UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JUAN DAVID LONDOÑO ACEVEDO

Discretização por Método de Euler para fluxos regulares Lagrangeanos com campo one-sided Lipschitz

Campinas

2019

Juan David Londoño Acevedo

Discretização por Método de Euler para fluxos regulares Lagrangeanos com campo one-sided Lipschitz

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Christian Horacio Olivera

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Juan David Londoño Acevedo e orientada pelo Prof. Dr. Christian Horacio Olivera.

Campinas

2019

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L846d

Londoño Acevedo, Juan David, 1988-
Discretização por método de Euler para fluxos regulares lagrangeanos com campo one-sided Lipschitz / Juan David Londoño Acevedo. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Christian Horacio Olivera.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Problemas de valor inicial - Soluções numéricas. 2. Fluxo regular lagrangiano. 3. Euler, Método de. 4. Condição one-sided Lipschitz. I. Olivera, Christian Horacio, 1978-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Discretization by Euler's method for regular lagrangian flows with one-sided Lipschitz field
Palavras-chave em inglês:
Initial value problems - Numerical solutions
Regular lagrangian flow
Euler method
One-sided Lipschitz condition
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Christian Horacio Olivera [Orientador]
Hugo Alexander de la Cruz Cansino
André de Oliveira Gomes
Data de defesa: 06-08-2019
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0002-1935-8083
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/0634847082390039

Dissertação de Mestrado defendida em 06 de agosto de 2019 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). CHRISTIAN HORACIO OLIVERA

Prof(a). Dr(a). HUGO ALEXANDER DE LA CRUZ CANSINO

Prof(a). Dr(a). ANDRÉ DE OLIVEIRA GOMES

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Para Lucía e Marcielis

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha querida namorada, Marcielis, por ser tão importante na minha vida. Sempre ao meu lado, pondo-me para cima e fazendo-me acreditar que posso mais do que imagino. Obrigado pelo companheirismo, amizade, paciência, compreensão, apoio, alegria e amor.

Ao professor Christian H. Olivera que sempre esteve disponível e disposto a ajudar, querendo que eu aproveitasse cada momento do mestrado para absorver algum conhecimento. Obrigado pela paciência durante toda a orientação e incentivo, tornando possível a conclusão deste trabalho.

À minha mãe e minhas irmãs que, mesmo longe, estavam sempre presentes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Esta dissertação tem como principal objetivo estudar as propriedades de existência e unicidade dos fluxos regulares Lagrangeanos associados a um campo vetorial limitado pertencente a $L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$, além de obter uma aproximação numérica deles mediante o método de Euler progressivo com uma condição one-sided Lipschitz sendo satisfeita pelo campo vetorial.

Palavras chaves: Fluxo regular Lagrangeano, Método de Euler, Condição one-sided Lipschitz.

Abstract

This dissertation has as main objective to study the properties of existence and uniqueness of the regular Lagrangian flows associated with a limited vector field belonging to $L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$, besides obtaining a numerical approximation of them by the explicit Euler method with a one-sided Lipschitz condition being satisfied by the vector field.

Keywords: Regular Lagrangian flow, Euler's Method, One-sided Lipschitz condition.

Sumário

Introdução **10**

1 PRELIMINARES **12**
1.1 Teoria da medida **12**
1.2 Funções Lipschitz, teoremas de extensão e diferenciabilidade aproximada **13**
1.3 Funções Sobolev e regularização **14**
1.3.1 Definições e propriedades elementares 15
1.3.2 Aproximação por funções suaves 16
1.4 Funções maximais **18**
1.5 Noções de métodos numéricos em EDOs **19**

2 ESTIMATIVAS A PRIORI PARA FLUXOS REGULARES LAGRANGEANOS **21**
2.1 Estimativas a priori para campos vetoriais limitados e corolários **21**
2.1.1 Estimativa de uma quantidade integral e estimativas Lipschitz 22
2.1.2 Existência, regularidade e compacidade 27

3 DISCRETIZAÇÃO NUMÉRICA E ANÁLISE DE CONVERGÊNCIA . . . **38**

REFERÊNCIAS **46**

Introdução

O assunto principal deste trabalho é o estudo da equação diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \gamma'(t) = b(t, \gamma(t)) \\ \gamma(t_0) = x, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^d$, sob várias hipóteses de regularidade sobre o campo vetorial

$$b(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$$

assim como da aproximação discreta pelo método de Euler desta quando b além de satisfazer ditas hipoteses de regularidade, satisfaz uma condição one-sided Lipschitz.
A teoria é simples e muito clássica no caso em que b é suficientemente suave, isto é, Lipschitz em relação à variável espacial, uniformemente em relação à variavel temporal. Esta é a chamada teoria de Cauchy-Lipschitz. Neste caso podemos identificar um único fluxo do campo vetorial b, que é uma função

$$X(t, x) : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

que reune todas as trajetórias, no sentido de que resolve

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial t}(t, x) = b(t, X(t, x)) \\ X(0, x) = x. \end{cases}$$

Além disso, a regularidade adicional do campo vetorial é herdada pelo fluxo, como, por exemplo, a regularidade de $x \mapsto X(t, x)$. Já no sentido numérico pode ser garantido a convergência do método de Euler para a equação (1), além de uma região de zero-estabilidade e algumas outras propriedades mais, muito desejadas por qualquer esquema numérico. Informação detalhada destes topicos pode ser encontrada em [11].
Faz alguns anos, um grande interesse cresceu nas extensões dessa teoria para situações em que o campo vetorial é menos regular. Além da importância teórica de tal extensão, a principal motivação vem do estudo de muitas equações diferenciais parciais não-lineares da física matemática. Em vários modelos físicos da mecânica de fluidos é essencial lidar com densidades ou com campos de velocidade que não são suaves, e isso corresponde a situações reais do mundo real: por exemplo, o comportamento turbulento de fluidos viscosos ou as ondas de choque produzidas por um avião supersônico.
A teoria das equações diferenciais ordinárias fora do contexto suave começa com o trabalho seminal de DiPerna e Lions em 1989 (veja [5]), onde se obtêm alguns resultados novos de

existência, unicidade e estabilidade para equações diferenciais ordinárias com coeficientes nos espaços de Sobolev. Estes resultados são deduzidos dos resultados correspondentes em equações de transporte lineares que são analisadas pelo método de soluções renormalizadas.
Nós queremos pesquisar a precisão do método de Euler, quando o campo vetorial b satisfaz uma condição one-sided Lipschitz além das condições impostas para a existência e unicidade do fluxo regular Lagrangeano.
O presente trabalho pode ser dividido em tres partes: na primeira parte lembramos algumas ferramentas básicas e resultados que são amplamente utilizados em toda a dissertação; na segunda parte apresentamos a definição de fluxo regular Lagrangeano, estimativas para o campo vetorial ao qual está associado dito fluxo no caso particular de campos vetoriais limitados, existência e unicidade do fluxo regular Lagrangeano, assim como varios outros resultados relevantes. Cabe resaltar que esta estimativa e suas conseqüências são apenas casos particulares dos teoremas mais gerais apresentados na tese de doutorado de Gianluca Crippa [3]; já a terceira parte é dedicada à aproximação numérica do problema de valor inicial (1) junto com a demonstação da convergência do método numérico usado nesta aproximação, o qual é o método de Euler progressivo.

1 Preliminares

Com o objetivo de fazer este trabalho autocontido, neste capítulo serão coletados e apresentados de forma rápida alguns resultados sobre teoria da medida, topologia, funções maximais, funções Lipschitz, funções Sobolev, e análise numérica, com outros resultados de nosso interesse (uma introdução mais detalhada a tais aspetos da teoria podem ser encontrados em [1], [7], [9], e [10]).

1.1 Teoria da medida

Seja X um espaço métrico separável. Denotamos por $\mathscr{B}(X)$ a família de todos os subconjuntos Borel de X, por $\mathcal{M}(X)$ a família de todas as medidas Borel localmente finitas sobre X e por $\mathcal{M}_+(X)$ o subconjunto de $\mathcal{M}(X)$ de todas as medidas Borel não-negativas localmente finitas sobre X. A *variação total* de uma medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ é detotada por $|\mu|$. Quando $|\mu|(X) < +\infty$ dizemos que μ tem massa finita e estabelecemos $\|\mu\|_{\mathcal{M}(X)} = |\mu|(X)$. O *suporte* de uma medida $\mu \in \mathcal{M}(X)$ é o conjunto fechado definido por

$$\mathrm{spt}\mu = \{x \in X : |\mu|(U) > 0 \quad \text{para cada vizinhança aberta de } x\}.$$

Uma medida μ é *concentrada* sobre um conjunto Borel $E \subset X$ se $|\mu|(X \backslash E) = 0$.
Se $\mu \in \mathcal{M}(X)$ e $\pi \in \mathcal{M}_+(X)$, dizemos que μ é *absolutamente contínua* com relação a π, e escrevemos $\mu \ll \pi$, se $|\mu|(E) = 0$ para todo conjunto Borel $E \subset X$ tal que $\pi(E) = 0$. Se $f : X \to Y$ é uma função Borel entre dois espaços métricos separaveis X e Y, e $\mu \in \mathcal{M}(X)$, denotamos por $f_{\#}\mu \in \mathcal{M}(Y)$ o *push-forward* da medida μ, definido por

$$(f_{\#}\mu)(E) = \mu\left(f^{-1}(E)\right) \quad \text{para todo conjunto Borel} \quad E \subset Y. \tag{1.1}$$

A seguinte formula de mudança de variáveis é simples, porém de básica importância.

Proposição 1.1. *Seja $\varphi : Y \to [0, \infty]$ uma função mensurável. Então temos*

$$\int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x) = \int_Y \varphi(y)\, df_{\#}\mu(y) \quad \forall \varphi \in C_0(Y). \tag{1.2}$$

Denotamos por m a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$. Para qualquer subconjunto A de $\mathbb{R}^d$ definimos a *função indicadora* $\mathbf{1}_A$ como

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

a qual satisfaz, entre outras, com as seguintes propriedades:

(i) $\mathbf{1}_{A\cap B} = \min\{\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.

(ii) $\mathbf{1}_{A\cup B} = \max\{\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B\} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.

(iii) $\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1} - \mathbf{1}_A$.

(iv) $\mathbf{1}_{A\backslash B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.

(v) Se $A \subset B$, então $\mathbf{1}_A \leqslant \mathbf{1}_B$.

(vi) Seja $f : A \to B$ uma função dada, então $\mathbf{1}_A\left(f^{-1}\right) = \mathbf{1}_{f(A)}$.

Fixe uma medida $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$. Dizemos que uma sequência de funções $\{f_h\}$ definida sobre X e com valores em $\mathbb{R}^d$ *converge em μ-medida* para a função f se

$$\lim_{h\to\infty} \mu\left(\{x \in X : |f_h(x) - f(x)| > \delta\}\right) = 0 \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

1.2 Funções Lipschitz, teoremas de extensão e diferenciabilidade aproximada

Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ é *Lipschitz* se existe uma constante L tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in \Omega. \tag{1.3}$$

A constante mínima L tal que (1.3) se satisfaz é chamada a *constante Lipschitz* da função f e é denotada por

$$Lip(f) \equiv \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in \Omega, x \neq y\right\}.$$

Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ é dita *localmente Lipschitz* se para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma constante C_K tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C_K|x - y| \quad \textit{para todo} \quad x, y \in K.$$

Teorema 1.1 (Rademacher)**.** *Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ uma função localmente Lipschitz. Então f é diferenciável m-q.t.p.*

Uma função $f : X \to \mathbb{R}^k$ é dita *aproximável no sentido Lusin* por funções Lipschitz sobre $A \in \mathscr{B}(X)$ se para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um $C \in \mathscr{B}(X)$ tal que

$$\mu(A\backslash C) < \varepsilon \quad \text{e} \quad f|_C \text{ é Lipschitz}$$

Esta propriedade implica não apenas μ-mensurabilidade de $f|_A$, mas também uma propriedade fraca de diferenciabilidade (diferenciabilidade em medida).

Teorema 1.2 (Extensão de funções Lipschitz)**.** *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ uma função Lipschitz. Existe uma função Lipschitz $\overline{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ tal que*

1. *$\overline{f} = f$ em Ω.*
2. *$Lip(\overline{f}) \leqslant \sqrt{k} Lip(f)$.*

Dizemos que uma função Borel $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ é *aproximadamente diferenciável* em $x \in \mathbb{R}^d$ se existe uma transformação linear $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ tal que o quociente da diferença

$$y \mapsto \frac{f(x + \varepsilon y) - f(x)}{\varepsilon}$$

converge em medida a Ly quando $\varepsilon \downarrow 0$. Isto é claramente uma propriedade local. Daqui para frente, toda vez que falemos de diferenciável, estamos nos referindo neste sentido. É possivel provar que, se $f|_K$ é uma função Lipschitz para algum conjunto $K \subset \mathbb{R}^d$, então f é diferenciável em quase todo ponto de K. No seguinte teorema mostramos uma espécie de reciproco desta afirmação: uma função diferenciável pode ser aproximada, no sentido Lusin, com funções Lipschitz.

Teorema 1.3 (Teorema de Lusin para funções diferenciáveis)**.** *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. Assuma que existe uma sequência de conjuntos Borel $A_h \subset \Omega$ tais que $m\left(\Omega \backslash \bigcup_h A_h\right) = 0$ e $f|_{A_h}$ é Lipschitz para todo h. Então f é diferenciável em m-q.t.p. $x \in \Omega$.*
Reciprocamente, se f é diferenciável em todos os pontos de $\Omega' \subset \Omega$, podese escrever Ω' como a união contável de conjuntos A_h tais que $f|_{A_h}$ é Lipschitz para todo h (até uma redefinição de f em um conjunto de m-medida nula).

1.3 Funções Sobolev e regularização

Nesta seção estudamos as funções Sobolev em $\mathbb{R}^d$. Tratamentos mais extensos podem ser encontrados nas referências clássicas [6] e [7].
As funções Sobolev são generalizações naturais das funções Lebesgue L^p. Simplesmente declarado, se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ é um conjunto aberto, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, e n um inteiro positivo, o espaço Sobolev $W^{n,p}(\Omega)$ consiste das funções (ou classes de equivalência de funções) em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas parciais até a ordem n está em $L^p(\Omega)$. Começaremos dando uma definição mais precisa do que entendemos por "derivadas parciais", já que estas não são definidas no sentido clássico.

1.3.1 Definições e propriedades elementares

Ao longo destea seção, U denota um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$. Se V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$, dizemos que V esta *compactamente contido* em U, denotado por $V \subset\subset U$, se $\overline{V}$ é compacto e $\overline{V} \subset U$

Definição 1.1. *Assuma $f \in L^1_{loc}(U)$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Dizemos que $g_i \in L^1_{loc}(U)$ é a derivada parcial fraca (ou distribucional) de f com respeito a x_i em U se*

$$\int_U f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_U g_i \varphi dx \tag{1.4}$$

para toda $\varphi \in C^1_c(U)$.

Notação: É fácil verificar que a derivada parcial fraca com respeito a x_i, se existir, é exclusivamente definida m-q.t.p. Escrevemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv g_i \quad (i = 1, ..., d)$$

e

$$Df \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_d} \right),$$

desde que as derivadas fracas $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_d}$ existem.

Definição 1.2. *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

(i) A função f pertence ao espaço de Sobolev

$$W^{1,p}(U)$$

se $f \in L^p(U)$ e as derivadas parciais fracas $\partial f / \partial x_i$ existem e pertencen a $L^p(U)$, $i = 1, ..., d$.

(ii) A função f pertence a $W^{1,p}_{loc}(U)$ se $f \in W^{1,p}(V)$ para cada conjunto aberto $V \subset\subset U$.

(iii) Dizemos que f é uma função Sobolev se $f \in W^{1,p}_{loc}(U)$ para algum $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Observe atentamente, se f é uma função Sobolev, então, por definição, a fórmula integração por partes

$$\int_U f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi dx$$

é valida para toda $\varphi \in C^1_c(U)$, $i = 1, ..., d$.

Definição 1.3. *Se $f \in W^{1,p}(U)$, definimos sua norma*

$$\|f\|_{W^{1,p}(U)} \equiv \begin{cases} \left(\int_U (|f|^p + |Df|^p)\,dx\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leqslant p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_U (|f| + |Df|) & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Definição 1.4. *(i) Seja $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f \in W^{1,p}(U)$. Dizemos que f_k converge a f em $W^{1,p}(U)$, e escrevemos*

$$f_k \to f \quad em\ W^{1,p}(U),$$

se

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{W^{1,p}(U)} = 0.$$

(ii) Escrevemos

$$f_k \to f \quad em\ W^{1,p}_{loc}(U),$$

que significa

$$f_k \to f \quad em\ W^{1,p}(V)$$

para cada $V \subset\subset U$.

1.3.2 Aproximação por funções suaves

Vamos introducir ferramentas que ajudarão na construção de aproximações suaves para funções dadas.
Primeiro definimos a *convolução* de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ com uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 1.4. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$ a função $y \mapsto f(x-y)\,g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}^d$ e definimos a convolução de f com g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Em adição $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e

$$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

O procedimento de *mollificação* nos deixa aproximar uma função $f \in L^p(U)$ mediante funções suaves, um exemplo disto é o definido a continuação.

Definição 1.5. *Se $\varepsilon > 0$, escrevemos $U_\varepsilon \equiv \{x \in U : \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$*

(i) Defina $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ por

$$\eta(x) \equiv \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

a constante $C > 0$ ajustada tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta dx = 1.$$

(ii) Para cada $\varepsilon > 0$, seja

$$\eta_\varepsilon \equiv \frac{1}{\varepsilon^d}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \left(\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^d\right).$$

Chamamos η de standard mollifier. As funções η_ε são C^∞ e satistazem

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon dx = 1, \quad \text{spt}\left(\eta_\varepsilon\right) \subset B_\varepsilon\left(0\right).$$

Definição 1.6. *Se $f \in L^1_{loc}\left(U\right)$, definimos sua mollificação*

$$f_\varepsilon \equiv \eta_\varepsilon * f \quad \text{em } U_\varepsilon.$$

Isto é,

$$f_\varepsilon\left(x\right) = \int_U \eta_\varepsilon\left(x - y\right) f\left(y\right) dy = \int_U \eta_\varepsilon\left(y\right) f\left(x - y\right) dy$$

para $x \in U_\varepsilon$.

$f_\varepsilon\left(x\right)$ é chamada uma *mollificação* ou *regularização* de f.

A continuação exibimos algumas propriedades básicas da regularização de f, porém relevantes para o nosso trabalho.

Teorema 1.5. *(i) Para cada $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon \in C^\infty\left(U_\varepsilon\right)$.*

(ii) $f_\varepsilon \to f$ q.t.p. quando $\varepsilon \to 0$.

(iii) Se $f \in C\left(U\right)$, então $f_\varepsilon \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de U.

(iv) Se $f \in L^p_{loc}\left(U\right)$ para algum $1 \leqslant p < \infty$, então $f_\varepsilon \to f$ em $L^p_{loc}\left(U\right)$.

(v) Se $f \in W^{1,p}_{loc}\left(U\right)$ para algum $1 \leqslant p < \infty$, então

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, ..., d)$$

sobre U_ε.

(vi) Seja $f \in L^p\left(U\right)$ para algum $1 \leqslant p < \infty$. Então

$$\left\|f_\varepsilon\right\|_{L^p(U)} \leqslant \left\|f\right\|_{L^p(U)}.$$

Teorema 1.6 (Aproximação local por funções suaves)**.** *Assuma $f \in W^{1,p}\left(U\right)$ para algum $1 \leqslant p < \infty$. Então existe uma sequência $\left\{f_k\right\}_{k=1}^\infty \subset W^{1,p}\left(U\right) \cap C^\infty\left(U\right)$ tal que*

$$f_k \to f \quad \text{em } W^{1,p}\left(U\right).$$

Teorema 1.7. *Seja $f : U \to \mathbb{R}$. Então f é localmente Lipschitz em U se, e só se, $f \in W^{1,p}_{loc}\left(U\right)$.*

1.4 Funções maximais

Recordamos aqui a definição da função maximal de uma medida localmente finita e de uma função localmente sumável e afirmamos algumas propriedades bem conhecidas.

Definição 1.7. *Se $f \in L^1_{loc}$, $x \in \mathbb{R}^d$, e $r > 0$, definimos o valor medio de f sobre $B_r(x)$, denotado por $\fint_{B_r(x)} f(y)dy$, como*

$$\fint_{B_r(x)} f(y)dy = \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)dy.$$

Definição 1.8 (Função maximal)**.** *Seja μ uma medida (vetor valuada) localmente finita. Para todo $\lambda > 0$, definimos a função maximal de μ como*

$$M_\lambda \mu(x) = \sup_{0<r<\lambda} \frac{|\mu|(B_r(x))}{m(B_r(x))} = \sup_{0<r<\lambda} \fint_{B_r(x)} d|\mu|(y) \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Quando $\mu = fm$, onde f é uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^k)$ temos

$$M_\lambda f(x) = \sup_{0<r<\lambda} \fint_{B_r(x)} |f(y)|dy.$$

Lema 1.1. *Seja $\lambda > 0$. A função maximal de $\mu = fm$ é finita para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$ e*

$$\int_{B_\rho(0)} M_\lambda f(y)dy \leqslant c_{d,p} + c_d \int_{B_{\rho+\lambda}(0)} |f(y)| \log(2 + |f(y)|)\, dy.$$

Para $p > 1$ e $\rho > 0$ temos uma estimativa forte

$$\int_{B_\rho(0)} (M_\lambda f(y))^p\, dy \leqslant c_{d,p} \int_{B_{\rho+\lambda}(0)} |f(y)|^p dy.$$

Para $p = 1$ só temos uma estimativa fraca

$$m(\{y \in B_\rho(0) : M_\lambda f(y) > t\}) \leqslant \frac{c_d}{t} \int_{B_{\rho+\lambda}(0)} |f(y)|dy,$$

para todo $t > 0$.

Lema 1.2. *Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$. Então existe um conjunto $N \subset \mathbb{R}^d$ com $m(N) = 0$ tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leqslant c_d |x - y| \left(M_\lambda Du(x) + M_\lambda Du(y)\right)$$

para $x, y \in \mathbb{R}^d \backslash N$ com $|x - y| \leqslant \lambda$.

Também lembramos a desigualdade de Chebyshev: Se $f \in L^p$ $(0 < p < \infty)$, então para todo $\alpha > 0$

$$m(\{|f| > \alpha\}) \leqslant \left[\frac{\|f\|_{L_p(\Omega)}}{\alpha}\right]^p. \tag{1.5}$$

1.5 Noções de métodos numéricos em EDOs

Vamos refletir brevemente sobre o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = b\left(t, X(t)\right) \\ X(t_0) = x. \end{cases} \tag{1.6}$$

Aqui estamos supondo b e X suficientemente suaves, como na teoria clássica.
Temos dois itens de informação: Sabemos o valor de X em um único ponto $t = t_0$, ou seja, quando o gráfico da solução for traçado ele deverá começar a partir do ponto (t_0, x), fornecido no enunciado do problema; e a função $b\left(t, X(t)\right)$ indica como a derivada de $X\left(t\right)$ irá variar. O objetivo é achar o valor de X em um novo ponto, a abordagem mais elementar é estimar $X(t)$ fazendo a aproximação $b\left(t, X\left(t\right)\right) \approx b\left(t_0, X\left(t_0\right)\right)$ para $t \in \left[t_0, t_0 + h\right]$, onde $h > 0$ suficientemente pequeno. Integrando (1.6),

$$X\left(t\right) = X\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} b\left(s, X\left(s\right)\right) ds \approx X\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} b\left(t_0, X\left(t_0\right)\right) ds = x + \left(t - t_0\right) b\left(t_0, x\right).$$

Então com $x = X_0$

$$X\left(t\right) = X\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} b\left(s, X\left(s\right)\right) ds \approx X_0 + \left(t - t_0\right) b\left(t_0, X_0\right). \tag{1.7}$$

Dada uma sequência $t_0, t_1 = t_0 + h, t_2 = t_0 + 2h, ...$, onde $h > 0$ é o passo do tempo, denotamos por X_n uma estimativa numérica da solução exata $X\left(t_n\right)$, $n = 0, 1, 2, ...$ Motivado por (1.7), escolhemos

$$X_1 = X_0 + hb\left(t_0, X_0\right).$$

Este procedimento pode ser continuado para produzir aproximações em t_2, t_3 e assim por diante. Em geral, obtemos o esquema recursivo

$$X_{n+1} = X_n + hb\left(t_n, X_n\right), \quad n = 0, 1, ..., \tag{1.8}$$

o celebre *Método de Euler progressivo.*
O método de Euler não é apenas o esquema computacional mais elementar para as EDOs, não obstante a simplicidade, de duradoura importância prática, é também a pedra angular da análise numérica das equações diferenciais de evolução. Note que a solução aproximada X_n não é uma função e sim o vetor $\left[X_0\, X_1, ..., X_n, ..., X_N\right]^T$. A nossa meta é obter $X_n \approx X\left(t_n\right)$, com um erro aceitável. Por trás da palavra "aceitável" estamos dizendo que o erro deve ser pequeno e controlável.
Um método numérico é *convergente* se a solução para a equação de diferença aproxima a solução da equação diferencial à medida que o tamanho de passo se aproxima de zero. Isso significa que

$$\lim_{h \to 0} \max_{0 \leqslant n \leqslant N} \left\| X\left(t_n\right) - X_n \right\| = 0,$$

onde o *erro global* está dado por $GE_N = \max\limits_{0\leqslant n\leqslant N} \|X(t_n) - X_n\|$ (ou em outra norma equivalente), com $t \in [t_0, t_N]$. É crucial entender que a convergência não é apenas uma propriedade desejável, mas sim uma condição indispensável de todo método numérico.

Teorema 1.8 (Teorema de convergência do método de Euler progressivo-caso clásico)**.** *[2] Considere que $X(t) \in C^2[t_0, T]$, $\|X''(t)\|_\infty \leqslant M$ para todo $t \in [t_0, T]$, com M uma constante não negativa. Então a solução numérica satisfaz*

$$|X(t_n) - X_n| \leqslant \exp\{L(t_0 - T)\}|X(t_0) - X_0| + \left|\frac{\exp\{L(t_0 - T)\} - 1}{L}\right| M\frac{h}{2}, \tag{1.9}$$

onde L é a constante Lipschitz do campo $b(t, X(t))$ de (1.6).

2 Estimativas a priori para fluxos regulares Lagrangeanos

Neste capítulo mostramos algumas estimativas quantitativas para os campos vetoriais $W^{1,p}$ com $p > 1$, que permitem recuperar os resultados de existência, unicidade e estabilidade dos fluxos regulares Lagrangeanos. Além disso, essas estimativas têm alguns corolários interesantes, em termos de compacidade, regularidade quantitativa e estabilidade quantitativa dos fluxos regulares Lagrangeanos.
Um dos méritos desta abordagem é o fato de que toda a derivação é puramente Lagrangeana, no sentido de que tudo é deduzido das estimativas e da definição de fluxo regular Lagrangeano apenas.
A única desvantagem está na suposição $p > 1$, (que na verdade pode ser relaxada um pouco, veja [3]), mas atualmente não podemos cobrir o caso $p = 1$.

Definição 2.1 (Fluxo Regular Lagrangeano)**.** *Seja $b \in L^1_{loc}\left([0,T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right)$. Dizemos que uma função $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é um fluxo regular Lagrangeano para o campo vetorial b se*

(i) Para m-q.t.p. $x \in \mathbb{R}^d$ a função $t \mapsto X(t,x)$ é uma solução integral absolutamente contínua de $\gamma'(t) = b(t,\gamma(t))$ para $t \in [0,T]$, com $\gamma(0) = x$;

(ii) Existe uma constante L independente de t tal que

$$X(t,\cdot)_{\#}m \leqslant Lm.$$

A constante em (ii) será chamada a constante de compressibilidade de X.

2.1 Estimativas a priori para campos vetoriais limitados e corolários

Nesta seção, mostramos estimativas no caso particular de campos vetoriais limitados (veja [4]). Esta estimativa e suas conseqüências são apenas casos particulares dos teoremas mais gerais apresentados na refêrencia [3]. No entanto, as provas dadas são independentes neste cenário simplificado, a fim de ilustrar melhor as idéias básicas de nossa análise.

2.1.1 Estimativa de uma quantidade integral e estimativas Lipschitz

Teorema 2.1. *[3] Seja b um campo vetorial pertencente a $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)\cap L^1\left([0,T];W^{1,p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)\right)$ para algum $p>1$ e seja X um fluxo regular Lagrangeano associado a b. Seja L a constante de compressibilidade de X, como na Definição 2.1(ii). Para todo $p>1$ defina a seguinte quantidade integral:*

$$A_p(R,X)=\left[\int_{B_R(0)}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0\leqslant r\leqslant 2R}\fint_{B_r(0)}\log\left(\frac{|X(t,x)-X(t,y)|}{r}+1\right)dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Então temos

$$A_p(R,X)\leqslant C(R,L,\|D_xb\|_{L^1(L^p)}).$$

Demonstração. Para $0\leqslant t\leqslant T$, $0<r<2R$ e $x\in B_R(0)$ defina

$$Q(t,x,r)=\fint_{B_r(x)}\log\left(\frac{|X(t,x)-X(t,y)|}{r}+1\right)dy.$$

Da definição 2.1(i) e graças ao Teorema 1.7 segue-se que para m-q.t.p. $x\in B_R(0)$ e para todo $r>0$ a aplicação $t\mapsto Q(t,x,r)$ é Lipschitz e

$$\begin{aligned}
\frac{dQ}{dt}(t,x,r)&=\frac{d}{dt}\left(\fint_{B_r(0)}\log\left(\frac{|X(t,x)-X(t,y)|}{r}+1\right)dy\right)\\
&=\fint_{B_r(0)}\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{|X(t,x)-X(t,y)|}{r}+1\right)\right)dy\\
&=\fint_{B_r(0)}\frac{r}{|X(t,x)-X(t,y)|+r}\cdot\operatorname{sign}\left(X(t,x)-X(t,y)\right)\frac{\left(\frac{d}{dt}\left(X(t,x)-X(t,y)\right)\right.}{r}dy\\
&=\fint_{B_r(0)}\operatorname{sign}\left(X(t,x)-X(t,y)\right)\frac{\frac{d}{dt}\left(X(t,x)-X(t,y)\right)}{|X(t,x)-X(t,y)|+r}dy\\
&\leqslant\fint_{B_r(0)}\frac{\left|\frac{d}{dt}\left(X(t,x)-X(t,y)\right)\right|}{|X(t,x)-X(t,y)|+r}dy\\
&=\fint_{B_r(0)}\frac{|b(t,X(t,x))-b(t,X(t,y))|}{|X(t,x)-X(t,y)|+r}dy.
\end{aligned}$$

Agora defina $\tilde{R} = 4R + 2T\|b\|_\infty$, logo $|X(t,x) - X(t,y)| \leqslant \tilde{R}$, pois

$$\begin{aligned}
|X(t,x) - X(t,y)| &= |x + \int_0^t b(s, X(s,x))ds - y - \int_0^t b(s, X(s,y))ds| \\
&= |x - y + \int_0^t (b(s, X(s,x)) - b(s, X(s,y)))\, ds| \\
&\leqslant |x - y| + \left|\int_0^t (b(s, X(s,x)) - b(s, X(s,y)))\, ds\right| \\
&\leqslant |x| + |y| + \int_0^t |b(s, X(s,x))|ds + \int_0^t |b(s, X(s,y))|ds \\
&\leqslant |x| + |y| + \int_0^T |b(s, X(s,x))|ds + \int_0^T |b(s, X(s,y))|ds \\
&\leqslant 4R + 2\|b\|_\infty \int_0^T ds \\
&= 4R + 2T\|b\|_\infty \\
&= \tilde{R},
\end{aligned}$$

logo aplicando o Lema 1.2 em b temos que:

$$|b(t, X(t,x)) - b(t, X(t,y))| \leqslant c_d\, |X(t,x) - X(t,y)|\, (M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,x)) + M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,y)))\,.$$

Então

$$\frac{|b(t, X(t,x)) - b(t, X(t,y))|}{|X(t,x) - X(t,y)| + r} \leqslant c_d\, (M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,x)) + M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,y)))\, \frac{|X(t,x) - X(t,y)|}{|X(t,x) - X(t,y)| + r},$$

e integrando sobre $B_r(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Q(t,x,r) &\leqslant \fint_{B_r(x)} \frac{|b(t, X(t,x)) - b(t, X(t,y))|}{|X(t,x) - X(t,y)| + r} dy \\
&\leqslant c_d \fint_{B_r(x)} (M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,x)) + M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,y)))\, \frac{|X(t,x) - X(t,y)|}{|X(t,x) - X(t,y)| + r} dy \\
&= c_d \fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,x)) \frac{|X(t,x) - X(t,y)|}{|X(t,x) - X(t,y)| + r} dy \\
&\quad + c_d \fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,y)) \frac{|X(t,x) - X(t,y)|}{|X(t,x) - X(t,y)| + r} dy \\
&\leqslant c_d M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,x)) \fint_{B_r(x)} dy + c_d \fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,y)) dy \\
&= c_d M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,x)) + c_d \fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}} Db(t, X(t,y)) dy.
\end{aligned}$$

Então integrando com respeito a t

$$Q(t,x,r) = \int_0^t \frac{dQ}{ds} ds \leqslant c_d \int_0^t M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,x)) ds + c_d \int_0^t \left(\fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,y)) dy \right) ds + C.$$

Tomando o supremo para $0 < r < 2R$

$$\begin{aligned}\sup_{0<r<2R} Q(t,x,r) \leqslant & \sup_{0<r<2R}\left[c_d\int_0^t M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,x))ds\right]\\ & + \sup_{0<r<2R}\left[c_d\int_0^t\left(\fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,y))dy\right)ds + C\right]\\ = & \, c_d\int_0^t M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,x))ds\\ & + c_d\int_0^t \sup_{0<r<2R}\left(\fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,y))dy\right)ds + C\end{aligned}$$

Tomando o supremo para $0 \leqslant t \leqslant T$

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\sup_{0<r<2R} Q(t,x,r) \leqslant & \, C + c_d\int_0^T M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,x))ds\\ & + c_d\int_0^T \sup_{0<r<2R}\fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,y))dyds.\end{aligned}$$

Tomando a norma L^p sobre $B_R(0)$ temos

$$\begin{aligned}& A_p(R,X)\\ & \leqslant \left\| C + c_d\int_0^T M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,x))ds + c_d\int_0^T \sup_{0<r<2R}\fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,y))dyds\right\|_{L^p(B_R(0))}\\ & \leqslant c_{p,R} + c_d\left\|\int_0^T M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,x))dt\right\|_{L^p(B_R(0))}\\ & \quad + c_d\left\|\int_0^T \sup_{0<r<2R}\fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}}Db(s,X(s,y))dyds\right\|_{L^p(B_R(0))}\\ & = c_{p,R} + \mathbf{I} + \mathbf{II}.\end{aligned}$$

Agora, pela Definição 2.1(ii) e pelo Lema 1.1

$$
\begin{aligned}
\mathbf{II} &= c_d \left\| \int_0^T \sup_{0<r<2R} \fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,y)) dy ds \right\|_{L^p(B_R(0))} \\
&\leqslant c_d \int_0^T \left\| \sup_{0<r<2R} \fint_{B_r(x)} M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,y)) dy \right\|_{L^p(B_R(0))} ds \\
&= c_d \int_0^T \left\| \sup_{0<r<2R} \fint_{B_r(x)} \left[(M_{\tilde{R}} Db) \circ (s, X(s,\cdot)) \right](y) dy \right\|_{L^p(B_R(0))} ds \\
&= c_d \int_0^T \left\| M_{2R} \left[(M_{\tilde{R}} Db) \circ (s, X(s,\cdot)) \right](x) \right\|_{L^p(B_R(0))} ds \\
&\leqslant c_{d,p} \int_0^T \left\| (M_{\tilde{R}} Db) \circ (s, X(s,\cdot))(x) \right\|_{L^p(B_{3R}(0))} ds \\
&= c_{d,p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,x)) \right\|_{L^p(B_{3R}(0))} ds \\
&= c_{d,p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,x)) \cdot \mathbf{1}_{B_{3R}(0)}(x) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ds \\
&= c_{d,p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,x)) \cdot \mathbf{1}_{B_{3R}(0)} \left(X^{-1} \circ X(s,x) \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ds \\
&= c_{d,p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,x)) \cdot \mathbf{1}_{X(B_{3R}(0))}(X(s,x)) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ds \\
&\leqslant c_{d,p} L^{1/p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s,x) \cdot \mathbf{1}_{X(B_{3R}(0))}(x) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ds \\
&= c_{d,p} L^{1/p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s,x) \cdot \mathbf{1}_{B_{3R+T\|b\|_\infty}(0)}(x) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ds \\
&= c_{d,p} L^{1/p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s,x) \right\|_{L^p(B_{3R+T\|b\|_\infty}(0))} ds \\
&\leqslant c_{d,p} L^{1/p} \int_0^T \left\| Db(s,x) \right\|_{L^p(B_{3R+\tilde{R}+T\|b\|_\infty}(0))} ds.
\end{aligned}
$$

Assim mesmo,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= c_d \left\| \int_0^T M_{\tilde{R}} Db(s, X(s,x)) ds \right\|_{L^p(B_R(0))} \\
&\leqslant c_d L^{1/p} \int_0^T \left\| M_{\tilde{R}} Db(s,x) \right\|_{L^p\left(B_{R+T\|b\|_\infty}(0)\right)} ds \\
&\leqslant c_{d,p} L^{1/p} \int_0^T \left\| Db(s,x) \right\|_{L^p\left(B_{R+\tilde{R}+T\|b\|_\infty}(0)\right)} ds.
\end{aligned}
$$

Portanto, $A_p(R,X) \leqslant C\left(R, L, \|D_x b\|_{L^1(L^p)}\right)$. □

Agora mostramos como a estimativa da quantidade integral dá uma estimativa Lipschitz quantitativa.

Proposição 2.1 (Estimativa Lipschitz)**.** *[3] Seja $X : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função mensurável. Então, para todo $\varepsilon > 0$ e para todo $R > 0$, existe um conjunto $K \subset B_R(0)$ tal que $m\left(B_R\left(0\right) \backslash K\right) \leqslant \varepsilon$ e para todo $0 \leqslant t \leqslant T$ temos*

$$Lip\left(X(t,\cdot)|_K\right) \leqslant \exp \frac{c_d A_p\left(R,X\right)}{\varepsilon^{1/p}}$$

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ fixos. Podemos supor que $A_p\left(R,X\right)$ é finita, pois caso contrário a conclusão é trivial; baixo esta suposição consideremos $M = M\left(\varepsilon, p, A_p\left(R,X\right)\right) = \dfrac{A_p\left(R,X\right)}{\varepsilon^{1/p}}$ e $f(t,x,r) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \sup\limits_{0\leqslant r\leqslant 2R} \fint_{B_r(0)} \log\left(\dfrac{|X(t,x) - X(t,y)|}{r} + 1\right) dy$. Seja

$$K = \left\{ x \in B_R(0) : |f(x)| < \frac{c_d A_p\left(R,X\right)}{\varepsilon^{1/p}} \right\} \subset B_R\left(0\right),$$

então da desigualdade de Chebyshev temos que

$$\begin{aligned} m\left(B_R(0)\backslash K\right) &= m\left(\{x \in B_R(0) : |f(x)| > M\}\right) \\ &\leqslant \left(\frac{\|f\|_{L^p(B_R(0))}}{M}\right)^p \\ &= \frac{\left(A_p\left(R,X\right)\right)^p}{\frac{\left(A_p(R,X)\right)^p}{\varepsilon}} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

e $f(t,x,r) \leqslant M$ para todo $x \in K$.
Isto último claramente significa que

$$\fint_{B_r(0)} \log\left(\frac{|X(t,x) - X(t,y)|}{r} + 1\right) dy \leqslant M \quad \text{para todo } x \in K,\ t \in [0,T], \text{ e } r \in (0,2R).$$

Agora, para $x, y \in K$ fixos. Como $x, y \in K \subset B_R(0)$, então $|x-y| \leqslant |x| + |y| < 2R$. Seja $r = |x-y|$ e calcule

$$\begin{aligned} &\log\left(\frac{|X(t,x) - X(t,y)|}{r} + 1\right) \\ &= \fint_{B_r(x)\cap B_r(y)} \log\left(\frac{|X(t,x) - X(t,y)|}{r} + 1\right) dz \\ &\leqslant \fint_{B_r(x)\cap B_r(y)} \left(\log\left(\frac{|X(t,x) - X(t,z)|}{r} + 1\right) + \log\left(\frac{|X(t,y) - X(t,z)|}{r} + 1\right)\right) dz \\ &\leqslant c_d \fint_{B_r(x)} \log\left(\frac{|X(t,x) - X(t,z)|}{r} + 1\right) dz + c_d \fint_{B_r(y)} \log\left(\frac{|X(t,y) - X(t,z)|}{r} + 1\right) dz \\ &\leqslant c_d M = \frac{c_d A_p\left(R,X\right)}{\varepsilon^{1/p}}. \end{aligned}$$

E isto implica que $\log\left(\frac{|X(t,x)-X(t,y)|}{r}+1\right) \leqslant \frac{c_d A_p(R,X)}{\varepsilon^{1/p}}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{|X(t,x)-X(t,y)|}{r}+1 \leqslant \exp\left\{\frac{c_d A_p(R,X)}{\varepsilon^{1/p}}\right\}\\
&\Rightarrow \frac{|X(t,x)-X(t,y)|+r}{r} \leqslant \exp\left\{\frac{c_d A_p(R,X)}{\varepsilon^{1/p}}\right\}\\
&\Rightarrow |X(t,x)-X(t,y)| < |X(t,x)-X(t,y)|+r \leqslant \exp\left\{\frac{c_d A_p(R,X)}{\varepsilon^{1/p}}\right\} r\\
&\Rightarrow |X(t,x)-X(t,y)| \leqslant \exp\left\{\frac{c_d A_p(R,X)}{\varepsilon^{1/p}}\right\} |x-y| \quad \text{para todo } x,y\in K.
\end{aligned}$$

E portanto,

$$Lip\left(X(t,\cdot)|_K\right) \leqslant \exp\left\{\frac{c_d A_p(R,X)}{\varepsilon^{1/p}}\right\}$$

□

2.1.2 Existência, regularidade e compacidade

Nesta subseção, coletamos três corolários diretos das estimativas derivadas acima, relativas à diferenciabilidade, existência e compactação aproximadas dos fluxos Lagrangeanos regulares.

Corolário 2.1 (Diferenciabilidade do fluxo)**.** *[3] Seja b um campo vetorial em $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$ e pertencente a $L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$ para algum $p>1$, e seja X um fluxo regular lagrangeano associado a b. Então $X(t,\cdot)$ é diferenciável m-q.t.p. em $\mathbb{R}^d$, para todo $t\in[0,T]$.*

Demonstração. Consideremos as bolas $B_n(0)\subset\mathbb{R}^d$ com $n\in\mathbb{N}$, é claro que $\mathbb{R}^d=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(0)$ (podemos tomar as bolas encaixadas $B_n(0)\subset B_{n+1}(0)$, de tal modo que $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n(0)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(B_n(0)\right)$). Pela Proposição 2.1 para todo $n\in\mathbb{N}$, existe um conjunto $K_n\subset B_n(0)\subset\mathbb{R}^d$ tal que $m\left(B_n(0)\backslash K_n\right)\leqslant\frac{1}{n}$ e para todo $t\in[0,T]$ temos que $X(t,\cdot)|_{K_n}$ é Lipschitz. Alem disso,

$$\begin{aligned}
m\left(\mathbb{R}^d\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n\right) &= m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n(0)\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n\right) = \lim_{n\to\infty} m\left(B_n(0)\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n\right)\\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} m\left(B_n(0)\backslash K_n\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.
\end{aligned}$$

Então $m\left(\mathbb{R}^d\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n\right)=0$, e assim pelo Teorema 1.3 concluímos a demonstração deste corolário. □

Lema 2.1. *[3] Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto Borel limitado e seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $\mathbb{R}^m$. Suponha que para todo $\delta > 0$ podemos achar uma constante $0 < M_\delta < \infty$ e, para todo n fixo, um conjunto Borel $B_{n,\delta} \subset \Omega$ com $m(\Omega \backslash B_{n,\delta}) \leqslant \delta$ de tal forma que*

$$\|f_n\|_{L^\infty\left(B_{n,\delta}\right)} \leqslant M_\delta \quad e \quad Lip\left(f_n|_{B_{n,\delta}}\right) \leqslant M_\delta$$

Então a sequência $\{f_n\}$ é precompacta em medida em Ω.

Demonstração. Para todo $j \in \mathbb{N}$ podemos achar uma constante $M_{1/j}$ e os conjuntos $B_{n,1/j}$ como na hipótese do lema, com $\delta = 1/j$. Agora, argumentando componente por componente e com a ajuda do Teorema 1.2, podemos extender qualquer função $f_n|_{B_{n,1/j}}$ a uma função f_n^j definida sobre Ω tal que

$$\left\|f_n^j\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M_{1/j} \quad \text{para todo } n$$

e

$$Lip\left(f_n^j\right) \leqslant c_m M_{1/j} \quad \text{para todo } n.$$

(Note que como as funções f_n^j são Lipschitz, então f_n^j são uniformemente contínuas para todo n, portanto, f_n^j pode ser extendida a uma função contínua $g_n^j : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, e como $\overline{\Omega}$ é compacto, então g_n^j é uniformemente contínua). Logo a continuidade uniforme de todas as f_n^j podese extender ao compacto $\overline{\Omega}$. A seguir, trabalharemos com essa extensão contínua, que ainda denotaremos por f_n^j.

Considerando $M = \max\left\{c_m M_{1/j} : j \in \mathbb{N}\right\}$ temos que as funções $\{f_n\}$ são Lipschitz com a mesma constante M, então $\left\{f_n^j\right\}$ é uma família uniformemente equicontínua. Então aplicando o Teorema de Arzela-Ascoli e usando o procedimento diagonal da prova do mesmo, achamos uma subsequência (em n) tal que para todo j a sequência $\left\{f_n^j\right\}_n$ converge uniformemente em Ω a uma função f_∞^j.

Agora, fixe $\varepsilon > 0$. Escolhamos $j \geqslant 3/\varepsilon$ e achamos $N(j) = N$ tal que

$$\int_\Omega \left|f_i^j - f_k^j\right| dx \leqslant \varepsilon/3 \quad \text{para todo } i, k > N.$$

Mantendo j e N fixos, podemos estimar para $i,k>N$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 1\wedge|f_i-f_k|\,dx &\leqslant \int_\Omega 1\wedge\left|f_i-f_i^j\right|dx+\int_\Omega 1\wedge\left|f_i^j-f_k^j\right|dx+\int_\Omega 1\wedge\left|f_k^j-f_k\right|dx\\
&\leqslant \int_{\Omega\backslash B_{i,1/j}} 1\wedge\left|f_i-f_i^j\right|dx+\int_{B_{i,1/j}} 1\wedge\left|f_i-f_i^j\right|dx+\int_\Omega 1\wedge\left|f_i^j-f_k^j\right|dx\\
&\quad+\int_{\Omega\backslash B_{i,1/j}} 1\wedge\left|f_k^j-f_k\right|dx+\int_{B_{i,1/j}} 1\wedge\left|f_k^j-f_k\right|dx\\
&\leqslant \int_{\Omega\backslash B_{i,1/j}} dx+\int_{B_{i,1/j}}\left|f_i-f_i^j\right|dx+\int_\Omega 1\wedge\left|f_i^j-f_k^j\right|dx\\
&\quad+\int_{\Omega\backslash B_{i,1/j}} dx+\int_{B_{i,1/j}}\left|f_k^j-f_k\right|dx\\
&\leqslant m\left(\Omega\backslash B_{i,1/j}\right)+\int_\Omega\left|f_i^j-f_k^j\right|dx+m\left(\Omega\backslash B_{k,1/j}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{j}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{1}{j}\leqslant\varepsilon.
\end{aligned}$$

Seguese que a sequência dada têm uma subsequência que é Cauchy com respeito à convergência em medida em Ω. Isto implica nosso resultado. □

Corolário 2.2 (Compacidade do fluxo)**.** *[3] Seja $\{b_n\}$ uma sequência de campos vetoriais equilimitados em $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$ e pertencente ao espaço $L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$ para algum $p>1$. Para cada n, seja X_n um fluxo regular Lagrangeano associado a b_n e seja L_n a constante de comprensibilidade de X_n, como na definição 2.1 (ii). Suponha que a sequência $\{L_n\}$ é equilimitada, então a sequência $\{X_n\}$ é fortemente precompacta em $L^1_{loc}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$.*

Demonstração. Fixe $\delta>0$ e $R>0$. Dado que $\{b_n\}$ é equilimitada em $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$, existe $M>0$ tal que

$$\|b_n\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)}\leqslant M\quad\text{para todo } n.$$

Pela definição de X_n temos que

$$\begin{aligned}
|X_n(t,x)| &= |x+\int_{t_0}^t b_n(s,X_n(s,x))\,ds|\\
&\leqslant |x|+|\int_{t_0}^t b_n(s,X_n(s,x))\,ds|\\
&\leqslant |x|+\int_{t_0}^t |b_n(s,X_n(s,x))|ds\\
&\leqslant R+\int_0^T M ds = R+MT,
\end{aligned}$$

então $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\sup\limits_{x\in B_R(0)}|X_n(t,x)|\leqslant R+MT$, isto é, $\|X_n(t,x)\|_{L^\infty([0,T]\times B_R(0))}\leqslant R+MT=C_1(R)$.
Aplicando a Proposição 2.1, para todo n podemos achar um conjunto Borel $K_{n,\delta}$ tal que

$m\left(B_R\left(0\right)\setminus K_{n,\delta}\right)\leqslant\delta$ e

$$Lip\left(X_n\left(t,\cdot\right)|_{K_{n,\delta}}\right)\leqslant\exp\left\{\frac{c_d A_p\left(R,X_n\right)}{\delta^{1/p}}\right\}\quad\text{para todo } t\in[0,T].$$

Note que as hipóteses do Teorema 2.1 são satisfeitas por X_n para todo n, então $A_p\left(R,X_n\right)$ é equilimitado com respeito a n. Ainda mais, usando a Definição 2.1 (i) e pela equilimitação de $\{b_n\}$ em $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$, deduzimos que existe uma constante $C_2^\delta\left(R\right)$ tal que

$$Lip\left(X_n|_{[0,T]\times K_{h,\delta}}\right)\leqslant C_2^\delta\left(R\right),$$

ou seja, X_n é Lipschitz em $[0,T]\times K_{n,\delta}$.
Se agora definimos $B_{n,\delta}=[0,T]\times K_{n,\delta}$ e $M_\delta=\max\left\{C_1\left(R\right),C_2^\delta\left(R\right)\right\}$, nós estamos na posição de aplicar o Lema 2.1 com $\Omega=[0,T]\times B_R\left(0\right)$. Então a sequência $\{X_n\}$ é precompacta em medida em Ω, e pela equilimitação em L^∞ deduzimos que é também precompacto em $L^1\left([0,T]\times B_R\left(0\right)\right)$. Usando um argumento diagonal estandar é possível concluir que $\{X_n\}$ é localmente precompacto em $L^1\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$. □

Corolário 2.3 (Existência do fluxo)**.** *Seja b um campo vetorial em $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$ e pertencente a $L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$ para algum $p>1$. Assuma que $b\in L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$ e $[\operatorname{div}b]^-\in L^1\left([0,T];L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$, então existe um fluxo regular Lagrangeano associado a b.*

Demonstração. Este resultado é consequência imediata do Corolário 2.2.
Para $\varepsilon>0$, escolhamos um mollifier positivo em $\mathbb{R}^d$ para b, $b_\varepsilon=(b*\eta_\varepsilon)$. Debemos provar os seguintes items:

(i) $b_\varepsilon\in L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)$.

(ii) $b_\varepsilon\in L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$.

(iii) L_ε é equilimitado.

Como

$$\begin{aligned}\left|b_\varepsilon\left(t,x\right)\right|&=\left|\left(b*\eta_\varepsilon\right)\left(x\right)\right|\\&=\left|\int b\left(t,x-y\right)\eta_\varepsilon(y)dy\right|\\&\leqslant\int\left|b\left(t,x-y\right)\right|\left|\eta_\varepsilon(y)\right|dy\\&\leqslant\left\|b\right\|_\infty\int\eta_\varepsilon(y)dy=\left\|b\right\|_\infty,\end{aligned}$$

então $b_\varepsilon \in L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)$. Na verdade isto prova que $\{b_\varepsilon\}$ é equilimitado em $L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)$. Agora, vejamos que $b_\varepsilon \in L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$. De fato, pelo item (vi) do Teorema 1.5

$$\begin{aligned}\|b_\varepsilon\|_{L^1(L^p)} &= \int_{[0,T]} \|b_\varepsilon\|_{L^p}\, ds \\ &\leqslant \int_{[0,T]} \|b\|_{L^p}\, ds = \|b\|_{L^1(L^p)}.\end{aligned}$$

Então $b_\varepsilon \in L^1\left([0,T];L^p\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$.
Sabemos pelo item (v) do Teorema 1.5 que $Db_\varepsilon = (Db)_\varepsilon = \eta_\varepsilon * Db$, então por isto e pela desigualdade presentada no Teorema 1.4 temos

$$\begin{aligned}\|Db_\varepsilon\|_{L^1(L^p)} &= \int_{[0,T]} \|Db_\varepsilon\|_{L^p}\, ds \\ &= \int_{[0,T]} \|\eta_\varepsilon * Db\|_{L^p}\, ds \\ &\leqslant \int_{[0,T]} \|\eta_\varepsilon\|_{L^1} \|Db\|_{L^p}\, ds \\ &= \|Db\|_{L^1(L^p)}.\end{aligned}$$

Então $Db_\varepsilon \in L^1\left([0,T];L^p\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$.
Por último mostremos que L_ε é equilimitado. Da Definição 2.1(ii) temos que para φ Borel mensurável

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\left(X_\varepsilon(t,\cdot)_{\#}\, m\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(X_\varepsilon(t,x)\right) dx,$$

e por uma mudança de variáveis

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\left(X_\varepsilon(t,x)\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\, JX_\varepsilon^{-1}(y)\, dy,$$

onde

$$\begin{aligned}JX_\varepsilon^{-1} &= \exp\left\{-\int_0^T \operatorname{div} b_\varepsilon\left(s, X_\varepsilon(s,x)\right) ds\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\operatorname{div} b(s,y)\, dyds\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\left(\operatorname{div} b^+(s,y) - \operatorname{div} b^-(s,y)\right) dyds\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\operatorname{div} b^+(s,y)\, dyds\right\} \times \exp\left\{\int_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\operatorname{div} b^-(s,y)\, dyds\right\}.\end{aligned}$$

Note que $\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\operatorname{div} b^+(s,y)\, dy \geqslant 0$, então $\int_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\operatorname{div} b^+(s,y)\, dyds \geqslant 0$, e portanto, $\exp\left\{-\int_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\varepsilon(x-y)\operatorname{div} b^+(s,y)\, dyds\right\}$ é limitada $(\leqslant 1)$.

Por outro lado, note que pela desigualdade dada no Teorema 1.4

$$\begin{aligned}\operatorname{div} b_\varepsilon^- (s,y) &\leqslant \left|\operatorname{div} b_\varepsilon^- (s,y)\right| \leqslant \left\|\operatorname{div} b_\varepsilon^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty} \\ &\leqslant \left\|\eta_\varepsilon * \operatorname{div} b^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty} \leqslant \|\eta_\varepsilon\|_{L^1} \left\|\operatorname{div} b^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty} \\ &\leqslant \left\|\operatorname{div} b^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\exp\left\{\int_{[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon (x-y) \operatorname{div} b^- (s,y)\, dyds\right\} &= \exp\left\{\int_{[0,T]} \left(\operatorname{div} b_\varepsilon{}^- (s,y)\right) ds\right\} \\ &\leqslant \exp\left\{\int_{[0,T]} \left\|\operatorname{div} b_\varepsilon{}^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty} ds\right\} \\ &\leqslant \exp\left\{\int_{[0,T]} \left\|\operatorname{div} b^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty} ds\right\}.\end{aligned}$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi (X_\varepsilon (t,x))\, dx \leqslant (1)\, L_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \varphi (y)\, dy \leqslant L \int_{\mathbb{R}^d} \varphi (y)\, dy, \tag{2.1}$$

com $L_\varepsilon = \exp\left\{\int_{[0,T]} \left\|\operatorname{div} b_\varepsilon^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right\}$ e $L = \exp\left\{\int_{[0,T]} \left\|\operatorname{div} b^- (s,\cdot)\right\|_{L^\infty}\right\}$.
Da primeira desigualdade de (2.1) temos que para cada ε existe um fluxo regular Lagrangeano X_ε associado a b_ε com constante de comprenssibilidade L_ε. E pela segunda desigualdade de (2.1) temos que a sequência $\{L_\varepsilon\}$ é equilimitada por L. Satisfazendo assim as hipóteses do Corolário 2.2, temos como consequência que $\{X_\varepsilon\}$ é fortemente precompacto em $L^1_{loc}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$, isto é, existe uma subsequência de $\{X_\varepsilon\}$ convergente em $L^1\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$, digamos $X_\varepsilon \to X$. Debemos provar que X satisfaz a definição de fluxo regular Lagrangeano.

Vamos provar que $\|b_\varepsilon (s, X_\varepsilon (s,x)) - b (s, X (s,x))\|_{L^1(B_r(0))} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. De fato,

$$\begin{aligned}\|b_\varepsilon (s, X_\varepsilon (s,x)) - b (s, X (s,x))\|_{L^1(B_r(0))} &\leqslant \|b_\varepsilon (s, X_\varepsilon (s,x)) - b (s, X_\varepsilon (s,x))\|_{L^1(B_r(0))} \\ &\quad + \|b (s, X_\varepsilon (s,x)) - b (s, X (s,x))\|_{L^1(B_r(0))}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|b_\varepsilon (s, X_\varepsilon (s,x)) - b (s, X_\varepsilon (s,x))\|_{L^1(B_r(0))} &= \|(b_\varepsilon - b) (s, X_\varepsilon (s,x))\|_{L^1(B_r(0))} \\ &\leqslant L \|(b_\varepsilon - b) (s,x)\|_{L^1\left(B_{r+T\|b\|_\infty}(0)\right)} \\ &= L \|b_\varepsilon (s,x) - b (s,x)\|_{L^1\left(B_{r+T\|b\|_\infty}(0)\right)},\end{aligned}$$

logo $\|b_\varepsilon(s, X_\varepsilon(s,x)) - b(s, X_\varepsilon(s,x))\|_{L^1(B_r(0))} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\|b(s, X_\varepsilon(s,x)) - b(s, X(s,x))\|_{L^1(B_r(0))} \\
&\leqslant c_d \| |X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)| \left(M_\lambda Db(s, X_\varepsilon(s,x)) - M_\lambda Db(s, X(s,x))\right)\|_{L^1(B_r(0))} \\
&\leqslant c_d \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))} \|M_\lambda Db(s, X_\varepsilon(s,x)) - M_\lambda Db(s, X(s,x))\|_{L^p(B_r(0))} \\
&\leqslant c_d \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))} \|M_\lambda Db(s, X_\varepsilon(s,x))\|_{L^p(B_r(0))} \\
&\quad + c_d \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))} \|M_\lambda Db(s, X(s,x))\|_{L^p(B_r(0))} \\
&\leqslant c_d \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))} \left(L_\varepsilon^{1/p} \|M_\lambda Db(s,x)\|_{L^p\left(B_{r+T\|b_\varepsilon\|_\infty}(0)\right)}\right) \\
&\quad + c_d \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))} \left(L^{1/p} \|M_\lambda Db(s,x)\|_{L^p\left(B_{r+T\|b\|_\infty}(0)\right)}\right) \\
&\leqslant c_d \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))} \left(2L^{1/p} \|M_\lambda Db(s,x)\|_{L^p\left(B_{r+T\|b\|_\infty}(0)\right)}\right) \\
&\leqslant c_{d,p} L^{1/p} \|Db(s,x)\|_{L^p\left(B_{r+\lambda+T\|b\|_\infty}(0)\right)} \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))} \\
&= C_1 \|X_\varepsilon(s,x) - X(s,x)\|_{L^q(B_r(0))},
\end{aligned}$$

com $C_1 = c_{d,p} L^{1/p} \|Db(s,x)\|_{L^p\left(B_{r+\lambda+T\|b\|_\infty}(0)\right)} < \infty$. Então pelo Teorema de confronto

$$\|b(s, X_\varepsilon(s,x)) - b(s, X(s,x))\|_{L^1(B_r(0))} \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0$$

Portanto, verificase que cada ponto limite de $\{X_\varepsilon\}$ em $L^1\left([0,T] \times \mathbb{R}^d\right)$ é um fluxo regular Lagrangeano associado a b.

□

Teorema 2.2 (Estabilidade do fluxo)**.** *[3] Sejam b e $\tilde{b}$ campos vetoriais em $L^\infty\left([0,T] \times \mathbb{R}^d\right)$ e pertencentes a $L^1\left([0,T]; W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d\right)\right)$ para algum $p > 1$. Sejam X e $\tilde{X}$ fluxos regulares Lagrangeanos associados a b e $\tilde{b}$, respectivamente, e denote por L e $\tilde{L}$ as constantes de comprenssibilidade destos fluxos. Então para todo $\tau \in [0,T]$ temos que*

$$\left\|X(\tau,\cdot) - \tilde{X}(\tau,\cdot)\right\|_{L^1(B_r(0))} \leqslant C \left|\log \left\|b - \tilde{b}\right\|_{L^1([0,\tau]\times B_R(0))}\right|^{-1},$$

onde $R = r + T\|b\|_\infty$, e a constante C só depende de $\tau, r, \left\|\tilde{b}\right\|_\infty, \|b\|_\infty, L, \tilde{L}$ e $\|D_x b\|_{L^1(L^p)}$.

Demonstração. Seja $\delta = \left\|b - \tilde{b}\right\|_{L^1([0,\tau]\times B_R(0))}$ e considere a função

$$g(t) = \int_{B_r(0)} \log\left(\frac{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right|}{\delta} + 1\right) dx.$$

Claramente

$$g(0) = \int_{B_r(0)} \log\left(\frac{\left|X(0,x) - \tilde{X}(0,x)\right|}{\delta} + 1\right) dx = \int_{B_r(0)} \log\left(\frac{|x-x|}{\delta} + 1\right) dx = 0.$$

e depois de alguns cálculos padrão chegamos

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \int_{B_r(0)} \left(\frac{\delta}{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta} \right) \frac{\operatorname{sign}\left(X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right)}{\delta} \left(\frac{dX(t,x)}{dt} - \frac{d\tilde{X}(t,x)}{dt} \right) dx \\
&\leqslant \int_{B_r(0)} \left| \frac{dX(t,x)}{dt} - \frac{d\tilde{X}(t,x)}{dt} \right| \left(\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta \right)^{-1} dx \\
&= \int_{B_r(0)} \frac{\left|b\left(t, X(t,x)\right) - \tilde{b}\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right|}{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta} dx \\
&= \int_{B_r(0)} \frac{\left|b\left(t, X(t,x)\right) - b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right) + b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right) - \tilde{b}\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right|}{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta} dx \\
&\leqslant \int_{B_r(0)} \left(\frac{\left|b\left(t, X(t,x)\right) - b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right|}{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta} + \frac{\left|b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right) - \tilde{b}\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right|}{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta} \right) dx \\
&\leqslant \int_{B_r(0)} \left(\frac{\left|b\left(t, X(t,x)\right) - b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right|}{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta} + \frac{\left|b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right) - \tilde{b}\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right|}{\delta} \right) dx \\
&= \int_{B_r(0)} \frac{\left|b\left(t, X(t,x)\right) - b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right|}{\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| + \delta} dx + \frac{1}{\delta} \int_{B_r(0)} \left|b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right) - \tilde{b}\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right| dx.
\end{aligned}$$

Fixamos $\tilde{R} = 2r + T\left(\|b\|_\infty + \left\|\tilde{b}\right\|_\infty\right)$ e aplicamos o Lema 1.2 para estimar a primeira integral como segue:

Existe um conjunto de medida nula $N \subset \mathbb{R}^d$ tal que

$$\left|b\left(t, X(t,x)\right) - b\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right| \leqslant c_d \left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| \left(M_{\tilde{R}} Db\left(t, X(t,x)\right) + M_{\tilde{R}}\left(t, \tilde{X}(t,x)\right)\right),$$

para $X(t,x), \tilde{X}(t,x) \in \mathbb{R}^d \backslash N$ com $\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| \leqslant \tilde{R}$.

Antes de avançar mostraremos que $\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| \leqslant \tilde{R}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left|X(t,x) - \tilde{X}(t,x)\right| &\leqslant \left| x + \int_{t_0}^t b\left(s, X(s,x)\right) ds - x - \int_{t_1}^t \tilde{b}\left(s, \tilde{X}(s,x)\right) ds \right| \\
&\leqslant \int_{t_0}^t \left|b\left(s, X(s,x)\right)\right| ds + \int_{t_1}^t \left|\tilde{b}\left(s, \tilde{X}(s,x)\right)\right| ds \\
&\leqslant \int_0^T \left(\|b\|_\infty + \left\|\tilde{b}\right\|_\infty\right) ds \leqslant T\left(\|b\|_\infty + \left\|\tilde{b}\right\|_\infty\right) \\
&< 2r + T\left(\|b\|_\infty + \left\|\tilde{b}\right\|_\infty\right).
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r(0)} \frac{\left|b\left(t, X\left(t,x\right)\right) - b\left(t, \tilde{X}\left(t,x\right)\right)\right|}{\left|X\left(t,x\right) - \tilde{X}\left(t,x\right)\right| + \delta} dx \\
\leqslant &\int_{B_r(0)} \frac{\left|b\left(t, X\left(t,x\right)\right) - b\left(t, \tilde{X}\left(t,x\right)\right)\right|}{\left|X\left(t,x\right) - \tilde{X}\left(t,x\right)\right|} dx \\
\leqslant &\int_{B_r(0)} \frac{c_d \left|X\left(t,x\right) - \tilde{X}\left(t,x\right)\right| \left(M_{\tilde{R}} Db\left(t, X\left(t,x\right)\right) - M_{\tilde{R}} Db\left(t, \tilde{X}\left(t,x\right)\right)\right)}{\left|X\left(t,x\right) - \tilde{X}\left(t,x\right)\right|} dx \\
= &c_d \int_{B_r(0)} \left(M_{\tilde{R}} Db\left(t, X\left(t,x\right)\right) - M_{\tilde{R}} Db\left(t, \tilde{X}\left(t,x\right)\right)\right) dx.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
g'\left(t\right) \leqslant &c_d \int_{B_r(0)} \left(M_{\tilde{R}} Db\left(t, X\left(t,x\right)\right) - M_{\tilde{R}} Db\left(t, \tilde{X}\left(t,x\right)\right)\right) dx \\
&+ \frac{1}{\delta} \int_{B_r(0)} \left|b\left(t, \tilde{X}\left(t,x\right)\right) - \tilde{b}\left(t, \tilde{X}\left(t,x\right)\right)\right| dx.
\end{aligned}$$

Pela Definição 2.1(ii), considerando $\tilde{r} = r + T\max\left\{\left\|\tilde{b}\right\|_\infty, \left\|b\right\|_\infty\right\}$ e pelo Lema 1.1 temos

$$\begin{aligned}
g'\left(t\right) \leqslant &c_d L \int_{B_{r+T\left\|b\right\|_\infty}(0)} M_{\tilde{R}} Db\left(t,x\right) dx + c_d \tilde{L} \int_{B_{r+T\left\|\tilde{b}\right\|_\infty}(0)} M_{\tilde{R}} Db\left(t,x\right) dx \\
&+ \frac{\tilde{L}}{\delta} \int_{B_{r+T\left\|\tilde{b}\right\|_\infty}(0)} \left|b\left(t,x\right) - \tilde{b}\left(t,x\right)\right| dx \\
\leqslant &c_d \left(L + \tilde{L}\right) \int_{B_{\tilde{r}}(0)} M_{\tilde{R}} Db\left(t,x\right) dx + \frac{\tilde{L}}{\delta} \int_{B_{r+T\left\|\tilde{b}\right\|_\infty}(0)} \left|b\left(t,x\right) - \tilde{b}\left(t,x\right)\right| dx \\
\leqslant &c_d \tilde{r}^{d-d/p} \left(L + \tilde{L}\right) \left\|M_{\tilde{R}} Db\left(t,\cdot\right)\right\|_{L^p(B_{\tilde{r}}(0))} + \frac{\tilde{L}}{\delta} \int_{B_{r+T\left\|\tilde{b}\right\|_\infty}(0)} \left|b\left(t,x\right) - \tilde{b}\left(t,x\right)\right| dx \\
\leqslant &c_{d,p} \tilde{r}^{d-d/p} \left(L + \tilde{L}\right) \left\|Db\left(t,\cdot\right)\right\|_{L^p\left(B_{\tilde{R}+\tilde{r}}(0)\right)} + \frac{\tilde{L}}{\delta} \int_{B_{r+T\left\|\tilde{b}\right\|_\infty}(0)} \left|b\left(t,x\right) - \tilde{b}\left(t,x\right)\right| dx.
\end{aligned}$$

Para todo $\tau \in [0,T]$, integrando a última desigualdade entre 0 e τ temos

$$\begin{aligned}
g\left(\tau\right) - g\left(0\right) = g\left(\tau\right) = &\int_{B_r(0)} \log\left(\frac{\left|X\left(\tau,x\right) - \tilde{X}\left(\tau,x\right)\right|}{\delta} + 1\right) dx \\
\leqslant &\frac{\tilde{L}}{\delta} \int_0^\tau \left(\int_{B_{r+T\left\|\tilde{b}\right\|_\infty}(0)} \left|b\left(t,x\right) - \tilde{b}\left(t,x\right)\right| dx\right) dt \\
&+ c_{d,p} \tilde{r}^{d-d/p} \left(L + \tilde{L}\right) \int_0^\tau \left\|Db\left(t,\cdot\right)\right\|_{L^p\left(B_{\tilde{R}+\tilde{r}}(0)\right)} dt \\
\leqslant &\frac{\tilde{L}}{\delta} \left(\left\|b\right\|_\infty + \left\|\tilde{b}\right\|_\infty\right) c_d \left(r + T\left\|\tilde{b}\right\|_\infty\right)^d \tau + c_{d,p} \tilde{r}^{d-d/p} \left(L + \tilde{L}\right) \left\|Db\left(t,\cdot\right)\right\|_{L^1(L^p)} \\
= &C_1,
\end{aligned}$$

onde a constante C_1 depende de $\tau, r, \|b\|_\infty, \left\|\tilde{b}\right\|_\infty, L, \tilde{L}$, e $\|D_x b\|_{L^1(L^p)}$.
Em seguida, fixamos um segundo parâmetro $\eta > 0$ a ser escolhido mais tarde. Usando a desigualdade de Chebyshev com o conjunto mensurável

$$K = \left\{ x \in B_r(0) : f(x) = \log\left(\frac{\left|X(\tau,x) - \tilde{X}(\tau,x)\right|}{\delta} + 1 \right) \leqslant \frac{C_1}{\eta} \right\}$$

temos que

$$\begin{aligned} m(B_r(0)\setminus K) =& m\left(\left\{ x \in B_r(0) : f(x) > \frac{C_1}{\eta} \right\} \right) \\ \leqslant& \frac{\|f\|_{L^1(B_r(0))}}{C_1/\eta} = \frac{\int_{B_r(0)} f(x)\,dx}{C_1/\eta} \\ \leqslant& \frac{C_1}{C_1/\eta} = \eta, \end{aligned}$$

e claramente $f(x) \leqslant C_1/\eta$ para todo $x \in K$, isto implica que

$$\left|X(\tau,x) - \tilde{X}(\tau,x)\right| \leqslant \delta \exp(C_1/\eta).$$

Em consequência, podemos estimar

$$\begin{aligned} \left\|X(\tau,\cdot) - \tilde{X}(\tau,\cdot)\right\|_{L^1(B_r(0))} &= \int_{B_r(0)} \left|X(\tau,x) - \tilde{X}(\tau,x)\right| dx \\ &= \int_{B_r(0)\setminus K} \left|X(\tau,x) - \tilde{X}(\tau,x)\right| dx + \int_K \left|X(\tau,x) - \tilde{X}(\tau,x)\right| dx \\ &\leqslant \int_{B_r(0)\setminus K} \left(|X(\tau,x)| + \left|\tilde{X}(\tau,x)\right|\right) dx + \int_{B_r(0)} \delta \exp(C_1/\eta)\,dx \\ &\leqslant \int_{B_r(0)\setminus K} \left(\|X(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(B_r(0))} + \left\|\tilde{X}(\tau,\cdot)\right\|_{L^\infty(B_r(0))}\right) dx \\ &\quad + c_d r^d \delta \exp(C_1/\eta) \\ &\leqslant m(B_r(0)\setminus K)\left(\|X(\tau,\cdot)\|_{L^\infty(B_r(0))} + \left\|\tilde{X}(\tau,\cdot)\right\|_{L^\infty(B_r(0))}\right) \\ &\quad + c_d r^d \delta \exp(C_1/\eta) \\ &\leqslant \eta C_2 + c_d r^d \delta \exp(C_1/\eta) \\ &\leqslant C_3\left(\eta + \delta \exp(C_1/\eta)\right), \end{aligned}$$

com C_1, C_2, C_3 dependentes só de $\tau, r, \|b\|_\infty, \left\|\tilde{b}\right\|_\infty, L, \tilde{L}$, e $\|D_x b\|_{L^1(L^\infty)}$.
Sem perda de generalidade, podemos supor que $\delta < 1$. Considerando

$$\eta = 2C_1 \left|\log\delta\right|^{-1} = 2C_1 (-\log\delta)^{-1},$$

então $\delta^{-1/2} = \exp(C_1/\eta)$. E portanto,

$$\begin{aligned}\left\|X(\tau,\cdot)-\tilde{X}(\tau,\cdot)\right\| \leqslant & C_3\left(2C_1\left|\log\delta\right|^{-1}+\delta^{1/2}\right)\\ \leqslant & C_3\left(2C_1\left|\log\delta\right|^{-1}+\left|\log\delta\right|^{-1}\right)\\ = & C\left|\log\delta\right|^{-1},\end{aligned}$$

onde C depende só de $\tau, r, \|b\|_\infty, \left\|\tilde{b}\right\|_\infty, L, \tilde{L}$, e $\|D_x b\|_{L^1(L^\infty)}$. Isto completa a demonstração. □

Corolário 2.4 (Unicidade do fluxo)**.** *Seja b um campo vetorial pertencente a*

$$L^\infty\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)\cap L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)$$

para algum $p>1$. Então o fluxo regular lagrangeano associado a b, se existe, é único.

Demonstração. Segue-se imediatamente da estabilidade provada no Teorema 2.2. □

3 Discretização Numérica e análise de convergência

Neste capítulo vamos considerar a discretização de (1.6) mediante o método de Euler progressivo, com X sendo um fluxo regular Lagrangeano para o campo vetorial b; e assumindo que b satisfaz uma *condição de one-sided Lipschitz*, a qual definiremos a continuação. Como resultado principal deste capítulo temos a demonstração da convergência do método numérico escolhido. Referências básicas para esses tópicos são, por exemplo, [8], [9], [10] e [11].

Definição 3.1. *A função $f : [a,b] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é dita que satisfaz uma condição one-sided Lipschitz (OSL) se*

$$\langle f(t,y) - f(t,\tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle \leqslant \nu(t) |y - \tilde{y}|^2 \tag{3.1}$$

para todo $(t,y), (t,\tilde{y}) \in D \subset [a,b] \times \mathbb{R}^d$, onde D é um conjunto aberto. A função $\nu(t)$ é chamada uma constante one-sided Lipschitz.

Note que uma constante one-sided Lipschitz é, em geral, uma função de t; é apenas constante no que diz respeito a y. A condição (3.1) é menos demandante que a condição Lipschitz (1.3). Para ver isto fazemos uso da desigualdade de Schwarz, $\langle u, v \rangle \leqslant |u| \cdot |v|$, do qual temos que

$$\langle f(t,y) - f(t,\tilde{y}), y - \tilde{y} \rangle \leqslant |f(t,y) - f(t,\tilde{y})| \cdot |y - \tilde{y}| \leqslant L |y - \tilde{y}|^2$$

se assumimos que (1.3) se satisfaz. Portanto, se $f(t,y)$ satisfaz uma condição Lipschitz, então também satisfaz uma condição one-sided Lipschitz. O recíproco desta afirmação nem sempre é verdade:

Exemplo 3.1. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(t) = -\text{sign}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Claramente f não é continua em $t=0$, portanto, não é Lipschitz. Porem,

$$\begin{aligned}\langle f(s)-f(t), s-t\rangle &= (s-t)(\operatorname{sign}(t)-\operatorname{sign}(s))\\ &= \begin{cases} 0 & se\ \ (t,s>0)\ \ ou\ \ (t,s<0)\ \ ou\ \ (t,s=0)\\ 2(s-t) & se\ t>0, s<0\\ -2(s-t) & se\ t<0, s>0\\ -(s-t) & se\ \ (t=0,s>0)\ \ ou\ \ (s=0,t<0)\\ s-t & se\ \ (t=0,s<0)\ \ ou\ \ (s=0,t>0)\end{cases}\\ &\leqslant 0,\end{aligned}$$

isto é, f one-sided Lipschitz com constante $\nu(t)\geqslant 0$.

Note que a constante da condição (3.1), ao contrario da constante na condição (1.3) pode ser negativa.

Vamos agora enunciar e demonstrar o resultado principal de nosso trabalho, o qual é o Teorema que garante a convergência do esquema numérico de Euler progressivo para o problema de valor inicial (1.6) com X sendo um fluxo regular Lagrangeano para o campo b, onde b satisfaz uma condição one-sided Lipschitz.

Teorema 3.1. *Seja b um campo vetorial em $L^1\left([0,T];W^{1,p}\left(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d\right)\right)\cap L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ para algum $p>1$. Suponhamos que b satisfaz a condição one-sided Lipschitz (3.1) com $|\nu(t)|\leqslant\kappa$ para todo $t\in[0,T]$, onde κ é uma constante positiva. Assumimos que $[\mathrm{div}b]^-\in L^1([0,T];L^\infty(\mathbb{R}))$. Seja X como na Definição 2.1. Então a solução numérica satisfaz*

$$\|X(t_n)-X_n\|_{L^p(B_R(0))}\leqslant C\sqrt{\frac{C_{\exp}-1}{2\kappa}}h^{1/2}+C_{\exp}\|X(t_0)-X_0\|_{L^p(B_R(0))} \tag{3.2}$$

Demonstração. Por questão de não carregar ainda mais a notação sempre que tomarmos norma L^p, para algum $p>1$, vai ser tomada sobre a bola $B_R(0)\subset\mathbb{R}^d$, exceto nos casos em que o raio é especificado.
Da definição de solução da EDO (1.6) temos as seguintes equações

$$X(t_{n+1})=X_0+\int_0^{t_{n+1}}b(s,X(s))\,ds\quad\text{e}\quad X(t_n)=X_0+\int_0^{t_n}b(s,X(s))\,ds,$$

e assim

$$X(t_{n+1})=X(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n+1}}b(s,X(s))\,ds. \tag{3.3}$$

Pelo método de Euler temos a equação

$$X_{n+1}=X_n+hb(t_n,X_n), \tag{3.4}$$

logo considerando a relação

$$Y_{n+1} = X(t_n) + hb(t_n, X(t_n)) \tag{3.5}$$

obtemos da diferença entre (3.4) e (3.5) temos

$$Y_{n+1} - X_{n+1} = X(t_n) - X_n + h\left(b(t_n, X(t_n)) - b(t_n, X_n)\right),$$

então multiplicando ambos lados por $Y_{n+1} - X_{n+1}$ temos:

$$\begin{aligned}\langle Y_{n+1} - X_{n+1}, Y_{n+1} - X_{n+1}\rangle = &\langle X(t_n) - X_n, Y_{n+1} - X_{n+1}\rangle \\ &+ h\langle b(t_n, X(t_n)) - b(t_n, X_n), Y_{n+1} - X_{n+1}\rangle,\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}|Y_{n+1} - X_{n+1}|^2 = &\langle X(t_n) - X_n, Y_{n+1} - X_{n+1}\rangle \\ &+ h\langle b(t_n, X(t_n)) - b(t_n, X_n), X(t_n) - X_n\rangle \\ &+ h^2 |b(t_n, X(t_n)) - b(t_n, X_n)|^2.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young temos o seguinte:

$$\begin{aligned}|\langle X(t_n) - X_n, Y_{n+1} - X_{n+1}\rangle| &\leqslant |X(t_n) - X_n|\,|Y_{n+1} - X_{n+1}| \\ &\leqslant \frac{|X(t_n) - X_n|^2}{2} + \frac{|Y_{n+1} - X_{n+1}|^2}{2}.\end{aligned}$$

Pela condição one-sided Lipschitz temos que:

$$h\langle b(t_n, X(t_n)) - b(t_n, X_n), X(t_n) - X_n\rangle \leqslant \nu(t_n)\, h\, |X(t_n) - X_n|^2.$$

Além disto,

$$\begin{aligned}h^2 |b(t_n, X(t_n)) - b(t_n, X_n)|^2 &\leqslant h^2 \left(|b(t_n, X(t_n))| + |b(t_n, X_n)|\right)^2 \\ &\leqslant 4h^2 \|b\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Então tomando valor absoluto em (3.6) e como $|\nu(t_n)| \leqslant \kappa$ temos que:

$$\begin{aligned}|Y_{n+1} - X_{n+1}|^2 \leqslant &\frac{|X(t_n) - X_n|^2}{2} + \frac{|Y_{n+1} - X_{n+1}|^2}{2} \\ &+ \kappa h |X(t_n) - X_n|^2 + 4\|b\|_\infty^2 h^2,\end{aligned}$$

então

$$|Y_{n+1} - X_{n+1}|^2 \leqslant |X(t_n) - X_n|^2 (1 + 2\kappa h) + 8\|b\|_\infty^2 h^2, \tag{3.7}$$

logo, tomando norma $L^{p/2}$ em (3.7) temos

$$\begin{aligned}\left\|\left|Y_{n+1}-X_{n+1}\right|^2\right\|_{p/2} &= \left\|Y_{n+1}-X_{n+1}\right\|_p^2 \\ &\leqslant \left\|(1+2\kappa h)\left|X\left(t_n\right)-X_n\right|^2+8\left\|b\right\|_\infty^2 h^2\right\|_{p/2} \\ &\leqslant \left\|(1+2\kappa h)\left|X\left(t_n\right)-X_n\right|^2\right\|_{p/2}+\left\|8\left\|b\right\|_\infty^2 h^2\right\|_{p/2} \\ &\leqslant (1+2\kappa h)\left\|X\left(t_n\right)-X_n\right\|_p^2+8\left\|b\right\|_\infty^2 c_{d,p}R^d h^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\left\|Y_{n+1}-X_{n+1}\right\|_p^2 \leqslant (1+2\kappa h)\left\|X\left(t_n\right)-X_n\right\|_p^2+C_1 h^2, \tag{3.8}$$

com $C_1 = 8\left\|b\right\|_\infty^2 c_{d,p}R^d$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left|X\left(t_{n+1}\right)-Y_{n+1}\right| &= \left|X\left(t_n\right)+\int_{t_n}^{t_{n+1}} b\left(s,X\left(s\right)\right)ds-X\left(t_n\right)-hb\left(t_n,X\left(t_n\right)\right)\right| \\ &= \left|\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left(b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(t_n,X\left(t_n\right)\right)\right)ds\right| \\ &\leqslant \int_{t_n}^{t_{n+1}}\left|b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(t_n,X\left(t_n\right)\right)\right|ds,\end{aligned}$$

então

$$\left|X\left(t_{n+1}\right)-Y_{n+1}\right|^2 \leqslant \left|\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left|b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(t_n,X\left(t_n\right)\right)\right|ds\right|^2. \tag{3.9}$$

Tomando norma $L^{p/2}$ em (3.9) temos:

$$\begin{aligned}\left\|\left|X\left(t_{n+1}\right)-Y_{n+1}\right|^2\right\|_{p/2} &= \left\|X\left(t_{n+1}\right)-Y_{n+1}\right\|_p^2 \\ &\leqslant \left\|\int_{t_n}^{t_{n+1}}\left|b\left(s,X\left(s\right)\right)-b\left(t_n,X\left(t_n\right)\right)\right|ds\right\|_p^2 \leqslant \left(Kh^2\right)^2 \\ &\leqslant C_2 h^4,\end{aligned}$$

isto como conseqüência do seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| b\left(s, X\left(s\right)\right) - b\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right| ds \right\|_p \\
&\leqslant \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} c_d \left| X\left(s\right) - X\left(t_n\right) \right| \left(M_\lambda Db\left(s, X\left(s\right)\right) + M_\lambda Db\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right) ds \right\|_p \\
&\leqslant c_d \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_n}^{s} \left| b\left(u, X\left(u\right)\right) \right| du \right) \left(M_\lambda Db\left(s, X\left(s\right)\right) + M_\lambda Db\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right) ds \right\|_p \\
&\leqslant c_d \left\| b \right\|_\infty \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{t_n}^{s} du \right) \left(M_\lambda Db\left(s, X\left(s\right)\right) + M_\lambda Db\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right) ds \right\|_p \\
&= c_d \left\| b \right\|_\infty \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(s - t_n \right) \left(M_\lambda Db\left(s, X\left(s\right)\right) + M_\lambda Db\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right) ds \right\|_p \\
&\leqslant c_d \left\| b \right\|_\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| \left(s - t_n \right) \left(M_\lambda Db\left(s, X\left(s\right)\right) + M_\lambda Db\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right) \right\|_p ds \\
&\leqslant c_d \left\| b \right\|_\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(s - t_n \right) \left\| M_\lambda Db\left(s, X\left(s\right)\right) + M_\lambda Db\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right\|_p ds \\
&\leqslant c_d \left\| b \right\|_\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(s - t_n \right) \left(\left\| M_\lambda Db\left(s, X\left(s\right)\right) \right\|_p + \left\| M_\lambda Db\left(t_n, X\left(t_n\right)\right) \right\|_p \right) ds \\
&\leqslant c_d \left\| b \right\|_\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(s - t_n \right) L^{1/p} \left(\left\| M_\lambda Db\left(s, x\right) \right\|_{L^p\left(B_{R+T\|b\|_\infty}(0)\right)} + \left\| M_\lambda Db\left(t_n, x\right) \right\|_{L^p\left(B_{R+T\|b\|_\infty}(0)\right)} \right) ds \\
&\leqslant c_d \left\| b \right\|_\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(s - t_n \right) c_{d,p} L^{1/p} \left\| Db\left(t, x\right) \right\|_{L^p\left(B_{R+\lambda+T\|b\|_\infty}(0)\right)} ds \\
&\leqslant c_{d,p} M \left\| b \right\|_\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(s - t_n \right) ds \\
&= Kh^2,
\end{aligned}
$$

com $K = \dfrac{c_{d,p} M \left\| b \right\|_\infty}{2}$ e dado que

$$
\begin{aligned}
\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(s - t_n \right) ds &= \left(\frac{s^2}{2} - s t_n \right)_{t_n}^{t_{n+1}} \\
&= \left(\frac{t_{n+1}^2}{2} - t_{n+1} t_n \right) - \left(\frac{t_n^2}{2} - t_n^2 \right) \\
&= \frac{t_{n+1}}{2} \left(t_{n+1} - 2t_n \right) - \left(-\frac{t_n^2}{2} \right) \\
&= \frac{\left(t_n + h \right)}{2} \left(h - t_n \right) + \frac{t_n^2}{2} \\
&= \frac{h^2 - t_n^2}{2} + \frac{t_n^2}{2} \\
&= \frac{h^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Como resultado do anterior temos que

$$\|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}\|_p^2 \leqslant C_2 h^4. \tag{3.10}$$

Por ultimo, pelas desigualdades de Hölder e de Young, e pelas desigualdades (3.8) e (3.10),

$$\begin{aligned}
\|2\,|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}|\,|Y_{n+1} - X_{n+1}|\|_{p/2} &= 2\left(\left\||X(t_{n+1}) - Y_{n+1}|^{p/2}\,|Y_{n+1} - X_{n+1}|^{p/2}\right\|_1\right)^{2/p} \\
&\leqslant 2\left(\left\||X(t_{n+1}) - Y_{n+1}|^{p/2}\right\|_2 \left\||Y_{n+1} - X_{n+1}|^{p/2}\right\|_2\right)^{2/p} \\
&\leqslant 2\,\|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}\|_p\,\|Y_{n+1} - X_{n+1}\|_p \\
&\leqslant 2\left(Kh^2\right)\sqrt{(1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p^2 + C_1 h^2} \\
&\leqslant 2\left(Kh^2\right)\left(\sqrt{(1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p^2} + \sqrt{C_1 h^2}\right) \\
&\leqslant 2\left(Kh^2\right)\left((1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p + \sqrt{C_1}h\right) \\
&\leqslant 2\left(Kh^2\right)\left((1+2\kappa h)\left(\frac{\|X(t_n) - X_n\|_p^2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{C_1}h\right)
\end{aligned}$$

e portanto, com $C_3 = \kappa + \sqrt{C_1}$

$$2\,\|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}\|_p\,\|Y_{n+1} - X_{n+1}\|_p \leqslant Kh^2(1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p^2 + 2KC_3h^3 + Kh^2. \tag{3.11}$$

Agora

$$|X(t_{n+1}) - X_{n+1}| \leqslant |X(t_{n+1}) - Y_{n+1}| + |Y_{n+1} - X_{n+1}|,$$

então

$$\begin{aligned}
|X(t_{n+1}) - X_{n+1}|^2 &\leqslant (|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}| + |Y_{n+1} - X_{n+1}|)^2 \\
&= |X(t_{n+1}) - Y_{n+1}|^2 + 2\,|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}|\,|Y_{n+1} - X_{n+1}| + |Y_{n+1} - X_{n+1}|^2,
\end{aligned}$$

então tomando norma $L^{p/2}$ e pelas desigualdades (3.8), (3.10) e (3.11) temos

$$\begin{aligned}
\left\||X(t_{n+1}) - X_{n+1}|^2\right\|_{p/2} &= \|X(t_{n+1}) - X_{n+1}\|_p^2 \\
&\leqslant \|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}\|_p^2 + 2\,\|X(t_{n+1}) - Y_{n+1}\|_p\,\|Y_{n+1} - X_{n+1}\|_p \\
&\quad + \|Y_{n+1} - X_{n+1}\|_p^2 \\
&\leqslant C_2 h^4 + Kh^2(1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p^2 + 2KC_3h^3 + Kh^2 \\
&\quad + (1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p^2 + C_1 h^2 \\
&\leqslant C_2 h^2 + Kh^2(1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p^2 + 2KC_3h^2 + Kh^2 \\
&\quad + (1+2\kappa h)\,\|X(t_n) - X_n\|_p^2 + C_1 h^2 \\
&= Ch^2 + (1+2\kappa h)\left(1 + Kh^2\right)\|X(t_n) - X_n\|_p^2,
\end{aligned}$$

com $C = C_2 + 2KC_3 + K + C_1$.
Portanto, com $\alpha = (1 + 2\kappa h)$, $\beta = \left(1 + Kh^2\right)$, e $E_n = \|X(t_n) - X_n\|_p^2$ obtemos a equação

$$E_{n+1} \leqslant \alpha\beta E_n + Ch^2. \tag{3.12}$$

Aplicando recursão em (3.11) repetidamente vemos que forma a solução deve tomar:

$$\begin{aligned}
E_1 &\leqslant \alpha\beta E_0 + Ch^2 \\
E_2 &\leqslant \alpha\beta E_1 + Ch^2 \leqslant \alpha\beta\left(\alpha\beta E_0 + Ch^2\right) + Ch^2 \\
&\leqslant (\alpha\beta)^2 E_0 + Ch^2(1 + \alpha\beta) \\
E_3 &\leqslant \alpha\beta E_2 + Ch^2 \leqslant \alpha\beta\left((\alpha\beta)^2 E_0 + Ch^2(1 + \alpha\beta)\right) + Ch^2 \\
&\leqslant (\alpha\beta)^3 E_0 + Ch^2\left(1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2\right) \\
E_4 &\leqslant \cdots .
\end{aligned}$$

Por indução podemos facilmente confirmar que em geral

$$E_n \leqslant (\alpha\beta)^n E_0 + Ch^2 \sum_{m=0}^{n-1} (\alpha\beta)^m . \tag{3.13}$$

Estamos prontos para provar nosso resultado. Precissamos só observar que

$$\sum_{m=0}^{n-1} r^m = \frac{r^n - 1}{r - 1}, \quad \text{para}\, r \neq 1; \qquad \text{e que} \quad |1 + zh| \leqslant \exp(|z|\, h) \quad \text{para}\ z \in \mathbb{R},$$

e assim

$$\begin{aligned}
\alpha^n = (1 + 2\kappa h)^n &\leqslant (1 + 2\kappa h)^N \\
&\leqslant \exp(2\kappa N h) \\
&= \exp(2\kappa(T - t_0)),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta^n &\leqslant \left(1 + Kh^2\right)^N \leqslant \left(1 + Kh^2\right)^{N^2} \\
&\leqslant \exp\left(KN^2h^2\right) \\
&= \exp\left(K(T - t_0)^2\right),
\end{aligned}$$

desde que restringimos nossa atenção para o intervalo finito $0 \leqslant t \leqslant T$ tal que $t_n = nh \leqslant T$. Então segue disto que

$$(\alpha\beta)^n \leqslant \exp\{(T - t_0)(2\kappa + K(T - t_0))\} = C_{\exp}. \tag{3.14}$$

Além disto, $\alpha\beta - 1 = h\left(2\kappa + Kh + 2K\kappa h^2\right)$, logo por isto e pelas equações (3.13) e (3.14)

$$\begin{aligned} E_n &\leqslant Ch^2\left(\frac{(\alpha\beta)^n - 1}{\alpha\beta - 1}\right) + (\alpha\beta)^n E_0 \\ &\leqslant Ch^2\left(\frac{C_{\exp} - 1}{h\left(2\kappa + Kh + 2K\kappa h^2\right)}\right) + C_{\exp}E_0 \\ &\leqslant Ch\left(\frac{C_{\exp} - 1}{2\kappa + Kh + 2K\kappa h^2}\right) + C_{\exp}E_0. \end{aligned}$$

Em consequência,

$$E_n \leqslant Ch\frac{C_{\exp} - 1}{2\kappa} + C_{\exp}E_0, \tag{3.15}$$

ou seja,

$$\|X(t_n) - X_n\|_{L^p(B_R(0))} \leqslant C\sqrt{\frac{C_{\exp} - 1}{2\kappa}}h^{1/2} + C_{\exp}\|X(t_0) - X_0\|_{L^p(B_R(0))}. \tag{3.16}$$

De fato para este método podemos geralmente considerar $X(t_0) = X_0 = x$, nesse caso $\|X(t_0) - X_0\|_{L^p(B_R(0))}$ sai fora e ficamos com

$$\|X(t_n) - X_n\|_{L^p(B_R(0))} \leqslant C\sqrt{\frac{C_{\exp} - 1}{2\kappa}}h^{1/2} = O\left(h^{1/2}\right) \quad \text{quando } h \to 0 \tag{3.17}$$

e então o método converge e tem ordem $\frac{1}{2}$. □

Referências

[1] Ambrosio, L., Da Prato, G., and Mennucci, A. *Introduction to measure theory and integration.*, vol. 10. Pisa: Edizioni della Normale, 2011.

[2] Atkinson, K. E., Han, W., and Stewart, D. E. *Numerical solution of ordinary differential equations.* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.

[3] Crippa, G. *The flow associated to weakly differentiable vector fields.* Milano: Springer; Pisa: Scuola Normale Superiore (Dissertation), 2009.

[4] Crippa, G., and De Lellis, C. Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow. *J. Reine Angew. Math. 616* (2008), 15–46.

[5] DiPerna, R. J., and Lions, P. L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. 511–547.

[6] Evans, L. C. *Partial differential equations. 2nd ed.*, 2nd ed. ed. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010.

[7] Evans, L. C., and Gariepy, R. F. *Measure theory and fine properties of functions.* Boca Raton: CRC Press, 1992.

[8] Hairer, E., and Wanner, G. *Solving ordinary differential equations. II: Stiff and differential-algebraic problems. Reprint of the 1996 2nd revised ed.*, reprint of the 1996 2nd revised ed. ed., vol. 14. Berlin: Springer, 2010.

[9] Iserles, A. *A first course in the numerical analysis of differential equations. 2nd ed.*, 2nd ed. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

[10] Lambert, J. D. *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem.* Chichester etc.: John Wiley &| Sons, 1991.

[11] LeVeque, R. J. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations. Steady-state and time-dependent problems.* Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2007.