.3. Observe que 2. é uma simples consequência de 1. De fato, por 1. temos que $\dot{\mathbf{F}}(t) \in \mathfrak{sp}(\mathbb{V})$, e é claro que todo autoespaço com autovalor não nulo de uma transformação em $\mathfrak{sp}(\mathbb{V})$ é tal que ω se anula identicamente.

Encerramos esta seção com a seguinte propriedade da derivada dinâmica γ. Por não constar em [ÁPD09], daremos aqui uma demonstração.

Proposição 2.6. *Sejam $\ell(t)$ uma curva fanning em $\Lambda(\mathbb{V})$, e $a(t)$ e $b(t)$ duas curvas ao longo de $\ell(t)$. Então (omitindo o t),*

$$\frac{d}{dt}W(a,b) = W(\gamma(a),b) + W(a,\gamma(b)). \tag{2.12}$$

Demonstração. Como, por (2.7), $(d/dt)W(a,b) - W(\gamma(a),b) - W(a,\gamma(b))$ é tensorial em a e b, basta mostrarmos (2.12) num referencial normal $\mathcal{A}(t)$. Se $\mathcal{A}(t)$ é normal, então $\dot{A}(t)$ gera $h(t)$ pois, por (2.6), $H(\mathcal{A}) = \dot{\mathcal{A}}$. Em particular, $\gamma(\mathcal{A})(t) = \mathrm{O}$ e, por conseguinte,

$$W(\gamma(\mathcal{A}),\mathcal{A}) + W(\mathcal{A},\gamma(\mathcal{A})) = \mathrm{O}.$$

Por outro lado, usando (2.10), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(\mathcal{A},\mathcal{A}) &= -\dot{\mathcal{A}}^T\mathbf{J}\dot{\mathcal{A}} - \mathcal{A}^T\mathbf{J}\ddot{\mathcal{A}} \\
&= -\dot{\mathcal{A}}^T\mathbf{J}\dot{\mathcal{A}} - \mathcal{A}^T\mathbf{J}\mathcal{A}\frac{1}{2}\{\mathcal{A}(t),t\}.
\end{aligned}$$

Mas $\mathcal{A}^T\mathbf{J}\mathcal{A} = \mathrm{O}$ e, como $\dot{\mathcal{A}}(t)$ gera $h(t)$ e $h(t) \in \Lambda(\mathbb{V})$, também $\dot{\mathcal{A}}^T\mathbf{J}\dot{\mathcal{A}} = \mathrm{O}$. Portanto, $(d/dt)W(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \mathrm{O}$. Q.E.D.

2.2 Reduções simpléticas de curvas fanning

2.2.1 Aspectos lineares de reduções simpléticas

Até o final deste capítulo, $(\mathbb{V},\omega)$ representará um espaço vetorial simplético de dimensão $2m$. Lembremos que um subespaço $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ é dito *coisotrópico* se

$$\mathbb{W} \supset \mathbb{W}^{\perp},$$

onde $\mathbb{W}^\perp$ representa o ortogonal simplético de $\mathbb{W}$.

O mecanismo de redução simplética de $\mathbb{V}$ por um subespaço coisotrópico $\mathbb{W}$ é descrito pelo seguinte resultado elementar (veja [MS98]):

Proposição-Definição 2.1. *A restrição de ω a $\mathbb{W}$ desce a uma forma simplética ω_R no quociente $\mathbb{W}/\mathbb{W}^\perp$, o qual, munido de ω_R, é dito a redução simplética de $(\mathbb{V}, \omega)$ por $\mathbb{W}$. Também, dado um subespaço lagrangeano $L \subset \mathbb{V}$, a imagem de $L \cap \mathbb{W}$ pela aplicação quociente $\Pi : \mathbb{W} \to \mathbb{W}/\mathbb{W}^\perp$ é ainda um subespaço lagrangeano de $\mathbb{W}/\mathbb{W}^\perp$.*

Tem-se, portanto, definida a seguinte aplicação entre as respectivas grassmannianas lagrangeanas:

$$\begin{aligned} \lambda : \Lambda(\mathbb{V}) &\longrightarrow \Lambda(\mathbb{W}/\mathbb{W}^\perp) \\ L &\longmapsto L_R := \Pi(L \cap \mathbb{W}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Para o que segue, notemos que se $L \in \Lambda(\mathbb{V})$ é tal que $L \cap \mathbb{W}^\perp = \{0\}$, então

$$\Pi\big|_{L \cap \mathbb{W}} : L \cap \mathbb{W} \longrightarrow \lambda(L) \tag{2.14}$$

é um isomorfismo. Seja então $\mathcal{U}$ o aberto de $\Lambda(\mathbb{V})$ definido por

$$\mathcal{U} := \{L \ : \ L \cap \mathbb{W}^\perp = \{0\}\}.$$

Lema 2.2. *A aplicação λ é diferenciável em $\mathcal{U}$. Dado $L \in \mathcal{U}$, identificando $\lambda(L)$ com $L \cap \mathbb{W}$ via* (2.14)*, temos que a derivada*

$$(D\lambda)_L : \mathrm{Sym}(L) \longrightarrow \mathrm{Sym}(L \cap \mathbb{W})$$

é simplesmente a aplicação de restrição.

Demonstração. Seguiremos a nota 2.2. Dado $L \in \mathcal{U}$, tomemos um $L' \in \Lambda(\mathbb{V})$ tal que $L' \supset \mathbb{W}^\perp$ e $L \cap L' = \{0\}$. Então $L'^{\overline{\pitchfork}}$ é uma vizinhança de L em $\mathcal{U}$, e logo basta mostrarmos diferenciabilidade de λ em $L'^{\overline{\pitchfork}}$. Observe que $L' \supset \mathbb{W}^\perp$ implica em

$$\lambda(L'^{\overline{\pitchfork}}) \subset \lambda(L')^{\overline{\pitchfork}},$$

de modo que podemos trabalhar com

$$\phi_{\lambda(L),\lambda(L')} \circ \lambda \circ \phi_{L,L'}^{-1} : \mathrm{Sym}(L) \longrightarrow \mathrm{Sym}(\lambda(L)). \tag{2.15}$$

Dado $U \in L'^{\overline{\pitchfork}}$, seja $T : L \to L'$ tal que $U = \mathrm{graf}(T)$, e portanto $\phi_{L,L'}(U) = \omega(T(\cdot), \cdot)$. De $L' \subset \mathbb{W}$, obtemos que $\mathrm{graf}(T) \cap \mathbb{W} = \mathrm{graf}(T|_{L\cap\mathbb{W}})$ e, por conseguinte, $\lambda(U) = \Pi(U \cap \mathbb{W})$ é o gráfico de

$$\Pi\big|_{L'} \circ T\big|_{L\cap\mathbb{W}} \circ \Pi\big|_{L\cap\mathbb{W}}^{-1} : \lambda(L) \longrightarrow \lambda(L').$$

Isto, mais as definições de $\phi_{L,L'}(U)$ e $\phi_{\lambda(L),\lambda(L')}(\lambda(U))$, e o fato de que $\Pi^*\omega_R = \omega$, imediatamente implica que

$$\phi_{\lambda(L),\lambda(L')}(\lambda(U)) = (i \circ \Pi\big|_{L\cap\mathbb{W}}^{-1})^* \phi_{L,L'}(U),$$

onde i é a inclusão $L \cap \mathbb{W} \hookrightarrow L$. Portanto, a aplicação (2.15) é simplesmente o pull-back por $i \circ \Pi\big|_{L\cap\mathbb{W}}^{-1}$. Isto conclui a diferenciabilidade de λ em $L'^{\overline{\pitchfork}}$, e também o cálculo da derivada, uma vez que (2.15) é linear. Q.E.D.

2.2.2 A decomposição $\ell(t) = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{v}(t)$

De agora em diante, fixaremos um subespaço coisotrópico $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, de dimensão $m + n$, e uma curva fanning $\ell(t)$ em $\Lambda(\mathbb{V})$ satisfazendo a seguinte hipótese

$$\ell(t) \cap \mathbb{W}^\perp = \{0\}, \text{ e } W(t) \text{ é não-degenerado em } \ell(t) \cap \mathbb{W} \tag{2.16}$$

para todo t. Denotemos por $\ell_R(t)$ a curva em $\Lambda(\mathbb{W}/\mathbb{W}^\perp)$ dada pela redução simplética de $\ell(t)$, isto é,

$$\ell_R(t) := \lambda(\ell(t)).$$

A hipótese (2.16) nos permite aplicarmos o lema 2.2 para concluirmos o seguinte:

Proposição 2.7. *A curva $\ell_R(t)$ é também fanning.*

Definamos as seguintes "subcurvas" de $\ell(t)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(t) &:= \ell(t) \cap \mathbb{W} \\ \mathfrak{v}(t) &:= \mathbf{F}(t)(\mathbb{W}^\perp). \end{aligned}$$

A hipótese $\ell(t)\cap\mathbb{W}^\perp=\{0\}$ garante que $\Pi\big|_{\ell(t)\cap\mathbb{W}}:\ell(t)\cap\mathbb{W}\to\ell_R(t)$ seja um isomorfismo, de modo que $\mathfrak{h}(t)$ tem dimensão n. Também, $\ell(t)\cap\mathbb{W}^\perp=\{0\}$ implica em $\mathbf{F}(t)\big|_{\mathbb{W}^\perp}$ ser injetivo, e logo $\mathfrak{v}(t)$ tem dimensão $m-n$. Portanto, as curvas $\mathfrak{h}(t)$ e $\mathfrak{v}(t)$ têm dimensões constantes e são, por conseguinte, suaves.

Proposição 2.8. *Para cada t, temos uma decomposição $W(t)$-ortogonal*

$$\ell(t)=\mathfrak{h}(t)\oplus\mathfrak{v}(t). \tag{2.17}$$

Demonstração. Por simplicidade, omitiremos o t. Sejam a e b curvas ao longo de $\mathfrak{h}(t)$ e $\mathfrak{v}(t)$, respectivamente, e seja b' a curva em $\mathbb{W}^\perp$ tal que $\mathbf{F}(b')=b$. Derivando em t esta última igualdade, obtemos que $\dot{b}-b'=(\dot{\mathbf{F}}-\mathbf{I})(b')+\mathbf{F}(\dot{b'})$, e logo $\dot{b}\equiv b' \bmod \ell(t)$. Portanto, usando que ω é nula em $\ell(t)$ e $a\in\ell(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} W(b,a) &= \omega(\dot{b},a)\\ &= \omega(b',a)\end{aligned}$$

que é igual a zero, pois $b'\in\mathbb{W}^\perp$ e $a\in\mathfrak{h}(t)\subset\mathbb{W}$. Isto mostra que $W(t)(\mathfrak{h}(t),\mathfrak{v}(t))=0$ e, portanto, a soma direta $\ell(t)=\mathfrak{h}(t)\oplus\mathfrak{v}(t)$, uma vez que $W(t)\big|_{\mathfrak{h}(t)}$ é não-degenerado. Q.E.D.

Usando o isomorfismo $\mathbf{F}(t)\big|_{h(t)}:h(t)\to\ell(t)$, trazemos a decomposição (2.17) para $h(t)$, obtendo assim uma decomposição

$$h(t)=\mathfrak{h}'(t)\oplus\mathfrak{v}'(t)$$

de $h(t)$ em subcurvas $\mathfrak{h}'(t)$ e $\mathfrak{v}'(t)$. Denotaremos, respectivamente, por

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(t),\ \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t):\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}$$

as projeções sobre $\mathfrak{h}(t)$ e $\mathfrak{v}(t)$, com respeito à decomposição

$$\mathbb{V}=\mathfrak{h}'(t)\oplus\mathfrak{v}'(t)\oplus\mathfrak{h}(t)\oplus\mathfrak{v}(t). \tag{2.18}$$

2.2.3 Os Endomorfismos de O'Neill

Procederemos agora à construção de duas curvas de endomorfismos

$$\mathbf{A}(t),\ \mathbf{T}(t) : \ell(t) \longrightarrow \ell(t)$$

que constituirão dois importantes invariantes geométricos de pares $(\ell(t), \mathbb{W})$ satisfazendo a hipótese (2.16).

Lema 2.3. *Para cada t, denotemos por $\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)$ a projeção de $\mathbb{W}$ em $\mathfrak{h}'(t) \oplus \mathfrak{v}'(t) \oplus \mathfrak{v}(t)$ relativamente à* (2.18). *Então,*

1. $\mathbb{W}^\perp + \mathfrak{h}'(t) = \mathbb{W}^\perp \oplus \mathfrak{h}'(t)$, *e* $\mathbf{F}(t)\big|_{\mathbb{W}^\perp \oplus \mathfrak{h}'(t)} : \mathbb{W}^\perp \oplus \mathfrak{h}'(t) \to \ell(t)$ *é um isomorfismo.*
2. $\mathbf{F}(t)\big|_{\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)} : \mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t) \to \ell(t)$ *é um isomorfismo.*

Demonstração. De $\mathbf{F}(t)(\mathfrak{h}'(t)) = \mathfrak{h}(t)$, e de $\mathbf{F}(t)(\mathbb{W}^\perp) = \mathfrak{v}(t)$, obtemos $\mathbf{F}(t)(\mathbb{W}^\perp + \mathfrak{h}'(t)) = \ell(t)$. Agora, 1. segue de $\dim(\mathbb{W}^\perp + \mathfrak{h}'(t)) \leq (m-n) + n = \dim \ell(t)$. Para 2., temos que o núcleo da restrição de $\mathbf{F}(t)$ a $\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)$ é igual a $\ell(t) \cap (\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t))$ que, devido a $\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t) \subset \mathbb{W}$, está contido em $\ell(t) \cap \mathbb{W} = \mathfrak{h}(t)$, e é portanto nulo, pois $(\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)) \cap \mathfrak{h}(t) = \{0\}$. O resultado segue agora de razões dimensionais, pois é claro que $\dim(\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)) = m$. Q.E.D.

Segue deste lema que podemos construir endomorfismos

$$\Phi(t),\ \Psi(t) : \ell(t) \longrightarrow \ell(t)$$

tomando as seguintes composições:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &:= \mathbf{P}_\ell(t) \circ (\mathbf{F}(t)|_{\mathbb{W}^\perp \oplus \mathfrak{h}'(t)})^{-1} \ :\ \ell(t) \longrightarrow \mathbb{W}^\perp \oplus \mathfrak{h}'(t) \longrightarrow \ell(t) \\
\Psi(t) &:= \mathbf{P}_\ell(t) \circ (\mathbf{F}(t)|_{\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)})^{-1} \ :\ \ell(t) \longrightarrow \mathbb{W} \setminus \mathfrak{h}(t) \longrightarrow \ell(t).
\end{aligned}$$

Estamos agora em posição de definirmos os endomorfismos $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$:

Definição 2.9. *Os* endomorfismos de O'Neill $\mathbf{A}(t)$ *e* $\mathbf{T}(t)$ *são definidos por*

$$\mathbf{A}(t) := \Phi(t) - \Psi(t)$$

$$\mathbf{T}(t)|_{\mathfrak{v}(t)} := \Psi(t)|_{\mathfrak{v}(t)}\ ,\ \ \mathbf{T}(t)|_{\mathfrak{h}(t)} := 0.$$

Comecemos estabelecendo as seguintes propriedades básicas de $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$:

Proposição 2.9. *Os endomorfismos $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ têm as seguintes propriedades:*

1. *$\mathbf{A}(t)$ permuta os subespaços $\mathfrak{h}(t)$ e $\mathfrak{v}(v)(t)$, e $\mathbf{T}(t)$ deixa $\mathfrak{v}(t)$ invariante.*

2. *$\mathbf{A}(t)$ é $W(t)$-anti-simétrico.*

Demonstração. Por simplicidade, omitiremos o t. Dadas curvas a e b ao longo de $\mathfrak{h}(t)$ e $\mathfrak{v}(t)$, respectivamente, sejam a' e b' as curvas em $\mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)$ e $\mathbb{W}^{\perp}$, respectivamente, tais que

$$\mathbf{F}(b') = b, \text{ e } \mathbf{F}(a') = a. \tag{2.19}$$

Temos que $\Phi(b) = \mathbf{P}_{\ell}(b')$ e, como $(\mathbf{F}\big|_{\mathbb{W}^{\perp}\oplus\mathfrak{h}'(t)})^{-1}(a) \in \mathfrak{h}'(t)$, temos $\Phi(a) = 0$. Também, $\Psi(a) = \mathbf{P}_{\ell}(a')$ e, como $b' - \mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(b') \in \mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)$ e $\mathbf{F}(b' - \mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(b')) = \mathbf{F}(b') = b$, segue que $\Psi(b) = \mathbf{P}_{\ell}(b' - \mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(b')) = \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(b')$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(a) &= -\mathbf{P}_{\ell}(a') \\ \mathbf{A}(b) &= \mathbf{P}_{\ell}(b') - \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(b'), \end{aligned}$$

e $\mathbf{T}(b) = \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(b')$. Agora, é só notar que $b' \in \mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)$ implica em $\mathbf{P}_{\ell}(b') \in \mathfrak{v}(t)$. Mostremos agora 2. Derivando (2.19), obtemos que $\dot{a} \equiv \mathbf{P}_{h}(a') \mod \ell(t)$ e $\dot{b} \equiv \mathbf{P}_{h}(b') \mod \ell(t)$. Portanto, usando que ω é nula em $\ell(t)$ e $\mathbf{A}(a), \mathbf{A}(b) \in \ell(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} W(a, \mathbf{A}(b)) &= \omega(\dot{a}, \mathbf{A}(b)) \\ &= \omega(\mathbf{P}_{h}(a'), \mathbf{P}_{\ell}(b') - \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(b')), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} W(b, \mathbf{A}(a)) &= \omega(\dot{b}, \mathbf{A}(a)) \\ &= -\omega(\mathbf{P}_{h}(b'), \mathbf{P}_{\ell}(a')). \end{aligned}$$

Mas $\omega(b', a') = 0$, pois $b' \in \mathbb{W}^{\perp}$ e $a' \in \mathbb{W}$, logo, se escrevermos $b' = \mathbf{P}_{\ell}(b') + \mathbf{P}_{\ell}(b')$ e $a' = \mathbf{P}_{\ell}(a') + \mathbf{P}_{\ell}(a')$,concluímos que $\omega(\mathbf{P}_{h}(a'), \mathbf{P}_{\ell}(b')) = \omega(\mathbf{P}_{h}(b'), \mathbf{P}_{\ell}(a'))$. Portanto, o que temos de mostrar é que $\omega(\mathbf{P}_{h}(a'), \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(b')) = 0$. Para este fim, tomamos a curva c

em $\mathfrak{W}^\perp$ tal que $\mathbf{P}_\mathfrak{v}(b') = \mathbf{F}(c)$, e usamos que $\mathbf{F}$ é ω-anti-simétrica: $\omega(\mathbf{P}_h(a'), \mathbf{P}_\mathfrak{v}(b')) = \omega(\mathbf{P}_h(a'), \mathbf{F}(c)) = -\omega(\mathbf{F}(a'), c) = -\omega(a, c) = 0$, uma vez que $a \in \mathfrak{h}(t) \subset \mathbb{W}$ e $c \in \mathbb{W}^\perp$. Q.E.D.

Temos a seguinte definição alternativa de $\mathbf{A}(t)$:

Proposição 2.10. *Dadas curvas $a(t)$ e $b(t)$ ao longo de $\mathfrak{h}(t)$ e $\mathfrak{v}(t)$, respectivamente, temos*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t)(a(t)) &= -\mathbf{P}_\mathfrak{v}(t)(\dot{a}(t)) \\ \mathbf{A}(t)(b(t)) &= -\mathbf{P}_\mathfrak{h}(t)(\dot{b}(t)). \end{aligned}$$

Demonstração. Usaremos a mesma notação que na demonstração da proposição anterior. Como a é uma curva em $\mathbb{W}$, o mesmo é verdade de $\dot{a}$. Logo, $\dot{a} - \mathbf{P}_\mathfrak{h}(\dot{a}) \in \mathbb{W}\backslash\mathfrak{h}(t)$, e como $\mathbf{F}\big(\dot{a} - \mathbf{P}_\mathfrak{h}(\dot{a})\big) = a$, obtemos que $a' = \dot{a} - \mathbf{P}_\mathfrak{h}(\dot{a})$. Portanto, $\mathbf{A}(a) = -\mathbf{P}_\ell(a') = -\mathbf{P}_\ell\big(\dot{a} - \mathbf{P}_\mathfrak{h}(\dot{a})\big)$, que por sua vez é igual a $-\mathbf{P}_\mathfrak{v}(\dot{a})$. A outra igualdade é mostrada de maneira análoga. Q.E.D.

As curvas $\ell(t)$ cujos invariantes $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ se anulam identicamente são caracterizadas por:

Teorema 2.1. *Se $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ são nulos para todo t, então existem uma decomposição simplética $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, e curvas fanning $\ell_1(t) \in \Lambda(\mathbb{V}_1)$ e $\ell_2(t) \in \Lambda(\mathbb{V}_2)$, tais que*

1. *$\ell(t) = \ell_1(t) \oplus \ell_2(t)$;*

2. *$\ell_2(t)$ é a curva fanning trivial, isto é, $h_2(t)$ é constante.*

Demonstração. Notemos que a nulidade de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{T}$ equivale à nulidade de Φ e Ψ, e que a nulidade de Φ é equivalente a

$$\mathbb{W}^\perp \subset h(t), \quad \text{para todo } t, \tag{2.20}$$

que por sua vez é equivalente a

$$\mathbb{W} \supset h(t), \quad \text{para todo } t, \tag{2.21}$$

uma vez que $\ell(t)$ é lagrangeano e $\mathbb{W}^{\perp}$ é isotrópico.

Comecemos mostrando que, para todos t e s, temos $\mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{h}'(t) = \mathfrak{h}(s) \oplus \mathfrak{h}'(s)$. Isto é equivalente a mostrarmos que

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & \mathbf{P}_{\ell}(\mathrm{s})(\mathfrak{h}(\mathrm{t})) & \subset & \mathfrak{h}(s) \\ \text{(II)} & \mathbf{P}_{\mathrm{h}}(\mathrm{s})(\mathfrak{h}(\mathrm{t})) & \subset & \mathfrak{h}'(s) \\ \text{(III)} & \mathbf{P}_{\ell}(\mathrm{s})(\mathfrak{h}'(\mathrm{t})) & \subset & \mathfrak{h}(s) \\ \text{(IV)} & \mathbf{P}_{\mathrm{h}}(\mathrm{s})(\mathfrak{h}'(\mathrm{t})) & \subset & \mathfrak{h}'(s). \end{array}$$

Dado $v \in \mathfrak{h}(t)$, temos que $\mathbf{P}_{\ell}(s)(v) \in \mathfrak{h}(s)$ se, e somente se, $\mathbf{P}_{\ell}(s)(v) \in \mathbb{W}$, isto é, se e somente se $\omega(\mathbf{P}_{\ell}(s)(v), \mathbb{W}^{\perp}) = 0$. Mas, por (2.21), temos $\mathbf{P}_h(s)(v) \in \mathbb{W}$, daí

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{P}_{\ell}(s)(v), \mathbb{W}^{\perp}) &= \omega(\mathbf{P}_{\ell}(s)(v) + \mathbf{P}_h(s)(v), \mathbb{W}^{\perp}) \\ &= \omega(v, \mathbb{W}^{\perp}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $v \in \mathfrak{h}(t) \subset \mathbb{W}$. Isto mostra (I). Para (II), seja ainda $v \in \mathfrak{h}(t)$. Então $\mathbf{P}_h(s)(v) \in \mathfrak{h}'(s)$ se, e somente se,

$$\mathbf{F}(s)(v) = \mathbf{F}(s)\mathbf{P}_h(s)(v) \in \mathbf{F}(s)(\mathfrak{h}'(s)) = \mathfrak{h}(s),$$

que por sua vez é equivalente a $\omega(\mathbf{F}(s)(v), \mathbb{W}^{\perp}) = 0$. Usando a ω-anti-simetria de $\mathbf{F}(s)$, temos que este último é equivalente a $\omega(v, \mathbf{F}(s)(\mathbb{W}^{\perp})) = 0$. Para mostrarmos que isso ocorre, fixemos $u \in \mathbb{W}^{\perp}$. Então, de (2.20) temos que $\dot{\mathbf{F}}(s)(u) = u$ para todo s, logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\omega(v, \mathbf{F}(s)(u)) &= \omega(v, \dot{\mathbf{F}}(s)u) \\ &= \omega(v, u) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois $v \in \mathfrak{h}(t) \subset \mathbb{W}$. Isto é, $\omega(v, \mathbf{F}(s)(u))$ independe de s. Mas, para $s = t$ é claro que $\omega(v, \mathbf{F}(t)(u)) = 0$, pois $v, \mathbf{F}(t) \in \ell(t)$. Isto conclui a demonstração de (II). As demonstrações de (III) e (IV) são análogas e, por isso, serão omitidas.

Portanto, definimos $\mathbb{V}_1$ como sendo o subespaço

$$\mathbb{V}_1 := \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{h}'(t)$$

e esta definição independe de t. Admitamos por um momento que, para cada t, $\mathfrak{v}(t) \oplus \mathfrak{v}'(t)$ é o complemento ω-ortogonal de $\mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{h}'(t)$. Segue daí que, definindo

$$\mathbb{V}_2 := \mathfrak{v}(t) \oplus \mathfrak{v}'(t)$$

então $\mathbb{V}_2$ também independe de t, e temos uma decomposição simplética $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$. Denotando por $\ell_1(t)$ e $\ell_2(t)$, respectivamente, as curvas em $\Lambda(\mathbb{V}_1)$ e $\Lambda(\mathbb{V}_2)$ dadas por $\mathfrak{h}(t)$ e $\mathfrak{v}(t)$, temos que $\ell(t) = \ell_1(t) \oplus \ell_2(t)$ e, por conseguinte, $\ell_1(t)$ e $\ell_2(t)$ são também fanning. Agora, é só notar que $h_2(t) = \mathfrak{v}'(t)$, e que, devido a (2.20), este último é constante igual a $\mathbb{W}^\perp$.

Mostremos agora que, em geral, $\mathfrak{v}(t) \oplus \mathfrak{v}'(t)$ é o complemento ω-ortogonal de $\mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{h}'(t)$. Por razões dimensionais, basta mostrarmos a ω-ortogonalidade. Isto é equivalente a mostrarmos que $\omega(\mathfrak{h}(t), \mathfrak{v}'(t)) = \omega(\mathfrak{h}'(t), \mathfrak{v}(t)) = 0$. Com efeito, dado $u \in \mathfrak{v}'(t)$, como $\mathbf{F}(t)(u) \in \mathfrak{v}(t)$, existe $w \in \mathbb{W}^\perp$ tal que $\mathbf{F}(t)(u) = \mathbf{F}(t)(w)$. Consequentemente, existe $a \in \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(t)) = \ell(t)$ tal que $u = w + a$. Portanto, dado $v \in \mathfrak{h}(t)$, temos que $\omega(v, u) = \omega(v, w) + \omega(v, a) = 0$, pois $v \in \mathbb{W}$ e ω é nula em $\ell(t)$. Isto mostra que $\omega(\mathfrak{h}(t), \mathfrak{v}'(t)) = 0$. Analogamente, mostra-se que $\omega(\mathfrak{h}'(t), \mathfrak{v}(t)) = 0$. Q.E.D.

Encerraremos esta seção com fórmulas mais explícitas para $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ em termos de coordenadas em $\mathbb{W}^\perp$. Fixemos então uma base de $\mathbb{W}^\perp$

$$\mathcal{U} = \{u_1, \cdots, u_{m-n}\}$$

e seja $\mathcal{B}(t) = \{b_1(t), \cdots, b_{m-n}(t)\}$ o referencial de $\mathfrak{v}(t)$ dado por

$$\mathcal{B}(t) = \mathbf{F}(t)(\mathcal{U}).$$

Também, seja $C(t) = (C(t)_{ij})$ a matriz de $W(t)\big|_{\mathfrak{v}(t)}$ no referencial $\mathcal{B}(t)$, isto é,

$$C(t)_{ij} = W(t)(b_i(t), b_j(t)).$$

Proposição 2.11. *Temos as seguintes fórmulas para* $\mathbf{A}(t)\big|_{\mathfrak{h}(t)}$ *e* $\mathbf{T}(t)$*:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t)(v) &= -\sum_{i,j} C(t)^{ij}\omega(H(t)(v)\,,\,u_j)b_i(t) \\ &= -\sum_{i,j} C(t)^{ij}W(t)\big(v\,,\,\mathbf{P}_\ell(t)(u_j)\big)b_i(t), \quad \textit{para } v\in\mathfrak{h}(t) \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\mathbf{T}(t)(b_i(t)) = -\frac{1}{2}\sum_k \big(C(t)^{-1}\dot{C}(t)\big)_{ki} b_k(t) \tag{2.23}$$

Demonstração. Seja $v(t)$ uma curva ao longo de $\mathfrak{h}(t)$. Pela proposição 2.10,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t)(v) &= -\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t)\big(\mathbf{P}_\ell(t)(\dot{v})\big) \\ &= -\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t)\big(\dot{v}-H(t)(v)\big). \end{aligned}$$

Por outro lado, devido a $W(t)$-ortogonalidade de $\mathfrak{h}(t)\oplus\mathfrak{v}(t)$, para todo $a\in\ell(t)$ temos que

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t)(a) = \sum_{i,j} C(t)^{ij}W(t)(a,b_j(t))b_i(t). \tag{2.24}$$

Mas, das definições de $W(t)$ e $b_j(t)$, e da ω-anti-simetria de $\mathbf{F}(t)$, obtemos que

$$W(t)(a,b_j(t)) = \omega(u_j,a) \quad \text{para todo } a\in\ell(t).$$

Logo,

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t)(a) = \sum_{i,j} C(t)^{ij}\omega(u_j,a)b_i(t)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t)(v) &= -\sum_{ij} C(t)^{ij}\omega(u_j,\dot{v}-H(t)(v))b_i(t) \\ &= -\sum_{ij} C(t)^{ij}\omega(H(t)(v),u_j)b_i(t), \end{aligned}$$

pois $u_j\in\mathbb{W}^\perp$ e $\dot{v}\in\mathbb{W}$ implicam em $\omega(u_j,\dot{v})=0$. Agora é só notarmos que

$$\begin{aligned} \omega(H(t)(v),u_j) &= \omega(H(t)(v),\mathbf{P}_\ell(t)(u_j)) \\ &= \omega(\dot{v}-\mathbf{P}_\ell(t)(\dot{v}),\mathbf{P}_\ell(t)(u_j)) \\ &= \omega(\dot{v},\mathbf{P}_\ell(t)(u_j)), \end{aligned}$$

que por sua vez é igual a $W(t)(v, \mathbf{P}_\ell(t)(u_j))$.

Para $\mathbf{T}(t)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t)(b_i(t)) &= \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t)\big(\mathbf{P}_\ell(t)(u_i)\big)\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t)\big(u_i - \dot{\mathbf{F}}(t)(u_i)\big)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k,l} C(t)^{kl}\omega(u_l, u_i - \dot{b}_i(t))b_k(t).\end{aligned}$$

Mas $\omega(u_l, u_i) = 0$, e derivando $C(t)_{il} = W(t)(b_i(t), b_l(t)) = \omega(u_l, b_i(t))$ obtemos que $\dot{C}(t)_{il} = \omega(u_l, \dot{b}_i(t))$. O resultado segue agora de

$$\sum_l C(t)^{kl}\dot{C}(t)_{il} = \big(C(t)^{-1}\dot{C}(t)\big)_{ki}.$$

Q.E.D.

2.2.4 As Fórmulas de O'Neill

Estamos agora em posição de enunciar e demonstrar duas fórmulas que relacionam os endomorfismos de Jacobi de $\ell(t)$ e $\ell_R(t)$ com os endomorfismos de O'Neill $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$, e que constituem a principal contribuição desta tese. Chamamos estas fórmulas de *Fórmulas de O'Neill*. .

Teorema 2.2. *O endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}_R(t)$ de $\ell_R(t)$ pode ser calculado em termos do endomorfismo de Jacobi $\mathbf{K}(t)$ de $\ell(t)$ e do endomorfismo de O'Neill $\mathbf{A}(t)$ pela seguinte fórmula:*

$$(\Pi|_{\mathfrak{h}(t)})^{-1} \circ \mathbf{K}_R(t) \circ \Pi|_{\mathfrak{h}(t)} - \mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(t) \circ \mathbf{K}(t)|_{\mathfrak{h}(t)} = -3\mathbf{A}(t)^2|_{\mathfrak{h}(t)}. \tag{2.25}$$

Usando a $W(t)$-ortogonalidade de $\mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{v}(t)$ e a $W(t)$-anti-simetria de $\mathbf{A}(t)$, obtemos o seguinte corolário de (2.25):

Corolário 2.1. *Para $v \in \mathfrak{h}(t)$, temos*

$$W_R(t)(\mathbf{K}_R(t)\overline{v}, \overline{v}) - W(t)(\mathbf{K}(t)v, v) = 3W(t)(\mathbf{A}(t)v, \mathbf{A}(t)v), \tag{2.26}$$

onde $W_R(t)$ denota o wronskiano de $\ell_R(t)$ e $\overline{v} := \Pi(v)$.

O segundo teorema estabelece uma fórmula para $\mathbf{K}(t)\big|_{\mathfrak{v}(t)}$ em termos de $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$. Antes de enunciá-lo, precisamos introduzir um novo conceito:

Definição 2.10. *A derivada dinâmica de uma curva de endomorfismos $\mathbf{S}(t) : \ell(t) \to \ell(t)$ é a curva de endomorfismos $\gamma(\mathbf{S})(t) : \ell(t) \to \ell(t)$ definida da seguinte maneira: dado $v \in \ell(\tau)$, seja $a(t)$ uma curva ao longo de $\ell(t)$ tal que $a(\tau) = v$. Então, definimos*

$$\gamma(\mathbf{S})(\tau)(v) = \gamma(\mathbf{S}(a))(\tau) - \mathbf{S}(\tau)(\gamma(a)(\tau)).$$

A boa definição de $\gamma(\mathbf{S})(t)$ é uma consequência direta de (2.7).

Teorema 2.3. *A componente "vertical" de $\mathbf{K}(t)\big|_{\mathfrak{v}(t)}$ é dada por*

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t) \circ \mathbf{K}(t)\Big|_{\mathfrak{v}(t)} = \Big[- \mathbf{A}(t)^2 - \mathbf{T}(t)^2 + \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(t) \circ \gamma(\mathbf{T})(t)\Big]\Big|_{\mathfrak{v}(t)} \tag{2.27}$$

Também, como corolário desta fórmula obtemos:

Corolário 2.2. *Para todo $v \in \mathfrak{v}(t)$,*

$$W(t)(\mathbf{K}(t)v, v) = W(t)(\mathbf{A}(t)v, \mathbf{A}(t)v) - W(t)(\mathbf{T}(t)^2 v, v) + W(t)(\gamma(\mathbf{T})(t)v, v). \tag{2.28}$$

Demonstração do teorema 2.2

Seguiremos as mesmas notações que a proposição 2.11. Antes de mais nada, definamos umas matrizes que ocorrerão com frequência ao longo da demonstração:

$$I_d := \begin{pmatrix} I_{n\times n} \\ O_{(m-n)\times n} \end{pmatrix} \ , \ I_e := (I_d)^T = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & O_{n\times(m-n)} \end{pmatrix}$$

$$I'_d := \begin{pmatrix} O_{n\times(m-n)} \\ I_{(m-n)\times(m-n)} \end{pmatrix} \ , \ I'_e := (I'_d)^T = \begin{pmatrix} O_{(m-n)\times n} & I_{(m-n)\times(m-n)} \end{pmatrix}.$$

Fixemos $t = \tau$. Como $\ell(\tau) \cap \mathbb{W}^\perp = \{0\}$, podemos identificar simpleticamente $\mathbb{V}$ com $\mathbb{R}^m_1 \oplus \mathbb{R}^m_2$ de modo que

$$\ell(\tau) \cap \mathbb{R}^m_2 = \{0\} \tag{2.29}$$

$$\mathcal{U} = \{f_{n+1}, \cdots, f_m\}, \tag{2.30}$$

onde $\{f_1, \cdots, f_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}_2^m$. Observe que a condição (2.30) implica em

$$\mathbb{W} = \mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m\}, \tag{2.31}$$

onde $\{e_1, \cdots, e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}_1^m$. A condição (2.29) garante que, para valores de t próximos a τ, $\ell(t)$ admite um referencial matricial da forma

$$\mathcal{A}(t) = \big(a_1(t)| \cdots |a_m(t)\big) = \begin{pmatrix} I \\ S(t) \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

onde $S(t)$ é uma matriz simétrica $m \times m$. Segue então de (2.31), que um referencial para $\mathfrak{h}(t) = \ell(t) \cap \mathbb{W}$ é dado por

$$\mathcal{A}_n(t) := \big(a_1(t)| \cdots |a_n(t)\big). \tag{2.33}$$

Por simplicidade, de agora em diante omitiremos o t com frequência. Um referencial para $\ell_R(t)$ é então dado por

$$\mathcal{A}_R := \big(\bar{a}_1| \cdots |\bar{a}_n\big),$$

onde $\bar{a}_i = \Pi(a_i)$. Agora, como $\mathbb{W}/\mathbb{W}^\perp = (\mathbb{R}_1^m)_R \oplus (\mathbb{R}_2^m)_R$ (pois $\mathbb{R}_2^m \supset \mathbb{W}^\perp$), temos que $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n, \bar{f}_1, \cdots, \bar{f}_n\}$ é uma base de Darboux de $\mathbb{W}/\mathbb{W}^\perp$, relativamente a qual

$$\mathcal{A}_R = \begin{pmatrix} I \\ I_e S I_d \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Lembremos de (2.11) que a matriz de $W(t)$ no referencial $\mathcal{A}$ é dada por $W(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = -\dot{S}$. Denotemos por $D = (D_{ij})$ a matriz $n \times n$ de $W(t)\big|_{\mathfrak{h}(t)}$ no referencial $\mathcal{A}_n$:

$$D_{ij} := W(a_i, a_j), \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{2.35}$$

Consequentemente,

$$D = -I_e \dot{S} I_d. \tag{2.36}$$

Lema 2.4. *A matriz de* $\mathbf{P}_\mathfrak{h}\big|_{\ell(t)}$ *nas bases* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{A}_n$ *é dada por* $-D^{-1} I_e \dot{S}$.

Demonstração. Como $\mathbf{P}_{\mathfrak{h}}\big|_{\ell(t)}$ é um projetor $W(t)$-ortogonal, temos que

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(v) = \sum_{1\leq i,j\leq n} D^{ij} W(v, a_j) a_i \tag{2.37}$$

para todo $v \in \ell(t)$. Fazendo $v = a_k$ em (2.37), e lembrando que $W(a_k, a_j) = -\dot{S}_{kj} = -\dot{S}_{jk}$, obtemos $\mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(a_k) = -\sum_{i=1}^{n} (D^{-1} I_e \dot{S})_{ik} a_i$. Q.E.D.

Lema 2.5. *A matriz de* $\Pi\big|_{\mathfrak{h}}^{-1} \circ \mathbf{K}_R \circ \Pi\big|_{\mathfrak{h}} - \mathbf{P}_{\mathfrak{h}} \circ \mathbf{K}\big|_{\mathfrak{h}}$ *na base* $\mathcal{A}_n$ *é dada por*

$$\frac{3}{4} D^{-1} I_e \ddot{S} \Big(-I_d D^{-1} I_e - (\dot{S})^{-1} \Big) \ddot{S} I_d.$$

Demonstração. Pela proposição 2.4, $\mathbf{K}(\mathcal{A}) = (1/2)\mathcal{A}\{\mathcal{A}, t\}$. Daí, usando (2.4) e o lema anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_{\mathfrak{h}} \circ \mathbf{K})(\mathcal{A}_n) &= (1/2)\mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(\mathcal{A}\{\mathcal{A}, t\} I_d) \\
&= (1/2)\mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(\mathcal{A})\{\mathcal{A}, t\} I_d \\
&= (1/2)\mathcal{A}_n \Big(-D^{-1} I_e \dddot{S} I_d + (3/2) D^{-1} I_e \ddot{S} (\dot{S})^{-1} \ddot{S} I_d \Big),
\end{aligned}$$

isto é, a matriz de $\mathbf{P}_{\mathfrak{h}} \circ \mathbf{K}\big|_{\mathfrak{h}}$ na base $\mathcal{A}_n$ é igual a

$$(1/2) \Big(-D^{-1} I_e \dddot{S} I_d + (3/2) D^{-1} I_e \ddot{S} (\dot{S})^{-1} \ddot{S} I_d \Big). \tag{2.38}$$

Por outro lado, a matriz de $\Pi\big|_{\mathfrak{h}}^{-1} \circ \mathbf{K}_R \circ \Pi\big|_{\mathfrak{h}}$ na base $\mathcal{A}_n$ é igual a matriz de $\mathbf{K}_R$ na base $\mathcal{A}_R$, que por sua vez, definindo $S_n := I_e S I_d$, é igual a

$$(1/2)(\dot{S}_n)^{-1} \dddot{S}_n - (3/4)(\dot{S}_n)^{-1} \ddot{S}_n (\dot{S}_n)^{-1} \ddot{S}_n. \tag{2.39}$$

Portanto, notando que $\dot{S}_n = -D$, $\ddot{S}_n = I_e \ddot{S} I_d$ e $\dddot{S}_n = I_e \dddot{S} I_d$, obtemos

$$\begin{aligned}
(2.39) - (2.38) &= (3/4) \Big(-D^{-1} \ddot{S}_n D^{-1} \ddot{S}_n - D^{-1} I_e \ddot{S} (\dot{S})^{-1} \ddot{S} I_d \Big) \\
&= (3/4) D^{-1} I_e \ddot{S} \Big(-I_d D^{-1} I_e - (\dot{S})^{-1} \Big) \ddot{S} I_d.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 2.6. *A projeção de* $\mathcal{U}$ *em* $\ell(t)$ *é dada por*

$$\mathbf{P}_{\ell}(\mathcal{U}) = (1/2)\mathcal{A}\big((\dot{S})^{-1} \ddot{S} (\dot{S})^{-1} I_d' \big). \tag{2.40}$$

Demonstração. Sejam $X = X(t)$ e $Y = Y(t)$ as matrizes $m \times (m-n)$ tais que $\mathcal{U} = \mathcal{A}X + \dot{\mathcal{A}}Y$. Logo, usando que $\mathcal{A}$ é da forma (2.32), obtemos que

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} X \\ SX + \dot{S}Y \end{pmatrix}. \tag{2.41}$$

Por outro lado, de acordo com (2.30),

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_{(m+n)\times(m-n)} \\ I_{m-n} \end{pmatrix}.$$

Comparando com (2.41), obtemos que $X = \mathrm{O}$ e $Y = (\dot{S})^{-1}I'_d$. Daí, $\mathcal{U} = \dot{\mathcal{A}}\big((\dot{S})^{-1}I'_d\big)$ e, por conseguinte, $\mathbf{F}(\mathcal{U}) = \mathcal{A}\big((\dot{S})^{-1}I'_d\big)$. Portanto, usando que $\mathbf{P}_\ell = (1/2)(\mathbf{I} - \dot{\mathbf{F}})$, e que $\dot{\mathbf{F}}(\mathcal{U}) = (d/dt)\mathbf{F}(\mathcal{U})$ (pois $\mathcal{U}$ é constante), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\ell(\mathcal{U}) &= (1/2)\big(\mathcal{U} - (d/dt)\mathbf{F}(\mathcal{U})\big) \\ &= (1/2)\mathcal{A}\big((\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d\big). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema 2.7. *A matriz de $\mathbf{A}\big|_{\mathfrak{h}}$ nas bases $\mathcal{A}_n$ e $\mathcal{B}$, e a matriz de $\mathbf{A}\big|_{\mathfrak{v}}$ nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}_n$, são dadas por*

$$\big[\mathbf{A}\big|_{\mathfrak{h}}\big]^{\mathcal{A}_n}_{\mathcal{B}} = (1/2)C^{-1}I'_e(\dot{S})^{-1}\ddot{S}I_d \tag{2.42}$$

$$\big[\mathbf{A}\big|_{\mathfrak{v}}\big]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}_n} = -(1/2)D^{-1}I_e\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d \tag{2.43}$$

Demonstração. Pelo lema anterior, $\mathbf{P}_\ell(u_j) = (1/2)\sum_{i=1}^{m}\big((\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d\big)_{ij}a_i$. Logo, substituindo esta expressão em (2.22), e fazendo $v = a_k$ para cada $k = 1, \cdots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(a_k) &= -(1/2)\sum_{r,j,i} C^{rj}\big((\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d\big)_{ij}W(a_k, a_i)b_r \\ &= (1/2)\sum_{r,j,i} C^{rj}\big((\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d\big)_{ij}(I_e\dot{S})_{ki}b_r \\ &= (1/2)\sum_{r,j} C^{rj}\big(I_e\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d\big)_{kj}b_r, \end{aligned}$$

uma vez que $W(a_k, a_j) = -\dot{S}_{ki}$, e $\dot{S}_{ki} = (I_e\dot{S})_{ki}$ (pois $k \le n$). Agora, notando que $I_e\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'$ é a transposta de $I_e'(\dot{S})^{-1}\ddot{S}I_d$, chegamos à fórmula (2.42). Para a fórmula (2.43), usamos (2.40) e o lema 2.4:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathcal{B}) &= \mathbf{P}_{\mathfrak{h}}\big(\mathbf{P}_{\ell}(\mathcal{U})\big)\\ &= (1/2)\mathbf{P}_{\mathfrak{h}}(\mathcal{A})\big((\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'\big)\\ &= -(1/2)\mathcal{A}\big(D^{-1}I_e\dot{S}\big)\big((\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'\big)\\ &= -(1/2)\mathcal{A}D^{-1}I_e\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Como consequência deste lema, obtemos que a matriz de $\mathbf{A}^2\big|_{\mathfrak{h}}$ na base $\mathcal{A}_n$ é dada por

$$\Big[\mathbf{A}^2\big|_{\mathfrak{h}}\Big]_{\mathcal{A}_n}^{\mathcal{A}_n} = -(1/4)D^{-1}I_e\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'C^{-1}I_e'(\dot{S})^{-1}\ddot{S}I_d.$$

Portanto, segue do lema 2.5 que mostrar a fórmula de O'Neill (2.25) é equivalente a mostrar que

$$(I_e\ddot{S})\big(-I_dD^{-1}I_e - (\dot{S})^{-1}\big)(\ddot{S}I_d) = (I_e\ddot{S})\big((\dot{S})^{-1}I_d'C^{-1}I_e'(\dot{S})^{-1}\big)(\ddot{S}I_d). \tag{2.44}$$

Lema 2.8. *Seja*

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$$

uma matriz $m \times m$ em blocos, com M_1 e M_4 quadradas de ordens n e $m-n$, respectivamente, e tal que M e M_4 sejam inversíveis. Então, se o bloco $I_eM^{-1}I_d$ de M^{-1} for inversível, sua inversa é dada por

$$(I_eM^{-1}I_d)^{-1} - M_1 = -M_2M_4^{-1}M_3.$$

Demonstração. É direta. Q.E.D.

Para $M = (\dot{S})^{-1}$, temos que $M_4 = -C$ e $D = -I_eM^{-1}I_d$, e portanto o lema acima nos garante que

$$-I_dD^{-1}I_e - (\dot{S})^{-1} = (\dot{S})^{-1}I_d'C^{-1}I_e'(\dot{S})^{-1}, \tag{2.45}$$

pois é claro que

$$(\dot{S})^{-1}I'_d C^{-1}I'_e(\dot{S})^{-1} = \begin{pmatrix} M_2 M_4^{-1} M_3 & -M_2 \\ -M_3 & -M_4 \end{pmatrix}.$$

Isto conclui a igualdade (2.44) e, portanto, o teorema 2.2.

Demonstração do teorema 2.3

Continuaremos usando os mesmos elementos da demonstração anterior.

Lema 2.9. *A matriz de* $\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big|_{\ell}$ *nas bases* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *é igual a* $-C^{-1}I'_e$.

Demonstração. Segue direto da fórmula (2.24), e da fórmula $\mathcal{B} = \mathbf{F}(\mathcal{U}) = \mathcal{A}\big((\dot{S})^{-1}I'_d\big)$ estabelecida na demonstração do lema 2.6. Q.E.D.

Lema 2.10. *A matriz de* $(\mathbf{P}_{\mathfrak{v}} \circ \mathbf{K})\big|_{\mathfrak{v}}$ *na base* $\mathcal{B}$ *é dada por*

$$\Big[\mathbf{P}_{\mathfrak{v}} \circ \mathbf{K}\big|_{\mathfrak{v}}\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = -(1/2)C^{-1}\ddot{C} - (1/4)C^{-1}I'_e(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d.$$

Demonstração. De $\mathcal{B} = \mathcal{A}\big((\dot{S})^{-1}I'_d\big)$, da fórmula (2.4) para o cálculo da Schwarziana $\{\mathcal{A}, t\}$, e do lema anterior, obtemos diretamente que

$$\Big[\mathbf{P}_{\mathfrak{v}} \circ \mathbf{K}\big|_{\mathfrak{v}}\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = -(1/2)(C^{-1}I'_e)\big((\dot{S})^{-1}\dddot{S} - (3/2)(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}\ddot{S}\big)((\dot{S})^{-1}I'_d). \tag{2.46}$$

Por outro lado, derivando duas vezes a igualdade $C = -I'_e(\dot{S})I'_d$ obtemos

$$I'_e(\dot{S})^{-1}\dddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d = \ddot{C} + 2I'_e(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d,$$

o qual, substituído em (2.46), fornece imediatamente o resultado. Q.E.D.

Lema 2.11. *As matrizes de* $\mathbf{A}^2\big|_{\mathfrak{v}}$ *e* $\mathbf{T}^2\big|_{\mathfrak{v}}$ *na base* $\mathcal{B}$ *são dadas por*

$$\Big[\mathbf{A}^2\big|_{\mathfrak{v}}\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (1/4)\big(C^{-1}\dot{C}\big)^2 + (1/4)C^{-1}I'_e(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d \tag{2.47}$$

$$\Big[\mathbf{T}^2\big|_{\mathfrak{v}}\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (1/4)\big(C^{-1}\dot{C}\big)^2 \tag{2.48}$$

Demonstração. A igualdade (2.48) segue direto de (2.23). Também, segue direto de (2.43) que

$$\left[\mathbf{A}^2\big|_{\mathfrak{v}}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = -(1/4)C^{-1}I_e'(\dot{S})^{-1}\ddot{S}I_dD^{-1}I_e\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'. \tag{2.49}$$

Por outro lado, de (2.45) temos

$$I_dD^{-1}I_e = -(\dot{S})^{-1} - (\dot{S})^{-1}I_d'C^{-1}I_e'(\dot{S})^{-1},$$

o qual, substituído em (2.49), fornece (2.47). Q.E.D.

Lema 2.12. *A projeção de $\dot{\mathcal{B}}$ em $\mathfrak{v}(t)$ é dada por*

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(\dot{\mathcal{B}}) = (1/2)\mathcal{B}(C^{-1}\dot{C}).$$

Demonstração. Comecemos calculando $\mathbf{P}_\ell(\dot{\mathcal{B}})$. Como $\mathcal{U}$ é constante, temos que $\dot{\mathcal{B}} = \dot{\mathbf{F}}(\mathcal{U})$, daí

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_\ell(\dot{\mathcal{B}}) &= (1/2)(\mathbf{I} - \dot{\mathbf{F}})\big(\dot{\mathbf{F}}(\mathcal{U})\big)\\
&= (1/2)(\dot{\mathbf{F}}(\mathcal{U}) - \mathcal{U})\\
&= -\mathbf{P}_\ell(\mathcal{U}),
\end{aligned}$$

que, pelo lema 2.6, é igual a $-(1/2)\mathcal{A}\big((\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'\big)$. Agora é só usarmos que $\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(\dot{\mathcal{B}}) = \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big(\mathbf{P}_\ell(\dot{\mathcal{B}})\big)$, e o lema 2.9, e a igualdade $\dot{C} = I_e'(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I_d'$, para chegarmos ao resultado. Q.E.D.

Lema 2.13. *A matriz de $\mathbf{P}_{\mathfrak{v}} \circ \gamma(\mathbf{T})\big|_{\mathfrak{v}}$ na base $\mathcal{B}$ é dada por*

$$\left[\mathbf{P}_{\mathfrak{v}} \circ \gamma(\mathbf{T})\big|_{\mathfrak{v}}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = (1/2)(C^{-1}\dot{C})^2 - (1/2)C^{-1}\ddot{C}.$$

Demonstração. Para o cálculo de $\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big(\gamma\big(\mathbf{T}(\mathcal{B})\big)\big)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathbf{T}(\mathcal{B}) &= -(1/2)\frac{d}{dt}\,\mathcal{B}(C^{-1}\dot{C})\\
&= (1/2)\mathcal{B}\big((C^{-1}\dot{C})^2 - C^{-1}\ddot{C}\big) - (1/2)\dot{\mathcal{B}}(C^{-1}\dot{C}).
\end{aligned}$$

Portanto, como $\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big(\gamma\big(\mathbf{T}(\mathcal{B})\big)\big) = \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big((d/dt)\,\mathbf{T}(\mathcal{B})\big)$, aplicando o lema anterior obtemos que

$$\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big(\gamma\big(\mathbf{T}(\mathcal{B})\big)\big) = (1/4)\mathcal{B}\big((C^{-1}\dot{C})^2 - (1/2)C^{-1}\ddot{C}\big).$$

Para o cálculo de $\mathbf{T}(\gamma(\mathcal{B}))$, notemos primeiro que $\mathbf{T}\big|_{\mathfrak{h}} = 0$ implica em $\mathbf{T}(\gamma(\mathcal{B})) = \mathbf{T}\big(\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}(\dot{\mathcal{B}})\big)$. Logo, do lema anterior e de $\mathbf{T}(\mathcal{B}) = -(1/2)\mathcal{B}(C^{-1}\dot{C})$, chegamos a

$$\mathbf{T}(\gamma(\mathcal{B})) = -(1/4)\mathcal{B}(C^{-1}\dot{C})^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big(\gamma(\mathbf{T})(\mathcal{B})\big) &= \mathbf{P}_{\mathfrak{v}}\big(\gamma\big(\mathbf{T}(\mathcal{B})\big)\big) - \mathbf{T}(\gamma(\mathcal{B})) \\
&= (1/2)\mathcal{B}\big((C^{-1}\dot{C})^2 - (1/2)C^{-1}\ddot{C}\big).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Segue então dos lemas 2.11 e 2.13 que

$$\Big[-\mathbf{A}^2\big|_{\mathfrak{v}} - \mathbf{T}^2\big|_{\mathfrak{v}} + \mathbf{P}_{\mathfrak{v}} \circ \gamma(\mathbf{T})\big|_{\mathfrak{v}}\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = -(1/2)C^{-1}\ddot{C} - (1/4)C^{-1}I'_e(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}\ddot{S}(\dot{S})^{-1}I'_d,$$

o qual, de acordo com o lema 2.10, é igual a $\Big[\mathbf{P}_{\mathfrak{v}} \circ \mathbf{K}\big|_{\mathfrak{v}}\Big]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Isto conclui a demonstração do teorema 2.3.

Capítulo 3

Planos Móveis Regulares e suas Reduções Simpléticas

3.1 Planos móveis regulares

Seja $\mathscr{P} = (X, \Delta_{2m}, \Delta_m, F_t)$ um plano móvel, e denotemos por S o campo associado ao fluxo F_t. Dado um referencial $U_1, \cdots, U_m$ de Δ_m, definido em torno de um ponto x de X, a ele associamos o seguinte referencial

$$a_1(t) = \big({F_t}^* U_1\big)(x), \cdots, a_m(t) = \big({F_t}^* U_m\big)(x)$$

da curva de Jacobi $\ell_x(t)$ de $\mathscr{P}$. Notando então que a derivada $\dot{a}_i(t)$ se calcula por

$$\begin{aligned} \dot{a}_i(t) &= \frac{d}{dt}\big({F_t}^* U_i\big)(x) \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0}\big({F_{t+s}}^* U_i\big)(x) \\ &= \big({F_t}^*[S\,,\,U_i]\big)(x), \end{aligned} \tag{3.1}$$

concluímos que:

Lema 3.1. *A curva $\ell_x(t)$ é fanning se, e somente se, ao longo da órbita $t \mapsto F_t(x)$,*

$$U_1, \cdots, U_m, [S\,,\,U_1], \cdots, [S\,,\,U_m] \tag{3.2}$$

for um referencial para Δ_{2m}. Em particular, esta última condição independe da escolha do referencial $\{U_i\}$.

Diremos que o plano móvel $\mathscr{P}$ é *regular* se, para cada referencial (local) $\{U_i\}$ de Δ_m, (3.2) for um referencial para Δ_{2m}.

Suponhamos que $\mathscr{P}$ seja regular. Então, o seguinte campo de endomorfismos de Δ_{2m}[1],

$$\mathcal{F}\big(U_i\big) = 0, \quad \mathcal{F}\big([S\,,U_i]\big) = U_i, \tag{3.3}$$

$i = 1, \cdots, m$, dado em termos de referenciais locais $\{U_i\}$ de Δ_m, está bem definido; de fato, para cada x em X, é claro que

$$\big({F_t}^*\mathcal{F}\big)_x = \mathbf{F}(t), \tag{3.4}$$

onde $\mathbf{F}(t)$ é o endomorfismo fundamental de $\ell_x(t)$.

Transportando para $\mathscr{P}$ os invariantes geométricos de suas curvas de Jacobi, obtemos os seguintes invariantes geométricos de um plano móvel regular:

Definição 3.1. *Se $\mathscr{P}$ é regular, definimos a sua* distribuição horizontal $\mathcal{H} \subset \Delta_{2m}$ *e o seu* endomorfismo de curvatura $\mathcal{K} \in C^\infty(\mathrm{End}(\Delta_m) \to X)$ *por*

$$\mathcal{H}_x := h_x(0) \ , \ \mathcal{K}_x(\cdot) := \mathbf{K}_x(0)(\cdot)$$

para todo $x \in X$, onde $h_x(t)$ e $\mathbf{K}_x(t)$ são a curva horizontal e o endomorfismo de Jacobi, respectivamente, associados à curva de Jacobi $\ell_x(t)$.

3.1.1 Os casos lagrangeanos e legendrianos

Suponhamos que o plano móvel $\mathscr{P}$ seja lagrangeano. Considerações análogas às que faremos aplicam-se ao caso legendriano. Dados campos U, V tangentes a Δ_m, definimos

$$\Theta(U, V) = \omega([S\,, U]\,, V), \tag{3.5}$$

[1]isto é, $\mathcal{F}$ é uma seção do fibrado $\mathrm{End}(\Delta_m) \to X$.

onde ω é a forma simplética de X. Então, (3.5) é simétrica e tensorial em U e V; isto é, Θ é uma seção do fibrado

$$\mathrm{Sym}(\Delta_m) \to X.$$

De fato, para x em X, denotando por $a(t)$ e $b(t)$ as curvas em $\ell_x(t)$ correspondentes a U e V, segue de (3.1) que

$$\begin{aligned} \omega_{F_t(x)}\big([S\,,U]\,,V\big) &= \omega_x\big({F_t}^*[S\,,U]\,,{F_t}^*V\big) \\ &= \omega_x\big(\dot a(t)\,,b(t)\big), \end{aligned}$$

que, por sua vez, é igual ao wronskiano $W(t)$ de $\ell_x(t)$ calculado no par $(a(t), b(t))$. Portanto:

Lema 3.2. *Seja $W(t)$ o wronskiano de $\ell_x(t)$. Então, para cada t,*

$$(DF_t)_x{}^*\,\Theta_{F_t(x)} = W(t),$$

onde $(DF_t)_x$ representa a sua restrição a $\ell_x(t)$. Em particular, $\mathscr{P}$ é regular se, e somente se, Θ_x for não degenerada para todo x em X.

Encerramos esta seção com a definição da forma quadrática de curvatura associada a um plano móvel lagrangeano regular:

Definição 3.2. *A* forma quadrática de curvatura *de um plano móvel lagrangeano regular $\mathscr{P} = (X, \Delta_m, F_t)$ é a seção do fibrado de formas quadráticas* $\mathrm{Sym}(\Delta_m) \to X$ *definida por*

$$\Theta(\mathcal{K}(\cdot), \cdot).$$

3.2 Reduções simpléticas de planos móveis

Seja $\mathcal{N}$ uma subvariedade coisotrópica de uma variedade simplética (X, ω), isto é, $\mathcal{N}$ é tal que

$$T_x\mathcal{N} \subset T_xX \quad \text{é coisotrópico } \forall x \in \mathcal{N}.$$

O processo de redução simplética de X por $\mathcal{N}$ é descrito pelo seguinte resultado; veja [MS98] para mais detalhes.

Proposição-Definição 3.1. *A distribuição* $x \mapsto T_x\mathcal{N}^\perp \subset T_x\mathcal{N}$ *definida em* $\mathcal{N}$*, dita* distribuição canônica*, é integrável. Sejam* $\mathcal{N}_R$ *o espaço das folhas,* $\Pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{N}_R$ *a aplicação quociente, e admitamos que* $\mathcal{N}_R$ *tenha uma estrutura diferenciável, relativamente a qual* Π *seja uma submersão. Então,* ω *desce a uma forma simplética* ω_R *em* $\mathcal{N}_R$*, o qual, munido de* ω_R*, é dito a* redução simplética de (X, ω) por $\mathcal{N}$*. Além disso, se* F_t *é um fluxo simplético em* X *que deixa* $\mathcal{N}$ *invariante, ele desce a um fluxo simplético* $\hat{F}_t$ *em* $\mathcal{N}_R$*.*

Suponhamos agora que, além da subvariedade coisotrópica $\mathcal{N}$, temos definido em X um plano móvel lagrangeano

$$\mathscr{P} = (X, L, F_t)$$

tal que $\mathcal{N}$ é invariante pelo fluxo F_t, e L cumpre

$$\Pi(x) = \Pi(y) \ \ (x, y \in \mathcal{N}) \ \ \Rightarrow \ \ D\Pi(L_x \cap T_x\mathcal{N}) = D\Pi(L_y \cap T_y\mathcal{N}).$$

Estas condições nos garantem que F_t desce a um fluxo simplético $\hat{F}_t$ em $\mathcal{N}_R$, e L desce a uma distribuição L_R em $\mathcal{N}_R$ que, segundo §2.2.1, é ainda lagrangeana. Deste modo, obtemos por redução simplética um novo plano móvel lagrangeano

$$\mathscr{P}_R = (\mathcal{N}_R, L_R, \hat{F}_t).$$

A demonstração da proposição seguinte é imediata:

Proposição 3.1. *Sejam* $\ell_x(t)$ *e* $\ell_{\Pi(x)}(t)$ *as curvas de Jacobi de* $\mathscr{P}$ *e* $\mathscr{P}_R$*, baseadas em* $x \in \mathcal{N}$ *e* $\Pi(x)$*, respectivamente. Então, identificando* $T_{\Pi(x)}\mathcal{N}_R$ *com* $T_x\mathcal{N}/T_x\mathcal{N}^\perp$*, temos que* $\ell_{\Pi(x)} = \lambda \circ \ell_x$*, onde*

$$\lambda : \Lambda(T_xX) \longrightarrow \Lambda(T_x\mathcal{N}/T_x\mathcal{N}^\perp)$$

é a aplicação (2.13).

Portanto, como consequência da proposição 2.7 e do corolário 2.1, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Se* $\mathscr{P}$ *for regular e, além do mais, para cada* x *em* $\mathcal{N}$ *tivermos*

1. $L_x \cap T_x\mathcal{N}^\perp = \{0\}$*;*

2. A restrição de Θ_x *a* $L_x \cap T_x\mathcal{N}$ *é não-degenerada,*

então $\mathscr{P}_R$ *será também regular. Neste caso, existe um campo de endomorfismos* $\mathcal{A}$ *de* L *que relaciona as formas quadráticas de curvatura* $\Theta(\mathcal{K}(\cdot),\cdot)$ *e* $\Theta_R(\mathcal{K}_R(\cdot),\cdot)$*, de* $\mathscr{P}$ *e* $\mathscr{P}_R$ *respectivamente, através da equação*

$$\Theta_R(\mathcal{K}_R(\overline{v}),\overline{v}) = \Theta(\mathcal{K}(v),v) + 3\Theta(\mathcal{A}(v),\mathcal{A}(v)),$$

para todo $v \in L \cap T\mathcal{N}$*.*

Nota 3.1. No contexto de planos móveis legendrianos, podemos usar a noção de redução de contato desenvolvida no apêndice A para chegarmos a construções e resultados completamente análogos aos aqui obtidos.

Capítulo 4

Sprays, Geometria de Finsler e Planos Móveis Associados a Fluxos Geodésicos

4.1 Notações

Ao longo de todo este capítulo, suporemos fixada uma variedade diferenciável M, de dimensão m. Ademais,

- T_0M representará o fibrado tangente de M com a seção nula removida;
- $\pi : TM \to M$, $\pi_T : TTM \to TM$ e $\varrho : T^*M \to M$ denotarão as respectivas projeções canônicas;
- Por $\mathcal{V}T_0M$ denotaremos o fibrado tangente vertical, isto é, a distribuição em T_0M dada pelos espaços tangentes às fibras de π;
- Para cada $v \in TM$, i_v denotará o isomorfismo tautológico

$$i_v : T_{\pi(v)}M \to \mathcal{V}_vT_0M, \quad i_v(u) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(v + t \cdot u);$$

- Usaremos C para representar o campo de Liouville, isto é, o seguinte campo de vetores tautológico em TM

$$C_v = i_v(v), \quad \text{para cada } v \in TM;$$

- $\mathscr{L}_X T$ representará a derivada de Lie de um tensor T com respeito a um campo X;

- Um sistema de coordenadas locais (x) em M induz sistemas de coordenadas (x, y) e (x, p) em TM e T^*M, respectivamente. Tais sistemas serão chamados de *coordenadas locais naturais.*

4.2 Sprays, conexões e curvaturas

Estrutura quase-tangente e sprays

Definição 4.1. *A* estrutura quase-tangente *de TM é a $1-$forma vetorial em TM, $\mathscr{J} : TTM \to \mathcal{V}TM$, definida por*

$$\mathscr{J}(X) = i_v(D\pi(X)), \quad \textit{para } X \in T_vTM.$$

Em coordenadas locais naturais (x, y),

$$\mathscr{J}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \mathscr{J}(\frac{\partial}{\partial y^i}) = 0. \tag{4.1}$$

Definição 4.2. *Um* semi-spray*, ou* equação diferencial de ordem 2*, em M, é um campo S em TM, C^∞ em T_0M, tal que*

$$\mathscr{J}(S) = C. \tag{4.2}$$

Se, além do mais, tivermos

$$[C, S] = S, \tag{4.3}$$

diremos que S é um spray*.*

Nota 4.1. A condição (4.2) é equivalente às curvas integrais de S serem da forma $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$, para certas curvas γ em M. Tais curvas γ são as *geodésicas* de S. A condição (4.3) é equivalente a $Dh_\lambda(S_v) = S_{\lambda v}$, para todos $v \in T_0M$ e $\lambda > 0$, onde

$$h_\lambda : T_0M \to T_0M$$

é multiplicação por λ.

Em coordenadas locais naturais (x, y), um semi-spray S assume a forma

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{4.4}$$

onde as G^i's são C^∞ para $y \neq 0$, e a condição (4.3) de ser spray é equivalente a seguinte homogeneidade das G^i's:

$$G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y), \quad \lambda > 0.$$

O seguinte resultado será utilizado mais adiante:

Proposição 4.1. *Se S é um semi-spray, e $X \in \mathfrak{X}(T_0M)$ é vertical, então*

$$\mathscr{J}([X, S]) = X. \tag{4.5}$$

Consequentemente, para todo $X \in \mathfrak{X}(T_0M)$,

$$X = \mathscr{J}([X, S]) + [\mathscr{J}(X), S] - \mathscr{J}([[\mathscr{J}(X), S], S]). \tag{4.6}$$

Demonstração. Como $\mathscr{J}$ se anula em vetores verticais, (4.5) é uma equação tensorial em X vertical, logo basta verificá-la nos campos coordenados $\partial/\partial y^i$ referentes a um sistema de coordenadas naturais. Fazendo o colchete de $\partial/\partial y^i$ com o segundo membro de (4.4), obtemos

$$\left[\frac{\partial}{\partial y^i}, S\right] = \frac{\partial}{\partial x^i} - 2\frac{\partial G^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j},$$

e logo, por (4.1), $\mathscr{J}([\partial/\partial y^i, S]) = \partial/\partial y^i$. Para mostrarmos (4.6) note que, para todo $X \in \mathfrak{X}(T_0M)$, $\widetilde{X} = \mathscr{J}(X)$ satisfaz (4.5), daí $\mathscr{J}(X - [\mathscr{J}(X), S]) = 0$, isto é, $X - [\mathscr{J}(X), S]$ é vertical. Logo, podemos substituir X por $X - [\mathscr{J}(X), S]$ em (4.5) chegando assim a (4.6). Q.E.D.

Conexões e curvaturas

Definição 4.3. *Uma* conexão à Grifone *em M é uma $1-$forma vetorial Γ em T_0M, de classe C^∞, tal que $-\Gamma$ seja uma reflexão em torno de $\mathcal{V}T_0M$. Em símbolos,*

$$\Gamma^2 = \mathbf{I}, \quad \text{e} \;\; \mathrm{Ker}(\Gamma + \mathbf{I}) = \mathcal{V}T_0M.$$

Dizemos que uma conexão Γ é homogênea, *quando*

$$\mathscr{L}_C\Gamma = 0.$$

Os autoespaços correspondentes ao autovalor 1 de Γ formam uma *conexão à Ehresmann* em $T_0M \to M$, isto é, eles formam uma distribuição $\mathcal{H}T_0M$ em T_0M, de classe C^∞, que é complementar à $\mathcal{V}T_0M$:

$$TT_0M = \mathcal{H}T_0M \oplus \mathcal{V}T_0M. \tag{4.7}$$

Chamamos a distribuição $\mathcal{H}T_0M$ de *distribuição horizontal*.

Nota 4.2. Em termos de $\mathcal{H}T_0M$, Γ é homogênea se e somente se $\mathcal{H}T_0M$ for invariante por Dh_λ, para todo $\lambda > 0$ (veja a nota 4.1).

Dar uma Γ é equivalente a dar uma tal $\mathcal{H}T_0M$. Relativamente à decomposição (4.7), temos definidos projetores

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}} : TT_0M \to \mathcal{H}T_0M, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{V}} : TT_0M \to \mathcal{V}T_0M, \tag{4.8}$$

ditos, respectivamente, projetores horizontal e vertical. Temos então a seguinte identificação:

$$\begin{array}{rcl} T_vT_0M & \overset{\approx}{\longrightarrow} & T_{\pi(v)}M \;\oplus\; T_{\pi(v)}M \\ X & \longmapsto & \Big(D\pi(X)\,,\, i_v^{-1}(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X))\Big). \end{array} \tag{4.9}$$

Relativamente à coordenadas locais naturais (x, y), definimos os *coeficientes* $\Gamma_i^j(x, y)$ de Γ por

$$\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \Gamma_i^j(x, y)\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Em termos de seus coeficientes, Γ é homogênea se e somente se

$$\Gamma_i^j(x, \lambda y) = \lambda \Gamma_i^j(x, y), \quad \text{para todos } i, j, \text{ e } \lambda > 0.$$

Definição 4.4. *Uma conexão Γ é dita* simétrica*, quando seus coeficientes satisfazem a*

$$\frac{\partial \Gamma_i^j}{\partial y^k} = \frac{\partial \Gamma_k^j}{\partial y^i}, \quad \textit{para todos i,j,k;}$$

veja [*Gri72a*] *para uma definição intrínseca.*

É claro que a toda conexão Γ está associado um único semi-spray S que lhe é horizontal. Segue das notas 4.1 e 4.2, que se Γ for homogênea, então S será um spray. Reciprocamente, temos:

Teorema 4.1. *Para todo spray S, existe uma única conexão homogênea e simétrica Γ_S que possui S como spray associado, a saber*

$$\Gamma_S = -\mathscr{L}_S \mathscr{J}. \tag{4.10}$$

Em [Gri72a], Γ_S é dita a *conexão canônica* associada ao spray S.

Demonstração. Provaremos apenas que a Γ_S dada por (4.10) satisfaz as propriedades requeridas. Para a unicidade, veja [Gri72a].

1. $(\Gamma_S)^2 = \mathbf{I}$: Pela definição de $\mathscr{L}_S \mathscr{J}$, e por termos $\mathscr{J}^2 = 0$,

$$\begin{aligned}(\Gamma_S)^2 X &= (\mathscr{L}_S \mathscr{J})\Big([S, \mathscr{J}(X)] - \mathscr{J}([S, X])\Big) \\ &= \Big([S, \mathscr{J}[S, \mathscr{J}(X)]] - \mathscr{J}[S, [S, \mathscr{J}(X)]]\Big) - \Big(-\mathscr{J}[S, \mathscr{J}[S, X]]\Big).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Agora, de acordo com (4.5), $\mathscr{J}([S, \mathscr{J}(X)]) = -\mathscr{J}(X)$, e $\mathscr{J}([S, \mathscr{J}([S, X])]) = -\mathscr{J}([S, X])$, donde, substituindo em (4.11), obtemos o segundo membro de (4.6), que por sua vez é igual a X.

2. $\operatorname{Ker}(\Gamma_S + \mathbf{I}) = \mathcal{V}TM$: Pela definição de Γ_S, $\Gamma_S(X) = -X$ se e somente se

$$[S, \mathscr{J}(X)] - \mathscr{J}([S, X]) = X. \tag{4.12}$$

Se X for vertical, então $\mathscr{J}(X) = 0$ e (4.12) segue de (4.5). Por outro lado, aplicando $\mathscr{J}$ à igualdade (4.12), e usando que $\mathscr{J}^2 = 0$ e $\mathscr{J}([S, \mathscr{J}(X)]) = -\mathscr{J}(X)$, conclui-se que $\mathscr{J}(X) = 0$, isto é, X é vertical.

3. $\Gamma_S(S) = S$: $\Gamma_S(S) = -[S, \mathscr{J}(S)] + \mathscr{J}([S, S]) = -[S, C]$, que, devido a homogeneidade de S, é igual a S.

4. Homogeneidade e simetria de Γ_S: Relativamente a coordenadas naturais, fazendo $X = \partial/\partial x^i$ em

$$\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \Gamma_S)(X) = \frac{1}{2}\big(X + [S, \mathscr{J}(X)] - \mathscr{J}([S, X])\big),$$

e usando (4.1), e a expressão (4.4) para S, obtemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(\partial/\partial x^i) = \partial G^j/\partial y^i \partial/\partial y^j$, de onde segue que

$$\Gamma_i^j(x, y) = \frac{\partial G^j}{\partial y^i}(x, y). \tag{4.13}$$

Como $G^j(x, y)$ é homogênea de grau 2 em y, $\Gamma_i^j(x, y)$ é homogênea de grau 1 em y, e como $G^j(x, y)$ é C^∞ em $y \neq 0$, Γ_S é simétrica. Q.E.D.

Encerraremos com a definição de curvatura:

Definição 4.5. *Para cada conexão Γ em M, define-se a sua* curvatura *como sendo a seguinte $2-$forma em T_0M, a valores em $\mathcal{V}TM$:*

$$R(X, Y) = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}\big([\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(X), \mathcal{P}_{\mathcal{H}}(Y)]\big), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(T_0M). \tag{4.14}$$

Derivação covariante e o endomorfismo de curvatura

Daqui por diante, suporemos fixado um spray S em M.

O contexto mais adequado para tratar de derivações covariantes associadas a sprays não-quadráticos (isto é, que não são C^∞ na seção nula), é o de conexões lineares em

$$\pi_T : \mathcal{V}T_0M \longrightarrow T_0M.$$

Definição 4.6. *Uma conexão linear ∇^* em $\pi_T : \mathcal{V}T_0M \to T_0M$ é dita* simétrica, *quando*

$$\nabla^*_X \mathscr{J}(Y) - \nabla^*_Y \mathscr{J}(X) = \mathscr{J}([X, Y]), \quad \text{para todos } X, Y \in \mathfrak{X}(T_0M). \tag{4.15}$$

Também, dizemos que ∇^* *é um* levantamento *de uma dada conexão* Γ *em* M, *se*

$$\mathrm{Ker}(X \mapsto \nabla^*_X C) = \mathcal{H}T_0 M. \tag{4.16}$$

Fixemos, até o final desta seção, um levantamento simétrico ∇^* *qualquer de* Γ_S.

Note que, fazendo $Y = S$ e X vertical em (4.15), e usando (4.2) e (4.5), conclui-se que a condição (4.16) torna-se equivalente a

$$\nabla^*_X C = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X), \quad X \in TT_0M. \tag{4.17}$$

Consequentemente,

$$\nabla^*_S \mathscr{J}(X) = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X) - \mathscr{J}([X,S]), \quad X \in \mathfrak{X}(T_0M), \tag{4.18}$$

de onde vemos que *aplicar* ∇^* *na direção de* S *não depende da particular escolha de* ∇^*.

Lema 4.1. *Alternativamente, temos a seguinte fórmula:*

$$\nabla^*_S \mathscr{J}(X) = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}([S, \mathscr{J}(X)]), \quad X \in \mathfrak{X}(T_0M). \tag{4.19}$$

Demonstração. Pela definição de $\mathscr{L}_S \mathscr{J}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{V}}([S, \mathscr{J}(X)]) &= \mathcal{P}_{\mathcal{V}}\Big((\mathscr{L}_S \mathscr{J})(X) + \mathscr{J}([S,X])\Big) \\ &= -\mathcal{P}_{\mathcal{V}}(\Gamma_S(X)) + \mathscr{J}([S,X]). \end{aligned}$$

Basta agora notar que $\Gamma_S = \mathcal{P}_{\mathcal{H}} - \mathcal{P}_{\mathcal{V}}$, para chegarmos a (4.18). Q.E.D.

Notação 4.1. Dada uma curva $\gamma(t)$ em M, e campos $V(t)$ e $X(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ e $\dot\gamma(t)$, respectivamente, por conveniência de notação representaremos por $V(t)^\vee$ e $X(t)^\wedge$ os seguintes campos ao longo de $\dot\gamma(t)$ e $\gamma(t)$, respectivamente:

$$V(t)^\vee = i_{\dot\gamma(t)}(V(t)) \quad , \quad X(t)^\wedge = i^{-1}_{\dot\gamma(t)}(X(t)).$$

Definição 4.7. *A* derivada covariante, *com respeito à* ∇^*, *de um campo* $V(t)$ *ao longo de uma curva regular* γ *em* M, *é o campo* $V'(t)$, *ao longo de* γ, *dado por*

$$V'(t) = \Big(\nabla^*_X V(t)^\vee\Big)^\wedge, \tag{4.20}$$

onde X *é o vetor velocidade da curva* $t \mapsto \dot\gamma(t)$. *Dizemos que* $V(t)$ *é paralelo, com respeito à* ∇^*, *quando* $V'(t) = 0$.

Note que se, $\gamma(t)$ for uma geodésica de S, teremos $X = S$ em (4.20) e portanto, por (4.19):

Proposição 4.2. *Derivar covariantemente ao longo de uma geodésica não depende da particular escolha de ∇^*, mas apenas do spray S. De fato, se V é um campo ao longo de γ, então*[1]

$$V'(t) = \Big(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}\big(\mathscr{L}_S V(t)^{\vee}\big)\Big)^{\wedge}. \tag{4.21}$$

Seja R^* o tensor de curvatura de ∇^*,

$$R^*(X,Y)Z = \nabla^*_{[X,Y]}Z - [\nabla^*_X, \nabla^*_Y]Z, \tag{4.22}$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(T_0M)$, com Z vertical.

Definição 4.8. *Para cada $v \in T_0M$, define-se a* curvatura na direção v, *$R^*_v : T_{\pi(v)}M \times T_{\pi(v)}M \times T_{\pi(v)}M \to T_{\pi(v)}M$, por*

$$R^*_v(u_1, u_2)w = i_v^{-1}\Big(R^*(X_1, X_2)i_v(w)\Big),$$

onde X_1 e X_2 são levantadas horizontais, em v, de u_1 e u_2, respectivamente.

O endomorfismo de curvatura na direção v,

$$R_v : T_{\pi(v)}M \longrightarrow T_{\pi(v)}M,$$

é definido por

$$R_v(u) = R^*_v(v, u)v.$$

Segue das definições, que

$$R_v(u) = i_v^{-1}\Big(R^*(S, X)C\Big), \tag{4.23}$$

onde X é o levantamento horizontal, em v, de u.

[1]como $V(t)^{\vee}$ está definido apenas ao longo da curva integral $t \mapsto \dot\gamma(t)$ de S, é conveniente usarmos $\mathscr{L}_S V(t)^{\vee}$ ao invés de $[S\,, V(t)^{\vee}]$.

Lema 4.2. *Se X é horizontal,*

$$R^*(S,X)C = R(S,X). \tag{4.24}$$

Em particular, o endomorfismo de curvatura independe da escolha de ∇^*. *Também, se X é vertical, $R^*(S,X)C = 0$, logo, a hipótese de horizontalidade de X em* (4.23) *é desnecessária.*

Demonstração. Seja X horizontal. De acordo com (4.17), e devido a S ser horizontal, temos que $\nabla^*_S C = 0$, $\nabla^*_X C = 0$, e $\nabla^*_{[S,X]} C = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}([S,X])$. Logo, pela definição de $\mathbf{R}^*$, $R^*(S,X)C = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}([S,X])$, que por sua vez é igual a $R(S,X)$, já que S e X são horizontais. Se X é vertical, $\nabla^*_X C = X$, portanto $R^*(S,X)C = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}([S,X]) - \nabla^*_S X$, que, de acordo com o lema 4.1, é igual a zero. Q.E.D.

Nota 4.3. Relativamente a coordenadas naturais, se escrevermos

$$\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \Gamma^k_{ij}(x,y)\frac{\partial}{\partial y^k}, \quad \nabla^*_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = C^k_{ij}(x,y)\frac{\partial}{\partial y^k},$$

então a condição de simetria de ∇^* é equivalente a $C^k_{ij} = 0$ e $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, para todos i,j,k. E, sendo simétrica, ela é um levantamento de uma Γ se e somente se

$$\Gamma^j_i(x,y) = y^k \Gamma^j_{ik}(x,y), \quad \text{para todos } i,j. \tag{4.25}$$

A *conexão de Berwald* de um Spray S é o levantamento simétrico de Γ_S dado por

$$C^k_{ij}(x,y) = 0, \quad \Gamma^k_{ij}(x,y) = \frac{\partial \Gamma^k_i}{\partial y^j}(x,y), \quad \text{para todos } i,j,k.$$

Note então que a igualdade (4.25) sai como consequência da relação de Euler aplicada à função homogênea $\Gamma^j_i(x,y)$ de grau 1 em y, enquanto que a simetria dos Γ^k_{ij} segue da simetria de Γ_S.

Campos de Jacobi

Para cada $v \in T_0M$, representaremos por $\gamma_v(t)$ a geodésica que, em tempo 0, tem velocidade v.

Definição 4.9. *Seja γ uma geodésica. Dizemos que um campo J ao longo de γ é um* campo de Jacobi*, se ele for o campo variacional correspondente a alguma variação*

$$\Upsilon : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

de γ por geodésicas $\gamma_s(t) = \Upsilon(t,s)$, com $\gamma_0 = \gamma$.

Proposição 4.3. *Um campo J ao longo de uma geodésica γ é de Jacobi se, e somente se, ele satisfizer a seguinte equação diferencial linear de ordem 2:*

$$J''(t) + R_{\dot\gamma(t)}(J(t)) = 0 \tag{4.26}$$

Demonstração. Fixado um levantamento simétrico ∇^* de Γ_S, por definição temos

$$J''(t) = \left(\nabla^*_S \nabla^*_S J(t)^\vee\right)^\wedge. \tag{4.27}$$

Suponhamos que J seja o campo de Jacobi associado a uma variação Υ, e a "levantemos" à T_0M: $\overline{\Upsilon} : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_0M$, $\quad \overline{\Upsilon}(t,s) = \dot\gamma_s(t)$. Denotando, respectivamente, por $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial s$ os campos $\partial\overline{\Upsilon}/\partial t$ e $\partial\overline{\Upsilon}/\partial s$ ao longo de $\overline{\Upsilon}$, notemos que

$$\partial/\partial t = S_{\dot\gamma_s(t)}, \quad \text{e} \quad \mathscr{J}(\partial/\partial s) = (\partial\Upsilon/\partial s)^\vee,$$

onde, aqui, $^\vee = i_{\dot\gamma_s(t)}$. Logo, fazendo $X = \partial/\partial t$ e $Y = \partial/\partial s$ em (4.15), e $X = \partial/\partial t$, $Y = \partial/\partial s$, $Z = C$ em (4.22), e lembrando que $\nabla^*_S C = 0$, obtemos, respectivamente, que

$$\nabla^*_S(\partial\Upsilon/\partial s)^\vee = \nabla^*_{\partial/\partial s} C, \quad \text{e} \quad \nabla^*_S \nabla^*_{\partial/\partial s} C = -R^*(S, \partial/\partial s)C.$$

Portanto, $\nabla^*_S\nabla^*_S(\partial\Upsilon/\partial s)^\vee = \nabla^*_S\nabla^*_{\partial/\partial s}C = -R^*(S,\partial/\partial s)C$. Fazendo $s = 0$ e substituindo em (4.27), e notando que $\partial/\partial s$ é uma levantada de $\partial\Upsilon/\partial s$, chegamos à equação (4.26). A recíproca é consequência do lema a seguir. Q.E.D.

Lema 4.3. *Seja $X \in T_vT_0M$, e consideremos uma curva $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_0M$ que, em tempo 0, tem velocidade X. Então, sendo J o campo de Jacobi ao longo de γ_v associado à variação $\Upsilon(t,s) = \gamma_{\xi(s)}(t)$, temos que*

$$D\pi(X) = J(0), \quad e \quad \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(X) = i_v(J'(0)). \tag{4.28}$$

Demonstração. A primeira igualdade é clara. Para a segunda, consideremos, como na demonstração da proposição anterior, os campos $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial s$ ao longo de $\overline{\Upsilon}$. Como $\mathscr{J}(\partial/\partial s) = (\partial\Upsilon/\partial s)^{\vee}$, e $[\partial/\partial s, S] = 0$ (pois $S_{\dot{\gamma}_{\xi(s)}(t)} = \partial/\partial t$), fazendo $X = \partial/\partial s$ em (4.18), chegamos a

$$\nabla^*_S(\partial\Upsilon/\partial s)^{\vee} = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(\partial/\partial s). \tag{4.29}$$

O resultado segue então de fazermos $(t,s) = (0,0)$ em (4.29), uma vez que $X = (\partial/\partial s)(0,0)$

Q.E.D.

A diferencial do fluxo geodésico

Denotamos por F_t o *fluxo geodésico*, isto é, o fluxo associado a S. Procederemos a seguir com o cálculo de DF_t.

Para cada vetor $v \in T_0M$, representamos por $\mathcal{J}_v$ o espaço vetorial dos campos de Jacobi ao longo de γ_v. Note que a correspondência

$$\begin{aligned} T_vT_0M &\longrightarrow \mathcal{J}_v \\ X &\longmapsto J = \text{campo variacional} \\ &\qquad \text{de } \Upsilon(t,s) = \gamma_{\xi(s)}(t), \end{aligned} \tag{4.30}$$

onde a curva ξ é tal que $\dot{\xi}(0) = X$, está bem definida pois, pelo lema 4.3, J é caracterizado por (4.28), e trata-se de um isomorfismo de espaços vetoriais.

Proposição 4.4. *Relativamente à identificação* (4.30)*, a diferencial de F_{t_0}, em $v \in T_0M$, se calcula por:*

$$DF_{t_0}(J) = J_{t_0} \in \mathcal{J}_w,$$

onde $w = \dot{\gamma}_v(t_0)$, e J_{t_0} é o campo de Jacobi ao longo de γ_w dado por $J_{t_0}(t) = J(t+t_0)$. Em temos da identificação (4.9), isto significa:

$$DF_{t_0}\big(J(0)\,,\,J'(0)\big) = \big(J(t_0)\,,\,J'(t_0)\big).$$

Demonstração. Seja $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_0M$ tal que $\dot{\xi}(0) = J$, e definamos $\xi_{t_0}(s) = F_{t_0}(\xi(s))$. Então, de acordo com o lema anterior, J é o campo de Jacobi ao longo de γ_v associado à variação $\Upsilon(t,s) = \gamma_{\xi(s)}(t)$, $DF_{t_0}(J) = \dot{\xi_{t_0}}(0)$, e $\dot{\xi_{t_0}}(0)$ corresponde ao campo de Jacobi ao longo de γ_w associado à variação $\Upsilon_{t_0}(t,s) = \gamma_{\xi_{t_0}(s)}(t)$. Mas, pela definição de F_{t_0}, é claro que $\Upsilon_{t_0}(t,s) = \Upsilon(t+t_0, s)$. Segue-se, portanto, o resultado. Q.E.D.

4.3 Variedades de Finsler

Normas de Minkowski e a transformada de Legendre

Consideremos um espaço vetorial V de dimensão finita, e uma norma

$$\varphi : V \longrightarrow [0, \infty)$$

que é C^∞ fora da origem.

Definição 4.10. *Diz-se que φ é uma* norma de Minkowski*, se ela for estritamente convexa, isto é, se para todo vetor não nulo v em V, a forma bilinear simétrica g_v definida por*

$$g_v = \frac{1}{2}(D^2\varphi^2)_v$$

for positiva definida. Tal forma bilinear é dita o produto interno osculador à φ^2 em v.

A convexidade estrita de uma norma de Minkowski φ garante que a *transformada de Legendre*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : V \setminus 0 \quad &\longrightarrow \quad V^* \setminus 0 \\ \mathcal{L}(v) \quad &= \quad \frac{1}{2}(D\varphi^2)_v \end{aligned}$$

seja um difeomorfismo (homogêneo de grau 1). Note que, pela homogeneidade de φ,

$$\mathcal{L}(v) = g_v(v\,,\,\cdot). \tag{4.31}$$

Passemos agora à variedade M.

Definição 4.11. *Uma* métrica de Finsler *em M é uma função*

$$\varphi : TM \longrightarrow \mathbb{R},$$

C^∞ sobre T_0M, que se restringe a uma norma de Minkowski em cada espaço tangente. Consequentemente, tem-se definido, para cada $v \in T_0M$, um produto interno positivo definido g_v em $T_{\pi(v)}M$.

A transformada de Legendre de uma métrica de Finsler φ em M,

$$\mathcal{L} : T_0M \longrightarrow T_0^*M,$$

é obtida aplicando-se fibra à fibra as transformadas das respectivas normas de Minkowski. Trata-se, pois, de um difeomorfismo homogêneo de grau 1.

Até o final desta seção, suporemos fixada uma métrica de Finsler φ em M.

Geometria simplética de T^*M e T_0M

Denotamos por α a 1-forma de Liouville de T^*M,

$$\alpha(X) = \xi\big(D\varrho(X)\big) \quad , \quad X \in T_\xi T^*M,$$

e por ω a forma simplética

$$\omega = d\alpha.$$

Em termos de um sistema de coordenadas naturais (x, p),

$$\omega = dp^i \wedge dx^i. \tag{4.32}$$

O resultado a seguir será utilizado em §5.3 e em §6.2.1:

Proposição-Definição 4.1. *O* fibrado conormal *de uma subvariedade P de M, $\mathrm{co}(P)$, é definido como o conjunto dos covetores de T^*M, que estão acima de P, e que anulam TP:*

$$\mathrm{co}(P) = \{\xi \in T^*M \ : \ \varrho(\xi) \in P, \ e \ \ \xi \in \mathrm{Ann}(T_{\varrho(\xi)}P)\}$$

Trata-se de uma subvariedade lagrangeana de T^*M. Em particular, as fibras de $\varrho : T^*M \to M$ são lagrangeanas.

Demonstração. Sejam $\xi \in \mathrm{co}(P)$ e $X \in T_\xi \mathrm{co}(P)$. Como ϱ manda $\mathrm{co}(P)$ em P, obtemos que $D\varrho(X) \in T_{\varrho(\xi)}P$ e, consequentemente, $\xi(D\varrho(X)) = 0$. Logo, o pull-back de α a $\mathrm{co}(P)$ é nulo, donde também o é o pull-back de ω. Portanto, $\mathrm{co}(P)$ é uma subvariedade isotrópica de T^*M, e é lagrangeana pois $\dim \mathrm{co}(P) = m$. Q.E.D.

Via a transformada de Legendre $\mathcal{L}$, munimos T_0M dos pull-backs de α e ω:

$$\alpha_\varphi = \mathcal{L}^*\alpha \quad , \quad \omega_\varphi = \mathcal{L}^*\omega.$$

Proposição 4.5. *Para $X \in T_vT_0M$,*

$$\alpha_\varphi(X) = g_v(v, D\pi(X)).$$

Demonstração. Pelas definições de α_φ e α,

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi(X) &= \alpha\big(D\mathcal{L}(X)\big) \\ &= \mathcal{L}(v)\big(D\varrho(D\mathcal{L}(X))\big) \\ &= \mathcal{L}(v)\big(D(\varrho \circ \mathcal{L})(X)\big), \end{aligned}$$

que, devido a (4.31) e a $\varrho \circ \mathcal{L} = \pi$, é igual a $g_v(v, D\pi(X))$. Q.E.D.

Em geometria de Finsler, o fibrado normal a uma subvariedade P de M, $\nu(P)$, é definido por:

$$\nu(P) = \{v \in T_0M \ : \ \pi(v) \in P, \text{ e } \ g_v(v\, , T_{\pi(v)}P) = 0\}. \tag{4.33}$$

Segue de (4.31) que

$$\nu(P) = \mathcal{L}^{-1}\big(\mathrm{co}(P)\big),$$

e, em consequência da proposição 4.1, obtemos:

Proposição 4.6. *O fibrado normal $\nu(P)$ é uma subvariedade lagrangeana de (T_0M, ω_φ). Em particular, as fibras de $\pi : T_0M \to M$ são lagrangeanas.*

Ponto de vista hamiltoniano

Sob o ponto de vista hamiltoniano, a métrica de Finsler φ define um campo hamiltoniano S em T_0M, dito o *spray geodésico*, que é o campo hamiltoniano associado à função hamiltoniana $\frac{1}{2}\varphi^2$:

$$\omega_\varphi(\cdot\,,\,S) = \frac{1}{2}\,D\varphi^2. \tag{4.34}$$

Tal terminologia se justifica pelo seguinte resultado; para uma demonstração, veja [Abr78].

Lema 4.4. *O campo S é um spray em M.*

Definição 4.12. *Seguindo [Gri72a], a conexão Γ_S correspondente ao spray S é dita a* conexão canônica *associada a φ. As geodésicas de φ são, por definição, as geodésicas de S.*

Em §4.4.2 daremos uma demonstração intrínseca do seguinte resultado bem conhecido (compare [Bes78], página 37):

Proposição 4.7. *A distribuição horizontal $\mathcal{H}T_0M$, correspondente a Γ_S, é lagrangeana com respeito a ω_φ.*

Derivação covariante e curvatura bandeira

Em geometria de Finsler, as noções de derivação covariante ao longo de uma geodésica, e de endomorfismos de curvatura são obtidas aplicando-se as construções de §4.2 ao spray geodésico S. Passamos agora à definição de *curvatura bandeira* de uma métrica de Finsler.

Definição 4.13. *Dados um ponto x de M, um subespaço bi-dimensional Π de T_xM, e um vetor não nulo v em Π, defini-se a* curvatura bandeira *da bandeira (v,Π), como sendo o quociente*

$$K(v,\Pi) = \frac{g_v(R_v(u),u)}{\Big[g_v\text{-área de } \{sv+tu\,:\,s,t\in[0,1]\}\Big]^2},$$

onde u é qualquer vetor de Π linearmente independente de v; que esta definição independe da escolha de u, segue de 3. da proposição 4.14.

Geometria de contato de SM

O *fibrado esférico unitário* de (M, φ) é definido por

$$SM = \varphi^{-1}(1).$$

Note que, por (4.34), S é tangente a SM e, para $v \in SM$,

$$T_v SM = \{X \in T_v T_0 M \ : \ \omega_\varphi(X, S_v) = 0\}. \tag{4.35}$$

Também, SM é transversal ao campo de Liouville C, pois $TSM = \mathrm{Ker}(D\varphi^2)$ e, pela homogeneidade de φ, $D\varphi^2(C_v) = 2\varphi(v)$, que vale 2 se $v \in SM$.

O pull-back de α_φ a SM não é nulo; de fato, segue da proposição 4.5, e da homogeneidade de φ que, para $v \in SM$,

$$\begin{aligned} \alpha_\varphi(S_v) &= \varphi(v) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Até o fim desta seção, por α_φ e ω_φ entenderemos os seus pull-backs a SM.

Proposição 4.8. *α_φ é 1-forma de contato em SM. Ademais, S é o campo de Reeb de (SM, α_φ).*

Demonstração. De acordo com (4.35), a nulidade de ω_φ é gerada por S, e como $\alpha_\varphi(S) = 1$, temos que $\mathrm{Ker}(\alpha_\varphi)$ é complementar ao espaço gerado por S. Segue daí que ω_φ é não-degenerada em $\mathrm{Ker}(\alpha_\varphi)$, isto é, (SM, α_φ) é de contato, e S é o seu campo de Reeb. Q.E.D.

O caráter lagrangeano da fibração $\pi : T_0M \to M$ implica que a fibração

$$\pi|_{SM} : SM \longrightarrow M$$

é legendriana; a distribuição tangente às fibras desta última será denotada por

$$\mathcal{V}_v SM = T_v S_{\pi(v)} M.$$

É claro que

$$\mathcal{V}SM \subset \mathrm{Ker}(\alpha_\varphi).$$

Também, definimos a seguinte distribuição em SM:

$$\mathcal{H}_v SM = \mathcal{H}_v T_0 M \cap \mathrm{Ker}(\alpha_\varphi)_v.$$

Segue do lema abaixo, que

$$\mathrm{Ker}(\alpha_\varphi) = \mathcal{H}SM \oplus \mathcal{V}SM.$$

Lema 4.5. *Relativamente à identificação* (4.9)*, temos:*

1. $T_v SM \approx T_{\pi(v)} M \oplus \mathrm{Ann}(\mathcal{L}(v))$;

2. $\mathrm{Ker}(\alpha_\varphi)_v \approx \mathrm{Ann}(\mathcal{L}(v)) \oplus \mathrm{Ann}(\mathcal{L}(v))$.

Demonstração. É uma consequência direta de (4.35) e da proposição **??**. Q.E.D.

4.4 Planos móveis provenientes de Fluxos geodésicos

4.4.1 O caso geral de um spray

Até o final deste capítulo, suporemos fixado um spray S em M, cujo fluxo geodésico denotaremos por F_t, e representaremos por $\mathscr{P}$ o seguinte plano móvel:

$$\mathscr{P} = \big(T_0 M\,, TT_0 M\,, \mathcal{V}T_0 M\,, F_t\big).$$

Como consequência direta de (4.5), temos o seguinte resultado:

Proposição 4.9. *O plano móvel $\mathscr{P}$ é regular. Ademais, o campo de endomorfismos $\mathcal{F}$ definido por* (3.3) *é igual ao negativo da estrutura quase-tangente $\mathscr{J}$:*

$$\mathcal{F} = -\mathscr{J}\,. \tag{4.36}$$

Até o final deste capítulo, $v, \gamma(t)$ e $\ell(t)$ representarão, respectivamente, um vetor fixado em T_0M, a geodésica que tem velocidade inicial v, e a curva de Jacobi baseada em v, bem como $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{K}(t)$, ... representarão os invariantes de $\ell(t)$.

Segue da proposição acima, e de (3.4), que

$$\mathbf{F}(t) = -\big(F_t{}^*\mathscr{J}\big)_v. \tag{4.37}$$

Derivando em t esta igualdade,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{F}}(t) &= -\frac{d}{dt}\big(F_t{}^*\mathscr{J}\big)_v \\ &= -\big(F_t{}^*\mathscr{L}_S\mathscr{J}\big)_v,\end{aligned}$$

ou, em termos da conexão Γ_S associada a S,

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \big(F_t{}^*\Gamma_S\big)_v.$$

Consequentemente,

Proposição 4.10. *Ao longo de $\dot\gamma(t)$, a distribuição horizontal $\mathcal{H}T_0M$ corresponde, via $(DF_t)_v$, à curva horizontal $h(t)$. Consequentemente,*

$$\mathbf{P}_\ell(t) = \big(F_t{}^*\mathcal{P}_{\mathcal{V}}\big)_v, \quad \mathbf{P}_h(t) = \big(F_t{}^*\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)_v. \tag{4.38}$$

Fixemos um campo $V(t)$ ao longo de $\gamma(t)$, e denotemos por $a(t)$ a curva que lhe corresponde em $\ell(t)$ via a identificação

$$(i_{\dot\gamma(t)})^{-1} \circ (DF_t)_v : \ell(t) \longrightarrow T_{\gamma(t)}M, \tag{4.39}$$

isto é,

$$a(t) = DF_{-t}\big(V(t)^\vee\big).$$

Proposição 4.11. *A derivada covariante $V'(t)$ corresponde, via (4.39), à derivada dinâmica $\gamma(a)(t) = \mathbf{P}_\ell(t)(\dot a(t))$. Consequentemente, um referencial $\{V_1(t), \cdots, V_m(t)\}$ ao longo de $\gamma(t)$ é paralelo se, e somente se, o referencial fanning correspondente $\{a_1(t), \cdots, a_m(t)\}$ for normal.*

Demonstração. Com efeito, de acordo com (4.21) e (4.38), temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned} DF_{-t}\big(V'(t)^{\vee}\big) &= DF_{-t}\Big(\mathcal{P}_{\mathcal{V}}\big(\mathscr{L}_S V(t)^{\vee}\big)\Big) \\ &= \mathbf{P}_{\ell}(t)\Big(DF_{-t}\big(\mathscr{L}_S V(t)^{\vee}\big)\Big). \end{aligned}$$

Mas, assim como em (3.1), temos

$$DF_{-t}\big(\mathscr{L}_S V(t)^{\vee}\big) = \frac{d}{dt} DF_{-t}\big(V(t)^{\vee}\big),$$

que por sua vez é igual a $\dot{a}(t)$. Segue, portanto, o resultado. Q.E.D.

Proposição 4.12. *Via* (4.39), $\mathbf{K}(t)(a(t))$ *corresponde a* $R_{\dot{\gamma}(t)}(V(t))$.

Demonstração. Seja $X(t)$ o levantamento horizontal de $V(t)$ ao longo de $\dot{\gamma}(t)$. De acordo com a definição de $R_{\dot{\gamma}(t)}$, e por (4.24), podemos escrever

$$R_{\dot{\gamma}(t)}(V(t))^{\vee} = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}\big(\mathscr{L}_S X(t)\big).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \big(\mathscr{L}_S \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)(X(t)) &= \mathscr{L}_S\big(\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(X(t))\big) - \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big(\mathscr{L}_S X(t)\big) \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{V}}\big(\mathscr{L}_S X(t)\big), \end{aligned}$$

uma vez que $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(X(t)) = X(t)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} R_{\dot{\gamma}(t)}(V(t))^{\vee} &= \big(\mathscr{L}_S \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)(X(t)) \\ &= \big(\mathscr{L}_S \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)\Big((\mathscr{J}|_{\mathcal{H}})^{-1}(V(t)^{\vee})\Big), \end{aligned}$$

pois $\mathscr{J}(X(t)) = V(t)^{\vee}$ e $X(t)$ é horizontal. Admitamos, por um momento, que

$$(\mathscr{J}|_{\mathcal{H}})^{-1} = \big(\mathscr{L}_S \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)|_{\mathcal{V}}. \tag{4.40}$$

Segue daí que

$$\begin{aligned} R_{\dot{\gamma}(t)}(V(t))^{\vee} &= \big(\mathscr{L}_S \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)^2(V(t)^{\vee}) \\ &= \big(\mathscr{L}_S \mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)^2(DF_t(a(t))), \end{aligned}$$

e portanto, aplicando DF_{-t} a ambos os membros,

$$\begin{aligned} DF_{-t}\big(R_{\dot\gamma(t)}(V(t))^{\vee}\big) &= DF_{-t}\Big(\big(\mathscr{L}_S\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)^2(DF_t(a(t)))\Big) \\ &= \big({F_t}^*\big(\mathscr{L}_S\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)^2\big)(a(t)) \\ &= \big({F_t}^*\mathscr{L}_S\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)^2(a(t)) \\ &= \Big(\frac{d}{dt}{F_t}^*\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\Big)^2(a(t)), \end{aligned}$$

que, por sua vez, é igual a $(\dot{\mathbf{P}}_h)^2(a(t)) = \mathbf{K}(a(t))$.

Passemos, agora, a mostrar (4.40). Se Y é um campo vertical em T_0M, de modo que $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(Y) = 0$, então

$$\big(\mathscr{L}_S\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)(Y) = -\mathcal{P}_{\mathcal{H}}([S, Y]).$$

Daí, $\mathscr{L}_S\mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ manda $\mathcal{V}$ em $\mathcal{H}$, e

$$\begin{aligned} \mathscr{J}\left(\big(\mathscr{L}_S\mathcal{P}_{\mathcal{H}}\big)(Y)\right) &= -\mathscr{J}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{H}}([S,Y])\right) \\ &= -\mathscr{J}([S,Y]), \end{aligned}$$

que, devido a (4.5), é igual a Y. Isto demonstra (4.40) e, portanto, a proposição. Q.E.D.

4.4.2 O caso de uma métrica de Finsler

Suponhamos agora que o spray geodésico S é o associado a uma métrica de Finsler φ em M, em cujo caso o plano móvel $\mathscr{P}$ é lagrangeano relativamente à estrutura simplética ω_φ de T_0M.

Investiguemos a seção Θ do fibrado $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}T_0M) \to T_0M$, definida em (3.5).

Proposição 4.13. *Para cada $u \in T_0M$, a forma bilinear simétrica $\Theta_u \in \mathrm{Sym}(\mathcal{V}_uT_0M)$ corresponde, via a identificação $\mathcal{V}_uT_0M \approx T_{\pi(u)}M$, ao produto interno g_u. Consequentemente, via (4.39), o wronskiano $W(t)$ de $\ell(t)$ corresponde a $g_{\dot\gamma(t)}$.*

Demonstração. Por conveniência simplética, trabalharemos no fibrado cotangente. Sejam, pois, H a função hamiltoniana em T_0^*M que corresponde, através da transformada de legendre $\mathcal{L}$, a $\frac{1}{2}\varphi^2$, e S^* o campo hamiltoniano associado. Relativamente a um sistema de coordenadas naturais (x, p), S^* assume a forma

$$S^* = \frac{\partial H}{\partial p^k}\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{\partial H}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial p^k},$$

de onde tiramos que

$$\big[S^*, \frac{\partial}{\partial p^i}\big] = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^k}\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial x^k}\frac{\partial}{\partial p^k},$$

e portanto, substituindo em (4.32), chegamos facilmente em

$$\omega\big(\big[S^*, \frac{\partial}{\partial p^i}\big], \frac{\partial}{\partial p^j}\big) = \frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j}.$$

Isto é, para cada $\xi \neq 0 \in T^*M$, as matrizes de $(\mathcal{L}_*\Theta)_\xi \in \mathrm{Sym}(\mathcal{V}_\xi T^*M)$ e $D^2(H|_{T^*_\xi M})$ na base $\partial/\partial p^1, \cdots, \partial/\partial p^m$ coincidem. Voltando com $\mathcal{L}$, e notando que $\mathcal{L}_* S = S^*$, obtemos a primeira parte do resultado. A segunda parte segue da primeira e do lema 3.2. Q.E.D.

Estabelecida a tradução dos invariantes da geometria de φ nos invariantes fanning de $\ell(t)$, notemos, a título de ilustração, que os seguintes fatos bem conhecidos seguem automaticamente das proposições 2.5 e 2.6 de §2.1.2 :

Proposição 4.14. *1. A distribuição horizontal $\mathcal{H}T_0M$, correspondente a Γ_S, é lagrangeana.*

2. Dados campos $U(t)$ e $V(t)$ ao longo de $\gamma(t)$,

$$\frac{d}{dt}g_{\dot\gamma(t)}(U(t), V(t)) = g_{\dot\gamma(t)}(U'(t), V(t)) + g_{\dot\gamma(t)}(U(t), V'(t)).$$

3. O endomorfismo de curvatura $\mathbf{R}_v : T_xM \to T_xM$ é g_v-simétrico:

$$g_v(\mathbf{R}_v(u), w) = g_v(u, \mathbf{R}_v(w)).$$

Restrinjamo-nos agora ao fibrado esférico unitário SM, e usemos as mesmas notações que em §4.3. Denotando ainda por F_t a restrição do fluxo geodésico a SM, e notando que F_t age por transformações de contato (pois é o fluxo associado ao campo de Reeb), obtemos um plano móvel legendriano:

$$\mathscr{P}_r = (SM, \mathcal{V}SM, F_t).$$

Suponhamos que o vetor fixado v esteja em SM, e denotemos por ℓ_r a curva de Jacobi de $\mathscr{P}_r$ baseada em v. Note que

$$\ell_r(t) \subset \ell(t).$$

Como

$$\mathcal{V}_u SM = i_u(\mathrm{Ann}(\mathcal{L}(u))), \quad \text{para } u \in SM, \tag{4.41}$$

temos a seguinte identificação para $\ell_r(t)$:

$$(i_{\dot\gamma(t)})^{-1} \circ (DF_t)_v : \ell_r(t) \longrightarrow \mathrm{Ann}(\mathcal{L}(\dot\gamma(t))). \tag{4.42}$$

Seja Θ_r a seção de $\mathrm{Sym}(\mathcal{V}SM) \to SM$, correspondente a $\mathscr{P}_r$.

Proposição 4.15. *Para cada u em SM, $(\Theta_r)_u$ corresponde à restrição de g_u a $\mathrm{Ann}(\mathcal{L}(u))$, via (4.41). Consequentemente, via (4.42), o wronskiano $W_r(t)$ de $\ell_r(t)$ corresponde à restrição de $g_{\dot\gamma(t)}$ a $\mathrm{Ann}(\mathcal{L}(\dot\gamma(t)))$.*

Demonstração. É uma consequência direta da proposição 4.13, pois é claro que $(\Theta_r)_u$ é igual a restrição de Θ_u a $\mathcal{V}_u SM$. Q.E.D.

Segue daí que $\mathscr{P}_r$ é regular. Seja agora

$$X_1, \cdots, X_m$$

um referencial de $\mathcal{V}TM$, definido em torno de v, tal que

$$X_1 = \text{campo de Liouville } C,$$

e os demais $X_2, \cdots, X_m$ sejam, ao longo de SM, tangentes a $\mathcal{V}SM$. A este referencial, corresponde um referencial

$$a_1(t), \cdots, a_m(t)$$

de $\ell(t)$ e, por hipótese, $a_2(t), \cdots, a_m(t)$ é um referencial para $\ell_r(t)$.

Proposição 4.16. *Sejam* $\mathbf{K}(t)$ *e* $\mathbf{K}_r(t)$ *os endomorfismos de Jacobi de* $\ell(t)$ *e* $\ell_r(t)$*, respectivamente. Então*

$$\mathbf{K}(t)(a_1(t)) = 0, \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_r(t) = \mathbf{K}(t)|_{\ell_r(t)}.$$

Demonstração. Sejam

$$\mathcal{A}(t) = \big(a_1(t)|\cdots|a_m(t)\big), \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_r(t) = \big(a_2(t)|\cdots|a_m(t)\big),$$

e sejam $P(t)$ e $Q(t)$ matrizes $m \times m$ tais que

$$\ddot{\mathcal{A}} + \dot{\mathcal{A}}P(t) + \mathcal{A}Q(t) = \mathrm{O}, \tag{4.43}$$

e $P_r(t)$ e $Q_r(t)$ matrizes $(m-1) \times (m-1)$ tais que

$$\ddot{\mathcal{A}}_r + \dot{\mathcal{A}}_r P_r(t) + \mathcal{A}_r Q_r(t) = \mathrm{O}. \tag{4.44}$$

De $[S, C] = -S$ (pois S é um spray), obtemos que $[S, [S, X_1]] = 0$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1(t) &= \frac{d^2}{dt^2}\big({F_t}^* X_1\big)(v) \\ &= \big({F_t}^*[S,[S,X_1]]\big)(v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, a primeira coluna de $P(t)$ e $Q(t)$ é nula. Logo, como $\mathcal{A}(t) = \big(a_1(t)|\mathcal{A}_r(t)\big)$, por comparação de (4.43) e (4.44) obtemos que

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_r(t) \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_r(t) \end{pmatrix}.$$

Portanto, pelas definições de $\{\mathcal{A}(t), t\}$ e $\{\mathcal{A}_r(t), t\}$, concluímos que

$$\{\mathcal{A}(t), t\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \{\mathcal{A}_r(t), t\} \end{pmatrix}.$$

Agora, é só lembrar que as matrizes de $\mathbf{K}(t)$ e $\mathbf{K}_r(t)$ nas bases $\mathcal{A}(t)$ e $\mathcal{A}_r(t)$ são $(1/2)\{\mathcal{A}(t), t\}$ e $(1/2)\{\mathcal{A}_r(t), t\}$, respectivamente.

Q.E.D.

Capítulo 5

Submersões Isométricas

5.1 Submersões isométricas de espaços de Minkowski

Uma transformação linear sobrejetiva

$$\pi : V_1 \longrightarrow V_2$$

entre dois espaços de Minskowski (V_1, φ_1) e (V_2, φ_2) é dita uma *submersão isométrica*, se a imagem por π da bola unitária fechada de V_1 for igual a bola unitária fechada de V_2. Segue da homogeneidade das normas, que tal condição é equivalente a

$$\varphi_2(w) = \mathrm{Min}\{\varphi_1(v) \,:\, \pi(v) = w\}, \tag{5.1}$$

para todo w em V_2.

Definição 5.1. *O* cone horizontal *de uma submersão isométrica $\pi : V_1 \to V_2$ é o conjunto $\mathscr{H}$ de todos os vetores $v \in V_1 \backslash \{0\}$ para os quais $\varphi_2(\pi(v)) = \varphi_1(v)$.*

Proposição 5.1. *A imagem de $\mathscr{H}$ pela transformada de Legendre $\mathcal{L}_1 : V_1 \backslash \{0\} \to V_1^* \backslash \{0\}$ de φ_1 é igual ao anulador $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(\pi)) \backslash \{0\}$ do núcleo de π. Consequentemente, $\mathscr{H}$ é uma subvariedade de V_1, cujos espaços tangentes são dados por*

$$T_v\mathscr{H} = \{u \in V_1 \,:\, u \textit{ é } (g_1)_v\textit{−ortogonal a } \mathrm{Ker}(\pi)\}, \tag{5.2}$$

onde $(g_1)_v$ é o produto interno osculador à φ_1^2 em v.

Demonstração. Pela sobrejetividade de $\mathcal{L}_1$, todo elemento de V_1^* é da forma $\mathcal{L}_1(v)$, para algum $v \in V_1$. Agora, é claro que $2\mathcal{L}_1(v) = (D\varphi_1^2)_v$ pertence a $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(\pi))$ se e somente se v for um ponto crítico da restrição de φ_1^2 a $v + \mathrm{Ker}(\pi)$. Mas, como φ_1^2 é positiva e homogênea, o único ponto crítico de sua restrição a um subespaço afim é um ponto de mínimo global, daí, por (5.1), segue que $\mathcal{L}_1(v) \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Ker}(\pi))$ se e somente se $\varphi_2(\pi(v)) = \varphi_1(v)$, isto é, se e somente se $v \in \mathscr{H}$. Q.E.D.

O seguinte lema será necessário mais adiante:

Lema 5.1. *Se $v \in \mathscr{H}$, então $\mathcal{L}_1(v)(u) = \mathcal{L}_2(\pi(v))(\pi(u))$, para todo $u \in V_1$.*

Demonstração. Se $u = v$, então $\mathcal{L}_1(v)(v) = \varphi_1^2(v)$ e $\mathcal{L}_2(\pi(v))(\pi(v)) = \varphi_2^2(\pi(v))$, e a igualdade segue de v ser horizontal. Suponhamos agora que $u \in \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_1(v))$, isto é, que $u \in T_v S_1(\varphi_1^2(v))$, onde $S_1(\varphi_1^2(v))$ é a esfera de (V_1, φ_1) de raio $\varphi_1^2(v)$. Segundo a decomposição $V_1 = T_v\mathscr{H} \oplus \ker(\pi)$, escrevemos $u = u_1 + u_2$. Obtemos então que $u_1 \in T_v(\mathscr{H} \cap S_1(\varphi_1^2(v)))$ e portanto $\mathcal{L}_2(\pi(v))(\pi(u_1)) = 0$, já que $\pi(\mathscr{H} \cap S_1(\varphi_1^2(v))) = S_2(\varphi_2^2(\pi(v)))$ e $T_{\pi(v)} S_2(\varphi_2^2(\pi(v))) = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_2(\pi(v)))$. Q.E.D.

5.2 Submersões isométricas de variedades de Finsler

Dizemos que uma submersão

$$p : M^m \longrightarrow N^n$$

entre duas variedades de Finsler (M^m, φ_1) e (N^n, φ_2) é *isométrica* se, para cada x em M,

$$p_* : T_x M \longrightarrow T_{p(x)} N \tag{5.3}$$

for uma submersão isométrica entre espaços de Minkowski, onde p_* representa a diferencial de p. Neste caso, denotamos por $\mathscr{H}_x$ o cone horizontal de (5.3).

Definição 5.2. *Uma curva imersa $\sigma(t)$ em M é dita horizontal se, para cada t, $\dot{\sigma}(t) \in \mathscr{H}_{\sigma(t)}$.*

Proposição 5.2. *Uma geodésica $\gamma(t)$ de M é horizontal se, e somente se, $\dot\gamma(0)$ for horizontal. Neste caso, $p \circ \gamma(t)$ será também uma geodésica de N.*

Demonstração. Veja [ÁPD01], teorema 3.1 Q.E.D.

5.3 Ponto de vista de reduções simpléticas

Comecemos descrevendo uma submersão arbitrária

$$p : M^m \longrightarrow N^n, \tag{5.4}$$

sob o ponto de vista de reduções simpléticas, como em [ÁPD01].

Definição 5.3. *O* fibrado conormal *de (5.4) é o subfibrado de T^*M dado pela união dos fibrados conormais às fibras de p (veja proposição 4.1) :*

$$\mathcal{N} := \bigcup_{y \in N} \mathrm{co}(p^{-1}(y)).$$

Segue da proposição 4.1, que $\mathcal{N}$ é folheado por subvariedades lagrangeanas de T^*M e é, por conseguinte, uma subvariedade coisotrópica de T^*M.

Definamos um mapa

$$\pi : \mathcal{N} \longrightarrow T^*N \tag{5.5}$$

da seguinte forma: Dado $\xi \in \mathcal{N}$, com $\varrho_M(\xi) = m$, $\pi(\xi)$ é o único covetor de $T^*_{p(m)}N$ tal que, para todo $w \in T_{p(m)}N$,

$$\pi(\xi) \cdot w = \xi(v),$$

onde $v \in T_mM$ é qualquer vetor satisfazendo $Dp(v) = w$.

Proposição 5.3. *π desce a um mapa*

$$\mathcal{N}_R \longrightarrow T^*N$$

que realiza T^*N como redução simplética de T^*M por $\mathcal{N}$.

Demonstração. Em coordenadas locais vê-se facilmente que π é uma submersão. Admitamos por um momento que π satisfaz

$$\pi^*\alpha_N = i^*\alpha_M, \tag{5.6}$$

onde α_M, α_N são as respectivas 1-formas de Liouville, e $i : \mathcal{N} \to T^*M$ é a inclusão. Segue daí que

$$\pi^*\omega_N = i^*\omega_M,$$

e consequentemente $\mathrm{Ker}(D\pi) = \mathrm{Ker}(i^*\omega_M)$, uma vez que ω_N é não-degenerada e π é submersão. Portanto, as fibras de π coincidem com as folhas da folheação canônica de $\mathrm{co}(p)$ e por conseguinte π desce a um simplectomorfismo global $\mathcal{N}_R \to T^*N$.

Mostremos então (5.6). Com efeito, se $X \in T_\xi\mathcal{N}$, então

$$\pi^*\alpha_N(X) = \alpha_N(D\pi(X)) = \pi(\xi) \cdot (D\varrho_N(D\pi(X))) = \xi(u),$$

onde u é qualquer vetor tal que $Dp(u) = D\varrho_N(D\pi(X))$. Mas, como $p \circ \varrho_M = \varrho_N \circ \pi$, podemos tomar $u = D\varrho_M(X)$ e obtermos $\pi^*\alpha_N(X) = \xi(D\varrho_M(X)) = \alpha_M(X)$. Q.E.D.

Suponhamos agora que a submersão (5.4) seja isométrica, relativamente a certas métricas de Finsler φ_1 e φ_2 em M e N, respectivamente.

Definição 5.4. *O fibrado conormal da submersão isométrica $p : M \to N$ é o subfibrado de T_0M dado pela união de todos os cones horizontais:*

$$\hat{\mathcal{N}} := \bigcup_{x \in M} \mathscr{H}_x.$$

Segue da proposição 5.1, que

$$\mathcal{N} \backslash \{0\} = \mathcal{L}_1(\hat{\mathcal{N}}),$$

onde $\mathcal{L}_1$ é a transformada de Legendre de φ_1. Também, do lema 5.1 segue a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{N}} & \xrightarrow{p_*|_{\hat{\mathcal{N}}}} & T_0N \\ {\scriptstyle\mathcal{L}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathcal{L}_2} \\ \mathcal{N}\backslash\{0\} & \xrightarrow{\pi} & T_0^*N \end{array} \tag{5.7}$$

Estamos agora em posição de mostrar que o plano móvel lagrangeano $(T_0N, \mathcal{V}T_0N, F_t^2)$ é a redução simplética de $(T_0M, \mathcal{V}T_0M, F_t^1)$ por $\hat{\mathcal{N}}$:

Proposição 5.4. *$\hat{\mathcal{N}}$ é uma subvariedade coisotrópica de $(T_0M, \omega_{\varphi_1})$, e $p_*|_{\hat{\mathcal{N}}} : \hat{\mathcal{N}} \to T_0N$ desce a um simplectomorfismo*

$$\overline{p_*} : \hat{\mathcal{N}}_R \longrightarrow T_0N.$$

O fluxo geodésico F_t^1 de M deixa $\hat{\mathcal{N}}$ invariante, e o fluxo $\hat{F}_t^1$ induzido em $\hat{\mathcal{N}}_R$ corresponde, via $\overline{p_*}$, ao fluxo geodésico F_t^2 de N. Também, a distribuição $\mathcal{V}T_0M$ desce a uma distribuição $(\mathcal{V}T_0M)_R$ em $\hat{\mathcal{N}}_R$ que corresponde, via $\overline{p_*}$, à $\mathcal{V}T_0N$.

Demonstração. As duas primeiras afirmações seguem da proposição 5.3, e da comutatividade do diagrama (5.7). A invariância de $\hat{\mathcal{N}}$ por F_t^1, e correspondência, via $\overline{p_*}$, entre $\hat{F}_t^1$ e F_t^2, são devidas à proposição 5.2. Resta mostrarmos a última afirmação, isto é, que $Dp_*(\mathcal{V}_vT_0M \cap T_v\hat{\mathcal{N}}) = \mathcal{V}_{p_*(v)}T_0N$. Com efeito, como $p_*|_{T_xM} : T_xM \to T_{p(x)}N$ é linear, ao identificarmos $\mathcal{V}_vT_0M$ com T_xM, e $\mathcal{V}_{p_*(v)}T_0N$ com $T_{p(x)}N$, obtemos que $(Dp_*)_v : \mathcal{V}_vT_0M \to \mathcal{V}_{p_*(v)}T_0N$ é igual a $p_*|_{T_xM}$. Logo, admitindo por um momento que

$$\mathcal{V}_vT_0M \cap T_v\hat{\mathcal{N}} = T_v\mathscr{H}_x, \tag{5.8}$$

o resultado segue da sobrejetividade de $p_* : T_v\mathscr{H}_x \to T_{p(x)}N$. A igualdade (5.8) segue de $\hat{\mathcal{N}}$ ter interseção limpa com T_xM, uma vez que $\hat{\mathcal{N}}$ é subfibrado de T_0M. Q.E.D.

Alternativamente, podemos restringir a situação aos fibrados esféricos unitários SM e SN, e concluir, com a ajuda da proposição acima e da proposição A.1, que o plano móvel legendriano $(SN, \mathcal{V}SN, F_t^2)$ é uma redução de contato de $(SM, \mathcal{V}SM, F_t^1)$:

Proposição 5.5. *Seja $\mathcal{C} := \hat{\mathcal{N}} \cap SM$. Então $\mathcal{C}$ é uma subvariedade coisotrópica de contato de SM, e a aplicação $p_*|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to SN$ desce a um contactomorfismo*

$$\overline{p_*} : \mathcal{C}_R \longrightarrow SN.$$

O fluxo geodésico F_t^1 de M deixa $\mathcal{C}$ invariante, e o fluxo $\hat{F}_t^1$ induzido em $\mathcal{C}_R$ corresponde, via $\overline{p_*}$, ao fluxo geodésico de N. Também, a distribuição $\mathcal{V}SM$ desce a uma distribuição $(\mathcal{V}SM)_R$ em $\mathcal{C}_R$ que corresponde, via $\overline{p_*}$, à $\mathcal{V}SN$.

Fixemos um vetor horizontal $v \in \hat{\mathcal{N}}$, e seja $\ell(t)$ a curva de Jacobi de $(T_0M, \mathcal{V}T_0M, F_t^1)$ baseada em v.

Corolário 5.1. *A curva de Jacobi de* $(T_0N, \mathcal{V}T_0N, F_t^2)$ *baseada em* $p_*(v)$ *corresponde, via* $(D\overline{p_*})_v$*, à redução simplética* $\ell_R(t)$ *de* $\ell(t)$ *com respeito a* $T_v\hat{\mathcal{N}}$.

No caso em que v *é unitário, a curva de Jacobi de* $(SN, \mathcal{V}SN, F_t^2)$ *baseada em* $p_*(v)$ *corresponde à redução simplética, com respeito a* $T_v\mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$*, da curva* $\ell_r(t)$ *de* $(SM, \mathcal{V}SM, F_t^1)$ *baseada em* v.

Demonstração. É uma consequência imediata das proposições 3.1, 5.4 e 5.5. Q.E.D.

Lema 5.2. *Para todo* $w \in \hat{\mathcal{N}}$*, temos* $\mathcal{V}_wT_0M \cap T_w\hat{\mathcal{N}}^\perp = \{0\}$*. Consequentemente,* $\ell(t)$ *satisfaz a hipótese* (2.16)*. A decomposição* $\ell(t) = \mathfrak{h}(t) \oplus \mathfrak{v}(t)$ *corresponde, via a identificação (4.39), à decomposição*

$$T_{\gamma(t)}M = T_{\dot\gamma(t)}\mathscr{H}_{\gamma(t)} \oplus \mathscr{V}_{\gamma(t)},$$

onde $\mathscr{V}_{\gamma(t)}$ *é o espaço tangente, em* $\gamma(t)$*, à fibra de* p *por* $\gamma(t)$.

Demonstração. Por um lado,

$$\mathcal{V}_wT_0M \cap T_w\hat{\mathcal{N}}^\perp \subset T_w\hat{\mathcal{N}}^\perp = \mathrm{Ker}(D(p_*|_{\hat{\mathcal{N}}})_w).$$

Por outro lado,

$$\mathcal{V}_wT_0M \cap T_w\hat{\mathcal{N}}^\perp \subset \mathcal{V}T_0M \cap T_w\hat{\mathcal{N}} = T_w\mathscr{H}_x,$$

e a restrição de $D(p_*|_{\hat{\mathcal{N}}})$ a $T_v\mathscr{H}_x$ é igual a $p_* : T_v\mathscr{H}_x \to T_{p(x)}N$, que é um isomorfismo. Isto mostra que $\mathcal{V}_wT_0M \cap T_w\hat{\mathcal{N}}^\perp = \{0\}$. Mostremos a segunda parte. Pelas definições de $\mathfrak{h}(t)$ e $\ell(t)$ temos, respectivamente,

$$\mathfrak{h}(t) = \ell(t) \cap T_v\hat{\mathcal{N}} = DF_{-t}^1(\mathcal{V}_{\dot\gamma(t)}T_0M) \cap T_v\hat{\mathcal{N}}.$$

Mas $T_v\hat{\mathcal{N}} = DF_{-t}^1(T_{\dot\gamma(t)}\hat{\mathcal{N}})$, daí $\mathfrak{h}(t) = DF_{-t}^1(\mathcal{V}_{\dot\gamma(t)}T_0M \cap T_{\dot\gamma(t)}\hat{\mathcal{N}})$ e portanto, aplicando $(i_{\dot\gamma(t)})^{-1} \circ (DF_t^1)_v$ a ambos os membros,

$$(i_{\dot\gamma(t)})^{-1} \circ (DF_t^1)_v(\mathfrak{h}(t)) = (i_{\dot\gamma(t)})^{-1}(\mathcal{V}_{\dot\gamma(t)}T_0M \cap T_{\dot\gamma(t)}\hat{\mathcal{N}}),$$

que, como já observado, é igual a $T_{\dot\gamma(t)}\mathscr{H}_{\gamma(t)}$. Para $\mathfrak{v}(t)$, é só usar que $\mathfrak{v}(t)$ é o complemento $W(t)$-ortogonal de $\mathfrak{h}(t)$, $\mathscr{V}_{\gamma(t)}$ é o complemento $g_{\dot\gamma(t)}$-ortogonal de $T_{\dot\gamma(t)}\mathscr{H}_{\gamma(t)}$, e $W(t)$ corresponde a $g_{\dot\gamma(t)}$ via (4.39). Q.E.D.

Definição 5.5. *Denotamos por $A(t)$ e $T(t)$, respectivamente, os endomorfismos de $T_{\gamma(t)}M$ que correspondem, via (4.39), aos endomorfismos de O'Neill $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{T}(t)$ de $\ell(t)$.*

Das fórmulas de O'Neill (2.26) e (2.28), obtemos as seguintes Fórmulas de O'Neill para Curvaturas Bandeiras numa submersão isométrica:

Teorema 5.1. *Suponhamos que v seja unitário. Seja $u \in T_{\gamma(t)}M$ um vetor unitário e $g_{\dot\gamma(t)}$-ortogonal a $\dot\gamma(t)$, e denotemos por Π o plano gerado por u e $\dot\gamma(t)$. Então:*

1. *Se $u \in T_{\dot\gamma(t)}\mathscr{H}_{\gamma(t)}$, então*

$$K_M(\dot\gamma(t),\Pi) = K_N(p_*(\dot\gamma(t)), p_*\Pi) - 3g_{\dot\gamma(t)}(A(t)u, A(t)u).$$

2. *Se $u \in \mathscr{V}_{\gamma(t)}$, então*

$$K_M(\dot\gamma(t),\Pi) = g_{\dot\gamma(t)}(A(t)u, A(t)u) - g_{\dot\gamma(t)}(T(t)^2u, u) + g_{\dot\gamma(t)}(T'(t)u, u),$$

onde $T'(t)$ é a derivada covariante de $T(t)$ ao longo de $\gamma(t)$.

Capítulo 6

Focalidade

6.1 Focalidade de curvas de planos lagrangeanos

Fixemos um espaço vetorial simplético $(\mathbb{V}, \omega)$, e consideremos uma curva suave qualquer $\ell(t)$ em $\Lambda(\mathbb{V})$.

Definição 6.1. *Dado um $L \in \Lambda(\mathbb{V})$, dizemos que um instante de tempo t_0 é L-*focal *para $\ell(t)$ se*

$$\ell(t_0) \cap L \neq \{0\},$$

em cujo caso a sua multiplicidade *é definida como sendo a dimensão de $\ell(t) \cap L$. Também, um instante L-focal t_0 é dito* não-degenerado*, se a restrição do wronskiano $W(t_0) = \dot{\ell}(t_0)$ a $\ell(t_0) \cap L$ for não degenerada. Neste caso, a sua* multiplicidade *é definida como sendo a assinatura da restrição de $W(t_0)$ a $\ell(t_0) \cap L$:*

$$\mathrm{sgn}(W(t_0)|_{\ell(t_0) \cap L}).$$

Note que se $\ell(t)$ for uma curva positiva, isto é, se $W(t) > 0$ para todo t, então todo instante L-focal é não-degenerado e tem multiplicidade

$$\dim(\ell(t_0) \cap L).$$

O resultado seguinte é bem conhecido no contexto de geometria riemanniana. A demonstração que daremos é inspirada na prova da proposição 6 de [Kli74].

Proposição 6.1. *Os instantes L-focais não-degenerados para $\ell(t)$ formam um conjunto discreto. Consequentemente, existe apenas uma quantidade finita deles em cada intervalo compacto $[a, b]$.*

Demonstração. Seja t_0 um instante L-focal não-degenerado, com $\dim(\ell(t_0) \cap L) = k$. Identifiquemos $\mathbb{V}$ com $\mathbb{R}^m_1 \oplus \mathbb{R}^m_2$ mediante uma escolha de coordenadas de Darboux, de modo que L corresponda a $\mathbb{R}^m_1$, e $\ell(t_0) \cap \mathbb{R}^m_2 = \{0\}$. Estas condições garantem que, numa vizinhança de t_0, $\ell(t)$ é gerada por um referencial da forma

$$\big(a_1(t)| \cdots |a_m(t)\big) = \begin{pmatrix} I_m \\ S(t) \end{pmatrix},$$

onde $S(t)$ é uma curva de matrizes simétricas $m \times m$. Note que um instante t é L-focal se, e somente se,

$$\ell(t) \cap L = \mathrm{Ker}(S(t)), \tag{6.1}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathrm{Ker}(S(t_0))$ seja gerado pelos k primeiros vetores da base canônica de $\mathbb{R}^m_1$, isto é, que as k primeiras colunas de $S(t_0)$ sejam nulas. Escrevendo $S(t)$ na forma

$$\begin{pmatrix} S_1(t) & S_2(t) \\ S_3(t) & S_4(t) \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

onde $S_1(t)$ é $k \times k$ e $S_4(t)$ é $(m-k) \times (m-k)$, temos que, por hipótese e pela simetria de $S(t_0)$,

$$S_1(t_0) = 0, \quad S_3(t_0) = 0, \quad S_2(t_0) = 0. \tag{6.3}$$

Suponhamos então, por absurdo, que exista sequência $t_n \to t_0$ tal que $\mathrm{Det}(S(t_n)) = 0$. Segue então da expansão de Taylor de $\mathrm{Det}(S(t))$ em torno de t_0, que

$$\frac{d^n}{dt^n}\mathrm{Det}(S(t))\Big|_{t=t_0} = 0, \quad \text{para todo } n \geq 0. \tag{6.4}$$

Em particular, fazendo $n = k$ e usando a multilinearidade de Det (como função das colunas), obtemos que

$$0 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \dot{S}_1(t_0) & S_2(t_0) \\ \dot{S}_3(t_0) & S_4(t_0) \end{pmatrix} + \sum_r \mathrm{Det}(X_r(t)), \tag{6.5}$$

onde cada $X_r(t)$ é uma matriz $m \times m$ que contem pelo menos uma coluna dentre as k primeiras de $S(t_0)$. Logo, de (6.3) concluímos que

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} \dot{S}_1(t_0) & 0 \\ \dot{S}_3(t_0) & S_4(t_0) \end{pmatrix} = 0. \tag{6.6}$$

Mas $S_4(t_0)$ é não-singular, pois $S(t_0)$ tem posto $m-k$, daí $S_1(t_0)$ é singular. Isto é um absurdo, pois $S_1(t_0)$ coincide com a matriz de $W(t_0)|_{\mathrm{Ker}(S(t_0))}$ na base $(a_1(t)|\cdots|a_k(t))$.

Q.E.D.

Portanto, se $\ell(t)$ for uma curva positiva, ou negativa, seus instantes L-focais serão todos não-degenerados, qualquer que seja L. Em particular, isto se aplica à curva horizontal de uma curva fanning $\ell(t)$ cuja forma bilinear simétrica $W(t)(\mathbf{K}(t)\cdot,\cdot)$ seja definida, como mostra o lema a seguir:

Lema 6.1. *Seja $\ell(t) \in \Lambda(\mathbb{V})$ uma curva fanning. Então, via o isomorfismo $\mathbf{F}(t)|_{h(t)} : h(t) \to \ell(t)$, o wronskiano de $h(t)$ corresponde à forma $W(t)(\mathbf{K}(t)\cdot,\cdot)$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}(t)$ um referencial normal para $\ell(t)$, e representemos ainda por $\mathbf{K}(t)$ a matriz de $\mathbf{K}(t)$ na base $\mathcal{A}(t)$. Então $\dot{\mathcal{A}}(t)$ é um referencial para $h(t)$, $\mathbf{F}(t)\dot{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}(t)$ e

$$\ddot{\mathcal{A}}(t) = -\mathcal{A}(t)\mathbf{K}(t).$$

Portanto, a matriz do wronskiano de $h(t)$ no referencial $\dot{\mathcal{A}}(t)$ é dada por

$$-\dot{\mathcal{A}}(t)^T J\ddot{\mathcal{A}}(t) = \dot{\mathcal{A}}(t)^T J\mathcal{A}(t)\mathbf{K}(t). \tag{6.7}$$

Por outro lado, a matriz de $W(t)(\mathbf{K}(t)\cdot,\cdot)$ no referencial $\mathcal{A}(t)$ é igual a

$$\begin{aligned} W(t)(\mathcal{A}(t)\mathbf{K}(t),\mathcal{A}(t)) &= W(t)(\mathcal{A}(t),\mathcal{A}(t))\mathbf{K}(t) \\ &= -\mathcal{A}(t)^T J\dot{\mathcal{A}}(t)\mathbf{K}(t), \end{aligned}$$

que por sua vez é igual a (6.7), pois $\dot{\mathcal{A}}(t)^T J\mathcal{A}(t) = -\mathcal{A}(t)^T J\dot{\mathcal{A}}(t)$. Q.E.D.

Nota 6.1. A conclusão de que $h(t)$ possui apenas instantes focais não-degenerados caso $\mathbf{K}(t) > 0$ (ou $\mathbf{K}(t) < 0$), consta em [Pat99], página 36, no contexto de geometria riemanniana, e é lá chamado de *propriedade "twist" do subfibrado horizontal*. A demonstração dada aqui é nova.

6.1.1 Focalidade em reduções simpléticas

Consideremos agora um subespaço coisotrópico $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, e consideremos uma curva suave $\ell(t)$ em $\Lambda(\mathbb{V})$ tal que

$$\ell(t) \cap \mathbb{W}^{\perp} = \{0\}, \quad \text{para todo } t. \tag{6.8}$$

Neste caso, temos o seguinte resultado que relaciona focalidade de $\ell(t)$ com focalidade da redução simplética $\ell_R(t)$:

Teorema 6.1. *Seja $L \in \Lambda(\mathbb{V})$ tal que $L \supset \mathbb{W}^{\perp}$. Então, um instante t_0 é L-focal não-degenerado, com multiplicidade k, para $\ell(t)$ se, e somente se, for L_R-focal não-degenerado para $\ell_R(t)$, com multiplicidade k.*

Demonstração. De $L \supset \mathbb{W}^{\perp}$, obtemos que $\ell_R(t) \cap L_R = \big(\{(\ell(t) \cap \mathbb{W}) \oplus \mathbb{W}^{\perp}\} \cap L\big)_R$, isto é,

$$\ell_R(t) \cap L_R = \frac{\{(\ell(t) \cap \mathbb{W}) \oplus \mathbb{W}^{\perp}\} \cap L}{\mathbb{W}^{\perp}},$$

que por sua vez, devido a $\mathbb{W} \supset L \supset \mathbb{W}^{\perp}$, é igual a

$$\frac{(\ell(t) \cap L) \oplus \mathbb{W}^{\perp}}{\mathbb{W}^{\perp}}. \tag{6.9}$$

Sendo, como em §2.2.1, $\Pi|_{\ell(t)\cap\mathbb{W}} : \ell(t) \cap \mathbb{W} \to \ell_R(t)$ o isomorfismo dado pela restrição da aplicação quociente, é claro que (6.9) corresponde a $\ell(t) \cap L$ via $\Pi|_{\ell(t)\cap\mathbb{W}}$. Portanto, pelo lema 2.2, $W_R(t)|_{\ell_R(t)\cap L_R}$ corresponde a $W(t)|_{\ell(t)\cap L}$. Q.E.D.

6.2 Focalidade em geometria de Finsler

Sejam (M^m, φ) uma variedade de Finsler, $P \subset M$ uma subvariedade e $\gamma(t)$ uma geodésica de M partindo ortogonalmente à P:

$$\gamma(0) \in P \quad \text{e} \quad g_{\dot\gamma(0)}(\dot\gamma(0)\,,\, T_{\gamma(0)}P) = 0.$$

Definição 6.2. *Um instante de tempo t_0 é dito ser P-focal ao longo de $\gamma(t)$ se existir variação $\Upsilon : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ de $\gamma(t)$ por geodésicas $\gamma_s(t) = \Upsilon(t, s)$ partindo ortogonalmente a P, tal que*

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \Upsilon(t_0, s) = 0.$$

Para o que segue, usaremos a identificação

$$T_{\dot{\gamma}(0)} T_0 M \xrightarrow{\approx} \mathcal{J}_{\dot{\gamma}(0)}$$

dada por (4.30), entre $T_{\dot{\gamma}(0)} T_0 M$ e o espaço $\mathcal{J}_{\dot{\gamma}(0)}$ dos campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$.

Proposição 6.2. *Um instante t_0 é P-focal ao longo de $\gamma(t)$ se, e somente se, existir um campo de Jacobi $J \in \mathcal{J}_{\dot{\gamma}(0)}$ tal que*

$$J \in T_{\dot{\gamma}(0)} \nu(P) \subset T_{\dot{\gamma}(0)} T_0 M \quad \text{e} \quad J(t_0) = 0. \tag{6.10}$$

Lembramos que $\nu(P)$ é o fibrado normal a P, definido em (4.33).

Demonstração. Um campo de Jacobi $J \in T_{\dot{\gamma}(0)} T_0 M$ é tangente a $\nu(P)$ se, e somente se, corresponder ao vetor velocidade $\dot{\xi}(0)$ de alguma curva $\xi(s)$ em $\nu(P)$. Por outro lado, pela definição de $\nu(P)$ temos que uma variação $\Upsilon(t, s)$ de $\gamma(t)$ parte ortogonalmente a P se, e somente se, a curva $\xi(s) = \Upsilon(0, s)$ morar em $\nu(P)$. Q.E.D.

A *multiplicidade* de um instante P-focal é definida como sendo a dimensão do espaço dos campos de Jacobi que cumprem a condição (6.10).

Corolário 6.1. *Seja $\ell(t)$ a curva de Jacobi associada ao fluxo geodésico de M, baseada em $\dot{\gamma}(0)$. Então, um instante t_0 é P-focal ao longo de $\gamma(t)$ se, e somente se, for um instante focal para $\ell(t)$ com respeito ao subespaço lagrangeano $T_{\dot{\gamma}(0)} \nu(P) \subset T_{\dot{\gamma}(0)} T_0 M$. Também, as respectivas multiplicidades coincidem.*

Demonstração. Pela definição de $\ell(t)$, um campo de Jacobi J pertence a $\ell(t_0) \cap T_{\dot{\gamma}(0)} \nu(P)$ se, e somente se, $DF_{t_0}(J) \in \mathcal{V}_{\dot{\gamma}(0)} TM$, e $J \in T_{\dot{\gamma}(0)} \nu(P)$, onde F_t é o fluxo geodésico de M. Por outro lado, pela proposição 4.4 temos $DF_{t_0}(J) = J_{t_0} \in \mathcal{J}_{\dot{\gamma}(t_0)}$, e é claro que $J_{t_0} \in \mathcal{V}_{\dot{\gamma}(t_0)} TM$ se, e somente se, $J_{t_0}(0) = 0$, isto é, $J(t_0) = 0$. Q.E.D.

6.2.1 Focalidade em submersões isométricas

Sejam $p : M \to N$ uma submersão isométrica entre variedades de Finsler, S uma subvariedade de N, e denotemos por P a subvariedade de M dada por $p^{-1}(S)$.

Lema 6.2. *Seja* $v \in \nu(P)$ *(em particular,* $v \in \hat{\mathcal{N}}$*). Então*

$$T_v\nu(P) \supset T_v\hat{\mathcal{N}}^\perp \quad e \quad Dp_*(T_v\nu(P)) = T_{p_*(v)}\nu(S).$$

Demonstração. De $\nu(P) \subset \hat{\mathcal{N}}$, segue que $T_v\nu(P) \subset T_v\hat{\mathcal{N}}$. Logo, tomando o ortogonal simplético de ambos os membros e usando que $\nu(P)$ e $\hat{\mathcal{N}}$ são subvariedades lagrangeana e coisotrópica de T_0M, respectivamente, obtemos

$$T_v\nu(P) = T_v\nu(P)^\perp \supset T_v\hat{\mathcal{N}}^\perp.$$

Para a segunda parte, basta notar que $\pi(\mathrm{co}(P)) = \mathrm{co}(S)$, onde π é o mapa definido em (5.5). Daí, $D\pi(T_\xi\mathrm{co}(P)) = T_{\pi(\xi)}\mathrm{co}(S)$, e obtemos a igualdade $Dp_*(T_v\nu(P)) = T_{p_*(v)}\nu(S)$ usando a comutatividade do diagrama (5.7). Q.E.D.

Teorema 6.2. *Seja* $\gamma(t)$ *uma geodésica de* M *que parte ortogonalmente à* P*. Então, um instante* t_0 *é* P*-focal ao longo de* $\gamma(t)$ *se, e somente se, for* S*-focal ao longo de* $p(\gamma(t))$*. Também, as respectivas multiplicidades coincidem.*

Demonstração. Seja $v = \dot{\gamma}(0)$, e sejam $\ell(t)$ e $\ell'(t)$, respectivamente, as curvas de Jacobi de M e N baseadas em v e $p_*(v)$. Como $\ell'(t)$ corresponde, via $(D\overline{p_*})_v$, a $\ell_R(t)$, e pelo lema acima $T_{p_*(v)}\nu(S)$ corresponde a $(T_v\nu(P))_R$, temos que t_0 é $T_{p_*(v)}\nu(S)$-focal para $\ell'(t)$ com multiplicidade k, se, e somente se, for $(T_v\nu(P))_R$-focal para $\ell_R(t)$ com multiplicidade k. Mas, como $T_v\nu(P) \supset T_v\hat{\mathcal{N}}^\perp$, esta última condição ocorre se, e somente se, t_0 for $T_v\nu(P)$-focal para $\ell(t)$ com multiplicidade k (teorema 6.1). O resultado segue agora do corolário 6.1. Q.E.D.

Apêndice A

Reduções de Contato

Propomo-nos aqui a uma possível definição de *redução* no contexto de geometria de contato.

Definição A.1. *Seja S uma variedade de contato, com distribuição de contato Δ. Dizemos que uma subvariedade $\mathcal{C} \subset S$ é* coisotrópica de contato*, se, para cada x em $\mathcal{C}$,*

1. *$\Delta(x) + T_x\mathcal{C} = T_xS$;*
2. *$\Delta(x) \cap T_x\mathcal{C}$ é um subespaço coisotrópico de $\Delta(x)$, relativamente à estrutura simplética conforme de $\Delta(x)$.*

A condição 1. garante que $x \mapsto \Delta(x) \cap T_x\mathcal{C}$ seja uma distribuição diferenciável e regular em $\mathcal{C}$, logo, pela condição 2., o mesmo é verdade da distribuição

$$\mathcal{C} \ni x \longmapsto (\Delta(x) \cap T_x\mathcal{C})^{\perp} \subset \Delta(x) \cap T_x\mathcal{C}. \tag{A.1}$$

Proposição-Definição A.1. *A distribuição (A.1) é integrável. Sejam $\mathcal{C}_R$ o espaço das folhas, $\Pi : \mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{C}_R$ a aplicação quociente, e admitamos que $\mathcal{C}_R$ tenha uma estrutura diferenciável, relativamente a qual Π seja uma submersão. Suponhamos ainda que Δ venha de uma estrutura de contato exata α tal que $\mathcal{C}$ seja tangente ao campo de Reeb correspondente. Então, α desce a uma estrutura de contato exata α_R em $\mathcal{C}_R$, o qual, munido de α_R, é dito a* redução de contato *de (S, α) por $\mathcal{C}$. Também, se F_t é um fluxo de contato em S, que deixa $\mathcal{C}$ invariante, então ele desce a um fluxo de contato $\hat{F}_t$ em $\mathcal{C}_R$.*

Demonstração. Comecemos com a integrabilidade. Dados X e Y tangentes à (A.1), e Z tangente à $\Delta \cap T\mathcal{N}$, por um lado temos

$$\begin{array}{rcccl} 0 & = & d\alpha(X,Z) & = & X(\alpha(Z)) \pm Z(\alpha(X)) \pm \alpha([X,Z]) \\ & & & = & \pm\alpha([X,Z]) \end{array}$$

pois $\alpha(X) = \alpha(Z) = 0$. Logo, $[X, Z] \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, e como $[X, Z]$ é tangente à $\mathcal{N}$, obtemos que $[X, Z]$ é tangente à $\Delta\cap T\mathcal{N}$. Da mesma forma, $[X, Y]$ e $[Y, Z]$ são tangentes à $\Delta\cap T\mathcal{N}$. Por outro lado,

$$\begin{array}{rcccl} 0 & = & d(d\alpha)(X,Y,Z) & = & X(d\alpha(Y,Z)) \pm Y(d\alpha(X,Z)) \pm Z(d\alpha(X,Y)) \\ & & & & \pm d\alpha([X,Y],Z) \pm d\alpha([X,Z],Y) \pm d\alpha([Y,Z],X). \end{array}$$

Mas, por hipótese, $d\alpha(Y, Z) = d\alpha(X, Z) = d\alpha(X, Y) = 0$. Também, como $[X, Z]$ e $[Y, Z]$ são tangentes à $\Delta \cap T\mathcal{N}$, $d\alpha([X, Z], Y) = d\alpha([Y, Z], X) = 0$. Portanto, $d\alpha([X, Y], Z) = 0$, e como isso vale para todo Z tangente à $\Delta \cap T\mathcal{N}$, e temos $[X, Y] \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, segue que $[X, Y]$ é tangente à (A.1).

Mostremos agora que α desce a uma 1-forma em $\mathcal{C}_R$. Seguindo a demonstração do caso simplético que se encontra na página 174 de [MS98], isto é equivalente a mostrar que

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha, \tag{A.2}$$

sempre que tivermos uma homotopia de curvas $\gamma_s(t)$ em $\mathcal{C}$ tal que, para cada t, a curva $s \mapsto \gamma_s(t)$ mora em alguma folha de $\mathcal{C}$. Para mostrarmos (A.2), notemos que, como $\alpha((d/ds)\gamma_s(t)) = 0$ (pois, por hipótese, $(d/ds)\gamma_s(t) \in (\Delta(\gamma_s(t)) \cap T_{\gamma_s(t)}\mathcal{C})^\perp \subset \mathrm{Ker}(\alpha)$), a integral de α ao longo de cada curva $s \mapsto \gamma_s(t)$ é nula. Portanto, sendo Q o 2-simplexo em $\mathcal{C}$ dado pela homotopia $\gamma_s(t)$, pelo teorema de Stokes temos

$$\int_{\gamma_0} \alpha - \int_{\gamma_1} \alpha = \int_Q d\alpha.$$

Mostremos, pois, que o pull-back de $d\alpha$ a Q é nulo. Com efeito, sendo R o campo de Reeb, como R e $\dot\gamma_s(t)$ são tangentes a $\mathcal{C}$, temos que $\dot\gamma_s(t) = aR_{\gamma_s(t)} + X$, para algum $a \in \mathbb{R}$ e algum $X \in \Delta(\gamma_s(t))\cap T_{\gamma_s(t)}\mathcal{C}$. Mas, como R é o campo de Reeb, temos que $d\alpha((d/ds)\gamma_s(t), aR) =$

0. Também, como $(d/ds)\gamma_s(t) \in (\Delta(\gamma_s(t)) \cap T_{\gamma_s(t)}\mathcal{C})^{\perp}$, temos $d\alpha((d/ds)\gamma_s(t), X) = 0$. Portanto,

$$d\alpha\big((d/ds)\gamma_s(t), \dot{\gamma}_s(t)\big) = 0.$$

Q.E.D.

Reduções de contato podem ser obtidas a partir de reduções simpléticas da seguinte forma. Sejam C um campo de Liouville numa variedade simplética (X, ω), e $S \subset X$ uma hipersuperfície de tipo de contato relativamente a C; isto é, C cumpre a condição

$$\mathscr{L}_C \omega = \omega, \tag{A.3}$$

e S é transversal a C, de modo que $\alpha := i_C\omega$ induz uma estrutura de contato exata em S (veja [MS98] ou [HS09] para mais detalhes).

Proposição A.1. *Com a notação acima, suponhamos que $\mathcal{N} \subset X$ seja uma subvariedade coisotrópica tangente a C e ao campo de Reeb de (S, α). Então, $\mathcal{C} := \mathcal{N} \cap S$ é uma subvariedade coisotrópica de contato de S e C desce a um campo de Liouville C_R em $\mathcal{N}_R$. Se, além do mais, S tiver interseções conexas com as folhas de $\mathcal{N}$, então a aplicação natural $\mathcal{C}_R \to \mathcal{N}_R$ é um mergulho de $\mathcal{C}_R$ como hipersuperfície de tipo de contato relativamente a C_R.*

Demonstração. Como C é tangente a $\mathcal{N}$, segue que a interseção $\mathcal{N} \cap S$ é transversal, $T_x\mathcal{C} = T_x\mathcal{N} \cap T_xS$, e $\mathcal{C}$ satisfaz 1. da definição A.1. Também, por ser $\mathcal{N}$ tangente a C e ao campo de Reeb V de (S, α), obtemos que

$$T_x\mathcal{N} \cap \mathrm{Ker}(\alpha)_x + \mathrm{Span}\{V_x\} + \mathrm{Span}\{C_x\} = T_x\mathcal{N}. \tag{A.4}$$

Seja $v \in \mathrm{Ker}(\alpha)_x$ tal que

$$\omega(v, T_x\mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}(\alpha)_x) = 0. \tag{A.5}$$

Por serem V e C os campos de Reeb e Liouville, obtemos respectivamente $\omega(v, V_x) = 0$ e $\omega(v, C_x) = -\alpha(v) = 0$. Segue então de (A.4) e (A.1) que $\omega(v, T_x\mathcal{N}) = 0$. Mas $\mathcal{N} \subset X$ é coisotrópica, daí $v \in T_x\mathcal{N}$ e portanto $v \in T_x\mathcal{N} \cap \mathrm{Ker}(\alpha)_x = T_x\mathcal{C} \cap \mathrm{Ker}(\alpha)_x$. Isto mostra que $\mathcal{C} \subset S$ é coisotrópica de contato.

Seja F_t o fluxo associado ao campo de Liouville C. De (A.3) obtemos que F_t age em X por difeomorfismos conformemente simpléticos, e por ser C tangente a $\mathcal{N}$, F_t deixa $\mathcal{N}$ invariante. Segue daí que DF_t deixa a distribuição canônica de $\mathcal{N}$ invariante, e portanto F_t desce a um fluxo $\hat{F}_t$ em $\mathcal{N}_R$. Sendo C_R o gerador infinitesimal de $\hat{F}_t$, obtemos que C_R corresponde a C pela derivada de $\Pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow \mathcal{N}_R$, e em particular $\mathscr{L}_{C_R}\omega_R = \omega_R$.

É claro que, ao longo de $\mathcal{C}$, as distribuições canônicas de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{N}$ coincidem, de modo que as folhas de $\mathcal{C}$ são obtidas intersectando-se as folhas de $\mathcal{N}$ por S. Portanto temos um mapa bem definido $\mathcal{C}_R \to \mathcal{N}_R$ que será um mergulho caso essas interseções sejam conexas.

O restante da demonstração é automática. Q.E.D.

Referências Bibliográficas

[Abr78] Jerrold E. Abraham, Ralph e Marsden, *Foundations of mechanics*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978, Second edition.

[ACZ05] A. A. Agrachev, N. N. Chtcherbakova, e I. Zelenko, *On curvatures and focal points of dynamical Lagrangian distributions and their reductions by first integrals*, J. Dyn. Control Syst. **11** (2005), no. 3, 297–327.

[Ahd89] Shahla Ahdout, *Fanning curves of Lagrangian manifolds and geodesic flows*, Duke Math. J. **59** (1989), no. 2, 537–552.

[ÁPD] J. C. Álvarez Paiva e C. E. Durán, *Fanning curves in the grassmannian, connections and curvature*, Em preparação.

[ÁPD98] ______, *An introduction to finsler geometry*, Asociación Matemática Venezolana, disponível em http://www.math.poly.edu/research/finsler/intro/pdfs/master.pdf, 1998.

[ÁPD01] ______, *Isometric submersions of Finsler manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 8, 2409–2417 (electronic).

[ÁPD09] ______, *Geometric invariants of fanning curves*, Adv. in Appl. Math. **42** (2009), no. 3, 290–312. MR MR2502603 (2010b:53025)

[Bes78] Arthur L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. 93, Springer-Verlag, Berlin, 1978, With appendices by D. B. A. Epstein, J.-P. Bourguignon, L. Bérard-Bergery, M. Berger and J. L. Kazdan.

[CP] Javaloyes M. A. Caponio, E. e P. Piccione, *Semi-riemannian submersions and maslov index*, arXiv, 2009.

[Fou86] Patrick Foulon, *Géométrie des équations différentielles du second ordre*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **45** (1986), no. 1, 1–28.

[Gri72a] Joseph Grifone, *Structure presque-tangente et connexions. I*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22** (1972), no. 1, 287–334.

[Gri72b] ______, *Structure presque-tangente et connexions. II*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22** (1972), no. 3, 291–338. (loose errata).

[HS09] Umberto L. Hryniewicz e Pedro A. S. Salomão, *Uma introdução à geometria de contato e aplicações à dinâmica Hamiltoniana*, Publicações Matemáticas do IMPA., Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2009, 27o Colóquio Brasileiro de Matemática.

[JP08] M. A. Javaloyes e P. Piccione, *On the isotropic reduction method and the Maslov index*, Mat. Contemp. **35** (2008), 73–93.

[Kli74] Wilhelm Klingenberg, *Riemannian manifolds with geodesic flow of Anosov type*, Ann. of Math. (2) **99** (1974), 1–13.

[MS98] Dusa McDuff e Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998.

[O'N66] Barrett O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. **13** (1966), 459–469.

[O'N67] ______, *Submersions and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), 363–373.

[Pat99] Gabriel P. Paternain, *Geodesic flows*, Progress in Mathematics, vol. 180, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.