UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

JOSÉ LUCAS PEREIRA LUIZ

Propriedades de Schur positivas em reticulados de Banach e reticulabilidade em espaços de sequências vetoriais

Campinas

2021

José Lucas Pereira Luiz

Propriedades de Schur positivas em reticulados de Banach e reticulabilidade em espaços de sequências vetoriais

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni

Coorientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno José Lucas Pereira Luiz e orientada pelo Prof. Dr. Sergio Antonio Tozoni.

Campinas

2021

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

L968p Luiz, José Lucas Pereira, 1992-
Propriedades de Schur positivas em reticulados de Banach e reticulabilidade em espaços de sequências vetoriais / José Lucas Pereira Luiz. – Campinas, SP : [s.n.], 2021.

Orientador: Sergio Antonio Tozoni.
Coorientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Reticulados de Banach. 2. Propriedades de Schur positivas. 3. Propriedade de Dunford-Pettis fraca. 4. Propriedade de três reticulados. 5. Reticulabilidade completa. I. Tozoni, Sergio Antonio, 1953-. II. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Positive Schur properties on Banach lattices and latticeability in vector-valued sequence spaces
Palavras-chave em inglês:
Banach lattices
Positive Schur properties
Weak Dunford-Pettis property
Three-lattice property
Complete latticeability
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Geraldo Márcio de Azevedo Botelho [Coorientador]
Mary Lilian Lourenço
Pablo Galindo Pastor
Jamilson Ramos Campos
Vinícius Vieira Fávaro
Data de defesa: 22-02-2021
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)
- ORCID do autor: https://orcid.org/0000-0003-2698-5517
- Currículo Lattes do autor: http://lattes.cnpq.br/1709610740846564

Tese de Doutorado defendida em 22 de fevereiro de 2021 e aprovada

pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). GERALDO MÁRCIO DE AZEVEDO BOTELHO

Prof(a). Dr(a). MARY LILIAN LOURENÇO

Prof(a). Dr(a). PABLO GALINDO PASTOR

Prof(a). Dr(a). JAMILSON RAMOS CAMPOS

Prof(a). Dr(a). VINÍCIUS VIEIRA FÁVARO

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

Dedico a Maria Elza Pereira Luiz
e José Dias Luiz (in memoriam).

Agradecimentos

Agradeço aos meus familiares, Maria Elza, José Dias (in memoriam), Claudinéia, Valdinélia, Thaís, Alexandrina e Domingas pelo apoio durante os meus muitos anos de estudos.

Agradeço ao meu orientador Sergio Antonio Tozoni e ao meu coorientador Geraldo Botelho pelo suporte contínuo durante minha jornada no doutorado.

Agradeço aos meus amigos do doutorado pelos estudos e discussões em grupo, pelas conversas e cafés compartilhados nas mesinhas do IMECC.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Processo Nº 141175/2019-2).

"Vai para cortar a cana ou colher o algodão. É lá mesmo que sentimos uma grande exploração. O dinheiro que ganhamos é a conta da pensão. Pra comer feijão azedo, ai ai; e bife de macarrão. E não pode reclamar na presença do patrão."

José Dias Luiz

"A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories."

Stefan Banach

Resumo

Nesta tese trabalhamos no ambiente de reticulados de Banach e de Fréchet. No Capítulo 2 provamos resultados relacionados à propriedade de três reticulados em reticulados de Fréchet e obtemos, como caso particular, que a propriedade de Schur e a propriedade de Schur positiva são propriedades de três reticulados. Apresentamos uma contribuição no sentido de responder se a propriedade de Dunford-Pettis fraca é, ou não, uma propriedade de três reticulados. Por fim, demonstramos um resultado nesse sentido referente à propriedade de Schur positiva dual. No Capítulo 3 definimos o conceito de propriedade de Schur polinomial positiva e apresentamos alguns resultados acerca dessa propriedade; demonstramos, por exemplo, que $L_p(\mu)$ goza dessa propriedade para todo $1 \leq p < \infty$ e qualquer medida μ. No Capítulo 4 trabalhamos com a noção de reticulabidade completa e demonstramos alguns resultados em espaços de sequências vetoriais. Provamos também um resultado de reticulabilidade completa no produto tensorial projetivo positivo em que um dos reticulados de Banach envolvidos é ℓ_p, $1 < p < \infty$.

Palavras-chave: reticulados de Banach; propriedades de Schur positivas; propriedade de Dunford-Pettis fraca; propriedade de três reticulados; reticulabilidade completa.

Abstract

In this thesis we work in the setting of Banach lattices and Fréchet lattices. In Chapter 2 we prove results concerning three-lattices properties in Fréchet lattices and we get, as particular cases, that the Schur and the positive Schur properties are three-lattices properties. We also give a contribution to the problem of whether or not the weak Dunford-Pettis property is a three-lattice property. A result regarding the dual positive Schur property is also proved. The notion of positively polynomially Schur Banach lattices is introduced in Chapter 3 and several results are proved; for instance, we prove that $L_p(\mu)$ is a positively polynomially Schur Banach lattice for every $1 \leq p < \infty$ and any measure μ. The subject of Chapter 4 is the notion of complete latticeability, and some results on vector-valued sequence spaces are proved. A result about complete latticeability on the positive projective tensor product in which one of the underlying Banach lattices is ℓ_p, $1 < p < \infty$, is also proved.

Keywords: Banach lattices; positive Schur properties; weak Dunford-Pettis property; three-lattice property; complete latticeability.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
T^{-1}	operador inverso de T
c_{00}	espaço das sequências de escalares com finitas coordenadas não nulas
c_0	espaço das sequências de escalares que convergem para zero
ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$	espaço das sequências de escalares absolutamente p-somáveis
ℓ_∞	espaço das sequências de escalares limitadas
e_n	n-ésimo vetor unitário canônico $(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{(n)}, 0, \ldots)$
$C(K)$	espaço das funções contínuas definidas em um espaço topológico compacto Hausdorff K e tomando valores em $\mathbb{K}$
(Ω, Σ, μ)	espaço de medida
$L_p(\mu)$	espaço das (classes de) funções mensuráveis $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $\int_\Omega \lvert f\rvert^p d\mu < \infty$
$L_\infty(\mu)$	espaço das (classes de) funções mensuráveis limitadas μ-quase sempre
B_X	bola unitária fechada do espaço vetorial normado X
$x_n \longrightarrow x$	$(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para x
$p \vert q$	p divide q, isto é, $q = np$ para algum $n \in \mathbb{N}$
τ	topologia linear
(X, τ)	espaço vetorial topológico
$\lVert \cdot \rVert$ ou $\lVert \cdot \rVert_X$	norma definida no espaço vetorial X
$\tau_1 \subset \tau_2$	a topologia τ_2 é mais fina que a topologia τ_1
X/M	quociente do espaço vetorial X pelo subespaço vetorial M

$\pi\colon X \longrightarrow X/M$	operador quociente entre os espaços vetoriais X e X/M
$\dot{\tau}$	topologia quociente
X^*	dual topológico do espaço vetorial topológico X
$\sigma(X, X^*)$ ou w_τ	topologia fraca do espaço vetorial topológico (X, τ)
$\beta(X^*, X)$ ou τ_β	topologia forte no dual topológico X^*
X^*_β	dual topológico X^* munido com a topologia forte
$\mathcal{L}(X; Y)$	espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y, onde X e Y são espaços vetoriais topológicos
$M^\perp$	anulador do subconjunto M de um espaço vetorial topológico
$\leq$ ou $\geq$	relação de ordem
$x \vee y$	supremo de x e y
$x \wedge y$	ínfimo de x e y
E^+	cone positivo do espaço de Riesz E
x^+	parte positiva de x
x^-	parte negativa de x
$\|x\|$	valor absoluto de x
$x \perp y$	x e y são disjuntos
A^d	complemento disjunto do subconjunto A de um espaço de Riesz
$L^r(E; F)$	espaço dos operadores regulares entre os espaços de Riesz E e F
$\ker(T)$	núcleo do operador T
$E^\sim$	ordem-dual do espaço de Riesz E
$\left(\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_p$ e $\ell_p(X)$	ℓ_p-soma, $1 \leq p \leq \infty$, dos espaços de Banach X e X_j, $j \in \mathbb{N}$
$\left(\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_0$ e $c_0(X)$	c_0-soma dos espaços de Banach X e X_j, $j \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}^r(E; F)$	espaço dos operadores regulares entre os reticulados de Banach E e F
$\\| \cdot \\|_r$	norma regular
$x_n \xrightarrow{\tau} x$	$(x_n)_{n=1}^\infty$ converge para x na topologia τ

$\beta\mathbb{N}$	compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$
X^n	produto cartesiano, $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$, do espaço vetorial X
x^n	$(\underbrace{x, \ldots, x}_{n})$
$L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ e $L(^nX; Y)$	espaço dos operadores n-lineares, onde X, $X_1, \ldots, X_n$ e Y são espaços vetoriais
$L(^nX)$	espaço das formas n-lineares definidas no espaço vetorial X
$L^s(^nX; Y)$	espaço dos operadores n-lineares simétricos, onde X e Y são espaços vetoriais
$L^s(^nX)$	espaço das formas n-lineares simétricas definidas no espaço vetorial X
$P(^nX; Y)$	espaço dos polinômios n-homogêneos, onde X e Y são espaços vetoriais
$P(^nX)$	espaço dos polinômios n-homogêneos definidos no espaço vetorial X e com imagem em $\mathbb{K}$
$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ e $\mathcal{L}(^nX; Y)$	espaço dos operadores n-lineares contínuos, onde X, $X_1, \ldots, X_n$ e Y são espaços de Banach
$\mathcal{L}(^nX)$	espaço das formas n-lineares contínuas definidas no espaço de Banach X
$\mathcal{L}^s(^nX; Y)$	espaço dos operadores n-lineares simétricos contínuos, onde X e Y são espaços de Banach
$\mathcal{L}^s(^nX)$	espaço das formas n-lineares simétricas contínuas definidas no espaço de Banach X
$\mathcal{P}(^nX; Y)$	espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos, onde X e Y são espaços de Banach
$\mathcal{P}(^nX)$	espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos definidos no espaço de Banach X e com imagem em $\mathbb{K}$
$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$	produto tensorial algébrico dos espaços vetoriais $X_1, \ldots, X_n$
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$	tensor elementar
$\otimes^n x$	tensor elementar $\underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{n}$
$X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n$	produto tensorial projetivo dos espaços de Banach $X_1, \ldots, X_n$

$\otimes_s^n X$	produto tensorial simétrico do espaço vetorial X
$\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n X$	produto tensorial simétrico projetivo do espaço de Banach X
$\mathcal{L}^r(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\mathcal{L}^r(^nE; F)$	espaço dos operadores n-lineares regulares, onde $E, E_1, \ldots, E_n$ e F são reticulados de Banach
$\mathcal{L}^r(^nE)$	espaço dos operadores n-lineares regulares definidos no reticulado de Banach E e com imagem em $\mathbb{R}$
$\mathcal{P}^r(^nE; F)$	espaço dos polinômios n-homogêneos regulares, onde E e F são reticulados de Banach
$\mathcal{P}^r(^nE)$	espaço dos polinômios n-homogêneos regulares definidos no reticulado de Banach E e com imagem em $\mathbb{R}$
$E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$	produto tensorial de Fremlin dos espaços de Riesz arquimedianos $E_1, \ldots, E_n$
$E_1 \widehat{\otimes}_{\lvert\pi\rvert} \cdots \widehat{\otimes}_{\lvert\pi\rvert} E_n$	produto tensorial projetivo positivo dos reticulados de Banach $E_1, \ldots, E_n$
$\overline{\otimes}_s^n E$	produto tensorial simétrico de Fremlin do espaço de Riesz E
$\widehat{\otimes}_{s,\lvert\pi\rvert}^n E$	produto tensorial projetivo positivo simétrico do reticulado de Banach E
$d(w;1)$	espaço de Lorentz
$d_*(w;1)$	predual de $d(w;1)$
$c_0^w(E)$	espaço das sequências vetoriais no espaço de Banach E fracamente nulas
$X^{\mathbb{N}}$	espaço das sequências no espaço vetorial X
λ'	dual Köthe do espaço de sequências λ
ℓ_φ	espaço de sequência de Orlicz
$\lambda'_w(E^*)$ e $\lambda_s(E)$	espaços de sequências vetoriais, onde E é um reticulado de Banach
$\lambda'_\varepsilon(E^*)$ e $\lambda_\pi(E)$	espaços de sequências vetoriais com estrutura de reticulado de Banach, onde E é um reticulado de Banach

Sumário

Introdução

Reticulados de Banach são espaços de Banach munidos com uma ordem parcial compatível com a estrutura algébrica e com a norma. A estrutura de reticulado, gerada pela ordem, torna o ambiente do espaço de Banach mais rígido, no sentido que, resultados válidos em espaços de Banach podem ter seus análogos canônicos inválidos em reticulados de Banach. Não é necessário muito aprofundamento na teoria para obtermos exemplos disso. Vejamos dois relativamente simples:

- Sabemos da teoria de espaços de Banach que: todo espaço de Banach separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de ℓ_∞ (veja [16, Proposição 3.3.3]). Como ℓ_∞ é um reticulado de Banach, então podemos formular um análogo canônico desse resultado no ambiente de reticulados de Banach, sintetizado através do seguinte questionamento: é verdade que todo reticulado de Banach separável é isomorfo isometricamente como reticulado a um subreticulado de ℓ_∞? A resposta para tal questionamento é NÃO, pois, por exemplo, ℓ_1 é um reticulado de Banach separável e não é isomorfo como reticulado a um subreticulado de ℓ_∞ (veja [5, Theorem 4.69]).

- Um outro resultado clássico na teoria de espaços de Banach afirma que todo espaço de Banach separável é isomorfo isometricamente a um quociente de ℓ_1 (veja Teorema 2.2.15). Como ℓ_1 é um reticulado de Banach, então, novamente, podemos formular um análogo canônico desse resultado no ambiente de reticulados de Banach, o qual é expresso pelo seguinte questionamento: é verdade que todo reticulado de Banach separável é isomorfo isometricamente como reticulado a um quociente de ℓ_1? A resposta para tal questionamento também é NÃO.

Em 2019, Leung, Li, Oikhberg e Tursi [57] criaram um reticulado de Banach, por nós denotado por $LLOT$, com a seguinte propriedade: todo reticulado de Banach separável é isomorfo isometricamente como reticulado ao quociente de $LLOT$ por um ideal fechado. Pode ser verificado em [57] que a construção de $LLOT$ não é simples e isso nos fornece duas informações importantes: a primeira, como já mencionado, é que resultados válidos em espaços de Banach podem ter seus análogos canônicos inválidos em reticulados de Banach; e a segunda é que um análogo válido para um determinado resultado pode ser bastante complicado. Isso ocorre, claramente, em decorrência da positividade advinda da ordem. Os autores também mostraram em [57] que o reticulado de Banach $C(\Delta, L_1)$, onde Δ é o conjunto de Cantor, é tal que: todo reticulado de Banach separável é isomorfo isometricamente como reticulado a um subreticulado de $C(\Delta, L_1)$.

Nesta tese investigamos algumas propriedades em reticulados de Banach que são os análogos positivos de propriedades em espaços de Banach. No decorrer do trabalho lidamos com as propriedades de Schur positiva, de Dunford-Pettis fraca e com o conceito de propriedade de três reticulados, as quais são os análogos positivos das propriedades de Schur e de Dunford-Pettis e do conceito de propriedade de três espaços, respectivamente. Definimos e trabalhamos com a propriedade de Schur polinomial positiva, que é um análogo positivo da propriedade de Schur polinomial e lidamos com o conceito de reticulabilidade completa, o qual é o análogo do conceito de espaçabilidade.

A tese está dividida em quatro capítulos. No Capítulo 1 apresentamos resultados preliminares acerca de espaços vetoriais topológicos, espaços de Riesz, topologias lineares em espaços de Riesz, reticulados de Fréchet, espaços de Banach, reticulados de Banach, Teoria da Medida e Análise Funcional. Os resultados apresentados nesse capítulo introdutório serão utilizados nos capítulos subsequentes. Damos maior ênfase em apresentar definições e resultados relacionados aos espaços de Riesz e reticulados de Banach, os quais representam o cerne da tese. Não apresentamos definições referentes à Teoria da Medida e Análise Funcional, enunciamos apenas alguns resultados dessas duas áreas.

No Capítulo 2 trabalhamos com as propriedades de Schur, de Schur positiva, de Schur positiva dual e de Dunford-Pettis fraca com o intuito de responder se essas propriedades são, ou não são, propriedades de três reticulados. Nesse capítulo, excepcionalmente, trabalhamos no contexto mais geral de reticulados de Fréchet e obtemos, como caso particular, os resultados em reticulados de Banach. Os resultados mais técnicos das Seções 1.1, 1.2 e 1.3 são utilizados exclusivamente no Capítulo 2.

No Capítulo 3 trabalhamos com os polinômios regulares em reticulados de Banach e definimos a propriedade de Schur polinomial positiva. Verificamos se alguns resultados conhecidos para a propriedade de Schur polinomial tem seus análogos válidos para a propriedade de Schur polinomial positiva. Demonstramos, por exemplo, que $L_p(\mu)$ goza desta propriedade para todo $1 \leq p < \infty$ e qualquer medida μ, e damos uma caracterização da propriedade de Schur positiva envolvendo esta propriedade e a propriedade de Dunford-Pettis fraca.

No Capítulo 4 trabalhamos com a noção de reticulabilidade completa, introduzida em 2016 por Oikhberg [68]. Demonstramos alguns resultados em espaços de sequências vetoriais e obtemos, como consequência, um resultado envolvendo reticulabilidade no produto tensorial projetivo positivo em que um dos reticulados de Banach é ℓ_p, $1 < p < \infty$.

Inserimos no início de cada capítulo, exceto no primeiro, uma seção intitulada *Contextualização*, na qual apresentamos resultados introdutórios relacionados ao capítulo em questão e a motivação para os resultados originais obtidos no capítulo. Incluimos no

Capítulo 3 uma seção inicial dedicada à apresentação de definições e resultados sobre polinômios homogêneos e produto tensorial em espaços e reticulados de Banach. Criamos essa seção no Capítulo 3, e não no Capítulo 1, com o intuito de tornar a leitura mais fluida, tendo em vista que os resultados presentes nela são utilizados quase exclusivamente naquele capítulo.

Cabe mencionar que os resultados obtidos nos Capítulos 2, 3 e 4 foram submetidos para publicação nos seguintes artigos, respectivamente:

• *On the Schur, positive Schur and weak Dunford-Pettis properties in Fréchet lattices*, aceito para publicação na revista Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, disponível em arXiv:1909.09514v1[math.FA], 2019.

• *The positive polynomial Schur property in Banach lattices*, aceito para publicação na revista Proceedings of the American Mathematical Society, disponível em arXiv:2003.11626v3 [math.FA], 2020.

• *Complete latticeability in vector-valued sequence spaces*, submetido para publicação, disponível em arXiv:2004.016042v2[math.FA], 2020.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados gerais sobre espaços vetoriais topológicos, espaços de Riesz, espaços de Riesz com topologias lineares, espaços e reticulados de Banach, Análise Funcional e Teoria da Medida que serão utilizados nos capítulos subsequentes.

1.1 Espaços vetoriais topológicos

Nesta seção os espaços vetoriais são considerados sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Adotamos [3, 4, 32, 67, 74] como referências básicas para a construção desta seção.

Definição 1.1.1. Uma topologia de Hausdorff τ em um espaço vetorial X é *linear* se ela torna as operações de adição e multiplicação por escalar contínuas, isto é, se

(a) $+ : (x, y) \in X \times X \longmapsto x + y \in X$ e

(b) $\cdot : (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X \longmapsto \alpha x \in X$

são contínuas, onde $X \times X$ e $\mathbb{K} \times X$ são considerados com a topologia produto. O par (X, τ) é chamado *espaço vetorial topológico*.

A definição de topologia linear pode ser dada no contexto mais geral em que a topologia não é de Hausdorff, contudo essa generalidade não acrescenta vantagens em nosso trabalho. Isso explica o porquê de termos definido topologias lineares como sendo de Hausdorff.

Definição 1.1.2. (a) Um subconjunto A de um espaço vetorial X é *convexo* se para todos $x, y \in A$ e $0 \leq \lambda \leq 1$ tivermos $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

(b) Uma topologia linear τ é *localmente convexa* se possui uma base de vizinhanças para o zero formada por subconjuntos convexos.

(c) Um espaço vetorial topológico cuja topologia é localmente convexa é chamado *espaço vetorial localmente convexo*, ou simplesmente, *espaço localmente convexo*.

Definição 1.1.3. Uma função $\rho \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no espaço vetorial X, é uma *semi-norma* se satisfaz as seguintes condições:

(a) $\rho(x) \geq 0$ para todo $x \in X$.

(b) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ para todos $x, y \in X$.

(c) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in X$.

Uma seminorma ρ que satisfaz a condição:

$$\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

é chamada de *norma* e será denotada por $\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_X$. Um espaço vetorial X equipado com uma norma $\|\cdot\|$ é chamado *espaço vetorial normado*. Se o espaço vetorial for completo na topologia gerada pela norma, então ele será chamado de *espaço de Banach*.

Sempre que dissermos que um subconjunto A de um espaço topológico (X, τ) é τ*-aberto* (τ*-fechado*) estaremos dizendo, na realidade, que A é aberto (fechado) com relação à topologia τ.

Definição 1.1.4. (a) Sejam τ_1 e τ_2 topologias em um espaço topológico X. A topologia τ_2 é *mais fina* que τ_1 se todo subconjunto τ_1-aberto for τ_2-aberto. Nesse caso escreveremos $\tau_1 \subset \tau_2$.

(b) Sejam $\{X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ uma família de espaços topológicos e X um conjunto. A topologia em X *gerada* por uma família de aplicações $\{f_\alpha\colon X \longrightarrow X_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ é a topologia menos fina para a qual cada f_α é contínua. Os termos *topologia induzida* e *topologia determinada* são utilizados como sinônimos de *topologia gerada*.

Teorema 1.1.5. [4, Theorem 2.3] *Uma topologia linear é localmente convexa se, e somente se, é gerada por uma família de seminormas.*

Teorema 1.1.6. [67, Theorem 5.7.2] *Seja (X, τ) um espaço vetorial localmente convexo cuja topologia é gerada pela família de seminormas $\{\rho_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$. Uma rede $(x_\beta)_\beta \subset X$ converge para $x \in X$ na topologia τ se, e somente se, $\rho_\alpha(x_\beta - x) \longrightarrow 0$ para cada $\alpha \in \Gamma$.*

Definição 1.1.7. Uma função não-negativa $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, onde X é um espaço vetorial, é uma *métrica invariante por translações* se satisfaz as seguintes condições:

(a) $d(x, y) = d(y, x)$ para todos x, y em X.

(b) $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$.

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todos x, y e z em X.

(d) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ para todos x, y e z em X.

Teorema 1.1.8. [3, Lemma 5.75] *Um espaço vetorial localmente convexo (X, τ) é metrizável se, e somente se, τ é gerada por uma sequência $(\rho_n)_{n=1}^\infty$ de seminormas. Nesse caso, τ é gerada por uma métrica invariante por translações.*

Definição 1.1.9. Um *espaço de Fréchet* é um espaço vetorial localmente convexo, metrizável e completo.

Exemplo 1.1.10. Todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet.

Definição 1.1.11. Seja M um subespaço vetorial do espaço vetorial topológico (X, τ).

(a) O *espaço quociente* de X por M é o espaço vetorial definido por

$$X/M := \{\dot{x} := x + M : x \in X\}.$$

(b) O *operador quociente* associado a X/M é o operador linear definido por

$$\pi \colon X \longrightarrow X/M \ , \ x \longmapsto \dot{x}.$$

(c) A *topologia quociente* $\dot{\tau}$ em X/M é a topologia mais fina em X/M para a qual π é contínuo.

Teorema 1.1.12. ([67, Theorem 4.7.3] e [71, p. 32]) *Sejam M um subespaço vetorial do espaço vetorial topológico (X, τ) e $\pi \colon (X, \tau) \longrightarrow (X/M, \dot{\tau})$ o operador quociente. Então:*

(a) *π é um operador contínuo e aberto.*

(b) *$(X/M, \dot{\tau})$ é de Hausdorff se, e somente se, M é τ-fechado.*

(c) *Se (X, τ) é um espaço vetorial localmente convexo, então $(X/M, \dot{\tau})$ é um espaço vetorial localmente convexo.*

(d) *Se (X, τ) é metrizável, sendo τ induzida pela métrica invariante por translações d, então $(X/M, \dot{\tau})$ também é metrizável e $\dot{\tau}$ é induzida pela seguinte métrica invariante por translações:*

$$\dot{d} \colon (X/M) \times (X/M) \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ (\dot{x}, \dot{z}) \longmapsto \dot{d}(\dot{x}, \dot{z}) := \inf\{d(x - z, y) : \ y \in M\}.$$

Definição 1.1.13. Seja (X, τ) um espaço vetorial topológico.

(a) O *dual topológico* de X é o espaço vetorial X^* formado por todos os funcionais lineares contínuos $\varphi \colon (X, \tau) \longrightarrow \mathbb{K}$.

(b) A *topologia fraca* em X é a topologia $\sigma(X, X^*)$ gerada pela família de seminormas $\{\rho_\varphi(\cdot) := |\varphi(\cdot)| : \varphi \in X^*\}$; ou, equivalentemente, é a topologia menos fina para a qual todo $\varphi \in X^*$ é contínuo.

(c) A *topologia forte* em X^* é a topologia $\beta(X^*, X)$ gerada pela família de seminormas $\{\rho_S(\cdot) : S \subset X\}$, onde S é a família de todos os subconjuntos $\sigma(X, X^*)$-limitados de X e $\rho_S(\varphi) := \sup\{|\varphi(x)| : \ x \in S\}$ para $\varphi \in X^*$.

(d) A *topologia fraca-estrela* em X^* é a topologia $\sigma(X^*, X)$ gerada pela família de seminormas $\{\rho_x(\cdot) : x \in X\}$, onde $\rho_x(\varphi) = |\varphi(x)|$ para todo $\varphi \in X^*$; ou, equivalentemente, é a topologia menos fina para a qual, para todo $x \in X$, o funcional linear

$$J_x \colon X^* \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

é contínuo.

Utilizaremos as notações w_τ e τ_β para denotar as topologias $\sigma(X, X^*)$ e $\beta(X^*, X)$, respectivamente, e X^*_β para denotar o espaço vetorial topológico $(X^*, \beta(X^*, X))$.

Proposição 1.1.14. [67, p. 487] *Seja (X, τ) um espaço vetorial localmente convexo. Para cada $x \in X$ o funcional linear*

$$J_x \colon X^*_\beta \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \varphi \longmapsto \varphi(x)$$

é contínuo.

Teorema 1.1.15. [67, Example 8.8.9] *Se X é um espaço vetorial normado, então a topologia forte em X^* coincide com a topologia da norma.*

Definição 1.1.16. A *topologia relativa* em um subespaço vetorial M de um espaço vetorial topológico (X, τ) é a topologia que tem como abertos os conjuntos da forma $A \cap M$, onde A é aberto em (X, τ).

Denotaremos a topologia relativa no subespaço M de (X, τ) ainda por τ. Enfatizamos que (M, τ) é um espaço vetorial topológico.

Um subespaço vetorial M de um espaço vetorial topológico (X, τ) possui três topologias bastante naturais. A primeira é a topologia relativa τ, a segunda é a topologia fraca $\sigma(M, M^*)$ em relação a (M, τ) e a terceira é a topologia relativa $\sigma(X, X^*)$. Quando (X, τ) é um espaço vetorial localmente convexo essas duas últimas topologias coincidem:

Teorema 1.1.17. [67, Theorem 8.12.2] *Se M é um subespaço vetorial de um espaço vetorial localmente convexo (X, τ), então $\sigma(M, M^*)$ é a topologia relativa induzida por $\sigma(X, X^*)$.*

Se M é um subespaço vetorial do espaço vetorial topológico (X, τ), então existem três topologias bastante naturais no espaço quociente X/M. A primeira, como já definimos, é a topologia quociente $\dot{\tau}$ induzida por (X, τ). A segunda é a topologia fraca $\sigma(X/M, (X/M)^*)$, denotada também por $w_{\dot{\tau}}$, em relação ao espaço vetorial topológico $(X/M, \dot{\tau})$. A terceira é a topologia quociente $\dot{\sigma}(X, X^*)$, denotada também por $\dot{w}_\tau$, induzida por $(X, \sigma(X, X^*))$. O teorema a seguir nos diz que essas duas últimas topologias coincidem.

Teorema 1.1.18. [67, Theorem 8.12.3 (a)] *Se M é um subespaço vetorial do espaço vetorial topológico (X, τ), então a topologia fraca $\sigma(X/M, (X/M)^*)$ em X/M é a topologia quociente $\dot{\sigma}(X, X^*)$ induzida por $(X, \sigma(X, X^*))$.*

Se (X, τ) é um espaço vetorial topológico, então τ é mais fina que a topologia fraca $\sigma(X, X^*)$, isto é, todo subconjunto $\sigma(X, X^*)$-fechado de X é τ-fechado. Em espaços vetoriais localmente convexos vale a recíproca para subconjuntos convexos.

Teorema 1.1.19. [74, Corollary 2, p. 65] *Um subconjunto convexo de um espaço vetorial localmente convexo (X, τ) é τ-fechado se, e somente se, é $\sigma(X, X^*)$-fechado.*

A notação T^* representa o adjunto do operador T. Para a definição de T^* veja, por exemplo, [67, Definition 8.10.4].

Teorema 1.1.20. [67, Theorem 8.11.3 (c) e (d)] *Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços vetoriais localmente convexos.*

(a) *Se $T\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ é um operador linear contínuo, então T é fracamente contínuo, isto é, T é contínuo com relação às topologias fracas $\sigma(X, X^*)$ e $\sigma(Y, Y^*)$.*

(b) *Se $T\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ é um operador linear contínuo, então $T^*\colon Y^*_\beta \longrightarrow X^*_\beta$ é contínuo.*

Definição 1.1.21. Sejam (X, τ_1) e (Y, τ_2) espaços vetoriais topológicos.

(a) Um operador linear $T\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ é um *isomorfismo* se é uma bijeção contínua com inversa contínua.

(b) Os espaços (X, τ_1) e (Y, τ_2) são *isomorfos* se existe um isomorfismo entre eles.

(c) (Y, τ_2) *contém uma cópia de* (X, τ_1) se existe um subespaço vetorial M de Y tal que (X, τ_1) e (M, τ_2) são isomorfos.

Se $T\colon (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ é uma isometria linear sobrejetora entre os espaços de Banach X e Y, então dizemos que X e Y são *isomorfos isometricamente*. Se T for uma isometria linear sobre sua imagem, então T será chamada de *imersão isométrica* e diremos que Y *contém uma cópia isométrica de* X.

Dados um subconjunto A de um espaço vetorial topológico (X, τ) e um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, utilizaremos a notação αA para representar o subconjunto $\{\alpha x : x \in A\}$ de X. Utilizaremos a notação $\mathcal{L}(X; Y)$ para representar o espaço vetorial formado por todos os operadores lineares contínuos entre os espaços vetoriais topológicos X e Y.

Definição 1.1.22. Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos e H um subconjunto de $\mathcal{L}(X; Y)$.

(a) H é *pontualmente limitado* se $H(x) := \{T(x) : T \in H\}$ é limitado para todo $x \in X$, isto é, para toda vizinhança V de zero em Y existe $k > 0$ tal que $H(x) \subset \alpha V$ sempre que $|\alpha| \geq k$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

(b) H é *equicontínuo* se para cada vizinhança V de zero em Y existe uma vizinhança U de zero em X tal que $T(U) \subset V$ para todo $T \in H$.

O próximo resultado é conhecido como *Teorema de Banach-Steinhaus para espaços vetoriais localmente convexos.*

Teorema 1.1.23. [67, Theorem 11.9.1] *Sejam X um espaço de Fréchet e Y um espaço vetorial localmente convexo. Se $H \subset \mathcal{L}(X;Y)$ é pontualmente limitado, então H é equicontínuo.*

Definição 1.1.24. Seja M um subconjunto não-vazio de um espaço vetorial topológico X. O *anulador* de M é definido por

$$M^{\perp} := \{\varphi \in X^* : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Teorema 1.1.25. [32, Theorem V.2.2] *Sejam M um subespaço vetorial fechado do espaço vetorial localmente convexo (X, τ) e $\pi \colon X \longrightarrow X/M$ o operador quociente. Então a aplicação*

$$(X/M)^* \longrightarrow M^{\perp} \ , \ f \longmapsto f \circ \pi,$$

é uma bijeção linear. Se o dual $(X/M)^*$ estiver munido com a topologia fraca-estrela $\sigma((X/M)^*, X/M)$ e $M^{\perp}$ com a topologia fraca-estrela relativa $\sigma(X^*, X)$, então essa bijeção é um isomorfismo. Mais ainda, se X for um espaço normado, então essa bijeção é uma isometria.

Teorema 1.1.26. [32, Theorem V.2.3] *Seja M um subespaço vetorial fechado do espaço vetorial localmente convexo (X, τ). O operador restrição*

$$T \colon X^* \longrightarrow M^* \ , \ \varphi \longmapsto \varphi|_M,$$

induz uma bijeção linear $\tilde{T} \colon X^*/M^{\perp} \longrightarrow M^*$. Se $X^*/M^{\perp}$ estiver munido com a topologia quociente induzida por $\sigma(X^*, X)$ e M^* com a topologia fraca-estrela $\sigma(M^*, M)$, então $\tilde{T}$ é um isomorfismo. Mais ainda, se X for um espaço normado, então $\tilde{T}$ é uma isometria.

1.2 Espaços de Riesz

Nesta seção os espaços vetoriais são considerados sobre o corpo $\mathbb{R}$. Utilizamos os livros [4, 5, 63] como referências básicas para a sua construção.

Definição 1.2.1. Um *espaço de Riesz* é um espaço vetorial E munido de uma ordem $\geq$ (isto é, $\geq$ é reflexiva, antissimétrica e transitiva) que satisfaz as seguintes condições:

(a) Se $x \geq y$, então $x + z \geq y + z$ para todo $z \in E$.

(b) Se $x \geq y$, então $\alpha x \geq \alpha y$ para todo $\alpha \geq 0$.

(c) Para cada par de elementos $x, y \in E$, o supremo e o ínfimo do conjunto $\{x, y\}$ existem em E.

Espaços de Riesz também são conhecidos como *reticulados vetoriais*. Um espaço vetorial equipado com uma ordem que satisfaz apenas os itens (a) e (b) da definição acima é chamado de *espaço vetorial ordenado*.

Dados $x, y \in E$, a notação $y \leq x$ significa $x \geq y$ e a notação $x > 0$ significa que $x \neq 0$ e $x \geq 0$. O supremo e o ínfimo entre x e y são denotados por

$$x \vee y := \sup\{x, y\} \quad \text{e} \quad x \wedge y := \inf\{x, y\}.$$

Definição 1.2.2. Seja E um espaço de Riesz.

(a) Um elemento $x \in E$ é *positivo* se $x \geq 0$.

(b) O *cone positivo de E* é o conjunto E^+ formado por todos os elementos positivos de E, isto é, $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$.

Observe que $x \geq y \Leftrightarrow x - y \in E^+$, ou seja, a ordem em um espaço de Riesz E pode ser representada através do cone positivo de E.

Definição 1.2.3. Sejam x e y vetores em um espaço de Riesz E.

(a) A *parte positiva de x* é definida por $x^+ := x \vee 0$.

(b) A *parte negativa de x* é definida por $x^- := (-x) \vee 0$.

(c) O *valor absoluto de x* é definido por $|x| := x \vee (-x)$.

(d) x e y são *disjuntos*, denotado por $x \perp y$, se $|x| \wedge |y| = 0$.

(e) O *complemento disjunto* de um subconjunto $A \subset E$ é o conjunto

$$A^d := \{x \in E : \ x \perp y \text{ para todo } y \in A\}.$$

(f) Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *disjunta* se $x_i \perp x_j$ para todos $i \neq j$.

Vetores disjuntos também são chamados de *vetores ortogonais* e a notação utilizada é a mesma usada para vetores ortogonais no sentido de espaços de Hilbert. Nesta tese não trabalhamos com vetores ortogonais no sentido de espaços de Hilbert, portanto não existe o risco da notação causar confusão. Note que a notação do complemento disjunto é A^d e não $A^\perp$, sendo essa última utilizada para denotar o anulador de um conjunto A (veja Definição 1.1.24).

Proposição 1.2.4. [4, Theorem 1.3] *Para qualquer elemento x em um espaço de Riesz E valem as seguintes igualdades: $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$.*

Proposição 1.2.5. [4, Lemma 1.9] *Sejam E um espaço de Riesz e $x, y, z \in E$.*

(a) *Se $x \perp y$ e $x \perp z$, então $x \perp (\alpha y + \beta z)$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

(b) *Se $x \perp y$, então $|x + y| = |x| + |y|$.*

Note que o item (a) garante que se $x \perp y$, então $\alpha x \perp \beta y$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.2.6. [5, p. 8] *Sejam x e y elementos de um espaço de Riesz E. Então, $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$.*

Definição 1.2.7. Seja E um espaço de Riesz.

(a) Um *subespaço de Riesz* (ou *subreticulado vetorial*) de E é um subespaço vetorial F de E tal que $x \wedge y \in F$ e $x \vee y \in F$ para todos $x, y \in F$.

(b) Se F é o menor subespaço de Riesz de E contendo um subconjunto $A \subset E$, então dizemos que F é *gerado por* A.

(c) Um subconjunto A de E é *sólido* se $|x| \leq |y|$ para algum $y \in A$ implicar que $x \in A$.

(d) Um *ideal* de E é um subespaço vetorial sólido. Um *ideal gerado* por um subconjunto $A \subset E$ é o menor ideal de E que contém A.

(e) Um ideal B de E é uma *faixa* se $\sup(A) \in B$ para todo subconjunto $A \subset B$ que possui supremo em E.

(f) Uma faixa B é uma *faixa projetada* de E se $E = B \oplus B^d$.

(g) E tem a *propriedade da projeção* se toda faixa de E é uma faixa projetada.

Observamos que se E é um espaço de Riesz, então o complemento disjunto A^d de um subconjunto arbitrário $A \subset E$ é sempre uma faixa (veja [4, p. 12]). Mais ainda, todo ideal de E é um subespaço de Riesz (veja [4, Lemma 1.21]).

Definição 1.2.8. Seja A um subconjunto do espaço de Riesz E.

(a) A é *limitado superiormente* se existe $x \in E$ tal que $y \leq x$ para todo $y \in A$.

(b) A é *limitado inferiormente* se existe $x \in E$ tal que $x \leq y$ para todo $y \in A$.

(c) A é *ordem-limitado* se é limitado superiormente e inferiormente.

(d) E é *Dedekind completo* se todo subconjunto não-vazio e limitado superiormente tem supremo; ou equivalentemente, se todo subconjunto não-vazio e limitado inferiormente tem ínfimo.

(e) E é Dedekind σ-completo se todo subconjunto não-vazio, enumerável e limitado superiormente tem supremo; ou equivalentemente, se todo subconjunto não-vazio, enumerável e limitado inferiormente tem um ínfimo.

Espaços de sequências serão sempre considerados com a ordem coordenada a coordenada, isto é, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \leq (y_j)_{j=1}^{\infty}$ se, e somente se, $x_j \leq y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.2.9. [63, p. 8] ℓ_p, para $1 \leq p \leq \infty$, e c_0 são espaços de Riesz Dedekind completos.

Teorema 1.2.10. [4, Theorem 1.59] *Todo espaço de Riesz Dedekind completo tem a propriedade da projeção.*

Definição 1.2.11. Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear entre os espaços de Riesz E e F.

(a) T é *positivo* se $T(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

(b) T é *regular* se é a diferença de dois operadores positivos. Denotamos por $L^r(E;F)$ a coleção de todos os operadores regulares de E em F.

(c) T é um *homomorfismo de Riesz* se $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ para todos $x, y \in E$.

(d) T é um *isomorfismo de Riesz* se T é um homomorfismo de Riesz injetor.

(e) E e F são *Riesz-isomorfos* se existe um isomorfismo de Riesz sobrejetor $T\colon E \longrightarrow F$.

Observamos que um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é positivo se, e somente se, $T(E^+) \subset F^+$; ou ainda, se, e somente se, $x \leq y$ implica $T(x) \leq T(y)$ (veja [5, p. 2]). É fácil mostrar que todo homomorfismo de Riesz é um operador positivo.

Espaços de operadores serão sempre considerados com a ordem pontual.

Teorema 1.2.12. [63, Theorem 1.3.2] *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então $L^r(E;F)$ é um espaço de Riesz Dedekind completo.*

Proposição 1.2.13. [5, p. 12] *Sejam E e F espaços de Riesz com F Dedekind completo. Então $|T(x)| \leq |T|(|x|)$ para todos $T \in L^r(E;F)$ e $x \in E$.*

Teorema 1.2.14. [5, Theorem 2.14] *As seguintes afirmações são equivalentes para um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ entre dois espaços de Riesz E e F.*

(a) *T é um homomorfismo de Riesz.*

(b) *$T(x^+) = (T(x))^+$ para todo $x \in E$.*

(c) *$T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$ para todos $x, y \in E$.*

(d) *Se $x \wedge y = 0$ em E, então $T(x) \wedge T(y) = 0$ em F.*

(e) *$T(|x|) = |T(x)|$ para todo $x \in E$.*

Corolário 1.2.15. [5, p. 94] *Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um homomorfismo de Riesz entre os espaços de Riesz E e F. Então $\ker(T) = \{x \in E : T(x) = 0\}$ é um ideal de E.*

Definição 1.2.16. Seja $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear definido no espaço de Riesz E.

(a) φ é *positivo* se $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in E^+$.

(b) φ é *ordem-limitado* se φ aplica subconjuntos ordem-limitados de E em subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$.

(c) O *ordem-dual* de E é o espaço vetorial $E^\sim$ formado por todos os funcionais lineares ordem-limitados definidos em E; ou, equivalentemente, $E^\sim = L^r(E;\mathbb{R})$.

Teorema 1.2.17. ([5, pp. 99 e 100, Theorem 2.22], [4, p. 16]) *Se I é um ideal do espaço de Riesz E, então o espaço quociente E/I é um espaço de Riesz com a ordem*

$$\dot{x} \leq \dot{y} \text{ se existem } x_1 \in \dot{x} \text{ e } y_1 \in \dot{y} \text{ tais que } x_1 \leq y_1,$$

e o operador quociente $\pi\colon E \longrightarrow E/I$ é um homomorfismo de Riesz.

É um fato que o cone positivo $(E/I)^+$ de E/I é a imagem do cone E^+ pelo operador quociente, isto é, $(E/I)^+ = \pi(E^+)$.

1.3 Topologias em espaços de Riesz

Nesta seção apresentamos resultados sobre espaços de Riesz munidos com topologias lineares. Os livros [4, 5] são as referências básicas utilizadas para a construção desta seção.

Definição 1.3.1. (a) Uma topologia linear τ no espaço de Riesz E é *localmente sólida* se tem uma base de vizinhança para o zero formada por conjuntos sólidos.

(b) Um espaço de Riesz munido com uma topologia localmente sólida é chamado *espaço de Riesz localmente sólido.*

Teorema 1.3.2. [4, Theorem 2.17] *As seguintes afirmações são equivalentes para uma topologia linear τ em um espaço de Riesz E.*

(a) (E, τ) *é um espaço de Riesz localmente sólido.*

(b) *A aplicação* $(x, y) \in (E, \tau) \times (E, \tau) \longmapsto x \vee y \in (E, \tau)$ *é uniformemente contínua.*

(c) *A aplicação* $(x, y) \in (E, \tau) \times (E, \tau) \longmapsto x \wedge y \in (E, \tau)$ *é uniformemente contínua.*

(d) *A aplicação* $x \in (E, \tau) \longmapsto |x| \in (E, \tau)$ *é uniformemente contínua.*

(e) *A aplicação* $x \in (E, \tau) \longmapsto x^+ \in (E, \tau)$ *é uniformemente contínua.*

(f) *A aplicação* $x \in (E, \tau) \longmapsto x^- \in (E, \tau)$ *é uniformemente contínua.*

Teorema 1.3.3. [4, Theorem 2.21] *Seja* (E, τ) *um espaço de Riesz localmente sólido. Então:*

(a) *O cone positivo* E^+ *de* E *é fechado.*

(b) *Toda faixa de* E *é fechada.*

Teorema 1.3.4. [4, Theorem 2.22] *Se* (E, τ) *é um espaço de Riesz localmente sólido, então o dual topológico* E^* *de* (E, τ) *é um ideal do ordem-dual* $E^\sim$*. Consequentemente,* E^* *é um espaço de Riesz Dedekind completo.*

Teorema 1.3.5. [4, Theorem 2.24] *Se* I *é um ideal do espaço de Riesz localmente sólido* (E, τ)*, então* $(E/I, \dot{\tau})$ *é um espaço de Riesz localmente sólido.*

Definição 1.3.6. (a) Uma topologia linear τ no espaço de Riesz E é *localmente convexa-sólida* se τ é, ao mesmo tempo, localmente convexa e localmente sólida.

(b) Um espaço de Riesz munido com uma topologia localmente convexa-sólida é chamado *espaço de Riesz localmente convexo-sólido.*

O Teorema 1.1.5 nos garante que uma topologia localmente convexa é gerada por uma família de seminormas. Veremos a seguir que uma topologia localmente convexa-sólida é gerada por uma família especial de seminormas, chamadas de seminormas de Riesz.

Definição 1.3.7. Uma seminorma ρ em um espaço de Riesz E é uma *seminorma de Riesz* se $|x| \leq |y|$ implica $\rho(x) \leq \rho(y)$; ou equivalentemente, se os dois itens a seguir são verificados:

(a) $\rho(x) = \rho(|x|)$ para todo $x \in E$.

(b) $0 \le x \le y$ em E implica $\rho(x) \le \rho(y)$.

Se ρ for uma norma satisfazendo essas condições, então ρ é uma *norma de Riesz*.

Teorema 1.3.8. [4, Theorem 2.25] *Uma topologia linear definida em um espaço de Riesz é localmente convexa-sólida se, e somente se, é gerada por uma família de seminormas de Riesz.*

Observação 1.3.9. Os Teoremas 1.1.8 e 1.3.8 nos dizem que um espaço de Riesz localmente convexo-sólido é metrizável se, e somente se, sua topologia é gerada por uma sequência de seminormas de Riesz $(\rho_n)_{n=1}^{\infty}$.

Definição 1.3.10. Seja (E, τ) um espaço de Riesz localmente sólido.

(a) (E, τ) tem a *propriedade de Lebesgue*, ou τ é uma *topologia de Lebesgue*, se toda rede descrescente $(x_\alpha)_\alpha \subset E$ tal que $\inf_\alpha x_\alpha = 0$ converge para zero.

(b) (E, τ) tem a *propriedade σ-Lebesgue*, ou τ é uma *topologia σ-Lebesgue*, se toda sequência descrescente $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $\inf_n x_n = 0$ converge para zero.

Uma topologia de Lebesgue também é conhecida como *topologia ordem-contínua*, veja por exemplo [5, Definition 3.53].

Teorema 1.3.11. [4, Theorem 3.24] *Todo espaço de Riesz localmente sólido, completo e com a propriedade de Lebesgue é Dedekind completo.*

Teorema 1.3.12. [4, Theorem 3.7] *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço de Riesz localmente sólido (E, τ):*

(a) *(E, τ) tem a propriedade de Lebesgue.*

(b) *Todo ideal τ-fechado de E é uma faixa.*

Definição 1.3.13. Sejam (E_1, τ_1) e (E_2, τ_2) espaços de Riesz com topologias lineares.

(a) Um operador linear $T\colon (E_1, \tau_1) \longrightarrow (E_2, \tau_2)$ é um *isomorfismo de reticulados* se é um isomorfismo, no sentido de espaço vetorial topológico, e um isomorfismo de Riesz, no sentido de espaços de Riesz.

(b) (E_1, τ_1) e (E_2, τ_2) são *isomorfos como reticulados* se existe um isomorfismo de reticulados entre (E_1, τ_1) e (E_2, τ_2).

(c) (E_2, τ_2) contém uma *cópia reticulada* de (E_1, τ_1) se (E_2, τ_2) possui um subespaço de Riesz F tal que (E_1, τ_1) é isomorfo como reticulado a (F, τ_2).

Apesar de não estarmos completamente satisfeitos com o termo "isomorfos como reticulados", não encontramos uma maneira mais eficiente de expressar a ideia desejada. Essa expressão se provará mais intuitiva quando estivermos trabalhando, a partir da próxima seção, especificamente com reticulados de Banach.

Teorema 1.3.14. [4, p. 115] *Seja B uma faixa projetada do espaço de Riesz localmente sólido (E, τ). Então $(E/B, \dot{\tau})$ é isomorfo como reticulado a (B^d, τ).*

Teorema 1.3.15. [4, Theorem 3.29] *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço de Riesz localmente sólido, completo e Dedekind σ-completo (E, τ):*

(a) *(E, τ) tem a propriedade de Lebesgue.*

(b) *(E, τ) não contém cópia reticulada de ℓ_∞.*

Definição 1.3.16. Um *reticulado de Fréchet* é um espaço de Riesz munido com uma topologia localmente convexa-sólida, metrizável e completa.

Exemplos clássicos de reticulados de Fréchet são os reticulados de Banach, que são o objeto da seção seguinte.

Teorema 1.3.17. [4, Theorem 5.17] *Seja I um ideal fechado do reticulado de Fréchet (E, τ). Então $(E/I, \dot{\tau})$ é um reticulado de Fréchet.*

1.4 Espaços e reticulados de Banach

Nesta seção apresentamos alguns resultados relacionados a espaços e reticulados de Banach. Utilizamos os livros [3, 5, 52, 59, 63, 75, 83] como referências básicas para construção desta seção.

Definição 1.4.1. Um espaço de Riesz E munido com uma norma de Riesz é chamado *espaço de Riesz normado*. Se E for completo com a métrica induzida pela norma de Riesz, então ele é chamado *reticulado de Banach*. Um *subreticulado* de E é um subespaço de Riesz munido com a norma de E, e um *subreticulado de Banach* de E é um subreticulado fechado de E.

Definição 1.4.2. Seja X um espaço de Banach.

(a) Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em X é uma *base de Schauder* de X se cada $x \in X$ tem uma representação única sob a forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A unicidade da representação permite considerar os funcionais lineares

$$x_n^*\colon X \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \longmapsto a_n,$$

$n \in \mathbb{N}$, que são chamados *funcionais coeficientes*, *funcionais coordenados* ou *funcionais biortogonais associados.*

(b) Uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X é *incondicional* se a expansão $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, de qualquer $x \in X$, converge incondicionalmente, isto é, se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}$ converge para toda permutação $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

(c) Uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é 1-*incondicional*, ou *incondicional monótona*, se

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\| \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j \right\|,$$

para todos escalares $|a_j| \leq |b_j|$, $j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.4.3. (a) Os espaços de sequências reais ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, e c_0 são reticulados de Banach com a ordem coordenada a coordenada. O espaço c_0 é um ideal fechado, e, consequentemente, um subreticulado de Banach de ℓ_∞ (veja [63, p. 12]).

(b) Os espaços $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, são reticulados de Banach com a ordem dada pontualmente μ-quase sempre, isto é, $f \leq g$ em $L_p(\mu)$ se, e somente se, $f(x) \leq g(x)$ μ-quase sempre.

(c) O espaço $C(K)$ é um reticulado de Banach com a ordem dada pontualmente.

(d) Todo espaço de Banach real X que tem uma base 1-incondicional $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é um reticulado de Banach com a ordem dada por: $x := \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j x_j \geq 0$ se, e somente se, $a_j \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (veja [59, p. 2]).

Proposição 1.4.4. [58, p. 19] *Se X é um espaço de Banach com base 1-incondicional $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, então os funcionais coeficientes $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ formam uma sequência básica 1-incondicional em X^*.*

Proposição 1.4.5. [5, Corollary 4.4] *Todas as normas de Riesz que tornam um espaço de Riesz em um reticulado de Banach são equivalentes entre si.*

Proposição 1.4.6. [68, Lemma 2.6] *Todo reticulado de Banach de dimensão infinita possui uma sequência disjunta infinita.*

Proposição 1.4.7. [63, Proposition 1.2.3] *Seja E um reticulado de Banach. O fecho de um subreticulado de E também é um subreticulado de E.*

Definição 1.4.8. Uma seminorma de Riesz ρ em um espaço de Riesz E é *ordem-contínua* se para toda rede decrescente $(x_\alpha)_\alpha \subset E$ tal que $\inf_\alpha x_\alpha = 0$ tivermos $\rho(x_\alpha) \longrightarrow 0$.

Um reticulado de Banach cuja norma é ordem-contínua é chamado de *reticulado de Banach ordem-contínuo.*

Exemplo 1.4.9. [5, p. 187] O reticulado de Banach $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, é ordem-contínuo. Por outro lado, os reticulados de Banach $C[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ e ℓ_∞ não são ordem-contínuos.

Teorema 1.4.10. [5, Theorem 4.9] *Seja E um reticulado de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *E tem norma ordem-contínua.*

(b) *E é um ideal de E^{**}.*

Em particular, todo reticulado de Banach com norma ordem-contínua é Dedekind completo.

Teorema 1.4.11. [5, Theorem 4.56] *Seja E um reticulado de Banach Dedekind σ-completo. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *E tem norma ordem-contínua.*

(b) *E não tem cópia de ℓ_∞.*

(c) *E não tem cópia reticulada de ℓ_∞.*

Definição 1.4.12. Um reticulado de Banach E é um *KB-espaço (espaço de Kantorovič-Banach)* se toda sequência crescente limitada em E^+ é convergente.

Teorema 1.4.13. [5, p. 232] *Todo KB-espaço tem norma ordem-contínua.*

Teorema 1.4.14. [5, Theorem 4.60] *Seja E um reticulado de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) *E é um KB-espaço.*

(b) *E é uma faixa de E^{**}.*

(c) *E não contém uma cópia de c_0.*

(d) *E não contém uma cópia reticulada de c_0.*

(e) *E é fracamente sequencialmente completo.*

Teorema 1.4.15. [5, Theorem 4.71] *Um reticulado de Banach E é reflexivo se, e somente se, E e E^* não contêm cópia reticulada de ℓ_1.*

Definição 1.4.16. Dada uma sequência de espaços de Banach $(X_j)_{j=1}^{\infty}$, definimos os espaços vetoriais:

(a) $$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_p := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} : x_j \in X_j \ \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{X_j}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}.$$

(b) $$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_\infty := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} : x_j \in X_j \ \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|_{X_j} < \infty\right\}.$$

(c) $$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_0 := \left\{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_\infty : \|x_j\|_{X_j} \longrightarrow 0\right\}.$$

Em (a), $1 \leq p < \infty$. Como em todos os espaços de sequências, nesses três espaços consideramos as operações coordenada a coordenada, isto é:

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j + y_j)_{j=1}^{\infty} \ , \ \lambda(x_j)_{j=1}^{\infty} = (\lambda x_j)_{j=1}^{\infty}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Quando a sequência de espaços de Banach $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ é formada por um único espaço X, isto é, $X_j = X$ para todo $j \in \mathbb{N}$, utilizamos a notação $\ell_p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, para representar o espaço $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_p$, e a notação $c_0(X)$ para representar o espaço $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_0$.

Proposição 1.4.17. ([83, p. 43] e [5, p. 183]) *Seja $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach. Então, a função $\|\cdot\|_p$ define uma norma em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_p$ e a função $\|\cdot\|_\infty$ define uma norma em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_\infty$ e em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_0$. Mais ainda, $\left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_p, \|\cdot\|_p\right)$, $\left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$ e $\left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_0, \|\cdot\|_\infty\right)$ são espaços de Banach. Se cada X_n for um reticulado de Banach, então cada um desses espaços será um reticulado de Banach com a ordem dada coordenada a coordenada, isto é, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \leq (y_n)_{n=1}^{\infty}$ se, e somente se, $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.4.18. Dois reticulados de Banach E e F são *isomorfos isometricamente como reticulados* se existir uma isometria linear sobrejetora entre E e F que também é um homomorfismo de Riesz. Essa isometria será chamada de *isomorfismo isométrico de reticulados.*

Teorema 1.4.19. [5, Theorem 4.6] *Sejam $(X_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de espaços de Banach e $1 < p, p^* < \infty$ tais que $(1/p) + (1/p^*) = 1$. Então, $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_p^*$ é isomorfo isometricamente a $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j^*\right)_{p^*}$, $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_0^*$ é isomorfo isometricamente a $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j^*\right)_1$ e $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j\right)_1^*$ é isomorfo* *isometricamente a* $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j^*\right)_\infty$. *Em ambos os casos a relação de dualidade é dada por*

$$\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^\infty \longmapsto \widetilde{\varphi}\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j).$$

Se cada X_j *for um reticulado de Banach, então a dualidade* $\varphi \longmapsto \widetilde{\varphi}$ *é um isomorfismo isométrico de reticulados.*

Definição 1.4.20. Seja E um reticulado de Banach.

(a) E é um L_p-*espaço abstrato*, para algum $1 \leq p < \infty$, se sua norma é p-aditiva, isto é, se

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

para todos $x, y \in E^+$ com $x \wedge y = 0$.

(b) E é um M-*espaço abstrato* se sua norma é uma M-norma, isto é, se $x \wedge y = 0$ em E implicar

$$\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Um L_1-espaço abstrato é chamado de *AL-espaço* e um M-espaço abstrato é comumente chamado de *AM-espaço*.

Teorema 1.4.21. [5, Theorem 4.23] *Um reticulado de Banach E é um AL-espaço (respectivamente, um AM-espaço) se, e somente se,* E^* *é um AM-espaço (respectivamente, um AL-espaço).*

Teorema 1.4.22. [5, Theorem 4.27] *Um reticulado de Banach E é um* L_p*-espaço abstrato se, e somente se, E é isomorfo isometricamente como reticulado a* $L_p(\mu)$*, para alguma medida* μ.

Teorema 1.4.23. [5, Theorem 4.29] *Um reticulado de Banach E é um AM-espaço se, e somente se, E é isomorfo isometricamente como reticulado a um subreticulado fechado de algum* $C(K)$.

Proposição 1.4.24. [5, p. 254] *Todo AM-espaço de dimensão infinita contém cópia reticulada de* c_0 *e todo AL-espaço de dimensão infinita contém cópia reticulada de* ℓ_1.

Definição 1.4.25. Um *reticulado de Hilbert* é um reticulado de Banach que é, ao mesmo tempo, um espaço de Hilbert.

Teorema 1.4.26. [63, Corollary 2.7.5] *Todo reticulado de Hilbert é isomorfo isometricamente como reticulado a* $L_2(\mu)$ *para algum espaço de medida* (Ω, Σ, μ).

Dados reticulados de Banach E e F, nem sempre o espaço $\mathcal{L}(E;F)$ é um reticulado de Banach com a norma usual e a ordem pontual (veja [75, p. 228]). A seguir veremos que $L^r(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ e veremos uma norma com a qual $L^r(E;F)$ sempre será um reticulado de Banach, desde que F seja Dedekind completo.

Sejam E e F espaços de Riesz normados. Denotamos por $\mathcal{L}^r(E;F)$ a coleção de todos os operadores lineares regulares contínuos $T\colon E \longrightarrow F$.

Teorema 1.4.27. [63, Proposition 1.3.5] *Sejam E um reticulado de Banach e F um espaço de Riesz normado. Todo operador positivo $T\colon E \longrightarrow F$ é contínuo, e consequentemente, $\mathcal{L}^r(E;F) = L^r(E;F)$.*

Teorema 1.4.28. [63, Proposition 1.3.6] *Sejam E e F reticulados de Banach. Para todo $T \in \mathcal{L}^r(E;F)$, a r-norma (ou norma regular) de T é definida por*

$$\|T\|_r := \inf\{\|S\| : \ S \in \mathcal{L}(E;F) \text{ é positivo e } |T(x)| \leq S(|x|) \text{ para todo } x \in E^+\}.$$

$(\mathcal{L}^r(E;F), \|\cdot\|_r)$ é um espaço de Banach e $\|T\| \leq \|T\|_r$ para todo operador regular $T\colon E \longrightarrow F$.

Mais ainda, se F for Dedekind completo, então $(\mathcal{L}^r(E;F), \|\cdot\|_r)$ é um reticulado de Banach tal que $\|T\|_r = \||T|\|$ para todo operador regular $T\colon E \longrightarrow F$.

Definição 1.4.29. Um operador linear contínuo $T\colon X \longrightarrow Y$ entre os espaços de Banach X e Y é de *Dunford-Pettis*, ou *completamente contínuo*, se T transforma sequências fracamente nulas em X em sequências que convergem para zero em Y.

Teorema 1.4.30. [63, Proposition 1.3.7] *O dual topológico E^* de um espaço de Riesz normado é um reticulado de Banach. Mais ainda, se E for um reticulado de Banach, então $E^* = E^\sim$*

Teorema 1.4.31. [75, Corollary 1, p. 86] *Seja I um ideal fechado de um espaço de Riesz normado E. O anulador $I^\perp$ de I é uma faixa $\sigma(E^*,E)$-fechada de E^*. Mais ainda, I^* é isomorfo isometricamente como reticulado a $E^*/I^\perp$ (e consequentemente a $(I^\perp)^d$ em E^*) e $(E/I)^*$ é isomorfo isometricamente como reticulado ao ideal normado $I^\perp$ de E^*.*

Definição 1.4.32. Um espaço de Banach X tem *estrutura incondicional local de Gordon-Lewis*, ou *GL-l.u.st*, se X^{**} é isomorfo a um subespaço complementado de um reticulado de Banach.

A definição apresentada acima é na realidade uma caracterização da GL-l.u.st. O leitor pode conferir a definição original e a caracterização acima em [52, p. 59] e também em [34, p. 345 e Theorem 17.5]. Em [34] os autores se referem à GL-l.u.st pela sigla l.u.st. O leitor deve ficar atento, pois existe uma noção mais forte de estrutura local incondicional, também denotada por l.u.st, que ainda não se sabe se é equivalente à GL-l.u.st (veja [52, p. 59]).

Observação 1.4.33. Se X é um espaço de Banach sem GL-l.u.st, então X não é isomorfo a um reticulado de Banach. De fato, suponha que exista um isomorfismo $T\colon X \longrightarrow E$, onde E é um reticulado de Banach. Então o adjunto $T^{**}\colon X^{**} \longrightarrow E^{**}$ também será um isomorfismo. Como E^{**} é um reticulado de Banach, temos uma contradição.

1.5 Análise Funcional e Teoria da Medida

Nesta seção apresentamos alguns resultados de Análise Funcional e Teoria da Medida que utilizaremos, especialmente, nos Capítulos 3 e 4. Indicamos os livros [12, 16] para mais informações sobre esses assuntos.

Teorema 1.5.1 (Teorema de Hahn-Banach)**.** [16, Corolário 3.1.4] *Seja X um espaço normado. Para todo $0 \neq x \in X$ existe um funcional $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) = \|x\|$ e $\|\varphi\| = 1$.*

Teorema 1.5.2 (Teorema da Aplicação Aberta)**.** [16, Teorema 2.4.2] *Sejam X e Y espaços de Banach. Então, todo operador linear, contínuo e sobrejetor $T\colon X \longrightarrow Y$ é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear, contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Teorema 1.5.3 (Teorema de Radon-Nikodým)**.** [12, Theorem 8.9] *Sejam (Ω, Σ) um espaço mensurável, μ e λ medidas σ-finitas definidas em Σ e suponha que λ é absolutamente contínua com respeito a μ (isto é, $\lambda(A) = 0$ sempre que $A \in \Sigma$ e $\mu(A) = 0$). Então, existe uma função mensurável e não-negativa f definida em (Ω, Σ) tal que*

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu$$

para todo $A \in \Sigma$. Mais ainda, a função f é unicamente definida μ-quase sempre.

A função f definida no Teorema de Radon-Nikodým é chamada *derivada de Radon-Nikodým* de λ com relação a μ e é denotada por $d\lambda/d\mu$.

Proposição 1.5.4. [12, Exercise 8N, p. 94] *Sejam λ e μ medidas σ-finitas no espaço mensurável (Ω, Σ) tais que λ é absolutamente contínua com respeito a μ e seja $f = d\lambda/d\mu$. Se g é uma função mensurável e não negativa definida em (Ω, Σ), então*

$$\int_\Omega g d\lambda = \int_\Omega g f d\mu.$$

Proposição 1.5.5. [12, Exercise 8P] *Sejam λ e μ medidas σ-finitas e absolutamente contínuas entre si definidas no espaço mensurável (Ω, Σ). Então*

$$d\lambda/d\mu = \frac{1}{d\mu/d\lambda} \text{ quase sempre.}$$

Teorema 1.5.6 (Desigualdade de Hölder)**.** [12, 6.9 Hölder's Inequality] *Sejam* $p, p^* > 1$ *tais que* $(1/p) + (1/p^*) = 1$ *e* (Ω, Σ, μ) *um espaço de medida. Se* $f \in L_p(\mu)$ *e* $g \in L_{p^*}(\mu)$, *então* $fg \in L_1(\mu)$ *e* $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$.

Outros resultados necessários para o desenvolvimento da tese serão apresentados em momento oportuno no decorrer do trabalho.

2 Propriedades de Schur, de Dunford-Pettis fraca e de três reticulados

Neste capítulo provamos resultados originais sobre convergência de sequências em reticulados de Fréchet e obtemos, como caso particular, novos resultados relacionados às propriedades de Schur, de Schur positiva, de Schur positiva dual e de Dunford-Pettis fraca em reticulados de Banach.

2.1 Contextualização

A propriedade de três espaços teve seu início com o seguinte problema atribuído a Palais: *se X é um espaço de Banach, Y é um subespaço de X isomorfo a um espaço de Hilbert e X/Y é isomorfo a um espaço de Hilbert, será que X é isomorfo a um espaço de Hilbert?* A resposta para essa questão é NÃO, e foi dada por Enflo, Lindenstrauss e Pisier em 1975 (veja [29]). Questões desse tipo motivaram a seguinte definição.

Definição 2.1.1. Uma propriedade $\mathcal{P}$, definida em espaços de Banach, é uma *propriedade de três espaços* se um espaço de Banach X possuir a propriedade $\mathcal{P}$ sempre que Y e X/Y tiverem $\mathcal{P}$, onde Y é um subespaço fechado de X.

Uma versão mais forte dessa propriedade pode ser descrita do seguinte modo: uma propriedade $\mathcal{P}$ é uma *propriedade de três espaços* se sempre que dois dos três espaços de Banach X, Y e X/Y tiverem $\mathcal{P}$ então o terceiro espaço também tiver $\mathcal{P}$, para todo subespaço fechado Y de X. Quando nos referirmos a essa versão mais forte usaremos o termo *propriedade de três espaços no sentido forte*.

Exemplo 2.1.2. (a) Separabilidade e reflexividade são propriedades de três espaços (veja [29, Theorem 2.4.h e Theorem 4.1.a]). Essas duas propriedades são herdadas por subespaços fechados e por espaços quocientes, então elas são propriedades de três espaços no sentido forte.

(b) A propriedade de Dunford-Pettis não é uma propriedade de três espaços (veja Definição 3.3.2 e [29, Theorem 6.6.f])

O estudo da propriedade de Schur teve início na década de 1920 com a demonstração, dada por I. Schur, de que toda sequência fracamente nula em ℓ_1 é nula em norma (veja [77]).

Definição 2.1.3. Um espaço de Banach X tem a *propriedade de Schur* se toda sequência fracamente nula em X é nula em norma.

A propriedade de Schur é uma propriedade de três espaços (veja [29, Theorem 6.1.a]), porém não é uma propriedade de três espaços no sentido forte. De fato, ℓ_1 e todos os seus subespaços fechados têm a propriedade de Schur, contudo o espaço ℓ_2 é isomorfo isometricamente a um quociente de ℓ_1 (veja Teorema 2.2.15) e não possui a propriedade de Schur, pois é reflexivo de dimensão infinita.

Exemplo 2.1.4. (a) O exemplo clássico de espaço com a propriedade de Schur é ℓ_1 (veja [77]). Em [61] outros exemplos são listados.

(b) Nenhum espaço reflexivo de dimensão infinita possui a propriedade de Schur (veja [61, Proposição 2.3.1]).

(c) O espaço c_0 não tem a propriedade de Schur. Basta notar que a sequência de vetores canônicos $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset c_0$ é fracamente nula e formada por vetores de norma 1.

A propriedade de Schur positiva foi introduzida no fim da década de 1980 nos trabalhos de Wnuk [80] e Räbiger [70]. Wnuk introduziu essa propriedade para caracterizar os reticulados de Banach E tais que: *todo operador definido em E com imagem em c_0 é de Dunford-Pettis se, e somente se, é regular*. Räbiger apresentou a propriedade de Schur positiva, referida em seu trabalho como propriedade de Schur fraca, com o objetivo de estudar os reticulados de Banach cujos subconjuntos fracamente compactos se comportam de forma semelhante aos subconjuntos fracamente compactos de AL-espaços.

Definição 2.1.5. Um reticulado de Banach E tem a *propriedade de Schur positiva* se toda sequência positiva e fracamente nula em E é nula em norma.

Relembre que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em um reticulado de Banach é disjunta se $x_j \perp x_i$ para todos $i \neq j$.

Proposição 2.1.6. [81, p. 16] *Seja E um reticulado de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) E tem a propriedade de Schur positiva.

(b) Toda sequência disjunta e fracamente nula em E é nula em norma.

(c) Toda sequência positiva, disjunta e fracamente nula em E é nula em norma.

Exemplo 2.1.7. (a) Todo reticulado de Banach com a propriedade de Schur tem a propriedade de Schur positiva. A recíproca não é verdadeira, pois o espaço $L_1[0,1]$ tem a propriedade de Schur positiva (veja [81, p. 16, Example 1]), mas não tem a propriedade de Schur (veja [61, Proposição 2.3.8]).

(b) Todo AL-espaço tem a propriedade de Schur positiva (veja [81, p. 16, Example 1] ou [70, Examples 1.3]).

(c) O reticulado de Banach ℓ_∞ não possui a propriedade de Schur positiva. De fato, c_0 é um subreticulado fechado de ℓ_∞ (veja [63, p. 12, Example iii]) e a sequência de vetores canônicos $(e_n)_{n=1}^\infty \subset c_0$ é positiva e fracamente nula, porém não converge para zero em norma. Como a topologia fraca de c_0 é a topologia fraca de ℓ_∞ restrita a c_0 (veja Teorema 1.1.17), segue que ℓ_∞ não tem a propriedade de Schur positiva. Isso garante, ainda, que c_0 não tem a propriedade de Schur positiva.

A propriedade de Schur positiva dual foi introduzida por Aqzzouz, Elbour e Wickstead [8] em 2011 e utilizada na caracterização de reticulados de Banach que possuem a propriedade de bi-sequência. Em 2013, Wnuk [82] fez um estudo aprofundado acerca da propriedade de Schur positiva.

Definição 2.1.8. Um reticulado de Banach E tem a *propriedade de Schur positiva dual* se toda sequência positiva e fraca-estrela nula em E^* é nula em norma.

O Teorema de Josefson-Nissenzweig garante que todo espaço de Banach dual de dimensão infinita contém uma sequência fraca-estrela nula formada por vetores de norma 1 (veja [33, Chapter XII]). Desse modo, um análogo à propriedade de Schur positiva dual no contexto geral de espaços de Banach só seria possível em espaços de dimensão finita. Isso justifica a inexistência de tal propriedade no contexto geral de espaços de Banach.

Exemplo 2.1.9. (a) Para todo espaço topológico compacto de Hausdorff K, o espaço $C(K)$ tem a propriedade de Schur positiva dual [82, Examples, item 4].

(b) O espaço c_0 não tem a propriedade de Schur positiva dual. Basta notar que os vetores canônicos $(e_n)_{n=1}^\infty \subset \ell_1$ formam uma sequência positiva, fraca-estrela nula formada por vetores de norma 1.

A propriedade de Dunford-Pettis fraca foi introduzida por Leung [56] em 1989, trabalho no qual foi apresentado um exemplo que a distingue da propriedade de Dunford-Pettis, respondendo assim uma questão deixada em aberto por Räbiger em 1985.

Definição 2.1.10. Um reticulado de Banach E tem a *propriedade de Dunford-Pettis fraca* se todo operador fracamente compacto definido em E com imagem em qualquer espaço de Banach transforma cada sequência disjunta e fracamente nula numa sequência nula em norma.

As caracterizações da propriedade de Dunford-Pettis fraca (veja Teorema 2.3.4) tornam fácil verificar que todo reticulado de Banach com a propriedade de Schur positiva possui a propriedade de Dunford-Pettis fraca. Além disso, uma caracterização da propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach duais, envolvendo a propriedade de Dunford-Pettis fraca, é apresentada no Teorema 2.2.11, evidenciando assim algumas relações importantes entre essas duas propriedades.

Exemplo 2.1.11. Todo AL-espaço e todo AM-espaço tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca [5, Theorem 5.85]. Os AM-espaços são exemplos de reticulados de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis fraca que não têm a propriedade de Schur positiva.

Nosso objetivo é trabalhar com uma versão da propriedade de três espaços no ambiente de reticulados de Fréchet. Para isso ser possível precisamos garantir, primeiramente, que o quociente de um reticulado de Fréchet ainda seja um reticulado de Fréchet; o qual sabemos ocorrer sempre que tal quociente for tomado por um ideal fechado (veja Teorema 1.3.17). Desse modo, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.12. Uma propriedade $\mathcal{P}$, definida em reticulados de Fréchet, é uma *propriedade de três reticulados* se sempre que dois dos três reticulados de Fréchet (E, τ), (I, τ) e $(E/I, \dot{\tau})$ tiverem a propriedade $\mathcal{P}$, o terceiro reticulado também tiver $\mathcal{P}$, para todo ideal τ-fechado I de E.

Observe que estamos considerando aqui um análogo à propriedade de três espaços no sentido forte e que essa definição se aplica diretamente a reticulados de Banach. Estudaremos se as seguintes versões das propriedades de Schur e de Schur positiva, no contexto de espaços de Riesz, são propriedades de três reticulados.

Definição 2.1.13. Sejam τ_1 e τ_2 topologias lineares no espaço de Riesz E. Dizemos que,

(a) E tem a (τ_1, τ_2)-*propriedade de Schur* ((τ_1, τ_2)-*SP*) se toda sequência τ_1-nula em E for τ_2-nula.

(b) E tem a (τ_1, τ_2)-*propriedade de Schur positiva* ((τ_1, τ_2)-*PSP*) se toda sequência positiva e τ_1-nula em E for τ_2-nula.

O item (a) dessa definição se assemelha à forma como Castillo e Simões abordam a propriedade de Schur em espaços vetoriais topológicos (veja [30, Definition 4, Definition 5, Remark 5]).

Observe que se $\tau_2 \subset \tau_1$, então E tem a (τ_1, τ_2)-SP e a (τ_1, τ_2)-PSP. Note ainda que se E é um reticulado de Banach, então a propriedade de Schur é a $(\sigma(E, E^*), \|\cdot\|_E)$-SP e a propriedade de Schur positiva é a $(\sigma(E, E^*), \|\cdot\|_E)$-PSP.

Na próxima seção provaremos alguns resultados gerais sobre a (τ_1, τ_2)-SP e a (τ_1, τ_2)-PSP (veja Teoremas 2.2.2, 2.2.5) e concluiremos que a (w_τ, τ)-SP e a (w_τ, τ)-PSP são propriedades de três reticulados no contexto de reticulados de Fréchet Dedekind σ-completos (veja Corolário 2.2.6). Aplicando esses resultados em reticulados de Banach obtemos que a propriedade de Schur e a propriedade de Schur positiva são propriedades de três reticulados (veja Corolário 2.2.7) e que um reticulado de Banach E tem a propriedade de Schur positiva dual sempre que um ideal fechado I e o reticulado quociente E/I tiverem essa propriedade (veja Proposição 2.2.22). Apresentaremos, ainda na próxima seção, algumas aplicações e exemplos desses resultados. Na seção final deste capítulo mostraremos que um reticulado de Banach E tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca sempre que um ideal I fechado em E tiver essa propriedade e o quociente E/I tiver a propriedade de Schur positiva (veja Teorema 2.3.3 e Corolário 2.3.5)

Indicamos o livro de Castillo e González [29] para os leitores interessados em estudar a propriedade de três espaços. A dissertação [61] e suas referências servem de base para o leitor interessado em estudar a propriedade de Schur. Os artigos [8, 9, 11, 14, 53, 64, 78, 81, 82, 84] são trabalhos sobre as propriedades de Schur positiva, de Schur positiva dual e de Dunford-Pettis fraca, e, juntamente com suas referências, são um bom caminho para os interessados em estudar essas propriedades.

2.2 Propriedades de Schur e de três reticulados

O lema a seguir é um resultado conhecido em espaços topológicos. Apresentamos sua demonstração apenas por questão de completude.

Lema 2.2.1. *Sejam X um espaço topológico e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em X tal que toda subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tem uma subsequência que converge para um mesmo $x \in X$. Então $x_n \longrightarrow x$.*

Demonstração. Suponha que $x_n \not\longrightarrow x$. Então existe uma vizinhança V de x tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $N \geq n_0$ tal que $x_N \notin V$.

$$\begin{aligned}
&\text{Para } n_0 = 1, \quad \text{existe } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{N_1} \notin V,\\
&\text{Para } n_0 = N_1 + 1, \quad \text{existe } N_2 > N_1 \text{ tal que } x_{N_2} \notin V,\\
&\text{Para } n_0 = N_2 + 1, \quad \text{existe } N_3 > N_2 \text{ tal que } x_{N_3} \notin V,\\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Portanto existe uma subsequência $(x_{N_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{N_j} \notin V$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por hipótese, existe uma subsequência $(x_{N_{j_k}})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_{N_j})_{j=1}^{\infty}$ tal que $x_{N_{j_k}} \longrightarrow x$. Ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_{N_{j_k}} \in V$ para todo $k \geq k_0$. Isso é uma contradição, portanto $x_n \longrightarrow x$. $\square$

Lembramos que, dado um ideal I de um espaço de Riesz E, a ordem em E/I é dada por: $\dot{x} \leq \dot{y}$ se existem $x_1 \in \dot{x}$ e $y_1 \in \dot{y}$ tais que $x_1 \leq y_1$. Recordamos também que o símbolo $x_n \xrightarrow{\tau} x$ significa que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para x com respeito à topologia τ.

Seja F um subespaço de Riesz de um espaço de Riesz E munido com topologias lineares τ_1 e τ_2. Consideramos em F as correspondentes topologias relativas, ainda denotadas por τ_1 e τ_2. Consequentemente, se E tem a (τ_1, τ_2)-PSP ((τ_1, τ_2)-SP, respectivamente), então F tem a (τ_1, τ_2)-PSP ((τ_1, τ_2)-SP, respectivamente).

Teorema 2.2.2. *Sejam τ_1 e τ_2 topologias lineares definidas no espaço de Riesz E tais que (E, τ_2) é um reticulado de Fréchet e E tem a (τ_2, τ_1)-SP. Seja I um ideal τ_2-fechado de E tal que I tem a (τ_1, τ_2)-PSP ((τ_1, τ_2)-SP, respectivamente) e E/I tem a $(\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$-PSP ($(\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$-SP, respectivamente). Então E tem a (τ_1, τ_2)-PSP ((τ_1, τ_2)-SP, respectivamente).*

Demonstração. Vejamos primeiramente a demonstração para o caso da (τ_1, τ_2)-PSP.

Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E^+$ uma sequência tal que $x_n \xrightarrow{\tau_1} 0$ e $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ uma subsequência arbitrária de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. A continuidade do operador quociente $\pi \colon (E, \tau_1) \longrightarrow (E/I, \dot{\tau}_1)$ implica que

$$\dot{x}_{n_j} := \pi(x_{n_j}) \xrightarrow{\dot{\tau}_1} 0 \text{ em } E/I,$$

e o fato de π ser um homomorfismo de Riesz nos garante que $\dot{x}_{n_j} \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Usando o fato de que E/I tem a $(\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$-PSP obtemos que $\dot{x}_{n_j} \xrightarrow{\dot{\tau}_2} 0$ em E/I. Como (E, τ_2) é um reticulado de Fréchet então, em particular, τ_2 é uma topologia metrizável e portanto é gerada por uma métrica invariante por translação $d \colon E \times E \longrightarrow [0, \infty)$ (veja Teorema 1.1.8). Com isso, a topologia quociente $\dot{\tau}_2$ em E/I também é metrizável e é, em particular, gerada pela métrica invariante por translação

$$\dot{d} \colon E/I \times E/I \longrightarrow [0, \infty) \ , \ (\dot{x}, \dot{z}) \longmapsto \dot{d}(\dot{x}, \dot{z}) := \inf\{d(x - z, y) : y \in I\},$$

(veja Teorema 1.1.12). Como $\dot{x}_{n_j} \xrightarrow{\dot{\tau}_2} 0$ se, e somente se, $\inf\{d(x_{n_j}, y) : y \in I\} \longrightarrow 0$, então para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf\{d(x_{n_j}, y) : y \in I\} < \frac{1}{m} \text{ para todo } j \geq N_m.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\text{para } m = 1, \quad \exists\, N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ y_{N_1} \in I \ \text{ de modo que } \ d(x_{n_{N_1}}, y_{N_1}) < 1,\\
&\text{para } m = 2, \quad \exists\, N_2 > N_1 \ \text{ e } \ y_{N_2} \in I \ \text{ de modo que } \ d(x_{n_{N_2}}, y_{N_2}) < \frac{1}{2},\\
&\text{para } m = 3, \quad \exists\, N_3 > N_2 \ \text{ e } \ y_{N_3} \in I \ \text{ de modo que } \ d(x_{n_{N_3}}, y_{N_3}) < \frac{1}{3},\\
&\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Dessa forma, construímos uma sequência $(y_{N_m})_{m=1}^{\infty}$ em I e uma subsequência $(x_{n_{N_m}})_{m=1}^{\infty}$ de $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ tais que

$$d(x_{n_{N_m}} - y_{N_m}, 0) = d(x_{n_{N_m}}, y_{N_m}) < \frac{1}{m} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Com isso, obtemos que $x_{n_{N_m}} - y_{N_m} \xrightarrow{\tau_2} 0$ em E. Como τ_2 é uma topologia localmente convexa-sólida e metrizável então, pela Observação 1.3.9, segue que τ_2 é gerada por uma sequência $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ de seminormas de Riesz e consequentemente $\rho_k(x_{n_{N_m}} - y_{N_m}) \longrightarrow 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Da desigualdade $|x_{n_{N_m}} - y_{N_m}^+| \leq |x_{n_{N_m}} - y_{N_m}|$ (veja Proposição 1.2.6) segue que

$$\rho_k(x_{n_{N_m}} - y_{N_m}^+) \longrightarrow 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

e consequentemente

$$x_{n_{N_m}} - y_{N_m}^+ \xrightarrow{\tau_2} 0 \text{ em } E.$$

Da (τ_2, τ_1)-SP de E temos $x_{n_{N_m}} - y_{N_m}^+ \xrightarrow{\tau_1} 0$ em E e da linearidade de τ_1 segue que

$$y_{N_m}^+ = x_{n_{N_m}} - (x_{n_{N_m}} - y_{N_m}^+) \xrightarrow{\tau_1} 0 \text{ em } E,$$

portanto $y_{N_m}^+ \xrightarrow{\tau_1} 0$ em I. Como I tem a (τ_1, τ_2)-PSP e cada $y_{N_m}^+ \in I$ é positivo, então $y_{N_m}^+ \xrightarrow{\tau_2} 0$ em I e, por conseguinte, $y_{N_m}^+ \xrightarrow{\tau_2} 0$ em E. Da linearidade de τ_2 segue que

$$x_{n_{N_m}} = (x_{n_{N_m}} - y_{N_m}^+) + y_{N_m}^+ \xrightarrow{\tau_2} 0 \text{ em } E.$$

Por fim, o Lema 2.2.1 implica que $x_n \xrightarrow{\tau_2} 0$ em E, e portanto E tem a (τ_1, τ_2)-PSP.

A demonstração para o caso da (τ_1, τ_2)-SP segue os mesmos passos do caso da (τ_1, τ_2)-PSP. De fato, dadas uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $x_n \xrightarrow{\tau_1} 0$ e uma subsequência arbitrária $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tem-se $\dot{x}_{n_j} := \pi(x_{n_j}) \xrightarrow{\dot{\tau}_1} 0$ em E/I. Como E/I tem a $(\dot{\tau}_1, \dot{\tau}_2)$-SP, temos $\dot{x}_{n_j} \xrightarrow{\dot{\tau}_2} 0$ em E/I. Visto que (E, τ_2) é um reticulado de Fréchet obtemos, de forma análoga ao caso anterior, uma sequência $(x_{n_{N_m}} - y_{N_m})_{n=1}^{\infty}$ em E tal que

$$x_{n_{N_m}} - y_{N_m} \xrightarrow{\tau_2} 0 \text{ em } E.$$

O fato da topologia τ_2 ser gerada por uma sequência $(\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ de seminormas implica que

$$\rho_k(x_{n_{N_m}} - y_{N_m}) \longrightarrow 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Da (τ_2, τ_1)-SP de E temos $x_{n_{N_m}} - y_{N_m} \xrightarrow{\tau_1} 0$ em E e pela linearidade de τ_1 segue que

$$y_{N_m} = x_{n_{N_m}} - (x_{n_{N_m}} - y_{N_m}) \xrightarrow{\tau_1} 0 \text{ em } E,$$

por conseguinte $y_{N_m} \xrightarrow{\tau_1} 0$ em I. Como I tem a (τ_1, τ_2)-SP, $y_{N_m} \xrightarrow{\tau_2} 0$ em I e, consequentemente, $y_{N_m} \xrightarrow{\tau_2} 0$ em E. Pela linearidade de τ_2 obtemos

$$x_{n_{N_m}} = (x_{n_{N_m}} - y_{N_m}) - y_{N_m} \xrightarrow{\tau_2} 0 \text{ em } E.$$

Por fim, o Lema 2.2.1 garante que $x_n \xrightarrow{\tau_2} 0$ em E, e portanto E tem a (τ_1, τ_2)-SP. $\square$

No caso particular em que $\tau_1 = w_{\tau_2}$, a parte sobre a propriedade de Schur no teorema acima coincide com o resultado de Castillo e Simões no contexto de espaços de Fréchet, cuja demonstração foi nossa primeira inspiração (veja [30, Proposition 6] e [29, Teorema 6.1.a]).

Recordamos que dado um espaço vetorial topológico X munido com uma topologia linear τ, denotamos por w_τ a topologia fraca em X com respeito à topologia τ. É bem conhecido que w_τ é uma topologia linear em X e que a topologia fraca em um subespaço vetorial topológico (Y, τ) de X coincide com a topologia relativa em Y induzida por w_τ, sempre que X for localmente convexo (veja Teorema 1.1.17).

Para dar prosseguimento vamos precisar dos dois lemas a seguir.

Lema 2.2.3. *Sejam E e F espaços de Riesz munidos com topologias localmente convexas τ_1 e τ_2, respectivamente. Se (E, τ_1) e (F, τ_2) são isomorfos como reticulados e F tem a (w_{τ_2}, τ_2)-PSP ((w_{τ_2}, τ_2)-SP, respectivamente), então E tem a (w_{τ_1}, τ_1)-PSP ((w_{τ_1}, τ_1)-SP, respectivamente).*

Demonstração. Suponha que F tenha a (w_{τ_2}, τ_2)-PSP. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva, w_{τ_1}-nula em E e $T\colon (E, \tau_1) \longrightarrow (F, \tau_2)$ um isomorfismo de reticulados. Como T é um operador positivo, pois é um homomorfismo de Riesz, a sequência $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ é positiva em F. O Teorema 1.1.20 nos garante que T é um operador fracamente contínuo, com isso, $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ é w_{τ_2}-nula em F. A (w_{τ_2}, τ_2)-PSP de F nos garante que a sequência $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ é τ_2-nula em F e, como T é um isomorfismo de espaços vetoriais topológicos, $(x_n)_{n=1}^\infty$ é τ_1-nula em E. Portanto E tem a (w_{τ_1}, τ_1)-PSP.

Argumento análogo garante o resultado para (w_{τ_1}, τ_1)-SP. $\square$

Lema 2.2.4. *Se (E, τ) é um espaço de Riesz localmente convexo tal que E tem a (w_τ, τ)-PSP, então (E, τ) não contém cópia reticulada de ℓ_∞.*

Demonstração. Suponha que exista um isomorfismo de reticulados $T\colon \ell_\infty \longrightarrow T(\ell_\infty) \subset (E, \tau)$, onde $T(\ell_\infty)$ é um subespaço de Riesz fechado de E. Como τ é uma topologia localmente convexa, a topologia fraca em $T(\ell_\infty)$, com respeito a $(T(\ell_\infty), \tau)$, coincide com a topologia fraca relativa, w_τ, em $T(\ell_\infty)$ (veja Teorema 1.1.17). Combinando isso com a (w_τ, τ)-PSP de E segue que $T(\ell_\infty)$ tem a (w_τ, τ)-PSP e, com isso, o Lema 2.2.3 nos garante que ℓ_∞ tem a propriedade de Schur positiva. Isso gera uma contradição, pois ℓ_∞ não tem a propriedade de Schur positiva (veja Exemplo 2.1.7). Portanto (E, τ) não contém cópia reticulada de ℓ_∞. $\square$

Lembramos que se (E, τ) é um espaço de Riesz com uma topologia linear e I é um ideal de E, então a topologia fraca $w_{\dot{\tau}}$ em E/I com respeito ao espaço $(E/I, \dot{\tau})$

coincide com a topologia quociente $\dot{w}_\tau$ com respeito ao espaço (E, w_τ) (veja Teorema 1.1.18).

Teorema 2.2.5. *Seja τ uma topologia localmente convexa-sólida e completa no espaço de Riesz Dedekind σ-completo E. Se E tem a (w_τ, τ)-PSP ((w_τ, τ)-SP, respectivamente), então E/I tem a $(w_{\dot{\tau}}, \dot{\tau})$-PSP ($(w_{\dot{\tau}}, \dot{\tau})$-SP, respectivamente) para qualquer ideal τ-fechado I de E.*

Demonstração. Suponha que E tenha a (w_τ, τ)-PSP. Como τ é uma topologia localmente convexa, (E, τ) não contém cópia reticulada de ℓ_∞ pelo Lema 2.2.4. Assim, o Teorema 1.3.15 garante que (E, τ) satisfaz a propriedade de Lebesgue e, portanto, E é Dedekind completo pelo Teorema 1.3.11. Logo, o Teorema 1.2.10 nos garante que E satisfaz a propriedade de projeção.

Seja I um ideal τ-fechado de E. Como (E, τ) é localmente sólido com a propriedade de Lebesgue, do Teorema 1.3.12 sabemos que I é uma faixa e, consequentemente, é uma faixa projetada de E. Portanto, $E = I \oplus I^d$. A (w_τ, τ)-PSP de E implica que I^d tem a (w_τ, τ)-PSP, e o Teorema 1.3.14 garante que $(E/I, \dot{\tau})$ é isomorfo como reticulado a (I^d, τ). Como a topologia fraca em I^d, com respeito a (I^d, τ), é a restrição da topologia fraca w_τ de E em I^d, pelo Lema 2.2.3 concluímos que $(E/I, \dot{\tau})$ tem a $(w_{\dot{\tau}}, \dot{\tau})$-PSP.

A demonstração para o caso da (w_τ, τ)-SP é semelhante. Basta observar que a (w_τ, τ)-SP é preservada por subespaços de Riesz e por isomorfismos entre espaços localmente convexos. Assim, seguindo os passos acima, como $(E/I, \dot{\tau})$ é isomorfo como reticulado a (I^d, τ) e I^d tem a (w_τ, τ)-SP, segue que $(E/I, \dot{\tau})$ tem a $(w_{\dot{\tau}}, \dot{\tau})$-SP. □

Quanto às hipóteses do teorema acima, lembramos que, assim como ocorre em espaços de Banach, um subespaço vetorial de um espaço localmente convexo (E, τ) é τ-fechado se, e somente se, é w_τ-fechado (veja Teorema 1.1.19).

Os Teoremas 2.2.2 e 2.2.5, juntamente com $w_\tau \subset \tau$, nos fornecem o seguinte corolário.

Corolário 2.2.6. *A (w_τ, τ)-PSP e a (w_τ, τ)-SP são propriedades de três reticulados no contexto de reticulados de Fréchet Dedekind σ-completos (E, τ).*

Corolário 2.2.7. *A propriedade de Schur positiva e a propriedade de Schur são propriedades de três reticulados.*

Demonstração. Como o reticulado de Banach c_0 não tem a propriedade de Schur positiva (veja Exemplo 2.1.7), então reticulados de Banach com as propriedades de Schur e de Schur positiva não contêm cópia de c_0, portanto são KB-espaços (veja Teorema 1.4.14). Todo KB-espaço tem norma ordem-contínua (veja Teorema 1.4.13) e todo reticulado de

Banach ordem-contínuo é Dedekind completo (veja Teorema 1.4.10). Com isso, reticulados de Banach com as propriedades de Schur e de Schur positiva são Dedekind completo. Claramente a propriedade de Schur é a $(w_{\|\cdot\|}, \|\cdot\|)$-SP e a propriedade de Schur positiva é a $(w_{\|\cdot\|}, \|\cdot\|)$-PSP. Assim, o resultado segue do corolário anterior. $\square$

Na sequência apresentamos algumas aplicações e exemplos referentes aos resultados obtidos até o momento.

Definição 2.2.8. Um elemento $e > 0$ em um espaço de Riesz E é *discreto* se o ideal gerado por e coincide com o subespaço vetorial gerado por e, $\{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Em reticulados de Banach, elementos discretos também são chamados de *átomos*.

Se X é um espaço de Banach, então é fácil verificar que X e ℓ_1 são isomorfos isometricamente a subespaços fechados de $\ell_1(X)$. Veremos a seguir que se E é um reticulado de Banach que possui um elemento discreto, então conseguimos garantir que ℓ_1 é isomorfo isometricamente como reticulado a um ideal de $\ell_1(E)$. Isso nos permitirá considerar o reticulado de Banach $\ell_1(E)/\ell_1$.

Proposição 2.2.9. *Se E é um reticulado de Banach sem a propriedade de Schur positiva, então $\ell_1(E)$ também não tem essa propriedade. Se, além disso, E tem um vetor discreto, então ℓ_1 é isomorfo isometricamente como reticulado a um ideal de $\ell_1(E)$ e $\ell_1(E)/\ell_1$ não tem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Considere o operador,

$$S\colon E \longrightarrow \ell_1(E); \quad S(x) = (x, 0, 0, 0, \ldots).$$

É imediato verificar que S é uma imersão isométrica bem definida. A ordem coordenada a coordenada em $\ell_1(E)$ nos permite verificar diretamente que T é um homomorfismo de Riesz: para todo $x \in E$,

$$S(|x|) = (|x|, 0, 0, \ldots) = |(x, 0, 0, \ldots)| = |S(x)|.$$

Portanto E é isomorfo isometricamente como reticulado a um subreticulado fechado $S(E)$ de $\ell_1(E)$. Como E não possui a propriedade de Schur positiva, então $\ell_1(E)$ também não possui a propriedade de Schur positiva.

Seja e um vetor discreto em E. Considere, sem perda de generalidade, que $\|e\| = 1$ e tome o operador

$$T\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1(E)\ ,\ (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \longmapsto (\alpha_n e)_{n=1}^{\infty}.$$

A boa definição e linearidade de T são imediatas. Para todo $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$,

$$T(|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}|) = T((|\alpha_n|)_{n=1}^{\infty}) = (|\alpha_n|e)_{n=1}^{\infty} \overset{(\star)}{=} (|\alpha_n e|)_{n=1}^{\infty} \overset{(\star\star)}{=} |(\alpha_n e)_{n=1}^{\infty}| = |T(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}|,$$

onde $(\star)$ segue do fato de $e > 0$ e $(\star\star)$ segue da definição da ordem em $\ell_1(E)$. Portanto T é um homomorfismo de Riesz. Observe ainda que

$$\|T\left((\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\right)\| = \|(\alpha_n e)_{n=1}^{\infty}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot \|e\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\|,$$

ou seja, T é uma isometria. Consequentemente, $T(\ell_1)$ é um subreticulado fechado de $\ell_1(E)$ isomorfo isometricamente como reticulado a ℓ_1.

Agora, seja $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1(E)$ tal que $0 \leq (y_n)_{n=1}^{\infty} \leq (\alpha_n e)_{n=1}^{\infty}$, onde $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em ℓ_1. Por definição da ordem em $\ell_1(E)$, temos $(y_n)_{n=1}^{\infty} \leq (\alpha_n e)_{n=1}^{\infty}$ se, e somente se, $y_n \leq \alpha_n e$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O fato de e ser um vetor discreto nos diz que se $\alpha_n \neq 0$, então existe $0 \leq \beta_n \leq \alpha_n$ tal que $y_n = \beta_n e$; por outro lado, se $\alpha_n = 0$ então $y_n = 0e = 0$. Isso nos garante que existe $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, onde $\gamma_n = \beta_n$ ou $\gamma_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, tal que $(y_n)_{n=1}^{\infty} = (\gamma_n e)_{n=1}^{\infty}$. Portanto $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in T(\ell_1)$ e, consequentemente, $T(\ell_1)$ é um ideal de $\ell_1(E)$.

Identificando ℓ_1 com $T(\ell_1)$ podemos considerar o reticulado de Banach $\ell_1(E)/\ell_1$. Como ℓ_1 tem a propriedade de Schur positiva e $\ell_1(E)$ não tem, então $\ell_1(E)/\ell_1$ não possui essa propriedade pelo Corolário 2.2.7. $\square$

Proposição 2.2.10. *Sejam E e F reticulados de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um homomorfismo de Riesz com imagem fechada. Se $\ker(T)$ e F têm a propriedade de Schur positiva (propriedade de Schur, respectivamente), então E tem a propriedade de Schur positiva (propriedade de Schur, respectivamente).*

Demonstração. Vamos provar o caso da propriedade de Schur positiva. O subreticulado de Banach $T(E)$ herda a propriedade de Schur positiva de F. Acreditamos que é bem conhecido que $E/\ker(T)$ é isomorfo como reticulado a $T(E)$, mas como não encontramos uma referência para citar, vamos apresentar uma pequena justificativa desse fato.

Como T é um homomorfismo de Riesz, $\ker(T)$ é um ideal de E (veja Corolário 1.2.15) e a continuidade de T (homomorfismos de Riesz são positivos e portanto contínuos) garante que $\ker(T)$ é fechado. Assim, $E/\ker(T)$ é um reticulado de Banach. O operador

$$S\colon E/\ker(T) \longrightarrow T(E); \quad \dot{x} \longmapsto T(x),$$

é um isomorfismo entre espaços de Banach tal que $S \circ \pi = T$, onde $\pi\colon E \longrightarrow E/\ker(T)$ é o operador quociente (veja [36, Corollary 2.26]). O fato de T e π serem homomorfismos de Riesz nos garante que S também é um homomorfismo de Riesz, assim $E/\ker(T)$ é isomorfo como reticulado a $T(E)$.

Portanto, como $T(E)$ tem a propriedade e Schur positiva, $E/\ker(T)$ também tem. Por fim, o Corolário 2.2.7 implica que E tem a propriedade de Schur positiva. O caso da propriedade de Schur é análogo. $\square$

Por um lado, os duais de ordem superior $X^{**}, X^{***}, \ldots, X^{(n)}, \ldots$ $(n \geq 2)$ de um espaço de Banach de dimensão infinita X nunca possuem a propriedade de Schur (veja [65, Corollary 11]). Em contrapartida, alguns duais $E^{**}, E^{***}, \ldots, E^{(n)}, \ldots$ $(n \geq 2)$ de um reticulado de Banach de dimensão infinita E podem ter a propriedade de Schur positiva. Por exemplo, todo AL-espaço tem a propriedade de Schur positiva (veja Exemplo 2.1.7) e o bidual de um AL-espaço ainda é um AL-espaço (veja Teorema 1.4.21). Assim, se E é um AL-espaço, então os duais $E^{**}, E^{****}, \ldots, E^{(2n)}, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$ têm a propriedade de Schur positiva.

Acreditamos que, ao contrário do caso da propriedade de Schur em espaços de Banach, não é fácil encontrar exemplos concretos de reticulados de Banach E com a propriedade de Schur positiva tais que E^{**} não possui essa propriedade. Quando tal exemplo é obtido, E será um ideal fechado de E^{**} e nossos resultados permitirão garantir que E^{**}/E não possui a propriedade de Schur positiva. Nosso propósito agora é apresentar um exemplo desse tipo.

Em [81], Wnuk apresenta inúmeros resultados sobre a propriedade de Schur e a propriedade de Schur positiva em reticulados de Banach. Dentre esses resultados está a seguinte caracterização.

Teorema 2.2.11. [81, p. 22] *O dual topológico E^* de um reticulado de Banach E tem a propriedade de Schur positiva se, e somente se, E tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca e E não contém cópia reticulada de ℓ_1.*

Corolário 2.2.12. *Seja E um reticulado de Banach com a propriedade de Schur positiva tal que seu dual topológico E^* contém uma cópia reticulada de ℓ_1. Então E é um ideal fechado de E^{**} e E^{**} e E^{**}/E não possuem a propriedade de Schur positiva.*

Demonstração. Como E tem a propriedade de Schur positiva, E não contém cópia reticulada de c_0. Pelo Teorema 1.4.14, E é uma faixa, em particular um ideal fechado (veja Teorema 1.3.3), de seu bidual E^{**}. Assim, podemos considerar o reticulado de Banach E^{**}/E. Como E^* contém cópia reticulada de ℓ_1, do Teorema 2.2.11 segue que E^{**} não possui a propriedade de Schur positiva. Do Corolário 2.2.7 concluímos que E^{**}/E não possui a propriedade de Schur positiva. $\square$

Teorema 2.2.13. [81, p. 17] *Seja $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de reticulados de Banach em que cada E_n tem a propriedade de Schur positiva. Então a ℓ_1-soma $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right)_1$ tem a propridade de Schur positiva.*

Exemplo 2.2.14. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o reticulado de Banach $\ell_\infty^n = \mathbb{R}^n$ com a norma do máximo e a ordem dada coordenada a coordenada. Tome o reticulado de Banach obtido a partir da ℓ_1-soma da sequência $(\ell_\infty^n)_{n=1}^\infty$, isto é,

$$\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1 := \left\{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \ell_\infty^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \|x\| := \sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty\right\},$$

com a norma definida acima e a ordem coordenada a coordenada. Como cada ℓ_∞^n tem a propriedade de Schur positiva, pois possuem dimensão finita, $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1$ também possui a propriedade de Schur positiva pelo Teorema 2.2.13.

Vejamos agora que o dual topológico de $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1$ contém uma cópia reticulada de ℓ_1. Para isso, relembre primeiramente que o dual topológico de ℓ_∞^n é isomorfo isometricamente como reticulado a ℓ_1^n, onde $\ell_1^n = \mathbb{R}^n$ com a norma da soma. Assim, pelo Teorema 1.4.19 segue que o dual de $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1$ é isomorfo isometricamente como reticulado a

$$\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_1^n\right)_\infty := \left\{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \ell_1^n \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } \|x\| := \sup_n \|x_n\| < \infty\right\},$$

com a ordem coordenada a coordenada, por meio da relação de dualidade usual

$$\varphi = (\varphi_j)_{j=1}^\infty \longmapsto \widetilde{\varphi}\left((x_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j).$$

Considere o operador

$$T\colon \ell_1 \longrightarrow \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_1^n\right)_\infty, \ (x_j)_{j=1}^\infty \longmapsto ((x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), \ldots).$$

É fácil observar que T é bem definido e linear. Além disso, T é uma isometria: para cada $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$,

$$\|T((x_j)_{j=1}^\infty)\|_\infty = \sup\{|x_1|, |x_1| + |x_2|, |x_1| + |x_2| + |x_3|, \ldots\} = \sum_{j=1}^\infty |x_j| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_1.$$

Ainda, considerando o fato da ordem em $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_1^n\right)_\infty$ e em cada ℓ_1^n ser dada coordenada a coordenada, obtemos que T é um homomorfismo de Riesz. De fato, para todas $(x_j)_{j=1}^\infty$ e $(y_j)_{j=1}^\infty$ em ℓ_1,

$$\begin{aligned}
T((x_j)_{j=1}^\infty \vee (y_j)_{j=1}^\infty) &= T((x_j \vee y_j)_{j=1}^\infty) \\
&= ((x_1 \vee y_1), (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2), \ldots) \\
&= ((x_1 \vee y_1), (x_1, x_2) \vee (y_1, y_2), \ldots) \\
&= ((x_1), (x_1, x_2), \ldots) \vee ((y_1), (y_1, y_2), \ldots) \\
&= T((x_j)_{j=1}^\infty) \vee T((y_j)_{j=1}^\infty).
\end{aligned}$$

Isso prova que $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_1^n\right)_\infty$ contém uma cópia reticulada de ℓ_1. Pelo Corolário 2.2.12 concluímos que $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1$ é um ideal fechado de $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1^{**}$, e que os reticulados de Banach

$$\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1^{**} \text{ e } \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1^{**} \Big/ \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1$$

não possuem a propriedade de Schur positiva.

É bem conhecido que o espaço de Banach ℓ_1 é projetivamente universal para a classe de espaços de Banach separáveis, no sentido que todo espaço de Banach separável é um quociente de ℓ_1, conforme estabelecido pelo resultado a seguir.

Teorema 2.2.15. [1, Corollary 2.3.2] *Para todo espaço de Banach separável X existe um subespaço fechado M de ℓ_1 tal que X é isomorfo isometricamente a ℓ_1/M.*

Recordemos que a propriedade de Schur não é herdada pelo quociente de um espaço de Banach por um subespaço fechado (ℓ_2 é um quociente de ℓ_1); por outro lado, essa propriedade é herdada pelo quociente de um reticulado de Banach por um ideal fechado (Teorema 2.2.5). Combinando isso com o fato da propriedade de Schur ser preservada por isomorfismos obtemos o seguinte corolário imediato.

Corolário 2.2.16. *Sejam X um espaço de Banach separável sem a propriedade de Schur e M um subespaço fechado de ℓ_1 tal que X é isomorfo a ℓ_1/M. Então M não é um ideal de ℓ_1.*

O Teorema 2.2.15 não vale para ℓ_1 no contexto de reticulados de Banach. Isto é, apesar de ℓ_1 ser um reticulado de Banach, existem reticulados de Banach separáveis que não são isomorfos isometricamente como reticulados ao quociente de ℓ_1 por um ideal fechado. Por exemplo, o reticulado de Banach c_0 é separável e não é isomorfo isometricamente como reticulado a um quociente de ℓ_1. De fato, ℓ_1 é um AL-espaço, todo quociente de AL-espaço é AL-espaço (veja [5, p. 205]), e sabemos que c_0 não é um AL-espaço.

Em [57], Leung, Li, Oikhberg e Tursi constroem um reticulado de Banach separável $LLOT$ tal que todo reticulado de Banach separável é isomorfo isometricamente como reticulado ao quociente de $LLOT$ por um ideal fechado.

Teorema 2.2.17. [57, Theorem 1.2] *Existe um reticulado de Banach separável $LLOT$ que é projetivamente universal para a classe de reticulados de Banach separáveis, isto é, todo reticulado de Banach separável é isomorfo isometricamente como reticulado ao quociente de $LLOT$ por um ideal fechado.*

Exemplo 2.2.18. Como existem reticulados de Banach separáveis sem a propriedade de Schur positiva e essa propriedade é preservada por isomorfismos de reticulados, então o Teorema 2.2.5 nos garante que $LLOT$ não tem a propriedade de Schur positiva.

Em [40], Flores, Hernández, Spinu, Tradacete e Troitsky introduzem e desenvolvem a noção de reticulados de Banach p-disjuntamente homogêneos, $1 \leq p \leq \infty$.

Definição 2.2.19. Um reticulado de Banach E é *p-disjuntamente homogêneo (p-DH)*, $1 \leq p \leq \infty$, se toda sequência disjunta e normalizada em E admite uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_p (ou c_0, no caso em que $p = \infty$).

Teorema 2.2.20. [40, Proposition 4.9] *Um reticulado de Banach E é 1-DH se, e somente se, E tem a propriedade de Schur positiva.*

Esse teorema juntamente com o Corolário 2.2.7 tornam imediato o seguinte corolário.

Corolário 2.2.21. *A 1-DH é uma propriedade de três reticulados.*

Finalizamos esta seção com uma aplicação de nossos resultados à propriedade de Schur positiva dual.

Note que a propriedade de Schur positiva dual não é uma propriedade de três reticulados. De fato, o item (a) do Exemplo 2.1.9 nos diz que todo $C(K)$ tem a propriedade de Schur positiva dual, logo ℓ_∞ tem essa propriedade, pois é isomorfo isometricamente como reticulado a $C(\beta\mathbb{N})$, onde $\beta\mathbb{N}$ é a compactificação de Stone-Čech de $\mathbb{N}$ (veja [59, p. 6]). Em [82, p. 763] vemos que a propriedade de Schur positiva dual é herdada pelo quociente de um reticulado de Banach por um ideal fechado, com isso ℓ_∞/c_0 tem essa propriedade. Entretanto, c_0 é um ideal fechado de ℓ_∞ que não tem a propriedade de Schur positiva dual (os vetores unitários canônicos em ℓ_1 formam uma sequência positiva, fraca-estrela nula e que não converge para zero em norma).

Recordemos que, se X é um espaço de Banach e M é um subespaço de X, então denotamos a topologia fraca-estrela em X^* por $\sigma(X^*, X)$, o anulador de M por $M^\perp$ e a topologia quociente em $X^*/M^\perp$ associada ao operador quociente $(X, \sigma(X^*, X)) \longrightarrow X^*/M^\perp$ por $\dot{\sigma}(X^*, X)$.

Já foi estabelecido em [82, p. 763] que a propriedade de Schur positiva dual é herdada por subespaços de Riesz positivamente complementados e pelo quociente por um ideal fechado. Então, só resta estabelecer o seguinte resultado.

Proposição 2.2.22. *Seja E um reticulado de Banach. Se um ideal fechado I de E e o reticulado quociente E/I têm a propriedade de Schur positiva dual, então E também tem essa propriedade.*

Demonstração. Sejam E é um reticulado de Banach e I é um ideal fechado de E tal que I e E/I têm a propriedade de Schur positiva dual. Então:

(a) E tem a propriedade de Schur positiva dual se, e somente se, E^* tem a $(\sigma(E^*, E), \|\cdot\|_{E^*})$-PSP.

(b) I tem a propriedade de Schur positiva dual se, e somente se, I^* tem a $(\sigma(I^*, I), \|\cdot\|_{I^*})$-PSP.

(c) E/I tem a propriedade de Schur positiva dual se, e somente se, $(E/I)^*$ tem a $(\sigma((E/I)^*, E/I), \|\cdot\|_{(E/I)^*})$-PSP.

Como o anulador $I^\perp$ de I é uma faixa de E^* (veja Teorema 1.4.31), podemos considerar o reticulado de Banach $E^*/M^\perp$. Combinando os Teoremas 1.1.25, 1.1.26 e 1.4.31 obtemos o seguinte:

(d) I^* tem a $(\sigma(I^*, I), \|\cdot\|_{I^*})$-PSP se, e somente se, $E^*/I^\perp$ tem a $(\dot{\sigma}(E^*, E), \|\dot{\cdot}\|_{E^*})$-PSP.

(e) $(E/I)^*$ tem a $(\sigma((E/I)^*, E/I), \|\cdot\|_{(E/I)^*})$-PSP se, e somente se, $I^\perp$ tem a $(\sigma(E^*, E), \|\cdot\|_{E^*})$-PSP.

Das equivalências em (c) e (e) concluímos que $I^\perp$ tem a $(\sigma(E^*, E), \|\cdot\|_{E^*})$-PSP e as equivalências em (b) e (d) nos garantem que o reticulado quociente $E^*/I^\perp$ tem a $(\dot{\sigma}(E^*, E), \|\dot{\cdot}\|_{E^*})$-PSP. Portanto E^* tem a $(\sigma(E^*, E), \|\cdot\|_{E^*})$-PSP pelo Teorema 2.2.2. Finalmente, pela equivalência em (a) concluímos que E tem a propriedade de Schur positiva dual. □

2.3 Propriedade de Dunford-Pettis fraca

Em [29, 6.6.n., p. 210], Castillo e González apresentam a propriedade de Dunford-Pettis fraca, conforme definida por Leung em [56] (veja Definição 2.1.10), e dizem não ter conhecimento se essa propriedade é uma propriedade de três reticulados. Até onde sabemos essa questão ainda está em aberto. Nesta seção, inspirados pelo resultado [29, Proposition 6.6.c.], apresentamos uma contribuição para esse questionamento.

Lembremos que dado um espaço vetorial topológico (X, τ), denotamos por X^*_β o espaço vetorial topológico $(X^*, \beta(X^*, X))$, onde $\beta(X^*, X)$ é a topologia forte em X^* com relação a τ. Seguindo a abordagem adotada por Gabriyelyan em [44, p. 372], apresentamos a seguinte definição no contexto de reticulados de Fréchet.

Definição 2.3.1. Um reticulado de Fréchet (E, τ) tem a *propriedade de Dunford-Pettis fraca sequencial* se $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$ sempre que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência positiva, fracamente nula em E e $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência fracamente nula em E^*_β.

Lema 2.3.2. *Sejam (E,τ) um espaço de Fréchet, $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência fracamente nula em E^*_β e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência que converge para zero em E. Então $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Como $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ é fracamente nula em E^*_β, temos, em particular, $\varphi_n(x) \longrightarrow 0$ para todo $x \in E$ (veja Proposição 1.1.14). Portanto, o conjunto $H := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é pontualmente limitado. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus (veja Teorema 1.1.23), H é equicontínuo. Com isso, dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança aberta de zero $U \subset E$ tal que $\varphi(U) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ para todo $\varphi \in H$. Como $x_n \longrightarrow 0$ em E, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$ e consequentemente $|\varphi_n(x_n)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. □

O resultado a seguir foi inspirado em [29, Proposition 6.6.c.] e sua demonstração repete alguns argumentos da demonstração do Teorema 2.2.2.

Teorema 2.3.3. *Seja I um ideal fechado do reticulado de Fréchet (E,τ). Se I tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca sequencial e E/I tem a $(w_{\dot\tau}, \dot\tau)$-PSP, então E tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca sequencial.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência positiva, fracamente nula em E e $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência fracamente nula em E^*_β. Considere uma subsequência arbitrária $(\varphi_{n_j}(x_{n_j}))_{j=1}^\infty$ de $(\varphi_n(x_n))_{n=1}^\infty$ e o operador quociente $\pi\colon (E,\tau) \longrightarrow (E/I, \dot\tau)$. Da positividade de π decorre que $(\dot x_{n_j})_{j=1}^\infty := (\pi(x_{n_j}))_{j=1}^\infty$ é uma sequência positiva em E/I, e como π é fracamente contínuo (veja Teorema 1.1.20 (a)) temos $\dot x_{n_j} \xrightarrow{w_{\dot\tau}} 0$ em E/I. Segue que $\dot x_{n_j} \xrightarrow{\dot\tau} 0$ em E/I, uma vez que E/I tem a $(w_{\dot\tau}, \dot\tau)$-PSP, e por argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do Teorema 2.2.2 construímos uma subsequência $(x_{n_{N_k}})_{k=1}^\infty$ de $(x_{n_j})_{j=1}^\infty$ e uma sequência positiva $(y_{N_k})_{k=1}^\infty$ em I tais que $x_{n_{N_k}} - y_{N_k} \longrightarrow 0$. Com isso, $x_{n_{N_k}} - y_{N_k} \xrightarrow{w_\tau} 0$ em E e, pela linearidade da topologia fraca,

$$y_{N_k} = x_{n_{N_k}} - (x_{n_{N_k}} - y_{N_k}) \xrightarrow{w_\tau} 0$$

em E, consequentemente em I. Usaremos a seguir que o adjunto do operador inclusão é o operador restrição. Como $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ é fracamente nula em E^*_β, denotando por $\varphi_{n|_I}$ a restrição de cada φ_n a I e aplicando os itens (b) e (a) do Teorema 1.1.20 ao operador inclusão $(I,\tau) \longrightarrow (E,\tau)$ e seu adjunto $E^*_\beta \longrightarrow I^*_\beta$, concluímos que $(\varphi_{n|_I})_{n=1}^\infty$ é fracamente nula no dual forte I^*_β de I.

A propriedade de Dunford-Pettis fraca sequencial de I implica que

$$\varphi_{n_{N_k}}(y_{N_k}) = \varphi_{n_{N_k}|_I}(y_{N_k}) \longrightarrow 0.$$

Como $x_{n_{N_k}} - y_{N_k} \longrightarrow 0$, do Lema 2.3.2 decorre que $\varphi_{n_{N_k}}(x_{n_{N_k}} - y_{N_k}) \longrightarrow 0$. Assim,

$$\varphi_{n_{N_k}}(x_{n_{N_k}}) = \varphi_{n_{N_k}}(x_{n_{N_k}} - y_{N_k}) + \varphi_{n_{N_k}}(y_{N_k}) \longrightarrow 0,$$

e, pelo Lema 2.2.1, $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$. Portanto E tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca sequencial. $\square$

Note que o Teorema 1.1.15 nos garante que a topologia forte $\beta(X^*, X)$ no dual topológico X^* de um espaço de Banach X coincide com a topologia da norma em X^*. Assim, a propriedade de Dunford-Pettis fraca sequencial em reticulados de Banach coincide com a propriedade de Dunford-Pettis fraca, conforme fica evidenciado pelas seguintes caracterizações.

Teorema 2.3.4. [7, Corollary 2.6] *Seja E um reticulado de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) E tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca.

(b) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência positiva, disjunta e fracamente nula em E e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente nula em E^*, então $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$.

c) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência positiva e fracamente nula em E e $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência fracamente nula em E^*, então $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$.

Finalizamos este capítulo com o seguinte corolário que segue diretamente dos Teoremas 2.3.3 e 2.3.4.

Corolário 2.3.5. *Seja I um ideal fechado do reticulado de Banach E. Se I tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca e E/I tem a propriedade de Schur positiva, então E tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca.*

3 A Propriedade de Schur polinomial positiva

Neste capítulo introduzimos e estudamos os reticulados de Banach positivamente polinomialmente de Schur. Apresentamos exemplos, contraexemplos e relações com as propriedades de Schur positiva e de Dunford-Pettis fraca.

3.1 Polinômios homogêneos e o produto tensorial projetivo

Nesta seção apresentamos resultados sobre polinômios homogêneos e o produto tensorial projetivo em espaços de Banach e sobre polinômios homogêneos regulares e o produto tensorial projetivo positivo em reticulados de Banach. As principais referências utilizadas na construção desta seção são [6, 19, 35, 41, 42, 43, 60, 66, 73].

Definição 3.1.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X, X_1, \ldots, X_n$, Y espaços vetoriais.

(a) Um operador $A\colon X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$ que é linear em cada coordenada enquanto as outras $n-1$ coordenadas são mantidas fixas é dito *n-linear*.

(b) Um operador n-linear $A\colon X^n \longrightarrow Y$, onde $X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n}$, é *simétrico* se

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ e qualquer permutação σ de $\{1, \ldots, n\}$.

(c) Um operador $P\colon X \longrightarrow Y$ é um *polinômio n-homogêneo*, ou *polinômio homogêneo de grau n*, se existe um operador n-linear $A\colon X^n \longrightarrow Y$ tal que

$$P(x) = A(\underbrace{x, \ldots, x}_{n}) =: A(x^n)$$

para todo $x \in X$.

Na *Teoria de Holomorfia em Dimensão Infinita* é importante levar em consideração os polinômios 0-homogêneos ($n = 0$), que são as funções constantes; contudo esses polinômios não desempenham papel importante em nosso contexto. Portanto não consideraremos polinômios 0-homogêneos nesta tese e o conjunto $\mathbb{N}$ continua sendo $\{1, 2, \ldots\}$.

Uma *forma n-linear* é um operador n-linear com imagem no corpo de escalares $\mathbb{K}$ e um *operador multilinear* é um operador n-linear para algum $n \in \mathbb{N}$.

O conjunto de todos os operadores n-lineares de $X_1 \times \cdots \times X_n$ em Y é um espaço vetorial com as operações algébricas usuais e será denotado por $L(X_1, \ldots, X_n; Y)$, ou $L(^nX;Y)$ quando $X_1 = \cdots = X_n = X$. Quando $Y = \mathbb{K}$ denotaremos $L(^nX;\mathbb{K})$ por $L(^nX)$. O conjunto dos operadores n-lineares simétricos é um subespaço vetorial de $L(^nX;Y)$ e será denotado por $L^s(^nX;Y)$, ou $L^s(^nX)$ quando $Y = \mathbb{K}$. O conjunto de todos os polinômios n-homogêneos de X em Y é um espaço vetorial e será denotado por $P(^nX;Y)$, ou $P(^nX)$ quando $Y = \mathbb{K}$.

Proposição 3.1.2. [35, Corollary 1.7] *Sejam X, Y espaços vetoriais e $n \in \mathbb{N}$. A aplicação*

$$\widehat{\ }\colon L^s(^nX;Y) \longrightarrow P(^nX;Y)\ ,\ A \longmapsto \widehat{A},$$

onde $\widehat{A}(x) = A(x^n)$ para todo $x \in X$, é um isomorfismo de espaços vetoriais.

A inversa de $\widehat{\ }$ é denotada por

$$\check{\ }\colon P(^nX;Y) \longrightarrow L^s(^nX;Y)\ ,\ P \longrightarrow \check{P}.$$

Dessa forma, para todo polinômio $P \in P(^nX;Y)$, $\check{P}$ é o único operador em $L^s(^nX;Y)$ tal que $P(x) = \check{P}(x^n)$ para todo $x \in X$.

Proposição 3.1.3. [66, Proposition 1.2] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$, Y espaços vetoriais normados. Um operador $A \in L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ é contínuo se, e somente se,*

$$\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| : x_j \in X_j \ e\ \|x_j\| \leq 1,\ j = 1, \ldots, n\} < \infty.$$

A função $A \mapsto \|A\|$ apresentada acima é uma norma no espaço de todos os operadores n-lineares contínuos $A\colon X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow Y$, o qual será denotado por $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Usaremos a notação $\mathcal{L}(^nX;Y)$ quando $X_1 = \cdots = X_n = X$ e $\mathcal{L}(^nX)$ quando $Y = \mathbb{K}$. Esses espaços são completos sempre que Y for um espaço de Banach (veja [66, Proposition 1.3]). Em particular, $\mathcal{L}(^nX)$ sempre será um espaço de Banach e $\mathcal{L}(^1X) = \mathcal{L}(X;\mathbb{K}) = X^*$. O subespaço dos operadores n-lineares simétricos contínuos será denotado por $\mathcal{L}^s(^nX;Y)$, ou $\mathcal{L}^s(^nX)$ quando $Y = \mathbb{K}$. O espaço dos polinômios n-homogêneos contínuos será denotado por $\mathcal{P}(^nX;Y)$, ou $\mathcal{P}(^nX)$ quando $Y = \mathbb{K}$.

Proposição 3.1.4. [6, Proposições 1.2.7, 1.2.8 e 1.2.10] *Sejam X, Y espaços vetoriais normados, $n \in \mathbb{N}$ e $P \in P(^nX;Y)$. Então P é contínuo se, e somente se,*

$$\|P\| := \sup\{\|P(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

A função $P \mapsto \|P\|$ define uma norma em $\mathcal{P}(^nX;Y)$, o qual é um espaço de Banach sempre que Y for completo. Mais ainda,

$$\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^n,$$

para todos $P \in \mathcal{P}(^nX;Y)$ e $x \in X$.

Proposição 3.1.5. [66, Corollary 2.3] *Sejam X, Y espaços de Banach e $n \in \mathbb{N}$. A aplicação*

$$\widehat{\ }\colon \mathcal{L}^s({}^nX;Y) \longrightarrow \mathcal{P}({}^nX;Y)\ ,\ A \longmapsto \widehat{A},$$

é um isomorfismo de espaços de Banach, com isomorfismo inverso

$$\check{\ }\colon \mathcal{P}({}^nX;Y) \longrightarrow \mathcal{L}^s({}^nX;Y)\ ,\ P \longmapsto \check{P}.$$

Definição 3.1.6. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X, X_1, \ldots, X_n$ espaços vetoriais. O *produto tensorial algébrico* de $X_1, \ldots, X_n$ é definido por

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_n := \operatorname{span}\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n :\ x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\},$$

onde cada $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, chamado de *tensor elementar*, é o funcional linear definido em $L(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K})$ da seguinte forma:

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : L(X_1, \ldots, X_n; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ A \longmapsto A(x_1, \ldots, x_n).$$

Quando $X_1 = \cdots = X_n = X$ denotaremos esse produto tensorial por $\otimes^n X$ e o tensor elementar $\underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{n}$ por $\otimes^n x$.

Proposição 3.1.7. [73, Proposition 2.1] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$ espaços vetoriais normados. A aplicação*

$$\pi\colon X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \inf\left\{\sum_{j=1}^{k} \|x_j^1\| \cdots \|x_j^n\| : x = \sum_{j=1}^{k} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n\right\},$$

é uma norma em $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$. Mais ainda,

$$\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

para quaisquer $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$.

A norma π é chamada de *norma projetiva*. O espaço normado obtido será denotado por $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$, e seu completamento é chamado de *produto tensorial projetivo* e será denotado por $X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n$.

O espaço normado $X_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi X_n$ é completo se, e somente se, $X_1, \ldots, X_n$ têm dimensão finita (veja [73, p. 17]).

Dados $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$ espaços vetoriais normados, segue da definição da norma projetiva que o operador n-linear

$$\sigma_n\colon X_1 \times \cdots \times X_n \longrightarrow X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n\ ,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n,$$

é contínuo e tem norma 1.

Proposição 3.1.8. [73, Theorem 2.9] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$, Y espaços de Banach. Para cada operador n-linear e contínuo $A \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ existe um único operador linear e contínuo $A_L \in \mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n; Y)$ tal que $A = A_L \circ \sigma_n$.*

Além disso, a correspondência $A \longrightarrow A_L$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços de Banach $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ e $\mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi \cdots \widehat{\otimes}_\pi X_n; Y)$.

O operador A_L é chamado *linearização* de A.

Definição 3.1.9. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e X um espaço vetorial. O *operador simetrização* é definido por

$$s\colon \otimes^n X \longrightarrow \otimes^n X \ , \ x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \longmapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

onde S_n é o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. O subespaço vetorial

$$\otimes_s^n X := \operatorname{span}\left\{ s(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) : x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \otimes^n X \right\}$$

de $\otimes^n X$ é chamado *produto tensorial simétrico*. Se X for normado, então utilizaremos a notação $\otimes_{s,\pi}^n X$ para representar o espaço $\otimes_s^n X$ munido com a norma projetiva π. Seu completamento é chamado *produto tensorial simétrico projetivo* e será denotado por $\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n X$.

Dados $n \in \mathbb{N}$ e X um espaço vetorial normado, segue da definição da norma projetiva que a aplicação

$$\delta_X^n \colon X \longrightarrow \widehat{\otimes}_{s,\pi}^n X \ , \ x \longmapsto \otimes^n x$$

é um polinômio n-homogêneo contínuo de norma 1.

Proposição 3.1.10. [72, Proposition 2.1] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e X, Y espaços normados. Para cada polinômio n-homogêneo contínuo $P \in \mathcal{P}(^n X; Y)$ existe um único operador linear e contínuo $P_L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n X; Y)$ tal que $P = P_L \circ \delta_X^n$.*

Mais ainda, a correspondência $P \longrightarrow P_L$ é um isomorfismo topológico entre os espaços normados $\mathcal{P}(^n X; Y)$ e $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n X; Y)$.

O operador linear P_L é chamado *linearização* de P. Note que, em particular, $\mathcal{P}(^n X)$ é isomorfo a $\left(\widehat{\otimes}_{s,\pi}^n X\right)^*$.

Vimos no Capítulo 1 que, dados reticulados de Banach E e F, nem sempre $\mathcal{L}(E; F)$ é um reticulado de Banach (veja [75, p. 228]). O mesmo ocorre com os espaços de operadores n-lineares contínuos e polinômios n-homogêneos contínuos. Por exemplo, $\mathcal{L}(^1 E; F) = \mathcal{L}(E; F) = \mathcal{P}(^1 E; F)$. Além disso, o produto tensorial projetivo entre reticulados de Banach também pode não ser um reticulado de Banach.

Exemplo 3.1.11. (a) $\ell_2 \widehat{\otimes}_\pi \ell_2$ não é um reticulado de Banach (veja [20, p. 116]).

(b) Sejam E e F reticulados de Banach. Se E ou F é um AL-espaço, então $E \widehat{\otimes}_\pi F$ é um reticulado de Banach (veja [20, Proposition 36]).

Veremos a seguir subespaços vetoriais formados por operadores multilineares e por polinômios homogêneos que sempre serão, sob certas condições e com normas adequadas, reticulados de Banach. Veremos ainda a definição do produto tensorial de Fremlin entre reticulados de Banach, o qual também será um reticulado de Banach.

Definição 3.1.12. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E, E_1, \ldots, E_n$, F espaços de Riesz.

(a) Um operador n-linear $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é *positivo* se $A(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ sempre que $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

(b) Um operador n-linear A é *regular* se $A = A_1 - A_2$ onde A_1 e A_2 são operadores n-lineares positivos.

(c) Um operador n-linear $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é um *n-morfismo* se

$$A(|x_1|, \ldots, |x_n|) = \Big|A(x_1, \ldots, x_n)\Big|$$

para todos $x_i \in E_i$ e $i = 1, \ldots, n$.

(d) Um polinômio n-homogêneo $P\colon E \longrightarrow F$ é *positivo* se o operador n-linear simétrico $\check{P}$ associado a P for positivo.

(e) Um polinômio n-homogêneo P é *regular* se for a diferença de dois polinômios positivos, ou equivalentemente, se $\check{P}$ for regular.

(f) Um polinômio n-homogêneo $P\colon E \longrightarrow F$ é dito *monótono no cone positivo* se $0 \leq x \leq y$ em E implicar $P(x) \leq P(y)$ em F.

Proposição 3.1.13. [60, Proposition 1.10] *Seja $P\colon E \longrightarrow F$ um polinômio n-homogêneo entre os espaços de Riesz E e F. Se P é positivo, então P é monótono no cone positivo de E.*

O resultado a seguir é um análogo multilinear e polinomial do Teorema 1.4.27. O caso onde o contradomínio é o corpo $\mathbb{R}$ pode ser encontrado em [48, Proposition 4.1] e [75, p. 297]. O caso vetorial também é válido, conforme vemos em [20, Theorem 7].

Proposição 3.1.14. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E, E_1, \ldots, E_n$, F reticulados de Banach. Então todo operador n-linear regular $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ e todo polinômio n-homogêneo regular $P\colon E \longrightarrow F$ são contínuos.*

O conjunto dos operadores n-lineares regulares definidos em $E_1 \times \cdots \times E_n$ e tomando valores em F é um espaço vetorial e será denotado por $\mathcal{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$. Usaremos a notações $\mathcal{L}^r(^nE; F)$ quando $E_1 = \cdots = E_n = E$, e $\mathcal{L}^r(^nE)$ quando $F = \mathbb{R}$.

O espaço dos polinômios n-homogêneos regulares de E em F será denotado por $\mathcal{P}^r(^nE; F)$. No caso particular em que $F = \mathbb{R}$ adotaremos a notação $\mathcal{P}^r(^nE)$. Observe que $E^* = \mathcal{P}^r(^1E) = \mathcal{L}^r(^1E)$.

Proposição 3.1.15. [19, p. 849] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E, E_1, \dots, E_n, F$ reticulados de Banach com F Dedekind completo. Então $\mathcal{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$ é um reticulado de Banach com a norma regular, dada por*

$$\|T\|_r := \||T|\| = \sup\left\{\||T|(x_1, \dots, x_n)\| : x_j \in E_j, \|x_j\|_{E_j} \leq 1, j = 1, \dots, n\right\},$$

para todo $T \in \mathcal{L}^r(E_1, \dots, E_n; F)$, onde $|T|$ é o valor absoluto de T. Mais ainda, $\mathcal{P}^r(^nE; F)$ é um reticulado de Banach com a norma regular, dada por

$$\|P\|_r := \||P|\| = \sup\{\||P|(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\},$$

para todo $P \in \mathcal{P}^r(^nE; F)$, onde $|P|$ é valor absoluto de P.

Vimos no Exemplo 3.1.11 que o produto tensorial projetivo de reticulados de Banach pode não ser um reticulado de Banach. Apresentaremos agora um produto tensorial de reticulados de Banach, conforme definido por Fremlin [42, 43], que sempre será um reticulado de Banach.

Definição 3.1.16. Um espaço de Riesz é *arquimediano* se vale a seguinte implicação:

$$x, y \in E^+ \text{ e } nx \leq y \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x = 0.$$

Teorema 3.1.17. [42, Theorem 4.2(i)] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \dots, E_n$ espaços de Riesz arquimedianos. Existe um único espaço de Riesz arquimediano $E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$ e um único n-morfismo de Riesz*

$$\otimes \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$$

com a seguinte propriedade universal: se F é um espaço de Riesz arquimediano e $T \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é um n-morfismo, então existe um único homomorfismo de Riesz $\overline{T} \colon E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n \longrightarrow F$ tal que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\otimes"'] & F \\
E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n \arrow[ur, "\overline{T}"'] &
\end{tikzcd}.$$

Definição 3.1.18. O espaço de Riesz $E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$ é chamado *produto tensorial de Fremlin* de $E_1, \dots, E_n$.

Proposição 3.1.19. [42, Theorem 4.2(ii)] *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Riesz arquimedianos. O produto tensorial algébrico $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ é um subespaço vetorial de $E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$.*

É verdade também que o n-morfismo de Riesz $\otimes$ do Teorema 3.1.17 atua como o operador n-linear σ_n, isto é,

$$\otimes(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$$

para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

Proposição 3.1.20. [63, Proposition 1.1.8 i)] *Todo reticulado de Banach é um espaço de Riesz arquimediano.*

Definição 3.1.21. Para reticulados de Banach $E_1, \ldots, E_n$, a *norma tensorial projetiva positiva* $\|\cdot\|_{|\pi|}$ em $E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$ é definida por

$$\|u\|_{|\pi|} := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{m} \|x_1^k\| \cdots \|x_n^k\| : \ x_i^k \in E_i^+, \ i = 1, \ldots, n, \ m \in \mathbb{N}, \ |u| \leq \sum_{k=1}^{m} x_1^k \otimes \cdots \otimes x_n^k \right\},$$

para todo $u \in E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$.

A função $u \mapsto \|u\|_{|\pi|}$ é uma norma de Riesz em $E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$ (veja [43]). O completamento do espaço de Riesz $E_1 \overline{\otimes} \cdots \overline{\otimes} E_n$ com a norma $\|\cdot\|_{|\pi|}$ é um reticulado de Banach chamado de *produto tensorial projetivo positivo* e será denotado por $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_n$. Quando $E = E_1 = \cdots = E_n$, utilizaremos a notação $\widehat{\otimes}_{|\pi|}^n E$.

A definição do produto tensorial de Fremlin é dada por existência e isso dificulta compreender a estrutura do produto tensorial projetivo positivo. A seguir apresentamos uma definição equivalente que nos ajuda a compreender melhor esse reticulado de Banach (veja [43, 20]).

Definição 3.1.22. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n$ reticulados de Banach.

(a) O *cone projetivo* em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ é definido por

$$C_p = \left\{ \sum_{j=1}^{k} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n : k \in \mathbb{N}, x_j^i \in E_i^+, i = 1, \ldots, n \text{ e } j = 1, \ldots, k \right\}.$$

(b) A *norma projetiva positiva* em $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ é definida por

$$\|x\|_{|\pi|} = \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{k} \varphi(x_j^1, \ldots, x_j^n) \right| : x = \sum_{j=1}^{k} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \text{ e } \varphi \in B \right\},$$

onde B é o conjunto de todos os formas n-lineares positivas em $E_1 \times \cdots \times E_n$ com norma ≤ 1.

(c) O completamento $E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_n$ de $E_1\otimes\cdots\otimes E_n$ com a norma projetiva positiva $\|\cdot\|_{|\pi|}$ é um reticulado de Banach com a ordem dada pelo fecho do cone projetivo C_p, e será chamado de *produto tensorial projetivo positivo.*

A proposição a seguir será importante no Corolário 4.3.20, no Capítulo 4.

Proposição 3.1.23. [20, Proposition 42] *Sejam E e F reticulados de Banach. Então $E\widehat{\otimes}_{|\pi|}F$ é isomorfo (isometricamente) a $E\widehat{\otimes}_{\pi}F$ se, e somente se, E ou F é isomorfo (isometricamente) a um AL-espaço.*

Teorema 3.1.24. [43, Corollary 1G] *Sejam E, F e G reticulados de Banach. Então $\left(E\widehat{\otimes}_{|\pi|}F\right)\widehat{\otimes}_{|\pi|}G$ é isomorfo como reticulado a $E\widehat{\otimes}_{|\pi|}\left(F\widehat{\otimes}_{|\pi|}G\right)$.*

Teorema 3.1.25. [19, Proposition 3.3] *Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $E_1,\ldots,E_n,F$ reticulados de Banach tais que F é Dedekind completo. Então $\mathcal{L}^r(E_1,\ldots,E_n;F)$ é isomorfo isometricamente como reticulado a $\mathcal{L}^r(E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_n;F)$ por meio do operador linearização.*

Proposição 3.1.26. [43, 1E(v), p. 89] *Sejam $n\in\mathbb{N}$, $E_1,\ldots,E_n$ reticulados de Banach e $x_i\in E_i$ para cada $i=1,\ldots,n$. Então*

$$\|x_1\otimes\cdots\otimes x_n\|_{|\pi|}=\|x_1\|_{E_1}\cdots\|x_n\|_{E_n}.$$

Proposição 3.1.27. [50, Lemma 2.1] *Sejam $n\in\mathbb{N}$ e $E_1,\ldots,E_n$ reticulados de Banach. Então $E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_n$ contém cópia reticulada de E_i para cada $i=1,\ldots,n$.*

Uma demonstração do teorema abaixo também é encontrada em [21, Proposition 2].

Teorema 3.1.28. [76, Theorem 3.2, p. 204] *Se E e F são reticulados de Banach, então $\mathcal{L}^r(E;F^*)$ e $(E\widehat{\otimes}_{|\pi|}F)^*$ são canonicamente isomorfos isometricamente como reticulados.*

As definições abaixo podem ser encontradas em [60, p. 76] e [19, p. 851].

Definição 3.1.29. Sejam E um espaço de Riesz e $n\in\mathbb{N}$.

(a) O *produto tensorial simétrico de Fremlin*, denotado por $\overline{\otimes}_s^n E$, é o subespaço de Riesz de $\overline{\otimes}^n E$ gerado por $\otimes_s^n E$.

(b) A *norma tensorial projetiva positiva simétrica* em $\overline{\otimes}_s^n E$ é definida por

$$\|u\|_{s,|\pi|}:=\inf\left\{\sum_{k=1}^m\|x_k\|^n:\ x_k\in E^+,\ m\in\mathbb{N},\ |u|\leq\sum_{k=1}^m x_k\otimes\overset{n}{\cdots}\otimes x_k\right\},$$

para todo $u\in\overline{\otimes}_s^n E$. A função $u\mapsto\|u\|_{s,|\pi|}$ é uma norma de Riesz em $\overline{\otimes}_s^n E$.

(c) O completamento $\widehat{\otimes}^n_{s,|\pi|}E$ de $\overline{\otimes}^n_s E$ com a norma $\|\cdot\|_{s,|\pi|}$ é um reticulado de Banach chamado *produto tensorial projetivo positivo simétrico*. Se $x_1, \ldots, x_n \in E^+$, então $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in \left(\widehat{\otimes}^n_{s,|\pi|}E\right)^+$.

Teorema 3.1.30. [19, Proposition 3.4] *Sejam E e F reticulados de Banach tais que F é Dedekind completo e $n \in \mathbb{N}$. Então, para todo polinômio regular $P \in \mathcal{P}^r({}^nE; F)$ existe um único operador regular $P_L \in \mathcal{L}^r\left(\widehat{\otimes}^n_{s,|\pi|}E; F\right)$ tal que $P(x) = P_L(\otimes^n x)$ para todo $x \in E$. Mais ainda, a correspondência $P \longmapsto P_L$ é um isomorfismo de reticulados entre $\mathcal{P}^r({}^nE; F)$ e $\mathcal{L}^r\left(\widehat{\otimes}^n_{s,|\pi|}E; F\right)$.*

3.2 Contextualização

Sempre que dissermos *polinômio homogêneo (regular) em X (em E)*, sem especificação do contradomínio e do grau de homogeneidade, estaremos nos referindo a um polinômio n-homogêneo (regular) $P\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ ($P\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$) para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário.

O estudo da propriedade de Schur polinomial teve início em 1989 com o célebre artigo de Carne, Cole e Gamelin [25], trabalho no qual foi apresentado o conceito de Λ-*espaço* e foram apresentados os primeiros resultados sobre esse tipo de espaço de Banach. Posteriormente esse conceito foi abordado por outros matemáticos (veja [37, 46, 49]) e os termos *espaço polinomialmente de Schur* e espaço com a *propriedade de Schur polinomial* passaram a ser empregados como sinônimos de Λ-espaço.

Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em um espaço de Banach X é dita *polinomialmente nula* se $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo contínuo P em X.

Definição 3.2.1. Um espaço de Banach X tem a *propriedade de Schur polinomial* se toda sequência polinomialmente nula em X é nula em norma.

Exemplo 3.2.2. (a) É imediato que todo espaço de Banach X com a propriedade de Schur tem a propriedade de Schur polinomial, pois $X^* = \mathcal{P}({}^1X)$.

(b) O espaço $L_p(\mu)$ tem a propriedade de Schur polinomial para quaisquer medida μ e $1 \leq p < \infty$ (veja [25, Theorem 6.4] e [49, Theorem 1]). Os espaços $L_p(\mu)$, $1 < p < \infty$, são exemplos de que não vale a recíproca do item (a).

No capítulo anterior vimos que a propriedade de Schur positiva é uma versão da propriedade de Schur no contexto de reticulados de Banach que leva em consideração, obviamente, as particularidades impostas pela ordem. Assim, é natural ponderar sobre uma versão análoga à propriedade de Schur polinomial em reticulados de Banach que leve em consideração as peculiaridades advindas da estrutura de ordem. Isso nos motiva a introduzir a seguinte definição:

Definição 3.2.3. Um reticulado de Banach E tem a *propriedade de Schur polinomial positiva* se toda sequência positiva $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tal que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo regular P em E é nula em norma. Um reticulado de Banach com a propriedade de Schur polinomial positiva será chamado de *positivamente polinomialmente de Schur (PPS)*.

Nosso propósito neste capítulo é trabalhar com a propriedade de Schur polinomial positiva em reticulados de Banach. Iniciaremos apresentando, na seção a seguir, alguns exemplos e contraexemplos (veja Exemplos 3.3.1, 3.3.10, 3.3.13), uma caracterização (veja Teorema 3.3.7) e algumas propriedades gerais (veja Proposições 3.3.5, 3.3.11, 3.3.9, 3.3.12). A seção posterior será devotada à demonstração de que os reticulados de Banach $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, são PPS (veja Teorema 3.4.7) e apresentaremos algumas consequências desse fato (veja Corolário 3.4.8 e Exemplo 3.4.9). Na seção final deste capítulo apresentaremos uma caracterização da propriedade de Schur positiva (veja Teorema 3.5.6) e garantiremos, sob certas condições, a existência de sequência fracamente nula que não converge para zero em norma no cone de Segre do produto tensorial projetivo positivo (simétrico) (veja Proposições 3.5.9 e 3.5.10).

3.3 Propriedades básicas e exemplos

Iniciamos com alguns exemplos de reticulados de Banach positivamente polinomialmente de Schur.

Exemplo 3.3.1. (a) Todo reticulado de Banach E com a propriedade de Schur positiva é PPS. De fato, basta notar que $E^* = \mathcal{P}^r(^1E)$. Como todo AL-espaço tem a propriedade de Schur positiva, segue que todo AL-espaço é PPS (veja Exemplo 2.1.7). Em particular, $L_1(\mu)$ é um reticulado de Banach PPS para qualquer medida μ.

(b) $L_1[0,1]$ é um reticulado de Banach PPS que não tem a propriedade de Schur polinomial (veja [25, Theorem 6.5]).

(c) Existem reticulados de Banach PPS que não são AL-espaços. De fato, o reticulado de Banach $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_\infty^n\right)_1$ é PPS, pois tem a propriedade de Schur positiva, e não é um AL-espaço, pois se fosse AL-espaço seu bidual teria a propriedade de Schur positiva e sabemos que isso não ocorre (veja Exemplo 2.2.14).

Na próxima seção apresentaremos exemplos de reticulados de Banach reflexivos de dimensão infinita com a propriedade de Schur polinomial positiva, estabelecendo assim, em particular, que existem reticulados de Banach PPS que não têm a propriedade de Schur positiva.

Relembramos agora um conceito clássico da teoria dos espaços de Banach.

Definição 3.3.2. Um espaço de Banach X tem a *propriedade de Dunford-Pettis* se todo operador fracamente compacto definido em X e tomando valores em um espaço de Banach arbitrário é de Dunford-Pettis, isto é, transforma sequências fracamente nulas em sequências nulas em norma.

Exemplo 3.3.3. [5, Theorem 5.85] Todo AL-espaço e todo AM-espaço têm a propriedade de Dunford-Pettis.

Proposição 3.3.4. [35, Proposition 2.34] *Todo polinômio homogêneo contínuo definido em um espaço de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis é fracamente sequencialmente contínuo.*

Proposição 3.3.5. *Seja E um reticulado de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis e sem a propriedade de Schur positiva. Então E não é PPS. Em particular, AM-espaços não são PPS.*

Demonstração. Como E não tem a propriedade de Schur positiva, então podemos tomar uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset E$ positiva, fracamente nula e que não converge para zero em norma. A propriedade de Dunford-Pettis de E nos garante que todo polinômio homogêneo em E é fracamente sequencialmente contínuo (Proposição 3.3.4), assim $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nE)$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, E não é PPS. Todo AM-espaço contém cópia reticulada de c_0 (Proposição 1.4.24) e portanto não tem a propriedade de Schur positiva. Além disso todo AM-espaço tem a propriedade de Dunford-Pettis (Exemplo 3.3.3). $\square$

Para verificar se um reticulado de Banach tem a propriedade de Schur positiva é suficiente considerar sequências positivas e disjuntas (veja Proposição 2.1.6). Provaremos que o mesmo vale para a propriedade de Schur polinomial positiva e, para isso, precisamos do resultado a seguir.

Teorema 3.3.6. [63, Corollary 2.3.5] *Sejam E um espaço de Riesz normado, ρ uma seminorma de Riesz contínua em E e $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em E tal que $x_j \xrightarrow{w} 0$ e $\rho(x_j) \geq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então, para todo $0 < c < 1$ existem uma subsequência $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e uma sequência positiva e disjunta $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ em E tais que $y_k \leq x_{j_k}$ e $\rho(y_k) \geq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Teorema 3.3.7. *Um reticulado de Banach E é PPS se, e somente se, toda sequência positiva e disjunta $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tal que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo regular P em E é nula em norma.*

Demonstração. Uma implicação é imediata. Para provar a outra implicação, tomemos como hipótese que toda sequência positiva e disjunta em E tal que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo regular P em E converge para zero em norma. Suponha que E não seja PPS, ou seja, existe uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E positiva, não convergente para zero em norma e tal que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nE)$ e $n \in \mathbb{N}$.

O fato de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ não convergir para zero em norma nos garante que existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(x_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que $\|x_{j_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considerando $z_k := (1/\varepsilon)x_{j_k}$ temos que $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é positiva, $\|z_k\| \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e

$$P(z_k) = P\left(\tfrac{1}{\varepsilon}x_{j_k}\right) = \tfrac{1}{\varepsilon^n}P(x_{j_k}) \longrightarrow 0$$

para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nE)$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $E^* = \mathcal{P}^r(^1E)$, em particular $z_k \xrightarrow{w} 0$. Tomando $c \in \mathbb{R}$ com $0 < c < 1$, pelo Teorema 3.3.6, existem uma sequência positiva e disjunta $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ em E e uma subsequência $(z_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ de $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ tais que $y_i \leq z_{k_i}$ e $\|y_i\| \geq c$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Lembremos que todo $P \in \mathcal{P}^r(^nE)$, $n \in \mathbb{N}$, é da forma $P = P_1 - P_2$, onde P_1 e P_2 são polinômios n-homogêneos positivos. A Proposição 3.1.13 nos garante que P_1 e P_2 são monótonos no cone positivo de E, isto é, $P_m(x) \leq P_m(y)$, $m = 1, 2$, sempre que $0 \leq x \leq y$. Portanto,

$$0 \leq P_m(y_i) \leq P_m(z_{k_i}) \longrightarrow 0, \quad m = 1, 2.$$

Com isso,

$$|P(y_i)| = |P_1(y_i) - P_2(y_i)| \leq |P_1(y_i)| + |P_2(y_i)| \longrightarrow 0.$$

Temos então, por hipótese, que $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ converge para zero em norma, gerando assim uma contradição pois $\|y_i\| \geq c$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto E é PPS. □

A definição a seguir foi apresentada por Botelho, Bu, Ji e Navoyan [14].

Definição 3.3.8. Sejam E e F reticulados de Banach. Dizemos que F é *positivamente isomorfo a um subespaço de E* se existe um operador positivo $T\colon F \longrightarrow E$ que é um isomorfismo sobre sua imagem.

Proposição 3.3.9. *(a) Se F é um reticulado de Banach positivamente isomorfo a um subespaço de um reticulado de Banach PPS, então F é PPS.*

(b) Se dois reticulados de Banach são isomorfos como reticulados e um deles é PPS, então o outro também será PPS.

(c) Subreticulados fechados de reticulados de Banach PPS são PPS.

Demonstração. (a) Sejam E um reticulado de Banach PPS, $T\colon F \longrightarrow E$ um operador positivo que é um isomorfismo sobre sua imagem e $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em F tal que $Q(x_j) \longrightarrow 0$ para todos $Q \in \mathcal{P}^r(^nF)$ e $n \in \mathbb{N}$. Note que $P \circ T \in \mathcal{P}^r(^nF)$ para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nE)$ e $n \in \mathbb{N}$, portanto $P \circ T(x_j) \longrightarrow 0$. Como $(T(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência positiva, a propriedade de Schur polinomial positiva de E nos garante que $T(x_j) \longrightarrow 0$. Consequentemente,

$$x_j = (T^{-1} \circ T)(x_j) \longrightarrow 0,$$

pois $T^{-1}\colon T(F) \longrightarrow F$ é um operador contínuo.

Os itens (b) e (c) seguem imediatamente do item (a). □

O espaço de Schreier S é um completamento de c_{00} com uma norma definida a partir de conjuntos admissíveis, conceito esse introduzido por J. Schreier em 1930. No exemplo abaixo veremos que o espaço de Schreier S e seu dual S^* não são PPS. A definição precisa e resultados sobre esses espaços podem ser encontrados em [26].

Exemplo 3.3.10. O espaço de Schreier S tem base 1-incondicional [26, Proposition 0.4 (iii)], portanto é um reticulado de Banach com a ordem dada pela base (Exemplo 1.4.3(d)). Em [26, Proposition 0.7] vemos que S contém cópia isométrica de c_0 e, pelo Teorema 1.4.14, segue que S contém cópia reticulada de c_0, que não é PPS. Portanto S não é um reticulado de Banach PPS pela Proposição 3.3.9.

O dual do espaço de Schreier S^* é um reticulado de Banach com a ordem dada pela estrutura dual (veja Teorema 1.4.30). A sequência formada pelos vetores unitários canônicos $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ em S^* converge fracamente para zero [28, (4) p. 168] e toda forma multilinear contínua definida em S^* é fracamente sequencialmente contínua [27, Theorem 3.2]. Portanto $P(e_j) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nS^*)$ e $n \in \mathbb{N}$. Obtemos assim que S^* não é um reticulado de Banach PPS.

Proposição 3.3.11. *Sejam E e F reticulados de Banach PPS. Então $E \times F$ é um reticulado de Banach PPS, com a ordem coordenada a coordenada, para qualquer norma que faz dele um reticulado de Banach. Em particular, $(E \oplus F)_p$ é PPS para qualquer $1 \leq p \leq \infty$.*

Demonstração. Seja $\|\cdot\|_{E\times F}$ uma norma em $E \times F$ que o torna um reticulado de Banach. A ordem coordenada a coordenada garante que as projeções

$$\pi_E\colon E \times F \longrightarrow E, \quad \pi_E(x,y) = x,$$
$$\pi_F\colon E \times F \longrightarrow F, \quad \pi_F(x,y) = y,$$

são operadores lineares positivos, consequentemente contínuos. Seja $((x_j, y_j))_{j=1}^{\infty}$ uma sequência positiva em $E \times F$ tal que $P((x_j, y_j)) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nE \times F)$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para quaisquer polinômios $Q_E \in \mathcal{P}^r(^nE)$ e $Q_F \in \mathcal{P}^r(^nF)$ segue que $Q_E \circ \pi_E$ e $Q_F \circ \pi_F$ são polinômios n-homogêneos regulares em $E \times F$, portanto

$$Q_E(x_j) = (Q_E \circ \pi_E)((x_j, y_j)) \longrightarrow 0 \text{ e } Q_F(y_j) = (Q_F \circ \pi_F)((x_j, y_j)) \longrightarrow 0.$$

Como E e F são reticulados de Banach PPS, $x_j \longrightarrow 0$ em E e $y_j \longrightarrow 0$ em F. A equivalência entre todas as normas que tornam $E \times F$ um reticulado de Banach (veja Proposição 1.4.5) nos garante a existência de uma constante $C > 0$ tal que $\|\cdot\|_{E\times F} \leq C\|\cdot\|_1$, onde $\|\cdot\|_1$ é a norma da soma. Então,

$$\|((x_j, y_j))_{j=1}^{\infty}\|_{E\times F} \leq C\|((x_j, y_j))_{j=1}^{\infty}\|_1 = C(\|x_j\|_E + \|y_j\|_F) \longrightarrow 0.$$

Portanto, $(E \times F, \|\cdot\|_{E\times F})$ é um reticulado de Banach PPS. □

Mostraremos agora que reticulados de Banach PPS gozam de boas propriedades.

Proposição 3.3.12. *Todo reticulado de Banach PPS é um KB-espaço, consequentemente, tem norma ordem-contínua, é fracamente sequencialmente completo e é Dedekind completo.*

Demonstração. Seja E um um reticulado de Banach PPS. Como c_0 não é PPS, E não possui cópia reticulada de c_0 pela Proposição 3.3.9. Portanto, pelo Teorema 1.4.14, E é um KB-espaço. As outras propriedades seguem dos Teoremas 1.4.13, 1.4.14 e 1.4.10. □

Finalizamos esta seção mostrando que não vale a recíproca da Proposição 3.3.12, isto é, KB-espaços nem sempre são PPS.

O espaço de Tsirelson original T^* foi construído em 1974 por B. S. Tsirelson [79] como o primeiro exemplo de espaço de Banach que não possui cópia de ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, nem de c_0. A definição desse espaço pode ser encontrada em [79] e um estudo mais aprofundado sobre ele é apresentado em [26]. Listamos a seguir as propriedades de T^* de que necessitaremos:

O espaço T^* tem base 1-incondicional, é reflexivo, não contém subespaços isomorfos a ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, nem a c_0 [26, Notes and Remarks, p. 16] e todo polinômio homogêneo contínuo definido em T^* é fracamente sequencialmente contínuo [35, p. 121].

Consideremos T^* como reticulado de Banach com a ordem dada por sua base incondicional (veja Exemplo 1.4.3(d)).

Exemplo 3.3.13. Vejamos que o espaço de Tsirelson original T^* é um KB-espaço que não é PPS.

Por um lado, como T^* não contém cópia de c_0, então T^* é um KB-espaço (veja Teorema 1.4.14).

Por outro lado, o fato de T^* não ter cópia de ℓ_1 nos garante que ele não possui a propriedade de Schur positiva, ou seja, existe uma sequência positiva, fracamente nula $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e que não converge para zero em T^*. Como polinômios homogêneos contínuos, em particular os regulares, em T^* são fracamente sequencialmente contínuo, temos $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}^r({}^nT^*)$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto T^* não é PPS.

Até o momento apresentamos mais contraexemplos do que exemplos de reticulados de Banach PPS. Na próxima seção aumentaremos significativamente o número de exemplos de reticulados que são PPS.

3.4 $L_p(\mu)$-espaços

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar que os reticulados de Banach $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, são PPS para uma medida μ qualquer (veja Teorema 3.4.7). Isso apresenta, em particular, exemplos de reticulados de Banach PPS que não têm a propriedade de Schur positiva.

Acreditamos que alguns resultados preparatórios que necessitaremos são conhecidos por experts em Teoria da Medida, contudo incluiremos as demonstrações pois não encontramos referências para citar.

O lema a seguir foi inspirado em [3, Theorem 13.25]. O caso de espaços de Banach pode ser encontrado em [52, p. 14] e como exercício em [36, p. 34]. Usamos a notação g^{-1} para representar $1/g$.

Lema 3.4.1. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e (Ω, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita. Então existe uma medida de probabilidade λ em (Ω, Σ) tal que $L_p(\mu)$ é isomorfo isometricamente como reticulado a $L_p(\lambda)$.*

Demonstração. Seja g uma função estritamente positiva μ-quase sempre tal que $\displaystyle\int_\Omega g d\mu = 1$ e consideremos a medida de probabilidade

$$\lambda \colon \Sigma \longrightarrow [0,1] \ , \ A \longmapsto \int_A g d\mu.$$

Pela definição de λ, se $\mu(A) = 0$ então $\lambda(A) = 0$, isto é, λ é absolutamente contínua com relação a μ. Por outro lado temos

$$\mu(A) = \int_A d\mu = \int_A g^{-1} g d\mu = \int_A g^{-1} d\lambda, \tag{3.1}$$

implicando assim que se $\lambda(A) = 0$ então $\mu(A) = 0$, isto é, μ é absolutamente contínua com relação a λ. Isso nos garante que os conjuntos de medida nula com relação às medidas μ e λ coincidem.

Definamos agora o operador

$$T\colon L_p(\mu) \longrightarrow L_p(\lambda)\ ,\ f \longmapsto fg^{-1/p},$$

que está bem definido pois

$$\int_\Omega |fg^{-1/p}|^p d\lambda = \int_\Omega |f|^p g^{-1} g d\mu = \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty, \tag{3.2}$$

para toda $f \in L_p(\mu)$. A linearidade de T é facilmente verificada e (3.2) nos garante que $\|T(f)\| = \|f\|$. Ainda, dada $h \in L_p(\lambda)$, escrevendo $h = hg^{1/p}g^{-1/p}$ temos

$$\int_\Omega |hg^{1/p}|^p d\mu = \int_\Omega |h|^p g g^{-1} d\lambda = \int_\Omega |h|^p d\lambda < \infty. \tag{3.3}$$

Portanto $hg^{1/p} \in L_p(\mu)$ e $T(hg^{1/p}) = h$, ou seja, T é sobrejetora.

Verificaremos, por fim, que T é um homomorfismo de Riesz. De fato, dadas $f_1, f_2 \in L_p(\mu)$, para todo x λ-quase sempre,

$$\begin{aligned} T(f_1 \vee f_2)(x) &= ((f_1 \vee f_2)g^{-1/p})(x) = (f_1 \vee f_2)(x)g^{-1/p}(x) = (f_1(x) \vee f_2(x))g^{-1/p}(x) \\ &\overset{(\star\star)}{=} (f_1(x)g^{-1/p}(x)) \vee (f_2(x)g^{-1/p}(x)) = (f_1 g^{-1/p})(x) \vee (f_2 g^{-1/p})(x) \\ &= T(f_1)(x) \vee T(f_2)(x). \end{aligned}$$

A igualdade em $(\star\star)$ segue das propriedades de supremo em $\mathbb{R}$, lembrando que $g^{-1/p}(x) \geq 0$ λ-quase sempre. Portanto $T(f_1 \vee f_2) = T(f_1) \vee T(f_2)$ e concluímos assim que $L_p(\mu)$ é isomorfo isometricamente como reticulado a $L_p(\lambda)$. $\square$

Observe que o Teorema de Radon-Nikodým (veja Teorema 1.5.3) e as Proposições 1.5.4 e 1.5.5 nos permitem manipular as integrais como feito em (3.1), (3.2) e (3.3).

Vejamos agora alguns resultados que utilizaremos no próximo lema.

Observação 3.4.2. Seja (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e $A \in \Sigma$ um conjunto não vazio. Podemos considerar um novo espaço de medida $(A, \Sigma|_A, \mu|_A)$, onde $\Sigma|_A := \{B \subset A \colon\ B \in \Sigma\}$ e

$$\mu|_A \colon \Sigma|_A \longrightarrow [0, \infty]\ ,\ (\mu|_A)(B) = \mu(B)$$

(veja [13, p. 2 e p. 68]). Para toda função μ-integrável f definida em Ω, denotando sua restrição ao conjunto A por $f|_A$, temos

$$\int_A (f|_A) d(\mu|_A) = \int_A f d\mu \tag{3.4}$$

(veja [13, Lemma 12.5]).

Lema 3.4.3. *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. A aplicação*

$$T\colon L_p(\mu) \longrightarrow L_p(\mu|_A); \quad f \longmapsto f|_A$$

é um operador linear sobrejetor e positivo.

Demonstração. Observe que T está bem definido, pois dada $f \in L_p(\mu)$ temos $|f|^p$ μ-integrável. Assim, (3.4) nos garante que

$$\int_A |(f|_A)|^p d(\mu|_A) = \int_A |f|^p d\mu < \infty.$$

Portanto, $T(f) = f|_A \in L_p(\mu|_A)$. É fácil ver que T é um operador linear, sobrejetor e positivo. □

Vamos demonstrar, na realidade, que os espaços $L_p(\mu)$ gozam de uma propriedade mais forte do que ser PPS.

Definição 3.4.4. Dado $n \in \mathbb{N}$, um reticulado de Banach E tem a *propriedade de Schur n-polinomial positiva* se toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E fracamente nula e positiva tal que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio n-homogêneo regular P em E é nula em norma. Nesse caso diremos que E é um reticulado de Banach *n-PPS*.

O próximo lema é o primeiro passo para demonstrarmos que $L_p(\mu)$ é n-PPS para cada $n \geq p$ e uma medida μ qualquer.

Lema 3.4.5. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $L_p(\lambda)$ é um reticulado de Banach n-PPS para toda medida de probabilidade λ, então $L_p(\mu)$ é n-PPS para qualquer medida μ.*

Demonstração. Sejam μ uma medida qualquer e $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência fracamente nula e positiva em $L_p(\mu)$ tal que $P(f_j) \longrightarrow 0$ para todo $P \in \mathcal{P}^r(^n L_p(\mu))$. Para cada $j, k \in \mathbb{N}$ considere o conjunto mensurável

$$A_{j,k} := \{x \in \Omega : |f_j(x)| > 1/k\}.$$

Como $f_j \in L_p(\mu)$, $A_{j,k}$ tem medida finita para cada $j, k \in \mathbb{N}$. Assim, o conjunto $A := \bigcup\limits_{j,k=1}^{\infty} A_{j,k}$ tem medida σ-finita e $f_j(x) = 0$ para todo $x \in \Omega \setminus A$ e todo $j \in \mathbb{N}$.

Considerando o espaço de medida σ-finita $(A, \Sigma|_A, \mu|_A)$, segue pelo Lema 3.4.1 que $L_p(\mu|_A)$ é isomorfo isometricamente como reticulado a $L_p(\lambda)$ para alguma medida finita λ, o qual é n-PPS por hipótese. Assim, uma pequena (e imediata) adequação na Proposição 3.3.9 nos garante que $L_p(\mu|_A)$ também é n-PPS. Pelo Lema 3.4.3, o operador restrição $T\colon L_p(\mu) \longrightarrow L_p(\mu|_A)$ é linear sobrejetor e positivo. Com isso, se $Q \in \mathcal{P}^r(^n L_p(\mu|_A))$, então

$$Q \circ T \in \mathcal{P}^r(^n L_p(\mu)) \text{ e } Q(T(f_j)) \longrightarrow 0.$$

O fato de T ser positivo nos fornece que $(T(f_j))_{j=1}^{\infty} \subset L_p(\mu|_A)^+$ e, como $L_p(\mu|_A)$ é n-PPS, temos $\|T(f_j)\| \longrightarrow 0$. Consequentemente $\|f_j\| \longrightarrow 0$, pois $\|T(f_j)\| = \|f_j\|$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Isso prova que $L_p(\mu)$ é n-PPS. □

O próximo resultado foi inspirado em argumentos utilizados na demonstração de [36, Theorem 4.55].

Lema 3.4.6. *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de probabilidade, $1 \leq p < \infty$ e $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $L_p(\mu)$ que converge para zero em medida. Então existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e uma coleção $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ de conjuntos mensuráveis e disjuntos dois a dois tais que $\|f_{n_k} - f_{n_k}\chi_{A_k}\| \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Relembremos que a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergir para zero em medida significa que $\mu\{x \in \Omega : |f_n(x)| \geq \varepsilon\} \longrightarrow 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

- Tome $n_1 = 1$, isto é, $f_{n_1} := f_1$. Considere agora o conjunto

  $$F_1 := \{x \in \Omega : |f_{n_1}(x)|^p > 1/2\}.$$

  Como $f_{n_1} \in L_p(\mu)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\int_E |f_{n_1}|^p d\mu < 1/2$ sempre que $\mu(E) < \delta_1$.

- Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para zero em medida, podemos tomar $n_2 > n_1$ tal que $\mu\{x \in \Omega : |f_{n_2}(x)|^p > 1/2^2\} < \delta_1$. Tomamos então

  $$F_2 := \{x \in \Omega : |f_{n_2}(x)|^p > 1/2^2\}.$$

  E como $f_{n_1},\ f_{n_2} \in L_p(\mu)$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $\int_E |f_{n_i}|^p d\mu < 1/2^2$ para $i = 1, 2$, sempre que $\mu(E) < \delta_2$.

- Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para zero em medida, podemos tomar $n_3 > n_2$ tal que $\mu\{x \in \Omega : |f_{n_3}(x)|^p > 1/2^3\} < \delta_2$. Tomamos então

  $$F_3 := \{x \in \Omega : |f_{n_3}(x)|^p > 1/2^3\}.$$

  E como $f_{n_1},\ f_{n_2},\ f_{n_3} \in L_p(\mu)$, existe $\delta_3 > 0$ tal que $\int_E |f_{n_i}|^p d\mu < 1/2^3$ para $i = 1, 2, 3$, sempre que $\mu(E) < \delta_3$.

Está claro que o processo continua indefinidamente e, procedendo por indução, obtemos uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e uma coleção de conjuntos mensuráveis $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ tais que

$$\|f_{n_k} - f_{n_k}\chi_{F_k}\| = \left(\int_{\Omega \setminus F_k} |f_{n_k}|^p d\mu\right)^{1/p} < \left(\int_{\Omega \setminus F_k} 1/2^k d\mu\right)^{1/p}$$

$$= \left((1/2^k)\mu(\Omega \setminus F_k)\right)^{1/p} \leq (1/2^k)^{1/p} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Definimos

$$A_1 := F_1 \setminus \bigcup_{k>1} F_k, \; A_2 := F_2 \setminus \bigcup_{k>2} F_k, \ldots, \; A_j := F_j \setminus \bigcup_{k>j} F_k, \; \ldots$$

Então a coleção $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ é formada por conjuntos mensuráveis e disjuntos dois a dois. Para cada $k \in \mathbb{N}$ (fixo) consideremos a medida em (Ω, Σ) dada por $\lambda(A) := \int_A |f_{n_k}|^p d\mu$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|f_{n_k}\chi_{F_k} - f_{n_k}\chi_{A_k}\|^p &= \int_\Omega |f_{n_k}\chi_{F_k} - f_{n_k}\chi_{A_k}|^p d\mu = \int_\Omega |f_{n_k}\left(\chi_{F_k} - \chi_{A_k}\right)|^p \, d\mu \\
&= \int_\Omega \left| f_{n_k}\left(\chi_{F_k} - \chi_{(F_k \setminus \bigcup_{j>k} F_j)}\right)\right|^p d\mu = \int_\Omega \left| f_{n_k}\chi_{(F_k \cap (\bigcup_{j>k} F_j))}\right|^p d\mu \\
&= \lambda\left(F_k \cap \left(\bigcup_{j>k} F_j\right)\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{j>k} F_j\right) \leq \sum_{j>k} \lambda(F_j) \\
&= \sum_{j>k} \int_{F_j} |f_{n_k}|^p d\mu \overset{(\star)}{\leq} \sum_{j>k} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{k-1}} \;,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade $(\star)$ segue pela forma como a coleção $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ foi construída. De fato, fixado $k \in \mathbb{N}$, para todo $j > k$ o processo de indução nos garante que $\mu(F_j) < \delta_{j-1}$ e portanto $\int_{F_j} |f_{n_k}|^p d\mu \leq \frac{1}{2^{j-1}}$.

Com isso, concluímos que $\|f_{n_k}\chi_{F_k} - f_{n_k}\chi_{A_k}\| \leq \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{1/p}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Utilizando desigualdade triangular obtemos

$$\|f_{n_k} - f_{n_k}\chi_{A_k}\| \leq \|f_{n_k} - f_{n_k}\chi_{F_k}\| + \|f_{n_k}\chi_{F_k} - f_{n_k}\chi_{A_k}\| \leq \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^{1/p}.$$

Portanto $\|f_{n_k} - f_{n_k}\chi_{A_k}\| \longrightarrow 0$. □

Teorema 3.4.7. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e μ uma medida qualquer. O reticulado de Banach $L_p(\mu)$ é n-PPS para todo $n \geq p$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4.5 podemos considerar, sem perda de generalidade, que μ é uma medida de probabilidade.

Sejam $n \geq p$ e $(f_m)_{m=1}^{\infty}$ uma sequência positiva e fracamente nula em $L_p(\mu)$ tal que $P(f_m) \longrightarrow 0$ para todo $P \in \mathcal{P}^r({}^nL_p(\mu))$. Consideremos uma subsequência $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ de $(f_m)_{m=1}^{\infty}$. Como $f_j \xrightarrow{w} 0$ em $L_p(\mu)$, a sequência $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada e podemos supor que $\|f_j\|_p \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como μ é uma medida de probabilidade, a inclusão $L_p(\mu) \hookrightarrow L_1(\mu)$ é contínua de norma 1 (veja [16, Exercício 1.8.22]), e portanto $\|f_j\|_1 \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $f_j \xrightarrow{w} 0$ em $L_1(\mu)$ (veja Proposição 1.1.20). Com isso, $\|f_j\|_1 \longrightarrow 0$ pois $L_1(\mu)$ tem a propriedade de Schur positiva.

Como convergência na norma $\|\cdot\|_1$ implica convergência em medida (veja [12, p. 69]), o Lema 3.4.6 nos garante que existem uma subsequência $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ e uma coleção de conjuntos mensuráveis e disjuntos dois a dois $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ tais que $\|f_{j_k} - f_{j_k}\chi_{A_k}\|_p \longrightarrow 0$. Consideremos

$$w_k := f_{j_k}\chi_{A_k}, \text{ isto é }, w_k(x) = f_{j_k}(x) \text{ se } x \in A_k \text{ e } w_k(x) = 0 \text{ se } x \in \Omega \setminus A_k.$$

Definimos agora o operador

$$A\colon L_p(\mu)^n \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ (g_1, \ldots, g_n) \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x)\right).$$

Vejamos que A está bem definido, é n-linear, positivo e simétrico. Denotemos por p^* o conjugado de p.

• Boa definição: para $g_1, \ldots, g_n \in L_p(\mu)$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\prod_{i=1}^{n} \int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x)\right| &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|g_i(x)(w_k(x))^{p-1}\right| d\mu(x)\right)\\ &\overset{(\star)}{\leq} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \|g_i\chi_{A_k}\|_p \|(w_k)^{p-1}\|_{p^*}\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \|g_i\chi_{A_k}\|_p\right).\end{aligned}$$

Justifiquemos a desigualdade $(\star)$: temos $((w_k)^{p-1})_{k=1}^{\infty} \in B_{L_{p^*}(\mu)}$, pois $(w_k)_{k=1}^{\infty} \in B_{L_p(\mu)}$. Agora basta aplicar a desigualdade de Hölder (veja Teorema 1.5.6) para obter $(\star)$.

Definamos

$$g := |g_1| \vee \cdots \vee |g_n| \in L_p(\mu) \ \text{ e } \ h := \frac{1}{\|g\|_p} g \in B_{L_p(\mu)}.$$

Assim, $|g_i\chi_{A_k}| \leq g\chi_{A_k} = \|g\|_p h\chi_{A_k}$ e consequentemente $\|g_i\chi_{A_k}\|_p \leq \|g\|_p \cdot \|h\chi_{A_k}\|_p$ para todos $k \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, n$. Com isso,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \|g_i\chi_{A_k}\|_p\right) &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \|g\|_p \|h\chi_{A_k}\|_p\right)\\ &= \|g\|_p^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_{A_k} (h(x))^p d\mu\right)^{n/p}\\ &\overset{(\star\star)}{\leq} \|g\|_p^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_{A_k} (h(x))^p d\mu\right) \overset{(\star\star\star)}{\leq} \|g\|_p^n.\end{aligned}$$

A desigualdade $(\star\star)$ se justifica pois $\int_{A_k} (h(x))^p d\mu \leq 1$ para todos $k \in \mathbb{N}$ e $n \geq p$. A desigualdade $(\star\star\star)$ segue do fato dos conjuntos em $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ serem disjuntos dois a dois e $h \in B_{L_p(\mu)}$. Concluímos assim que a série que define o operador A converge absolutamente e portanto A está bem definido.

• n-linearidade. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(g_1 + \lambda u, g_2, \ldots, g_n) \in L_p(\mu)^n$. Então,

$$\begin{aligned}&A(g_1 + \lambda u, g_2, \ldots, g_n)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\left(\int_\Omega (g_1 + \lambda u)(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x)\right) \prod_{i=2}^{n} \left(\int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x)\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\left(\int_\Omega g_1(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) + \int_\Omega \lambda u(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. \prod_{i=2}^{n} \left(\int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \right) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\lambda \int_\Omega u(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \prod_{i=2}^{n} \left(\int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \right) \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \right) \\
&\qquad\qquad + \lambda \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\left(\int_\Omega u(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \prod_{i=2}^{n} \left(\int_\Omega g_i(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu(x) \right) \right) \\
&= T(g_1, \ldots, g_n) + \lambda T(u, g_2, \ldots, g_n).
\end{aligned}
$$

A igualdade $(\star)$ é válida pois as duas séries à direita da igualdade são convergentes. Portanto A é n-linear.

Não é difícil observar que A é simétrico e positivo. Assim, o polinômio n-homogêneo

$$\widehat{A}\colon L_p(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ g \longmapsto \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega g(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu \right)^n$$

associado ao operador n-linear A é positivo.

Observe que $0 \le w_k \le f_{j_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ser positivo, $\widehat{A}$ é monótono no cone positivo (veja Proposição 3.1.13) e com isso $0 \le \widehat{A}(w_k) \le \widehat{A}(f_{j_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Temos por hipótese que $\widehat{A}(f_{j_k}) \longrightarrow 0$, portanto $\widehat{A}(w_k) \longrightarrow 0$. Temos ainda que, para cada $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{A}(w_{k_0}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_\Omega w_{k_0}(x)(w_k(x))^{p-1} d\mu \right)^n = \left(\int_\Omega w_{k_0}(x)(w_{k_0}(x))^{p-1} d\mu(x) \right)^n = \|w_{k_0}\|_p^{pn}.$$

Desse modo $\|w_k\|_p^{pn} = \widehat{A}(w_k) \longrightarrow 0$, e consequentemente $\|w_k\|_p \longrightarrow 0$. Relembrando que

$$\|f_{j_k} - w_k\|_p = \|f_{j_k} - f_{j_k}\chi_{A_k}\|_p \longrightarrow 0,$$

segue que

$$\|f_{j_k}\|_p \le \|f_{j_k} - w_k\|_p + \|w_k\|_p \longrightarrow 0.$$

Por fim, o Lema 2.2.1 nos garante que $\|f_m\|_p \longrightarrow 0$, provando que $L_p(\mu)$ é n-PPS para todo $n \ge p$. $\square$

O corolário a seguir decorre agora do fato de que todo reticulado de Hilbert é isomorfo isometricamente como reticulado a $L_2(\mu)$ para alguma medida μ (veja Teorema 1.4.26).

Corolário 3.4.8. *Todos os reticulados de Hilbert e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, são PPS.*

A demonstração do Teorema 3.4.7 foi profundamente inspirada em [25, Theorem 6.4]. Contudo, além das especificidades advindas da estrutura dada pela ordem, a estratégia que aplicamos difere da demonstração apresentada por Carne, Cole e Gamelin em dois pontos que merecem ser mencionados.

Em [25] os autores demonstram que $L_p(\mu)$ é um Λ-espaço para $2 \leq p < \infty$ e conjecturam a validade do resultado para $1 < p < 2$. A demonstração para $1 < p < 2$ foi dada por Jaramillo e Prieto em [49, Theorem 1], resultado no qual foi demonstrado que todo espaço de Banach super-reflexivo (em particular, todo $L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$) é um Λ-espaço. Na demonstração do Teorema 3.4.7 obtivemos o resultado para todo $1 \leq p < \infty$ sem precisarmos utilizar super-reflexividade. Nosso argumento foi possível devido o fato de todo reticulado $L_1(\mu)$ ter a propriedade de Schur positiva; já em [25] o espaço $L_1(\mu)$ não poderia ser usado, pois, por exemplo, $L_1[0,1]$ não tem a propriedade de Schur (veja [25, Theorem 6.5]).

A segunda diferença é que em [25] é demonstrado primeiramente que ℓ_p é Λ-espaço para todo $1 \leq p < \infty$ (veja [25, Theorem 6.3]), e, em seguida, utilizando o fato de ℓ_2 ser Λ-espaço, os autores garantem que todo espaço de Hilbert, em particular $L_2(\mu)$, é Λ-espaço. Por fim, utilizam esse último fato para demonstrar que $L_p(\mu)$ é Λ-espaço para $2 \leq p < \infty$ (veja [25, Theorem 6.4]). Nossa estratégia para demonstrar o Teorema 3.4.7 nos poupou desses passos intermediários e obtivemos os resultados para reticulados de Hilbert e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, como corolários.

Finalizamos esta seção mostrando que a propriedade de Schur polinomial positiva não é preservada pela formação de produto tensorial projetivo positivo.

Exemplo 3.4.9. Foi demonstrado por Fremlin em [43, Example 4C] que o reticulado de Banach $L_2[0,1]\widehat{\otimes}_{|\pi|}L_2[0,1]$ não é Dedekind completo. Portanto, $L_2[0,1]$ é PPS (veja Corolário 3.4.8) e $L_2[0,1]\widehat{\otimes}_{|\pi|}L_2[0,1]$ não é PPS (veja Proposição 3.3.12).

3.5 A propriedade de Dunford-Pettis fraca

O principal resultado desta seção (veja Teorema 3.5.6) tem duas motivações. A primeira é que ele é o análogo para reticulados de Banach do seguinte resultado em espaços de Banach.

Teorema 3.5.1. [25, Theorem 7.5] *Um espaço de Banach tem a propriedade de Schur se, e somente se, ele é um Λ-espaço e tem a propriedade de Dunford-Pettis.*

A segunda motivação deriva da seguinte questão encontrada em [31, p. 3] e atribuída a Wnuk:

É verdade que todo KB-espaço com a propriedade de Dunford-Pettis fraca tem a propriedade de Schur positiva?

Essa questão nos mostra claramente que Wnuk estava especulando sobre qual propriedade deve ser adicionada à propriedade de Dunford-Pettis fraca para garantir que determinado reticulado de Banach tenha a propriedade de Schur positiva. O principal resultado desta seção mostra que a propriedade de Schur polinomial positiva faz esse serviço.

Iniciamos apresentando um exemplo que mostra que o produto tensorial de sequências polinomialmente nulas pode não ser nem mesmo fracamente nula. Esse exemplo é baseado em [27, Theorem 5.5].

Definição 3.5.2. Seja $w := (w_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais positivos, não-crescente tal que $w_1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$. O conjunto de todas as sequências de escalares $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que

$$\|x\| := \sup_{\sigma} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x_{\sigma(n)}| w_n \right\} < \infty,$$

onde σ percorre todas as permutações de $\mathbb{N}$, é um espaço de Banach chamado de *espaço de sequências de Lorentz* e é denotado por $d(w;1)$.

A teoria básica dos espaços de sequências de Lorentz pode ser encontrada em [58, Seção 4.e].

O espaço de Lorentz $d(w;1)$ é um espaço dual e seu predual é denotado por $d_*(w;1)$. A sequência de vetores canônicos $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base 1-incondicional em $d(w;1)$ [2, p. 1643]) e a sequência de funcionais coeficientes $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é uma base incondicional para $d_*(w;1)$ [45, p. 1202]). Consequentemente, $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é uma base 1-incondicional pela Proposição 1.4.4. Consideramos $d_*(w;1)$ como reticulado de Banach com a ordem dada pela base 1-incondicional e $d(w;1)$ com a ordem dada pela estrutura dual (ambos formados por sequências reais).

Em [27, Theorem 5.4] os autores estabelecem condições sobre a sequência $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ que garantem que formas multilineares contínuas em $d_*(w;1)$ e em $d(w;1)$ são fracamente sequencialmente nulas e que as bases $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ são polinomialmente nulas. A partir de agora consideraremos os espaços $d(w;1)$ e $d_*(w;1)$ com a sequência $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ como na demonstração de [27, Theorem 5.4].

Exemplo 3.5.3. Consideremos as sequências formadas pelos vetores unitários canônicos $(e_j^*)_{j=1}^{\infty} \subset d_*(w;1)$ e $(e_j)_{j=1}^{\infty} \subset d(w;1)$, que sabemos serem polinomialmente nulas. Em particular, $P(e_j) \longrightarrow 0$ e $Q(e_j^*) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}^r({}^n d(w;1))$, $Q \in \mathcal{P}^r({}^n d_*(w;1))$ e $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos que a sequência $(e_j \otimes e_j^*)_{j=1}^\infty \subset d(w;1)\widehat{\otimes}_{|\pi|}d_*(w;1)$ não é fracamente nula. Sabemos que $(d(w;1)\widehat{\otimes}_{|\pi|}d_*(w;1))^*$ é isomorfo isometricamente como reticulado a $\mathcal{L}^r(d(w;1);d(w;1))$ (veja Teorema 3.1.28). Considerando o operador identidade $id_{d(w;1)} \in \mathcal{L}^r(d(w;1);d(w;1))$, temos $(id_{d(w;1)}(e_j))(e_j^*) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Desse modo, existe um funcional $\varphi \in (d(w;1)\widehat{\otimes}_{|\pi|}d_*(w;1))^*$ tal que $1 = \varphi(e_j \otimes e_j^*) \not\longrightarrow 0$.

Os dois resultados a seguir são versões em reticulados de Banach de [35, Proposition 2.34] e [25, Lemma 7.4]. O lema seguinte é inspirado no fato de que o produto tensorial de sequências fracamente nulas pode não ser uma sequência fracamente nula.

Lema 3.5.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_n$ reticulados de Banach tais que pelo menos $n-1$ deles têm a propriedade de Dunford-Pettis fraca. Se $(x_j^i)_{j=1}^\infty$ é uma sequência positiva e fracamente nula em E_i para cada $i = 1, \ldots, n$, então $(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n)_{j=1}^\infty$ é fracamente nula no produto tensorial projetivo positivo $E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_n$.*

Demonstração. A associatividade do produto tensorial projetivo positivo (veja Teorema 3.1.24) nos permite supor que $E_2, \ldots, E_n$ têm a propriedade de Dunford-Pettis fraca. Procederemos por indução sobre n. Para $n = 1$ o resultado é imediato. Suponhamos que a afirmação seja válida para $n-1$, isto é, dadas sequências positivas, fracamente nulas $(x_j^i)_{j=1}^\infty \subset E_i$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$, temos $(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^{n-1})_{j=1}^\infty$ fracamente nula em $E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_{n-1}$.

Provemos a veracidade para n. A associatividade do produto tensorial projetivo positivo e o Teorema 3.1.28 nos garantem que $(E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_{n-1}\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_n)^*$ é canonicamente isomorfo isometricamente como reticulado a $\mathcal{L}^r(E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_{n-1};E_n^*)$. Assim, dado $\varphi \in (E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_{n-1}\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_n)^*$, existe um operador regular $T_\varphi \in \mathcal{L}^r(E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_{n-1};E_n^*)$ tal que

$$\varphi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^{n-1} \otimes x^n) = T_\varphi(x^1 \otimes \cdots \otimes x^{n-1})(x^n)$$

para todos $x^1 \otimes \cdots \otimes x^{n-1} \in E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_{n-1}$ e $x^n \in E_n$.

Pela hipótese de indução sabemos que $(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^{n-1})_{j=1}^\infty$ é fracamente nula em $E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_{n-1}$. Como T_φ é contínuo (veja Teorema 1.4.27), então T é fracamente contínuo (veja Teorema 1.1.20) e segue que $(T_\varphi(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^{n-1}))_{j=1}^\infty$ é uma sequência fracamente nula em E_n^*. Como E_n tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca, segue pelo Teorema 2.3.4 que

$$\varphi(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n) = T_\varphi(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^{n-1})(x_j^n) \longrightarrow 0$$

e portanto $(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n)_{j=1}^\infty$ é fracamente nula em $E_1\widehat{\otimes}_{|\pi|}\cdots\widehat{\otimes}_{|\pi|}E_n$. □

Proposição 3.5.5. *Sejam E um reticulado de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis fraca e $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência positiva e fracamente nula em E. Então $(P(x_j))_{j=1}^\infty$ é uma sequência que converge para zero em $\mathbb{R}$ para todos $P \in \mathcal{P}^r({}^nE)$ e $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}^r(^nE)$, denotamos por $\check{P} \in \mathcal{L}^r(^nE)$ a forma n-linear regular e simétrica associada a P. O Teorema 3.1.25 nos garante que existe um funcional $\varphi \in \left(\widehat{\otimes}^n_{|\pi|}E\right)^*$ tal que

$$\varphi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \check{P}(x_1, \ldots, x_n)$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$. Pelo Lema 3.5.4 temos que a sequência $(\otimes^n x_j)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente nula em $\widehat{\otimes}^n_{|\pi|}E$, portanto

$$P(x_j) = \check{P}(x_j, \ldots, x_j) = \varphi(\otimes^n x_j) \longrightarrow 0.$$

□

Demonstraremos agora o resultado principal desta seção.

Teorema 3.5.6. *Um reticulado de Banach tem a propriedade de Schur positiva se, e somente se, ele tem as propriedades de Dunford-Pettis fraca e de Schur polinomial positiva.*

Demonstração. Suponha que E seja um reticulado de Banach com a propriedade de Schur positiva. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência positiva e fracamente nula em E e $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência fracamente nula em E^*. Então $x_j \longrightarrow 0$ e existe uma constante positiva M tal que $\|\varphi_j\| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|\varphi_j(x_j)\| \leq \|\varphi_j\| \cdot \|x_j\| \leq M\|x_j\| \longrightarrow 0,$$

e o Teorema 2.3.4 nos garante que E tem a propriedade de Dunford-Pettis fraca. Além disso, como $E^* = \mathcal{P}^r(^1E)$ segue imediatamente que E tem a propriedade de Schur polinomial positiva.

Reciprocamente, sejam E um reticulado de Banach PPS com a propriedade de Dunford-Pettis fraca e $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência positiva e fracamente nula em E. Para todo polinômio homogêneo regular P em E, o fato de E ter a propriedade de Dunford-Pettis fraca nos garante, pela Proposição 3.5.5, que $P(x_j) \longrightarrow 0$. Como E é um reticulado de Banach PPS segue que $x_j \longrightarrow 0$. Portanto E tem a propriedade de Schur positiva. □

Combinando o Lema 3.5.4 e o Exemplo 3.5.3 obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.5.7. *O espaço de Lorentz $d(w;1)$ e seu predual $d_*(w;1)$ não possuem a propriedade de Dunford-Pettis fraca.*

Definição 3.5.8. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_n$ espaços vetoriais. O *cone de Segre* de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ é o conjunto $\{x_1 \otimes \cdots \otimes x_n : x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$.

A importância do cone de Segre na teoria moderna de classes de operadores multilineares pode ser atestada nos trabalhos [38, 39].

Sejam $E_1, \ldots, E_n$ reticulados de Banach sem a propriedade de Schur positiva. Então o produto tensorial projetivo positivo $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ não tem a propriedade de Schur positiva, pois contém cópia reticulada de E_i para cada $i = 1, \ldots, n$ (veja Proposição 3.1.27). Com isso, existe uma sequência positiva e fracamente nula em $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ que não converge para zero em norma. Para fins práticos seria útil se pudéssemos garantir que essa sequência está no cone de Segre de $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_n$, isto é, que ela fosse da forma $(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n)_{j=1}^{\infty}$, onde $x_j^i \in E_i$ e $i = 1, \ldots, n$. Vamos mostrar que podemos garantir isso sempre que os reticulados de Banach tiverem a propriedade de Dunford-Pettis fraca.

Proposição 3.5.9. *Sejam $E_1, \ldots, E_n$ reticulados de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis fraca e sem a propriedade de Schur positiva. Então existem sequências positivas $(x_j^i)_{j=1}^{\infty}$ em E_i, $i = 1, \ldots, n$, tais que $(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente nula e não converge para zero em $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_n$.*

Demonstração. Tome sequências positivas, fracamente nulas $(y_j^i)_{j=1}^{\infty}$ em E_i, $i = 1, \ldots, n$, que não convergem para zero em norma. Existem $\delta > 0$ e subsequências $(x_j^i)_{j=1}^{\infty}$ de $(y_j^i)_{j=1}^{\infty}$ tais que $\|x_j^i\| \geq \delta$ para todos $j \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \ldots, n$. Cada $(x_j^i)_{j=1}^{\infty}$ é positiva e fracamente nula em E_i, assim $(x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente nula em $E_1 \widehat{\otimes}_{|\pi|} \cdots \widehat{\otimes}_{|\pi|} E_n$ pelo Lema 3.5.4. Essa sequência não converge para zero em norma, pois

$$\|x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n\|_{|\pi|} = \|x_j^1\| \cdots \|x_j^n\| \geq \delta^n$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ (veja Proposição 3.1.26). □

A associatividade do produto tensorial projetivo positivo teve um papel importante na demonstração do Lema 3.5.4, o qual foi utilizado na demonstração da Proposição 3.5.9. Finalizamos este capítulo utilizando a Proposição 3.5.5 para demonstrar uma versão simétrica da Proposição 3.5.9, ainda que não tenhamos a associatividade no produto tensorial projetivo positivo simétrico.

Proposição 3.5.10. *Seja E um reticulado de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis fraca e sem a propriedade de Schur positiva. Então existe uma sequência positiva $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\otimes^n x_j)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente nula e não converge para zero em $\widehat{\otimes}_{s,|\pi|}^n E$.*

Demonstração. O fato de E não ter a propriedade de Schur positiva nos permite tomar uma sequência positiva e fracamente nula $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E e $\delta > 0$ tal que $\|x_j\| \geq \delta$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, a Proposição 3.5.5 nos garante que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio n-homogêneo regular P em E. Dado $\varphi \in \left(\widehat{\otimes}^n_{s,|\pi|}E\right)^*$, pelo Teorema 3.1.30 existe um polinômio n-homogêneo regular P em E tal que $\varphi(\otimes^n x) = P(x)$ para todo $x \in E$. Portanto, a sequência $(\otimes^n x_j)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente nula em $\widehat{\otimes}^n_{s,|\pi|}E$ e não converge para zero em norma, pois $\| \otimes^n x_j\|_{|\pi|} = \|x_j\|^n \geq \delta^n$ para todo $j \in \mathbb{N}$. $\square$

4 Reticulabilidade em espaços de sequências vetoriais

Neste capítulo apresentamos contribuições relacionadas à reticulabilidade completa em espaços de sequências vetoriais e no produto tensorial projetivo positivo de ℓ_p, $1 < p < \infty$, por um reticulado de Banach E.

4.1 Contextualização

O estudo de *lineabilidade* e *espaçabilidade* consiste na pesquisa por estruturas lineares em ambientes a princípio não lineares. Um dos resultados clássicos dessa linha de pesquisa foi demonstrado por V. Gurariy em 1966: *a família formada pelas funções contínuas definidas no intervalo* $[0,1]$ *que são diferenciáveis em nenhum ponto contém, exceto pela função identicamente nula, um espaço vetorial de dimensão infinita.* O livro [10] é uma ótima referência para o estudo de lineabilidade e espaçabilidade.

Definição 4.1.1. Um subconjunto A de um espaço vetorial topológico de dimensão infinita X é *lineável (espaçável)* se existe um subespaço de dimensão infinita (fechado) Y de X tal que $Y \subset (A \cup \{0\})$.

Recentemente, em 2016, Oikhberg [68] introduziu o termo *reticulabilidade (completa)* inspirado nos conceitos de lineabilidade e espaçabilidade.

Definição 4.1.2. Um subconjunto A de um reticulado de Banach de dimensão infinita E é *(completamente) reticulável* se existe um subreticulado de dimensão infinita (fechado) F de E tal que $F \subset (A \cup \{0\})$.

Apresentaremos a seguir alguns resultados gerais acerca desse conceito, aos quais nos referiremos mais à frente, todos eles demonstrados por Oikhberg em [68, 69].

Proposição 4.1.3. [69, Corollary 1.4] *Se E é um reticulado de Banach de dimensão infinita e $F \subset E$ é a imagem de um operador compacto, então $(E \setminus F) \cup \{0\}$ contém um subreticulado fechado de dimensão infinita.*

Proposição 4.1.4. [69, Theorem 1.1] *Sejam E um reticulado de Banach ordem-contínuo e F um subspaço fechado de E com codimensão infinita. Então E contém um subreticulado fechado G de dimensão infinita tal que $G \cap F = \{0\}$.*

Proposição 4.1.5. [68, Proposition 2.4] *Seja I um ideal fechado em um reticulado de Banach E, com dim$(E/I) = \infty$. Então $E \setminus I$ é completamente reticulável.*

Proposição 4.1.6. [68, Proposition 2.9] *Sejam E um reticulado de Banach cuja ordem é dada por uma base 1-incondicional e F um subespaço de E com codimensão infinita. Então $(E \setminus F) \cup \{0\}$ contém um ideal fechado de dimensão infinita.*

Outros resultados sobre reticulabilidade (completa) podem ser encontrados em [68, 69].

Neste capítulo trabalharemos com os conceitos de espaçabilidade e reticulabilidade completa. Na seção a seguir, apresentaremos um resultado de espaçabilidade (reticulabilidade completa) no espaço de sequências definidas num espaço (reticulado) de Banach sem a propriedade polinomial (polinomial positiva) de Schur (e sem a propriedade de Schur positiva) (veja Teorema 4.2.2). Veremos ainda alguns exemplos relacionados a esse resultado (veja Exemplos 4.2.4 e 4.2.6).

Na seção posterior estudaremos o reticulado de Banach $\lambda_\pi(E)$ e seu subespaço $\lambda_s(E)$, ambos introduzidos por Bu e Buskes em [18] e desenvolvidos em [14, 17, 20, 22, 23]. Provaremos que o conjunto $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$ é vazio ou completamente reticulável para quaisquer reticulados invariantes de sequências λ e reticulados de Banach E (veja Teorema 4.3.18). Veremos ainda, como corolários, os casos particulares nos quais $\lambda = \ell_p$ e $\lambda = \ell_\varphi$, onde φ é uma sequência de Orlicz (veja Corolários 4.3.19 e 4.3.20). Finalizaremos mostrando, como consequência, que $(\ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E) \setminus (\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E)$ é completamente reticulável para todo reticulado de Banach E não isomorfo a um AL-espaço e todo $1 < p < \infty$ (veja Corolário 4.3.22).

Observação 4.1.7. Dado um espaço de Riesz E, o espaço vetorial formado por todas as sequências cujas coordenadas são elementos de E, denotado por $E^{\mathbb{N}}$, é um espaço de Riesz. A ordem em $E^{\mathbb{N}}$ é dada coordenada a coordenada, isto é

$$x = (x_j)_{j=1}^\infty \geq 0 \Leftrightarrow x_j \geq 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Assim, para todas $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ e $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ em $E^{\mathbb{N}}$,

$$x \wedge y = (x_j)_{j=1}^\infty \wedge (y_j)_{j=1}^\infty = (x_j \wedge y_j)_{j=1}^\infty \ , \ x \vee y = (x_j)_{j=1}^\infty \vee (y_j)_{j=1}^\infty = (x_j \vee y_j)_{j=1}^\infty \ \text{ e}$$

$$|x| = |(x_j)_{j=1}^\infty| = (|x_j|)_{j=1}^\infty.$$

4.2 Conjunto das sequências fracamente nulas e polinomialmente nulas não convergentes para zero em norma

Em 2017, Jiménez-Rodríguez [51] demonstrou que o conjunto das sequências fracamente nulas que não convergem para zero em norma definidas em um espaço de Banach X sem a propriedade de Schur é espaçável no espaço de Banach $\ell_\infty(X)$. Utilizaremos argumentos presentes em [51, Theorem 2.1] para garantir resultados semelhantes de espaçabilidade e reticulabilidade completa, demonstrando assim o teorema principal desta seção (veja Teorema 4.2.2).

Relembramos que, dado um espaço de Banach X, utilizamos as notações $\ell_\infty(X)$ e $c_0(X)$ para representar os espaços de Banach $(X \oplus X \oplus X \oplus \cdots)_\infty$ e $(X \oplus X \oplus X \oplus \cdots)_0$, respectivamente (veja Definição 1.4.16). Lembramos ainda que, $\ell_\infty(E)$ e $c_0(E)$ são reticulados de Banach sempre que E for reticulado de Banach (veja Proposição 1.4.17).

Proposição 4.2.1. [34, p. 33] *Para todo espaço de Banach X,*

$$c_0^w(X) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}} : x_j \xrightarrow{w} 0\}$$

é um subespaço vetorial fechado de $\ell_\infty(X)$.

Vejamos agora o principal resultado desta seção.

Teorema 4.2.2. *Sejam X um espaço de Banach e E um reticulado de Banach.*

(a) Se X não é um Λ-espaço, então o conjunto formado pelas sequências polinomialmente nulas que não são nulas em norma, definidas em X, é espaçável em $c_0^w(X)$.

(b) Se E não tem a propriedade de Schur positiva, então o conjunto formado pelas sequências disjuntas, fracamente nulas e que não são nulas em norma, definidas em E, é completamente reticulável em $\ell_\infty(E)$.

(c) Se E não é positivamente polinomialmente de Schur, então o conjunto formado pelas sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E que são disjuntas, não convergentes para zero em norma e tais que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo regular em E é completamente reticulável em $\ell_\infty(E)$.

Demonstração. Iniciamos com a construção apresentada por Jiménez-Rodríguez [51], a qual será utilizada na demonstração dos três itens.

Sejam Z um espaço de Banach, $\varepsilon > 0$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \subset B_Z$ tais que $\|x_j\| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Consideremos o conjunto dos números primos $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$ ordenados de forma crescente, a função sobrejetiva

$$F \colon \mathbb{N} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{N}; \quad q \longmapsto k, \quad \text{onde } p_k = \min\{p : p \text{ é primo e } p|q\},$$

e o operador

$$T \colon \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty(Z)\ ,\ (a_n)_{n=1}^\infty \longmapsto (a_{F(j+1)} x_j)_{j=1}^\infty,$$

isto é, $T((a_n)_{n=1}^\infty)_j = a_{F(j+1)} x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Os argumentos da demonstração de [51, Theorem 2.1] nos garantem que T é um operador bem definido, linear, um isomorfismo entre os espaços de Banach ℓ_∞ e $T(\ell_\infty) \subset \ell_\infty(Z)$ e que os elementos de $T(\ell_\infty)$ são sequências que não convergem para zero em norma.

A imagem de T é o espaço (reticulado) de Banach que estamos procurando em cada um dos itens (a), (b) e (c), conforme veremos agora.

(a) Por hipótese, X é um espaço de Banach que não é um Λ-espaço, logo existem uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \subset B_X$ e $\varepsilon > 0$ tais que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}(^m X)$ e $m \in \mathbb{N}$, e $\|x_j\| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. A partir da construção geral acima com $Z = X$, só precisamos mostrar que os elementos de $T(\ell_\infty)$ são sequências polinomialmente nulas. Isso é verdade, pois, dados uma sequência qualquer $(a_{F(j+1)}x_j)_{j=1}^\infty \in T(\ell_\infty)$ com $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, $m \in \mathbb{N}$ e $P \in \mathcal{P}(^m X)$, o fato de $\{a_{F(j+1)} : j \in \mathbb{N}\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ser um conjunto limitado nos garante que

$$|P(a_{F(j+1)}x_j)| = |a_{F(j+1)}|^m \cdot |P(x_j)| \longrightarrow 0.$$

Em particular, a imagem de T está contida em $c_0^w(E)$.

(b) Por hipótese, E é um reticulado de Banach sem a propriedade de Schur positiva, logo existem uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \subset B_E$ disjunta e positiva e $\varepsilon > 0$ tais que $x_j \xrightarrow{w} 0$ e $\|x_j\| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (veja Proposição 2.1.6). Da demonstração de [51, Theorem 2.1], sabemos que os elementos de $T(\ell_\infty)$ são sequências fracamente nulas. Como esses elementos são da forma $(a_{F(j+1)}x_j)_{j=1}^\infty$, para alguma $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$, e a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ é disjunta, então segue da Proposição 1.2.5 que cada elemento de $T(\ell_\infty)$ é uma sequência disjunta.

Para finalizar, basta mostrarmos que T é um homomorfismo de Riesz. Dados $(a_n)_{n=1}^\infty$ e $(b_n)_{n=1}^\infty$ em ℓ_∞ temos $(a_n)_{n=1}^\infty \wedge (b_n)_{n=1}^\infty = (a_n \wedge b_n)_{n=1}^\infty$. O fato de $(x_j)_{j=1}^\infty$ ser positiva nos garante que

$$(a_{F(j+1)} \wedge b_{F(j+1)})x_j = (a_{F(j+1)}x_j) \wedge (b_{F(j+1)}x_j)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Daí,

$$T((a_n)_{n=1}^\infty \wedge (b_n)_{n=1}^\infty)) = T((a_n)_{n=1}^\infty)) \wedge T((b_n)_{n=1}^\infty)),$$

concluindo assim que T é um homomorfismo de Riesz e que sua imagem em $\ell_\infty(E)$ é um subreticulado fechado e isomorfo como reticulado a ℓ_∞.

(c) Por hipótese, E é um reticulado de Banach que não é positivamente polinomialmente de Schur, logo existem uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \subset B_E$ disjunta e positiva e $\varepsilon > 0$ tais que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo regular em E e $\|x_j\| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ (veja Teorema 3.3.7)). Assim como fizemos em (b), o fato de $(x_j)_{j=1}^\infty$ ser positiva nos garante que T é um homomorfismo de Riesz, portanto $T(\ell_\infty)$ é um subreticulado de Banach de $\ell_\infty(E)$. O fato de $(x_j)_{j=1}^\infty$ ser disjunta nos fornece que cada um dos elementos de $T(\ell_\infty)$ é uma sequência disjunta. Como $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo regular P em E e $\{a_{F(j+1)} : j \in \mathbb{N}\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, então $|P(a_{F(j+1)}x_j)| \longrightarrow 0$, assim como no item (a). $\square$

Observação 4.2.3. Note que se $(x_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência em E tal que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nE)$ e $n \in \mathbb{N}$, então ela é fracamente nula. Contudo, o item (b) do Teorema 4.2.2 não segue do item (c), pois existem reticulados de Banach positivamente polinomialmente de Schur que não possuem a propriedade de Schur positiva; por exemplo ℓ_p para $1 < p < \infty$ (veja Corolário 3.4.8 e Teoremas 1.4.15 e 2.2.11).

Dada a importância dos ideais na teoria dos reticulados de Banach, é natural questionar se os subreticulados $T(\ell_\infty)$ obtidos nas demonstrações dos itens (b) e (c) do Teorema 4.2.2 são ideais de $\ell_\infty(E)$. Veremos com um exemplo simples, utilizando $E = c_0$, que a resposta para tal questionamento é negativa.

Relembramos que um elemento $e > 0$ em um reticulado de Banach E é *discreto* (ou, *um átomo*) se o ideal gerado por e coincide com o subespaço vetorial gerado por e $\{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Exemplos de elementos discretos são os vetores canônicos em ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, e c_0 (veja [63, p. 113]).

Exemplo 4.2.4. Consideremos a mesma notação do Teorema 4.2.2 com E sendo o reticulado de Banach c_0 e a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ sendo formada pelos vetores canônicos, isto é, $(x_j)_{j=1}^\infty = (e_j)_{j=1}^\infty \subset c_0$. Sabemos que $(e_j)_{j=1}^\infty$ é disjunta, positiva, fracamente nula, não converge para zero em norma em c_0 e é formada por elementos discretos. A Proposição 3.3.4 nos garante que $P(e_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo contínuo P em c_0 e, em particular, para todos $P \in \mathcal{P}^r(^nc_0)$ e $n \in \mathbb{N}$. Consideremos o operador

$$T\colon \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty(c_0)\ ,\ (a_n)_{n=1}^\infty \longmapsto (a_{F(j+1)}e_j)_{j=1}^\infty,$$

o vetor positivo $(e_1, 0, 0, \ldots) \in \ell_\infty(c_0)$ e a sequência $e_1 \in \ell_\infty$. Por um lado,

$$0 \leq (e_1, 0, 0, \ldots) \leq (e_1, 0, e_3, 0, e_5, 0, \ldots) = T(e_1)$$

em $\ell_\infty(c_0)$. Por outro lado, não existe um elemento $(b_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty$ tal que $T((b_n)_{n=1}^\infty) = (e_1, 0, 0, \ldots)$. De fato, se tal $(b_n)_{n=1}^\infty$ existisse teríamos, pela definição de T,

$$(e_1, 0, 0, \ldots) = T((b_n)_{n=1}^\infty) = (b_1e_1, b_2e_2, b_1e_3, \ldots),$$

ou seja, $1 = b_1 = 0$, gerando assim uma contradição. Portanto $T(\ell_\infty)$ não é um ideal em $\ell_\infty(E)$.

Observação 4.2.5. Claramente o subreticulado $T(\ell_\infty)$ criado nos itens (b) e (c) do Teorema 4.2.2 está contido em $c_0^w(E)$, porém não podemos usar $c_0^w(E)$ no lugar de $\ell_\infty(E)$ nesses resultados pois $c_0^w(E)$ nem sempre é um reticulado de Banach. Por exemplo, para $1 \leq p < \infty$, $c_0^w(L_p[0,1])$ não é um espaço de Riesz pois as operações de reticulado em $L_p[0,1]$ não são fracamente sequencialmente contínuas (veja [63, Example, p. 114]). Existem casos onde $c_0^w(E)$ é um reticulado de Banach, por exemplo quando E é um AM-espaço ou quando E é um reticulado de Banach atômico (isto é, E coincide com a faixa gerada por seus elementos discretos) com norma ordem-contínua (veja [5, Theorem 4.31] e [63, Proposition 2.5.23]). Nesses casos $\ell_\infty(E)$ pode ser substituído por $c_0^w(E)$ nos itens (b) e (c) do Teorema 4.2.2.

Castillo, García e Gonzalo mostraram em [27, Theorem 5.5] que a soma de duas sequências polinomialmente nulas, definidas em um espaço de Banach X, pode não ser polinomialmente nula. Isso nos mostra que o conjunto das sequências polinomialmente nulas não tem estrutura de espaço vetorial, tornando assim impossível utilizar esse conjunto no lugar de $c_0^w(X)$ no item (a) do Teorema 4.2.2. Utilizaremos o mesmo contraexemplo dado em [27, Theorem 5.5] para mostrar a seguir que o conjunto das sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ em um reticulado de Banach E tais que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêmeo regular P em E pode não ser fechado para a soma, nos impossibilitando de trocar $\ell_\infty(E)$ por esse conjunto no item (c) do Teorema 4.2.2.

Reveja a Definição 3.5.2 e relembre que sempre consideramos o espaço de Lorentz $d(w;1)$ e seu predual $d_*(w;1)$ com a sequência w como em [27, Theorem 5.4].

Exemplo 4.2.6. Consideremos o reticulado de Banach $d_*(w;1) \times d(w;1)$ com a ordem coordenada a coordenada e fixemos, sem perda de generalidade, a norma da soma $\|\cdot\|_1$.

As sequências $((e_n^*,0))_{n=1}^\infty$ e $((0,e_n))_{n=1}^\infty$ são polinomialmente nulas em $d_*(w;1)\times d(w;1)$ (veja [27, Theorem 5.5]), porém existe polinômio homogêneo regular P em $d_*(w;1)\times d(w;1)$ tal que $P((e_n^*,e_n)) \not\longrightarrow 0$. De fato, considere o operador bilinear simétrico

$$\begin{aligned} A\colon (d_*(w;1) \times d(w;1)) \times (d_*(w;1) \times d(w;1)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x^*,x),(y^*,y)) &\longmapsto 1/2(x(y^*) + (y(x^*)) \end{aligned}$$

(veja [35, Example 1.16]). É fácil ver que A é positivo, pois tomando $((x^*,x),(y^*,y))$ positivo em $(d_*(w;1)\times d(w;1))\times(d_*(w;1)\times d(w;1))$ segue que $x(y^*)$ e $y(x^*)$ são positivos. Desse modo, o polinômio 2-homogêneo $P = \hat{A}$ associado à A é positivo, consequentemente regular, e $P((e_n^*,e_n)) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora é fácil ver que, para todo espaço de Banach X, o conjunto PN das sequências polinomialmente nulas definidas em X é espaçável em $c_0^w(X)$. De fato, se X não é polinomialmente de Schur, o Teorema 4.2.2 mostra que um conjunto menor que PN

é espaçável; se X é polinomialmente de Schur é fácil ver que $PN = c_0(X)$, o subespaço fechado de $c_0^w(X)$ formado pelas sequências nulas em norma.

O Exemplo 4.2.6 levanta a questão da reticulabilidade completa do conjunto PRN de sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em um reticulado de Banach E tais que $P(x_j) \longrightarrow 0$ para todo polinômio homogêneo regular P em E. No item (c) do Teorema 4.2.2 mostramos que um conjunto menor que PRN é completamente reticulável sempre que E não for positivamente polinomialmente de Schur. Finalizamos essa seção demonstrando que um conjunto menor que PRN é completamente reticulável em geral.

Proposição 4.2.7. *Seja E um reticulado de Banach de dimensão infinita. O conjunto formado pelas sequências disjuntas, definidas em E, que convergem para zero em norma é completamente reticulável em $c_0(E)$.*

Demonstração. A Proposição 1.4.6 nos permite tomar uma sequência positiva e disjunta $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tal que $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Não há dificuldade em verificar que o operador

$$T\colon c_0 \longrightarrow c_0(E) \ , \ (a_j)_{j=1}^{\infty} \longmapsto \left(\frac{a_j}{\|x_j\|}x_j\right)_{j=1}^{\infty},$$

é uma imersão isométrica bem definida. Como $x_j \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, o mesmo argumento dado no item (b) do Teorema 4.2.2 nos garante que T é um homomorfismo de Riesz, portanto $T(c_0)$ é um subreticulado de Banach de dimensão infinita de $c_0(E)$. Cada elemento de $T(c_0)$ é um sequência disjunta pela Proposição 1.2.5, concluindo assim a demonstração. □

4.3 O conjunto $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$

Dados um espaço de sequências λ satisfazendo algumas condições e um reticulado de Banach E, o reticulado de Banach $\lambda_\pi(E)$ e seu subespaço $\lambda_s(E)$ foram introduzidos por Bu e Buskes em [18] e têm sido estudados em outros trabalhos, como por exemplo [14, 17, 20, 22, 23]. Nesta seção utilizamos técnicas presentes em [15] para mostrar que $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$ é vazio ou completamente reticulável (veja Teorema 4.3.18). Obteremos também alguns resultados particulares quando λ é igual a ℓ_p ou a um espaço de Orlicz ℓ_φ. Iniciamos apresentando as definições de $\lambda_\pi(E)$ e $\lambda_s(E)$, conforme dadas em [18].

Definição 4.3.1. Um *espaço de sequências* λ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. O *dual de Köthe* de λ é definido por

$$\lambda' := \left\{ (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| < \infty \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda \right\}.$$

Observe que λ' também é um espaço de sequências e, portanto, podemos considerar $\lambda'' := (\lambda')'$. Diz-se que λ é *Köthe perfeito* se $\lambda = \lambda''$.

Ao longo de toda esta seção, a notação λ será usada exclusivamente para representar um espaço de sequências. Quando dissermos que λ *é um reticulado de Banach*, estaremos dizendo, na realidade, que λ é um espaço de sequências munido com uma norma $\|\cdot\|_\lambda$ que o torna um reticulado de Banach, onde a ordem em λ é dada coordenada a coordenada.

Se λ é Köthe perfeito então $c_{00} \subset \lambda$ (veja [54, Remarks, p. 51]). Se λ é um reticulado de Banach ordem-contínuo, então $\lambda' = \lambda^*$ (veja [18, p. 339] ou [59, p. 29]), e portanto λ' também será um reticulado de Banach. Mais ainda, para cada $(a_j)_{j=1}^\infty \in \lambda$ e $(b_j)_{j=1}^\infty \in \lambda'$, temos

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\lambda = \sup_{(b_j)_{j=1}^\infty \in B_{\lambda'}} \left|\sum_{j=1}^\infty a_j b_j\right|$$

e

$$\|(b_j)_{j=1}^\infty\|_{\lambda'} = \|(b_j)_{j=1}^\infty\|_{\lambda^*} = \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\lambda}} \left|\sum_{j=1}^\infty a_j b_j\right|.$$

Proposição 4.3.2. [18, Proposition 4.1] *Se λ é um KB-espaço, então λ é Köthe perfeito.*

Para outros resultados sobre espaços de sequências recomendamos os livros [54, 59].

Observação 4.3.3. Vejamos que se λ é um reticulado de Banach tal que $\|e_j\|_\lambda = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\|e_j\|_{\lambda'} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Provemos primeiramente que se $(a_i)_{i=1}^\infty \subset B_\lambda$, então $|a_j| \leq 1$ para cada $j \in \mathbb{N}$: combinando a desigualdade

$$|a_j e_j| = (0, \dots, 0, |a_j|, 0, \dots) \leq (|a_i|)_{i=1}^\infty = |(a_i)_{i=1}^\infty|,$$

com o fato de λ ser um reticulado de Banach, temos

$$|a_j| = |a_j| \cdot \|e_j\|_\lambda = \|a_j e_j\|_\lambda \leq \|(a_i)_{i=1}^\infty\|_\lambda \leq 1.$$

Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\|e_j\|_{\lambda'} = \sup_{(a_i)_{i=1}^\infty \in B_\lambda} \left|\sum_{i=1}^\infty e_j^i a_i\right| = \sup_{(a_i)_{i=1}^\infty \in B_\lambda} |a_j| \leq 1.$$

Como $(e_i)_{i=1}^\infty \subset B_\lambda$, concluímos que $\|e_j\|_{\lambda'} = 1$.

Estamos interessados em espaços de sequências que satisfazem algumas condições especiais, conforme definiremos agora.

Definição 4.3.4. (a) Dados um espaço vetorial X e uma sequência $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}}$, definimos

$$x^0 := \left(x_j^0\right)_{j=1}^\infty,$$

onde x_j^0 é a j-ésima coordenada não-nula de x se tal termo existir e $x_j^0 = 0$ caso contrário.

(b) Um espaço de sequências λ é um *reticulado invariante de sequências* se ele é um KB-espaço com $\|e_j\|_\lambda = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que λ' goza das seguintes condições:

(i) $x \in \lambda' \Leftrightarrow x^0 \in \lambda'$ e, nesse caso, $\|x\|_{\lambda'} = \|x^0\|_{\lambda'}$.

(ii) se $x \in \lambda'$, então toda subsequência z de x também pertence a λ' e $\|z\|_{\lambda'} \leq \|x\|_{\lambda'}$.

A definição de x^0 aqui apresentada é levemente diferente da definição de x^0 dada em [15, Definition 1.1]. Nossa definição de x^0 coincide com a definição do vetor x' (*closing up* x) apresentada em [24, p. 5].

Veremos a seguir que os espaços de sequências λ mais usados na teoria dos espaços $\lambda_\pi(E)$ são reticulados invariantes de sequências.

Exemplo 4.3.5. (a) Um reticulado de Banach λ é *simétrico* se $x_\sigma := (x_{\sigma(j)})_{j=1}^\infty \in \lambda$ e $\|x\|_\lambda = \|x_\sigma\|_\lambda$ para toda sequência $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \lambda$ e toda permutação σ de $\mathbb{N}$ (veja [24, p. 2]). Em [24, Proposition 2.2] está provado que se λ é um espaço de sequências tal que λ' é um reticulado de Banach simétrico, então λ' satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 4.3.4.

(b) Sejam $1 \leq p < \infty$ e p^* seu conjugado. O reticulado de Banach ℓ_p não contém cópia de c_0 e portanto é um KB-espaço (veja Teorema 1.4.14). Consequentemente ℓ_p é ordem-contínuo (veja Proposição 1.4.13) e portanto temos $\ell_p' = (\ell_p)^* = \ell_{p^*}$. Como ℓ_{p^*} é simétrico e $\|e_j\|_p = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, do item (a) deste exemplo segue que ℓ_p é um reticulado invariante de sequências.

(c) Os reticulados de Banach c_0 e ℓ_∞ não são KB-espaços (veja Teorema 1.4.14), portanto não são reticulados invariantes de sequências.

Para completar nossos exemplos, veremos a seguir espaços de sequências de Orlicz que são reticulados invariantes de sequências. Para detalhes adicionais sobre espaços de sequências de Orlicz, nos referimos a [58].

Definição 4.3.6. Uma *função de Orlicz* é uma função contínua, não decrescente e convexa $\varphi\colon [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ tal que $\varphi(t) = 0$ somente para $t = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. Para cada função de Orlicz φ, o *espaço de sequência de Orlicz* ℓ_φ, definido por

$$\ell_\varphi = \left\{ (a_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sum_{j=1}^\infty \varphi(|\alpha a_j|) < \infty \text{ para algum } \alpha > 0 \right\},$$

é um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_\varphi} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sum_{j=1}^\infty \varphi(|a_j/\alpha|) \leq 1 \right\}.$$

Denota-se por h_φ o subespaço fechado de ℓ_φ formado pelas sequências $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\varphi$ tais que $\sum_{j=1}^\infty \varphi(|\alpha a_j|) < \infty$ para todo $\alpha > 0$.

O fato de uma função de Orlicz φ ser não decrescente com imagem positiva nos permite verificar facilmente, bastando aplicar as definições, que ℓ_φ é um ideal de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ e que a norma $\|\cdot\|_{\ell_\varphi}$ é uma norma de Riesz. Em outras palavras, ℓ_φ é um reticulado de Banach. Muitos resultados referentes aos espaços de sequência de Orlicz podem ser encontrados em [58, Chapter 4]. Apresentaremos alguns que serão importantes em nosso contexto.

Conforme [58, p. 139] e [55, Theorem 1.1], toda função de Orlicz φ pode ser representada na forma

$$\varphi(t) = \int_0^t p(u)du, \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

onde $p(u)$ é uma função contínua pela direita e não decrescente. Em [58, p. 147] vemos que se $p(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ (estas restrições excluem somente os casos em que $\varphi(t)$ é equivalente a t), então a função

$$q(s) := \sup\{t : p(t) \leq s\}, \quad \text{para todo } s \geq 0,$$

é uma função contínua, não decrescente tal que $q(0) = 0$ e $q(s) > 0$ para todo $s > 0$. Assim, a função

$$\varphi^*(s) := \int_0^s q(u)du \text{ para } s \geq 0,$$

é uma função de Orlicz, denominada *função complementar de* φ. Ainda, φ é a função complementar de φ^*, isto é, $\varphi^{**} := (\varphi^*)^* = \varphi$.

Note que, para uma função de Orlicz φ possuir uma função complementar, as condições $p(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$ devem ser satisfeitas.

Definição 4.3.7. Uma função de Orlicz φ satisfaz a Δ_2-*condição no zero* se $\ell_\varphi = h_\varphi$.

Essa definição é, na realidade, uma caracterização da Δ_2-condição no zero, conforme pode ser verificado em [58, Definition 4.a.3 e Proposition 4.a.4].

Agora sim podemos dar exemplos de espaços de sequências de Orlicz que são reticulados invariantes de sequências.

Exemplo 4.3.8. Seja φ uma função de Orlicz que satisfaz a Δ_2-condição no zero, tem função complementar φ^* e tal que $\varphi(1) = 1$. De [54, Corollary 8.28] sabemos que o dual Köthe $(\ell_\varphi)'$ de ℓ_φ é igual a ℓ_{φ^*}, e é fácil observar que ℓ_{φ^*} é simétrico. Do Exemplo 4.3.5 (a) segue que $(\ell_\varphi)'$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 4.3.4. Na demonstração de [58, Theorem 4.a.9] vemos que ℓ_φ é um KB-espaço e como $\|e_j\|_{\ell_\varphi} = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, as condições impostas sobre φ garantem que ℓ_φ é um reticulado invariante de sequências.

Apresentamos a seguir as definições dos reticulados de Banach $\lambda_\pi(E)$ e $\lambda'_\varepsilon(E^*)$ e dos espaços de Banach $\lambda_s(E)$ e $\lambda'_w(E^*)$, que podem ser encontradas em [18].

Definição 4.3.9. Sejam E um reticulado de Banach e λ um KB-espaço tais que $\|e_j\|_\lambda = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. De acordo com [18, p. 339],

$$\lambda'_w(E^*) := \left\{(x_j^*)_{j=1}^\infty \in (E^*)^{\mathbb{N}} : (x_j^*(x))_{j=1}^\infty \in \lambda' \text{ para todo } x \in E\right\}$$

e

$$\lambda_s(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_j)| < \infty, \text{ para toda } (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \lambda'_w(E^*)\right\}$$

são espaços de Banach com a normas

$$\|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_w := \sup_{x\in B_E} \|(x_j^*(x))_{j=1}^\infty\|_{\lambda'} \quad \text{e} \quad \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_s := \sup_{(x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\lambda'_w(E^*)}} \left|\sum_{j=1}^\infty x_j^*(x_j)\right|,$$

respectivamente. Os espaços de Banach $\lambda_s(E)$ e $\lambda'_w(E^*)$ podem não ser reticulados de Banach (veja [18, p. 339] e [23, p. 202]).

De acordo com [18, p. 344],

$$\lambda'_\varepsilon(E^*) := \left\{(x_j^*)_{j=1}^\infty \in (E^*)^{\mathbb{N}} : (|x_j^*|(x))_{j=1}^\infty \in \lambda' \text{ para todo } x \in E^+\right\}$$

e

$$\lambda_\pi(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty x_j^*(|x_j|) < \infty \text{ para toda } (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+\right\}$$

são reticulados de Banach com as normas

$$\|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_\varepsilon := \sup_{x\in B_{E^+}} \|(|x_j^*|(x))_{j=1}^\infty\|_{\lambda'} \quad \text{e} \quad \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\pi := \sup_{(x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\lambda'_\varepsilon(E^*)^+}} \sum_{j=1}^\infty x_j^*(|x_j|),$$

respectivamente.

Os artigos que abordam esses espaços e esses reticulados de Banach formados por sequências vetoriais (veja [17, 18, 20, 22, 23]) geralmente o fazem com $\lambda = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, ou $\lambda = \ell_\varphi$ com φ como no Exemplo 4.3.8. Ou seja, em toda a teoria até aqui desenvolvida sobre esses espaços, λ é um reticulado invariante de sequências.

Observação 4.3.10. Se $\lambda = \ell_p$, $1 < p < \infty$, então a definição de $\lambda_s(E)$ coincide com a definição do espaço de sequências Cohen fortemente p-somáveis em E, usualmente denotado por $\ell_p\langle E\rangle$ (veja [22, p. 520] e [18, p. 339]). De acordo com [22, p. 525], $\ell_p\langle E\rangle$ é isomorfo isometricamente a $\ell_p\widehat{\otimes}_\pi E$.

Quando $\lambda = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, usaremos as notações $\ell_p\langle E\rangle$ e $\ell_p^\pi(E)$ no lugar de $\lambda_s(E)$ e $\lambda_\pi(E)$, respectivamente. Quando $\lambda = \ell_\varphi$, com φ como no Exemplo 4.3.8, usaremos as notações $\ell_\varphi^s(E)$ e $\ell_\varphi^\pi(E)$ em vez de $\lambda_s(E)$ e $\lambda_\pi(E)$, respectivamente.

Proposição 4.3.11. [17, Theorem 15] *Sejam E um reticulado de Banach e $1 < p < \infty$. Então $\ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E$ é isomorfo isometricamente como reticulado a $\ell_p^\pi(E)$.*

Proposição 4.3.12. [18, Proposition 5.2] *Seja E um reticulado de Banach e λ um KB-espaço com $\|e_j\|_\lambda = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então $\lambda_s(E) \subseteq \lambda_\pi(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\pi \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_s$ para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_s(E)$.*

A proposição acima levanta o seguinte questionamento:

o conjunto $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$ é completamente reticulável?

Até onde sabemos não existe um resultado geral que garanta a reticulabilidade de $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$, mesmo nos casos mais canônicos, quando $\lambda = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$. A fim de responder esse questionamento utilizaremos a técnica do "vetor mãe" e argumentos desenvolvidos por Botelho, Diniz, Fávaro e Pellegrino em [15].

Antes de apresentarmos nossos resultados, mostraremos porque nenhum dos resultados gerais de reticulabidade provados por Oikhberg (veja Seção 4.1) pode ser aplicado no caso de $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$. Para isso precisamos de alguns resultados.

Proposição 4.3.13. ([18, Theorem 5.5] e [17, Proposition 5]) *Sejam $1 < p < \infty$ e E um reticulado de Banach. Então $\ell_p^\pi(E)$ é Dedekind (σ-)completo se, e somente se, E é Dedekind (σ-)completo.*

Para a propriedade chamada GL-l.u.st., veja o final da Seção 1.4.

Proposição 4.3.14. [47, Corollary 3.6] *Para $1 < p, q \leq \infty$, $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi \ell_q$ não tem GL-l.u.st.*

Lema 4.3.15. *Para $1 < p, q < \infty$, $\ell_p\langle \ell_q \rangle$ não é um ideal fechado de $\ell_p^\pi(\ell_q)$.*

Demonstração. Suponha que $\ell_p\langle \ell_q \rangle$ seja um ideal fechado de $\ell_p^\pi(\ell_q)$. Neste caso, $(\ell_p\langle \ell_q \rangle, \|\cdot\|_\pi)$ é um reticulado de Banach e o operador identidade $(\ell_p\langle \ell_q \rangle, \|\cdot\|_s) \longrightarrow (\ell_p\langle \ell_q \rangle, \|\cdot\|_\pi)$ é uma bijeção contínua, pois $\|x\|_\pi \leq \|x\|_s$ para todo $x \in \ell_p\langle \ell_q \rangle$. Pelo Teorema da Aplicação Aberta (veja Teorema 1.5.2) segue que essa identidade é um isomorfismo e a Observação 4.3.10 nos garante que $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi \ell_q$ é isomorfo ao reticulado de Banach $(\ell_p\langle \ell_q \rangle, \|\cdot\|_\pi)$. Contudo, a Proposição 4.3.14 nos diz que $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi \ell_q$ não tem GL-l.u.st e portanto, pela Observação 1.4.33, não pode ser isomorfo a um reticulado de Banach, gerando assim uma contradição. Portanto $\ell_p\langle \ell_q \rangle$ não é um ideal fechado de $\ell_p^\pi(\ell_q)$. $\square$

A seguir expomos os motivos pelos quais os critérios gerais de reticulabilidade, apresentados na Seção 4.1, não podem ser aplicados, em geral, no caso do conjunto $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$.

(a) A Proposição 4.1.3 não pode ser aplicada a $\lambda_\pi(E)\setminus\lambda_s(E)$ pois $\lambda_s(E)$ não é, em geral, a imagem de um operador compacto em $\lambda_\pi(E)$. De fato, se $\lambda_s(E)$ fosse imagem de um operador compacto em $\lambda_\pi(E)$, então $\lambda_s(E)$ seria separável por [62, Proposition 3.4.7]), o que sabemos não ser verdade para reticulados de Banach não separáveis E, uma vez que $\lambda_s(E)$ possui cópia de E pela imersão isométrica $x\in E\longmapsto(x,0,0,\ldots)\in\lambda_s(E)$.

(b) A Proposição 4.1.6 não pode ser utilizada pois a ordem em $\lambda_\pi(E)$ não é, em geral, dada por uma base 1-incondicional. De fato, como $\lambda_\pi(E)$ possui cópia de E, pela imersão isométrica $x\in E\longmapsto(x,0,0,\ldots)\in\lambda_\pi(E)$, para E não separável $\lambda_\pi(E)$ também será não separável e, consequentemente, não possuirá base de Schauder.

(c) A Proposição 4.1.4 não pode ser aplicada a $\lambda_\pi(E)$ pois $\lambda_\pi(E)$ não é, em geral, ordem-contínuo. De fato, tomando $E=\ell_\infty$, o qual é Dedekind σ-completo (veja Exemplo 1.2.9) e $\lambda=\ell_p$, $1<p<\infty$, então $\ell_p^\pi(\ell_\infty)$ também é Dedekind σ-completo (veja Proposição 4.3.13). Como $\ell_p^\pi(\ell_\infty)$ contém cópia de ℓ_∞, segue do Teorema 1.4.11 que $\ell_p^\pi(\ell_\infty)$ não é ordem-contínuo.

(d) Por fim, a Proposição 4.1.5 também não pode ser aplicada pois, pelo Lema 4.3.15, $\lambda_s(E)$ não é um ideal fechado de $\lambda_\pi(E)$ em geral.

Uma vez que os critérios gerais conhecidos não são aplicáveis, é necessário um argumento *ad hoc* para mostrar a reticulabilidade completa de $\lambda_\pi(E)\setminus\lambda_s(E)$. Nossa técnica é baseada nos argumentos utilizados em [15].

Utilizaremos a notação $x=\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_j\cdot e_j$ para representar a sequência cuja j-ésima coordenada é igual a x_j.

Lema 4.3.16. Sejam λ um KB-espaço tal que $\|e_j\|_\lambda=1$ para todo $j\in\mathbb{N}$, E um reticulado de Banach e $(y_j)_{j=1}^\infty\in\lambda_\pi(E)$. Então $\|y_i\|_E\le\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\pi$ para todo $i\in\mathbb{N}$. Em particular, $\lambda_\pi(E)\subset\ell_\infty(E)$ e $\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty\le\|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\pi$, para todo $(y_j)_{j=1}^\infty\in\lambda_\pi(E)$.

Demonstração. Sejam $0\neq(y_j)_{j=1}^\infty\in\lambda_\pi(E)$ e $i\in\mathbb{N}$ tais que $y_i\neq0$. O Teorema de Hahn-Banach (veja Teorema 1.5.1) garante a existência de $y^*\in E^*$ tal que $\|y^*\|_{E^*}=1$ e $y^*(|y_i|)=\||y_i|\|_E=\|y_i\|_E$. A sequência $(\psi_j)_{j=1}^\infty=|y^*|\cdot e_i$ pertence a $B_{\lambda'_\varepsilon(E^*)^+}$ pois

$$\begin{aligned}\|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_\varepsilon&=\sup\left\{\|(|\psi_j|(x))_{j=1}^\infty\|_{\lambda'}:x\in B_{E^+}\right\}=\sup\left\{\|(|y^*|(x))e_i\|_{\lambda'}:x\in B_{E^+}\right\}\\&=\sup\left\{(|y^*|(x))\|e_i\|_{\lambda'}:x\in B_{E^+}\right\}\le\sup\left\{||y^*|(x)|:\ x\in B_E\right\}\\&=\||y^*|\|_{E^*}=\|y^*\|_{E^*}=1.\end{aligned}$$

Assim, para cada $i\in\mathbb{N}$,

$$\|y_i\|_E=y^*(|y_i|)=|y^*(|y_i|)|\overset{(\star)}{\le}|y^*|(|y_i|)=\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(|y_j|)$$

$$\leq \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} y_j^*(|y_j|) : (y_j^*)_{j=1}^{\infty} \in B_{\lambda'_\varepsilon(E^*)^+}\right\} = \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_\pi,$$

onde $(\star)$ segue da Proposição 1.2.13. Em particular, $\lambda_\pi(E) \subset \ell_\infty(E)$ e $\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty \leq \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_\pi$, para todo $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda_\pi(E)$. □

Lema 4.3.17. *Sejam λ um reticulado invariante de sequências e E um reticulado de Banach. Então:*

(a) $\lambda'_\varepsilon(E^*)$ e $\lambda'_w(E^*)$ satisfazem as condições (i) e (ii) da Definição 4.3.4(b).

(b) $\lambda_\pi(E)$ e $\lambda_s(E)$ satisfazem a condição (i) da Definição 4.3.4(b).

Demonstração. (a) Seja $x^* = (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in (E^*)^{\mathbb{N}}$. Observe que,

$$\begin{aligned} x^* \in \lambda'_\varepsilon(E^*) &\overset{(\star)}{\Longleftrightarrow} \left(|x_j^*|(x)\right)_{j=1}^{\infty} \in \lambda' \text{ para todo } x \in E^+ \\ &\overset{(\star\star)}{\Longleftrightarrow} \left(\left(|x_j^*|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right)^0 \in \lambda' \text{ para todo } x \in E^+ \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\|x^*\|_\varepsilon \overset{(\star)}{=} \sup\left\{\left\|\left(|x_j^*|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\lambda'} : x \in B_{E^+}\right\} \overset{(\star\star)}{=} \sup\left\{\left\|\left(\left(|x_j^*|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right)^0\right\|_{\lambda'} : x \in B_{E^+}\right\},$$

onde $(\star)$ segue das definições e $(\star\star)$ segue das hipóteses sobre λ (veja Definição 4.3.4(b)). Observe também que,

$$\begin{aligned} (x^*)^0 \in \lambda'_\varepsilon(E^*) &\overset{(\star)}{\Longleftrightarrow} \left(|(x_j^*)^0|(x)\right)_{j=1}^{\infty} \in \lambda' \text{ para todo } x \in E^+ \\ &\overset{(\star\star)}{\Longleftrightarrow} \left(\left(|(x_j^*)^0|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right)^0 \in \lambda' \text{ para todo } x \in E^+ \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(x^*)^0\|_\varepsilon &\overset{(\star)}{=} \sup\left\{\left\|\left(|(x_j^*)^0|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\lambda'} : x \in B_{E^+}\right\} \\ &\overset{(\star\star)}{=} \sup\left\{\left\|\left(\left(|(x_j^*)^0|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right)^0\right\|_{\lambda'} : x \in B_{E^+}\right\}, \end{aligned}$$

onde, novamente, $(\star)$ segue das definições e $(\star\star)$ segue das hipóteses sobre λ (veja Definição 4.3.4(b)). Uma rápida reflexão convencerá o leitor de que, para todo $x \in E^+$,

$$\left(\left(|x_j^*|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right)^0 = \left(\left(|(x_j^*)^0|(x)\right)_{j=1}^{\infty}\right)^0. \tag{4.1}$$

Isso mostra que

$$x^* \in \lambda'_\varepsilon(E^*) \Longleftrightarrow (x^*)^0 \in \lambda'_\varepsilon(E^*) \text{ e } \|x^*\|_\varepsilon = \|(x^*)^0\|_\varepsilon,$$

provando assim que $\lambda'_\varepsilon(E^*)$ satisfaz a condição (i) da Definição 4.3.4(b). O caso $\lambda'_w(E^*)$ é similar.

Dado $x^* \in \lambda'_\varepsilon(E^*)$, o fato de λ ser um reticulado invariante de sequências nos garante imediatamente que toda subsequência z^* de x^* pertence à $\lambda'_\varepsilon(E^*)$. Além disso, para cada $x \in B_{E^+}$,

$$\|(|z_j^*|(x))_{j=1}^\infty\|_{\lambda'} \leq \|(|x_j^*|(x))_{j=1}^\infty\|_{\lambda'},$$

e portanto segue da definição da norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ que $\|z^*\|_\varepsilon \leq \|x^*\|_\varepsilon$. Isso mostra que $\lambda'_\varepsilon(E^*)$ satisfaz a condição (ii) da Definição 4.3.4(b). Novamente, o caso $\lambda'_w(E^*)$ é similar.

(b) Dada $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_\pi(E)$, por definição temos $\sum\limits_{j=1}^\infty x_j^*(|x_j|) < \infty$ para toda $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$. Denotemos $x^0 = (x_{n_j})_{j=1}^\infty$, isto é, x_{n_j} é a j-ésima coordenada não-nula de x se tal termo existir e zero caso contrário.

Queremos mostrar que $x^0 \in \lambda_\pi(E)$, ou seja, que $\sum\limits_{j=1}^\infty x_j^*(|x_{n_j}|) < \infty$ para toda $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$. Para isso, dada $x^* = (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$, consideremos a sequência $y^* = \sum\limits_{j=1}^\infty x_j^* \cdot e_{n_j}$ e observe que o item (a) nos garante que $y^* \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$, pois $(y^*)^0 = (x^*)^0$ e $x^* \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$. Dessa forma,

$$\sum_{j=1}^\infty x_j^*(|x_{n_j}|) = \sum_{j=1}^\infty y_j^*(|x_j|) < \infty,$$

e portanto $x^0 \in \lambda_\pi(E)$. Mais ainda, se $x^* \in B_{\lambda'_\varepsilon(E^*)^+}$, então $y^* \in B_{\lambda'_\varepsilon(E^*)^+}$ pois

$$\|y^*\|_\varepsilon = \|(y^*)^0\|_\varepsilon = \|(x^*)^0\|_\varepsilon = \|x\|_\varepsilon.$$

Com isso,

$$\|x^0\|_\pi = \sup\left\{\sum_{j=1}^\infty x_j^*(|x_{n_j}|) : x^* \in B_{\lambda_\varepsilon(E)^+}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{j=1}^\infty y_j^*(|x_j|) : y^* \in B_{\lambda_\varepsilon(E)^+}\right\} = \|x\|_\pi.$$

Reciprocamente, seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 = (x_{n_j})_{j=1}^\infty \in \lambda_\pi(E)$. Queremos mostrar que $x \in \lambda_\pi(E)$, isto é, que $\sum\limits_{j=1}^\infty x_j^*(|x_j|) < \infty$ para toda $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$.

Dada $x^* = (x_j^*)_{j=1}^\infty \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$, consideremos a subsequência z^* de x^* dada por $z^* = \sum\limits_{j=1}^\infty x_{n_j}^* \cdot e_j$. Pelo item (a) temos $z^* \in \lambda'_\varepsilon(E^*)^+$, e com isso

$$\sum_{j=1}^\infty x_j^*(|x_j|) = \sum_{j=1}^\infty z_j^*(|x_{n_j}|) < \infty.$$

Portanto $x \in \lambda_\pi(E)$. Mais ainda, se $x^* \in B_{\lambda_\varepsilon(E^*)^+}$, então o item (a) nos garante que a subsequência $z^* \in B_{\lambda_\varepsilon(E^*)^+}$. Com isso,

$$\|x\|_\pi = \sup\left\{\sum_{j=1}^\infty x_j^*(|x_j|) : x^* \in B_{\lambda'_\varepsilon(E^*)^+}\right\} \leq \sup\left\{\sum_{j=1}^\infty z_j^*(|x_{n_j}|) : z^* \in B_{\lambda'_\varepsilon(E^*)^+}\right\} = \|x^0\|_\pi.$$

Garantimos assim que $\lambda_\pi(E)$ satisfaz a condição (i) da Definição 4.3.4(b). O caso $\lambda_s(E)$ é similar. $\square$

Vejamos agora o resultado principal desta seção, cuja demonstração foi inspirada na demonstração de [15, Theorem 1.3].

Teorema 4.3.18. *Sejam E um reticulado de Banach e λ um reticulado invariante de sequências. Então $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$ é vazio ou completamente reticulável.*

Demonstração. Suponhamos $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E) \neq \emptyset$ e tomemos $x \in \lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$. Como $\lambda_s(E)$ é um espaço vetorial e $x = x^+ - x^-$, segue que x^+ ou x^- não pertence a $\lambda_s(E)$. Isso quer dizer que podemos considerar que $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \lambda_\pi(E)^+ \setminus \lambda_s(E)$, isto é, que a sequência x é positiva.

Note que $\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$ é um conjunto infinito, pois caso contrário teríamos $x \in \lambda_s(E)$. Pelo Lema 4.3.17,

$$x \in \lambda_\pi(E) \Leftrightarrow x^0 \in \lambda_\pi(E) \text{ e } x \in \lambda_s(E) \Leftrightarrow x^0 \in \lambda_s(E).$$

Podemos então supor, sem perda de generalidade, que $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Consideremos $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{i=1}^\infty \mathbb{N}_i$ uma partição de $\mathbb{N}$ em um número infinito de subconjuntos disjuntos dois a dois e denotemos $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \cdots\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, considere a sequência $y_i = \sum\limits_{j=1}^\infty x_j \cdot e_{i_j}$ e defina o operador

$$T \colon \ell_1 \longrightarrow \lambda_\pi(E)\ ,\ (a_i)_{i=1}^\infty \longmapsto \sum_{i=1}^\infty a_i y_i.$$

Como $y_i^0 = x$, temos $y_i \in \lambda_\pi(E)^+ \setminus \lambda_s(E)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. E como $\lambda_\pi(E)$ é, em particular, um espaço de Banach, sabemos que $\sum\limits_{i=1}^\infty a_i y_i$ pertence a $\lambda_\pi(E)$ sempre que $\sum\limits_{i=1}^\infty \|a_i y_i\|_\pi < \infty$. Para toda sequência $(a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1$,

$$\sum_{i=1}^\infty \|a_i y_i\|_\pi = \sum_{i=1}^\infty |a_i| \cdot \|y_i\|_\pi = \sum_{i=1}^\infty |a_i| \cdot \|y_i^0\|_\pi = \sum_{i=1}^\infty |a_i| \cdot \|x\|_\pi = \|x\|_\pi \cdot \sum_{i=1}^\infty |a_i| < \infty.$$

Isso prova que T está bem definido. A linearidade de T é facilmente verificada. Vejamos que T é injetivo. De fato, para cada $(a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1$,

$$T\left((a_i)_{i=1}^\infty\right) = \sum_{i=1}^\infty a_i y_i = \sum_{i=1}^\infty a_i \left(\sum_{j=1}^\infty x_j \cdot e_{i_j}\right) = \sum_{i=1}^\infty \left(\sum_{j=1}^\infty a_i x_j \cdot e_{i_j}\right).$$

Como os subconjuntos $\mathbb{N}_i$ são disjuntos dois a dois, cada coordenada de $T\left((a_i)_{i=1}^\infty\right)$ é da forma $a_i x_j$ para alguns $i, j \in \mathbb{N}$. Assim, como $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, segue que $T\left((a_i)_{i=1}^\infty\right) = 0$ se, e somente se, $(a_i)_{i=1}^\infty = 0$.

Vejamos que T é um homomorfismo de Riesz. De fato, como $y_i \perp y_k$ para todos $i \neq k$ em $\mathbb{N}$, para toda $(a_i)_{i=1}^\infty \in \ell_1$, temos

$$T\left(|(a_i)_{i=1}^\infty|\right) = T\left((|a_i|)_{i=1}^\infty\right) = \sum_{i=1}^\infty |a_i| y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |a_i| y_i \overset{(\star)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n |a_i y_i|$$

$$\overset{(\star\star)}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right| \overset{(\star\star\star)}{=} \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right| = \left|T\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right)\right|,$$

onde a iguadade $(\star)$ segue do fato de $y_i \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, a igualdade $(\star\star)$ advém da Proposição 1.2.5 e a igualdade $(\star\star\star)$ deriva do fato da aplicação valor absoluto $|\cdot|\colon E \to E$ ser contínua (veja Teorema 1.3.2). Segue do Teorema 1.2.14 que T é um homomorfismo de Riesz.

Concluímos assim que $\overline{T(\ell_1)}$ é um subreticulado de dimensão infinita e fechado de $\lambda_\pi(E)$ (veja Proposição 1.4.7). Só nos resta mostrar que $\overline{T(\ell_1)} \cap \lambda_s(E) = \{0\}$.

Dado $0 \neq z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_1)}$, existem sequências $(a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty} \in \ell_1$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $\lim\limits_{k\to\infty} T\left((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty}\right) = z$ em $\lambda_\pi(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$T\left((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} y_i = \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i^{(k)}\sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot e_{i_j}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_j \cdot e_{i_j}\right). \tag{4.2}$$

Seja $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Existem então únicos $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$. Consideremos o subconjunto $\mathbb{N}_m = \{m_1 < m_2 < \cdots\}$. Por (4.2), para cada $j, k \in \mathbb{N}$ a m_j-ésima coordenada de $T\left((a_i^{(k)})_{i=1}^{\infty}\right)$ é igual a $a_m^{(k)} x_j$. Do Lema 4.3.16 segue que convergência em $\lambda_\pi(E)$ implica em convergência coordenada a coordenada, e portanto

$$z_{m_j} = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_j = \left(\lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}\right) x_j$$

para cada $j \in \mathbb{N}$. Escrevendo $a_m = \lim\limits_{k\to\infty} a_m^{(k)}$ temos $z_{m_j} = a_m x_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Observe que $a_m \neq 0$ pois $a_m x_t = z_{m_t} = z_r \neq 0$.

Como $x \notin \lambda_s(E)$, existe $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \lambda_w'(E^*)$ tal que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \infty$. Definimos $\psi = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \varphi_j \cdot e_{m_j}$ e notamos que, pelo item (a) do Lema 4.3.17, $\psi \in \lambda_w'(E^*)$ pois $\psi^0 = (\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$. Como

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_j(z_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} |\psi_{m_j}(z_{m_j})| = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(a_m x_j)| = |a_m| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \infty,$$

uma vez que $a_m \neq 0$, concluímos então que $z \notin \lambda_s(E)$. Portanto $\lambda_\pi(E) \setminus \lambda_s(E)$ é completamente reticulável. □

O argumento apresentado na demonstração do Teorema 4.3.18 não é forte o suficiente para garantir que $\overline{T(\ell_1)}$ é um ideal de $\lambda_\pi(E)$. De fato, seguindo a mesma notação do teorema, basta tomarmos $w = x_1 \cdot e_{1_1}$ (isto é, e_{i_j} com $i = j = 1$), onde x_1 é a primeira coordenada do vetor-mãe $x \in \lambda_\pi(E)^+ \setminus \lambda_s(E)$. Como

$$T(e_1) = y_1 = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \cdot e_{1_j},$$

onde $e_1 \in \ell_1$, então é imediato que $0 \leq w \leq T(e_1)$. Contudo, $0 \neq w \in \lambda_s(E)$ e portanto $w \notin \overline{T(\ell_1)}$.

Considerando $\lambda = \ell_\varphi$, com a função de Orlicz φ como no Exemplo 4.3.8, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.3.19. *Sejam E um reticulado de Banach e φ uma função Orlicz que satisfaz a Δ_2-condição no zero, possui função complementar φ^* e $\varphi(1) = 1$. Então $\ell_\varphi^\pi(E) \setminus \ell_\varphi^s(E)$ é vazio ou completamente reticulável.*

Para $\lambda = \ell_p$, $1 < p < \infty$, é possível ir um pouco mais adiante.

Corolário 4.3.20. *Sejam E um reticulado de Banach que não é isomorfo a um AL-espaço e $1 < p < \infty$. Então $\ell_p^\pi(E) \setminus \ell_p\langle E\rangle$ é completamente reticulável.*

Demonstração. Para verificar que $\ell_p^\pi(E) \setminus \ell_p\langle E\rangle$ é completamente reticulável, pelo Teorema 4.3.18, basta provarmos que $\ell_p^\pi(E) \setminus \ell_p\langle E\rangle \neq \emptyset$. Pela Proposição 4.3.12 sabemos que a inclusão $i\colon \ell_p\langle E\rangle \hookrightarrow \ell_p^\pi(E)$ é um operador linear contínuo entre espaços de Banach.

Suponha que $\ell_p\langle E\rangle = \ell_p^\pi(E)$. Então a inclusão $i\colon \ell_p\langle E\rangle \hookrightarrow \ell_p^\pi(E)$ é sobrejetora e consequentemente é um isomorfismo pelo Teorema da Aplicação Aberta (veja Teorema 1.5.2). Com isso, $\ell_p\langle E\rangle$ e $\ell_p^\pi(E)$ são espaços de Banach isomorfos e temos a seguinte cadeia de isomorfismos:

$$\ell_p\widehat{\otimes}_\pi E \xrightarrow{S} \ell_p\langle E\rangle \xrightarrow{i} \ell_p^\pi(E) \xrightarrow{T} \ell_p\widehat{\otimes}_{|\pi|}E,$$

onde S é o isomorfismo isométrico cuja existência vimos na Observação 4.3.10 e T é o isomorfismo isométrico de reticulados cuja existência vimos na Proposição 4.3.11. Segue que $\ell_p\widehat{\otimes}_\pi E$ e $\ell_p\widehat{\otimes}_{|\pi|}E$ são isomorfos. Pela Proposição 3.1.23, concluímos que ℓ_p ou E é isomorfo a um AL-espaço, gerando assim uma contradição. Portanto $\ell_p^\pi(E) \setminus \ell_p\langle E\rangle \neq \emptyset$ e, consequentemente, $\ell_p^\pi(E) \setminus \ell_p\langle E\rangle$ é completamente reticulável. $\square$

Finalizamos este capítulo com um resultado relacionado aos produtos tensoriais. Vamos esclarecer primeiramente como $\ell_p\widehat{\otimes}_\pi E$ pode ser identificado com um subespaço vetorial de $\ell_p\widehat{\otimes}_{|\pi|}E$. Seguiremos as mesmas notações usadas na demonstração do Corolário 4.3.20. O operador

$$A\colon \ell_p \times E \longrightarrow \ell_p\widehat{\otimes}_{|\pi|}E\ ,\ A(t, y) = t \otimes y,$$

é bilinear e contínuo. Assim, sua linearização

$$A_L\colon \ell_p\widehat{\otimes}_\pi E \longrightarrow \ell_p\widehat{\otimes}_{|\pi|}E,$$

é um operador linear e contínuo tal que $A_L(t \otimes y) = t \otimes y$ para todos $t \in \ell_p$ e $y \in E$.

Para todos os $x \in E$ e $t = (t_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, tanto o isomorfismo isométrico $S\colon \ell_p \widehat{\otimes}_\pi E \longrightarrow \ell_p\langle E \rangle$ quanto o isomorfismo isométrico de reticulados $T^{-1}\colon \ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E \longrightarrow \ell_p^\pi(E)$ aplicam o tensor $(t_j)_{j=1}^{\infty} \otimes x$ na sequência $(t_j \otimes x)_{j=1}^{\infty}$ (veja [17, 22]).

Assim, A_L e $T \circ i \circ S$ coincidem nos tensores elementares $t \otimes x$. A unicidade da linearização de um operador bilinear contínuo nos garante que $A_L = T \circ i \circ S$, de onde segue que A_L é injetivo. Portanto, podemos identificar $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E$ com o subespaço vetorial $A_L(\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E)$ de $\ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E$.

Lema 4.3.21. *Sejam $u\colon E \longrightarrow F$ um isomorfismo de reticulados entre os reticulados de Banach E e F, X um subconjunto de E e Y um subconjunto de F tais que $Y \subseteq u(X)$. Se $E \setminus X$ é completamente reticulável, então $F \setminus Y$ também é completamente reticulável.*

Demonstração. Seja Z um subreticulado de dimensão infinita e fechado de E tal que $Z \cap X \subseteq \{0\}$. Então $u(Z)$ é um subreticulado de dimensão infinita e fechado de F. É suficiente mostrar que $u(Z) \cap Y \subseteq \{0\}$. Como u é injetivo,

$$u(Z) \cap Y \subseteq u(Z) \cap u(X) = u(Z \cap X) \subseteq u(\{0\}) = \{0\}.$$

$\square$

Considerando $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E$ como um subespaço vetorial de $\ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E$ da maneira descrita acima, temos o seguinte.

Corolário 4.3.22. *Sejam E um reticulado de Banach não isomorfo a um AL-espaço e $1 < p < \infty$. Então $(\ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E) \setminus (\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E)$ é completamente reticulável.*

Demonstração. Sejam i, A_L, S e T como nos parágrafos anteriores. Temos então que $T\colon \ell_p^\pi(E) \longrightarrow \ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E$ é isomorfismo de reticulados, $\ell_p\langle E \rangle$ é um subespaço de $\ell_p^\pi(E)$, $\ell_p^\pi(E) \setminus \ell_p\langle E \rangle$ é completamente reticulável pelo Corolário 4.3.20 e $A_L(\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E)$ é o subespaço de $\ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E$ que estamos identificando com $\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E$. Como

$$A_L(\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E) = T \circ i \circ S(\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E) = T(\ell_p\langle E \rangle),$$

o Lema 4.3.21 nos garante a reticulabilidade completa de $(\ell_p \widehat{\otimes}_{|\pi|} E) \setminus (\ell_p \widehat{\otimes}_\pi E)$. $\square$

Referências

[1] Albiac, F.; Kalton N. J., *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2006.

[2] Albiac, F.; Leránoz, C., *Uniqueness of unconditional basis in Lorentz sequence spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 5, 1643–1647.

[3] Aliprantis, C.; Border, K., *Infinite Dimensional Analysis:A Hitchhiker's Guide*, 3 Ed., Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2006.

[4] Aliprantis, C.; Burkinshaw, O., *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, second ed., American Mathematical Society, 2003.

[5] Aliprantis, C.; Burkinshaw, O., *Positive Operators*, Springer, Dordrecht, 2006.

[6] Alves, T. R., *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[7] Aqzzouz, B.; Elbour, A., *Some characterizations of almost Dunford-Pettis operators and applications*, Positivity **15** (2011), 369–380.

[8] Aqzzouz, B.; Elbour, A.; Wickstead, A. W., *Positive almost Dunford-Pettis operators and their duality*, Positivity **15** (2011), no. 2, 185–197.

[9] Ardakani, H.; Moshtaghioun, S. M.; Mosadegh, S. M. S. M.; Salimi, M., *The strong Gelfand-Phillips property in Banach lattices*, Banach J. Math. Anal. **10** (2016), 15–26.

[10] Aron, R.; Bernal-González, L.; Pellegrino, D.; Seoane-Sepúlveda, J. B., *Lineability: The Search for Linearity in Mathematics*, CRC Press, Boca Raton, 2016.

[11] Baklouti, H.; Hajji, M., *Schur operators and domination problem*, Positivity **21** (2017), 35–48.

[12] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, 1995.

[13] Bauer, H., *Measure and Integration Theory*, de Gruyter Studies in Mathematics: Translated from the German by Robert B. Burcke, Berlin-New York, 2001.

[14] Botelho, G.; Bu, Q.; Ji, D.; Navoyan, K., *The positive Schur property on positive projective tensor products and spaces of regular multilinear operators*, arXiv:2009.07014v1[math.FA], 2020.

[15] Botelho, G.; Diniz, D.; Fávaro, V. V.; Pellegrino, D., *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces*, Linear Algebra Appl. **434** (2011), no. 5, 1255–1260.

[16] Botelho, G.; Pellegrino, D.; Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, 2a. Edição, Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

[17] Bu, Q.; Buskes, G., *The Radon-Nikodym property for tensor products of Banach lattices*, Positivity **10** (2006), 365–390.

[18] Bu, Q.; Buskes, G., *Schauder decompositions and the Fremlin projective tensor product of Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl. **355** (2009), 335–351.

[19] Bu, Q.; Buskes, G., *Polynomials on Banach lattices and positive tensor products*, J. Math. Anal. Appl. **388** (2012), 845–862.

[20] Bu, Q.; Buskes, G.; Kusraev, A. G., *Bilinear maps on products of vector lattices: a survey*, Positivity, 97–126, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2007.

[21] Bu, Q.; Buskes, G.; Popov, A. I.; Tcaciuc, A.; Troitsky, V.G., *The 2-concavification of a Banach lattice equals the diagonal of the Fremlin tensor square*, Positivity **17(2)** (2013), 283–298.

[22] Bu, Q.; Diestel, J., *Observations about the projective tensor product of Banach spaces, I - $\ell_p \otimes X, 1 < p < \infty$*, Quaest. Math. **24** (2001), 519–533.

[23] Bu, Q.; Wong, N., *Some geometric properties inherited by the positive tensor products of atomic Banach lattices*, Indag. Math. (N.S.) **23** (2012), 199–213..

[24] Carando, D.; Mazzitelli, M.; Sevilla-Peris, P., *A note on the symmetry of sequence spaces*, arXiv:1905.11621, 2019.

[25] Carne, T. K.; Cole, B.; Gamelin, T. W., *A uniform algebra of analytic functions on a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 639–659.

[26] Casazza, P. G.; Shura, T. J., *Tsirelson's Space*, Lecture Notes in Mathematics 1363, Springer, 1989.

[27] Castillo, J. M. F.; García, R.; Gonzalo, R., *Banach spaces in which all multilinear forms are weakly sequentially continuous*, Studia Math. **136** (1999), no. 2, 121–145.

[28] Castillo, J. M. F.; González, M., *An approach to Schreier's space*, Extracta Math. **6** (1991), 166–169.

[29] Castillo, J. M. F.; González, M., *Three-space Problems in Banach Space Theory*, Lecture Notes in Mathematics **1667**, Springer, Berlim, 1997.

[30] Castillo, J. M. F.; Simões, M. A., *On p-summable sequences in locally convex spaces*, Extracta Math. **18** (2003), 209–222.

[31] Chen, J. X.; Li, L., *On a question of Bouras concerning weak compactness of almost Dunford-Pettis sets*, Bull. Aust. Math. Soc. **92** (2015), 111–114.

[32] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis*, Second Ed., Springer, New York, 1990.

[33] Diestel, J., *Sequences and Series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics **92**, Springer, 1984.

[34] Diestel, J.; Jarchow, H.; Tonge, A., *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[35] Dineen, S., *Complex Analysis on Infinite-Dimensional Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, London, 1999.

[36] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P.; Montesinos, V.; Zizler, V., *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, 2011.

[37] Farmer, J.; Johnson, W. B., *Polynomial Schur and polynomial Dunford-Pettis properties*, Contemp. Math. **144** (1993), 95–105.

[38] Fernández-Unzueta, M., *The Segre cone of Banach spaces and multilinear mappings*, Linear Multilinear Algebra **68** (2020), 575–593.

[39] Fernández-Unzueta, M.; Hernández-García, S., *(p,q)-dominated multilinear operators and Lapresté tensor norms*, J. Math. Anal. Appl. **470** (2019), 982–1003.

[40] Flores, J.; Hernández, F.L.; Spinu, E.; Tradacete, P., Troitsky, V.G., *Disjointly homogeneous Banach lattices: duality and complementation*, J. Funct. Anal. **226** (2014) 5858–5885.

[41] Floret, K., *Natural norms on symmetric tensor product of normed spaces*, Note di Matematica **17** (1997), 153–188.

[42] Fremlin, D. H. *Tensor products of Archimedean vector lattices*, Amer. J. Math. **94** (1972), 777–798.

[43] Fremlin, D. H., *Tensor products of Banach lattices*, Math. Ann. **211** (1974), 87–106.

[44] Gabriyelyan, S., *Locally convex spaces and Schur type properties*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **44** (2019), no. 1, 363–378.

[45] Galego, E. M.; González, M.; Pello, J., *On subprojectivity and superprojectivity of Banach spaces*, Results Math. **71** (2017), no. 3-4, 1191–1205.

[46] Garrido, M. I.; Jaramillo, J. A.; Llavona, J. G., *Polynomial topologies on Banach spaces*, Topology Appl. **153** (2005), 854–867.

[47] Gordon, Y.; Lewis, D. R., *Absolutely summing operators and local unconditional structures*, Acta Math. **133** (1974), 27–48.

[48] Grecu, B. C.; Ryan, R. A., *Polynomials on Banach spaces with unconditional bases*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004), 1083–1091.

[49] Jaramillo, J. A.; Prieto, A., *Weak-polynomial convergence on a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 463–468.

[50] Ji, D.; Navoyan, K.; Bu, Q., *Bases in the space of regular multilinear operators on Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl. **457** (2018), 803–821.

[51] Jiménez-Rodríguez, P., *On sequences not enjoying Schur's property*, Open Math. **15** (2017), 233–237.

[52] Johnson, W. B.; Lindenstrauss, J., *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, in Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. 1., Elsevier, 2001.

[53] Kaminska, A.; Mastylo, M., *The Schur and (weak) Dunford-Pettis properties in Banach lattices*, J. Austral. Math. Soc. **73** (2002), 251–278.

[54] Kamthan, P. K.; Gupta, M., *Sequence Spaces and Series*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 65. Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[55] Krasnosel'skiĭ, M. A.; Rutickiĭ, Ya. B., *Convex functions and Orlicz spaces*, Translated from de Russian edition by, Boron, L. F., Groningen-The Netherlands, 1961

[56] Leung, D. H., *On the weak Dunford-Pettis property*, Arch. Math. **52** (1989), 363–364.

[57] Leung, D. H.; Li, L.; Oikhberg, T.; Tursi, M. A., *Separable universal Banach lattices*, Israel J. Math. **230** (2019), 141–152.

[58] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L., *Classical Banach spaces I: Sequence Spaces*, Springer, Berlin, 1977.

[59] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L., *Classical Banach spaces II: Function Spaces*, Springer, Berlin, 1979.

[60] Loane, J., *Polynomials on Riesz spaces*, PhD dissertation, National University of Ireland, Galway, 2007.

[61] Luiz, J. L. P., *A propriedade de Schur em espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, FAMAT-UFU, 2017.

[62] Megginson, R. R., *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[63] Meyer-Nieberg, P., *Banach Lattices*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1991.

[64] Moussa, M.; Bouras, K., *About positive weak Dunford-Pettis operators on Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl. **381** (2011), 891–896.

[65] Mujica, J., *Banach spaces not containing* ℓ_1, Ark. Mat. **41** (2003), no. 2, 363–374.

[66] Mujica, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications, Mineola, New York, 2010.

[67] Narici, L.; Beckenstein, E., *Topological Vector Spaces*, second ed., Chapman and Hall-CRC, Boca Raton-London-New York, 2010.

[68] Oikhberg, T., *A note on latticeability and algebrability*, J. Math. Anal. Appl. **434** (2016), 523–537.

[69] Oikhberg, T., *Large sublattices in subsets of Banach lattices*, Arch. Math. (Basel) **109** (2017), no. 3, 245–253.

[70] Räbiger, F., *Lower and upper 2-estimates for order bounded sequences and Dunford-Pettis operators between certain classes of Banach lattices*, Lecture Notes in Mathematics 1470, 159–170, 1991.

[71] Rudin, W., *Functional Analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, New York, 1991.

[72] Ryan, R., *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Thesis - Trinity College, 1980.

[73] Ryan, R., *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer, 2002.

[74] Schaefer, H. H., *Topological Vector Spaces*, third ed., Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[75] Schaefer, H. H., *Banach lattices and Positive Operators*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.

[76] Schaefer, H. H., *Aspects of Banach lattices*, Studies in Functional Analysis, MAA Stud. Math., vol. 21, Math. Assoc. America, Washington, D.C., 158–221, 1980.

[77] Schur, I., *Über lineare Transformationen in der Theorie unendlicher Reihen*, J. Reine Angew. Math. **151** (1921), 79–111.

[78] Tradacete, P., *Positive Schur properties in spaces of regular operators*, Positivity **19** (2015), 305–315.

[79] Tsirelson, B. S., *Not every Banach space contains an embedding of ℓ_p ou c_0*. Functional Anal. Appl. **8** (1974), 138–141.

[80] Wnuk, W., *A note on the positive Schur property*, Glasgow Math. J. **31** (1989), 169–172.

[81] Wnuk, W., *Banach lattices with properties of the Schur type: a survey*, Conf. Sem. Mat. Univ. Bari **249** (1993), 1–25.

[82] Wnuk, W., *On the dual positive Schur property in Banach lattices*, Positivity **17** (2013), 759–773.

[83] Wojtaszczyk, P., *Banach Spaces for Analysts*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 1991.

[84] Zeekoei, E. D.; Fourie, J. H., *On p-convergent operators on Banach lattices*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **34** (2018), no. 5, 873–890.