



ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO

**NOVAS IDENTIDADES ENVOLVENDO OS
NÚMEROS DE FIBONACCI, LUCAS E
JACOBSTHAL VIA LADRILHAMENTOS**

CAMPINAS

2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO

NOVAS IDENTIDADES ENVOLVENDO OS
NÚMEROS DE FIBONACCI, LUCAS E
JACOBSTHAL VIA LADRILHAMENTOS

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos

Coorientador: Prof. Dr. Robson Silva

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA ELEN VIVIANI PEREIRA SPREAFICO E ORIENTADA PELO PROF. DR. JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Assinatura do Orientador

A handwritten signature in black ink, written over a horizontal line. The signature is cursive and appears to read "José Plínio de Oliveira Santos".

Assinatura do Coorientador

A handwritten signature in black ink, written over a horizontal line. The signature is cursive and appears to read "Robson Silva".

CAMPINAS

2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Sp77n Spreafico, Elen Viviani Pereira, 1986-
Novas identidades envolvendo os números de Fibonacci, Lucas e Jacobsthal via ladrilhamentos / Elen Viviani Pereira Spreafico. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Identidades combinatórias. 2. Fibonacci, Números de. 3. Lucas, Números de. 4. Jacobsthal, Números de. 5. Ladrilhamento (Matemática). I. Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: New identities involving Fibonacci, Lucas and Jacobsthal numbers using tilings

Palavras-chave em inglês:

Combinatorial Identities
Fibonacci numbers
Lucas numbers
Jacobsthal numbers
Tiling (Mathematics)

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]
Marcelo Firer

Sueli Irene Rodrigues Costa

Rommel Melgaço Barbosa

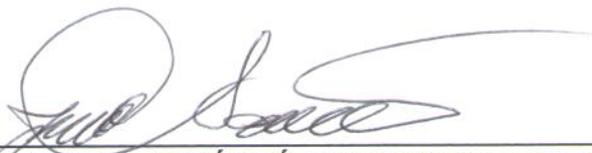
Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Data de defesa: 11-11-2014

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 11 de novembro de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS



Prof(a). Dr(a). MARCELO FIRER



Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



Prof(a). Dr(a). ROMMEL MELGAÇO BARBOSA



Prof(a). Dr(a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

Abstract

In this work we present combinatorial proofs by making use of tilings. In the first part we use tilings to prove some identities on Partitions Theory, including Triangular Numbers' Theorem and q -analogue of q -Binomial Theorem. In the second part we present combinatorial interpretations, using tilings, for some identities involving Jacobsthal numbers and generalized Jacobsthal numbers. Next we find new identities involving an q -analogue of Jacobsthal numbers and generalizations for these new identities. Finally, we define two new sequences: generalized Fibonacci numbers and generalized Lucas numbers, and using tilings, we prove new identities involving these numbers.

Keywords: Combinatorial Identities, Fibonacci numbers, Lucas numbers, Jacobsthal numbers, tilings.

Resumo

Neste trabalho, colaboramos com provas combinatórias que utilizam a contagem e a q -contagem de elementos em conjuntos de ladrilhamentos com restrições. Na primeira parte do trabalho utilizamos os ladrilhamentos para demonstrar algumas identidades da teoria das partições, dentre elas, o Teorema dos Números Triangulares e o Teorema q -análogo da Série q -Binomial. Na segunda parte do trabalho apresentamos interpretações combinatórias, via ladrilhamento, para algumas identidades envolvendo os números de Jacobsthal e os números generalizados de Jacobsthal. Na terceira parte do trabalho são dadas novas identidades envolvendo os números q -análogos de Jacobsthal e encontramos generalizações para essas novas identidades.

Por fim, definimos duas novas sequências: números de Fibonacci generalizados e números de Lucas generalizados e, utilizando ladrilhamentos, estabelecemos e demonstramos novas identidades envolvendo esses números.

Palavras-chave: Identidades combinatórias, Números de Fibonacci, Números de Lucas, Números de Jacobsthal, ladrilhamentos.

SUMÁRIO

Agradecimentos	xii
Introdução	1
1 Definições, Ladrilhamentos e q-Contagem	3
1.1 Tabuleiros, Ladrilhamentos e Ladrilhos	3
1.2 Peso e q-Contagem	7
1.3 Operação Projeção	9
1.4 Definições	12
2 Provas via ladrilhamento de identidades envolvendo séries hipergeométricas	15
2.1 Teorema dos Números Triangulares	16
2.2 Teorema q -Análogo da Série Binomial e Aplicações	27
3 Provas via ladrilhamentos para identidades envolvendo os Números de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas	39
3.1 Identidades de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas	40
3.1.1 Interpretação Combinatória dos Números de Jacobsthal	40
3.1.2 Interpretação Combinatória para os Números de Jacobsthal-Lucas	50
3.2 Identidades da Generalização de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas	62
3.2.1 Interpretação para a Generalização dos Números de Jacobsthal	62
3.2.2 Identidades Combinatórias envolvendo a Generalização dos Números de Jacobsthal	62
3.2.3 Interpretação Combinatórias para a Generalização dos Números de Jacobsthal-Lucas	67

3.2.4	Identidades Combinatórias envolvendo a Generalização dos Números de Jacobsthal-Lucas	68
3.3	Generalizações	76
4	Números de Jacobsthal q-Análogos e Generalizações	79
4.1	Generalização de q -análogos	79
4.2	Identidades envolvendo os q -Números de Jacobsthal	82
4.2.1	Teorema q -Análogo do Lema 3.4	82
4.2.2	Teorema q -Análogo do Lema 3.24	87
4.2.3	Alguns Teoremas q -análogos e Generalizações	88
5	Números de Fibonacci e Números de Lucas Generalizados	103
5.1	Interpretação Combinatória de $F_{(a,b)}(k, n)$ e $L_{(a,b)}(k, n)$	106
5.2	Identidades provadas via ladrilhamento	109
6	Considerações Finais e Trabalhos Futuros	123
6.1	Sequências de Lucas	123
6.2	Relações Algébricas	124
6.3	Outras Interpretações	126
6.4	Generalização para Números q -análogos de Jacobsthal	127
6.5	Outros interesses	129
	Bibliografia	130

*Aos meus pais
Aparecida e Pedro*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por dar-me sabedoria, força e esperança.

Aos professores José Plínio de Oliveira Santos e Robson Silva agradeço pela atenção, paciência e pela excelente orientação.

Ao meu marido Marcos, agradeço pelo amor, companheirismo e compreensão durante todos os anos de doutorado.

À minha família, agradeço pelo apoio, pelas orações e por estarem sempre ao meu lado.

Aos amigos pelos momentos de descontração. Agradeço também àqueles que sempre me incentivaram durante meu processo de formação e aperfeiçoamento profissional, em especial agradeço a Kênia, a Cecília, Vanessa, Bruno, Christiane, Juliana, Ana e ao Prof^o Aurélio.

Agradeço ao meus amigos Antonio Campello e Jerry por terem a boa vontade em me ajudar com o latex e outros programas.

Agradeço ao meu amigo Luciano por todas as manhãs bem humoradas que passamos em Campinas.

Aos Profs. Marcelo, Sueli, Eduardo e Rommel por gentilmente terem aceito o convite para participarem da banca examinadora e pelas sugestões que contribuíram para melhorar a versão final da tese.

Aos funcionários do IMECC, agradeço pela atenção e pela disposição para solucionar as questões burocráticas.

À Universidade Federal do Mato Grosso do Sul pelo apoio concedido a mim para finalizar o doutorado, em especial as professoras e amigas Andréia, Tatiana, Janete, Patrícia e Eliana.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

INTRODUÇÃO

Para lidar com funções aritméticas $f(n)$, n inteiro não negativo, dentro da Teoria Aditiva dos Números, usa-se do recurso de uma função geradora tipicamente da forma

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)q^n.$$

Apesar de haver muitas provas elegantes usando propriedades de funções geradoras, ainda há o interesse em compreender combinatorialmente as funções $f(n)$.

Em 1969 George Andrews desenvolveu o cálculo para função partição. Ele estabeleceu as técnicas da teoria elementar de séries hipergeométricas básicas em termos aritméticos. Idealmente, ele queria provar teoremas envolvendo séries hipergeométricas usando bijeção. Através desses estudos Andrews estabeleceu uma prova bijetiva para o Teorema q -Binomial, uma peça chave das séries hipergeométricas. E assim mostrou como interpretar combinatorialmente cancelamentos de produtos finitos, uma manipulação frequente nesta área.

Em 1987, J. T. Joichi and D. Staton em [13], adotou a seguinte convenção para provas bijetivas de uma identidade: para mostrar que $F(q) = G(q)$ é necessário encontrar dois conjuntos A e B , com pesos $w_t(A)$ e $w_t(B)$, tais que

$$F(q) = \sum_{a \in A} w_t(a) \text{ e } G(q) = \sum_{b \in B} w_t(b)$$

e existe uma bijeção $\Phi : A \rightarrow B$ que preserva peso, $w_t(\phi(A)) = w_t(\phi(B))$. Os conjuntos A e B podem ser infinitos. Neste caso assume-se que A e B são uniões enumeráveis de subconjuntos finitos e que Φ é uma bijeção entre esses conjuntos finitos. Assim, a identidade $F(q) = G(q)$ fica estabelecida. O método funcionou para várias identidades cujas provas analíticas são consideradas

fáceis, enquanto para as identidades com provas consideradas difíceis muitas bijeções e involuções foram e são requeridas. Por exemplo, a Transformação ${}_2\Phi_1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(1-aq^j)(1-bq^j)}{(1-q^{j+1})(1-cq^j)} z^j = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-abzq^n/c)}{(1-zq^n)} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(1-cq^j/a)(1-cq^j)/b}{(1-q^{j+1})(1-cq^j)} (abz/c)^j$$

tem uma prova bijetiva que requer aplicação de 6 bijeções e 23 involuções. Ao longo dos anos seguintes houve várias contribuições de provas de identidades usando este método sobretudo, com aplicações em conjuntos de partições.

A abordagem com o uso de ladrilhamentos, apesar de não ser inédita, [15], [7], [5], [4], [19], quebra com alguns paradigmas. O primeiro fato é de que paramos de contar e passamos a q -contar, ou seja, obtemos como resultados de contagem polinômios e séries formais ao invés de números.

Outra mudança significativa é a utilização de tabuleiros ladrilhados que se mostram objetos versáteis para operações. Nesse sentido, podemos provar muitas identidades complicadas e pouco esclarecedoras com uso de outros objetos como o Gráfico de Ferrers; de forma simples e mantendo a visão combinatória do problema.

Na primeira parte do trabalho utilizamos os ladrilhamentos para demonstrar algumas identidades da teoria das partições, dentre elas, o teorema q -análogo da série q -binomial e uma extensão do teorema q -binomial. Na segunda parte do trabalho demonstramos interpretações combinatórias, via ladrilhamento, para algumas identidades envolvendo os números de Jacobsthal e os números de Jacobsthal generalizados. Em seguida vamos provar novas identidades envolvendo os números q -análogos de Jacobsthal, números de Fibonacci generalizados e números de Lucas generalizados .

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES, LADRILHAMENTOS E q -CONTAGEM

Neste capítulo definimos os objetos combinatórios e ferramentas que utilizaremos durante o trabalho. Primeiramente iremos definir os objetos que utilizamos: tabuleiro e peças; e apresentar algumas técnicas básicas de manipulação desses objetos para provar identidades. Em seguida, introduzimos a noção do peso de peças e de ladrilhamentos, apresentamos a ideia de q -contagem que lhe é associada e definimos a operação chamada de projeção de peças no tabuleiro. Por fim, definimos as sequências de números, e suas relações de recorrência, que usamos ao longo do trabalho. Em meio às apresentações e definições discutiremos alguns exemplos para facilitar o entendimento.

No segundo capítulo usaremos as seguintes notações:

$$(a; q)_n = \prod_{i=1}^n (1 - aq^{i-1}),$$

$$(a; q)_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - aq^{i-1}).$$

1.1 Tabuleiros, Ladrilhamentos e Ladrilhos

Os tabuleiros (coberturas, pisos) são formados por quadrados 1×1 que são chamados de suas casas ou células. Essas casas podem ser numeradas e essa numeração determina posições.

Utilizamos, essencialmente, dois tipos de tabuleiros. O primeiro é o *tabuleiro finito* que possui apenas uma quantidade finita de casas. O segundo tipo é o *tabuleiro infinito* que possui um número infinito de casas.

Por conveniência, neste trabalho os tabuleiros finitos são da forma $1 \times n$ e podem ter posições numeradas de 1 a n , ou de 0 a $n-1$. Os infinitos são da forma $1 \times \infty$, e podem ter posições numeradas começando do número 1 ou do número 0. Podem, ainda, haver casos onde temos tabuleiros infinitos para ambos os lados.

Denominamos peças ou ladrilhos os objetos que usamos para preencher ou cobrir um tabuleiro. Neste trabalho utilizaremos as seguintes peças: quadrados de formato 1×1 , dominós de formato 1×2 e retângulos de formato $1 \times k$, todos de cores variadas.

Por vezes, será útil considerar a possibilidade de que em cada posição possamos empilhar peças.

Dado um tabuleiro e certas peças, chamamos de *ladrilhamento* a uma maneira T de ladrilhar completamente o tabuleiro com as peças t sem que reste qualquer casa não preenchida e sem que peças se sobreponham. Usamos o termo n -ladrilhamento com certas peças para denotar uma maneira T de ladrilhar um tabuleiro finito de ordem $1 \times n$ com essas peças.

Uma partição λ de um inteiro positivo n consiste em uma sequência de inteiros positivos $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j$, onde os λ_i são denominados as partes da partição λ e a soma das partes da partição deve ser igual a n definida por

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i$$

Associada a um ladrilhamento está uma partição, onde a partes da partição são representadas pelas casas ocupadas por peças determinadas.

Exemplo 1.1. *Considere um tabuleiro 1×5 , ladrilhado com quadrados brancos e pretos dado na Figura 1.1. Se considerarmos as partes da partição representadas pelas casas ocupadas por peças pretas, temos a associação deste ladrilhamento com a partição de $9, 2 + 3 + 4$.*



Figura 1.1: Ladrilhamento 1×5 associado a partição $2 + 3 + 4$

Exemplo 1.2. *Temos na Figura 1.2 o ladrilhamento infinito com posições numeradas começando do 0 com quadrados pretos e brancos onde podemos empilhar peças pretas. Note que na posição 4 temos dois quadrados pretos empilhados.*

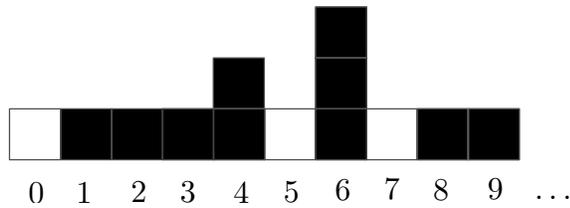


Figura 1.2: Ladrilhamento infinito

A posição de um dominó ou de um retângulo $1 \times k$ será definida pela primeira casa que ocupa.

Exemplo 1.3. Temos na Figura 1.3 um 8-ladrilhamento com quadrados brancos, dominós cinzas e retângulos 1×3 pretos. Note que temos um dominó cinza na posição 3 e um retângulo preto na posição 6.

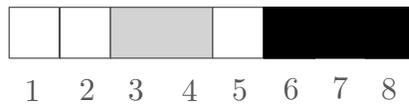


Figura 1.3: Ladrilhamento 1×8

Dizemos que um n -ladrilhamento é *separável* (quebrável) na k -ésima casa se for possível decompô-lo em dois ladrilhamentos, um cobrindo as células 1 até k , e outro cobrindo as células $k + 1$ até n -ésima célula. Caso contrário, dizemos que o ladrilhamento é *não separável* (não quebrável) na k -ésima casa.

Exemplo 1.4. Por exemplo, o ladrilhamento da Figura 1.4 de tamanho 10 é separável nas posições 2, 3, 4, 6, 7 e 9 e não separável nas posições 1, 5 e 8.



Figura 1.4: 10-ladrilhamento

Considere dois ladrilhamentos de ordem n . O primeiro com casas numeradas de 1 a n e o segundo com casas numeradas de 2 a $n + 1$. Dizemos que existe uma falha na posição i se ambos os ladrilhamentos são separáveis na posição i . Em outras palavras, nenhum dos ladrilhamentos possuem um dominó ou um retângulo na posição i . Observe que existirá falha na posição 1 quando o primeiro ladrilhamento for separável nesta posição. As *caudas* de um par de ladrilhamentos são definidas como as peças que ocorrem depois da última falha.

Em algumas demonstrações usaremos uma das técnicas definidas em [4] chamada *tail swapping*, que em português pode ser traduzido como *trocando caudas*.

Exemplo 1.5. Na Figura 1.5 temos um par de ladrilhamentos de ordem 10 onde é feito o processo de trocar caudas. Após o processo descrito na Figura 1.6 obtém-se um par de ladrilhamentos onde um deles tem ordem 11 e outro 9.

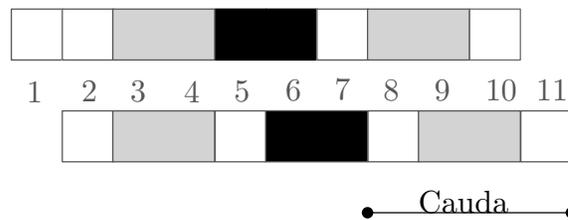


Figura 1.5: Par de ladrilhamentos de tamanho 10 com falhas nas posições 1, 2, 4 e 7

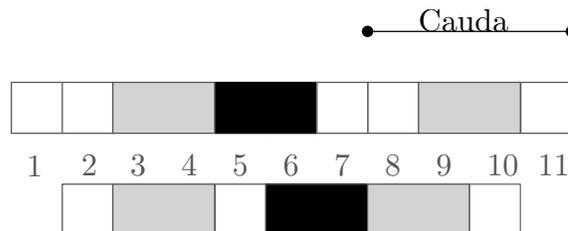


Figura 1.6: Par de ladrilhamentos da Figura 1.5 após a troca de caudas.

Considere um tabuleiro circular com n posições rotuladas no sentido horário e todas as maneiras de preenchê-lo utilizando quadrados 1×1 , dominós “curvos” 1×2 e retângulos “curvos” $1 \times k$, de diversas cores. Chamamos n -*bracelete* ou *bracelete de tamanho n* a uma maneira de fazer tal cobertura, ou ainda, um n -*bracelete* é um ladrilhamento circular com n células.

Neste trabalho iremos somente utilizar as peças: quadrados 1×1 e dominós “curvos” 1×2 de diversas cores.

Um bracelete é chamado *fora de fase* quando um dominó cobre as células n e 1 , caso contrário é chamado *em fase*.

Exemplo 1.6. Na figura 1.7 temos um bracelete fora de fase de tamanho 7 com quadrados brancos e dominós pretos.

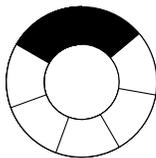


Figura 1.7: Bracelete fora de fase

Neste trabalho fazemos contagens de conjuntos de ladrilhamentos para provar identidades. Os passos que utilizamos são contar os ladrilhamentos de duas formas diferentes ou operar com bijeções e involuções sobre o conjunto de ladrilhamentos determinando um outro conjunto de mesma cardinalidade e então estabelecer as identidades.

1.2 Peso e q-Contagem

A q -contagem é uma generalização do conceito de contagem usual. Este conceito será ilustrado por meio de um exemplo.

Considere o conjunto $X = \{C, E, H\}$. Este conjunto possui três elementos, então $|X| = 3$. Em notação matemática podemos escrever

$$|X| = \sum_{x \in X} 1,$$

ou seja, para cada elemento do conjunto X associamos o número 1 na contagem total. Suponha agora que cada elemento possua um *peso* qualquer, não necessariamente igual a 1. Seja ele $w(x) = q^i$, onde i é igual a ordem de cada letra correspondente no alfabeto, e q é uma variável. Temos que a letra C é a terceira letra, E a quinta e H a oitava letra do alfabeto. Assim temos

$$\sum_{x \in X} w(x) = w(C) + w(E) + w(H) = q^3 + q^5 + q^8.$$

A escolha dos pesos como $w(x) = q^i$ não é aleatório. Observemos que se q assumir o valor igual a 1 obtemos a contagem usual do conjunto X , e portanto a q -contagem refina as informações que temos a respeito do conjunto X .

Neste trabalho, fazemos a *contagem com peso* de elementos de conjuntos de ladrilhamentos. Abusando da linguagem utilizaremos o termo q -contagens de elementos de conjuntos de ladrilhamentos. Este tipo de contagem diferencia da anterior pois agora obteremos identidades envolvendo polinômios na variável q que possuem interpretação combinatória em termos de conjunto de ladrilhamentos com peso.

Antes de definirmos o peso de um ladrilhamento T , introduzimos o peso dos ladrilhos t do ladrilhamento. Tipicamente, definimos o peso de uma peça t que é um quadrado branco como sendo a unidade $w(t) = 1$. O peso das demais peças é tipicamente dado em termos de sua cor e da posição i que ela ocupa. Assim, o peso do ladrilhamento T é definido por

$$w(T) = \prod_{t \in T} w(t).$$

Dado um conjunto de ladrilhamentos X , a q -contagem deste conjunto é definida por

$$|X|_q = \sum_{T \in X} w(T).$$

Exemplo 1.7. Considere o ladrilhamento T , de ordem 1×5 , com quadrados brancos e pretos dado na Figura 1.8. Seja t um ladrilho que ocupa a posição i . Definimos o peso desta peça por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{caso } t \text{ seja um quadrado branco;} \\ q^i, & \text{caso } t \text{ seja um quadrado preto na posição } i, \end{cases}$$



Figura 1.8: Ladrilhamento 1×5 .

então o peso deste ladrilhamento será $w(T) = q^{2+3+5} = q^{10}$.

Exemplo 1.8. Considere X o conjunto de todas as possíveis coberturas de um tabuleiro de ordem 1×3 , com quadrados brancos e pretos. Definimos o peso das peças por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{caso } t \text{ seja um quadrado branco;} \\ q^i, & \text{caso } t \text{ seja um quadrado preto na posição } i, \end{cases}$$

então $|X|_q = 1 + q + q^2 + 2q^3 + q^5 + q^6$.

Ao efetuarmos as q-contagens faremos uso da soma finita dos n primeiros termos de uma série geométrica de razão q e primeiro termo a_1 , ou ainda,

$$(a_1 + a_1q + \cdots + a_1q^{n-1}) = \sum_{i=1}^n a_1q^{i-1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Além disso utilizamos a convergência para $|q| < 1$ da soma infinita

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots) = \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{(1 - q)}.$$

1.3 Operação Projeção

O conceito de projeção, definido e utilizado nos artigos [19] e [7], é a ideia de mover peças no ladrilhamento. As peças que podem ser movidas são chamadas *peças projetáveis*. A operação de projetar satisfaz:

- ◊ a projeção não acrescenta nem remove peças do ladrilhamento, ou seja, as peças serão apenas espalhadas;
- ◊ a ordem de aparecimento (da esquerda para a direita) das peças projetáveis não se altera, ou seja, uma peça projetável não pode “pular por cima” de outra peça projetável;
- ◊ o peso final do ladrilhamento após a projeção se altera apenas com uma multiplicação por constante (peso da projeção) que independe de qual peça foi projetada e de qual era a sua posição;
- ◊ após uma projeção, a peça projetada “pula por cima” sempre da mesma quantidade de peças brancas da última peça projetada.

A última propriedade não é necessária para definir projeção, apenas a exigimos nos casos onde deseja-se ter um controle sobre o número de peças brancas à esquerda e à direita da peça projetável. Também é importante ressaltar que esta definição se aplica em geral ao caso de ladrilhamentos sem peças empilhadas. No entanto, se considerarmos uma ordem de aparecimento de peças, da esquerda para a direita, de baixo para cima, a definição também pode ser aplicada em ladrilhamentos com empilhamento.

Agora, vamos definir a operação denominada *projetar todas as peças juntamente*. Seja um tabuleiro infinito $1 \times \infty$, com um ladrilhamento T , onde são escolhidas certas peças projetáveis $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, que ocupam as posições $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$.

Primeiramente, considere a operação de projetar a última peça projetável t_n uma quantidade igual a $p_n \geq 0$ de vezes. Em seguida, projetamos a penúltima peça projetável uma quantidade igual a $p_{n-1} \geq 0$ de vezes, com a restrição de que $p_n \geq p_{n-1}$. Assim, sucessivamente, até a primeira peça projetável, obtendo a restrição $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$.

Se o peso da projeção for igual a q^k então, como realizamos exatamente $\sum_{j=1}^n p_j$ projeções, o ladrilhamento final T' terá peso

$$w(T') = (q^k)^{p_1+p_2+\dots+p_n} w(T).$$

Assim, projetar todas as peças juntamente consiste em considerar todas as possibilidades de ladrilhamentos obtidos através de operações deste tipo. A q -contagem de todas as possibilidades é dada por

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n} (q^k)^{p_1+p_2+\dots+p_n} w(T) \\ &= \sum_{\lambda \text{ partição em } \leq n \text{ partes}} (q^k)^{|\lambda|} w(T) \\ &= \sum_{\lambda \text{ partição em partes } \leq n} (q^k)^{|\lambda|} w(T) \\ &= \frac{w(T)}{(1-q^k)(1-q^{2k}) \dots (1-q^{nk})} \\ &= \frac{w(T)}{(q^k; q^k)_n}. \end{aligned}$$

Assim, segue o resultado abaixo.

Teorema 1.9. *Dado um ladrilhamento T de ordem $1 \times \infty$, com uma projeção definida de peso q^k , com n peças projetáveis, que aparecem na ordem como $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, então a q -contagem da operação de projetar todas as peças projetáveis juntamente é dada por*

$$\frac{w(T)}{(q^k; q^k)_n}.$$

Para exemplificar, vamos mostrar uma prova dada em [19] da seguinte identidade clássica da Teoria das Partições.

Teorema 1.10. *Para a variável q , vale a seguinte identidade*

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1+q^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q; q)_n}.$$

Demonstração: Consideremos o conjunto X cujos elementos são todos os possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro infinito de ordem $1 \times \infty$, com as peças: quadrados pretos e brancos. Dado um ladrilho t na posição i , defini-se o seu peso por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{caso } t \text{ seja um quadrado branco;} \\ q^i, & \text{caso } t \text{ seja um quadrado preto na posição } i. \end{cases}$$

Vamos q -contar este conjunto de duas maneiras.

Primeiramente, em cada posição colocamos um quadrado branco ou um quadrado preto. Como cada posição i é independente e contribui com o fator $(1 + q^i)$, a q -contagem de todas as escolhas possíveis é igual a

$$|X|_q = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^i).$$

Por outro lado, seja X_n o conjunto de todos os ladrilhamentos com n peças pretas. Para q -contar este conjunto, considere n peças pretas nas posições iniciais $\{1, 2, \dots, n\}$ do ladrilhamento. Este ladrilhamento T tem peso igual a

$$w(T) = q^{1+2+\dots+n} = q^{n(n+1)/2}.$$

Agora, se considerarmos como projetáveis as peças pretas e definirmos como projeção a troca de uma peça preta por uma peça branca que lhe sucede, caso haja uma peça branca, podemos projetar todas as n peças projetáveis juntamente do ladrilhamento T .

Assim, como o peso desta projeção é q , pelo Teorema 1.9 teremos a q -contagem de X_n dada por

$$\frac{w(T)}{(q, q)_n} = \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q, q)_n}.$$

Portanto,

$$|X|_q = \sum_{n=0}^{\infty} |X_n|_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q, q)_n},$$

e segue a identidade

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 + q^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)/2}}{(q, q)_n}.$$

□

1.4 Definições

Ao longo do trabalho faremos uso da definição das seguintes sequências. Iremos definir a sequência dos números de Fibonacci deslocados de uma unidade para que a notação na interpretação desses números como conjunto de ladrilhamentos com restrições fique conveniente.

Os *números de Fibonacci* são definidos por $F_0 = 1, F_1 = 2$, e para $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Os *números de Lucas* são definidos por $L_0 = 2, L_1 = 1$, e para $n \geq 2$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

Os *números de Pell* são definidos por $P_0 = 0, P_1 = 1$, e para $n \geq 2$, $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$.

O n -ésimo número de *Jacobsthal* é definido por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3},$$

para $n \geq 0$, e generalizando obtemos os números da forma

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s + 1},$$

onde $n \geq 0$ é um número natural e $s \geq 0$ é um número real. Ainda podemos defini-los pela relação de recorrência

$$J_0^s = 0, J_1^s = 1, J_n^s = (s - 1)J_{n-1}^s + sJ_{n-2}^s, \quad n \geq 2.$$

O n -ésimo número de *Jacobsthal-Lucas* é definido por

$$j_n = 2^n + (-1)^n,$$

generalizando obtemos os números da forma

$$j_n^s = s^n + (-1)^n,$$

onde $n \geq 0$ é um número natural e $s \geq 0$ é um número real. Ainda podemos defini-los pela relação de recorrência

$$j_0^s = 2, j_1^s = s - 1, j_n^s = (s - 1)j_{n-1}^s + sj_{n-2}^s, \quad n \geq 2.$$

Em [14], uma generalização dos números de Fibonacci $F(n, k)$ e uma generalização dos números de Lucas $L(k, n)$ foram apresentadas. Esses números, para inteiros $k \geq 2$ e $n \geq 0$, satisfazem as seguintes recorrências:

$$\begin{aligned}
F(k, n) &= n + 1, \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, k - 1; \\
F(k, n) &= F(k, n - 1) + F(k, n - k), \quad \text{for } n \geq k;
\end{aligned}
\tag{1.1}$$

e

$$\begin{aligned}
L(k, n) &= n + 1, \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, 2k - 1; \\
L(k, n) &= (k - 1)F(k, n - (2k - 1)) + F(k, n - (k - 1)), \quad \text{for } n \geq 2k.
\end{aligned}
\tag{1.2}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	683
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	2047
$F(2, n)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$F(3, n)$	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88
$F(4, n)$	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50
$L(2, n)$	1	2	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
$L(3, n)$	1	2	3	4	5	6	10	15	21	31	46	67
$L(4, n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	13	19	26	34

Tabela 1.1: Tabela de Sequências

Para $n \geq 0$, temos que $F(2, n) = F_n$, o n -ésimo número de Fibonacci, e se $n \geq 3$, temos que $L(2, n) = L_n$, o n -ésimo número de Lucas. Ressaltamos que neste trabalho serão definidas duas novas sequências a partir das generalizações apresentadas em [14], sequências essas que estabelecem novas identidades.

CAPÍTULO 2

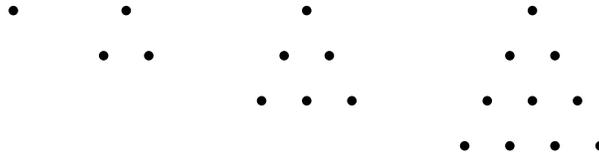
PROVAS VIA LADRILHAMENTO DE IDENTIDADES ENVOLVENDO SÉRIES HIPERGEOMÉTRICAS

Em 1987, J. T. Joichi and D. Staton estabeleceram provas bijetivas de identidades envolvendo séries hipergeométricas básicas em [13]. A estratégia proposta por eles foi a construção de bijeções ou de involuções. O método funcionou para várias identidades cujas provas analíticas são consideradas fáceis, enquanto para as identidades com provas consideradas difíceis, muitas bijeções e involuções foram e são requeridas. Por exemplo, como já dito na Introdução, a Transformação ${}_2\Phi_1$ tem uma prova bijetiva que requer aplicação de 6 bijeções e 23 involuções. Ao longo dos anos seguintes houve várias contribuições de provas de identidades usando este método sobretudo, com aplicações em conjuntos de partições.

Como conjuntos de ladrilhamentos podem ser associados a conjuntos de partições podemos provar resultados cujas demonstrações conhecidas usam artifícios da Teoria de Partições usando ladrilhamentos. A inovação estará na definição dos pesos das peças e de operações que preservam esses pesos. Neste capítulo iremos apresentar provas, via ladrilhamento, de algumas identidades envolvendo séries hipergeométricas. Os Teoremas principais são o Teorema dos Números Triangulares e o Teorema q -análogo da Série Binomial. Faremos uso da operação projeção, inclusive em ladrilhamentos onde pode-se empilhar peças, com pesos definidos para as peças.

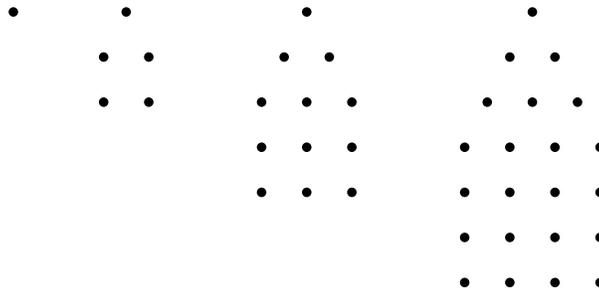
2.1 Teorema dos Números Triangulares

Os números triangulares são dados na sequência $1, 3, 6, 10, \dots$, se referindo ao número de pontos de um arranjo triangular de lado crescente:



O j -ésimo número triangular é $1 + 2 + 3 + \dots + j = \frac{j(j+1)}{2}$.

Similarmente, os números pentagonais são $1, 5, 12, 22, \dots$, referentes ao número de pontos de um arranjo pentagonal de lado crescente:



O j -ésimo pentágono consiste do j -ésimo triângulo no topo de um retângulo de base j e altura $j - 1$. Portanto, o j -ésimo número pentagonal é $j(j+1)/2 + j(j-1)$, que simplificando fica $j(3j+1)/2$.

Não é surpresa existir uma identidade com o nome de Euler uma vez que o mesmo foi um dos mais produtivos matemáticos da história. Uma versão analítica do Teorema do Número Pentagonal de Euler pode ser estabelecida como segue.

Teorema 2.1. (*Teorema do Número Pentagonal de Euler*)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} = (q; q)_{\infty}.$$

Este teorema tem um bela interpretação combinatória em termos de partições dada por Legendre.

Teorema 2.2. (*Versão Combinatorial do Teorema do Número Pentagonal de Euler*) *Sejam $D_e(n)$ o número de partições de n em um número par de partes distintas, e $D_o(n)$ o número de partições de n em um número ímpar de partes distintas. Então*

$$D_e(n) - D_o(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{se } n = j(3j \pm 1)/2 \text{ para algum inteiro } j; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para esta versão do Teorema do Número Pentagonal de Euler existe uma prova conhecida dada por Franklin em 1881.

No artigo [17] foi apresentada uma prova combinatória do Teorema dos Números Triangulares usando bijeção entre conjuntos de partições. Apresentamos aqui uma prova usando a ideia de demonstração dada em [17] e bijeção entre conjuntos de ladrilhamentos com pesos definidos com sinal para as peças. Para isso definimos operações que preservam peso sobre os conjuntos de ladrilhamentos.

Teorema 2.3. (*Teorema dos Números Triangulares*) Para qualquer número complexo $|q| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}{(1-q^3)(1-q^5)\cdots(1-q^{2n+1})} q^{2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Demonstração: Sejam todas as possibilidades de cobrir um tabuleiro $1 \times \infty$ usando quadrados brancos e quadrados pretos de forma que as peças pretas nas posições ímpares podem ser empilhadas, na primeira posição tem um quadrado branco e a última posição preenchida é ímpar e tem pelo menos uma peça preta. Considere X o conjunto de todos os ladrilhamentos $1 \times \infty$ nessas condições. Definimos o peso de um ladrilho t na i -ésima posição dado por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ -q^i, & \text{se } t \text{ é um quadrado preto na posição par } i, \\ q^{il}, & \text{se } t \text{ é formado por } l \text{ quadrados pretos empilhados na posição ímpar } i. \end{cases}$$

Supondo que a última peça preta de um tabuleiro se encontra na posição ímpar $2n + 1$, de peso q^{2n+1} , percorremos as primeiras n posições pares e decidimos se colocamos uma peça preta ou uma peça branca em cada célula. Cada uma dessas decisões contribui com um fator independente $(1 - q^i)$, i par, logo temos

$$\prod_{i=1}^n (1 - q^{2i}) = (1 - q^2)(1 - q^4)\cdots(1 - q^{2n})$$

De modo análogo, percorremos as n primeiras posições ímpares $\neq 1$ e decidimos se colocamos uma peça branca ou peças pretas em cada posição. Como nestas posições podemos empilhar peças temos que a q -contagem será dada por

$$\prod_{i=1}^n (1 + q^{2i+1} + q^{2(2i+1)} + q^{3(2i+1)} + \cdots) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - q^{2i+1}}$$

Assim, teremos a q -contagem do conjunto X dada por

$$\begin{aligned} |X|_q &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^n (1 - q^{2i}) \times \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - q^{2i+1}} \right] q^{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \cdots (1 - q^{2n})}{(1 - q^3)(1 - q^5) \cdots (1 - q^{2n+1})} q^{2n+1}. \end{aligned}$$

Agora vamos construir uma involução Φ ($\Phi^2 = \text{Id}$) sobre um subconjunto X^* de X . Para cada ladrilhamento $T \in X$ com $l \geq 1$ peças pretas empilhadas na última posição $2n + 1$, consideremos dois números inteiros ≥ 2 que lhe são associados: o primeiro é $i_0(T)$ que é a menor posição de T ocupada por, pelo menos, uma peça preta; e o segundo número é $n_0(T)$ dado por

$$n_0(T) = \begin{cases} 2l, & \text{se } T \text{ tem um quadrado branco na penúltima posição } 2n, \\ 2l + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 2.4. No ladrilhamento da Figura 2.1 temos que $i_0(T) = 2$ pois a posição 2 é a menor posição ocupada por uma peça preta e $n_0(T) = 7 = 2 \times 3 + 1$, onde 3 é o número de peças pretas na última posição 7 e 1 é o número de peças pretas na posição 6.

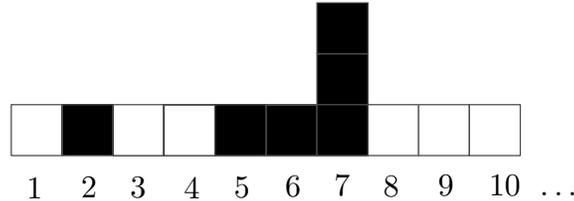


Figura 2.1: Ladrilhamento com $i_0(T) = 2$, $n_0(T) = 7$ e peso q^{34}

Para construir Φ vamos fazer uso de operações intermediárias. Uma delas denotaremos $\Psi : X \rightarrow X$ e será definida em dois casos : dado $T \in X$, $n_0(T) = 2l$ ou $n_0(T) = 2l + 1$. Assim temos:

1º Caso da operação intermediária Ψ : Dado $T \in X$, se $n_0(T) = 2l$ então remova l peças pretas da posição $2n + 1$ e as empilhe na posição $2n - 1$. Neste caso temos que o peso foi multiplicado por em $q^{(2n-1)(l+m) - (2n-1)m - (2n+1)l} = q^{-2l}$, onde m é o número de peças pretas na posição $2n - 1$.

Exemplo 2.5. No ladrilhamento da Figura 2.2 temos que $l = 3$, $n_0(T) = 6 = 2 \times 3$ e peso $-q^{36}$, então vamos remover as 3 peças da posição 7 e as empilhar na posição 5, obtendo o ladrilhamento da Figura 2.3 com peso $-q^{30}$, mudança de peso em $q^{-2 \times 3} = q^{-6}$.

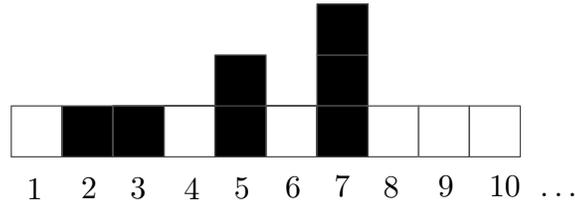


Figura 2.2: Ladrilhamento com $i_0(T) = 2$, $n_0(T) = 6$ e peso $-q^{36}$.

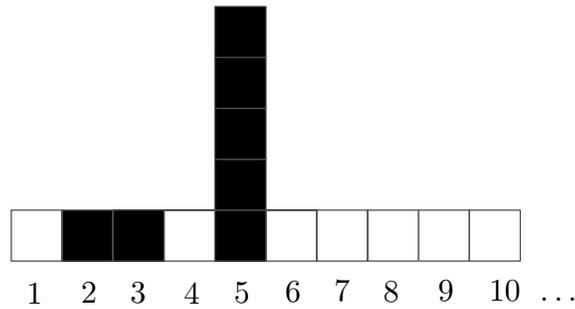


Figura 2.3: Ladrilhamento com $i_0(T) = 2$, $n_0(T) = 10$ e peso $-q^{30}$.

2º Caso da operação intermediária Ψ : Dado $T \in X$, se $n_0(T) = 2l + 1$ então remova l peças pretas da posição $2n + 1$ e a peça preta da posição $2n$ e as empilhe na posição $2n - 1$. Neste caso temos que o peso foi multiplicado por $-q^{-2l-1}$, e o sinal negativo veio do fato que a quantidade de peças pretas em posição par descreceu em uma unidade.

Exemplo 2.6. No ladrilhamento da Figura 2.4 temos que $l = 3$, $n_0(T) = 7 = 2 \times 3 + 1$ e peso q^{44} então vamos remover as 3 peças da posição 7 e a peça da posição 6, empilhando-as na posição 5, obtendo o ladrilhamento da Figura 2.5 de peso $-q^{37}$, mudança de peso em $-q^{-2 \times 3 - 1} = -q^{-7}$.

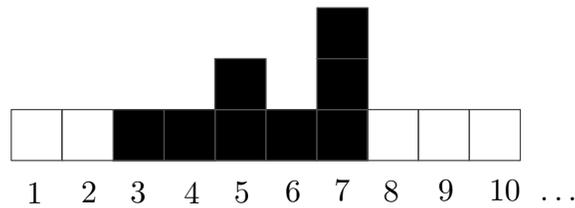


Figura 2.4: Ladrilhamento com $n_0(T) = 7$, $i_0(T) = 3$ e peso q^{44}

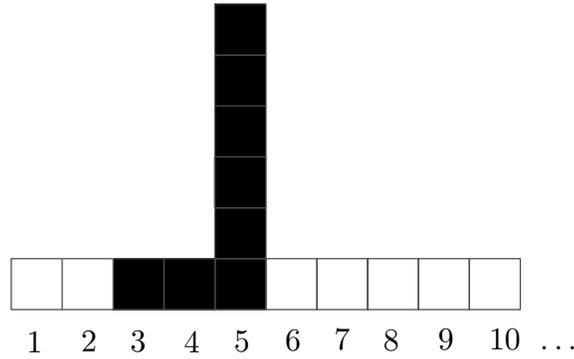


Figura 2.5: Ladrilhamento com $n_0(T) = 13$, $i_0(T) = 3$ e peso $-q^{37}$

Notemos que, após a aplicação da operação Ψ , temos que o valor de $n_0(T)$ se mantém constante ou aumenta, enquanto há um decrescimento no expoente do peso. Além disso, $i_0(T)$ pode ser modificado decrescendo seu valor. Por exemplo, consideremos este ladrilhamento da Figura 2.6. Neste caso temos $i_0(T) = 6$ e após aplicar a operação Ψ teremos $i_0(T) = 5$.

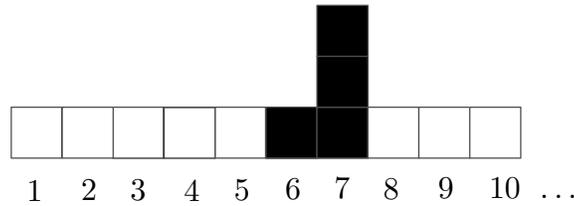


Figura 2.6: Ladrilhamento com $n_0(T) = 7$, $i_0(T) = 6$ e peso $-q^{27}$

Seja l o número de peças pretas empilhadas na última posição $2n + 1$.

Observemos que se $i_0(T) = 2k$ e $l < k$ temos duas opções. Se $n_0(T) = 2l$ então $2l < 2k$, ou ainda, $n_0(T) < i_0(T)$. Se $n_0(T) = 2l + 1$ então, como $2l + 1 < 2k + 1$ e $2k$ é o último par antecessor de $2k + 1$, temos $2l + 1 < 2k < 2k + 1$, e portanto $n_0(T) < i_0(T)$.

Exemplo 2.7. Na Figura 2.7 temos $i_0(T) = 4$ e $n_0(T) = 3$ onde $k = 2$ e $l = 1$. Assim, $i_0(T) = 2k$ e $l < k$ o que implica em $n_0(T) < i_0(T)$.



Figura 2.7: Ladrilhamento com $n_0(T) = 3, i_0(T) = 4$ e peso q^{22}

Agora, se $i_0(T) = 2k + 1$ e $l < k + 1$ temos outras duas opções. Se $n_0(T) = 2l$ então como $2l < 2k + 2$, e $2k + 1$ é o último ímpar antecessor de $2k + 2$, temos também que $n_0(T) < i_0(T)$, e se $n_0(T) = 2l + 1$ então, como $2l + 1 < 2k + 3$, temos $2l + 1 \leq 2k + 1 < 2k + 3$, e portanto $n_0(T) \leq i_0(T)$.

Exemplo 2.8. Na Figura 2.8 temos $i_0(T) = 3$ e $n_0(T) = 3$ onde $k = 1$ e $l = 1$. E portanto $i_0(T) = 2k + 1$ e $l < k + 1$, o que implica em $n_0(T) \leq i_0(T)$.



Figura 2.8: Ladrilhamento com $n_0(T) = 3, i_0(T) = 3$ e peso $-q^{27}$

Considere o subconjunto $X' \subset X$ definido por: $T \in X'$ se, e somente se, $i_0(T) = 2k$ então $l \geq k$; caso contrário, se $i_0(T) = 2k + 1$, então $l \geq k + 1$. Essa definição garante que $n_0(T) \geq i_0(T)$, o que possibilita a remoção de peças pretas da última posição $2n + 1$.

Exemplo 2.9. Na Figura 2.9 temos um ladrilhamento em X' , com $i_0(T) = 3$ e $n_0(T) = 7 = 2 \times 3 + 1$ onde $k = 1$ e $l = 3$.

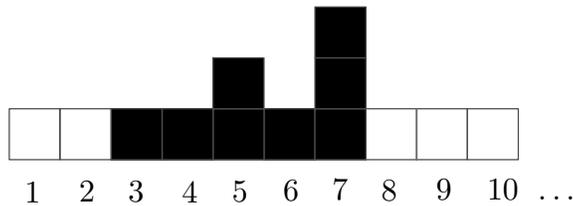


Figura 2.9: Ladrilhamento em X' com $n_0(T) = 7, i_0(T) = 3$ e peso q^{44}

A outra aplicação intermediária, chamada $\Omega : X' \rightarrow X$ também será definida em dois casos : dado $T \in X'$, $i_0(T) = 2k$ ou $i_0(T) = 2k + 1$. Assim temos:

1º Caso da operação intermediária Ω : Dado $T \in X'$, se $i_0(T) = 2k$, para algum número natural k , então remova k peças pretas da posição $2n + 1$ e as empilhe na posição $2n + 3$. Neste caso temos a multiplicação do peso pelo fator q^{2k} .

Exemplo 2.10. No ladrilhamento da Figura 2.10 temos que a menor posição preenchida com quadrado preto é $i_0(T) = 2 \times 1$, então vamos remover $k = 1$ peça da posição 7 e a empilhar na posição 9, obtendo o ladrilhamento da Figura 2.11.

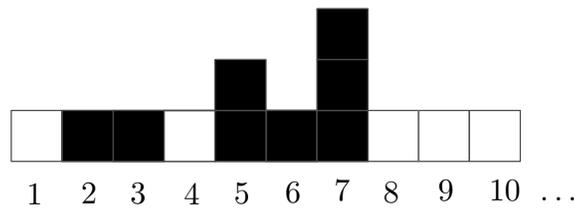


Figura 2.10: Ladrilhamento com $n_0(T) = 7$, $i_0(T) = 2$ e peso q^{42}

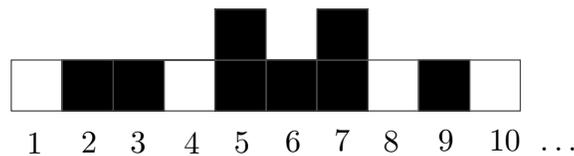


Figura 2.11: Ladrilhamento com $n_0(T) = 2$ e $i_0(T) = 2$ e peso q^{44}

2º Caso da operação intermediária Ω : Se $i_0(T) = 2k + 1$, para algum número natural k , então remova $k + 1$ peças pretas da posição $2n + 1$, coloque uma peça preta na posição $2n + 2$ e empilhe as k peças restantes na posição $2n + 3$. Neste caso temos a multiplicação do peso pelo fator $-q^{2k+1}$.

Exemplo 2.11. No ladrilhamento da Figura 2.12 temos que $i_0(T) = 2 \times 1 + 1$, então vamos remover $k + 1 = 2$ peças pretas da posição 7, colocar uma peça na posição 8 e uma peça na posição 9, obtendo o ladrilhamento da Figura 2.13.

Notemos que, após a aplicação da operação Ω , temos que o valor de $n_0(T)$ se mantém constante ou decresce, enquanto há um aumento no expoente do peso. Além disso, $i_0(T)$ pode ser modificado aumentando de valor.

Vamos agora à construção de $\Phi : X^* \rightarrow X^*$. Como já dito, X^* é subconjunto de X . Após a definição de Φ mostraremos quais são os ladrilhamentos de tal conjunto e a quais elementos de X não se aplica a operação.

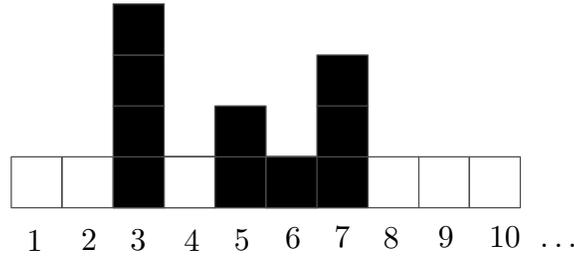


Figura 2.12: Ladrilhamento com $n_0(T) = 7, i_0(T) = 3$ e peso $-q^{49}$

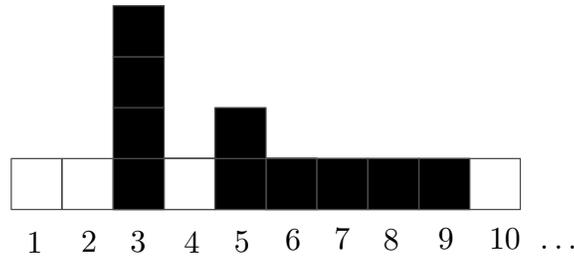


Figura 2.13: Ladrilhamento com $n_0(T) = 3, i_0(T) = 3$ e peso q^{52}

Considere $T \in X$. Aplique a operação intermediária Ψ e obtenha um ladrilhamento intermediário T^* .

1º Caso da operação Φ : Caso $n_0(T) < i_0(T^*)$ ou $n_0(T) = i_0(T^*)$, com $i_0(T^*)$ ímpar, então coloque uma peça preta na posição $n_0(T)$ em T^* .

Exemplo 2.12. No ladrilhamento da Figura 2.14 temos $n_0(T) = 4$ e $i_0(T) = 5$, com peso $q^{5 \times 2 + 7 \times 2} = q^{24}$

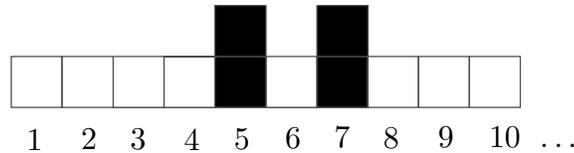


Figura 2.14: Ladrilhamento com $n_0(T) = 4, i_0(T) = 5$ e peso q^{24}

Como $n_0(T) = 2 \times 2$ é par, aplicando a operação Ψ (1ª caso) que consiste em tirar as 2 peças pretas da última posição 7 e colocá-la na posição 5, obtemos o ladrilhamento intermediário T^* de peso q^{20} da Figura 2.15:

Colocando uma peça preta na posição $n_0(T) = 4$ obtemos o ladrilhamento final T' dado na Figura 2.16.

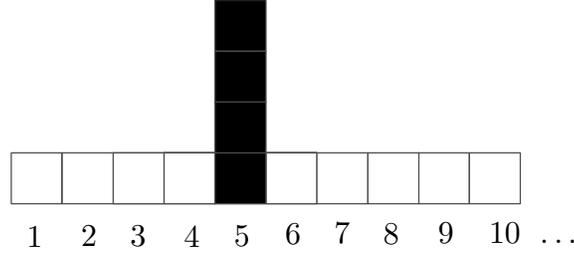


Figura 2.15: Ladrilhamento com $n_0(T^*) = 8$, $i_0(T^*) = 5$ e peso q^{20}

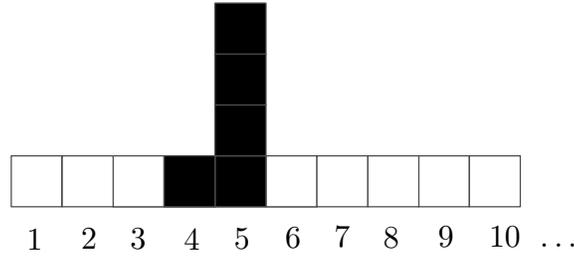


Figura 2.16: Ladrilhamento com $n_0(T') = 8$, $i_0(T') = 4$ e peso $-q^{24}$

O peso do novo ladrilhamento T' é dado por $-q^4 q^{5 \times 4} = -q^{24}$ com $n_0(T') \geq i_0(T')$.

Em geral o ladrilhamento T' terá peso dado por $w(T') = w(T)(-q^{2l})q^{-2l} = -w(T)$, para a aplicação do 1º caso da operação Ψ ($n_0(T) = 2l$), e $w(T') = w(T)(q^{2l+1})(-q^{-2l-1}) = -w(T)$ para a aplicação do 2º caso da operação Ψ ($n_0(T) = 2l + 1$).

Observemos que o ladrilhamento $T' \in X$, uma vez que $i_0(T') = n_0(T) \neq 1$ e a última posição com peças pretas continua sendo ímpar $2n - 1$. Além disso, $n_0(T') \geq i_0(T')$ uma vez que, quando vamos aplicar a Ψ temos que $n_0(T^*) = i_0(T^*)$ e, após a sua aplicação temos que $n_0(T^*)$ cresce ou se mantém constante e $i_0(T^*)$ decresce ou se mantém constante. Definimos $\Phi(T) = T'$.

2º Caso da operação Φ : Caso contrário, $n_0(T) > i_0(T^*)$ ou $n_0(T) = i_0(T^*)$ com $i_0(T^*)$ par, então retire uma peça preta da posição $i_0(T)$ de T e aplique a operação Ω neste ladrilhamento resultante.

Relembremos que a operação intermediária Ω é restrita ao conjunto $X' \subset X$ definido por $T \in X'$, se $i_0(T) = 2k$ então $l \geq k$; caso contrário, se $i_0(T) = 2k + 1$, então $l \geq k + 1$. Se, ao retirarmos uma preta da posição $i_0(T)$ e obtivermos um ladrilhamento T^* não pertencente a X' , teremos $n_0(T) \leq i_0(T)$ e voltamos ao caso anterior.

Exemplo 2.13. *No ladrilhamento da Figura 2.17 abaixo temos $n_0(T) = 7 > i_0(T) = 5$, com peso*

$-q^{37}$.

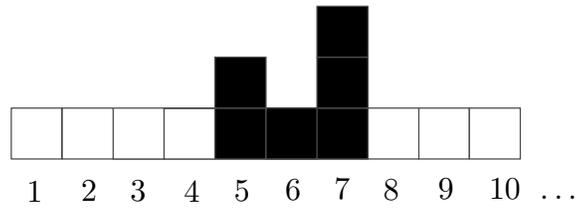


Figura 2.17: Ladrilhamento $n_0(T) = 7, i_0(T) = 5$ e peso $-q^{37}$

Aplicando a operação Ψ obtemos os seguinte ladrilhamento intermediário T^* de peso $-q^{30}$ dado na Figura 2.18.

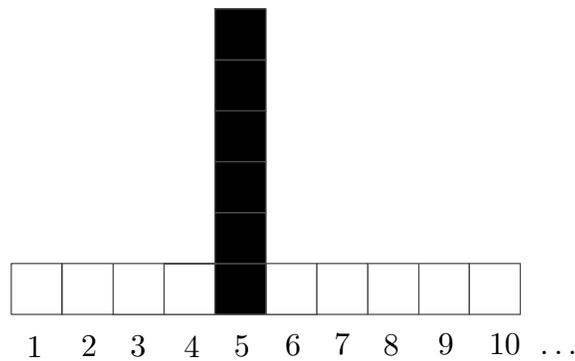


Figura 2.18: Ladrilhamento $n_0(T^*) = 5, i_0(T^*) = 12$ e peso q^{30}

Então $n_0(T) = 7 > i_0(T^*) = 5$. Assim retiramos um quadrado preto da posição $i_0(T)$ de T obtendo o ladrilhamento da Figura 2.19 com peso $-q^{32}$

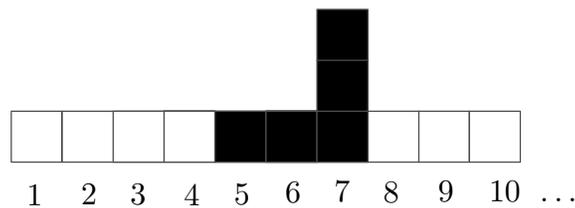


Figura 2.19: Ladrilhamento $n_0(T^*) = 7, i_0(T^*) = 5$ e peso $-q^{32}$

Aplicando a operação Ω no ladrilhamento resultante obtemos o ladrilhamento T' final dado na Figura 2.20 com peso q^{37} .

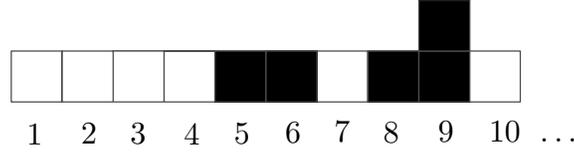


Figura 2.20: Ladrilhamento $n_0(T) = 7, i_0(T) = 5$ com peso q^{37} .

Observemos que podemos ter $i_0(T)$ par ou ímpar, e no caso ímpar, podemos ter várias peças pretas empilhadas em tal posição, portanto, retirando uma peça preta da posição $i_0(T)$ obtemos o ladrilhamento intermediário T^* com $n_0(T^*) = n_0(T) \leq i_0(T^*)$.

De modo análogo, o novo ladrilhamento T' pertence ao conjunto X uma vez que não é colocada peça preta na primeira posição e a última posição com peças pretas continua ímpar. Assim, definimos $\Phi(T) = T'$.

Notemos, também, que $n_0(T') \leq i_0(T')$. O peso de T' é dado por

1º Caso: Se $i_0(T) = 2k$ teremos $w(T') = w(T)(-q^{-2k})q^{2k} = -w(T)$.

2º Caso: Se $i_0(T) = 2k + 1$ teremos $w(T') = w(T)(q^{-2k-1})(-q^{2k+1}) = -w(T)$.

Assim, temos que a função $\Phi : X^* \rightarrow X^*$ onde $X^* \subset X$, é uma involução onde tem-se a propriedade $w(\Phi(T)) = -w(T), \forall T \in X^*$.

Vamos agora classificar os ladrilhamentos que não pertencem a X^* .

Considere o ladrilhamento que possui somente l peças pretas empilhadas na posição ímpar k . Neste caso temos que $i_0(T) = k$ e $n_0(T) = 2l$. Como as paridades de $i_0(T)$ e $n_0(T)$ são distintas tem-se duas possibilidades: $n_0(T) > i_0(T)$ ou $n_0(T) < i_0(T)$, donde decorre as operações já descritas.

No entanto, observemos que, nestes ladrilhamentos, quando temos $n_0(T) + 1 = i_0(T)$ ou $i_0(T) + 1 = n_0(T)$, ao aplicar a operação Φ não obtemos ladrilhamento em X .

Se $n_0(T) + 1 = i_0(T)$ então, se colocarmos uma peça preta na posição $n_0(T)$ e aplicar a operação Ψ , teremos um ladrilhamento onde a última posição com peça preta está em uma posição par $k - 1$. e portanto o ladrilhamento não pertencerá a X .

De modo análogo, no caso de $i_0(T) + 1 = n_0(T)$, tomemos, sem perda de generalidade, $i_0(T) = 2m + 1$ e $n_0(T) = 2l$. Assim temos $l = m + 1$ e se retirarmos uma peça preta da posição $i_0(T)$ teremos somente m peças o que impossibilita a aplicação da operação Ω .

Exemplo 2.14. O ladrilhamento dado na Figura 2.21 é um tipo de ladrilhamento ao qual não é possível aplicar a operação Ω .

Se retirarmos uma peça da posição $i_0(T) = 2 \times 2 + 1$ restarão apenas 2 peças. Mas, para aplicar a operação intermediária Ω , seriam necessárias 3 peças pretas.

Assim, o subconjunto ao qual não podemos aplicar as operações descritas é o formado pela

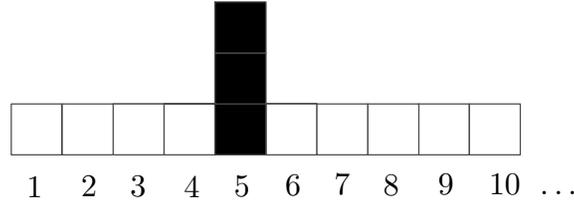


Figura 2.21: Ladrilhamento T

união dos ladrilhamentos que possui $l = \frac{n+1}{2}$ peças pretas empilhadas na posição ímpar n , ou $l = \frac{n}{2}$ peças pretas empilhadas na posição ímpar $n+1$. Tal subconjunto é q -contado por

$$\sum_{T \in X/X^*} w(T) = \sum_{n=2}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Como Φ é uma involução, a soma dos pesos dos ladrilhamentos $T \in X^*$ se anulam, logo temos que

$$|X|_q = \sum_{T \in X^*} w(T) + \sum_{T \in X/X^*} w(T) = \sum_{T \in X/X^*} w(T).$$

o que completa a prova. □

2.2 Teorema q -Análogo da Série Binomial e Aplicações

Inicialmente faremos uma prova, via ladrilhamentos, do Teorema q -Análogo da Série Binomial. A ideia usada para a construção da prova bijetiva foi retirada dos artigos [6] e [24], onde usam-se conjuntos de partições. A diferença está no uso de conjuntos de ladrilhamentos e na construção dos pesos que são mantidos pela bijeção. Em seguida listamos corolários e teoremas que utilizam a mesma construção para serem provados via ladrilhamento.

Teorema 2.15. *Para qualquer número complexo $|q| < 1$*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} z^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-azq^n)}{(1-zq^n)}.$$

Demonstração: Sejam todas as possibilidades de cobrir um tabuleiro de tamanho n com casas numeradas de 0 a $n - 1$, usando quadrados brancos e quadrados pretos onde as peças não podem ser empilhadas. Considere X_n o conjunto de todos os ladrilhamentos nessas condições. Seja o peso de um ladrilho t dado por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ -aq^i, & \text{se } t \text{ é um quadrado preto na posição } i. \end{cases}$$

Como em cada posição podemos colocar um quadrado branco ou um quadrado preto e a escolha é independente de posição, temos na q -contagem de $|X_n|_q$, a contribuição do fator $(1 - aq^i)$, para cada posição i , $0 \leq i \leq n - 1$. Assim

$$|X_n|_q = (1 - a)(1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1}).$$

Exemplo 2.16. Para $n = 10$, temos o ladrilhamento da Figura 2.22 de peso a^4q^{16} em X_{10} .



Figura 2.22: Ladrilhamento com peso a^4q^{16} em X_{10} .

Definimos para $n = 0$ o ladrilhamento $\emptyset \in X_0$ de peso 1.

Agora, seja todas as possibilidades de cobrir um tabuleiro infinito com casas numeradas começando do número 0 usando quadrados brancos e exatamente n quadrados pretos onde podemos empilhar peças pretas. Considere o conjunto W_n dos ladrilhamentos infinitos nessas condições. Seja o peso de um ladrilho t dado por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ z^m q^{mi}, & \text{se } t \text{ é formado por } m \text{ peças pretas empilhadas na posição } i. \end{cases}$$

Para q -contar $|W_n|_q$ vamos inicialmente colocar n quadrados pretos empilhados na primeira posição 0. Este ladrilhamento T pertence a W_n e tem peso $w(T) = z^n q^{n \cdot 0} = z^n$.

Considere como projetáveis as peças pretas e defina como projeção a operação de substituir a peça preta por uma peça branca, quando uma peça branca lhe sucede. Caso uma pilha de quadrados pretos sucede a peça a ser projetada, a projeção será definida como retirar a peça de sua posição e colocá-la sob a pilha.

Suponha uma peça preta na posição i a ser projetada. Se uma peça branca lhe sucede, projetá-la mudará o peso da peça de zq^i para zq^{i+1} e portanto, o peso dessa operação é q . Caso a peça

preta na posição i seja sucedida de uma pilha de tamanho j na posição $i + 1$ teremos o peso dos ladrilhos em i e $i + 1$ dados por $zq^i z^j q^{j(i+1)} = z^{j+1} q^{(j+1)i+j}$. Após a projeção teremos o peso dado por $z^{j+1} q^{(j+1)(i+1)} = z^{j+1} q^{(j+1)i+j+1}$, ou seja, o peso dessa operação também é q .

No entanto, na posição i pode ainda haver uma pilha de peças pretas, onde uma delas será projetada. Suponha que exista k peças pretas empilhadas na posição i sucedida de uma pilha de tamanho j na posição $i + 1$. Projetando uma peça preta da posição i teremos a mudança de peso de $z^{k+j} q^{ki+j(i+1)} = q^{i(k+j)+j}$ para $z^{k+j} q^{(k-1)i} q^{(j+1)(i+1)} = q^{i(k+j)+j+1}$.

Portanto, a projeção tem peso q , o que segue do Teorema 1.9

$$|W_n|_q = \frac{z^n}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \frac{w(T)}{(q, q)_n}.$$

No caso $n = 0$ teremos o ladrilhamento T_0 coberto apenas por quadrados brancos de peso 1.

Exemplo 2.17. O ladrilhamento T da Figura 2.23 tem 7 peças pretas, pertence ao conjunto W_n com $n = 7$ e tem peso $w(T) = z^7 q^1 q^2 q^{2.4} q^{3.6} = z^7 q^{29}$.

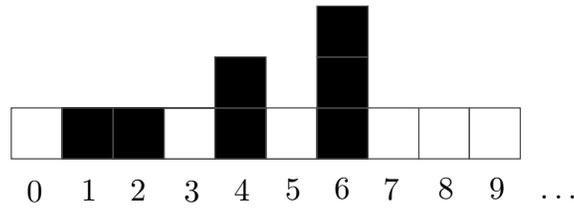


Figura 2.23: Ladrilhamento com $n = 7$, peso $w(T) = z^7 q^1 q^2 q^{2.4} q^{3.6} = z^7 q^{29}$.

Portanto, para $n = 0$ temos o único par (\emptyset, T_0) de peso 1 onde $\emptyset \in X_0$ e $T \in W_0$, com T_0 o ladrilhamento infinito cujas casas são cobertas somente por quadrados brancos.

Para cada $n \neq 0$ fixado, temos que o número de pares ordenados (T', T^*) , com $T' \in X_n$ e $T^* \in W_n$, tem cardinalidade q -contada por

$$\frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} z^n.$$

Somando em n , obtemos

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} z^n,$$

a função geradora para todos os pares de ladrilhamentos do tipo $X_n \times W_n$.

Fixado n inteiro não negativo e k , $0 \leq k \leq n$, sejam todas as possibilidades de preencher um tabuleiro infinito com casas numeradas a partir de 0 dispondo das peças: quadrados brancos e exatamente k quadrados pretos, onde não pode-se empilhar peças. Seja M_k o conjunto de todos ladrilhamentos nessas condições.

Agora, considere todas as maneiras possíveis de cobrir um tabuleiro infinito com casas numeradas a partir de 0 com as peças: quadrados brancos e exatamente $n - k$ quadrados pretos onde pode-se empilhar peças pretas. Seja Z_{n-k} o conjunto de todos os ladrilhamentos construídos nessas condições.

Considere o peso de um ladrilho $t \in L'$, com $L' \in M_k$, dado por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ -azq^p, & \text{se } t \text{ é um quadrado preto na posição } p. \end{cases}$$

e o peso de um ladrilho $t \in L^*$, com $L^* \in Z_{n-k}$, dado por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ z^m q^{mi}, & \text{se } t \text{ é formado por } m \text{ peças pretas empilhadas na posição } i. \end{cases}$$

Agora, a partir de cada um dos pares ordenados em $X_n \times W_n$ vamos criar um novo par de ladrilhamentos em $M_k \times Z_{n-k}$, e vice versa. Esta operação será uma bijeção que mantém o peso dos pares ordenados associados.

Primeiramente, seja a ordenação natural das n peças pretas dos ladrilhamentos em W_n : da menor posição para a maior posição, do nível menor para a maior.

Exemplo 2.18. Na Figura 2.23 temos que o quadrado preto no nível 1 da posição 1 é a peça de ordem 1, enquanto o quadrado preto do nível 2 da posição 4 é a peça de ordem 4.

Fixemos um par ordenado (T', T^*) , com $T' \in X_n$ e $T^* \in W_n$. Seja o conjunto formado por todos os pares (i, j) onde i , $0 \leq i \leq n - 1$, é cada posição de T' coberta por um quadrado preto e j é cada posição de T^* coberta por um quadrado preto de ordem $i + 1$. Observemos que para cada i temos um único j .

Em $T^* \in W_n$, para todos os pares (i, j) , retire todas as peças pretas de ordem $i + 1$ empilhadas na posição j rearranjando esta nova pilha se necessário.

O novo ladrilhamento obtido de $T^* \in W_n$ será chamado L^* .

Considere agora um tabuleiro infinito com posições numeradas a partir do 0. Preencha com uma peça preta cada posição $i + j$; para cada par (i, j) , e o restante das posições com quadrados brancos. Este novo ladrilhamento será chamado L' .

Observemos que se $0 \leq i \leq n - 1$ então $1 \leq i + 1 \leq n$, onde n é o número de peças em T^* . Assim, esta operação está bem definida.

Notemos também que se o número de quadrados pretos em um ladrilhamento $T' \in X_n$ é $k, 0 \leq k \leq n$, então o par ordenado em $M_k \times Z_{n-k}$ associado a (T', T^*) será (L', L^*) , onde $L' \in M_k$ tem exatamente k quadrados pretos e o número de quadrados pretos em $L^* \in Z_{n-k}$ é $n - k$.

O peso de cada ladrilho t em $L^* \in Z_{n-k}$ é induzido pelo peso em W_n , ou seja,

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ z^m q^{mi}, & \text{se } t \text{ formado por } m \text{ peças pretas empilhadas na posição } i. \end{cases}$$

De modo análogo, o peso de cada ladrilho t em $L' \in M_n$ é induzido por ladrilhos em ladrilhamentos de X_n e W_n , ou seja o ladrilho $t = i + j$ tem peso

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ -a q^i z q^j = -a z q^{i+j}, & \text{se } t \text{ é um quadrado preto na posição } i + j. \end{cases}$$

Portanto, segue exatamente o peso definido anteriormente.

Exemplo 2.19. Considere o par (T', T^*) de ladrilhamentos dados nas Figuras 2.24 e 2.25 em $X_{10} \times W_{10}$:



Figura 2.24: Ladrilhamento com $n = 10$ e peso $w(T') = (-a)^4 q^{1+4+5+6} = a^4 q^{16}$ em X_{10} .

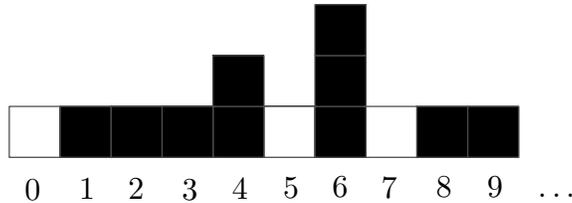


Figura 2.25: Ladrilhamento com $n = 10$, peso $w(T^*) = z^{10} q^1 q^2 q^3 q^{2 \cdot 4} q^{3 \cdot 6} q^8 q^9 = z^7 q^{49}$ em W_{10} .

Ordenando as 10 peças pretas de T^* teremos

- ordem 10: quadrado preto no nível 1 da posição 9;
- ordem 9: quadrado preto no nível 1 da posição 8;

- ordem 8: quadrado preto no nível 3 da posição 6;
- ordem 7: quadrado preto no nível 2 da posição 6;
- ordem 6: quadrado preto no nível 1 da posição 6;
- ordem 5: quadrado preto no nível 2 da posição 4;
- ordem 4: quadrado preto no nível 1 da posição 4;
- ordem 3: quadrado preto no nível 1 da posição 3;
- ordem 2: quadrado preto no nível 1 da posição 2;
- ordem 1: quadrado preto no nível 1 da posição 1.

Agora, seja o quadrado preto na posição $i=1$ em T' . Portanto, tomando o quadrado preto no nível 1 da posição $j=2$ como peça de ordem $i+1=2$ em T^* , retiramos esta peça em T^* obtendo $L^* \in Z_{10-4}$ e colocamos uma peça preta na posição $i+j=1+2=3$ do novo ladrilhamento $L' \in M_4$. Aplicando o processo para todos os elementos i no conjunto $\{1, 4, 5, 6\}$ obtemos o par final associado $(L', L^*) \in M_4 \times Z_{10-4}$ dado nas Figuras 2.26 e 2.27.

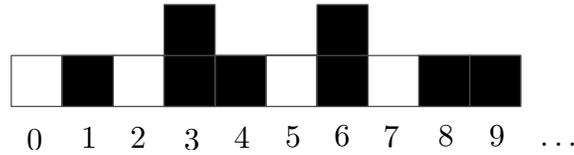


Figura 2.26: Ladrilhamento $L^* \in Z_{10-4}$ $w(L^*) = z^6 q^{1+3+4+6+8+9} = z^6 q^{31}$.

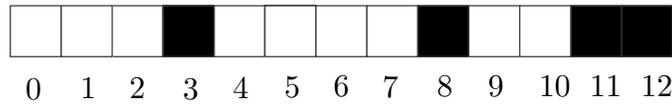


Figura 2.27: Ladrilhamento $L' \in M_4$ com peso $w(L') = (-a)^4 z^4 q^{3+8+11+12} = a^4 z^4 q^{34}$.

Observemos que ambos os pares (T', T^*) e (L', L^*) possuem o mesmo peso $a^4 z^{10} q^{65}$.

Reciprocamente, seja $(L', L^*) \in M_4 \times Z_{10-4}$. Através do ladrilhamento L^* e de um processo iterativo usando as posições com quadrado preto em L' iremos construir o par $(T', T^*) \in X_{10} \times W_{10}$.

Considere a ordenação natural sobre as k peças pretas do ladrilhamento L^* e denote L_p^* a posição na qual a peça preta em L^* de ordem p está empilhada.

Exemplo 2.20. Temos $L_5^* = 6$, ou seja, a peça preta de ordem 5 em L^* da Figura 2.26 está empilhada na posição 6.

Então, para todo inteiro $I \geq 0$, existe um único inteiro i tal que

$$L_i^* \leq I - i \leq L_{i+1}^*$$

onde $L_0 = -\infty$ e $L_{(k+1)} = \infty$. Defina a iteração Ψ dada por

$$\Psi(L^*, I) = (L, i),$$

onde

$$L_p = \begin{cases} L_p^*, & \text{se } 1 \leq p \leq i; \\ I - i, & \text{se } p = i + 1; \\ L_{p-1}^*, & \text{se } p > i + 1. \end{cases}$$

Aplicando Ψ em um total de k vezes, tomando I igual a toda posição com quadrado preto em L' obteremos, a cada passo, um número i que nos informa as posições com quadrado preto em T' , e portanto teremos o ladrilhamento T' . E o ladrilhamento L obtido ao final das k iterações será T^* . De fato, isto segue pois a cada iteração estaremos determinando o número i para colocarmos um peça preta de ordem $p = i + 1$ na posição $j = I - i$.

Exemplo 2.21. Tome o par $(L', L^*) \in M_4 \times Z_{10-4}$ dados nas Figuras 2.26 e 2.27. Então aplicando a operação Ψ no par $(L^*, 3)$, onde 3 é a primeira posição com quadrado preto em L' , temos que determinar i tal que

$$L_i^* \leq 3 - i \leq L_{i+1}^*.$$

Observemos que nesse caso, somente para $i = 1$ teremos uma solução. De fato, se tomarmos $i = 0$ teremos

$$L_0^* \leq 3 \leq L_1^*,$$

mas $L_1^* = 1$, o que é um absurdo. O mesmo ocorre para os valores $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Portanto $(L^*, 3) = (L^1, 1)$,

onde

$$L_p^1 = \begin{cases} L_p^*, & \text{se } 1 \leq p \leq 1; \\ 3 - 1, & \text{se } p = 2; \\ L_{p-1}^*, & \text{se } p > 2. \end{cases}$$

Ou seja, temos L^1 dado na Figura 2.28.

Sucessivamente teremos

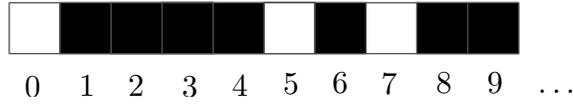


Figura 2.28: Ladrilhamento L^1 .

- $\Psi(L^1, 8) = (L^2, 4)$

onde

$$L_p^2 = \begin{cases} L_p^1, & \text{se } 1 \leq p \leq 4; \\ 8 - 4, & \text{se } p = 5; \\ L_{p-1}^1, & \text{se } p > 5. \end{cases}$$

Ou seja, temos L^2 dado na Figura 2.29.

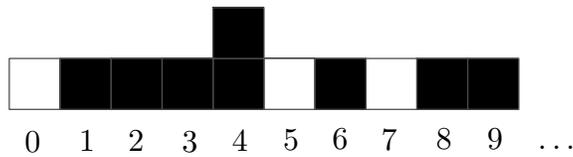


Figura 2.29: Ladrilhamento L^2 .

- $\Psi(L^2, 11) = (L^3, 5)$

onde

$$L_p^3 = \begin{cases} L_p^2, & \text{se } 1 \leq p \leq 5; \\ 11 - 5, & \text{se } p = 6; \\ L_{p-1}^2, & \text{se } p > 6. \end{cases}$$

Ou seja, temos L^3 dado na Figura 2.30.

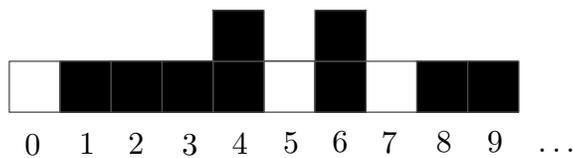


Figura 2.30: Ladrilhamento L^3 .

- $\Psi(L^3, 12) = (L^4, 6)$

onde

$$L_p^4 = \begin{cases} L_p^3, & \text{se } 1 \leq p \leq 6; \\ 12 - 6, & \text{se } p = 7; \\ L_{p-1}^3, & \text{se } p > 7. \end{cases}$$

Ou seja, temos L^4 dado na Figura 2.31 .

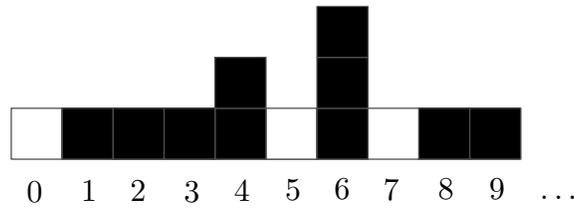


Figura 2.31: Ladrilhamento L^4 .

Assim temos $L^4 = T^*$ e como $i \in \{1, 4, 5, 6\}$ obtemos o ladrilhamento T^i .

Vamos, então, q-contar $M_k \times Z_{n-k}$. Dado um ladrilhamento L^i em M_k , como $0 \leq j \leq \infty$, o número de peças de L^i é $1 \leq k \leq n \leq \infty$ e cada posição é independente, teremos para cada posição o fator contribuinte $(1 - azq^t)$. Assim temos que $|M_k|_q$ é o coeficiente de z^k na expansão do produto

$$\prod_{t=0}^{\infty} (1 - azq^t).$$

Por outro lado, temos os ladrilhamentos $L^* \in Z_{n-k}$, que também possuem número de peças igual a $1 \leq n - k \leq n \leq \infty$ e o qual podemos empilhar peças pretas. Portanto, segue que $|Z_{n-k}|_q$ é o coeficiente de z^{n-k} na expansão do produto

$$\prod_{t=0}^{\infty} \frac{1}{1 - zq^t}.$$

Assim $\prod_{t=0}^{\infty} \frac{(1 - azq^t)}{1 - zq^t}$ é a função geradora para todos os pares de ladrilhamentos do tipo $M_k \times Z_{n-k}$.

Desta forma, estabelecemos a igualdade das funções geradoras

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} z^n = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-azq^n)}{(1-zq^n)}.$$

□

Seguem como corolários deste teorema as três igualdades abaixo, que portanto, podem ser demonstrados através de ladrilhamentos.

Corolário 2.22. ([3], pag 19) Para $|z| < 1$ e $|q| < 1$, então

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-zq^n)},$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n q^{n(n-1)/2}}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-zq^n).$$

Corolário 2.23. ([3], pag 19, Heine Transformation) Para qualquer número complexo $|q| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, q)_n (b, q)_n}{(q, q)_n (c, q)_n} z^n = \frac{(az, q)_{\infty} (b, q)_{\infty}}{(z, q)_{\infty} (c, q)_{\infty}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(c/b, q)_m (z, q)_m b^m}{(q, q)_m (az, q)_m}.$$

Seguem também como Corolário o q -Análogo do Teorema de Gauss e do Teorema de Kummer,[3].

Lema 2.24. ([20], pag 17) Para qualquer número complexo $|q| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)(1+aq) \cdots (1+aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} z^n q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+azq^n)}{(1-zq^n)}.$$

Demonstração:

Observemos que de maneira análoga ao Teorema 2.15 obtemos a prova da igualdade. Para tanto, tomamos o conjunto X_n dos ladrilhamentos construídos a partir de todas as maneiras possíveis de cobrir um tabuleiro de tamanho n com posições numeradas de 0 a $n-1$, com quadrados pretos e brancos onde não pode-se empilhar peças. Definimos os ladrilhos t de peso

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ aq^i, & \text{se } t \text{ é um quadrado preto na posição } i. \end{cases}$$

Então obtemos

$$|X_n|_q = (1+a)(1+aq) \cdots (1+aq^{n-1}).$$

Definimos W_n como o conjunto de ladrilhamentos infinitos construídos a partir de todas as maneiras possíveis de preencher um tabuleiro $1 \times \infty$ com quadrados brancos e exatamente n quadrados pretos onde pode-se empilhar peças pretas. O peso de um ladrilho t nesse conjunto é dado por

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ z^m q^{mi}, & \text{se } t \text{ formado por } m \text{ peças pretas empilhadas na posição } i. \end{cases}$$

Para q -contar W_n , começando com n peças pretas empilhadas na posição 1 e então projetamos essas n peças juntamente. Obtemos neste caso

$$|W_n|_q = \frac{z^n q^n}{(q, q)_n}.$$

Também de modo análogo, com $1 \leq k \leq n$, teremos dois conjuntos: M_k o conjunto de todos ladrilhamentos infinitos construídos a partir de todas as maneiras possíveis de preencher um tabuleiro infinito com posições numeradas começando do 0 usando quadrados brancos e exatamente k quadrados pretos onde não se pode empilhar peças, e Z_{n-k} o conjunto de todos os ladrilhamentos infinitos construídos a partir de todas as maneiras possíveis de preencher um tabuleiro $1 \times \infty$ com quadrados brancos e exatamente $n - k$ quadrados pretos, onde pode-se empilhar as peças pretas.

Aplicando a mesma operação que preserva peso descrita no Teorema 2.15 temos uma bijeção, fixado n , entre os pares ordenados de $X_n \times W_n$ e $M_k \times Z_{n-k}$. Assim teremos a igualdade de funções geradoras,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+a)(1+aq) \cdots (1+aq^{n-1})}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} z^n q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+azq^n)}{(1-zq^n)},$$

e portanto, segue o resultado. □

O seguinte resultado encontra-se como um exercício combinatorial em [20]. Como este pode ser visto através do Lema 2.24, obtemos, portanto, uma resposta a questão proposta.

Teorema 2.25. ([20], pag 17) *Para qualquer número complexo $|q| < 1$*

$$(1+a) \sum_{r=m}^n \frac{(1+abq)(1+abq^2) \cdots (1+abq^{r-1})}{(1-bq)(1-bq^2) \cdots (1-bq^r)} bq^r = \prod_{i=1}^n \frac{(1+abq^i)}{(1-bq^i)} - \prod_{j=1}^{m-1} \frac{(1+abq^j)}{(1-bq^j)}.$$

Demonstração:

Uma vez que

$$\begin{aligned} \sum_{r=m}^n \frac{(1+a)(1+abq)(1+abq^2) \cdots (1+abq^{r-1})}{(1-bq)(1-bq^2) \cdots (1-bq^r)} bq^r &= \\ \sum_{r=1}^n \frac{(1+a)(1+abq)(1+abq^2) \cdots (1+abq^{r-1})}{(1-bq)(1-bq^2) \cdots (1-bq^r)} bq^r &- \end{aligned}$$

$$\sum_{r=1}^{m-1} \frac{(1+a)(1+abq)(1+abq^2)\cdots(1+abq^{r-1})}{(1-bq)(1-bq^2)\cdots(1-bq^r)} bq^r,$$

e fazendo $q^i = bq^i$ e $z = 1$ no Lema 2.24, segue o resultado. □

Lema 2.26. *Para qualquer número complexo $|q| < 1$ e n inteiro positivo fixado,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-cb^{-1})(1-cb^{-1}q)(1-cb^{-1}q^2)\cdots(1-cb^{-1}q^{k-1})b^k q^{k.n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{i=0}^{\infty} \frac{(1-cq^{n+i})}{(1-bq^{n+i})}.$$

Demonstração:

De modo análogo ao Teorema 2.15 teremos uma bijeção entre o pares de ladrilhamentos em $X_n \times W_n$ e $M_k \times Z_{n-k}$, com a seguinte mudança no peso e onde os ladrilhamentos infinitos tem posições numeradas a partir de n . Definimos o peso dos ladrilhos em X_n como

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ -cb^{-1}q^i, & \text{se } t \text{ é um quadrado preto na posição } i, \end{cases}$$

e o peso dos ladrilhos em W_n como

$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco,} \\ b^m q^{mi}, & \text{se } t \text{ formado por } m \text{ peças pretas empilhada na posição } i. \end{cases}$$

O peso em Z_{n-k} e M_k seguem da maneira induzida idem no Teorema 2.15. □

CAPÍTULO 3

PROVAS VIA LADRILHAMENTOS PARA IDENTIDADES ENVOLVENDO OS NÚMEROS DE JACOBSTHAL E JACOBSTHAL-LUCAS

Este capítulo é uma contribuição a uma nova interpretação de uma série de identidades envolvendo sequências conhecidas que podem ser provadas através de ladrilhamento. Aqui deixaremos de fazer q -contagens para fazer contagens de conjuntos de ladrilhamento. Após estudo do livro *Proofs that Really Count*, [4], onde são colocadas, entre outras, identidades envolvendo números de Fibonacci e números de Lucas provadas via ladrilhamento e a leitura do artigo [5] onde identidades envolvendo os números de Pell foram provadas via ladrilhamento, surgiu a ideia de provar algumas das várias identidades de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas utilizando as mesmas técnicas existentes.

Desta forma, o que vemos aqui não são novas identidades mas uma nova interpretação para essas identidades existentes. No entanto, essa nova caracterização nos leva a descoberta de generalizações de alguns teoremas q -análogos mostrados no próximo capítulo.

Assim tomando as identidades de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas em [11], daremos uma nova interpretação para as identidades via ladrilhamento. Em alguns momentos serão necessárias mani-

pulações algébricas para determinar as identidades em termos de ladrilhamentos.

3.1 Identidades de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas

3.1.1 Interpretação Combinatória dos Números de Jacobsthal

Em primeiro lugar, recordemos a definição dos números de Jacobsthal dada a seguir. O n -ésimo número de Jacobsthal é definido por

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3},$$

para $n \geq 0$, e generalizando obtemos os números da forma

$$J_n^s = \frac{s^n - (-1)^n}{s + 1},$$

onde $n \geq 0$ é um número natural e $s \geq 0$ é um número real. Ainda podemos defini-los pela relação de recorrência

$$J_0^s = 0, J_1^s = 1, J_n^s = (s - 1)J_{n-1}^s + sJ_{n-2}^s, \quad n \geq 2.$$

Considere a_n o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro de ordem $1 \times n$ utilizando quadrados brancos, dominós pretos e dominós cinzas.

Para $n = 0$, temos que $a_0 = 1 = J_1$, equivalente ao ladrilhamento vazio. Para $n = 1$, temos que $a_1 = 1 = J_2$, correspondente ao 1-ladrilhamento coberto com um quadrado branco. Para $n = 2$, temos que $a_2 = 3 = J_3$, correspondente ao 2-ladrilhamento coberto com dois quadrados brancos, ou por um dominó preto ou por um dominó cinza.

Considere agora os ladrilhamentos no conjunto contado por a_n . Esse conjunto pode ser dividido em dois subconjuntos disjuntos: subconjunto dos ladrilhamentos terminados em quadrado e subconjunto dos ladrilhamentos terminados em dominó, respectivamente. O primeiro é contado por a_{n-1} e o segundo por $2a_{n-2}$, pois há 2 opções de cores para os dominós.

Assim, temos que $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, com condições iniciais $a_0 = 1$ e $a_1 = 1$, e portanto podemos afirmar que $a_n = J_{n+1}$.

Exemplo 3.1. Para $n = 1$ temos o ladrilhamento da Figura 3.1:

Exemplo 3.2. Para $n = 2$ temos 3 ladrilhamentos da Figura 3.2 :



Figura 3.1: Ladrilhamento para $n = 1$



Figura 3.2: Ladrilhamentos para $n = 2$

Exemplo 3.3. Para $n = 3$ temos 4 ladrilhamentos da Figura 3.3:



Figura 3.3: Ladrilhamentos para $n = 4$

Nesta seção iremos listar as identidades e, em termos de conjuntos de ladrilhamentos, prová-las usando técnicas apresentadas em [4]. Como corolários obtemos as identidades envolvendo os números de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas que podem ser vistas em [11].

Lema 3.4. Para $n \geq 0$, segue que

$$a_n = \sum_{r \geq 0} \binom{n-r}{r} 2^r. \quad (3.1)$$

Demonstração: No lado esquerdo da igualdade temos o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro de ordem $1 \times n$ utilizando quadrados brancos, dominós pretos e dominós cinzas.

Consideremos agora o número de tabuleiros de ordem $1 \times n$ ladrilhados com quadrados brancos e exatamente r dominós pretos e cinzas. Então, uma cobertura deste tipo têm $n - 2r$ quadrados brancos e $n - 2r + r = n - r$ peças a serem utilizadas. Assim temos $\binom{n-r}{r}$ maneiras de escolher em quais posições ficam os dominós e 2^r maneiras de escolha das suas cores. Desta forma, existem

$\binom{n-r}{r}2^r$ ladrilhamentos com exatamente r dominós e $n - 2r$ quadrados brancos. (Observemos que r não ultrapassa o valor de $\lfloor n/2 \rfloor$.) Somando em r obtemos o resultado desejado.

□

Aplicando o fato de que $a_n = J_{n+1}$, decorre do Lema (3.4) a Identidade 1.7 em [11] :

$$J_n = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-r}{r} 2^r. \tag{3.2}$$

Teorema 3.5. *Para todo $n \geq 0$ temos*

$$a_{n-1} + a_n = 2^n. \tag{3.3}$$

Demonstração: A prova é feita contando as sequências binárias de tamanho n . Pelo Princípio Multiplicativo temos que o número de sequências binárias de tamanho n é 2^n . Podemos dividir o conjunto S das sequências binárias de tamanho n em dois subconjuntos disjuntos S_1 e S_2 , onde S_1 é o conjunto das sequências que começam com o número 1 e S_2 é o conjunto das sequências que começam com o número 0. O conjunto S_2 pode ainda ser subdividido em dois subconjuntos disjuntos S_3 e S_4 , onde S_3 é o conjunto das sequências que começam com 0 e têm um número ímpar de zeros consecutivos e S_4 é o conjunto das sequências que começam com 0 e têm um número par de zeros consecutivos.

Exemplo 3.6. *Por exemplo: $10010111 \in S_1, 01001101 \in S_4, 000100 \in S_4$ e $00001011 \in S_3$.*

Podemos então escrever que $2^n = |S| = |S_1| + |S_3| + |S_4|$. Considere todas as maneiras de ladrilhar um tabuleiro de ordem $1 \times n$ utilizando quadrados brancos, dominós pretos e dominós cinzas. Dado um n -ladrilhamento deste tipo podemos associá-lo a uma única sequência binária convertendo cada quadrado branco para o número 1, cada dominó cinza na sequência 00 e cada dominó preto na sequência 10.

Exemplo 3.7. *Observemos as associações na Figura 3.4:*

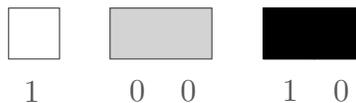


Figura 3.4: Associação sequência-ladrilho

As sequências binárias de tamanho n resultantes desta associação são aquelas que começam com o número 1 (n -ladrilhamentos que começam com quadrado branco ou dominó preto) e as que começam com o número 0 e tem, consecutivamente, um número ímpar de números iguais a 0 (n -ladrilhamentos que começam com dominó cinza).

Exemplo 3.8. Na Figura 3.5 considere a associação de um ladrilhamento com uma sequência começando com o número 0 seguido de um número zero.



Figura 3.5: sequência começada em zero com um número zero consecutivo

Reciprocamente, dada uma sequência em $S_1 \cup S_3$, podemos, olhando da direita para a esquerda, obtermos unicamente uma maneira de ladrilhar um tabuleiro de ordem $1 \times n$ utilizando quadrados brancos, dominós pretos e dominós cinzas. Assim existem a_n sequências binárias em $S_1 \cup S_3$. Note que as sequências de tamanho n em S_4 não podem ser associadas desta maneira pois não há representação para o símbolo 0 em termos de ladrilho.

Exemplo 3.9. Considere as associações para $n = 3$ das sequências em $S_1 \cup S_3$ dadas na Figura 3.6.



Figura 3.6: Sequências em $S_1 \cup S_3$ para $n = 3$.

Exemplo 3.10. Considere as associações para $n = 4$ das sequências em $S_1 \cup S_3$ dadas na Figura 3.7.

Exemplo 3.11. Note que a soma dos ladrilhamentos dados nas Figuras 3.6 e 3.7 é igual a $16 = 2^4$.

Assim, as únicas sequências que não são contadas são aquelas que começam com 0 e tem, consecutivamente, um número 1 ou um número par de números iguais a 0, ou seja, as sequências binárias de tamanho n do conjunto S_4 .

Afirmamos que $|S_4| = a_{n-1}$.

Dada uma sequência de tamanho n começando com 0 seguido de um número 1, podemos retirar o 0 da primeira posição e obter uma sequência binária de tamanho $(n - 1)$ começando com 1.

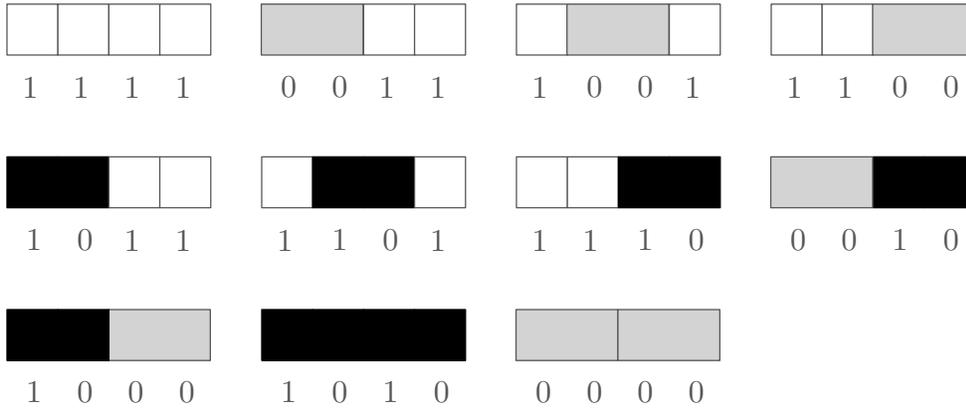


Figura 3.7: Sequências em $S_1 \cup S_3$ para $n = 4$.



Figura 3.8: 3-ladrilhamento associado a sequência 101

Exemplo 3.12. A sequência 0101 é associada a sequência 101 cuja representação em termos de ladrilho é dado pela Figura 3.8.

Em outro caso, dada uma sequência de tamanho n começando com 0 seguido de um número par de números iguais a 0, podemos retirar o 0 da primeira posição e obter uma sequência binária de tamanho $(n - 1)$ começando com 0 tendo, consecutivamente, um número ímpar de números iguais a 0.

Exemplo 3.13. Por exemplo a sequência 0001 é associada a sequência 001, cuja representação é dada pela Figura 3.9.

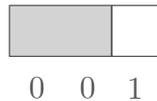


Figura 3.9: 3-ladrilhamento associado a sequência 001

Assim, dada uma sequência de S_4 podemos associá-la uma sequência de tamanho $(n - 1)$ que começa com o número 1 ($(n - 1)$ -ladrilhamentos que começam com quadrado branco ou dominó preto) ou uma que começa com o número 0 e tem, consecutivamente, um número ímpar de números

iguais a 0 ($(n - 1)$ ladrilhamentos que começam com dominó cinza). O número de seqüências deste tipo é dada por a_{n-1} .

Reciprocamente, dada uma seqüência de tamanho $(n - 1)$ associada a um $(n - 1)$ -ladrilhamento, colocando um número zero antes da seqüência, obtemos uma seqüência de tamanho n começando com 0, tendo, consecutivamente, um número 1 ou um número par de números iguais a 0. Observe-mos que esta operação está bem definida e é bijetiva portanto temos $|S_4| = a_{n-1}$.

Exemplo 3.14. Para $n=3$ temos as seqüências da Figura 3.10 de tamanho 4 associadas.

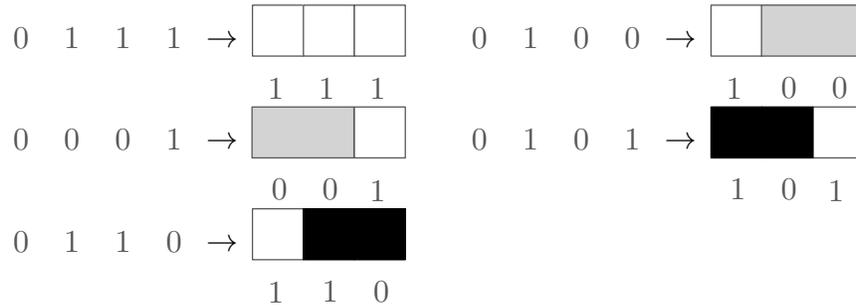


Figura 3.10: Seqüência em S_4 associadas a ladrilhamentos para $n = 3$.

Portanto, para dado n , teremos $2^n = |S_1| + |S_3| + |S_4| = a_n + a_{n-1}$, e segue a identidade.

□

Aplicando o fato de que $a_n = J_{n+1}$, decorre do Teorema 3.5 a Identidade 2.12 em [11], $J_n + J_{n+1} = 2^n$.

Teorema 3.15. Para todo $n \geq 0$,

$$2 \sum_{i=0}^n a_i = a_{n+2} - 1. \tag{3.4}$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (3.4) é o número de possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro $1 \times (n + 2)$ usando quadrados brancos, dominós pretos e cinzas, excluindo o ladrilhamento contendo apenas quadrados brancos.

Considere agora a localização do último dominó em um tabuleiro. Existem $2a_k$ ladrilhamentos onde o último dominó cobre as células $k + 1$ e $k + 2$, uma vez que as células de 1 a k são ladrilhadas de a_k maneiras, as células $k + 1$ e $k + 2$ são cobertas por um dominó cinza ou um dominó preto, e as células de $k + 3$ até $n + 2$ são cobertas por quadrados brancos. Veja a Figura 3.11.

Portanto, o número de maneiras de cobrir um tabuleiro $1 \times (n + 2)$ usando quadrados brancos, dominós pretos e cinzas, com pelo menos um dominó é $2a_0 + 2a_1 + \dots + 2a_n$, ou equivalentemente

$$2 \sum_{i=0}^n a_i.$$

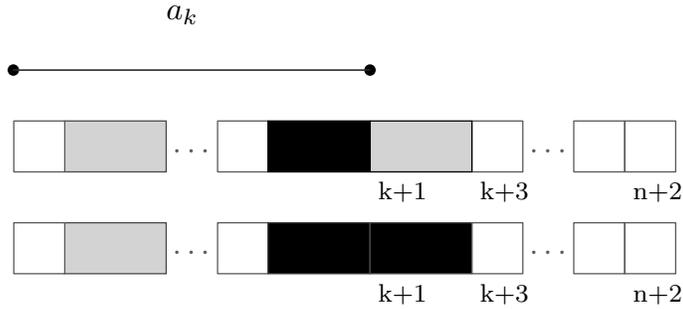


Figura 3.11: Ladrilhamento $1 \times (n + 2)$

□

Usando a Identidade (3.4), fazendo as mudanças de variáveis: $i + 1$ para i e $n + 1$ para n , e como $a_0 = J_1 = 1$, segue como corolário do Teorema 3.15, a Identidade 2.7 em [11],

$$\sum_{i=2}^n J_i = \frac{J_{(n+2)} - 3}{2}. \quad (3.5)$$

Teorema 3.16. Para todo $n \geq 0$,

$$a_{2n+1} = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} a_{2i}. \quad (3.6)$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade conta o número de possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro $1 \times (2n + 1)$ usando quadrados brancos, dominós pretos e cinzas.

Como $2n + 1$ é ímpar então cada ladrilhamento deve conter um número ímpar de quadrados brancos e o último quadrado branco deve estar em uma posição ímpar. Vamos fazer a contagem pela posição do último quadrado branco no ladrilhamento. Suponha que o último quadrado branco se encontre na posição $2i + 1$. Veja a Figura 3.12

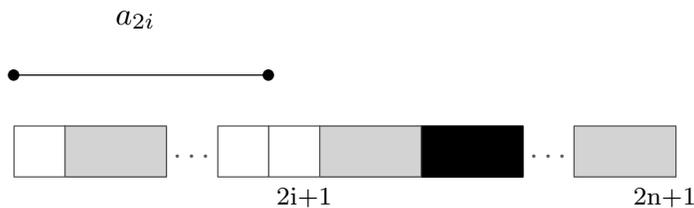


Figura 3.12: Ladrilhamento $1 \times (2n + 1)$

Do lado esquerdo temos um $(2i)$ - ladrilhamento contado por a_{2i} , e do lado direito restaram $2(n - i)$ posições que devem ser cobertas apenas por dominós, como existem duas cores possíveis, isso pode ser feito de 2^{n-i} maneiras. Somando de 0 até n , obtemos o resultado.

□

Aplicando o fato de que $a_n = J_{n+1}$ na Identidade (3.6) obtemos a identidade

$$J_{2n+2} = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} J_{2i+1}$$

que pode ser vista como um caso particular do Lema 12 em [5] para os parâmetros $a = 1$ e $b = 2$.

Para os próximos resultados vamos utilizar a definição de ladrilhamento separável.

Teorema 3.17. *Para todo $n \geq 0$,*

$$a_m a_{n+1} + 2a_n a_{m-1} = a_{m+n+1}. \quad (3.7)$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (3.7) é o número de possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro $1 \times (m + n + 1)$ usando quadrados brancos e dominós pretos e cinzas.

Consideremos agora as condições de decomposição de um ladrilhamento deste tipo. Se um $(m + n + 1)$ -ladrilhamento é *separável* na célula m , então podemos criar um m -ladrilhamento seguido de um $(n + 1)$ -ladrilhamento. Existem $a_m a_{n+1}$ possibilidades de cobrir um tabuleiro de tamanho $(m + n + 1)$ - de forma que este seja *separável* na célula m . Veja a Figura 3.13.

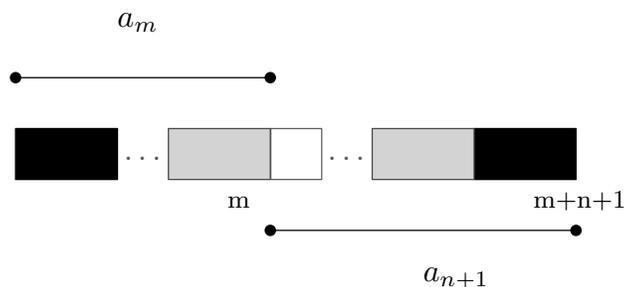


Figura 3.13: Ladrilhamento $1 \times (m + n + 1)$ separável na posição m

Caso contrário, existirá um dominó, preto ou cinza, cobrindo a células m e $m + 1$. Então podemos criar um $(m - 1)$ -ladrilhamento seguido de um dominó que por sua vez é seguido de um n -ladrilhamento. Isso pode ser feito de $2a_n a_{m-1}$ maneiras. Veja a Figura 3.14.

Como não é possível um ladrilhamento ser *separável* e *não separável* na célula m , simultaneamente, existem $a_m a_{n+1} + 2a_n a_{m-1}$ possibilidades de cobrir um tabuleiro de tamanho $(m + n + 1)$ usando quadrados brancos, dominós pretos e cinzas.

□

Usando a Identidade 2.10 em [11] que nos diz que $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$; e usando o fato de que $a_n = J_{n+1}$, segue como consequência do Teorema 3.17 a Identidade 2.24 em [11]

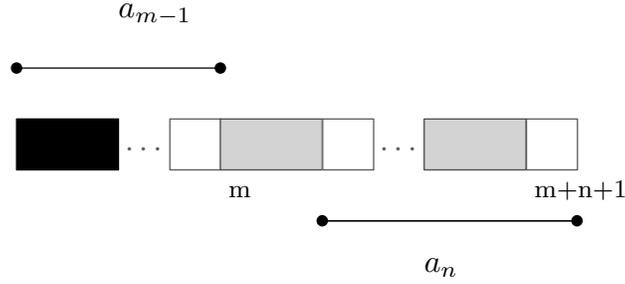


Figura 3.14: Ladrilhamento $1 \times (m + n + 1)$ não separável na posição m

$$J_m J_n + J_n J_m = 2J_{m+n}. \quad (3.8)$$

Este corolário a seguir tem motivação no fato de que no artigo [5] alguns resultados sobre divisão foram relevantes.

Corolário 3.18. Para todo $n \geq 0$, a_n divide $\sum_{i=0}^n 2^{n-i} a_{2i}$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.17, com $n = m$, temos que $a_n a_{n+1} + 2a_n a_{n-1} = a_{2n+1}$, ou ainda, $a_n(a_{n+1} + 2a_{n-1}) = a_{2n+1}$.

Portanto, $a_{2n+1} = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} a_{2i}$, pelo Teorema 3.16, é múltiplo de a_n .

□

Para a próxima identidade usaremos a técnica de trocar caudas.

Teorema 3.19. Para todo $n \geq 1$,

$$a_n^2 = a_{n+1} a_{n-1} + (-1)^n 2^n. \quad (3.9)$$

Demonstração: Temos a_n^2 maneiras de cobrir um par tabuleiros de tamanho n usando quadrados brancos e dominós pretos e cinzas. Também temos $a_{n+1} a_{n-1}$ maneiras de preencher um tabuleiro de tamanho $n + 1$ e um tabuleiro de tamanho $n - 1$, colocados um sobre o outro, usando quadrados brancos, dominós pretos e cinzas.

Vamos dividir a prova em dois casos dependendo da paridade de n . Se n é ímpar, então existe pelo menos um quadrado branco nos dois n -ladrilhamentos e portanto o par contém uma falha e conseqüentemente uma cauda. Portanto, trocando as caudas do par obtemos um $(n + 1)$ -ladrilhamento e um $(n - 1)$ -ladrilhamento com as mesmas falhas. Essa correspondência entre todos os pares de n -ladrilhamentos contendo falhas e os pares formados por um $(n + 1)$ -ladrilhamento e um $(n - 1)$ -ladrilhamento está bem definida. No entanto, para torná-la

biunívoca, devemos descontar os pares formados por um $(n+1)$ -ladrilhamento e um $(n-1)$ -ladrilhamento contendo apenas dominós, pois estes não contém falhas. Ou ainda, devemos descontar as $2^{\{\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}\}} = 2^n$ maneiras de preencher um tabuleiro de tamanho $n+1$ e um tabuleiro de tamanho $n-1$, apenas usando dominós pretos e dominós cinzas. Logo temos $a_n^2 = a_{n+1}a_{n-1} - 2^n$ para n ímpar. Veja a Figura 3.15



Figura 3.15: 12-ladrilhamento e 10-ladrilhamento cobertos apenas por dominós

Quando n é par, aplicamos o mesmo argumento anterior para obter uma correspondência biunívoca entre todos os pares de n -ladrilhamentos e todos os pares formados por um $(n+1)$ -ladrilhamento e um $(n-1)$ -ladrilhamento contendo falhas. Nesse caso, o ladrilhamento contendo apenas dominós é o único ladrilhamento que compõe um par de n -ladrilhamentos sem falhas. Logo temos que descontar as 2^n maneiras de cobrir um par de tabuleiros $1 \times n$ usando dominós pretos e dominós cinzas do total de ladrilhamentos a_n^2 . Veja a Figura 3.16. Assim temos $a_n^2 - 2^n = a_{n+1}a_{n-1}$, para n par, o que completa a prova.

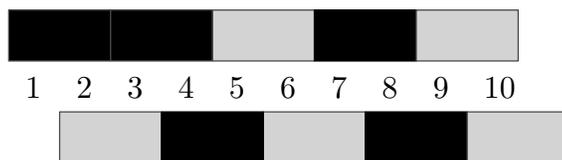


Figura 3.16: Par formado por dois 10-ladrilhamentos cobertos apenas por dominós

□

Usando a Identidade 3.9, fazendo a mudança de variável $n+1$ para n , segue como corolário do Teorema 3.19, a Identidade 2.5 em [11]

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{(n-1)}.$$

3.1.2 Interpretação Combinatória para os Números de Jacobsthal-Lucas

No Livro [4] é apresentado uma caracterização para os Números de Lucas em termos de braceletes. Como na literatura, as identidades envolvendo as sequências de Fibonacci e Lucas se assemelham com as identidades envolvendo as sequências de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas, então nada mais natural do que termos uma interpretação para os números de Jacobsthal-Lucas em termos de braceletes.

Assim, vamos agora dar uma interpretação combinatória para os números j_n de Jacobsthal-Lucas. Para tanto faremos uso da definição de **bracelete** *fora de fase* e *em fase*.

Com abuso de linguagem, defina j_n o número de possibilidades de cobrir um tabuleiro circular com n posições rotuladas no sentido horário, usando quadrados brancos e dominós “curvos” de cores preta e cinza, ou ainda, o número de n -braceletes com quadrados brancos, dominós cinzas e pretos. Observe que existem mais n -braceletes do que n -ladrilhamentos, pois para braceletes podemos ter um dominó na posição $(n, 1)$. Temos que $j_0 = 2$, por convenção, $j_1 = 1$; $j_2 = 5$ e $j_3 = 7$.

O conjunto de braceletes podem ser subdivididos em dois conjuntos disjuntos: braceletes em fase e braceletes fora de fase. Dado um n -bracelete *em fase*, podemos “esticá-lo” tornando-o um n -ladrilhamento, logo existem a_n n -braceletes *em fase*. Para o caso de um bracelete *fora de fase*, podemos remover o dominó que cobre as células n e 1 e “esticá-lo” obtendo um ladrilhamento de comprimento $n - 2$. Assim, como existem duas possibilidades de cores para este dominó, o número de n -braceletes fora de fase é $2a_{n-2}$.

Assim, temos que $j_n = a_n + 2a_{n-2}$, com condições iniciais $j_0 = 2$, por convenção, e $j_1 = 1$, e portanto o n -ésimo número de Jacobsthal-Lucas é exatamente o número de n -braceletes com quadrados brancos, dominós cinzas e pretos.

Exemplo 3.20. Para $n = 1$ temos único o bracelete dado na Figura 3.17

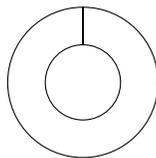


Figura 3.17: Bracelete para $n = 1$.

Exemplo 3.21. Para $n = 2$ temos três braceletes em fase dados na Figura 3.18 e dois fora de fase dados na Figura 3.19.

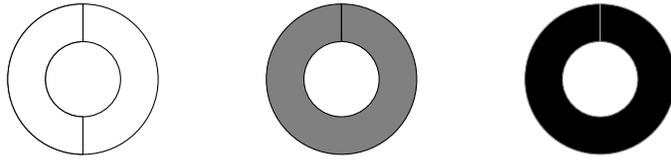


Figura 3.18: Braceletes em fase para $n = 2$.

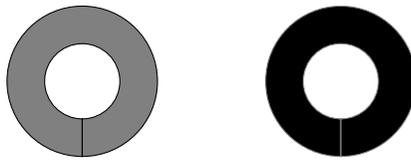


Figura 3.19: Braceletes fora de fase para $n = 2$.

Exemplo 3.22. Para $n = 3$ temos os quatro braceletes em fase dados na Figura 3.21 e três fora de fase dados na Figura 3.20.

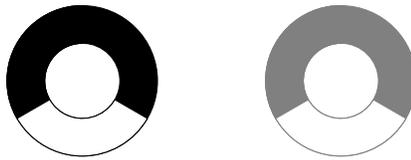


Figura 3.20: Braceletes fora de fase para $n = 3$.

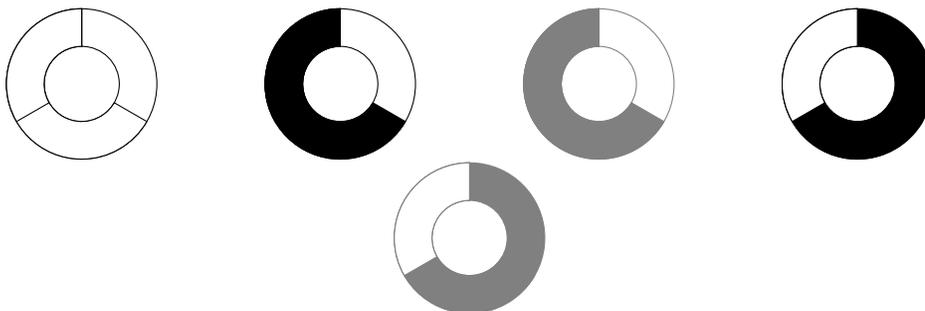


Figura 3.21: Braceletes em fase para $n = 3$.

O Lema 3.23 caracteriza o n -ésimo número de Jacobsthal-Lucas como sendo o número de maneiras de preencher um n -tabuleiro "curvo" com quadrados brancos, dominós cinzas e pretos, e assim determina uma interpretação combinatória para esses números.

Defina $a_{-1} = a_{-2} = 0$.

Lema 3.23. *Para todo $n \geq 0$,*

$$j_n = a_n + 2a_{n-2}. \quad (3.10)$$

Como consequência do Lema 3.23 segue a relação de recorrência 2.10 em [11], $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$. Ainda utilizando o Lema 3.23 podemos provar a seguinte identidade.

Teorema 3.24. *Para todo $n \geq 1$*

$$j_n = \sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r. \quad (3.11)$$

Demonstração: Do lado esquerdo da igualdade (3.11) temos braceletes de tamanho n , ou ainda, o número de possibilidades preencher de um tabuleiro circular de ordem $1 \times n$ usando quadrados brancos, dominós “curvos” pretos e cinzas.

Por outro lado, considere braceletes com exatamente r dominós. Com a mesma argumentação do Lema 3.4 temos que existem $\binom{n-r}{r} 2^r$ braceletes *em fase* e $\binom{n-r-1}{r-1} 2^r$ braceletes *fora de fase*, uma vez que um dos dominós já é escolhido para as células n e 1 . Como

$$\binom{n-r-1}{r-1} 2^r = \frac{r}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r,$$

temos, somando em r , que o número de braceletes de tamanho n é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 0} \left[\binom{n-r}{r} 2^r + \frac{r}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r \right] &= \\ \sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r & \end{aligned}$$

como desejado. □

A Identidade (3.11) pode ser obtida como caso particular do Teorema 15 em [5] para os parâmetros $a = 1$ e $b = 2$.

Teorema 3.25. *Para todo $n \geq 0$,*

$$2 \sum_{i=0}^n j_i = j_{n+2} - 1. \quad (3.12)$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (3.12) é o número de $(n + 2)$ -braceletes excluindo o bracelete contendo apenas quadrados brancos, ou ainda, o número de possibilidades de preencher de um tabuleiro circular de ordem $1 \times (n + 2)$ usando quadrados brancos, dominós “curvos” pretos e cinzas, excluindo a possibilidade de termos todas as posições preenchidas com quadrados brancos.

Considere agora a localização do último dominó. Existem duas possibilidades a serem consideradas. Se o $(n + 2)$ -bracelete está *em fase* existem $2a_k$ possibilidades de ladrilhar um tabuleiro onde o último dominó cobre as células $k + 1$ e $k + 2$, uma vez que as células de 1 a k são ladrilhadas de a_k maneiras, as células $k + 1$ e $k + 2$ são cobertas por um dominó cinza ou um dominó preto, e as células de $k + 3$ até $n + 2$ são cobertas por quadrados brancos. Veja a Figura 3.22.

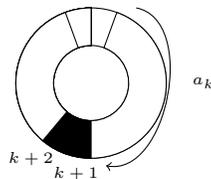


Figura 3.22: $(n + 2)$ -bracelete em fase

Caso contrário, teremos um dominó, preto ou cinza, ocupando as posições $n + 2$ e 1; e portanto existem $4a_{k-2}$ maneiras de ladrilhar onde o último dominó cobre as células k e $k + 1$, uma vez que as células de 2 a $k - 1$ são ladrilhadas de a_{k-2} maneiras, os pares de células $(k, k + 1)$, e $(n + 2, 1)$ são cobertas por um dominó cinza ou um dominó preto e as células de $k + 2$ até $n + 1$ são cobertas por quadrados brancos. Veja as Figura 3.23.

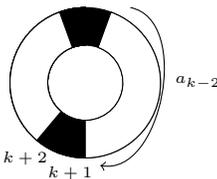


Figura 3.23: $(m + 2)$ -bracelete fora de fase

Assim, o número de $(n + 2)$ -braceletes com pelo menos um dominó é $2(a_0 + 2a_{-2}) + 2(a_1 + 2a_{-1}) + \dots + 2(a_n + 2a_{n-2})$ ou equivalentemente, pela equação (3.10), $2 \sum_{i=0}^n j_i$. □

Como $j_0 = 2$, e definindo $a_{-2} = 0$, temos como consequência do Teorema 3.25 a Identidade 2.8 em [11]:

$$\sum_{i=2}^n j_i = \frac{j_{n+2} - 5}{2}. \quad (3.13)$$

Teorema 3.26. *Para todo $n \geq 0$,*

$$j_{n+1}a_n = a_{2n+1}. \quad (3.14)$$

Demonstração: Do lado direito da igualdade 3.14 temos o número de maneiras de cobrir um tabuleiro de tamanho $2n + 1$ usando quadrados brancos, dominós pretos e cinzas.

Consideremos agora as condições de decomposição de um ladrilhamento. Se um $(2n + 1)$ -ladrilhamento é separável na célula $n + 1$, então podemos criar um $(n + 1)$ -bracelete *em fase* seguido de um n -ladrilhamento. Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células $n + 1$ e $n + 2$, e portanto o $(2n + 1)$ -ladrilhamento será separável na célula n . Assim, podemos criar um n -ladrilhamento seguido de um $(n + 1)$ -bracelete *fora de fase*, onde a primeira célula do bracelete é a correspondente a célula $n + 2$ do $(2n + 1)$ -ladrilhamento.

Assim, como existem j_{n+1} braceletes de tamanho $n + 1$ *fora de fase* e *em fase*, existem $j_{n+1}a_n$ ladrilhamentos desse tipo seguindo o resultado.

□

Observemos que esse resultado também pode ser visto como corolário do Teorema (3.17) tomando $m = n$. Fazendo a mudança da variável $n + 1$ para n na equação (3.14) obtemos a Identidade 2.9 em [11], $j_n J_n = J_{2n}$, como corolário do Teorema 3.26.

Teorema 3.27. *Para todo $n \geq 0$,*

$$a_{n-1} + j_n = 2a_n. \quad (3.15)$$

Demonstração: Do lado direito da igualdade (3.15) temos duas cópias de n -ladrilhamentos, ou seja, duas cópias de cada maneira possível de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times n$ usando quadrados brancos, dominós cinzas e pretos. Consideremos os n -ladrilhamentos agrupados em dois tipos: finalizando em quadrado branco e finalizando em dominó (cinza ou preto).

Dadas duas cópias de um n -ladrilhamento terminados em dominó podemos criar um n -bracelete *em fase* concatenando com o dominó cobrindo as células $n - 1$ e n ; e um n -bracelete *fora de fase* deslocando as peças em uma posição para a direita e concatenando com o dominó cobrindo as células n e 1 .

Considere agora uma das cópias do n -ladrilhamento terminado em quadrado branco. Podemos associá-lo a um bracelete terminado em quadrado branco e portanto, como essa relação é biunívoca temos que o dobro do número de n -ladrilhamentos terminados em dominó mais o número de n -ladrilhamentos terminado em quadrado branco é igual a j_n .

No entanto, existem a_{n-1} ladrilhamentos de tamanho n terminados em quadrado branco restantes, portanto temos a igualdade $a_{n-1} + j_n = 2a_n$.

□

Como $a_n = J_{n+1}$, a Identidade 2.20 em [11], $J_n + j_n = 2J_{n+1}$, segue do Teorema 3.27.

Corolário 3.28. *Para todo $n \geq 0$,*

$$j_{n+1} + j_n = 3 \sum_{k \geq 0} \binom{n+1}{2k}. \quad (3.16)$$

Demonstração: Pelo Lema 3.23 e Teorema 3.5 temos que

$$j_{n+1} + j_n = a_{n+1} + 2a_{n-1} + j_n = (a_{n+1} + a_{n-1}) + (a_{n-1} + j_n)$$

$$j_{n+1} + j_n = (a_{n+1} + a_{n-1}) + 2a_n = 2a_n + a_n + 2a_{n-1} + a_{n-1}$$

$$j_{n+1} + j_n = 3(a_n + a_{n-1}) = 3 \sum_{k \geq 0} \binom{n+1}{2k}.$$

□

Corolário 3.29. *Para todo $n \geq 0$,*

$$3a_{n-1} + j_n = 2 \sum_{k \geq 0} \binom{n+1}{2k}. \quad (3.17)$$

Demonstração: Pelo Lema (3.23) e Teorema (3.5) temos que

$$3a_{n-1} + j_n = 2a_{n-1} + (a_{n-1} + j_n) = 2(a_n + a_{n-1})$$

$$3a_{n-1} + j_n = 2 \sum_{k \geq 0} \binom{n+1}{2k}.$$

□

Através dos Corolários 3.28 e 3.29 podem ser obtidas as Identidades 2.12 e 2.19 em [11], respectivamente

$$j_{n+1} + j_n = 3 \cdot 2^n,$$

$$3a_{n-1} + j_n = 2^{n+1}.$$

A próxima identidade obtida não foi encontrada na literatura. Assim, ela pode ser vista como uma nova identidade envolvendo a soma dos números de Jacobsthal-Lucas.

Teorema 3.30. Para todo $n \geq 0$,

$$j_{2n+1} = \sum_{i \geq 0} 2^{n-i} j_{2i}. \quad (3.18)$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade é o número de $(2n + 1)$ -braceletes, ou ainda, o número de maneiras de preencher um tabuleiro circular com $2n + 1$ posições usando quadrados brancos, dominós “curvos” cinzas e pretos. Como $2n + 1$ é ímpar, cada bracelete deve conter um número ímpar de quadrados brancos.

Temos duas possibilidades. Caso o bracelete seja *em fase* o último quadrado branco irá ocupar uma posição ímpar. Temos $a_{2i}2^{n-i}$ maneiras de preencher um tabuleiro circular de tamanho $2n + 1$ usando quadrados brancos, dominós “curvos” cinzas e dominós “curvos” pretos de modo que o último quadrado branco se encontre na posição $2i + 1$, pois anterior a ele temos um $(2i)$ -ladrilhamento e posteriormente restam $2(n-i)$ posições que devem ser cobertas apenas por dominós; como existem duas cores possíveis de dominós, isso pode ser feito de 2^{n-i} maneiras, o que segue a contagem.

Caso contrário, teremos um dominó ocupando a posição $(2n + 1, 1)$, e portanto o número de maneiras de preencher um tabuleiro circular de tamanho $2n + 1$ usando quadrados brancos, dominós “curvos” cinzas e dominós “curvos” pretos de modo que o último quadrado branco se encontra na posição $2i$ e tenha um dominó na posição $(2n + 1, 1)$, será dado por $a_{2i-2}2^{n-i+1}$. De fato, anterior ao quadrado branco temos um $(2i - 2)$ -ladrilhamento e posteriormente restam $2(n - i)$ posições que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem duas cores possíveis de dominós, isso pode ser feito de 2^{n-i+1} maneiras, uma vez que o dominó na posição $(2n + 1, 1)$ também deve ser colorido. Assim, o número de $(2n + 1)$ -braceletes é dado por

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} 2^{n-i} a_{2i} + 2^{n-i+1} a_{2i-2} &= \\ \sum_{i \geq 0} 2^{n-i} (a_{2i} + 2a_{2i-2}) &= \\ \sum_{i \geq 0} 2^{n-i} j_{2i}, \end{aligned}$$

pelo Lema 3.23.

□

Teorema 3.31. Para todo $n, m \geq 0$,

$$j_m j_n + 9a_{m-1} a_{n-1} = 2j_{m+n}. \quad (3.19)$$

Demonstração: Considere o conjunto de todas as maneiras de preencher um tabuleiro circular de tamanho $m + n$ com quadrados brancos, dominós “curvos” cinzas e dominós “curvos” pretos. A cardinalidade desse conjunto é dada por j_{m+n} , o número de $(m + n)$ - braceletes. Assim, do lado direito da igualdade (3.19) temos a contagem de duas cópias de cada $(m + n)$ - bracelete .

A prova será feita associando uma cópia do bracelete às condições de separabilidade na célula m e outra às condições de separabilidade na célula $m - 1$.

De fato, dadas duas cópias de um $(m + n)$ -bracelete temos duas possibilidades: estarem *em fase* ou *fora de fase*. Considere, primeiramente o $(m + n)$ - bracelete *em fase*, então podemos associá-lo unicamente a um $(m + n)$ -ladrilhamento.

Assim, se o $(m + n)$ -ladrilhamento for separável na célula m , podemos decompor este em um m -ladrilhamento seguido de um n -ladrilhamento, e portanto temos $a_m a_n$ $(m + n)$ - braceletes em fase separáveis na célula m . Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células m e $m + 1$, e portanto podemos decompor este em um $(m - 1)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó (preto ou cinza), que por sua vez é seguido por um $(n - 1)$ -ladrilhamento. Existem, então, $2a_{m-1}a_{n-1}$ $(m + n)$ - braceletes em fase não separáveis na célula m .

Exemplo 3.32. Veja na Figura 3.24 as condições de separabilidade na m -ésima célula em um $(m + n)$ -bracelete em fase.

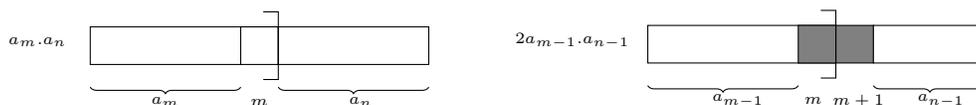


Figura 3.24: Separabilidade na m -ésima célula em um $(m + n)$ -bracelete em fase

Agora, tomando a outra cópia deste mesmo $(m + n)$ -bracelete *em fase*, vamos analisar as condições de separabilidade na célula $m - 1$. De forma análoga ao caso anterior, temos que se o $(m + n)$ -ladrilhamento for separável na célula $m - 1$, podemos decompor este em um $(m - 1)$ -ladrilhamento seguido de um $(n + 1)$ -ladrilhamento, e portanto temos $a_{m-1} a_{n+1}$ $(m + n)$ -braceletes *em fase separáveis* na célula $m - 1$. Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células $m - 1$ e m , e portanto podemos decompor este em um $(m - 2)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó (preto ou cinza), que por sua vez é seguido por um n -ladrilhamento. Existem, então, $2a_{m-2}a_n$ $(m + n)$ -braceletes em fase não separáveis na célula $m - 1$.

Exemplo 3.33. Veja na Figura 3.25 as condições de separabilidade na $(m - 1)$ -ésima célula em um $(m + n)$ -bracelete em fase.

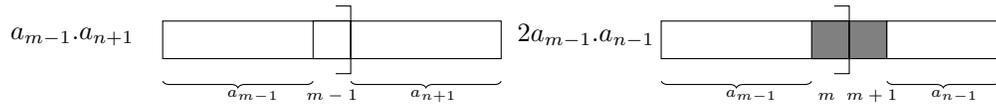


Figura 3.25: Separabilidade na $(m - 1)$ -ésima célula em um $(m + n)$ -bracelete em fase

Tome, agora, duas cópias de um $(m+n)$ -bracelete *fora de fase*, logo temos um dominó cobrindo as células $(m+n)$ e 1 ; e portanto podemos associá-lo a um $(m+n)$ -ladrilhamento terminado em dominó (observe que essa “bijeção” é 1-2).

Consideremos as condições de separabilidade na célula m . Se o $(m+n)$ -ladrilhamento terminado em dominó for separável na célula m , podemos decompor este em um m -ladrilhamento seguido de um $(n-2)$ -ladrilhamento, que por sua vez é seguido de um dominó e portanto temos $2a_m a_{n-2}$ $(m+n)$ -braceletes fora de fase separáveis na célula m . Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células m e $m+1$, e portanto podemos decompor este em um $(m-1)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó (preto ou cinza), que por sua vez é seguido por um $(n-3)$ -ladrilhamento, seguido de outro dominó (preto ou cinza). Segue, então, que temos $4a_{m-1} a_{n-3}$ $(m+n)$ -braceletes fora de fase não separáveis na célula m .

Exemplo 3.34. Veja na Figura 3.26 as condições de separabilidade na m -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete fora de fase.



Figura 3.26: Separabilidade na m -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete fora de fase

Tomando a outra cópia deste mesmo $(m+n)$ -bracelete *fora de fase*, vamos analisar as condições de separabilidade na célula $m-1$. De forma análoga ao caso anterior, temos que se o $(m+n)$ -ladrilhamento terminado em dominó for separável na célula $m-1$, podemos decompor este em um $(m-1)$ -ladrilhamento seguido de um $(n-1)$ -ladrilhamento, que por sua vez é seguido de um dominó (preto ou cinza) e portanto temos $2a_{m-1} a_{n-1}$ $(m+n)$ -braceletes fora de fase separáveis na célula $m-1$. Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células $m-1$ e m , e portanto

podemos decompor este em um $(m - 2)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó (preto ou cinza), que por sua vez é seguido por um $(n - 2)$ -ladrilhamento, seguido de outro dominó (preto ou cinza). Existem, então, $4a_{m-2}a_{n-2}$ $(m + n)$ -braceletes fora de fase na célula $m - 1$.

Exemplo 3.35. *Veja na Figura 3.27 as condições de separabilidade na $(m - 1)$ -ésima célula em um $(m + n)$ -bracelete fora de fase.*



Figura 3.27: Separabilidade na $(m - 1)$ -ésima célula em um $(m + n)$ -bracelete fora de fase

Portanto, temos que

$$2j_{m+n} = a_m a_n + 2a_{m-1} a_{n-1} + a_{m-1} a_{n+1} + 2a_{m-2} a_n + 2a_m a_{n-2} + 4a_{m-1} a_{n-3} + 2a_{m-1} a_{n-1} + 4a_{m-2} a_{n-2},$$

ou ainda,

$$2j_{m+n} = a_m a_n + 2a_{m-2} a_n + 2a_m a_{n-2} + 4a_{m-2} a_{n-2} + 4a_{m-1} a_{n-1} + a_{m-1} a_{n+1} + 4a_{m-1} a_{n-3},$$

$$2j_{m+n} = (a_m + 2a_{m-2})(a_n + 2a_{n-2}) + 4a_{m-1} a_{n-1} + a_{m-1} a_{n+1} + 4a_{m-1} a_{n-3}.$$

Como

$$a_{m-1} a_{n+1} + 4a_{m-1} a_{n-3} = a_{m-1} (a_n + 2a_{n-1}) + 4a_{m-1} \left(\frac{1}{2} (a_{n-1} - a_{n-2}) \right),$$

$$a_{m-1} a_{n+1} + 4a_{m-1} a_{n-3} = 2a_{m-1} a_{n-1} + a_{m-1} a_n + 2a_{m-1} a_{n-1} - 2a_{m-1} a_{n-2},$$

$$a_{m-1} a_{n+1} + 4a_{m-1} a_{n-3} = 4a_{m-1} a_{n-1} + a_{m-1} (a_n - 2a_{n-2}),$$

$$a_{m-1} a_{n+1} + 4a_{m-1} a_{n-3} = 5a_{m-1} a_{n-1},$$

logo, pelo Lema 3.23,

$$2j_{m+n} = (a_m + 2a_{m-2})(a_n + 2a_{n-2}) + 9a_{m-1}a_{n-1} = j_m j_n + 9a_{m-1}a_{n-1}.$$

□

A Identidade 2.25 em [11] dada por $j_m j_n + 9J_m J_n = 2j_{m+n}$, é obtida como corolário do Teorema 3.31.

Corolário 3.36. *Para todo $n \geq 0$,*

$$j_n^2 + 9(a_{n-1})^2 = 2j_{2n}. \quad (3.20)$$

Demonstração: Basta tomar $m = n$ no Teorema 3.31.

□

Teorema 3.37. *Para todo $n \geq 0$,*

$$9a_n = j_{n+2} + 2j_n. \quad (3.21)$$

Demonstração: Considere dois conjuntos: um formado por todas as maneiras de preencher um tabuleiro circular de tamanho n e outro formado por todas as maneiras de preencher um tabuleiro circular de tamanho $n+2$ ambos usando quadrados brancos, dominós “curvos” cinzas e dominós “curvos” pretos. Considere todas as maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times n$ usando quadrados brancos, dominós cinzas e dominós pretos. Seja S_1 o conjunto contendo 9 cópias de cada n -ladrilhamento e S_2 o conjunto formado pelos $(n+2)$ -braceletes ou duas cópias de cada n -bracelete. Temos que $|S_1| = 9a_n$ e $|S_2| = j_{n+2} + 2j_n$. Para provar essa identidade vamos estabelecer uma correspondência entre os conjuntos S_1 e S_2 .

Dado um n -ladrilhamento podemos criar naturalmente 7 braceletes:

1. $(n+2)$ - bracelete *em fase* terminado em dois quadrados brancos inseridos;
2. $(n+2)$ - bracelete *em fase* terminado em um dominó preto inserido;
3. $(n+2)$ - bracelete *em fase* terminado em um dominó cinza inserido;
4. $(n+2)$ - bracelete *fora de fase* com um dominó preto inserido nas células $(n+2, 1)$;
5. $(n+2)$ - bracelete *fora de fase* com um dominó cinza inserido nas células $(n+2, 1)$;
6. duas cópias de um (n) -bracelete *em fase* concatenando as células n e 1 .

Ainda estão faltando dois tipos de braceletes: n -braceletes *fora de fase* e $(n+2)$ -braceletes *em fase* terminados em quadrado branco com um dominó inserido cobrindo o par de célula $(n, n+1)$. Note que a construção de tais braceletes depende do n -ladrilhamento tomado. Se o n -ladrilhamento termina em dominó, criamos um n -braceletes *fora de fase* rotacionando o bracelete em uma célula no sentido horário, que contado com multiplicidade dois, soma as 9 cópias do n -ladrilhamento.

Caso contrário, ou ainda se o n -ladrilhamento termina em quadrado branco, criamos um $(n + 2)$ - bracelete *em fase* terminado em quadrado branco inserindo um dominó (preto ou cinza) cobrindo o par de célula $(n, n + 1)$. Teremos então dois $(n + 2)$ - braceletes desse tipo associados somando as 9 cópias do n -ladrilhamento, como queríamos.

Exemplo 3.38. Na Figura 3.28 veja como construir braceletes através de um dado n -ladrilhamento.

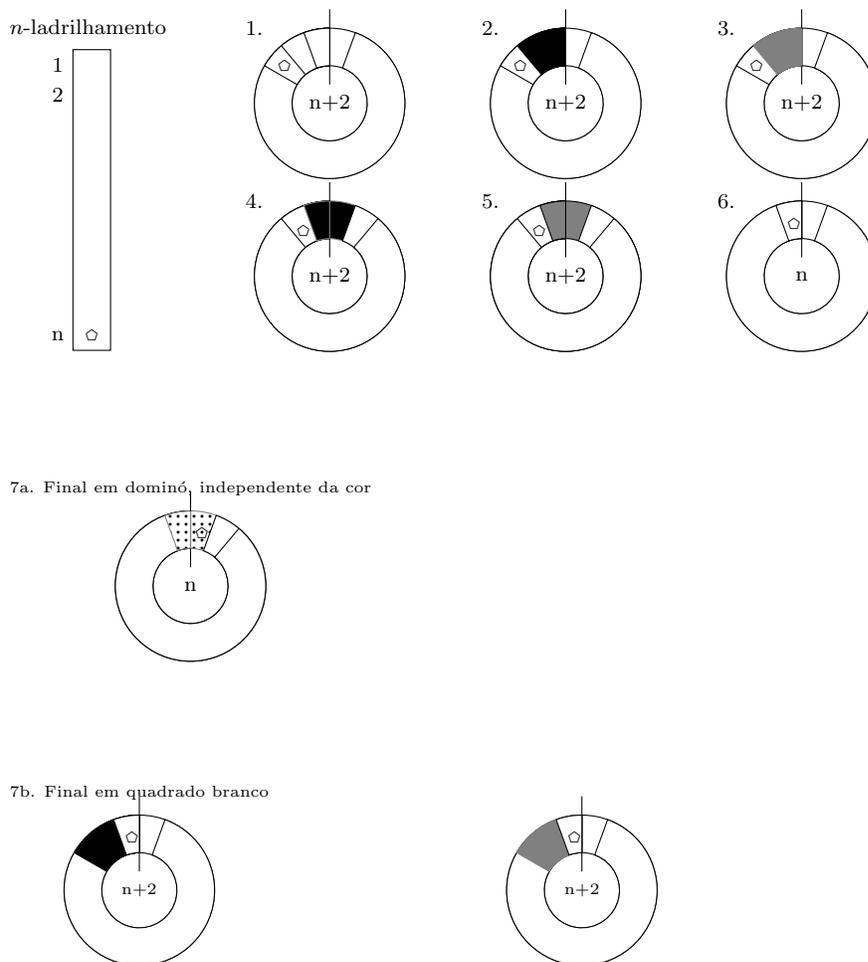


Figura 3.28: Construindo braceletes a partir de um n -ladrilhamento.

□

A Identidade 2.11 em [11], $9J_n = j_{n+1} + 2j_{n-1}$, segue como corolário do Teorema 3.37.

3.2 Identidades da Generalização de Jacobsthal e Jacobsthal-Lucas

Como dado na seção de Definições existe uma generalização para os números de Jacobsthal. A definição e a caracterização como conjunto de ladrilhamentos dada na seção anterior sugeriu que seria possível reescrever todas as demonstrações para as identidades envolvendo a generalização dos números de Jacobsthal. Esta seção está dedicada a listar tais identidades e provas; e o fato de conhecer as demonstrações e identidades no caso primitivo fará com que o caso geral seja visto de forma mais natural.

3.2.1 Interpretação para a Generalização dos Números de Jacobsthal

Considere o conjunto formado por todas as possíveis maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times n$ com quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas. A cardinalidade desse conjunto será denotada por a_n^s .

Para $n = 0$, temos que $a_0^s = 1 = J_1^s$, equivalente ao ladrilhamento vazio. Para $n = 1$, temos que $a_1^s = (s - 1) = J_2^s$, equivalente ao 1-ladrilhamento coberto por um quadrado de $s - 1$ cores distintas disponíveis. Para $n = 2$, temos que $a_2^s = (s - 1)^2 + s = s^2 - s + 1 = J_3^s$, correspondente ao 2-ladrilhamento coberto por dois quadrados de $s - 1$ cores distintas disponíveis contado por $(s - 1)^2$, ou coberto por um dominó de s cores distintas.

Considere agora os ladrilhamentos no conjunto contado por a_n^s . Esse conjunto pode ser subdividido em dois subconjuntos disjuntos: subconjunto dos ladrilhamentos terminados em quadrado e subconjunto dos ladrilhamentos terminados em dominó, respectivamente. O primeiro é contado por $(s - 1)a_{n-1}^s$; pois há $(s - 1)$ opções de cores para os quadrados; e o segundo por sa_{n-2}^s , pois há s opções de cores para os dominós.

Assim, temos que $a_n^s = (s - 1)a_{n-1}^s + sa_{n-2}^s$, com condições iniciais $a_0^s = 1$ e $a_1^s = s - 1$, e portanto obtemos a igualdade $a_n^s = J_{n+1}^s$.

3.2.2 Identidades Combinatórias envolvendo a Generalização dos Números de Jacobsthal

Lema 3.39. *Para $n \geq 0$, segue que*

$$a_n^s = \sum_{r \geq 0} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}. \quad (3.22)$$

Demonstração: No lado esquerdo da igualdade (3.22) temos o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro de ordem $1 \times n$ com quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas.

Consideremos agora o número de maneiras de ladrilhar um tabuleiro de ordem $1 \times n$ com quadrados de $s - 1$ cores distintas e com exatamente r dominós de s cores distintas. Então, uma cobertura deste tipo têm $n - 2r$ quadrados, onde cada um pode ser de $s - 1$ cores diferentes. Temos $n - 2r + r = n - r$ posições a serem preenchidas e assim temos $\binom{n-r}{r}$ maneiras de escolher em quais posições ficam os dominós e s^r maneiras de escolha das suas cores. Desta forma, existem $\binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}$ coberturas deste tipo. (Observemos que r não ultrapassa o valor de $\lfloor n/2 \rfloor$.) Somando em r obtemos o resultado desejado.

□

Segue como corolário do Lema 3.39 a generalização da identidade 1.7 em [11] :

$$J_n^s = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-r}{r} s^r (s-1)^{n-1-2r}. \quad (3.23)$$

Teorema 3.40. Para todo $n \geq 0$ temos

$$a_{n-1} + a_n = s^n. \quad (3.24)$$

Demonstração: A prova é feita considerando as seqüências s -árias de tamanho n . Temos que o número de seqüências s -árias de tamanho n é s^n . Podemos dividir o conjunto S dessas seqüências em s subconjuntos disjuntos S_k , $k = 0, \dots, s-1$, onde S_k é o conjunto das seqüências que começam com o número k .

O conjunto S_0 pode ainda ser subdividido em dois subconjuntos disjuntos S_0^d e S_0^e , onde S_0^d é o conjunto das seqüências que começam com 0 e têm um número ímpar de zeros consecutivos e S_0^e é o conjunto das seqüências que começam com 0 e têm um número par de zeros consecutivos. Podemos então escrever que

$$s^n = |S| = \sum_{k=0}^{s-1} |S_k| = |S_0^d| + |S_0^e| + \sum_{k=1}^{s-1} |S_k|.$$

Considere o conjunto cujos elementos são todas as possíveis coberturas um tabuleiro de tamanho n com quadrados de $(s-1)$ cores distintas: $\text{cor}_q 1, \text{cor}_q 2, \dots, \text{cor}_q (s-1)$, e dominós de s cores distintas: $\text{cor}_d 0, \text{cor}_d 2, \dots, \text{cor}_d (s-1)$. Dada uma cobertura deste conjunto podemos associar uma única seqüência s -ária, convertendo cada quadrado de cor distinta $\text{cor}_q k$ para o número k , $k = 1, \dots, s-1$ e cada dominó de cor distinta $\text{cor}_d m$ na seqüência de dois dígitos $m0$, com $m = 0, \dots, s-1$.

As seqüências s -árias de tamanho n resultantes desta associação são aquelas que começam com o número k , $k = 1, \dots, s-1$ (n -ladrilhamentos que começam com quadrado ou dominó de cor

diferente de $\text{cor}_d 0$) ou as que começam com o número 0 e têm consecutivamente um número ímpar de números iguais a 0 (n -ladrilhamentos que começam com dominó da cor $\text{cor}_d 0$).

Reciprocamente, dada uma sequência em $\cup_{k=1}^{s-1} S_k \cup S_0^d$, podemos, olhando da direita para a esquerda, obtermos unicamente um n -ladrilhamento com quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas. Assim existem a_n^s sequências s -árias em $\cup_{k=1}^{s-1} S_k \cup S_0^d$. Note que as sequências de tamanho n em S_0^e não podem ser associadas desta maneira pois não há representação para o símbolo 0 em termos de ladrilho.

Assim, as únicas sequências que não são contadas são aquelas que começam com 0 e têm, consecutivamente, um número k , $k = 1, \dots, s-1$ ou um número par de números iguais a 0. Afirmamos que $|S_0^e| = a_{n-1}$.

Dada uma sequência de tamanho n começando com 0 seguido imediatamente de um número k , podemos retirar o 0 da primeira célula e obter uma sequência s -ária de tamanho $(n - 1)$ começando com k .

Em outro caso, dada uma sequência de tamanho n começando com 0 seguido de um número par de números iguais a 0, podemos retirar o 0 da primeira posição e obter uma sequência s -ária de tamanho $(n - 1)$ começando com 0 tendo, consecutivamente, um número ímpar, diferente de zero, de números iguais a 0.

Assim, dada uma sequência de S_0^e podemos associar uma sequência de tamanho $(n - 1)$ que começa com o número k ($(n - 1)$ -ladrilhamentos que começam com quadrado ou dominó com cor diferente de $\text{cor}_d 0$) e as que começam com o número 0 e têm, consecutivamente, uma quantidade ímpar de números iguais a 0 ($(n - 1)$ -ladrilhamentos que começam com dominó da cor $\text{cor}_d 0$). O número de sequências deste tipo é dado por a_{n-1} .

Reciprocamente, dada uma sequência de tamanho $(n - 1)$ associada a um $(n - 1)$ -ladrilhamento, colocando um número zero antes da sequência, obtemos uma sequência de tamanho n começando com 0, tendo, consecutivamente, um número k ou uma quantidade par de números iguais a 0. Observemos que esta operação está bem definida e é bijetiva, de onde segue $|S_0^e| = a_{n-1}$.

Portanto, para dado n , teremos $s^n = |S_0^d| + |S_0^e| + \sum_{k=1}^{s-1} |S_k| = a_n + a_{n-1}$, e segue a identidade. \square

A igualdade $J_n^s + J_{n+1}^s = s^n$, é a generalização da Identidade 2.12 em ([11]) e pode ser obtida através pelo Teorema 3.40.

Teorema 3.41. *Para todo $n \geq 0$,*

$$s \sum_{k=0}^n a_k^s (s-1)^{n-k} = a_{n+2}^s - (s-1)^{n+2}. \quad (3.25)$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (3.25) é o número de possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro de tamanho $n + 2$ usando quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas, excluindo o ladrilhamento contendo apenas quadrados .

Considere agora a localização do último dominó em um tabuleiro.

Existem $s(s - 1)^{n-k} a_k^s$ ladrilhamentos onde o último dominó cobre as células $k + 1$ e $k + 2$, uma vez que as células de 1 a k são ladrilhadas de a_k^s maneiras, as células $k + 1$ e $k + 2$ são cobertas por um dominó de uma das s cores disponíveis, e as células de $k + 3$ até $n + 2$ são cobertas por quadrados de $(s - 1)^{n-k}$ maneiras. Portanto, o número de maneiras de cobrir um tabuleiro de tamanho $n + 2$ usando quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas e com pelo menos um dominó é $s(s - 1)^n a_0^s + s(s - 1)^{n-1} a_1^s + \dots + s(s - 1)^0 a_n^s$, ou equivalentemente $s \sum_{k=0}^n a_k^s (s - 1)^{n-k}$. \square

Usando do fato de que $a_n^s = J_{n+1}^s$ na equação (3.25) obtemos

$$\sum_{k=0}^n J_{k+1}^s (s - 1)^{n-k} = \frac{J_{(n+3)}^s - (s - 1)^{n+2} - s(s - 1)^n}{s}. \quad (3.26)$$

fazendo $k + 1$ igual a k , $n + 1$ igual a n , e utilizando que para $k = 0$, $s \sum_{k=0}^0 J_{k+1}^s (s - 1)^{n-k} = s(s - 1)^n$, obtemos a igualdade

$$\sum_{k=2}^n J_k^s (s - 1)^{n-k} = \frac{J_{(n+2)}^s - (s - 1)^{n-1} (s^2 - s + 1)}{s}, \quad (3.27)$$

generalização da Identidade 2.8 em [11].

Teorema 3.42. *Para todo $n \geq 0$,*

$$a_{2n+1}^s = \sum_{i=0}^n (s - 1)^{n-i} a_{2i}^s. \quad (3.28)$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade (3.28) conta todas as maneiras possíveis de preencher um tabuleiro de tamanho $(2n + 1)$ usando quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas.

Como $2n + 1$ é ímpar então cada ladrilhamento deve conter um número ímpar de quadrados e o último quadrado deve estar em uma posição ímpar.

Vamos fazer a contagem pela posição do último quadrado no tabuleiro. Suponha que o último quadrado preencha a posição $2i + 1$, do lado esquerdo temos um $(2i)$ -ladrilhamento, contado por a_{2i}^s , e do lado direito restaram $2(n - i)$ posições que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem s cores possíveis para dominó e $s - 1$ cores possíveis para quadrado, isso pode ser feito de $(s - 1)^{n-i} a_{2i}^s$ maneiras. Somando de 0 até n , obtemos o resultado.

□

Teorema 3.43. *Para todo $n \geq 0$,*

$$a_m^s a_{n+1}^s + s a_n^s a_{m-1}^s = a_{m+n+1}^s. \quad (3.29)$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (3.29) é o número de possíveis ladrilhamentos de um tabuleiro de ordem $1 \times (m + n + 1)$ usando quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas.

Consideremos agora as condições de decomposição de um ladrilhamento deste tipo. Se um $(m + n + 1)$ -ladrilhamento é *separável* na célula m , então podemos criar um m -ladrilhamento seguido de um $(n + 1)$ -ladrilhamento. Existem $a_m^s a_{n+1}^s$ possibilidades de cobrir um tabuleiro de tamanho $(m + n + 1)$ de forma que este seja *separável* na célula m .

Caso contrário, existirá um dominó cobrindo a células m e $m + 1$. Então podemos criar um $(m - 1)$ -ladrilhamento seguido de um dominó que por sua vez é seguido de um n -ladrilhamento. Isso pode ser feito de $s a_n^s a_{m-1}^s$ maneiras. Como não é possível um ladrilhamento ser *separável* e *não separável* na célula m , simultaneamente, existem $a_m^s a_{n+1}^s + s a_n^s a_{m-1}^s$ ladrilhamentos de tamanho $(m + n + 1)$.

□

Usando do fato de que $a_n^s = J_{n+1}^s$ e fazendo as mudanças de variáveis: $n + 1$ para n , e m para $m - 1$ na equação (3.29) obtemos

$$J_m^s J_{n+1}^s + s J_n^s J_{m-1}^s = J_{m+n}^s \quad (3.30)$$

generalização da Identidade 2.24 em [11].

Corolário 3.44. *Para todo $n \geq 0$, a_n^s divide $\sum_{i=0}^n s^{n-i} a_{2i}^s$.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.43, com $n = m$, temos que $a_n^s a_{n+1}^s + s a_n^s a_{n-1}^s = a_{2n+1}^s$, ou ainda, $a_n^s (a_{n+1}^s + s a_{n-1}^s) = a_{2n+1}^s$.

Portanto, $a_{2n+1}^s = \sum_{i=0}^n s^{n-i} a_{2i}^s$, pelo Teorema 3.42, é múltiplo de a_n^s .

□

Teorema 3.45. *Para todo $n \geq 1$,*

$$(a_n^s)^2 = a_{n+1}^s a_{n-1}^s + (-1)^n s^n. \quad (3.31)$$

Demonstração: Temos $(a_n^s)^2$ pares de maneiras de cobrir um tabuleiro de tamanho n usando quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas. Também temos $a_{n+1}^s a_{n-1}^s$ pares de maneiras de preencher um tabuleiro de tamanho $(n + 1)$ e um tabuleiro de tamanho $(n - 1)$, colocados um sobre o outro, usando quadrados de $s - 1$ cores distintas e dominós de s cores distintas.

Vamos dividir a prova em dois casos dependendo da paridade de n .

Se n é ímpar, tome um par de n -ladrilhamentos, então existe pelo menos um quadrado nos dois ladrilhamentos e portanto o par contém uma falha e conseqüentemente uma cauda. Portanto, trocando as caudas do par obtemos um $(n + 1)$ -ladrilhamento e um $(n - 1)$ -ladrilhamento com as mesmas falhas. Essa correspondência entre todos os pares de n -ladrilhamentos contendo falhas e os pares compostos de um $(n + 1)$ -ladrilhamento e um $(n - 1)$ -ladrilhamento está bem definida.

No entanto, para torná-la biunívoca, devemos descontar os pares de $(n + 1)$ -ladrilhamento e $(n - 1)$ -ladrilhamento contendo apenas dominós, pois estes não contém falhas. Ou ainda, devemos descontar os $s^{\{\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}\}} = s^n$ ladrilhamentos formados apenas por dominós de s cores distintas.

Logo temos a igualdade $(a_n^s)^2 = a_{n+1}^s a_{n-1}^s - s^n$, para n ímpar.

Quando n é par, aplicamos o mesmo argumento anterior para obter uma correspondência biunívoca entre todos os pares de n -ladrilhamentos e todos os pares compostos de um $(n + 1)$ -ladrilhamento e um $(n - 1)$ -ladrilhamento contendo falhas. Nesse caso, o ladrilhamento contendo apenas dominós é os únicos ladrilhamento que compõem um par de n -ladrilhamentos sem falhas. Logo temos que descontar os s^n ladrilhos de $(a_n^s)^2$.

Assim temos $(a_n^s)^2 - s^n = a_{n+1}^s a_{n-1}^s$, para n par, o que completa a prova.

□

Usando do fato de que $a_n^s = J_{n+1}^s$ e fazendo a mudança de variáveis: $n + 1$ para n , na equação (3.31) obtemos

$$J_{n+1}^s J_{n-1}^s - (J_n^s)^2 = (-1)^n s^{n-1} \quad (3.32)$$

generalização da Identidade 2.5 em [11].

3.2.3 Interpretação Combinatórias para a Generalização dos Números de Jacobsthal-Lucas

Agora vamos dar uma interpretação combinatória para a generalização dos números j_n^s de Jacobsthal-Lucas. Para tanto, defina j_n^s como a quantidade de maneiras de preencher um tabuleiro circular com n posições rotuladas no sentido horário, usando quadrados de $(s - 1)$ cores e dominós “curvos” de s cores distintas. Ou ainda, j_n é o número de n -braceletes.

3.2.4 Identidades Combinatórias envolvendo a Generalização dos Números de Jacobsthal-Lucas

Apresentamos nessa seção os resultados combinatórios envolvendo a generalização dos números de Jacobsthal-Lucas.

Lema 3.46. *Para todo $n \geq 1$,*

$$j_n^s = a_n^s + sa_{n-2}^s. \quad (3.33)$$

Demonstração: Existem j_n^s n -braceletes, ou ainda, j_n^s é o número de possibilidades de preencher um tabuleiro circular de ordem $1 \times n$ usando quadrados de $(s-1)$ cores e dominós “curvos” de s cores distintas. Estes braceletes são de dois tipos: *em fase ou fora de fase*.

Dado um n -bracelete *em fase*, podemos “esticá-lo” tornando-o um n -ladrilhamento. Logo existem a_n^s n -braceletes *em fase*.

Para o caso de um bracelete *fora de fase*, podemos remover o dominó que cobre as células n e 1 , e “esticá-lo” obtendo um ladrilhamento de comprimento $n-2$. Portanto, como existem s possibilidades de cores para este dominó, o número de n -braceletes fora de fase é sa_{n-2}^s , e portanto segue o resultado. □

Teorema 3.47. *Para todo $n \geq 1$*

$$j_n^s = \sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}. \quad (3.34)$$

Demonstração: Do lado esquerdo da igualdade (3.34) temos braceletes de tamanho n , ou ainda, o número de possibilidades preencher um tabuleiro circular de ordem $1 \times n$ usando quadrados de $(s-1)$ cores e dominós “curvos” de s cores distintas.

Por outro lado, considere braceletes com exatamente r dominós. Com a mesma argumentação do Lema 3.39 temos que existem $\binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r}$ braceletes *em fase* e $\binom{n-r-1}{r-1} s^r (s-1)^{n-2r}$ braceletes *fora de fase*. Uma vez que

$$\binom{n-r-1}{r-1} s^r (s-1)^{n-2r} = \frac{r}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r},$$

temos, somando em r , que o número de braceletes de tamanho n é dado por

$$\sum_{r \geq 0} \left[\binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r} + \frac{r}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r} \right] =$$

$$\sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} s^r (s-1)^{n-2r},$$

como desejado. □

Teorema 3.48. *Para todo $n \geq 0$,*

$$s \sum_{i=0}^n j_i^s (s-1)^{n-k} = j_{n+2}^s - (s-1)^{n+2}. \quad (3.35)$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (3.35) é o número de $(n+2)$ -braceletes excluindo o bracelete contendo apenas quadrados, ou ainda, o número de possibilidades de preencher um tabuleiro circular de ordem $1 \times (n+2)$ usando quadrados de $(s-1)$ cores e dominós “curvos” de s cores distintas, excluindo a possibilidade de termos todas as posições preenchidas com quadrados.

Considere agora a localização do último dominó. Existem duas possibilidades a serem consideradas. Se o $(n+2)$ -bracelete está *em fase* existem $s(s-1)^{n-k} a_k^s$ ladrilhamentos onde o último dominó cobre as células $k+1$ e $k+2$, uma vez que as células de 1 a k são ladrilhadas de a_k^s maneiras, as células $k+1$ e $k+2$ são cobertas por um dominó com s cores possíveis, e as células de $k+3$ até $n+2$ são cobertas por quadrados de $s-1$ cores possíveis.

Caso contrário, teremos um dominó ocupando as posições $n+2$ e 1; e portanto existem $s^2(s-1)^{n-k} a_{k-2}^s$ ladrilhamentos onde o último dominó cobre as células k e $k+1$, uma vez que as células de 2 a $k-1$ são ladrilhadas de a_{k-2}^s maneiras, os pares de células $(k, k+1)$, e $(n+2, 1)$ são cobertas por um dominó de s^2 maneiras e as células de $k+2$ até $n+1$ são cobertas por quadrados de $(s-1)^{n-k}$.

Assim, o número de $(n+2)$ -braceletes com pelo menos um dominó é $s(s-1)^n(a_0^s + sa_{-2}^s) + s(s-1)^{n-1}(a_1^s + sa_{-1}^s) + \dots + s(s-1)^{n-k}(a_n^s + sa_{n-2}^s)$ ou equivalentemente, pela equação (3.33), $s \sum_{k=0}^n j_k^s (s-1)^{n-k}$. □

Teorema 3.49. *Para todo $n \geq 0$,*

$$j_{n+1}^s a_n^s = a_{2n+1}^s. \quad (3.36)$$

Demonstração: Do lado direito da igualdade (3.36) temos o número de maneiras de cobrir um tabuleiro de tamanho $2n+1$ usando quadrados de $(s-1)$ cores e dominós de s cores distintas.

Consideremos agora as condições de decomposição de um ladrilhamento. Se um $(2n+1)$ -ladrilhamento é separável na célula $n+1$ então podemos criar um $(n+1)$ -bracelete *em fase*

seguido de um n -ladrilhamento. Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células $n + 1$ e $n + 2$, e portanto o $(2n + 1)$ -ladrilhamento será separável na célula n . Assim, podemos criar um n -ladrilhamento seguido de um $(n + 1)$ -bracelete *fora de fase*, onde a primeira célula do bracelete é a correspondente a célula $n + 2$ do $(2n + 1)$ -ladrilhamento.

Assim, como existem j_{n+1}^s braceletes de tamanho $n + 1$ *fora de fase* e *em fase*, existem $j_{n+1}^s a_n^s$ ladrilhamentos desse tipo, o que segue o resultado.

□

Observemos que esse resultado também pode ser visto como corolário do Teorema (3.43) tomando $m = n$.

Teorema 3.50. *Para todo $n \geq 0$,*

$$(s - 1)a_{n-1}^s + j_n^s = 2a_n^s. \quad (3.37)$$

Demonstração: Considere o conjunto formado por todas as maneiras de cobrir um tabuleiro de tamanho n usando quadrados de $(s - 1)$ cores e dominós de s cores distintas. Do lado direito da igualdade (3.37) temos duas cópias de cada cobertura neste conjunto.

Cada n -ladrilhamento pode ser classificado em dois tipos: finalizando em quadrado ou finalizando em dominó.

Dada duas cópias de um n -ladrilhamento terminado em dominó podemos criar um n -bracelete *em fase* com o dominó cobrindo as células $n - 1$ e n e um n -bracelete *fora de fase* com o dominó cobrindo as células n e 1 . Considere agora uma das cópias do n -ladrilhamento terminado em quadrado. Podemos associá-lo a um bracelete terminado em quadrado e portanto, como essa relação é biunívoca, temos todos os braceletes, número igual a j_n^s .

No entanto, existem $(s - 1)a_{n-1}^s$ ladrilhamentos de tamanho n terminados em quadrado restantes, portanto temos a igualdade $(s - 1)a_{n-1}^s + j_n^s = 2a_n^s$.

□

Aplicando o Teorema 3.50 com $s = 2$ e utilizando o fato de que $a_n^s = J_n^s$ obtemos como corolário a Identidade 2.20 em [11], $J_n + j_n = 2J_{n+1}$.

Teorema 3.51. *Para todo $n \geq 0$,*

$$j_{2n+1}^s = (s - 1) \sum_{i \geq 0} s^{n-i} j_{2i}^s. \quad (3.38)$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade conta todas as maneiras de cobrir um tabuleiro circular de tamanho $(2n + 1)$ usando quadrados de $(s - 1)$ cores e dominós “curvos” de s cores distintas. Como $2n + 1$ é ímpar, cada bracelete deve conter um número ímpar de quadrados.

Temos duas possibilidades. Caso o bracelete seja *em fase* o último quadrado estará em uma posição ímpar.

Suponha que o último quadrado se encontre na posição $2i + 1$. Anterior a ele temos um $(2i)$ -ladrilhamento e posteriormente restam $2(n-i)$ posições que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem s cores possíveis de dominós, isso pode ser feito de s^{n-i} maneiras, e portanto temos $(s-1)a_{2i}^s s^{n-i}$ braceletes desse tipo.

Caso contrário, teremos um dominó ocupando a posição $(2n+1, 1)$, e portanto o último quadrado se encontra na posição $2i$, anterior a ele temos um $(2i-2)$ -ladrilhamento e posteriormente restam $2(n-i)$ posições que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem s cores possíveis de dominós, isso pode ser feito de s^{n-i+1} maneiras, uma vez que o dominó na posição $(2n+1, 1)$ também deve ser colorido. Portanto temos $(s-1)a_{2i-2}^s s^{n-i+1}$ braceletes desse tipo e segue que o número de $(2n+1)$ -braceletes é dado por

$$(s-1) \sum_{i \geq 0} s^{n-i} a_{2i}^s + s^{n-i+1} a_{2i-2}^s =$$

$$(s-1) \sum_{i \geq 0} s^{n-i} (a_{2i}^s + s a_{2i-2}^s) =$$

$$(s-1) \sum_{i \geq 0} s^{n-i} j_{2i}^s,$$

pelo Lema 3.46.

□

Teorema 3.52. *Para todo $n, m \geq 0$,*

$$j_m^s j_n^s + (s+1)^2 a_{m-1}^s a_{n-1}^s = 2j_{m+n}^s. \quad (3.39)$$

Demonstração: Considere o conjunto de todas as maneiras de preencher um tabuleiro circular de tamanho $(m+n)$ usando quadrados de $(s-1)$ cores e dominós “curvos” de s cores distintas. A cardinalidade desse conjunto é dado por j_{m+n}^s .

Assim do lado direito da igualdade (3.39) temos duas cópias de $(m+n)$ -braceletes.

A prova da identidade será feita associando uma cópia do bracelete às condições de *separabilidade* na célula m e outra às condições de *separabilidade* na célula $m-1$.

De fato, dadas duas cópias de um $(m+n)$ -bracelete temos duas possibilidades: estar *em fase* ou *fora de fase*. Considere, primeiramente o $(m+n)$ -bracelete *em fase*, então podemos associá-lo unicamente a um $(m+n)$ -ladrilhamento.

Assim, se o $(m+n)$ -ladrilhamento for separável na célula m , podemos decompor este em um m -ladrilhamento seguido de um n -ladrilhamento, e portanto temos $a_m^s a_n^s$ $(m+n)$ -braceletes em fase separáveis na célula m . Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células m e $m+1$, e portanto podemos decompor este em um $(m-1)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó, que por sua vez é seguido por um $(n-1)$ -ladrilhamento. Existem, então, $sa_{m-1}^s a_{n-1}^s$ $(m+n)$ -braceletes em fase não separáveis na célula m .

Exemplo 3.53. Na Figura 3.29 seguem as decomposições segundo as condições de separabilidade na m -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete em fase.

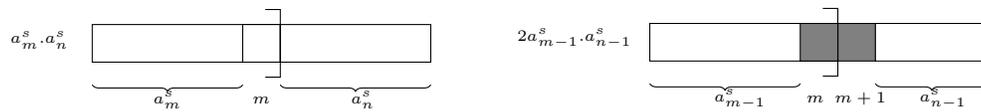


Figura 3.29: Separabilidade na m -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete em fase

Agora, tomando a outra cópia deste mesmo $(m+n)$ -bracelete *em fase*, vamos analisar as condições de separabilidade na célula $m-1$. De forma análoga ao caso anterior, temos que se o $(m+n)$ -ladrilhamento (associação biunívoca com um $(m+n)$ -bracelete) for separável na célula $m-1$, podemos decompor este em um $(m-1)$ -ladrilhamento seguido de um $(n+1)$ -ladrilhamento, e portanto temos $a_{m-1}^s a_{n+1}^s$ $(m+n)$ -braceletes em fase separáveis na célula $m-1$. Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células $m-1$ e m , e portanto podemos decompor este em um $(m-2)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó, que por sua vez é seguido por um n -ladrilhamento. Existem, então, $sa_{m-2}^s a_n^s$ $(m+n)$ -braceletes em fase não separáveis na célula $m-1$.

Exemplo 3.54. Na Figura 3.30 seguem as decomposições segundo as condições de separabilidade na $(m-1)$ -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete em fase.

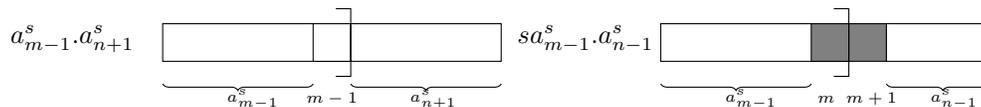


Figura 3.30: Separabilidade na $(m-1)$ -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete em fase

Tome, agora, duas cópias de um $(m+n)$ -bracelete *fora de fase*, logo temos um dominó cobrindo as células $(m+n)$ e 1; e portanto podemos associá-lo a um $(m+n)$ -ladrilhamento terminado em dominó (observe que essa correspondência é 1-2).

Consideremos as condições de separabilidade na célula m . Se o $(m+n)$ -ladrilhamento terminado em dominó for separável na célula m , podemos decompor este em um m -ladrilhamento seguido de um $(n-2)$ -ladrilhamento, que por sua vez é seguido de um dominó e portanto temos $sa_m^s a_{n-2}^s$ $(m+n)$ -braceletes fora de fase separáveis na célula m . Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células m e $m+1$, e portanto podemos decompor este em um $(m-1)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó, que por sua vez é seguido por um $(n-3)$ -ladrilhamento, seguido de outro dominó. Segue, então, que temos $s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s$ $(m+n)$ -braceletes fora de fase não separáveis na célula m .

Exemplo 3.55. Na Figura 3.31 seguem as decomposições segundo as condições de separabilidade na m -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete fora de fase.



Figura 3.31: Separabilidade na m -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete fora de fase

Tomando a outra cópia deste mesmo $(m+n)$ -bracelete *fora de fase*, vamos analisar as condições de separabilidade na célula $m-1$. De forma análoga ao caso anterior, temos que se o $(m+n)$ -ladrilhamento terminado em dominó for separável na célula $m-1$, podemos decompor este em um $(m-1)$ -ladrilhamento seguido de um $(n-1)$ -ladrilhamento, que por sua vez é seguido de um dominó e portanto temos $sa_{m-1}^s a_{n-1}^s$ $(m+n)$ -braceletes *fora de fase separáveis* na célula $m-1$. Caso contrário, teremos um dominó cobrindo as células $m-1$ e m , e portanto podemos decompor este em um $(m-2)$ -ladrilhamento, seguido de um dominó, que por sua vez é seguido por um $(n-2)$ -ladrilhamento, seguido de outro dominó. Existem, então, $s^2 a_{m-2}^s a_{n-2}^s$ $(m+n)$ -braceletes *fora de fase não separáveis* na célula $m-1$.

Exemplo 3.56. Na Figura 3.32 seguem as decomposições segundo as condições de separabilidade na $(m-1)$ -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete fora de fase.



Figura 3.32: Separabilidade na $(m-1)$ -ésima célula em um $(m+n)$ -bracelete fora de fase

Portanto, temos que

$$2j_{m+n}^s = a_m^s a_n^s + sa_{m-1}^s a_{n-1}^s + a_{m-1}^s a_{n+1}^s + sa_{m-2}^s a_n^s + sa_m^s a_{n-2}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s + sa_{m-1}^s a_{n-1}^s + s^2 a_{m-2}^s a_{n-2}^s,$$

ou ainda,

$$2j_{m+n}^s = a_m^s a_n^s + sa_{m-2}^s a_n^s + sa_m^s a_{n-2}^s + s^2 a_{m-2}^s a_{n-2}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-1}^s + a_{m-1}^s a_{n+1}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s,$$

$$2j_{m+n}^s = (a_m^s + sa_{m-2}^s)(a_n^s + sa_{n-2}^s) + 2sa_{m-1}^s a_{n-1}^s + a_{m-1}^s a_{n+1}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s.$$

Como

$$a_{m-1}^s a_{n+1}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s = a_{m-1}^s ((s-1)a_n^s + sa_{n-1}^s) + s^2 a_{m-1}^s \left(\frac{1}{s}(a_{n-1}^s - (s-1)a_{n-2}^s) \right),$$

$$a_{m-1}^s a_{n+1}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s = sa_{m-1}^s a_{n-1}^s + (s-1)a_{m-1}^s a_n^s + sa_{m-1}^s a_{n-1}^s - s(s-1)a_{m-1}^s a_{n-2}^s,$$

$$a_{m-1}^s a_{n+1}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s = 2sa_{m-1}^s a_{n-1}^s + (s-1)a_{m-1}^s (a_n^s - sa_{n-2}^s),$$

$$a_{m-1}^s a_{n+1}^s + s^2 a_{m-1}^s a_{n-3}^s = (s^2 + 1)a_{m-1}^s a_{n-1}^s,$$

logo, pelo Lema (3.46),

$$2j_{m+n}^s = (a_m^s + sa_{m-2}^s)(a_n^s + sa_{n-2}^s) + (2s + s^2 + 1)a_{m-1}^s a_{n-1}^s = j_m j_n + (s+1)^2 a_{m-1}^s a_{n-1}^s.$$

□

Aplicando o Teorema 3.52 com $s = 2$ e utilizando os fatos de que $a_n^s = J_n^s$ obtemos como corolário a Identidade 2.25 em [11] dada por $j_m j_n + 9J_m J_n = 2j_{m+n}$.

Corolário 3.57. Para todo $n \geq 0$,

$$(j_n^s)^2 + (s+1)^2 (a_{n-1}^s)^2 = 2j_{2n}^s. \quad (3.40)$$

Demonstração: Basta tomar $m = n$ no Teorema 3.52.

□

Teorema 3.58. *Para todo $n \geq 0$,*

$$(s + 1)^2 a_n^s = j_{n+2}^s + s j_n^s. \quad (3.41)$$

Demonstração: Sejam os dois conjuntos formados por todas as maneiras de preencher dois tabuleiros circulares um de tamanho n e outro de tamanho $n + 2$ usando quadrados de $(s - 1)$ cores e dominós “curvos” de s cores distintas. Considere todas as maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times n$ usando quadrados de $(s - 1)$ cores e dominós de s cores distintas.

Considere S_1 o conjunto contendo $(s + 1)^2$ cópias de cada n -ladrilhamento e S_2 o conjunto formado pelos $(n + 2)$ -braceletes ou duas cópias de cada n -bracelete. Temos que $|S_1| = (s + 1)^2 a_n$ e $|S_2| = j_{n+2} + 2j_n$. Para provar essa identidade vamos estabelecer uma correspondência entre os conjuntos S_1 e S_2 .

Dado um n -ladrilhamento podemos criar naturalmente 4 tipos de braceletes:

1. A quantidade de $(s - 1)(s - 1)$ $(n + 2)$ -braceletes *em fase* terminados em dois quadrados inseridos;
2. A quantidade de s $(n + 2)$ -braceletes *em fase* terminados em um dominó inserido;
3. A quantidade de s $(n + 2)$ -braceletes *fora de fase* com um dominó inserido nas células $(n + 2, 1)$;
4. n -bracelete *em fase* concatenando as células n e 1.

Ainda estão faltando dois tipos de braceletes: n -braceletes *fora de fase* e $(n + 2)$ -braceletes *em fase* terminados em quadrado com um dominó inserido cobrindo o par de célula $(n, n + 1)$. Note que a construção de tais braceletes depende do n -ladrilhamento tomado.

Se o n -ladrilhamento termina em quadrado então criamos um $(n + 2)$ -bracelete *em fase* terminado em quadrado inserindo um dominó cobrindo o par de célula $(n, n + 1)$. Teremos então s $(n + 2)$ -braceletes desta forma.

Se o n -ladrilhamento termina em dominó então criamos um n -bracelete *fora de fase* rotacionando o bracelete em uma célula no sentido horário. Tomando s cópias deste bracelete teremos s cópias do n -ladrilhamento terminado em dominó, que adicionado as s cópias do n -ladrilhamento terminado em quadrado necessárias para fazer o $(n + 2)$ -bracelete *em fase* terminado em quadrado resultam em s cópias de a_n .

No entanto, para termos o total de n -braceletes, j_n , é necessário tomar s cópias do bracelete do tipo descrito no item 4. Assim, teríamos o total de $j_{n+2}^s + s j_n^s$ braceletes sendo levados bijetivamente a $(s - 1)(s - 1) + s + s + s + s = (s + 1)^2$ cópias de cada n -ladrilhamento.

□

3.3 Generalizações

Usando a notação das generalizações dada no artigo [5], seja $p_n^{(a,b)}$ o número de maneiras de cobrir um tabuleiro finito $1 \times n$ usando quadrados de a diferentes cores e dominós de b diferentes cores. Considere também $j_n^{(a,b)}$ o número de maneiras de cobrir um tabuleiro circular finito $1 \times n$ usando quadrados de a diferentes cores e dominós “curvos” de b diferentes cores.

Nós podemos estender todas as provas do capítulo no contexto de $p_n^{(a,b)}$ e $j_n^{(a,b)}$ apenas considerando agora a escolhas de cores para os quadrados e b escolhas de cores para os dominós. Assim, segue todas as seguintes generalizações.

A generalização dada no Lema 3.59 pode ser encontrada como o Lema 14 em [5].

Lema 3.59. *(Generalização do Lema 3.4) Para $n \geq 0$, segue que*

$$p_n^{(a,b)} = \sum_{r \geq 0} \binom{n-r}{r} a^{n-2r} b^r. \quad (3.42)$$

Teorema 3.60. *(Generalização do Teorema 3.15) Para todo $n \geq 0$,*

$$b \sum_{i=0}^n p_i^{(a,b)} = p_{n+2}^{(a,b)} - a. \quad (3.43)$$

A generalização dada no Lema 3.61 pode ser encontrada como o Lema 12 em [5].

Teorema 3.61. *(Generalização do Teorema 3.16) Para todo $n \geq 0$,*

$$p_{2n+1}^{(a,b)} = a \sum_{i=0}^n b^{n-i} p_{2i}^{(a,b)}. \quad (3.44)$$

Teorema 3.62. *(Generalização do Teorema 3.17) Para todo $n \geq 0$,*

$$p_m^{(a,b)} p_{n+1}^{(a,b)} + b p_n^{(a,b)} p_{m-1}^{(a,b)} = p_{m+n+1}^{(a,b)}. \quad (3.45)$$

A generalização dada no Corolário 3.63 pode ser encontrada como o Teorema 13 em [5].

Corolário 3.63. *(Generalização do Corolário 3.18) Para todo $n \geq 0$, $p_n^{(a,b)}$ divide $p_{2n+1}^{(a,b)}$.*

Teorema 3.64. *(Generalização do Teorema 3.19) Para todo $n \geq 1$,*

$$(p_n^{(a,b)})^2 = p_{n+1}^{(a,b)} p_{n-1}^{(a,b)} + (-1)^n b^n. \quad (3.46)$$

Lema 3.65. *(Generalização do Lema 3.23) Para todo $n \geq 0$,*

$$j_n^{(a,b)} = p_n^{(a,b)} + b p_{n-2}^{(a,b)}. \quad (3.47)$$

Teorema 3.66. (Generalização do Teorema 3.24) Para todo $n \geq 1$

$$j_n^{(a,b)} = \sum_{r \geq 0} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} a^{n-2r} b^r. \quad (3.48)$$

Teorema 3.67. (Generalização do Teorema 3.25) Para todo $n \geq 0$,

$$b \sum_{i=0}^n j_i^{(a,b)} = j_{n+2}^{(a,b)} - a^{n+2}. \quad (3.49)$$

Teorema 3.68. (Generalização do Teorema 3.26) Para todo $n \geq 0$,

$$j_{n+1}^{(a,b)} p_n^{(a,b)} = p_{2n+1}^{(a,b)}. \quad (3.50)$$

Teorema 3.69. (Generalização do Teorema 3.27) Para todo $n \geq 0$,

$$a p_{n-1}^{(a,b)} + j_n^{(a,b)} = 2 p_n^{(a,b)}. \quad (3.51)$$

Teorema 3.70. (Generalização do Teorema 3.30) Para todo $n \geq 0$,

$$j_{2n+1}^{(a,b)} = a \sum_{i \geq 0} b^{n-i} j_{2i}^{(a,b)}. \quad (3.52)$$

Teorema 3.71. (Generalização do Teorema 3.31) Para todo $n, m \geq 0$,

$$p_m^{(a,b)} p_n^{(a,b)} + (a^2 + 4b) p_{m-1}^{(a,b)} p_{n-1}^{(a,b)} = 2 j_{m+n}^{(a,b)}. \quad (3.53)$$

Teorema 3.72. (Generalização do Teorema 3.37) Para todo $n \geq 0$,

$$(a^2 + 4b) p_n^{(a,b)} = j_{n+2}^{(a,b)} + b j_n^{(a,b)}. \quad (3.54)$$

CAPÍTULO 4

NÚMEROS DE JACOBSTHAL Q-ANÁLOGOS E GENERALIZAÇÕES

No artigo [7] são apresentadas provas combinatórias usando q -contagens de conjuntos de ladrilhamentos para identidades envolvendo os números de Pell. Além disso, usando a ideia de algumas identidades envolvendo os números de Pell são feitas generalizações.

Usando a relação de recorrência para os números q -análogos e a função peso dada em [7] iremos fazer q -contagens de conjuntos formados através de todas as maneiras de preencher um tabuleiro finito usando quadrados de a diferentes cores e dominós de b cores distintas e provar identidades envolvendo os números q -análogos de Jacobsthal. Através de algumas das identidades provadas no Capítulo 3 iremos contribuir com novas generalizações usando as notações definidas em [7].

4.1 Generalização de q -análogos

Em [7] é determinada uma recorrência geral de q -análogos para números arbitrários de cores de quadrados e cores de dominós dada por

$$P_{n+1}(a, b; q) = \frac{1 - q^{a(n+1)}}{1 - q^{n+1}} P_n(a, b; q) + q^n \frac{1 - q^{bn}}{1 - q^n} P_{n-1}(a, b; q),$$

com condições iniciais dadas por $P_0(a, b; q) = 1, P_1(a, b; q) = \frac{1 - q^a}{1 - q}$.

Nesta definição temos que $P_{n+1}(a, b; q)$ é a q -contagem do número de possibilidades de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ usando $a \geq 1$ diferentes cores de quadrados e $b \geq 1$ diferentes cores de dominós, ou ainda, usando s_1, \dots, s_a tipos de quadrados e d_1, \dots, d_b tipos de dominós, com função peso definida como

$$w(t) = \begin{cases} q^{ij}, & \text{se } t \text{ é um dominó } d_j \text{ na posição } (i, i + 1), \\ q^{i(j-1)}, & \text{se } t \text{ é um quadrado } s_j \text{ na posição } i. \end{cases}$$

Observemos que nessa definição de peso podemos considerar s_1 como sendo o quadrado branco e portanto o quadrado branco tem peso dado por $q^0 = 1$, independente da posição que se encontra.

Assim, definem-se os números q -análogos de Jacobsthal, $J_n(q)$, pela relação de recorrência

$$J_{n+1}(q) = J_n + (q^n + q^{2n})J_{n-1}, n \geq 1,$$

com as condições iniciais $J_0(q) = J_1(q) = 1$, e pesos dados por

$$w(t) = \begin{cases} q^i, & \text{se } t \text{ é um dominó cinza na posição } (i, i + 1), \\ q^{2i}, & \text{se } t \text{ é um dominó preto na posição } (i, i + 1), \\ 1, & \text{se } t \text{ é um quadrado branco.} \end{cases}$$

Seja \mathfrak{T}_n o conjunto de todos os ladrilhamentos de ordem $1 \times n$ com quadrados brancos, dominós cinzas e dominós pretos. Então, para $T \in \mathfrak{T}_n$, define-se o q -peso de T por

$$w_q(T) = \prod_{t \in T} q^{w(t)},$$

e

$$\tilde{J}_n(q) = \sum_{T \in \mathfrak{T}_n} w_q(T).$$

Segue disto que $J_n(q) = \tilde{J}_n(q)$.

Exemplo 4.1. Para $n = 3$ temos na Figura 4.1 os pesos da q -enumeração dos ladrilhamentos de Jacobsthal:

$$\begin{aligned} w \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) &= 1; \\ w \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \blacksquare \\ \hline \end{array} \right) &= q^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{cinza} & \text{branco} \\ \hline \end{array} \right) &= q; \\
w \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{preto} & \text{branco} \\ \hline \end{array} \right) &= q^2; \\
w \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{branco} & \text{preto} \\ \hline \end{array} \right) &= q^4.
\end{aligned}$$

Figura 4.1: q-enumeração dos ladrilhamentos de Jacobsthal de tamanho $n=3$

Então $\tilde{J}_3(q) = 1 + q + 2q^2 + q^4 = J_2(q) + (q^2 + q^4)J_1(q) = J_3(q)$.

Ainda em [7] segue a generalização do Teorema 3.16.

Teorema 4.2. (Generalização do Teorema 3.16) Para todo $n \geq 0$,

$$J_{2n+1}(q) = \sum_{i=0}^n q^{n(n+1)-i(i+1)} \prod_{j=i+1}^n \frac{1-q^{4j}}{1-q^{2j}} J_{2i}(q). \quad (4.1)$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade (4.1) q -conta todos os ladrilhamentos de tamanho $2n+1$. Claramente tais ladrilhamentos contêm pelo menos um quadrado branco com última posição em uma célula ímpar $2i+1$ para $0 \leq i \leq n$. Então as $2i$ primeiras posições são cobertas por um ladrilhamento de Jacobsthal de tamanho $2i$ e as $2(n-i)$ posições restantes devem ser cobertas apenas por dominós.

Temos que $q^{n(n+1)-i(i+1)}$ é o peso do $2(n-i)$ ladrilhamento coberto apenas por dominós cinzas, uma vez que o peso é dado por

$$q^{(2i+2)+(2i+4)+\dots+2n} = q^{\frac{(2i+2+2n)(n-i)}{2}} = q^{(i+1+n)(n-i)} = q^{n(n+1)-i(i+1)}.$$

E, como o peso do dominó preto é o dobro do peso do dominó cinza, podemos associar a função geradora que determina a presença de dominó preto ou dominó cinza em cada par de células dada por

$$q^{n(n+1)-i(i+1)} \prod_{j=i+1}^n (1 + q^{2j}).$$

Portanto, o q -peso de um ladrilhamento de tamanho $2n+1$ de Jacobsthal é dado por

$$q^{n(n+1)-i(i+1)} \prod_{j=i+1}^n (1 + q^{2j}) J_{2i};$$

ou ainda,

$$q^{n(n+1)-i(i+1)} \prod_{j=i+1}^n \frac{1-q^{4j}}{1-q^{2j}} J_{2i}.$$

Somando em n , com $0 \leq i \leq n$, obtemos o resultado.

□

4.2 Identidades envolvendo os q -Números de Jacobsthal

Seguindo o mesmo raciocínio, demonstraremos novos teoremas q -análogos das identidades envolvendo os números de Jacobsthal e, além disso, usando a notação da generalização de q -análogos provaremos a generalização desses novos teoremas q -análogos.

4.2.1 Teorema q -Análogo do Lema 3.4

Inicialmente, denotamos $p_{j,k,l}$ como sendo o polinômio gerado como coeficiente de $x^j y^k z^l$ na expansão de $(x + y + z)^{j+k+l}$ com inversões de peso $yx = q^2 xy$, $zx = q^2 xz$ e $zy = qyz$.

Exemplo 4.3. *Considere alguns exemplos, nos casos $j + k + l = 2, 3$ e 4. Temos*

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (1 + q^2)xy + (1 + q)yz + (1 + q^2)xz,$$

ou ainda

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1 - q^4}{(1 - q^2)}xy + \frac{1 - q^2}{(1 - q)}yz + \frac{1 - q^4}{(1 - q^2)}xz.$$

Fazendo $(x + y + z)^2(x + y + z)$, e aplicando os pesos das inversões obtemos

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 &= x^3 + y^3 + z^3 + \frac{1 - q^6}{(1 - q^2)}xy^2 + \frac{1 - q^6}{(1 - q^2)}xz^2 \\ &+ \frac{1 - q^6}{(1 - q^2)}x^2y + \frac{1 - q^6}{(1 - q^2)}x^2z \\ &+ \frac{1 - q^3}{(1 - q)}yz^2 + \frac{1 - q^3}{(1 - q)}y^2z + \frac{1 - q^6}{(1 - q)}xyz; \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\frac{(1-q^6)}{(1-q^2)} &= q^2 \frac{(1-q^4)}{(1-q^2)} + 1; \\ \frac{(1-q^3)}{(1-q)} &= q \frac{(1-q^2)}{(1-q)} + 1; \\ \frac{1-q^6}{(1-q)} &= \frac{(1-q^4)}{(1-q^2)} + q \frac{(1-q^4)}{(1-q^2)} + q^{2*2} \frac{(1-q^2)}{(1-q)}.\end{aligned}$$

Agora, fazendo $(x+y+z)^4 = (x+y+z)^3(x+y+z)$ e aplicando o peso das inversões obtemos

$$\begin{aligned}(x+y+z)^4 &= x^4 + y^4 + z^4 + \left(q^6 + \frac{1-q^6}{(1-q^2)}\right)xy^3 + \left(q^6 + \frac{1-q^6}{(1-q^2)}\right)xz^3 \\ &+ \left(\frac{1-q^6}{(1-q^2)} + q^4 \frac{1-q^6}{(1-q^2)}\right)x^2y^2 + \left(\frac{1-q^6}{(1-q^2)} + q^4 \frac{1-q^6}{(1-q^2)}\right)x^2z^2 \\ &+ \left(q^2 \frac{1-q^6}{(1-q^2)} + 1\right)x^3y + \left(q^2 \frac{1-q^6}{(1-q^2)} + 1\right)x^3z \\ &+ \left(q^6 \frac{1-q^3}{(1-q)} + q^2 \frac{1-q^6}{(1-q^2)} + \frac{1-q^6}{(1-q)}\right)xyz^2 \\ &+ \left(q^6 \frac{1-q^3}{(1-q)} + q \frac{1-q^6}{(1-q)} + \frac{1-q^6}{(1-q^2)}\right)xy^2z \\ &+ \left(q^4 \frac{1-q^6}{(1-q)} + q \frac{1-q^6}{(1-q^2)} + \frac{1-q^6}{(1-q^2)}\right)x^2yz + \\ &+ \left(q^3 \frac{1-q^3}{(1-q)}\right)yz^3 + \left(q^2 \frac{1-q^3}{(1-q)} + \frac{1-q^3}{(1-q)}\right)y^2z^2 \\ &+ \left(1 + q \frac{1-q^3}{(1-q)}\right)y^3z.\end{aligned}$$

Lema 4.4. A função geradora para ladrilhamentos com exatamente j dominós pretos, k dominós cinzas e l quadrados brancos é dada por

$$q^{2j^2+2kj+k^2} p_{j,k,l}.$$

Demonstração: Seja $\mathbb{T}_{j,k,l}$ o conjunto de ladrilhamentos com exatamente j dominós pretos, k dominós cinzas e l quadrados brancos onde $n = 2j + 2k + l$. Dado $T \in \mathbb{T}_{j,k,l}$ vamos associar uma seqüência δ_T trocando cada dominó preto pelo símbolo x , cada dominó cinza pelo símbolo y , e cada quadrado branco pelo símbolo z . Esta seqüência está no conjunto $\mathbb{S}_{x^j, y^k, z^l}$ de todas as seqüências com j caracteres x , k caracteres y e l caracteres z . Assim, dada uma seqüência $\delta \in \mathbb{S}_{x^j, y^k, z^l}$ existe um ladrilhamento $T_\delta \in \mathbb{T}_{j,k,l}$ que lhe é associado.

O ladrilhamento $T \in \mathbb{T}_{j,k,l}$ de peso onde o expoente de q é mínimo é dado pelo ladrilhamento $T_{min} \in \mathbb{T}_{j,k,l}$ correspondente a seqüência δ_{min} dada por

$$\delta_{min} = \underbrace{xxx \cdots xx}_j \underbrace{yyy \cdots yy}_k \underbrace{zzz \cdots zz}_l.$$

Isto ocorre pelos seguintes fatos:

1. o expoente de q no peso de um ladrilhamento seguido de um dominó preto seguido de um dominó cinza é menor do que o expoente de q no peso de um ladrilhamento seguido de um dominó cinza seguido de um dominó preto;
2. o expoente de q no peso de um ladrilhamento seguido de um dominó preto seguido de um quadrado branco é menor do que o expoente de q no peso de um ladrilhamento seguido de um quadrado branco seguido de um dominó preto;
3. o expoente de q no peso de um ladrilhamento seguido de um dominó cinza seguido de um quadrado branco é menor do que o expoente de q no peso de um ladrilhamento seguido de um quadrado branco seguido de um dominó cinza.

Assim, o peso do ladrilhamento T_{min} é dado por

$$q \left(2 \cdot \sum_{i=1}^j 2i - 1 + \sum_{m=1}^k 2j + 2m - 1 \right) = q^{2j^2 + 2kj + k^2}.$$

Queremos então estudar o quanto o expoente de q no peso de um ladrilhamento qualquer $T \in \mathbb{T}_{j,k,l}$ difere do expoente de q no peso do ladrilhamento T_{min} .

Dada uma sequência $\delta \in \mathbb{S}_{x^j, y^k, z^l}$ definimos os pesos das inversões

$$yx = q^2xy,$$

$$zx = q^2xz$$

$$zy = qyz.$$

Exemplo 4.5. Tome por exemplo a sequência y^2zxyx , associada a um ladrilhamento $T \in \mathbb{T}_{2,3,1}$. Neste caso temos ladrilhamento T_{min} de peso de expoente mínimo 29 associado a sequência x^2y^3z . Obtemos

$$\begin{aligned} y^2zxyx &= yyzxyx = q^2yyxzyx = q^3yyxyzx = q^5yyxyxz = q^7yyxyxz \\ &= q^9yyxyxz = q^{11}yxyxyz = q^{13}xyxyyz = q^{15}x^2y^3z. \end{aligned}$$

Assim

$$w(T) = q^{15}w(T_{min}) = q^{15}q^{29} = q^{44}.$$

Então o peso $w(T)$ é dado em termos de $w(T_{min})$ pela multiplicação de uma potência de q .

Considere a sequência de peso mínimo q^{13} , x^2yz correspondente ao ladrilhamento com dois dominós pretos seguidos de um dominó cinza, que por sua vez é seguido de um quadrado branco. Através de permutação dos símbolos x, y e z , encontramos as seguintes sequências:

$$\begin{aligned}
 xyz &= x^2yz; \\
 xxzy &= qx^2yz; \\
 xyxz &= q^2x^2yz; \\
 xzxy &= q^3x^2yz; \\
 xyzx &= q^4x^2yz; \\
 yxxz &= q^4x^2yz; \\
 xzyx &= q^5x^2yz; \\
 zxxy &= q^5x^2yz; \\
 yxzx &= q^6x^2yz; \\
 zxyx &= q^7x^2yz; \\
 yzxx &= q^8x^2yz; \\
 zyxx &= q^9x^2yz.
 \end{aligned}$$

Assim, determinamos o polinômio $1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9$ correspondente à sequência x^2yz . Este polinômio nos diz quais são as potências de q a serem multiplicadas pelo peso mínimo e portanto obtemos o polinômio

$$(1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9)q^{13},$$

gerador de todos os pesos de ladrilhamentos com dois dominós pretos, um dominó cinza e um quadrado branco.

Exemplo 4.6. Notemos, na expansão de $(x + y + z)^4$, que o coeficiente de x^2yz é exatamente o polinômio correspondente à sequência x^2yz ,

$$\left(q^4 \frac{1 - q^6}{(1 - q)} + q \frac{1 - q^6}{(1 - q^2)} + \frac{1 - q^6}{(1 - q^2)} \right),$$

ou ainda

$$q^4(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) + q(1 + q^2 + q^4) + (1 + q^2 + q^4) =$$

$$1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7 + q^8 + q^9.$$

Assim, o polinômio $p_{j,k,l}$ gerado como coeficiente de $x^j y^k z^l$ na expansão de $(x + y + z)^{k+j+l}$ determina quais são as potências de q a serem multiplicadas pelo peso mínimo, e portanto determina a função geradora dos ladrilhamentos com exatamente j dominós pretos, k dominós cinzas e l quadrados brancos, uma vez que,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathbb{T}_{k,j,l}} w_q(T) &= \sum_{\delta \in \mathbb{S}_{x^k, y^j, z^l}} w_q(T_\delta) \\ &= w(T_{min}) p_{j,k,l} \\ &= q^{2j^2+2kj+k^2} p_{j,k,l}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.7. *Para todo $n \geq 0$,*

$$J_n(q) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} q^{r^2} \sum_{j=0}^r q^{j^2} p_{j,r-j,n-2r}.$$

Demonstração: No lado esquerdo da igualdade é q -contado o conjunto de ladrilhamentos de Jacobsthal de tamanho n . Considere agora os ladrilhamentos de tamanho n com exatamente $r = j + k$ dominós, j dominós pretos e k dominós cinzas. Então estes ladrilhamentos têm $n - 2r$ quadrados brancos. Aplicando o Lema 4.4 temos que a soma de todos os q -pesos dos ladrilhamentos com exatamente j dominós pretos, k dominós cinzas e $n - 2r$ quadrados brancos é

$$q^{2j^2+2kj+k^2} p_{k,j,n-2r}.$$

Fazendo $k = r - j$, obtemos

$$q^{2j^2+2j(r-j)+(r-j)^2} p_{k,r-k,n-2r},$$

ou ainda,

$$q^{r^2+j^2} p_{j,r-j,n-2r}.$$

Somando sobre todas as possibilidades de j and r obtemos a igualdade

$$J_n(q) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^r q^{r^2+j^2} p_{j,r-j,n-2r}.$$

□

4.2.2 Teorema q-Análogo do Lema 3.24

Para demonstrar tal resultado começaremos provando um lema auxiliar. A q -contagem de ladrilhamentos de Jacobsthal de tamanho n deslocados de m posições para a direita será denominado $J_n^m(q)$.

Lema 4.8. *A função geradora para ladrilhamentos deslocados de m posições para a direita com exatamente j dominós pretos, k dominós cinzas e l quadrados brancos é dada por*

$$q^{m(2j+k)+2j^2+2kj+k^2} p_{j,k,l}.$$

Demonstração: Seja um ladrilhamento de tamanho $n = 2j + 2k + l$, de peso $q^{2j^2+2kj+k^2} p_{k,j,l}$ dado pelo Lema 4.4. Observemos que, deslocando-o em m posições para a direita, o peso de cada dominó preto é multiplicado por q^{2m} e o peso de cada dominó cinza é multiplicado por q^m , obtendo a adição de $m(2j + k)$ ao expoente de q no peso inicial, onde segue o resultado. □

Teorema 4.9. *Para todo $n \geq 0$,*

$$\begin{aligned} J_n(q) + (q^n + q^{2n})J_{n-2}^1(q) &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} q^{r^2} \sum_{j=0}^r q^{j^2} [p_{j,r-j,n-2r} + q^{n-r+j+1} \times \\ &\times \{p_{j,r-j-1,n-2r} + q^{n+6j+1} p_{j-1,r-j,n-2r}\}]. \end{aligned}$$

Demonstração:

Do lado esquerdo da igualdade temos a q -contagem de braceletes de tamanho $n = 2k + 2j + l$, contendo exatamente j dominós pretos, $k = r - j$ dominós cinzas e l quadrados brancos. Primeiramente considere um bracelete fora de fase tendo um dominó (preto ou cinza) na posição $(n, 1)$. Observemos que, se tivermos um dominó preto temos a contribuição de q^{2n} , caso contrário, temos a contribuição de q^n no peso do ladrilhamento. Removendo este dominó teremos um ladrilhamento de Jacobsthal de tamanho $n - 2$ deslocado em uma posição a direita. No segundo caso, considere um bracelete em fase, ou seja, um bracelete que pode ser quebrado entre as células n e 1 , obtendo um n -ladrilhamento. Assim a soma dos q -pesos de todos os braceletes de tamanho n é dado por

$$J_n(q) + (q^n + q^{2n})J_{n-2}^1(q).$$

Por outro lado, dado $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ e $0 \leq j \leq r$, determinaremos a soma dos q -pesos de todos os braceletes de tamanho n com exatamente r dominós e $n - 2r$ quadrados brancos. Pelo Lema 4.4 temos que a soma dos q -pesos de um bracelete em fase é dada por

$$q^{r^2+j^2} p_{j,r-j,n-2r}.$$

De modo, análogo, aplicando o Lema 4.8 para $m = 1$, obtemos que a soma dos q -pesos de um bracelete fora de fase é dada por

$$q^{2n} \left(q^{2j+k} q^{2(j-1)^2+2k(j-1)+k^2} p_{j-1,k,l} \right) + q^n \left(q^{2j+k} q^{2j^2+2(k-1)j+(k-1)^2} p_{j,k-1,l} \right).$$

Fazendo $k = r - j$ e somando sobre $0 \leq r \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ e $0 \leq j \leq r$, obtemos

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} q^{r^2} \sum_{j=0}^r q^{j^2} [p_{j,r-j,n-2r} + q^{n-r+j+1} \times \{p_{j,r-j-1,n-2r} + q^{n+6j+1} p_{j-1,r-j,n-2r}\}],$$

onde segue a igualdade.

□

4.2.3 Alguns Teoremas q -análogos e Generalizações

Aplicando o mesmo raciocínio, obtemos os seguintes teoremas q -análogos cujas demonstrações seguem pelos mesmos princípios dos teoremas e lemas dos quais são correspondidos analogamente.

A cerca de notação considere $P_{n+1}^m(a, b; q)$ a q -contagem do número de possibilidades de preencher um ladrilhamento de tamanho $n + 1$ com posições deslocadas em m posições para a direita usando $a \geq 1$ diferentes cores de quadrado e $b \geq 1$ diferentes cores de dominós.

Teorema 4.10. (*Teorema q -Análogo do Teorema 3.15*) Para $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^n (q^{i+1} + q^{2(i+1)}) J_i(q) = J_{n+2}(q) - 1. \quad (4.2)$$

Demonstração: O lado direito da igualdade 4.2 q -conta todos os ladrilhamentos de Jacobsthal de tamanho $(n + 2)$ excluindo o ladrilhamento contendo apenas quadrados brancos. Considere agora a localização do último dominó. Existem $(q^{i+1} + q^{2(i+1)}) J_i(q)$ ladrilhamentos onde o último dominó cobre as células $i + 1$ e $i + 2$, uma vez que as células de 1 a i são ladrilhadas de $J_i(q)$ maneiras, as células $i + 1$ e $i + 2$ são cobertas por um dominó cinza de peso q^{i+1} ou um dominó preto de peso $q^{2(i+1)}$; e as células de $i + 3$ até $n + 2$ são cobertas por quadrados brancos. Somando em i , com $0 \leq i \leq n$ segue o resultado.

□

Teorema 4.11. (*Teorema q -Análogo Generalizado do Teorema 3.15*) Para $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{q^{i+1}(1-q^{b(i+1)})}{1-q^{i+1}} \right) P_i(a, b; q) \prod_{j=i+3}^{(n+2)} \frac{(1-q^{aj})}{1-q^j} = P_{n+2}(a, b; q) - \prod_{i=1}^{n+2} \frac{(1-q^{ia})}{(1-q^i)}. \quad (4.3)$$

Demonstração: O lado direito da igualdade (4.3) q -conta todos os ladrilhamentos de tamanho $(n+2)$ com $a \geq 1$ diferentes cores de quadrado, inclusive a cor branca, e $b \geq 1$ diferentes cores de dominós, excluindo os ladrilhamentos contendo apenas quadrados.

Considere agora a localização do último dominó. Existem

$$\begin{aligned} (q^{i+1} + q^{2(i+1)} + \dots + q^{b(i+1)}) P_i(a, b; q) \prod_{j=i+3}^{(n+2)} (1 + q^j + q^{2j} + \dots + q^{(a-1)j}) = \\ = \left(\frac{q^{i+1}(1-q^{b(i+1)})}{1-q^{i+1}} \right) P_i(a, b; q) \prod_{j=i+3}^{(n+2)} \frac{(1-q^{aj})}{1-q^j} \end{aligned}$$

ladrilhamentos onde o último dominó cobre as células $i+1$ e $i+2$, uma vez que as células de 1 a i são ladrilhadas de $P_i(a, b; q)$ maneiras, as células $i+1$ e $i+2$ são cobertas por um dominó de peso $q^{t(i+1)}$; com $1 \leq t \leq b$; e as células de $i+3$ até $n+2$ são cobertas por quadrados com peso dado por $\prod_{j=i+3}^{(n+2)} \frac{(1-q^{aj})}{1-q^j}$. Somando em i , com $0 \leq i \leq n$ segue o resultado. □

Corolário 4.12. Para $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^n q^{i+1} P_i(2, 1; q) \prod_{j=i+3}^{(n+2)} (1 + q^j) = P_{n+2}(2, 1; q) - \prod_{i=1}^{n+2} (1 + q^i). \quad (4.4)$$

Teorema 4.13. (*Teorema q -Análogo do Teorema 3.16*) Para $n \geq 0$,

$$J_{2n+1}(q) = \sum_{i=0}^n J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{(n-i)} (q^{2(i+j)} + q^{4(i+j)}). \quad (4.5)$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade (4.5) q -conta todos os $(2n+1)$ -ladrilhamentos com quadrados brancos, dominós cinzas e dominós pretos. Como $2n+1$ é ímpar então cada ladrilhamento deve conter um número ímpar de quadrados brancos e o último quadrado deve estar em uma posição ímpar. Vamos fazer a q -contagem pela posição do último quadrado branco no ladrilhamento.

Suponha que o último quadrado branco se encontra na posição $2i+1$, do lado esquerdo temos um ladrilhamento de ordem $2i$ e do lado direito restam $2(n-i)$ posições começando na posição $2i+2$

e terminando em $2n + 1$, que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem duas cores de dominós e cada cor tem um peso associado dependente de sua posição temos, para cada posição $(2i + 2j)$ com j no intervalo dos inteiros entre 1 e $(n - i)$, a escolha q -contada por $(q^{2i+j} + q^{2(2i+j)})$. Variando em j obtemos o produto dependente de i

$$J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{(n-i)} (q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)}) = J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{(n-i)} (q^{2(i+j)} + q^{4(i+j)}),$$

do qual, somando em i , com $0 \leq i \leq n$, obtemos o resultado. \square

Teorema 4.14. (*Teorema q -Análogo Generalizado do Teorema 3.16*) Para $n \geq 0$,

$$P_{2n+1}(a, b; q) = \sum_{i=0}^n \frac{(1 - q^{a(2i+1)})}{(1 - q^{(2i+1)})} P_{2i}(a, b; q) \prod_{j=1}^{(n-i)} \left(\frac{q^{2(i+j)}(1 - q^{2b(i+j)})}{1 - q^{2(i+j)}} \right). \quad (4.6)$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade (4.6) q -conta todos os ladrilhamentos de ordem $2n + 1$ com $a \geq 1$ diferentes cores de quadrado, inclusive a cor branca, e $b \geq 1$ diferentes cores de dominós. Como $2n + 1$ é ímpar então cada ladrilhamento deve conter um número ímpar de quadrados e o último quadrado deve estar em uma posição ímpar. Vamos fazer a q -contagem pela posição do último quadrado no ladrilhamento.

Suponha que o último quadrado se encontra na posição $2i + 1$, com possibilidade de peso dado pelo polinômio $(1 + q^{(2i+1)} + q^{2(2i+1)} + \dots + q^{(a-1)(2i+1)}) = \frac{(1 - q^{a(2i+1)})}{(1 - q^{(2i+1)})}$. Do lado esquerdo temos um ladrilhamento de ordem $2i$ e do lado direito restam $2(n - i)$ posições começando na posição $2i + 2$ e terminando em $2n + 1$, que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem b cores de dominó e cada cor tem um peso associado dependente de sua posição temos, para cada posição $(2i + 2j)$ com j no intervalo dos inteiros entre 1 e $(n - i)$, inclusive, a escolha q -contada por $(q^{2i+j} + q^{2(2i+j)} + \dots + q^{b(2i+j)})$.

Fazendo a mudança da variável j para $2j$, com $1 \leq j \leq (n + 1)$ obtemos a soma para cada j :

$$(q^{2(i+j)} + q^{4(i+j)} + \dots + q^{2b(i+j)}) = \left(\frac{q^{2(i+j)}(1 - q^{2b(i+j)})}{1 - q^{2(i+j)}} \right).$$

Variando em j obtemos o produto dependente de i :

$$\begin{aligned} (1 + q^{(2i+1)} + q^{2(2i+1)} + \dots + q^{(a-1)(2i+1)}) P_{2i}(a, b; q) \prod_{j=1}^{(n-i)} (q^{2(i+j)} + q^{4(i+j)} + \dots + q^{2b(i+j)}) &= \\ &= \frac{(1 - q^{a(2i+1)})}{(1 - q^{(2i+1)})} P_{2i}(a, b; q) \prod_{j=1}^{(n-i)} \left(\frac{q^{2(i+j)}(1 - q^{2b(i+j)})}{1 - q^{2(i+j)}} \right), \end{aligned}$$

do qual somando em i , com $0 \leq i \leq n$, obtemos o resultado.

□

Corolário 4.15. *Para $n \geq 0$,*

$$P_{2n+1}(2, 1; q) = \sum_{i=0}^n (1 + q^{2i+1}) P_{2i}(2, 1; q) \prod_{j=1}^{(n-i)} q^{2(i+j)}. \quad (4.7)$$

Teorema 4.16. *(Teorema q -Análogo do Teorema 3.17) Para $n \geq 0$,*

$$J_m(q) J_{n+1}^m(q) + (q^m + q^{2m}) J_n^{m+1}(q) J_{m-1}(q) = J_{m+n+1}(q). \quad (4.8)$$

Demonstração: Do lado direito da igualdade (4.8) temos o conjunto dos ladrilhamentos de Jacobsthal ordem $1 \times (m + n + 1)$ q -contados por $J_{m+n+1}(q)$.

Consideremos agora as condições de separabilidade de um ladrilhamento. Se um ladrilhamento de ordem $(m + n + 1)$ é quebrável na célula m , então podemos criar um ladrilhamento de ordem m seguido de um ladrilhamento de ordem $(n + 1)$ onde as peças estão em posições deslocadas em m unidades. Este conjunto é q -enumerado por $J_m(q) J_{n+1}^m(q)$.

Caso contrário, existirá um dominó, preto ou cinza, cobrindo as células m e $m + 1$. Então podemos criar um ladrilhamento de ordem $(m - 1)$ seguido de um dominó e um n -ladrilhamento onde as peças estão em posições deslocadas em $m + 1$ unidades. Estes ladrilhamentos são q -enumerados por $(q^m + q^{2m}) J_n^{m+1}(q) J_{m-1}(q)$.

Como não é possível um ladrilhamento ser separável e não separável na célula m simultaneamente, obtemos a igualdade.

□

Corolário 4.17. *(Teorema q -Análogo do Teorema 3.26) Para $n \geq 1$,*

$$J_{2n+1}(q) = J_n(q) J_{n+1}^n(q) + (q^n + q^{2n}) J_n^{n+1}(q) J_{n-1}(q). \quad (4.9)$$

Demonstração: Basta tomar $m = n$ em (4.8).

□

Teorema 4.18. *(Teorema q -Análogo Generalizado do Teorema 3.17) Para $n \geq 0$,*

$$P_m(a, b; q) P_{n+1}^m(a, b; q) + \left(\frac{q^m(1 - q^{bm})}{1 - q^m} \right) P_n^{m+1}(a, b; q) P_{m-1}(a, b; q) = P_{m+n+1}(a, b; q). \quad (4.10)$$

Demonstração: Do lado direito da igualdade (4.10) temos os ladrilhamentos de tamanho $(m + n + 1)$ q -contados por $P_{m+n+1}(a, b; q)$.

Consideremos agora as condições de separabilidade de um ladrilhamento. Se um ladrilhamento de ordem $(m + n + 1)$ é quebrável na célula m , então podemos criar um ladrilhamento de ordem m seguido de um ladrilhamento de ordem $(n + 1)$ com posições deslocadas em m unidades para a direita. Este conjunto é q -enumerado por $P_m(a, b; q)P_{n+1}^m(a, b; q)$.

Caso contrário, existirá um dominó cobrindo as células m e $m + 1$ com peso dado por

$$(q^m + q^{2m} + \dots + q^{bm}) = \left(\frac{q^m(1 - q^{bm})}{1 - q^m} \right).$$

Então podemos criar um ladrilhamento de ordem $(m - 1)$ seguido de um dominó que por sua vez é seguido de um n -ladrilhamento com posições deslocadas em $m + 1$ unidades para a direita. Estes ladrilhamentos são q -enumerados por $\left(\frac{q^m(1 - q^{bm})}{1 - q^m} \right) P_n^{m+1}(a, b; q)P_{m-1}(a, b; q)$. Desde que não é possível um ladrilhamento ser separável e não separável na célula m simultaneamente, obtemos a igualdade.

□

Corolário 4.19. (*Teorema q -Análogo Generalizado do Teorema (3.26)*) Para $n \geq 1$,

$$P_n(a, b; q)P_{n+1}^n(a, b; q) + \left(\frac{q^n(1 - q^{bn})}{1 - q^n} \right) P_n^{n+1}(a, b; q)P_{n-1}(a, b; q) = P_{2n+1}(a, b; q). \quad (4.11)$$

Demonstração: Basta tomar $m = n$ em (4.10).

□

Teorema 4.20. (*Teorema q -Análogo do Teorema 3.19*) Para $n \geq 1$,

$$(J_n(q))^2 = \begin{cases} J_{n+1}(q)J_{n-1}(q) - \left(q^{2p-1} + q^{2(2p-1)} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right)^2, & \text{se } n=2p-1 \\ J_{n+1}(q)J_{n-1}(q) + \prod_{j=1}^p \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right)^2, & \text{se } n=2p. \end{cases} \quad (4.12)$$

Demonstração:

O conjunto de pares de ladrilhamentos de ordem $1 \times n$ é q -enumerado por $J_n^2(q)$. Também temos $J_{n+1}(q)J_{n-1}(q)$ ladrilhamentos para dois ladrilhamentos colocados um sobre o outro, um de tamanho $n + 1$ e o outro de tamanho $n - 1$.

Vamos dividir a prova em dois casos dependendo da paridade de n .

Seja um par de ladrilhamentos de tamanho n . Se n é ímpar com formato $n = 2p - 1$, p inteiro positivo, então existe pelo menos um quadrado branco nos dois ladrilhamentos e portanto o par de ladrilhamentos de ordem $1 \times n$ contém uma falha e conseqüentemente uma cauda. Portanto, trocando as caudas dos ladrilhamentos obtemos dois ladrilhamentos, um de ordem $n + 1$ e o outro de ordem $n - 1$, com as mesmas falhas. Essa correspondência entre todos os pares de n -ladrilhamentos contendo falhas e os pares de $(n + 1)$ -ladrilhamento e $(n - 1)$ -ladrilhamento está bem definida. No entanto, para torná-la biunívoca, devemos descontar os pares compostos de um $(n + 1)$ -ladrilhamento e um $(n - 1)$ -ladrilhamento preenchidos com apenas dominós, pois estes não contêm falhas. Ou ainda, devemos descontar os ladrilhamentos q -contados por

$$\prod_{j=1}^p \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right) = \left(q^{2p-1} + q^{2(2p-1)} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right)^2.$$

$$\text{Logo temos } (J_n(q))^2 = J_{n+1}(q)J_{n-1}(q) - \left(q^{2p-1} + q^{2(2p-1)} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right)^2.$$

Quando $n = 2p$ é par, aplicamos o mesmo argumento anterior para obter uma correspondência biunívoca entre todos os pares de n -ladrilhamentos e todos os pares compostos de um $(n + 1)$ -ladrilhamento e um $(n - 1)$ -ladrilhamento contendo falhas. Nesse caso, o ladrilhamento contendo apenas dominós é o único ladrilhamento que compõe um par de n -ladrilhamentos sem falhas. Logo temos que descontar os ladrilhamentos contados por

$$\prod_{j=1}^p \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right)^2.$$

Assim temos $(J_n(q))^2 - \prod_{j=1}^p \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \right)^2 = J_{n+1}(q)J_{n-1}(q)$, o que completa a prova.

□

Teorema 4.21. (Teorema q -Análogo Generalizado do Teorema 3.19) Para $n \geq 1$,

$$(P_n(a, b; q))^2 = \begin{cases} P_{n+1}(a, b; q)P_{n-1}(a, b; q) - \left(\frac{q^{2p-1}(1-q^b)}{1-q} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(\frac{q^{2j-1}(1-q^b)}{1-q} \right)^2, & \text{se } n=2p-1 \\ P_{n+1}(a, b; q)P_{n-1}(a, b; q) + \prod_{j=1}^p \left(\frac{q^{2j-1}(1-q^b)}{1-q} \right)^2, & \text{se } n=2p. \end{cases} \quad (4.13)$$

Demonstração: Considere todas as maneiras de ladrilhar tabuleiros de ordem $1 \times n$, $1 \times (n + 1)$, e $1 \times (n - 1)$, usando $a \geq 1$ diferentes cores de quadrados, inclusive a cor branca, e $b \geq 1$ cores de retângulos. O conjunto de pares de ladrilhamentos de ordem n é q -enumerado por $P_n^2(a, b; q)$. Também temos $P_{n+1}(a, b; q)P_{n-1}(a, b; q)$ ladrilhamentos para dois ladrilhamentos colocados um sobre o outro, um de ordem $n + 1$ e o outro de ordem $n - 1$.

Vamos dividir a prova em dois casos dependendo da paridade de n .

Seja um par de ladrilhamentos de tamanho n . Se n é ímpar com formato $n = 2p - 1$, p inteiro positivo, então existe pelo menos um quadrado nos dois ladrilhamentos e portanto o par de ladrilhamentos de ordem n contém uma falha e conseqüentemente uma cauda. Portanto, trocando as caudas dos ladrilhamentos obtemos dois ladrilhamentos, um de ordem $n+1$ e o outro de ordem $n-1$, com as mesmas falhas. Essa correspondência entre todos os pares de n -ladrilhamentos contendo falhas e os pares de $(n+1)$ -ladrilhamento e $(n-1)$ -ladrilhamento está bem definida. No entanto, para torná-la biunívoca, devemos descontar os pares compostos de um $(n+1)$ -ladrilhamento e um $(n-1)$ -ladrilhamento ladrilhados com apenas dominós, pois estes não contém falhas. Ou ainda, devemos descontar os ladrilhamentos q -contados por

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^p \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \dots + q^{b(2j-1)} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \dots + q^{b(2j-1)} \right) \\ = \left(\frac{q^{2p-1}(1 - q^{b(2p-1)})}{1 - q^{2p-1}} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(\frac{q^{2j-1}(1 - q^{b(2j-1)})}{1 - q^{2j-1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Logo temos

$$(P_n(a, b; q))^2 = P_{n+1}(a, b; q)P_{n-1}(a, b; q) - \left(\frac{q^{2p-1}(1 - q^{b(2p-1)})}{1 - q^{2p-1}} \right) \prod_{j=1}^{p-1} \left(\frac{q^{2j-1}(1 - q^{b(2j-1)})}{1 - q^{2j-1}} \right)^2.$$

Quando $n = 2p$ é par, aplicamos o mesmo argumento anterior para obter uma correspondência biunívoca entre todos os pares de n -ladrilhamentos e todos os pares de $(n+1)$ -ladrilhamento e $(n-1)$ -ladrilhamento contendo falhas. Nesse caso, o ladrilhamento contendo apenas dominós são os únicos ladrilhamentos que forma um par de n -ladrilhamentos sem falhas. Logo temos que descontar os ladrilhamentos contados por

$$\prod_{j=1}^p \left(q^{2j-1} + q^{2(2j-1)} \dots + q^{b(2j-1)} \right)^2 = \prod_{j=1}^p \left(\frac{q^{2j-1}(1 - q^{b(2j-1)})}{1 - q^{2j-1}} \right)^2.$$

Assim temos

$$(P_n(a, b; q))^2 - \prod_{j=1}^p \left(\frac{q^{2j-1}(1 - q^{b(2j-1)})}{1 - q^{2j-1}} \right)^2 = P_{n+1}(a, b; q)P_{n-1}(a, b; q),$$

o que completa a prova. □

Corolário 4.22. Para $n \geq 1$,

$$(P_n(2, 1; q))^2 = \begin{cases} P_{n+1}(2, 1; q)P_{n-1}(2, 1; q) - q^{2p-1} \prod_{j=1}^{p-1} q^{2(2j-1)}, & \text{se } n=2p-1 \\ P_{n+1}(2, 1; q)P_{n-1}(2, 1; q) + \prod_{j=1}^p q^{2(2j-1)}, & \text{se } n=2p. \end{cases} \quad (4.14)$$

Teorema 4.23. (Teorema q -Análogo do Teorema 3.25) Para $n \geq 1$,

$$J_{n+2}(q) + (q^{n+2} + q^{2(n+2)})J_n^1(q) - 1 = (q^{n+2} + q^{2(n+2)}) \left\{ 1 + \sum_{k=2}^n (q^k + q^{2k})J_{k-1}^1(q) \right\} + \sum_{k=0}^n (q^{k+1} + q^{2(k+1)})J_k(q). \quad (4.15)$$

Demonstração:

Considere todas as maneiras possíveis de ladrilhar um tabuleiro circular de tamanho $n + 2$ com posições rotuladas em sentido horário utilizando quadrados brancos, dominós “curvos” cinzas e pretos, ou seja, todos os braceletes de Jacobsthal de ordem $1 \times (n + 2)$.

Os braceletes podem estar em fase ou fora de fase. Dado um bracelete, se ele estiver fora de fase então temos um dominó na posição $(n + 2, 1)$. Se tivermos um dominó preto na posição $(n + 2, 1)$ temos a contribuição no peso do fator $q^{2(n+2)}$, caso contrário, se tivermos um dominó cinza temos a contribuição de q^{n+2} no peso do ladrilhamento. Removendo este dominó teremos um ladrilhamento de Jacobsthal de tamanho $n - 2$ deslocado em uma posição á direita contado por $J_n^1(q)$. No segundo caso, considere um bracelete em fase, então este bracelete que pode ser quebrado entre as células $n + 2$ e 1, obtendo um $(n + 2)$ - ladrilhamento. Assim a soma dos q -pesos de todos os braceletes de tamanho $(n + 2)$ é dado por

$$J_{n+2}(q) + (q^{n+2} + q^{2(n+2)})J_n^1(q).$$

Portanto, temos que o lado esquerdo da igualdade q -conta o número de braceletes de ordem $1 \times (n + 2)$ retirando-se o caso onde o bracelete contem apenas quadrados brancos.

Para determinar a igualdade, iremos considerar a localização do último dominó. Existem duas possibilidades. Se o bracelete está em fase o último dominó poderá cobrir as células $(k + 1)$ e

$(k + 2)$. O número de braceletes desse tipo é q -contado por $(q^{k+1} + q^{2(k+1)})J_k(q)$, uma vez que as células de 1 a k são ladrilhadas de $J_k(q)$ maneiras e a contribuição do peso dado pelo dominó na posição $(k + 1, k + 2)$ é o fator $(q^{k+1} + q^{2(k+1)})$; as células de $k + 3$ até $n + 2$ são cobertas por quadrados brancos de peso 1. Variando k entre 0 e n temos todas os possíveis preenchimentos para um bracelete em fase dado por

$$\sum_{k=0}^n (q^{k+1} + q^{2(k+1)})J_k(q).$$

Agora se o bracelete está fora de fase teremos um dominó preenchendo a posição $(n + 2, 1)$. O último dominó poderá cobrir as células k e $k + 1$. O número de braceletes desse tipo é q -contado por $(q^k + q^{2k})(q^{n+2} + q^{2(n+2)})J_{k-1}^1(q)$, uma vez que as células de 2 a $k - 1$ são ladrilhadas de $J_k^1(q)$ maneiras, a contribuição do peso dado pelo dominó na posição $(k, k + 1)$ é o fator $(q^k + q^{2k})$, a contribuição do peso dado pelo dominó na posição $(n + 2, 1)$ é o fator $(q^{n+2} + q^{2(n+2)})$; as células de $k + 2$ até $n + 1$ são cobertas por quadrados brancos de peso 1. Variando k entre 2 e n temos todas os possíveis preenchimentos para um bracelete fora de fase contendo mais de um dominó. Pode ainda haver o bracelete fora de fase formado apenas por quadrados brancos, ou seja, formado por quadrados brancos preenchendo as posições de 2 a $n + 1$ e um dominó na posição $(n + 2, 1)$ com a contribuição de peso $(q^{n+2} + q^{2(n+2)})$.

Assim, obtemos a contribuição

$$(q^{n+2} + q^{2(n+2)}) \left\{ 1 + \sum_{k=2}^n (q^k + q^{2k})J_{k-1}^1(q) \right\},$$

seguinto o resultado. □

Teorema 4.24. (*Teorema q -Análogo Generalizado do Teorema 3.25*) Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} & P_{n+2}(a, b; q) + \left(\frac{q^{(n+2)}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{(n+2)}} \right) P_n^1(a, b; q) - \prod_{i=1}^{n+2} \frac{1 - q^{ia}}{(1 - q^i)} = \\ & \sum_{k=0}^n \left(\frac{q^{(k+1)}(1 - q^{b(k+1)})}{1 - q^{(k+1)}} \right) P_k(a, b; q) \prod_{i=k+3}^{n+2} \left(\frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i} \right) + \left(\frac{q^{n+2}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{n+2}} \right) \\ & \times \left\{ \prod_{i=2}^{n+1} \frac{1 - q^{ia}}{(1 - q^i)} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{q^{n+2}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{n+2}} \right) \left(\frac{q^k(1 - q^{bk})}{1 - q^k} \right) P_{k-1}^1(a, b; q) \prod_{i=k+2}^{n+1} \left(\frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Considere todas as maneiras possíveis de ladrilhar um tabuleiro circular de tamanho $n + 2$ com posições rotuladas em sentido horário utilizando $a \geq 1$ cores de quadrados,

inclusive a cor branca, e $b \geq 1$ cores de dominós “curvos”, ou seja, todos os braceletes de ordem $1 \times (n + 2)$. Considere todos os braceletes de ordem $1 \times (n + 2)$. Os braceletes podem estar em fase e fora de fase. Dado um bracelete, se ele estiver fora de fase então temos um dominó na posição $(n + 2, 1)$. Se tivermos um dominó na posição $(n + 2, 1)$ temos a contribuição no peso do fator $(q^{(n+2)} + q^{2(n+2)} + \dots + q^{b(n+2)}) = \frac{q^{(n+2)}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{(n+2)}}$. Removendo este dominó teremos um ladrilhamento de tamanho n deslocado em uma posição à direita contado por $P_n^1(a, b; q)$. No segundo caso, considere um bracelete em fase, então este bracelete que pode ser quebrado entre as células $n + 2$ e 1 , obtendo um $(n + 2)$ - ladrilhamento. Assim a soma dos q-pesos de todos os braceletes de tamanho $(n + 2)$ é dado por

$$P_{n+2}(a, b; q) + \left(\frac{q^{(n+2)}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{(n+2)}} \right) P_n^1(a, b; q).$$

Portanto, temos que o lado esquerdo da igualdade q–conta o número de braceletes de ordem $1 \times (n + 2)$ retirando-se o caso onde o bracelete contem apenas quadrados q-contado por $\prod_{i=1}^{n+2} \frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i}$.

Para determinar a igualdade, iremos considerar a localização do último dominó. Existem duas possibilidades. Se o bracelete está em fase o último dominó poderá cobrir as células $(k + 1)$ e $(k + 2)$. Um bracelete desse tipo tem peso dado por

$$\begin{aligned} & (q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \dots + q^{b(k+1)}) P_k(a, b; q) (1 + q^{k+3} + \dots + q^{(k+3)(a-1)}) \dots (1 + q^{n+2} + \dots + q^{(n+2)(a-1)}) \\ &= \left(\frac{q^{(k+1)}(1 - q^{b(k+1)})}{1 - q^{(k+1)}} \right) P_k(a, b; q) \prod_{i=k+3}^{n+2} \left(\frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i} \right), \end{aligned}$$

uma vez que as células de 1 a k são ladrilhadas de $P_k(a, b; q)$ maneiras e a contribuição do peso dado pelo dominó na posição $(k + 1, k + 2)$ é o fator $(q^{k+1} + q^{2(k+1)} + \dots + q^{b(k+1)})$; as células de $k + 3$ até $n + 2$ são cobertas por quadrados onde cada posição tem relacionada a contribuição $(1 + q^i + \dots + q^{i(a-1)}) = \frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i}$. Variando k entre 0 e n temos todas os possíveis preenchimentos para um bracelete em fase dado por

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{q^{(k+1)}(1 - q^{b(k+1)})}{1 - q^{(k+1)}} \right) P_k(a, b; q) \prod_{i=k+3}^{n+2} \left(\frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i} \right).$$

Agora se o bracelete está fora de fase teremos um dominó preenchendo a posição $(n + 2, 1)$. O último dominó poderá cobrir as células k e $k + 1$. Um bracelete desse tipo tem peso dado por

$$\begin{aligned}
& (q^k + \dots + q^{bk})(q^{n+2} + \dots + q^{b(n+2)})P_{k-1}^1(a, b; q) \\
& \times (1 + q^{k+2} + \dots + q^{(k+2)(a-1)}) \dots (1 + q^{n+1} + \dots + q^{(n+1)(a-1)}) \\
& = \left(\frac{q^{n+2}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{n+2}} \right) \left(\frac{q^k(1 - q^{bk})}{1 - q^k} \right) P_{k-1}^1(a, b; q) \prod_{i=k+2}^{n+1} \left(\frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i} \right)
\end{aligned}$$

uma vez que as células de 2 a $k - 1$ são ladrilhadas de $P_k^1(a, b; q)$ maneiras, a contribuição do peso dado pelo dominó na posição $(k, k + 1)$ é o fator $(q^k + q^{2k} + \dots + q^{bk})$, a contribuição do peso dado pelo dominó na posição $(n + 2, 1)$ é o fator $(q^{n+2} + q^{2(n+2)} + \dots + q^{b(n+2)})$; as células de $k + 2$ até $n + 1$ são cobertas por quadrados onde cada posição tem relacionada a contribuição $(1 + q^i + \dots + q^{i(a-1)})$, com $k + 2 \leq i \leq (n + 1)$. Variando k entre 2 e n temos todas os possíveis preenchimentos para um bracelete fora de fase contendo mais de um dominó dado por

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{q^{n+2}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{n+2}} \right) \left(\frac{q^k(1 - q^{bk})}{1 - q^k} \right) P_{k-1}^1(a, b; q) \prod_{i=k+2}^{n+1} \left(\frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i} \right)$$

Podemos ainda haver o bracelete fora de fase formado apenas por quadrados, ou seja, formado por quadrados preenchendo as posições de 2 a $n + 1$ e um dominó na posição $(n + 2, 1)$ com a contribuição de peso

$$(q^{n+2} + \dots + q^{b(n+2)}) \prod_{i=2}^{n+1} \frac{1 - q^{ia}}{(1 - q^i)} = \left(\frac{q^{n+2}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{n+2}} \right) \prod_{i=2}^{n+1} \frac{1 - q^{ia}}{(1 - q^i)}.$$

Assim, obtemos a contribuição

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{q^{n+2}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{n+2}} \right) \left\{ \prod_{i=2}^{n+1} \frac{1 - q^{ia}}{(1 - q^i)} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{q^{n+2}(1 - q^{b(n+2)})}{1 - q^{n+2}} \right) \left(\frac{q^k(1 - q^{bk})}{1 - q^k} \right) \right. \\
& \left. \times P_{k-1}^1(a, b; q) \prod_{i=k+2}^{n+1} \left(\frac{1 - q^{ia}}{1 - q^i} \right) \right\},
\end{aligned}$$

segundo o resultado. □

Corolário 4.25. Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
& P_{n+2}(2, 1; q) + q^{(n+2)} P_n^1(2, 1; q) - \prod_{i=1}^{n+2} (1 + q^i) = \sum_{k=0}^n q^{(k+1)} P_k(2, 1; q) \prod_{i=k+3}^{n+2} (1 + q^i) + \\
& + q^{n+2} \left\{ \prod_{i=2}^{n+1} (1 + q^i) + q^{n+2} \sum_{k=2}^n q^k P_{k-1}^1(2, 1; q) \prod_{i=k+2}^{n+1} (1 + q^i) \right\}.
\end{aligned}$$

Teorema 4.26. (*Teorema q -Análogo do Teorema 3.30*) Para $n \geq 1$,

$$J_{2n+1}(q) + (q^{2n+1} + q^{2(2n+1)})J_{2n}^1(q) = J_0(q) \prod_{j=1}^n (q^{2j} + q^{4j}) + \sum_{i=1}^n \left\{ J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)}) + (q^{2n+1} + q^{2(2n+1)})J_{2i-1}^1(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j-1} + q^{2(2i+2j-1)}) \right\}.$$

Demonstração: Do lado esquerdo da igualdade temos a q -contagem de $(2n + 1)$ -braceletes de Jacobsthal. Como $2n + 1$ é ímpar, cada bracelete deve conter um número ímpar de quadrados brancos. Temos duas possibilidades.

Caso o bracelete seja em fase os quadrados brancos vão ocupar as posições ímpares. Suponha que o último quadrado branco encontra-se na posição $2i + 1$. Anterior a ele temos um $2i$ -ladrilhamento de Jacobsthal q -contado por $J_{2i}(q)$. Posterior ao quadrado temos $2(n - i)$ posições começando em $2i + 2$ até $2n + 1$ que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem duas cores possíveis de dominós, e em cada posição $2i + 2j$, com $1 \leq j \leq n - i$, temos a contribuição no peso do ladrilhamento dado pelo fator $(q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)})$, temos que o peso de um bracelete desse tipo é dado por

$$J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)}),$$

e o número total de braceletes em fase é

$$\sum_{i=0}^n J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)}).$$

Caso contrário, teremos um bracelete fora de fase e portanto haverá um dominó ocupando a posição $(2n + 1, 1)$ com contribuição no peso dado por $(q^{2n+1} + q^{2(2n+1)})$ e o último quadrado branco irá se encontrar na posição $2i$. Anterior a ele temos um $(2i - 1)$ -ladrilhamento de Jacobsthal deslocado em uma unidade q -contado por $J_{2i-1}^1(q)$. Posterior ao quadrado temos $2(n - i)$ posições começando em $2i + 1$ até $2n$ que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem duas cores possíveis de dominós, e em cada posição $2i + 2j - 1$, com $1 \leq j \leq n - i$, temos a contribuição no peso do ladrilhamento dado pelo fator $(q^{2i+2j-1} + q^{2(2i+2j-1)})$, temos que o peso de um bracelete desse tipo é dado por

$$(q^{2n+1} + q^{2(2n+1)})J_{2i-1}^1(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j-1} + q^{2(2i+2j-1)}),$$

e o número total de braceletes fora de fase é

$$\sum_{i=1}^n (q^{2n+1} + q^{2(2n+1)}) J_{2i-1}^1(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j-1} + q^{2(2i+2j-1)}).$$

Assim, segue o número de braceletes de Jacobsthal de ordem $2n + 1$ podem ser q -contados por

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)}) + \sum_{i=1}^n (q^{2n+1} + q^{2(2n+1)}) J_{2i}^1(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j-1} + q^{2(2i+2j-1)}) = \\ & J_0 \prod_{j=1}^n (q^{2j} + q^{4j}) + \sum_{i=1}^n \left\{ J_{2i}(q) \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)}) + (q^{2n+1} + q^{2(2n+1)}) J_{2i-1}^1(q) \right. \\ & \quad \left. \times \prod_{j=1}^{n-i} (q^{2i+2j-1} + q^{2(2i+2j-1)}) \right\}. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.27. (Teorema q -Análogo Generalizado do Teorema 3.30) Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} & P_{2n+1}(a, b; q) + \left(\frac{q^{(2n+1)}(1 - q^{b(2n+1)})}{1 - q^{(2n+1)}} \right) P_{2n-1}^1(a, b; q) = \\ & \sum_{i=0}^n P_{2i}(a, b; q) \left(\frac{1 - q^{a(2i+1)}}{1 - q^{(2i+1)}} \right) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{(2i+2j)}(1 - q^{b(2i+2j)})}{1 - q^{(2i+2j)}} \right) + \\ & \sum_{i=1}^n \left(\frac{q^{2n+1}(1 - q^{b(2n+1)})}{1 - q^{2n+1}} \right) \left(\frac{1 - q^{a(2i)}}{1 - q^{2i}} \right) P_{2i-1}^1(a, b; q) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{2i+2j-1}(1 - q^{b(2i+2j-1)})}{1 - q^{2i+2j-1}} \right). \end{aligned}$$

Demonstração: Considere todas as maneiras possíveis de ladrilhar um tabuleiro circular de tamanho $2n + 1$ com posições rotuladas em sentido horário utilizando $a \geq 1$ cores de quadrados, inclusive a cor branca, e $b \geq 1$ cores de dominós “curvos”. Do lado esquerdo da igualdade temos a q -contagem de $(2n + 1)$ -braceletes. Como $2n + 1$ é ímpar, cada bracelete deve conter um número ímpar de quadrados. Temos duas possibilidades.

Caso o bracelete seja em fase os quadrados vão ocupar as posições ímpares. Suponha que o último quadrado encontra-se na posição $2i + 1$, e tem peso $(1 + q^{2i+1} + \dots + q^{(2i+1)(a-1)}) = \left(\frac{1 - q^{a(2i+1)}}{1 - q^{(2i+1)}} \right)$.

Anterior a ele temos um $2i$ -ladrilhamento q -contado por $P_{2i}(a, b; q)$.

Posterior ao quadrado temos $2(n - i)$ posições começando em $2i + 2$ até $2n + 1$ que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem b cores possíveis de dominós, e em cada posição $2i + 2j$, com $1 \leq j \leq n - i$, temos a contribuição no peso do ladrilhamento dado pelo fator

$(q^{2i+2j} + q^{2(2i+2j)} \dots + q^{b(2i+2j)}) = \left(\frac{q^{(2i+2j)}(1 - q^{b(2i+2j)})}{1 - q^{(2i+2j)}} \right)$, e portanto o peso de um bracelete desse tipo é dado por

$$P_{2i}(a, b; q) \left(\frac{1 - q^{a(2i+1)}}{1 - q^{(2i+1)}} \right) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{(2i+2j)}(1 - q^{b(2i+2j)})}{1 - q^{(2i+2j)}} \right),$$

e o número total de braceletes em fase é

$$\sum_{i=0}^n P_{2i}(a, b; q) \left(\frac{1 - q^{a(2i+1)}}{1 - q^{(2i+1)}} \right) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{(2i+2j)}(1 - q^{b(2i+2j)})}{1 - q^{(2i+2j)}} \right).$$

Caso contrário, teremos um bracelete fora de fase e portanto haverá um dominó ocupando a posição $(2n + 1, 1)$ com contribuição no peso dado por $(q^{2n+1} + q^{2(2n+1)} + \dots + q^{b(2n+1)}) = \left(\frac{q^{2n+1}(1 - q^{b(2n+1)})}{1 - q^{2n+1}} \right)$, e o último quadrado irá se encontrar na posição $2i$, com peso $\left(\frac{1 - q^{a(2i)}}{1 - q^{2i}} \right)$.

Anterior a ele temos um $(2i - 1)$ -ladrilhamento deslocado em uma unidade q -contado por $P_{2i-1}^1(a, b; q)$. Posterior ao quadrado temos $2(n - i)$ posições começando em $2i + 1$ até $2n$ que devem ser cobertas apenas por dominós. Como existem b cores possíveis de dominós, e em cada posição $2i + 2j - 1$, com $1 \leq j \leq n - i$, temos a contribuição no peso do ladrilhamento dado pelo fator $(q^{2i+2j-1} + q^{2(2i+2j-1)} + \dots + q^{b(2i+2j-1)}) = \left(\frac{q^{2i+2j-1}(1 - q^{b(2i+2j-1)})}{1 - q^{2i+2j-1}} \right)$, e portanto o peso de um bracelete desse tipo é dado por

$$\left(\frac{q^{2n+1}(1 - q^{b(2n+1)})}{1 - q^{2n+1}} \right) \left(\frac{1 - q^{a(2i)}}{1 - q^{2i}} \right) P_{2i-1}^1(a, b; q) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{2i+2j-1}(1 - q^{b(2i+2j-1)})}{1 - q^{2i+2j-1}} \right),$$

e o número total de braceletes fora de fase é

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{q^{2n+1}(1 - q^{b(2n+1)})}{1 - q^{2n+1}} \right) \left(\frac{1 - q^{a(2i)}}{1 - q^{2i}} \right) P_{2i-1}^1(a, b; q) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{2i+2j-1}(1 - q^{b(2i+2j-1)})}{1 - q^{2i+2j-1}} \right).$$

Assim, segue o número de braceletes de ordem $2n + 1$ podem ser q -contados por

$$\sum_{i=0}^n P_{2i}(a, b; q) \left(\frac{1 - q^{a(2i+1)}}{1 - q^{(2i+1)}} \right) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{(2i+2j)}(1 - q^{b(2i+2j)})}{1 - q^{(2i+2j)}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{q^{2n+1}(1 - q^{b(2n+1)})}{1 - q^{2n+1}} \right) \left(\frac{1 - q^{a(2i)}}{1 - q^{2i}} \right) P_{2i-1}^1(a, b; q) \prod_{j=1}^{n-i} \left(\frac{q^{2i+2j-1}(1 - q^{b(2i+2j-1)})}{1 - q^{2i+2j-1}} \right).$$

□

Corolário 4.28. Para $n \geq 1$,

$$P_{2n+1}(2, 1; q) + q^{(2n+1)}P_{2n-1}^1(2, 1; q) = \sum_{i=0}^n P_{2i}(2, 1; q)(1 + q^{(2i+1)}) \prod_{j=1}^{n-i} q^{(2i+2j)} +$$

$$\sum_{i=1}^n q^{2n+1}(1 + q^{(2i)})P_{2i-1}^1(2, 1; q) \prod_{j=1}^{n-i} q^{2i+2j-1}.$$

CAPÍTULO 5

NÚMEROS DE FIBONACCI E NÚMEROS DE LUCAS GENERALIZADOS

Em [[9], pag 45] é mostrado que o número total de subconjuntos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ tais que não há dois elementos adjacentes é igual a F_n , o n -ésimo número de Fibonacci. A sequência $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ pode ser vista como os vértices de um grafo P_n dado na Figura 5.1. Denotemos $V(P_n) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, conjunto de vértices do grafo P_n .

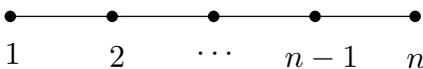


Figura 5.1: P_n

Uma definição mais geral pode ser vista em [21] onde o *número de Fibonacci de um grafo simples* X com conjunto de vértices $V(X)$ e conjunto de arestas $E(X)$ é o número total de subconjuntos S de $V(X)$ tais que não há dois elementos de S adjacentes. Em [[9], pag 46] o caso do grafo cíclico C_n com n vértices dado na Figura 5.2 é considerado. Neste caso o número de Fibonacci $f(C_n)$ de tal grafo cíclico é igual ao n -ésimo número de Lucas L_n .

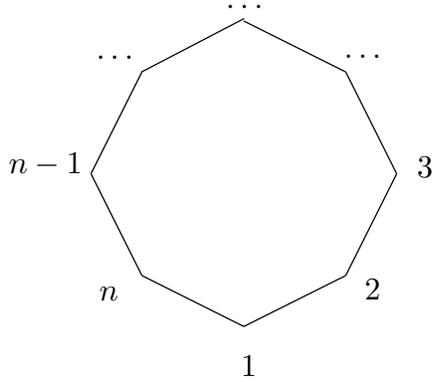


Figura 5.2: C_n

Um subconjunto $S \subseteq V(X)$ é dito k -independente de X se para cada dois vértices x, y em S , $d_X(x, y) \geq k$, onde $d_X(x, y)$ é o menor caminho pelas arestas do grafo X que une x a y .

Exemplo 5.1. Para $k = 2$ a definição de subconjunto 2-independente de P_n se reduz ao caso mostrado em [9]. Seja $n = 4$, então temos $V(P_4) = \{1, 2, 3, 4\}$ cujos subconjuntos 2-independente de P_4 são

$$\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\},$$

com cardinalidade dada por $F_4 = 8$.

Todas as definições apresentadas podem ser generalizadas para grafos em geral e podem ser vistas em [23].

Em [14], uma generalização dos números de Fibonacci $F(n, k)$ e uma generalização dos números de Lucas $L(k, n)$ foram apresentadas cuja interpretação é o número de todos os subconjuntos k -independentes dos grafos P_n e C_n , respectivamente. Esses números, para inteiros $k \geq 2$ e $n \geq 0$, satisfazem as seguintes recorrências:

$$\begin{aligned} F(k, n) &= n + 1, \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, k - 1 \\ F(k, n) &= F(k, n - 1) + F(k, n - k), \quad \text{para } n \geq k \end{aligned} \tag{5.1}$$

e

$$\begin{aligned}
L(k, n) &= n + 1, \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, 2k - 1 \\
L(k, n) &= (k - 1)F(k, n - (2k - 1)) + F(k, n - (k - 1)), \quad \text{para } n \geq 2k.
\end{aligned}
\tag{5.2}$$

No artigo [22] foram estabelecidas e provadas identidades envolvendo essas generalizações em termos de grafos.

Em [17] foram apresentadas interpretações combinatórias, via ladrilhamentos, para as sequências de números definidas pelas recorrências 5.1 e 5.2. Através dessas novas interpretações algumas identidades foram estabelecidas e provadas naquele mesmo artigo.

Neste capítulo definimos as seguintes recorrências. Para a, b inteiros positivos,

$$\begin{aligned}
F_{(a,b)}(k, n) &= a^n(n + 1), \quad \text{para } n = 0, \dots, k - 1 \\
F_{(a,b)}(k, n) &= aF_{(a,b)}(k, n - 1) + bF_{(a,b)}(k, n - k), \quad \text{para } n \geq k
\end{aligned}
\tag{5.3}$$

e

$$\begin{aligned}
L_{(a,b)}(k, n) &= a^n(n + 1), \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, k - 1 \\
L_{(a,b)}(k, n) &= ka^n + (n - k + 1)ba^{n-k}, \quad \text{para } n = k, \dots, 2k - 1 \\
L_{(a,b)}(k, n) &= a^{k-1} \{b(k - 1)F_{(a,b)}(k, n - (2k - 1)) + F_{(a,b)}(k, n - (k - 1))\}, \quad \text{para } n > 2k - 1.
\end{aligned}
\tag{5.4}$$

Observemos que, se $n \geq 0$ e $a = b = 1$, obtemos $F_{(1,1)}(k, n) = F(k, n)$; onde $F(2, n) = F_n$, o n -ésimo número de Fibonacci. Para $n \geq 0$ e $a = b = 1$, temos $L_{(1,1)}(k, n) = L(k, n)$, onde, para $n > 3$, $L(2, n) = L_n$, o n -ésimo número de Lucas.

Notemos que, as relações de recorrências definidas em 5.3 e 5.4 são generalizações das recorrências apresentadas em [14]. Assim, em termos de grafos, os parâmetros a e b podem ser vistos como colorações (pesos) para vértices. Utilizando a ideia apresentada em [17] vamos criar uma interpretação combinatória para os números destas novas sequências definidas, estabelecer identidades e prová-las, via ladrilhamentos.

A Tabela 5.1 exhibe alguns valores para $F_{(a,b)}(k, n)$ e $L_{(a,b)}(k, n)$ com valores de a, b, k fixados.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_{(1,1)}(2, n)$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
$F_{(1,1)}(3, n)$	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41	60	88
$F_{(1,2)}(3, n)$	1	2	3	5	9	15	25	43	73	123	209	355
$F_{(1,1)}(4, n)$	1	2	3	4	5	7	10	14	19	26	36	50
$F_{(1,2)}(4, n)$	1	2	3	4	6	10	16	24	36	56	88	136
$F_{(2,2)}(3, n)$	1	4	12	26	60	144	340	800	1888	4456	10512	24800
$L_{(1,1)}(2, n)$	1	2	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
$L_{(1,1)}(3, n)$	1	2	3	4	5	6	10	15	21	31	46	67
$L_{(1,1)}(4, n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	13	19	26	34

Tabela 5.1: Alguns valores de $F_{(a,b)}(k, n)$ e $L_{(a,b)}(k, n)$

5.1 Interpretação Combinatória de $F_{(a,b)}(k, n)$ e

$L_{(a,b)}(k, n)$

Para apresentarmos a interpretação combinatorial de $F_{(a,b)}(k, n)$, dados os inteiros $k \geq 2, n \geq 0, a, b \geq 1$, consideremos um tabuleiro de ordem $1 \times (n+1)$. Para preencher as casas desse tabuleiro iremos utilizar as seguintes peças: quadrados 1×1 de a diferentes cores, um único quadrado preto 1×1 , e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que o único quadrado preto cobre uma das k primeiras células. Consideremos todas as possíveis maneiras de fazer tal preenchimento. Seja $f_{a,b}(k, n)$ o número de ladrilhamentos desse tipo. Se $n < k$ existe um quadrado preto nas $n+1$ posições existentes e as demais células serão cobertas de a^n maneiras. Então para $n < k, f_{a,b}(k, n) = a^n(n+1)$.

Se $n \geq k$, cada ladrilhamento contado por $f_{a,b}(k, n)$ termina com um quadrado de cor distinta de preto ou com um retângulo. Removendo a última peça obteremos um ladrilhamento contado por $f(k, n-1)$, ou por $f(k, n-k)$. Portanto, $f_{(a,b)}(k, n) = af_{(a,b)}(k, n-1) + bf_{(a,b)}(k, n-k)$.

Assim, como $f_{(a,b)}(k, n)$ satisfaz as mesmas relações de recorrência de $F_{(a,b)}(k, n)$ com as mesmas condições iniciais, obtemos uma interpretação combinatorial para $F_{(a,b)}(k, n)$ em termos de ladrilhamento como sendo:

$$F_{(a,b)}(k, n) = f_{(a,b)}(k, n),$$

isto é, $F_{(a,b)}(k, n)$ é o número de ladrilhamentos de ordem $1 \times (n+1)$ usando a diferentes cores de quadrados 1×1 , um único quadrado preto 1×1 e b diferentes cores de retângulos $1 \times k$, tais que o único quadrado preto cobre uma das k primeiras células.

Exemplo 5.2. Fixemos $a = b = 1$ e $k = 3$, então temos os ladrilhamentos de ordem $1 \times (n + 1)$ usando quadrados brancos 1×1 ($a = 1$), um único quadrado preto 1×1 , e retângulos cinzas 1×3 ($b = 1$), tais que o único quadrado preto cobre uma das 3 primeiras células. Para $n=0$, temos o ladrilhamento da Figura 5.3 contado por $F_{(1,1)}(3, 0)$.



Figura 5.3: $F_{(1,1)}(3, 0) = 1$

Exemplo 5.3. Para $n=1$, temos os ladrilhamentos da Figura 5.4 contado por $F_{(1,1)}(3, 1)$.



Figura 5.4: $F_{(1,1)}(3, 1) = 2$

Exemplo 5.4. Para $n=2$, temos os ladrilhamentos da Figura 5.5 contado por $F_{(1,1)}(3, 2)$.



Figura 5.5: $F_{(1,1)}(3, 2) = 3$

Exemplo 5.5. Para $n=5$, temos os ladrilhamentos da Figura 5.6 contado por $F_{(1,1)}(3, 5)$.



Figura 5.6: $F_{(1,1)}(3, 5) = 9$

Exemplo 5.6. Fixemos $a = b = 2$ e $k = 3$, ou seja, temos os ladrilhamentos de de ordem $1 \times (n+1)$ usando quadrados brancos e azuis 1×1 ($a = 2$), um único quadrado preto 1×1 , e retângulos cinzas e verdes 1×3 ($b = 2$), tais que o único quadrado preto cobre uma das 3 primeiras células. Para $n=1$, temos os ladrilhamentos da Figura 5.7 contado por $F_{(2,2)}(3, 1)$.



Figura 5.7: $F_{(2,2)}(3, 1) = 4$

Exemplo 5.7. Para $n=2$, temos os ladrilhamentos da Figura 5.8 contado por $F_{(2,2)}(3, 2)$.

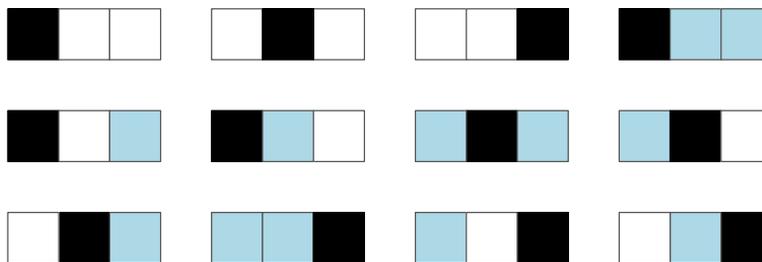


Figura 5.8: $F_{(2,2)}(3, 2) = 12$

Chamaremos de cauda de tipo C o ladrilhamento dado por um quadrado preto seguido de um retângulo. Usando a interpretação combinatorial de $F_{(a,b)}(k, n)$, podemos interpretar $L_{(a,b)}(k, n)$ como sendo o número de ladrilhamentos de ordem $1 \times (n+1)$ usando a diferentes cores de quadrados 1×1 , um quadrado preto, e b diferentes cores de retângulos $1 \times k$, tais que o único quadrado preto está em uma das k primeiras posições, com as condições adicionais: se $k \leq n \leq 2k - 1$, então o ladrilhamento não tem nenhum retângulo ou contém a cauda de tipo C na cobertura; e se $n > 2k - 1$, existem pelo menos $k - 1$ quadrados de cor distinta de preta entre as k últimas peças. Ladrilhamentos com a primeira condição chamaremos de tipo A e com a segunda condição, ladrilhamentos de tipo B .

De fato, $L_{(a,b)}(k, n) = F_{(a,b)}(k, n) = n + 1$, para todo $n < k$.

A cauda de tipo C tem ordem $1 \times (k + 1)$, então temos $n - k + 1$ posições para escolher uma para cobrir com esta cauda. Portanto, como $k \leq n \leq 2k - 1$, o número de ladrilhamentos sem retângulos é $a^n k$, e com o ladrilho é $a^{n-k} b \binom{n-k+1}{1} = ba^{n-k}(n - k + 1)$, assim obtemos $L_{(a,b)}(k, n) = ka^n + (n - k + 1)ba^{n-k}$.

Se $n > 2k - 1$, os ladrilhamentos de tipo B ou terminam com $k - 1$ quadrados, contados por $a^{k-1}F(k, n - (k - 1))$, ou um das últimas $k - 1$ peças é um retângulo contado por $a^{k-1}b\binom{k-1}{1}F(k, n - k - (k - 1)) = a^{k-1}b(k - 1)F(k, n - (2k - 1))$.

Chamaremos os ladrilhamentos contados por $L_{(a,b)}(k, n)$ *ladrilhamentos de Lucas de ordem* $1 \times (n + 1)$.

5.2 Identidades provadas via ladrilhamento

Nesta seção vamos estabelecer algumas identidades que são generalizações para as identidades envolvendo os números de Fibonacci e Lucas. Essas identidades serão provadas utilizando a interpretação dada em termos de ladrilhamento.

O próximo resultado é facilmente obtido fazendo a troca da variável n por $n - (k - 1)$ na relação de recorrência de que define os números de Fibonacci generalizados. Assim a relevância deste resultado não é a relação determinada mas sim a aplicação das técnicas para a prova.

Teorema 5.8. *Sejam $k \geq 2$ e $n \geq 2k$ inteiros positivos. Então*

$$a^{k-1}F_{(a,b)}(k, n - (k - 1)) = a^k F_{(a,b)}(k, n - k) + a^{k-1}bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1)), \quad (5.5)$$

ou ainda,

$$F_{(a,b)}(k, n - (k - 1)) = aF_{(a,b)}(k, n - k) + bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1)). \quad (5.6)$$

Demonstração:

O lado esquerdo da igualdade $a^k F_{(a,b)}(k, n - (k - 1))$ é o número de possibilidades de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ usando quadrados 1×1 , de $a + 1$ diferentes cores, incluindo a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento ocupando uma das k primeiras posições e as últimas $(k - 1)$ células são cobertas com quadrados.

Por outro lado, temos $aF_{(a,b)}(k, n - k) = aF_{(a,b)}(k, n - (k - 1) - 1)$, maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ terminado em k quadrados ou $a^{k-1}bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1)) = bF_{(a,b)}(k, n - (k - 1) - k)$, maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ terminado em um retângulo seguido de $k - 1$ quadrados. Assim, $a^{k-1}F_{(a,b)}(k, n - (k - 1)) = a^k F_{(a,b)}(k, n - k) + a^{k-1}bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1))$, ou ainda, dividindo a relação por a^{k-1} , obtemos

$$F_{(a,b)}(k, n - (k - 1)) = aF_{(a,b)}(k, n - k) + bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1)).$$

□

Teorema 5.9. *Sejam n e $k \geq 2$ inteiros positivos com $n \geq k + 1$. Então*

$$F_{(a,b)}(k, n) = ka^n + b \left\{ \sum_{i=0}^{n-k} a^i F_{(a,b)}(k, n - k - i) \right\}.$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade é o número de possibilidades de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ usando quadrados 1×1 , de $a + 1$ diferentes cores, incluindo a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um quadrado preto no ladrilhamento ocupando uma das k primeiras posições.

Por outro lado, vamos considerar a posição do último retângulo, se houver. Existem ka^n possíveis coberturas de um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ usando somente quadrados 1×1 , de $a + 1$ diferentes cores, incluindo a cor preta, de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento ocupando uma das k primeiras posições.

As outras possibilidades são construídas permitindo que tenhamos tabuleiros que terminam em retângulos ou em retângulo seguido por quadrados. Como existem $bF_{(a,b)}(k, n - k)$ ladrilhamentos cujo a última peça é um retângulo, $abF_{(a,b)}(k, n - k - 1)$ ladrilhamentos terminados em um retângulo seguido de um quadrado, $a^2bF_{(a,b)}(k, n - k - 2)$ ladrilhamentos terminados em um retângulo seguido de dois quadrados, \dots , $a^{n-k}bF_{(a,b)}(k, 0)$ ladrilhamentos terminados em um retângulo seguido de $(n - k)$ quadrados, e adicionando todas as contagens estabelecemos o lado direito da igualdade.

□

Corolário 5.10. *Para $a = b = 1$ e $k = 2$ obtemos a relação dos números de Fibonacci*

$$F_n = 2 + F_0 + \dots + F_{n-2}. \quad (5.7)$$

equivalente a Identidade 1 em [4].

Teorema 5.11. *Sejam n e $k \geq 2$ inteiros positivos tais que $n \geq k + 1$. Então*

$$F_{(a,b)}(k, kn) = b^n + a \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} b^i F_{(a,b)}(k, k(n - i) - 1) \right\}.$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade é o número de possibilidades de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (kn + 1)$ usando quadrados 1×1 , de $a + 1$ diferentes cores, incluindo a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento ocupando uma das k primeiras posições.

É fácil ver que existem b^n possíveis coberturas de um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ preenchidos com um quadrado preto seguido por n retângulos $1 \times k$. As outras possibilidades são construídas

permitindo que tenhamos tabuleiros que terminam em quadrado, diferente do quadrado preto, seguido de um número de retângulos.

Temos $aF_{(a,b)}(k, nk-1)$ o número de ladrilhamentos terminados em um quadrado, $abF_{(a,b)}(k, nk-k-1) = abF_{(a,b)}(k, k(n-1)-1)$ o número de ladrilhamentos terminados em um quadrado seguido por um retângulo, $ab^2F_{(a,b)}(k, nk-2k-1) = ab^2F_{(a,b)}(k, k(n-2)-1)$ o número de ladrilhamentos terminados em um quadrado seguido por dois retângulos, \dots , $ab^{n-1}F_{(a,b)}(k, nk-(n-1)k-1) = ab^{n-1}F_{(a,b)}(k, k(n-(n-1))-1) = ab^{n-1}F_{(a,b)}(k, k-1)$ o número de ladrilhamentos terminados em um quadrado seguido por $(n-1)$ retângulos. Então adicionando todas as contagens estabelecemos o lado direito da igualdade.

□

Corolário 5.12. *Seja $n \geq 3$ inteiro, então*

$$F_{2n} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_{2(n-i)-1}.$$

Teorema 5.13. *Sejam n e $k \geq 2$ inteiros positivos tais que $n \geq 2k+1$. Então*

$$F_{(a,b)}(k, n) = a^{k+2}F_{(a,b)}(k, n-k-2) + b \left\{ \sum_{i=0}^{k+1} a^{i-1}F_{(a,b)}(k, n-k-i) \right\}.$$

Demonstração: Para provar essa identidade temos que mostrar que o lado direito da igualdade conta todas as possíveis maneiras de cobrir um tabuleiro de ordem $1 \times (n+1)$ usando quadrados de $a+1$ diferentes cores, inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$, de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento que se encontra nas k primeiras posições.

Faremos isso interpretando cada cobertura em termos do número de quadrados que irão preencher as células finais do ladrilhamento: $bF_{(a,b)}(k, n-(k-1)-1) = bF_{(a,b)}(k, n-k)$ é o número de ladrilhamentos terminados em um retângulo, $abF_{(a,b)}(k, n-(k-1)-2) = abF_{(a,b)}(k, n-k-1)$ é o número de ladrilhamentos terminados em um retângulo seguido por um quadrado, $a^2bF_{(a,b)}(k, n-(k-1)-3) = a^2bF_{(a,b)}(k, n-k-2)$ é o número de ladrilhamentos terminados em um retângulo seguido por dois quadrados, \dots , $a^{k+1}bF_{(a,b)}(k, n-k-(k+1)) = a^{k+1}bF_{(a,b)}(k, n-(2k+1))$ é o número de ladrilhamentos terminados em um retângulo seguido por $k+1$ quadrados.

Observemos que se $n = 2k+1$ então $n+1 = k+(k+2)$, e portanto um retângulo pode não ser usado para preencher as células do tabuleiro de tamanho $2k+2$ antes dos $(k+2)$ quadrados finais. Assim, se $n \geq 2k+1$ podemos contar o número total de maneiras de preencher as coberturas como sendo $a^{k+2}F_{(a,b)}(k, n-k-2)$, onde cobrimos as $(k+2)$ últimas posições com quadrados e as

posições restantes podem ser cobertas de $F_{(a,b)}(k, n - k - 2)$ maneiras possíveis. Então adicionando todas as contagens estabelecemos o lado direito da igualdade.

□

Corolário 5.14. *Seja $n \geq 5$, inteiro, então $F_{(1,1)}(2, n) = 2F_{(1,1)}(2, n - 4) + F_{(1,1)}(2, n - 2) + F_{(1,1)}(2, n - 3) + F_{(1,1)}(2, n - 5)$, ou ainda $F_n = 2F_{n-4} + F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-5}$.*

Teorema 5.15. *Sejam n e $k > 2$ inteiros positivos tais que $n \geq 2k - 1$. Então*

$$F_{(a,b)}(k, n) = aF_{(a,b)}(k, n - 1) + b \left\{ F_{(a,b)}(k, n - 2) - \sum_{i=3}^k ba^{k-i} F_{(a,b)}(k, (n - 2) - 2k + i) \right\}.$$

Demonstração: Considere o conjunto de todas as possíveis maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a + 1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições. Tal conjunto tem cardinalidade dada por $F_{(a,b)}(k, n)$.

Como $n \geq 2k - 1$, a última peça de um ladrilhamento deste conjunto pode ser um quadrado ou um retângulo. Sabemos que existem $aF_{(a,b)}(k, n - 1)$ maneiras de preencher um tabuleiro $1 \times (n + 1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a + 1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições e a última posição será coberta com um quadrado.

Para provar este teorema vamos mostrar que

$$b \left\{ F_{(a,b)}(k, n - 2) - \sum_{i=3}^k a^{k-i} F_{(a,b)}(k, (n - 2) - 2k + i) \right\}$$

é o número de maneiras de preencher um tabuleiro $1 \times (n + 1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a + 1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que existe exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições e a última posição será coberta com um retângulo.

De fato, considere o conjunto de todas as possíveis maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n - 1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a + 1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições, com cardinalidade $F_{(a,b)}(k, n - 2)$. Considere as últimas $k - 2$ peças de um ladrilhamento deste conjunto.

Se as últimas $(k - 2)$ peças são quadrados então as removemos e inserimos um retângulo de ordem $1 \times k$ no final do ladrilhamento. Observemos que, se $n \geq 2k - 1$ então $n - 1 \geq 2k - 2$; e

portanto temos a garantia de que, se retirarmos $k - 2$ peças do final, restam, no pior dos casos, as k primeiras peças e portanto, não retiramos de maneira nenhuma o único quadrado preto do ladrilhamento. Aplicando esse procedimento em todos os ladrilhamentos terminados em $(k - 2)$ quadrados obtemos ladrilhamentos de ordem $1 \times (n + 1)$ terminados em retângulo. O problema é que alguns ladrilhamentos contados por $F_{(a,b)}(k, n - 2)$ não terminam em quadrados e portanto temos que subtrair dessa contagem o número de tais ladrilhamentos.

É fácil ver que $ba^{k-3}F_{(a,b)}(k, (n - 2) - k - (k - 3)) = ba^{k-3}F_{(a,b)}(k, n - (2k - 1))$ é o número de maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n - 1)$ que termina com um retângulo seguido de $(k - 3)$ quadrados, \dots , e $bF_{(a,b)}(k, (n - 2) - k - (k - k)) = bF_{(a,b)}(k, n - 2 - k)$ é o número de maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n - 1)$ que termina com um retângulo. Adicionando todas as possibilidades encontramos

$$\sum_{i=3}^k ba^{k-i}F_{(a,b)}(k, (n - 2) - 2k + i)$$

é o número de possibilidades de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n - 1)$ que não termina com pelo menos $k - 2$ quadrados. Portanto,

$$b \left\{ F_{(a,b)}(k, n - 2) - \sum_{i=3}^k a^{k-i}F_{(a,b)}(k, (n - 2) - 2k + i) \right\}$$

é o número de possíveis coberturas para um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ que terminam com pelo menos $k - 2$ quadrados.

□

Corolário 5.16. *Seja $n \geq 5$ inteiro. Então*

$$F_{(1,1)}(3, n) = F_{(1,1)}(3, n - 1) + F_{(1,1)}(3, n - 2) - F_{(1,1)}(3, n - 5).$$

Corolário 5.17. *Seja $n \geq 7$ inteiros. Então*

$$F_{(1,1)}(4, n) = F_{(1,1)}(4, n - 1) + F_{(1,1)}(4, n - 2) - F_{(1,1)}(3, n - 7) - F_{(1,1)}(3, n - 6).$$

Exemplo 5.18. *Observando os valores na Tabela 5.1 temos para $n = 11$ e $n = 8$:*

$$F_{(1,1)}(3, 11) = F_{(1,1)}(3, 10) + F_{(1,1)}(3, 9) - F_{(1,1)}(3, 6) = 60 + 41 - 13 = 88;$$

$$F_{(1,1)}(3, 8) = F_{(1,1)}(3, 7) + F_{(1,1)}(3, 6) - F_{(1,1)}(3, 3) = 19 + 13 - 4 = 28;$$

$$F_{(1,1)}(4, 11) = F_{(1,1)}(4, 10) + F_{(1,1)}(4, 9) - F_{(1,1)}(3, 4) - F_{(1,1)}(3, 5) = 36 + 26 - 5 - 7 = 50;$$

$$F_{(1,1)}(4, 8) = F_{(1,1)}(4, 7) + F_{(1,1)}(4, 6) - F_{(1,1)}(3, 1) - F_{(1,1)}(3, 2). = 14 + 10 - 2 - 3 = 19.$$

Teorema 5.19. *Sejam n e $k \geq 2$ inteiros positivos tais que $n \geq k$. Então*

$$F_{(a,b)}(k, n+k) = a^k F_{(a,b)}(k, n) + b \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} a^j F(k, n-j) \right\}. \quad (5.8)$$

Demonstração:

Considere dois conjuntos. O primeiro formado por todas as possíveis maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n+1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a+1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições. Tal conjunto tem cardinalidade dada por $F_{(a,b)}(k, n)$. O segundo por todas as possíveis maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n+k+1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a+1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que existe exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições. Tal conjunto tem cardinalidade dada por $F_{(a,b)}(k, n+k)$.

O número de possibilidades de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n+k+1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a+1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que existe exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições, as últimas peças são k quadrados é dado por $a^k F(k, n)$.

Os ladrilhamentos restantes do segundo conjunto são aqueles que terminam com um retângulo seguido de j , $0 \leq j \leq k-1$, quadrados. O número de ladrilhamentos deste tipo é contado por

$$\sum_{j=0}^{k-1} b a^j F_{(a,b)}(k, n+k-k-j).$$

Assim,

$$F_{(a,b)}(k, n+k) = a^k F_{(a,b)}(k, n) + b \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} a^j F_{(a,b)}(k, n-j) \right\}.$$

□

Tomando as variáveis $k=2$, $k=3$, $a=b=1$, $a=1$ e $b=2$, obtemos alguns corolários, sendo o primeiro deles um resultado conhecido dos números de Fibonacci.

Corolário 5.20. *Seja $n \geq 2$. Então*

$$F_{n+2} + F_{n-2} = F_n + F_n + F_{n-1} + F_{n-2} = 3F_n.$$

Corolário 5.21. *Seja $n \geq 3$. Então*

$$F_{(1,1)}(k, n+3) = 2(F_{(1,1)}(3, n)) + F_{(1,1)}(3, n-1) + F_{(1,1)}(3, n-2).$$

Corolário 5.22. *Seja $n \geq 3$. Então*

$$F_{(1,2)}(3, n+3) = 3(F_{(1,1)}(3, n)) + 2F_{(1,1)}(3, n-1) + 2F_{(1,1)}(3, n-2).$$

Exemplo 5.23. *Tomando $n = 8$ e valores na Tabela 5.1 obtemos*

$$F_{(1,2)}(3, 11) = 3(F_{(1,1)}(3, 8)) + 2F_{(1,1)}(3, 7) + 2F_{(1,1)}(3, 6) = 355.$$

Teorema 5.24. *Sejam n e $k \geq 2$ inteiros positivos tais que $n \geq 2k$. Então*

$$F_{(a,b)}(k, n) = \frac{k(2a^n + ba^{n-k}(2n - 3k + 3))}{2} + b^2 \left\{ \sum_{j=0}^{n-2k} \sum_{l=0}^{n-2k-j} a^{l+j} F_{(a,b)}(k, n - 2k - l - j) \right\}.$$

Demonstração: Existem ka^n maneiras de cobrir um tabuleiro de ordem $1 \times (n+1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a+1$ diferentes cores inclusive a cor preta de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições.

O número de maneiras de cobrir um tabuleiro de ordem $1 \times (n+1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a+1$ diferentes cores inclusive a cor preta e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que existe exatamente um único quadrado preto e um único retângulo no ladrilhamento, e o quadrado preto ocupa uma das k primeiras posições é dado por

$$ba^{(n+1)-k} \sum_{j=1}^k \binom{((n+1) - k + 1 - j)}{1} = \frac{ba^{n-k}(k)(2n - 3k + 3)}{2}.$$

Isto pode ser visto contando o número de ladrilhamentos de acordo com a posição do quadrado preto. Se tivermos o quadrado preto na primeira posição teremos de escolher 1 dentre $(n+1) - k + 1 - 1$ posições para preencher com um retângulo e o restante $(n+1) - k$ com um quadrado, e assim por diante, até o quadrado preto estiver na k -ésima célula e portanto teremos $(n+1) - k - k + 1$ escolhas de posição para colocar o retângulo e as restantes $(n+1) - k$ posições um quadrado.

Agora, vamos construir os ladrilhamentos restante no conjunto enumerado por $F_{(a,b)}(k, n)$ considerando o número de quadrados entre os dois últimos retângulos. Existem $b^2 a^{l+j} F_{(a,b)}(k, n - 2k - l - j)$ maneira de cobrir tabuleiros de ordem $1 \times (n+1)$ terminados com j quadrados e $l, l = 0, 1, 2, \dots, n - 2k - j$, quadrados entre os dois últimos retângulos. Somando sobre todas as possibilidades de j e l , com $0 \leq j \leq n - 2k$ e $0 \leq l \leq n - 2k - j$, obtemos a igualdade

□

Exemplo 5.25. Considere $a = 1, b = 2$ e $k = 4$ então teremos a identidade, para $n \geq 8$

$$F_{(1,2)}(4, n) = \frac{4(2 + 2(2n - 15))}{2} + 4 \left\{ \sum_{j=0}^{n-8} \sum_{l=0}^{n-8-j} F_{(1,2)}(k, n - 8 - l - j) \right\},$$

que se tomarmos $n = 10$, obtemos

$$F_{(1,2)}(4, 10) = 48 + 4(F_{(1,2)}(4, 2) + 2F_{(1,2)}(4, 1) + 3F_{(1,2)}(4, 0)) = 48 + 40 = 88.$$

Teorema 5.26. Sejam n e k inteiros positivos tais que $n \geq k + 1$. Então

$$F_{(a,b)}(k, n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} b^i a^{n-ik} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-j-(k-1)i}{i}.$$

Demonstração: O lado esquerdo da igualdade conta todas as possíveis maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a + 1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições.

Agora, vamos contar os mesmos ladrilhamentos considerando o número de retângulos. Considere a seguinte questão: quantas são as possíveis coberturas de um tabuleiro de ordem $1 \times (n + 1)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a + 1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que existam exatamente i retângulos e um único quadrado preto no ladrilhamento; e que este quadrado preto esteja em uma das k primeiras posições do tabuleiro?

Primeiramente, temos que $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$. Ao preencher este tabuleiro usaremos necessariamente $n + 1 - ik$ quadrados, isto é, $n - ik$ quadrados com cores distintas da cor preta. Assim, temos $n - (k - 1)i + 1$ posições a serem preenchidas.

Como existe exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições, o retângulo, se existir, estará numa posição após o quadrado preto. Assim, se o quadrado preto cobre a primeira posição existirão $n + 1 - (k - 1)i - 1 = n - (k - 1)i$ posições das quais i serão selecionadas e cobertas com retângulos. Se o quadrado preto cobre a segunda posição existirá $n + 1 - (k - 1)i - 2 = n - (k - 1)i - 1$ posições das quais i serão selecionadas e cobertas com retângulos, e sucessivamente, e o quadrado preto cobre a posição $j + 1$, $0 \leq j \leq k - 1$, temos $n - (k - 1)i - j$ posições das quais i serão selecionadas e cobertas com retângulos. Portanto, existem $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-j-(k-1)i}{i}$ maneiras de escolher i posições para cobrir com retângulo. Como existem a diferentes cores de quadrados e b diferentes cores de retângulo $1 \times k$, somando sobre $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$, obtemos a identidade.

□

Teorema 5.27. *Sejam i, j, n e k inteiros positivos tais que $k = 2p$, par. Então*

$$\begin{aligned}
F_{(a,b)}(k, 2n+1) = & ka^{2n+1} + \sum_{i \geq 1} \sum_{j > 0} \sum_{t=0}^{n-p(i+j)} b^{i+j} a^{2n+1-k(i+j)} \binom{n-p(i+j)+i-t}{i} \\
& \times \binom{n-p(i+j)+j}{j} + \sum_{j > 0} \left((n-pj+1) a^{2n+1-kj} b^j \binom{n+j(1-p)}{j} \right) \\
& + \sum_{t=0, (n-pj+1) < k}^{k-(n-pj+1)} a^{2n+1-kj} b^j \binom{n+j(1-p)-t}{j}.
\end{aligned}$$

Demonstração:

O lado esquerdo da igualdade conta todas as possíveis maneiras de preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (2n+2)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a+1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que exista exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições.

Excluindo o único quadrado preto nesse conjunto de tabuleiros obtemos ladrilhamentos de ordem $1 \times (2n+1)$. Como k é par, os tabuleiros serão preenchidos com um número ímpar de quadrados de a diferentes cores. Assim haverá um quadrado chamado *quadrado médio*, do qual o número de quadrados a sua direita e a sua esquerda é igual. Considere a seguinte pergunta: de quantas maneiras podemos preencher um tabuleiro de ordem $1 \times (2n+2)$ usando as seguintes peças: quadrados de $a+1$ diferentes cores inclusive a cor preta, e retângulos $1 \times k$ de b diferentes cores de forma que existe exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições, com exatamente i retângulos do lado esquerdo do quadrado médio e exatamente j retângulos do lado direito do quadrado médio?

Se i e j são iguais a zero então teremos um tabuleiro que vai ser preenchido apenas por quadrados e portanto existem ka^{2n+1} maneiras de o fazê-lo com essa restrição.

Se $i \geq 1$ serão usados $2n+1-k(i+j)$ quadrados não pretos para preencher o tabuleiro, isto é, $n-p(i+j)$ quadrados com cor distinta da preta do lado esquerdo do quadrado médio e $n-p(i+j)$ quadrados com cor distinta da preta do lado direito do quadrado médio. Portanto, temos $n-p(i+j)+i$ posições a serem cobertas do lado esquerdo do quadrado médio e $n-p(i+j)+j$ posições a serem cobertas do lado direito do quadrado médio.

Como existe exatamente um único quadrado preto no ladrilhamento em uma das k primeiras posições, não há retângulos antes do quadrado preto, e como temos $n-p(i+j)$ quadrados com cor distinta da preta do lado esquerdo do quadrado médio, se $n-p(i+j) < k$, então o quadrado preto pode estar somente nas $n-p(i+j)+1$ primeiras posições. Note que se $n-p(i+j) \geq k$ o quadrado preto poderá percorrer todas as k primeira posições na contagem.

Assim, se o quadrado preto cobre a primeira posição temos

$$b^{i+j} a^{2n+1-k(i+j)} \binom{n-p(i+j)+i}{i} \binom{n-p(i+j)+j}{j}$$

possibilidades de cobrir o restante das células. Se o quadrado preto cobre a segunda posição temos

$$b^{i+j} a^{2n+1-k(i+j)} \binom{n-p(i+j)+i-1}{i} \binom{n-p(i+j)+j}{j}$$

possibilidades de cobrir o restante das células.

Portanto, para $i \geq 1$ e $j > 0$, nós obtemos

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 0} \sum_{t=0}^{n-p(i+j)} b^{i+j} a^{2n+1-k(i+j)} \binom{n-p(i+j)+i-t}{i} \binom{n-p(i+j)+j}{j}.$$

Se $i = 0$, serão usados $2n + 1 - kj$ quadrados não pretos para preencher o tabuleiro, isto é, $n - pj$ quadrados com cor distinta da preta do lado esquerdo do quadrado médio e $n - pj$ quadrados com cor distinta da preta do lado direito do quadrado médio.

Se $n - pj + 1 < k$, teremos $n - pj + 1$ posições antes do quadrado médio do qual o quadrado preto irá percorrer na contagem e $k - (n - pj + 1)$ posições que ele irá percorrer depois do quadrado médio com o quadrado medio na posição $n - pj + 1$, então obtemos

$$\sum_{t=0}^{k-(n-pj+1)} a^{2n+1-kj} b^j \binom{n+j(1-p)-t}{j} + (n-pj+1) a^{2n+1-kj} b^j \binom{n+j(1-p)}{j},$$

o número de maneiras de preencher o tabuleiro com essas restrições. Caso contrário, o quadrado preto irá percorrer as primeiras $(n - pj + 1)$ posições e obtemos

$$(n-pj+1) a^{2n+1-kj} b^j \binom{n+j(1-p)}{j},$$

o número de maneiras de preencher o tabuleiro com essas restrições.

Portanto, para $j > 0$, temos

$$\sum_{j > 0} \left((n-pj+1) a^{2n+1-kj} b^j \binom{n+j(1-p)}{j} + \sum_{t=0, (n-pj+1) < k}^{k-(n-pj+1)} a^{2n+1-kj} b^j \binom{n+j(1-p)-t}{j} \right),$$

o que completa a prova. \square

Corolário 5.28. *Sejam i, j, n e $k = 2$ inteiros positivos. Então*

$$F_{(1,1)}(2, 2n+1) = 2 + \sum_{i \geq 1} \sum_{j > 0} \sum_{t=0}^{n-(i+j)} \binom{n-j-t}{i} \binom{n-i}{j} + \sum_{j > 0} \left((n-j+1) \binom{n}{j} + \sum_{t=0, (n-j+1) < 2}^{2-(n-j+1)} \binom{n-t}{j} \right).$$

Exemplo 5.29. Considere $a = b = 1$ e $k = 4 = 2 * 2$ então

$$F_{(1,1)}(4, 2n+1) = 4 + \sum_{i \geq 1} \sum_{j > 0} \sum_{t=0}^{n-2(i+j)} \binom{n-2j-i-t}{i} \binom{n-2i-j}{j} + \sum_{j > 0} \left((n-2j+1) \binom{n-j}{j} + \sum_{t=0, (n-2j+1) < 4}^{4-(n-2j+1)} \binom{n-j-t}{j} \right).$$

Teorema 5.30. Sejam n, k inteiros positivos tais que $k \geq 2$. Então

$$L_{(a,b)}(k, n) = \begin{cases} a^n(n+1), & \text{se } 0 \leq n \leq k-1 \\ ka^n + (n-k+1)ba^{n-k}, & \text{se } k \leq n \leq 2k-1 \\ aL_{(a,b)}(k, n-1) + bL_{(a,b)}(k, n-k), & \text{se } n > 2k-1 \end{cases}$$

Demonstração: Pelas definições $L_{(a,b)}(k, n) = F_{(a,b)}(k, n)$, para $0 \leq n \leq 2k-2$ e $F_{(a,b)}(k, n) = a^n(n+1)$, para $0 \leq n \leq k-1$. Então, como $0 \leq n \leq k-1 \leq 2k-2$, obtemos a primeira identidade: $L_{(a,b)}(k, n) = a^n(n+1)$, para $0 \leq n \leq k-1$.

Se n é tal que $k \leq n \leq 2k-1$ então $0 \leq n-k \leq k-1$ e $k-1 \leq n-1 \leq 2k-2$. Como $L_{(a,b)}(k, n) = F_{(a,b)}(k, n)$, para $0 \leq n \leq 2k-1$ e $F_{(a,b)}(k, n) = aF_{(a,b)}(k, n-1) + bF_{(a,b)}(k, n-k)$, para $n \geq k$ temos que $L_{(a,b)}(k, n) = aL_{(a,b)}(k, n-1) + bL_{(a,b)}(k, n-k)$ para $k \leq n \leq 2k-1$.

Caso contrário, seja $n > 2k-1$. Então temos mais do que $k+1$ peças contando o quadrado preto, e portanto, podemos remover peças. Chamamos de cauda do tipo D a última sequência formada pelas últimas k peças, se um retângulo aparece, ou a última sequência de $k-1$ peças se o ladrilhamento termina com $k-1$ quadrados.

Considere um ladrilhamento no conjunto contado por $L_{(a,b)}(k, n)$ com $n > 2k-1$. Se existe um quadrado antes da cauda de tipo D , removemos essa peça e obtemos um ladrilhamento no conjunto contado por $aa^{k-1}F_{(a,b)}(k, n-1-(k-1))$ ou $aa^{k-1}b(k-1)F_{(a,b)}(k, n-1-(2k-1))$. O total de ladrilhamentos nesse conjunto é dado por $aL_{(a,b)}(k, n-1)$.

Se existe um retângulo antes da cauda de tipo D , removemos essa peça e obtemos um ladrilhamento no conjunto contado por $ba^{k-1}F_{(a,b)}(k, n-k-(k-1))$ ou $b(k-1)a^{k-1}bF_{(a,b)}(k, n-k-(2k-1))$. O total de ladrilhamentos nesse conjunto é dado por $bL_{(a,b)}(k, n-k)$.

Portanto, obtemos a segunda identidade $aL_{(a,b)}(k, n-1) + bL_{(a,b)}(k, n-k), n \geq 2k$.

□

Teorema 5.31. *Sejam n, k inteiros positivos tais que $k \geq 2$ e $n \geq 2k$. Então*

$$L_{(a,b)}(k, n) = ka^{k-1}bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1)) + a^k F_{(a,b)}(k, n - k).$$

Demonstração: Do lado esquerdo temos os ladrilhamentos de Lucas de ordem $1 \times (n + 1)$. Por outro lado, $(k - 1)a^{k-1}bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1))$ é o total desses ladrilhamentos que possuem um cauda de tipo D de tamanho k enquanto $a^{k-1}F_{(a,b)}(k, n - (k - 1))$ é o número desses ladrilhamentos que possuem uma cauda de tipo D de tamanho $k - 1$. O último conjunto de ladrilhamentos pode ainda ser subdividido em dois subconjuntos disjuntos de acordo com a última peça antes da cauda: se esta última peça é um retângulo temos que esse conjunto é contado por $ba^{k-1}F(k, n - (2k - 1))$, caso contrário, se a última peça é um quadrado esse conjunto é contado por $a^k F(k, n - (k - 1) - 1)$. Então $a^{k-1}F_{(a,b)}(k, n - (k - 1)) = ba^{k-1}F(k, n - (2k - 1)) + a^k F(k, n - (k - 1) - 1)$.

Portanto, pela recorrência (5.3) temos que

$$L_{(a,b)}(k, n) = ka^{k-1}bF_{(a,b)}(k, n - (2k - 1)) + a^k F_{(a,b)}(k, n - k).$$

□

Teorema 5.32. *Sejam n, k inteiros positivos tais que $k \geq 2$ e $n \geq 2k$. Então*

$$L_{(a,b)}(k, nk + 1) = a \sum_{i=0}^n b^{n-i} L_{(a,b)}(k, ik).$$

Demonstração: Pelo Teorema 5.30 como $n \geq 2k$ então $L_{(a,b)}(k, nk + 1) = aL_{(a,b)}(k, nk) + bL_{(a,b)}(k, (n - 1)k + 1)$. Assim, para provar esta identidade basta provar que $bL_{(a,b)}(k, (n - 1)k + 1) = a \sum_{i=0}^{n-1} b^{n-i} L_{(a,b)}(k, ik)$.

Iremos contar o número de ladrilhamentos de Lucas contados por $bL_{(a,b)}(k, (n - 1)k + 1)$ de acordo com o número de retângulos antes do retângulo seguido da cauda de tipo D do ladrilhamento removendo a sequência de quadrados e retângulos. :

- $abL_{(a,b)}(k, (n - 1)k) = abL_{(a,b)}(k, (n - 1)k + 1 - 1)$: um quadrado antes do retângulo seguido da cauda de tipo D ;
- $ab^2L_{(a,b)}(k, (n - 2)k) = ab^2L_{(a,b)}(k, (n - 1)k + 1 - k - 1)$: exatamente um retângulo antes do retângulo seguido da cauda de tipo D ;
- $ab^3L_{(a,b)}(k, (n - 3)k) = ab^3L_{(a,b)}(k, (n - 1)k + 1 - 2k - 1)$: exatamente dois retângulos antes do retângulo seguido da cauda de tipo D ;

- $ab^4L_{(a,b)}(k, (n-4)k) = ab^4L_{(a,b)}(k, (n-1)k+1-3k-1)$: exatamente três retângulos antes do retângulo seguido da cauda de tipo D ;
- \vdots
- $ab^{n-1}L_{(a,b)}(k, k) = ab^{n-1}L_{(a,b)}(k, (n-1)k+1-(n-2)k-1)$: exatamente $(n-2)$ antes do retângulo seguido da cauda de tipo D ;
- $ab^nL_{(a,b)}(k, 0) = ab^nL_{(a,b)}(k, (n-1)k+1-(n-1)k-1)$: exatamente $(n-1)$ retângulos antes do retângulo seguido da cauda de tipo D ;

Adicionando sobre todos os números nos obtemos que

$$bL_{(a,b)}(k, (n-1)k+1) = a \sum_{i=0}^{n-1} b^{n-i} L_{(a,b)}(k, ik),$$

como queríamos. □

Teorema 5.33. *Sejam n, k inteiros positivos tais que $k \geq 2$ e $n \geq 2k$. Então*

$$\begin{aligned} L_{(a,b)}(k, n) &= ka^k + k(k-1)ba^{n-k} + a^{k-1}b \left\{ (k-1)(n+1-(k-1)-k) - \frac{k(k-1)}{2} \right\} \\ &+ a^{k-1}b^2 \left\{ (k-1)(n+1-(2k-1)-k) - \frac{k(k-1)}{2} \right\} \\ &+ \sum_{j=0}^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k-j} a^{i+j} b^2 L_{(a,b)}(k, n-2k-i-j). \end{aligned}$$

Demonstração: Existem ka^k ladrilhamentos de Lucas de ordem $1 \times (n+1)$ que não possui um retângulo e $k(k-1)ba^{n-k}$ ladrilhamentos de Lucas de ordem $1 \times (n+1)$ terminados com uma cauda de tipo D tamanho k , ou seja, terminado em k peças onde $k-1$ são quadrados e uma peça é um retângulo.

O número de ladrilhamentos de Lucas de ordem $1 \times (n+1)$ tendo exatamente um retângulo e uma cauda de tipo D de tamanho $k-1$ é $\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1}b(n+1-(k-1)-k+1-(i+1)) = a^{k-1}b \left\{ (k-1)(n+1-(k-1)-k) - \frac{k(k-1)}{2} \right\}$, onde $i+1$ é a posição do quadrado preto.

Por outro lado, o número de ladrilhamentos com um retângulo e uma cauda de tipo D de tamanho k é igual a $\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1}b^2(n+1-(2k-1)-k+1-(i+1)) = a^{k-1}b^2(k-1)(n+1-(2k-1)-k) - \frac{k(k-1)}{2}$. Então a soma desses dois números é o total de ladrilhamentos de Lucas com exatamente um retângulo antes da cauda de tipo D .

Agora considere os ladrilhamentos de Lucas de ordem $1 \times (n+1)$ restantes. Vamos contá-los considerando o número de quadrados entre os dois últimos retângulos.

O número de ladrilhamentos com j quadrados antes da cauda de tipo D e exatamente i , $i = 0, 1, 2, \dots, n - 2k - j$, quadrados entre os dois últimos retângulos é dado por $a^{i+j}b^2L_{(a,b)}(k, n - 2k - i - j)$. Então somando sobre todos os valores de j e i , segue que

$$\sum_{j=0}^{n-2k} \sum_{i=0}^{n-2k-j} a^{i+j}b^2L_{(a,b)}(k, n - 2k - i - j)$$

é o número de ladrilhamentos de Lucas com pelo menos dois retângulos.

Assim, adicionando todos esses números temos que o total de ladrilhamentos contado é $L_{(a,b)}(k, n)$.

□

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

Apresentaremos aqui algumas linhas de pesquisa a serem adotadas após a apresentação deste trabalho. Em primeiro lugar o objetivo é continuar estudando as características de relações de recorrência gerais, demonstrar identidades existentes, e encontrar novas identidades envolvendo essas sequências.

6.1 Sequências de Lucas

Sejam P, Q inteiros não negativos, chama-se $D = P^2 - 4Q$ de *discriminante* e assume-se que $D \neq 0$. Considere o polinômio $X^2 - PX + Q$, denominado *polinômio característico*, cujas raízes são

$$\alpha = \frac{P + \sqrt{D}}{2} \text{ e } \beta = \frac{P - \sqrt{D}}{2}.$$

Segue que $\alpha \neq \beta$, $\alpha + \beta = P$, $\alpha \times \beta = Q$, e $(\alpha - \beta)^2 = D$.

Para cada $n \geq 0$, define-se $U_n = U_{n(P,Q)}$ e $V_n = V_{n(P,Q)}$ como segue

$$U_0 = 0, U_1 = 1, U_n = PU_{n-1} - QU_{n-2}, \text{ para } n \geq 2,$$

$$V_0 = 2, V_1 = P, V_n = PV_{n-1} - QV_{n-2}, \text{ para } n \geq 2.$$

A sequência $U = (U_n(P, Q))_{n \geq 0}$ e $V = (V_n(P, Q))_{n \geq 0}$ são chamadas de (primeira e segunda) *Sequências de Lucas com parâmetros (P, Q)* . Tem-se para quaisquer parâmetros (P, Q) as funções geradoras para as sequências dadas por

$$\frac{X}{1 - PX + QX^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n X^n$$

e

$$\frac{2 - PX}{1 - PX + QX^2} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n X^n.$$

Binet em 1843 apresentou a seguinte expressão chamada *fórmula de Binet* em termos das raízes α e β do polinômio $X^2 - PX + Q$:

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, V_n = \alpha^n + \beta^n.$$

Vale ressaltar os casos especiais das sequências de Lucas por suas importâncias tanto históricas quanto aos resultados elegantes provindos das mesmas. São elas a sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas, de Pell e de Jacobsthal, entre outras. Os números $U_n = U_n(1, -1)$ são chamados de *números de Fibonacci*, enquanto os números $V_n = V_n(1, -1)$ são chamados de *números de Lucas*. Os números $U_n = U_n(2, -1)$ são chamados de *números de Pell*, enquanto os números $U_n = U_n(1, -2)$ são chamados de *números de Jacobsthal*.

Algumas extensões da noção das sequências de Lucas podem ser indicadas. Tais generalizações são possíveis em quatro direções: mudando as condições iniciais, misturando duas ou mais sequências de Lucas, considerar as relações de recorrência em termos de outros elementos não de dois anteriores consecutivos, ou considerar mais do que dois parâmetros.

Um dos objetivos é investigar se os métodos estudados podem ser aplicados nessas generalizações para se obter novas classes de identidades.

6.2 Relações Algébricas

Como dito por Paulo Ribenboim em [16] basta olhar para os arquivos na *Fibonacci Quarterly* para saber que não há limites na imaginação matemática para produzir novas provas e de formas para diferentes identidades e propriedades envolvendo sequências. Neste mesmo livro [16] são apresentados um número de identidades cujas provas são exercícios simples de aplicação da fórmula de Binet e indução. Segue a lista de algumas identidades.

- U_n e V_n podem ser expressos em termos de P, Q , como por exemplo

$$U_n = P^{n-1} - \binom{n-2}{1} P^{n-3} Q + \binom{n-3}{2} P^{n-5} Q^2 + \dots + (-1)^k \binom{n-1-k}{k} P^{n-1-2k} Q^k + \dots + E,$$

onde

$$E = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}-1} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1} P Q^{\frac{n}{2}-1}, & \text{se } n \text{ é par,} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} Q^{\frac{n-1}{2}}, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

- Relações Quadráticas para qualquer inteiro n :

$$\begin{aligned} V_n^2 - D U_n^2 &= 4Q^n, \\ U_{n+1}^2 - P U_{n+1} U_n + Q U_n^2 &= Q^n. \end{aligned}$$

- Identidades envolvendo U_n e V_n para qualquer inteiro n :

$$\begin{aligned} D U_n &= V_{n+1} - Q V_{n-1}, \\ V_n &= U_{n+1} - Q U_{n-1}. \end{aligned}$$

- Adição sobre índices para quaisquer inteiros m e n :

$$\begin{aligned} U_{m+n} &= U_m V_n - Q^n U_{m-n}, \\ V_{m+n} &= V_m V_n - Q^n V_{m-n} = D U_m U_n + Q^n V_{m-n}, \\ 2U_{m+n} &= U_m V_n + U_n V_m, \\ 2Q^n U_{m-n} &= U_m U_n - U_n V_m. \end{aligned}$$

- Multiplicação sobre índices para qualquer inteiro n :

$$\begin{aligned} U_{2n} &= U_n V_n, \\ V_{2n} &= V_n^2 - 2Q^n, \\ U_{3n} &= U_n (V_n^2 - Q^n) = U_n (D U_n^2 + 3Q^n), \\ V_{3n} &= V_n (V_n^2 - 3Q^n). \end{aligned}$$

Um possível trabalho é percorrer essas identidades procurando provas e novas identidades de Lucas utilizando ladrilhamentos.

6.3 Outras Interpretações

Em 2013, Jhala, Sisodiya and Rathore [12] provaram algumas identidades envolvendo os números de k -Jacobsthal $J(k, n)$ definidos por $J(k, n + 1) = kJ(k, n) + 2J(k, n - 1)$; para $n \geq 1$, com condições iniciais $J(k, 0) = 0, J(k, 1) = 1$. Para $n \geq 1$, temos que $J(1, n) = J_n$, o n -ésimo número de Jacobsthal.

Neste artigo as seguintes identidades são provadas usando a fórmula de Binet para o termo geral da sequência dos números de k -Jacobsthal.

Teorema 6.1. (*Identidade de Catalan para Jacobsthal*) *Sejam inteiros $n \geq 0$ então*

$$J(k, n - r)J(k, n + r) - J^2(k, n) = (-1)^{n+1-r} J^2(k, r)2^{n-r}$$

Teorema 6.2. (*Identidade de D’ocagne para Jacobsthal*)

Sejam inteiros $m, n \geq 0$ tais que $m > n$ então $J(k, m)J(k, n + 1) - J(k, m + 1)J(k, n) = (-2)^n J(k, m - n)$

Neste mesmo ano, em [8] provaram algumas identidades envolvendo os números de k -Pell $P(k, n)$ definidos por $P(k, n + 1) = 2P(k, n) + kP(k, n - 1)$; para $n \geq 1$, com condições iniciais $P(k, 0) = 0, P(k, 1) = 1$. Para $n \geq 1$, temos que $P(1, n) = P_n$, o n -ésimo número de Pell. Entre elas tem-se as identidades

Teorema 6.3. (*Identidade de Catalan para Pell*) *Sejam inteiros $n \geq 0$ então*

$$P(k, n - r)P(k, n + r) - P^2(k, n) = (-1)^{n+1-r} P^2(k, r)k^{n-r}$$

Teorema 6.4. (*Identidade de D’ocagne para Pell*)

Sejam inteiros $m, n \geq 0$ tais que $m > n$ então $P(k, m)P(k, n + 1) - P(k, m + 1)P(k, n) = (-k)^n P(k, m - n)$

Podemos olhar para essas identidades combinatorialmente e prová-las utilizando argumentos bijetivos no contexto de ladrilhamentos como discutido em [4]. Para tanto seja $a(s, k, n)$ o número de possibilidades de cobrir um tabuleiro de ordem $1 \times n$ dispondo das seguintes peças: quadrados de k diferentes cores e dominós de s cores distintas. Assim, temos que $a(s, k, 0) = 1$ referente ao ladrilhamento vazio, $a(s, k, 1) = k$ referente aos 1-ladrilhamentos formados por um quadrado de k cores distintas. Seja agora o conjunto dos ladrilhamentos contados por $a(s, k, n)$. Esse conjunto pode ser dividido em dois conjuntos: o subconjunto dos ladrilhamentos terminados em quadrado e o subconjunto dos ladrilhamentos terminados em dominós. O primeiro subconjunto tem cardinalidade $ka(s, k, n - 1)$, e o segundo tem cardinalidade $sa(s, k, n - 2)$. Assim, para $n \geq 2$ temos que $a(s, k, n) =$

$ka(k, n - 1) + sa(k, n - 2)$, com condições iniciais $a(s, k, 0) = 1$ e $a(s, k, 1) = k$, portanto obtemos as igualdades $a(2, k, n) = J(k, n + 1)$ e $a(k, 2, n) = P(k, n + 1)$

Assim, estabelecemos as seguintes identidades que podem ser facilmente provadas com as técnicas apresentadas em [4].

Teorema 6.5. (*Generalização da Identidade de Catalan*) *Sejam inteiros $n \geq 0$, então*

$$a(s, k, n - r)a(s, k, n + r) - a^2(s, k, n) = (-1)^{n-r} a^2(s, k, r - 1) s^{n-r+1}.$$

Teorema 6.6. (*Generalização da Identidade de D'ocagne*)

Sejam inteiros $m, n \geq 0$ tais que $m > n$. Então $a(k, m)a(k, n + 1) - a(k, m + 1)a(k, n) = (-s)^n a(k, m - n)$.

Como corolário dessas identidades generalizadas seguem as Identidades (6.1), (6.2), (6.3) e (6.4).

Observemos que várias identidades podem ser generalizadas e provadas via ladrilhamento como as supracitadas.

6.4 Generalização para Números q-análogos de Jacobsthal

De forma análogo ao que foi feito na generalização do Lema 3.4, podemos definir $p_{j_1, \dots, j_m, l_1, \dots, l_r}$, o polinômio gerado como coeficiente de $x_1^{j_1} \dots x_m^{j_m} y_1^{l_1} \dots y_r^{l_r}$ na expansão de

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^r y_i \right)^{(\sum_{i=1}^m j_i + \sum_{i=1}^r l_i)}$$

com inversões de peso $x_{i+t}x_i = q^{2t}x_i x_{i+t}$, $y_{i+t}y_i = q^t y_i y_{i+t}$, $y_{j'} x_j = q^{j-2j'} x_j y_{j'}$.

Assim, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 6.7. *A função geradora para ladrilhamentos com exatamente j_i dominós do tipo d_i , com $1 \leq i \leq m, l_i$ quadrados do tipo s_i , onde $1 \leq i \leq r$ é dada por*

$$\begin{aligned}
& q^m j_m^2 + 2j_m j_{m-1} + j_{m-1}^2 + 2(j_m + j_{m-1})j_{m-2} + j_{m-2}^2 + \cdots + \\
& + 2(j_m + j_{m-1} + \cdots + j_2)j_1 + j_1^2 + (r-1) \left(l_r 2(j_m + j_{m-1} + \cdots + j_1) + \frac{(l_r - 1)}{2} \right) \\
& q \left((r-2) \left(l_{r-1} 2(j_m + j_{m-1} + \cdots + j_1 + l_r) + \frac{(l_{r-1} - 1)}{2} \right) + \cdots + \right. \\
& \left. l_2 2(j_m + j_{m-1} + \cdots + j_1 + l_r \cdots l_3) + \frac{(l_2 - 1)}{2} \right) \\
& \qquad \qquad \qquad \times p_{j_1, \dots, j_m, l_1, \dots, l_r}
\end{aligned}$$

E com este teorema é possível generalizar o Lema 3.4 e Teorema 3.24 em termos da notação $P_{n+1}(a, b; q)$.

Além disso, cada sequência $\delta \in \mathbb{S}_{x^j, y^k, z^l}$ pode ser associada a uma matriz de três linhas onde a entrada da primeira linha são os expoentes relacionados a x, da segunda linha os expoentes relacionados a y e da terceira linha os expoentes relacionados a z. Considere, por exemplo, $k = 2, j = 3, l = 1$; e a sequência $y^2 z x y x$. Esta sequência está relacionada com o ladrilhamento $T \in \mathbb{T}_{2,3,1}$ de $2 * 2 + 3 * 2 + 1 = 11$ casas dado da forma



Figura 6.1: Ladrilhamento com peso $q^{1+3+2*6+8+2*10} = q^{44}$ em $\mathbb{T}_{2,3,1}$

e a matriz de três linhas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

criada olhando a sequência da esquerda para a direita e dispondo os valores na matriz da direita para a esquerda. De fato, temos os termos no início da sequência $y^2 z$ relacionado com a coluna

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e assim por diante.

Observemos que a soma dos elementos da primeira linha é o expoente de x , da segunda é o expoente de y e da terceira é o expoente de z , no ladrilhamento de peso mínimo associado a sequência $x^2y^3z^1$

A partir dessa matriz, [1], associa-se um reticulado tridimensional e a partir deste, é construído um volume correspondente a uma partição plana.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim há o interesse em estudar essas relações existentes.

6.5 Outros interesses

A interpretação existente para as recorrências 5.1 e 5.2 em termos de grafos sugere que a interpretação em termos de grafos para as recorrências 5.3 e 5.4 seja a contagem de subconjuntos k -independentes do conjunto de vértices de um grafo com a possibilidade de uma coloração de vértices e arestas deste grafo. Uma das questões a serem respondidas é se ao fixar os parâmetros temos relações entre resultados já conhecidos na coloração de grafos.

Um dos assuntos que devem ser estudados são os *Figurate Number*, [10] que são os números que podem ser representados como pontos espaçados regularmente arranjados como figuras geométricas planas e espaciais. Temos, por exemplo, os números triangulares e os números pentagonais citados no trabalho. Existem resultados combinatórios elegantes sobre esses números e é interessante obter provas combinatórias para identidades envolvendo esses números.

Além disso, outra linha de pesquisa a ser seguida é o estudo sobre Formas Modulares e outros novos métodos para determinar funções geradoras. Esses métodos analíticos podem ser aplicados em diversas áreas. Em especial tem-se o interesse de aplicar esses métodos no estudo de funções geradoras para Códigos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Alegri, M. Brietzke, E. H.M., Santos, J.P.O. and Silva, R. *Bijections between lattices paths and plane partitions* Open Journal of Discrete Mathematics, Vol 1, 108-115, 2011.
- [2] Andrews, G. *Theory of Partitions* Encyclopedia of Mathematics and its Applications (No. 2), 1984.
- [3] Andrews, G. *On a Calculus of Partition Functions* Pacific Journal of Mathematics, Vol 31, No 3, 1969 .
- [4] Benjamim, A. T., Quinn, J. J. *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. The Dolciani Mathematical Expositions, 27, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003.
- [5] Benjamin, A. T., Plott, S. S., Sellers, J.A. *Tiling Proofs of Recent Sum Identities Involving Pell Numbers* Annals of Combinatoric, 12(3), 271-278, 2008
- [6] Berndt, B. C., Yee, A. J. *q-Gauss summation via Ramanujan and combinatorics* South East Asian J. Math. and Math. Sci., Vol 3, , pp. 15-22, 2004.
- [7] Briggs, K. S., Little, D. P., Sellers, J.A. *Combinatorial Proofs of Various q-Pell Identities via Tilings* Annals of Combinatoric, 14, 407-418, 2010
- [8] Catarino, Paula *On Some Identities and Generating Functions for k- Pell Numbers* Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no. 38, 1877 - 1884.
- [9] Comtet, L. *Advanced Combinatorics* Dordrecht-Holland: D. Reidel,1974.

- [10] Deza, E, Deza, M. M. *Figurate Numbers, First Edition* World Scientific, 2012.
- [11] Horadam, A. F. *Jacobsthal Representation Numbers*. The Fibonacci Quarterly 34.1 (1996): 40-54.
- [12] Jhala D., Sisodiya,K., Rathore, G.P.S, *On Some Identities for k - Jacobsthal Numbers* Int. Journal of Math Analysis,Vol. 7, no. 12, 551-556, 2013.
- [13] Joici, J. T., Stanton, D. *Bijjective proofs of basic hypergeometric series identities* Pacific J. Math., 127, 103-120, 1987.
- [14] Kwasnik, M, Wloch I. *The total number of generalized stable sets and kernels of graphs* Ars Combinatoria 55, 139-146,2000.
- [15] Little, D. P., Sellers, J.A. *A tiling approach to eight identities of Rogers* European Journal of Combinatorics, Vol 31, 694-709, 2010.
- [16] Ribenboim, P. *My Numbers, My Friends. Popular Lectures on Number Theory* Springer-Verlag New York, 2000.
- [17] Santos, J.P.O. and Silva, R. *On a combinatorial proof for an identity involving the triangular numbers* Bulletin of the Australian Mathematical Society, 83, pp 46-49, 2011.
- [18] Sloane, N. J. A. *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences*, published eletronically at <https://oeis.org/>.
- [19] Stabel, Eduardo Casagrande *Uma Certa Identidade de Ramanujan Demonstrada Via Dominós, Ladrilhamentos e q -Contagem* Tese de Doutorado, UFRGS, 2011.
- [20] Pak, I. *Partitions Bijections, A Survey* The Ramanujan Journal 12 (1), 5-75 .
- [21] Prodinger, H., Tichy, R. F. *Fibonacci numbers of graphs* The Fibonacci Quarterly, Vol 20, 16-21, 1982.
- [22] Wloch, A. *Some identities for the generalized Fibonacci numbers and the generalized Lucas numbers* Applied Mathematics and Computation, 219,5564-5568, 2013.
- [23] Wloch, A., Wloch, I. *On the Number of k -Independent sets in some products of graphs* International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol 39, n° 2, 163-169, 2007.
- [24] Yee, A. J. *Combinatorial proofs of identities in basic hypergeometric series* European Journal of Combinatoric, Vol 29, 2008.