KÊNIO ALEXSOM DE ALMEIDA SILVA

AUTO-ADJUNTICIDADE NÃO-LINEAR E LEIS DE CONSERVAÇÃO PARA EQUAÇÕES EVOLUTIVAS SOBRE SUPERFÍCIES REGULARES

CAMPINAS

2013

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

Kênio Alexsom de Almeida Silva

Auto-Adjunticidade Não-Linear e Leis de Conservação para Equações Evolutivas sobre Superfícies Regulares

Orientador: Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do título de Doutor em matemática aplicada.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO KÊNIO ALEXSOM DE ALMEIDA SILVA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. YURI DIMITROV BOZHKOV.

Assinatura do Orientador

Yu. Bozhkov

Campinas

2013

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Silva, Kênio Alexsom de Almeida, 1979-
Si38a Auto-adjunticidade não-linear e leis de conservação para equações evolutivas sobre superfícies regulares / Kênio Alexsom de Almeida Silva. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Yuri Dimitrov Bozhkov.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações autoadjuntas. 3. Equações quase autoadjuntas. 4. Leis da conservação (Matemática). I. Bozhkov, Yuri Dimitrov,1962-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Nonlinear self-adjointness and conservation laws for evolution equations on regular surfaces
Palavras-chave em inglês:
Partial differential equations
Self-adjoint equations
Quasi self-adjoint equations
Conservation laws (Mathematics)
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutor em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Yuri Dimitrov Bozhkov [Orientador]
Igor Leite Freire
Rodney Carlos Bassanezi
Stylianos Dimas
Norberto Anibal Maidana
Data de defesa: 15-02-2013
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 15 de fevereiro de 2013 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). YURI DIMITROV BOZHKOV

Prof(a). Dr(a). IGOR LEITE FREIRE

Prof(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI

Prof(a). Dr(a). STYLIANOS DIMAS

Prof(a). Dr(a). NORBERTO ANIBAL MAIDANA

Agradecimentos

Esta tese foi financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, através do processo 140803/2010-6.

Resumo

Nesta tese estudamos o conceito novo de equações diferenciais não-linearmente autoadjuntas para duas classes gerais de equações evolutivas de segunda ordem quaselineares. Uma vez que essas equações não provém de um problema variacional, não podemos obter leis de conservação via o Teorema de Noether. Por isto aplicamos tal conceito e o Novo Teorema sobre Leis de Conservação de Nail H. Ibragimov, o qual possibilita-nos a determinação de leis de conservação para qualquer equação diferencial. Obtivemos em ambas as classes, equações não-linearmente autoadjuntas e leis de conservação para alguns casos particularmente importantes:

a) as equações do fluxo de Ricci geométrico, do fluxo de Ricci 2D, do fluxo de Ricci modificada e a equação do calor não-linear, na primeira classe;

b) as equações do fluxo geométrico hiperbólico e do fluxo geométrico hiperbólico modificada, na segunda classe de equações evolutivas.

Palavras-chave: Equações diferenciais parciais, Equações autoadjuntas, Equações quase autoadjuntas, Leis da conservação (Matemática).

Abstract

In this thesis we study the new concept of nonlinear self-adjoint differential equations for two general classes of quasilinear 2D second order evolution equations. Since these equations do not come from a variational problem, we cannot obtain conservation laws via the Noether's Theorem. Therefore we apply this concept and the New Conservation Theorem of Nail H. Ibragimov, which enables one to establish the conservation laws for any differential equation. We obtain in both classes, nonlinear self-adjoint equations and conservation laws for important particular cases:

a) the Ricci flow geometric equation, Ricci flow 2D equation, the modified Ricci flow equation and the nonlinear heat equation in the first class;

b) the hyperbolic geometric flow equation and the modified hyperbolic geometric flow equation in the second class of evolution equations.

Keywords: Partial differential equations, Self-adjoint equations, Quasi self-adjoint equations, Conservation laws (Mathematics).

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo de leis de conservação segundo Ibragimov [1] remonta ao século dezoito com a procura das quantidades conservadas nos sistemas mecânicos que modelam a natureza. Por exemplo, no problema dos dois corpos, Isaac Newton mostrou que as Leis de Kepler (publicadas em 1609 e 1619) são obtidas resolvendo-se uma equação diferencial ordinária. Posteriormente Leonhard Euler e Daniel Bernoulli independentemente obtiveram a segunda lei de Kepler (conservação das áreas) como consequência da conservação do momento angular do sistema. Conforme Khamitova [2] existe uma carta datada de 1744, onde D. Bernoulli propõe à L. Euler a discussão da conservação dos momentos linear e angular do sistema de dois corpos. Em 1798, Pierre-Simon Laplace obteve a lei de conservação que é satisfeita pela primeira lei de Kepler (as órbitas dos planetas são elípticas com o Sol em um dos focos). Destas investigações originou-se o conceito de leis de conservação relacionadas aos príncipios de invariância em sistemas mecânicos.

No século dezenove foi observado que as leis de conservação na mecânica clássica poderiam ser determinadas a partir das propriedades das simetrias dos sistemas estudados. Félix Klein foi um dos primeiros a observar a conexão entre propriedades de invariância de problemas variacionais e leis de conservação, conforme [2]. Entretanto, o desenvolvimento de uma teoria geral para a construção de leis de conservação para equações diferenciais (não necessariamente oriundas de um príncipio variacional) tornou-se uma tarefa reconhecidamente não trivial.

Em 1918, Emmy Noether investigou a condição de invariância de integrais de ação (chamadas de integrais variacionais) relativas ao grupo de transformações no espaço das variáveis independentes e dependentes, culminando nas leis de conservação para as correspondentes equações de Euler -Lagrange. Tal resultado é conhecido como o Teorema de Noether ou Primeiro Teorema de Noether, [3]. A partir de uma simetria variacional da integral de ação, a qual também é uma simetria de Lie para a respectiva equação de Euler-Lagrange, o teorema fornece um vetor conservado ou quantidade conservada.

Observamos que existem situações nas quais o Teorema de Noether não é aplicável. Entre elas estão os problemas que são modelados por equações do tipo evolutivas, no sentido de P. Olver [4], ou por equações de ordem ímpar. Além disso as simetrias da respectiva equação de Euler-Lagrange podem não ser simetrias variacionais para a integral de ação.

A fim de superar as restrições de aplicabilidade do Teorema de Noether várias generalizações foram propostas, no entanto, o primeiro resultado geral associando uma lei de conservação com cada uma das simetrias de uma equação diferencial arbitrária foi publicado por Nail H. Ibragimov em [5], e em [6], com o título *A new conservation theorem*. Aquele o chamou de teorema sobre leis de conservação não-locais.

A motivação para o desenvolvimento de tal teorema teve início em 1973, quando o seu orientador, Lev V. Ovsyannikov, propôs-lhe a seguinte questão:

As infinitas leis de conservação para a equação de Korteweg-de Vries (KdV) podem ser obtidas a partir de suas simetrias?

Tal série infinita de leis de conservação foi obtida por Kruskal *et al*, [7], sem usar generalizações do Teorema de Noether, visto que a equação de KdV é uma equação do tipo evolutiva de terceira ordem. Depois de 33 anos, Ibragimov respondeu a questão com um SIM, através de seu teorema sobre leis de conservação não-locais, aplicável para equações diferenciais arbitrárias, o qual doravante nos referiremos como o Novo

Teorema sobre Leis de Conservação, abreviado por **NTLC**.

A teoria de Ibragimov consiste de um novo conceito de equações diferenciais adjuntas para equações não necessariamente lineares e não requer a existência de Lagrangeanas (como na teoria de Noether). Entre as principais propriedades de tal conceito estão:

a) a nova equação diferencial adjunta coincide com a definição clássica de equação diferencial adjunta no caso linear;

b) as simetrias de Lie, de Lie-Bäcklund e simetrias não-locais para uma equação diferencial são herdadas por sua equação adjunta.

O **NTLC** fornece fórmulas explícitas para o vetor conservado, a partir de um gerador de simetria para a equação considerada (e sua adjunta). As leis de conservação assim obtidas são ditas não-locais, uma vez que as quantidades conservadas fornecidas são essencialmente não-locais, no sentido de que elas envolvem além das variáveis da equação diferencial considerada, as variáveis adjuntas as quais são vistas como variáveis não-locais. Para obtermos leis de conservação locais, o conceito de equações diferenciais não-linearmente autoadjuntas é introduzido para eliminarmos as variáveis adjuntas das quantidades conservadas.

A solução fornecida para o problema da equação de KdV apresentada no artigo [5] diz que ela Por outro lado, as simetrias locais fornecem leis de conservação não-locais, as quais tornam-se triviais ao eliminarmos a variável adjunta.

Além disso, Ibragimov mostra que as leis de conservação fornecidas por seu teorema podem ser diferentes (não equivalentes) daquelas dadas pelo teorema de Noether para equações tendo Lagrangeanas; por exemplo, para equações de Euler-Lagrange que não são equações não-linearmente autoadjuntas.

Motivados pela teoria de Ibragimov propomos estudar as equações não-linearmente autoadjuntas nas duas seguintes classes de equações evolutivas de segunda ordem quaselineares:

$$R\,u_t = A\,u_{xy} + B\,u_x\,u_y + C\,u_{xx} + D\,u_{yy} + E\,u_y + F\,u_x + P\,u_x^2 + Q\,u_y^2 + G, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} R\,u_{tt} &= A\,u_{xy} + B\,u_x\,u_y + C\,u_{xx} + D\,u_{yy} + E\,u_y \\ &+ F\,u_x + P\,u_x^2 + Q\,u_y^2 + G + H\,u_t + I\,u_t^2, \end{aligned} \tag{1.2}$$

nas quais as funções A, B, C, D, E, F, G, H, I, P, Q e $R \neq 0$ são funções reais diferenciáveis nas variáveis independentes t, x, y e na variável dependente $u = u(t, x, y)$.

Entre as equações do tipo (1.1) destacamos as seguintes equações lineares (veja [8], páginas 3-5):

- a equação do calor:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \tag{1.3}$$

- a equação de Kolmogorov do tipo:

$$u_t = A\,u_{xy} + C\,u_{xx} + D\,u_{yy} + E\,u_y + F\,u_x, \tag{1.4}$$

onde as funções A, C, D, E, F são funções diferenciáveis nas variáveis t, x, y,

- a equação de Fokker-Planck do tipo:

$$u_t = A\,u_{xy} + C\,u_{xx} + D\,u_{yy} + E\,u_y + F\,u_x + G, \tag{1.5}$$

onde as funções A, C, D, E, F são funções diferenciáveis nas variáveis t, x, y, e

$$G = (2\,A_{xy} + C_{xx} + D_{yy} + F_x + E_y)u.$$

Entre as equações não-lineares destacamos as seguintes:

- a equação de Hamilton-Jacobi do tipo:

$$u_t = H(x, y, u_x, u_y), \tag{1.6}$$

onde a função H é do tipo particular $H = B\,u_x\,u_y + E\,u_y + F\,u_x + P\,u_x^2 + Q\,u_y^2 + G$ e as funções B, E, F, P, Q e G são funções diferenciáveis nas variáveis x, y,

- a lei de conservação escalar:

$$u_t = (F(u))_x + (F(u))_y, \tag{1.7}$$

onde a função $F = F(u)$ é uma função diferenciável não-nula,

- a equação de Burgers:

$$u_t = u_{xx} + u\, u_x, \tag{1.8}$$

- a equação do meio poroso:

$$u_t = p\, u^{p-1}(u_{xx} + u_{yy}) + p(p-1)\, u^{p-2}(u_y^2 + u_x^2), \tag{1.9}$$

onde p é um número inteiro positivo,

- a equação de Kompaneets [9]:

$$u_t = x^2\, u_{xx} + (x^2 + 4\,x + 2\,x^2\, u)u_x + 4\,x\,(u + u^2), \tag{1.10}$$

- A equação do calor não-linear anisotrópica [9]:

$$u_t = (f(u)\, u_x)_x + (g(u)\, u_y)_y, \tag{1.11}$$

onde as funções $f = f(u)$ e $g = g(u)$ são funções diferenciáveis ambas não-nulas,

- A equação do sistema de irrigação [9]:

$$R(u)\, u_t = (K(u)\, u_x)_x + (K(u)\,(u_y - 1))_y + G(u), \tag{1.12}$$

onde as funções $R = R(u) \neq 0$, $K = K(u)$ e $G = G(u)$ são funções diferenciáveis, com K e G ambas não-nulas,

- A equação do fluxo de Ricci geométrico bidimensional [10]:

$$u_t = e^{-u}(u_{xx} + u_{yy}), \tag{1.13}$$

- A equação do fluxo de Ricci 2D [11]:

$$u_t = \frac{1}{u}\, u_{xy} - \frac{1}{u^2}\, u_x\, u_y, \tag{1.14}$$

onde a função $u = u(t, x, y)$ é diferenciável não-nula,

- A equação do fluxo de Ricci modificada [12]:

$$u_t = \frac{1}{u}\, u_{xy} - \frac{1}{u^2}\, u_x\, u_y + \frac{a}{at + c}\, u, \tag{1.15}$$

onde a função $u = u(t, x, y)$ é diferenciável não-nula, as constantes reais a e c são tais que $at + c \neq 0$, ou seja, $t \neq -\frac{c}{a}$,

- A equação do calor não-linear 2D [13]:

$$u_t = (f(u)\, u_x)_y = f(u)\, u_{xy} + f'(u)\, u_x\, u_y, \tag{1.16}$$

onde $f = f(u)$ é uma função diferenciável não-nula.

Entre as equações do segundo tipo (1.2) destacamos as seguintes:

- A equação de onda não-linear [9]:

$$u_{tt} = k(u)\, (u_{xx} + u_{yy}) + k'(u)\, (u_x^2 + u_y^2), \tag{1.17}$$

onde a função $k = k(u)$ é diferenciável não-nula,

- A equação de vibração de membranas não-linear [9]:

$$u_{tt} = k(u)\, (u_{xx} + u_{yy}) + \frac{1}{2}\, k'(u)\, (u_x^2 + u_y^2), \tag{1.18}$$

onde a função $k = k(u)$ é diferenciável não-nula,

- A equação de onda não-linear anisotrópica [9]:

$$u_{tt} = (f(u)\, u_x)_x + (g(u)\, u_y)_y, \tag{1.19}$$

onde as funções $f = f(u)$ e $g = g(u)$ são funções diferenciáveis ambas não-nulas,

- A equação do fluxo geométrico hiperbólico [10]:

$$u_{tt} = e^{-u}(u_{xx} + u_{yy}) - u_t^2, \tag{1.20}$$

- A equação do fluxo geométrico hiperbólico modificada:

$$u_{tt} = e^{\lambda\, u}(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2. \tag{1.21}$$

Particularmente aplicamos o método de Ibragimov para as equações do fluxo de Ricci geométrico (3.15), do fluxo de Ricci 2D (3.16), do fluxo de Ricci modificada (3.21) e a equação do calor não-linear (1.16) na primeira classe; e as equações do fluxo geométrico hiperbólico (1.20) e do fluxo geométrico hiperbólico modificada (1.21) na segunda classe de equações evolutivas.

Na literatura existem muitos trabalhos envolvendo as equações do fluxo de Ricci, entre eles abordamos os trabalhos [11, 13, 12] de Cimpoiasu e Constantinescu, [14] de Cimpoiasu, que foram os que nos motivaram na escolha da forma da equação (1.1). Eles calcularam simetrias de Lie e soluções invariantes por geradores infinitesimais cujos coeficientes são funções lineares, ou seja, o coeficiente de $\frac{\partial}{\partial t}$ é linear em t, o de $\frac{\partial}{\partial x}$ é linear em x, etc., chamados de os geradores do setor linear. As soluções invariantes pelo setor linear para a equação do fluxo de Ricci 2D, [11], são do tipo estacionárias ou lineares no tempo. Já os geradores de simetrias de Lie para a equação do calor não-linear 2D, [13], são do setor linear, e as soluções invariantes são do tipo soluções de similaridades.

No terceiro trabalho, [12], eles obtiveram 24 equações determinantes para simetrias de Lie para a equação (1.1) com $P = Q = 0$ e $R = 1$. Além disso calcularam o setor linear das simetrias de Lie e as respectivas equações satisfazendo tal setor linear (eles resolveram um problema inverso visto a dificuldade na resolução das equações determinantes); eles mostraram que as únicas equações do calor não-linear 2D (1.16), admitindo setor linear de simetrias têm ou $f(u) = u^p$ com $p \neq 0$ um número inteiro ou $f(u) = e^u$, e ambas admitem soluções invariantes separáveis. Apesar de a equação do fluxo de Ricci 2D não admitir uma solução invariante separável, a equação do fluxo de Ricci modificada admite tal solução. Em um quarto trabalho, [14], Cimpoiasu calculou a lei de conservação mais geral via o método direto (como descrito em [15]), assim como a simetria de Lie associada com o vetor conservado obtido e novas soluções invariantes de similaridades e não-lineares no tempo para o modelo do fluxo de Ricci 2D.

Uma vez que as equações (1.1) e (1.2) são do tipo evolutivas, elas não provêm de uma integral de ação e não podemos utilizar o Teorema de Noether, porém podemos aplicar a teoria de Ibragimov. Primeiramente investigamos classes de equações (1.1) e (1.2) que são equações não-linearmente autoadjuntas. Depois obtivemos leis de conservação para todas as simetrias de Lie daquelas equações não-linearmente autoadjuntas em [11, 13, 12, 14, 10]. Finalizamos com as leis de conservação para as equações não-linearmente autoadjuntas (1.20) e (1.21).

1.1 Estrutura da tese

No segundo capítulo estudamos a teoria de Ibragimov para equações diferenciais nas variáveis independentes t, x e y e na variável dependente u, a menos de declaração contrária. Em particular, estudamos o conceito de equação diferencial não-linearmente autoadjunta, quase autoadjunta, estritamente autoadjunta, o Teorema de Noether, assim como a identidade de Noether com detalhes, e finalizamos apresentando o **NTLC** e seu algoritmo.

No terceiro capítulo estudamos a classe de equações evolutivas (1.1) do ponto de vista de autoadjunticidade não-linear, ou seja, determinamos quais delas são equações não-linearmente autoadjuntas, culminando no primeiro teorema principal da tese. Nas seções subsequentes calculamos leis de conservação para as equações do fluxo de Ricci geométrico (3.15), do fluxo de Ricci 2D (3.16), equações do calor não-linear (1.16) com não-linearidade do tipo potência $f(u) = u^p$ e do tipo exponencial $f(u) = e^u$, e finalizamos com a equação do fluxo de Ricci modificada (3.21). Os resultados principais deste capítulo estão publicados no artigo [16].

No quarto capítulo estudamos a segunda classe de equações evolutivas (1.2) quanto a sua autoadjunticidade não-linear, originando o segundo teorema principal da tese. Nas seções seguintes calculamos leis de conservação para as equações do fluxo geométrico hiperbólico (1.20) e do fluxo geométrico hiperbólico modificada (1.21). Os resultados principais deste capítulo estão publicados no artigo [17].

No Apêndice obtivemos a equação do fluxo de Ricci em coordenadas conformes e as simetrias de Lie da equação do fluxo geométrico hiperbólico modificada.

1.2 Resultados principais

No Capítulo 3 estudamos a autoadjunticidade não-linear da equação do primeiro tipo (1.1) e demonstramos os seguintes teorema e corolários.

O **Teorema 1.1** nos dá condições necessárias e suficientes para que a equação diferencial (1.1) seja uma equação não-linearmente autoadjunta.

Teorema 1.1: A equação diferencial

$$R\,u_t = A\,u_{xy} + B\,u_x\,u_y + C\,u_{xx} + D\,u_{yy} + E\,u_y + F\,u_x + P\,u_x^2 + Q\,u_y^2 + G, \quad (1.22)$$

com $R \neq 0$, e pelo menos uma das funções A, C e D não-nula, é uma equação não-linearmente autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi = \varphi(t, x, y, u)$ não-nula, com derivadas parciais de primeira ordem, e derivadas parciais de segunda ordem em relação às variáveis x e y, tal que as funções coeficientes satisfaçam as seguintes relações:

$$A\,\varphi_u + (A_u - B)\,\varphi = 0, \quad (1.23)$$

$$C\,\varphi_u + (C_u - P)\,\varphi = 0, \quad (1.24)$$

$$D\,\varphi_u + (D_u - Q)\,\varphi = 0, \quad (1.25)$$

$$(G\,\varphi)_u = H(t, x, y, u, \varphi, \varphi_t, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}), \quad (1.26)$$

onde A, C, D, E, F e R são funções de t, x, y, u, e a função H é dada por

$$\begin{aligned} H &= H(t, x, y, u, \varphi, \varphi_t, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}) \\ &= -R\,\varphi_t - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (F - A_y - 2\,C_x)\varphi_x + (E - A_x - 2\,D_y)\varphi_y \\ &+ (F_x + E_y - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} - R_t)\varphi. \end{aligned}$$

Equivalentemente, as funções coeficientes satisfazem as seguintes relações:

$$C\,(B - A_u) = A\,(P - C_u), \quad (1.27)$$

$$D\,(B - A_u) = A\,(Q - D_u), \quad (1.28)$$

$$C\,(Q - D_u) = D\,(P - C_u), \quad (1.29)$$

e a equação (1.26).

O primeiro corolário do **Teorema 1.1** nos dá condições necessárias e suficientes para que a equação diferencial (3.1) seja uma equação quase autoadjunta.

Corolário 1.1: Nas condições do enunciado do **Teorema 1.1**, a equação diferencial (3.1) é uma equação quase autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi = \varphi(u)$ diferenciável não-nula, tal que as funções coeficientes satisfaçam as seguintes relações:

$$\begin{aligned} B &= A_u + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} A, && (1.30)\\ P &= C_u + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} C, && (1.31)\\ Q &= D_u + \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} D, && (1.32)\\ (\varphi(u)\, G)_u &= (F_x + E_y - R_t - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy})\varphi(u), && (1.33) \end{aligned}$$

Equivalentemente, as funções coeficientes satisfazem as relações (1.27, 1.28, 1.29) e a equação (1.33).

O segundo corolário do **Teorema 1.1** nos dá condições necessárias e suficientes para que a equação diferencial (3.1) seja uma equação estritamente autoadjunta.

Corolário 1.2: Nas condições do enunciado do **Teorema 1.1**, a equação diferencial (3.1) é uma equação estritamente autoadjunta se, e somente se, suas funções coeficientes satisfaçam as seguintes relações:

$$\begin{aligned} B &= A_u + \frac{1}{u} A, && (1.34)\\ P &= C_u + \frac{1}{u} C, && (1.35)\\ Q &= D_u + \frac{1}{u} D, && (1.36)\\ (u\, G)_u &= (F_x + E_y - R_t - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy})u, && (1.37) \end{aligned}$$

Equivalentemente, as funções coeficientes satisfazem as relações (1.27, 1.28, 1.29) e a equação (1.37).

Como um primeiro exemplo de aplicação do **Teorema 1.1** obtivemos o corolário

Corolário 1.3: A equação do fluxo de Ricci geométrico, (3.15), é uma equação não-linearmente autoadjunta.

Como um primeiro exemplo de aplicação do **Corolário 1.1** obtivemos o corolário

Corolário 1.4: A equação do fluxo de Ricci geométrico, (3.15), é uma equação quase autoadjunta.

Como um primeiro exemplo de aplicação do **NTLC** obtivemos o corolário

Corolário 1.5: As leis de conservação para a equação do fluxo de Ricci geométrico, (3.15), geradas pela sub-álgebra de Lie:

$V_1 = \dfrac{\partial}{\partial t},\ V_2 = \dfrac{\partial}{\partial x},\ V_3 = \dfrac{\partial}{\partial y},\ V_4 = t\,\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial u},\ V_5 = y\,\dfrac{\partial}{\partial x} - x\,\dfrac{\partial}{\partial y},\ V_6 = x\,\dfrac{\partial}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial}{\partial y} - 2\,\dfrac{\partial}{\partial u},$

e $\alpha = \alpha(x, y)$ uma função harmônica não-nula, são as divergências

$$Div(C) := \mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3,$$

as quais se anulam sobre as soluções da equação (3.15), e seus vetores conservados $C := (C^1, C^2, C^3)$ são dados por:

- Para o gerador V_1, de translação em t, as componentes do vetor conservado C são nulas.

- Para o gerador V_2, de translação em x, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = -\alpha\, e^u\, u_x, \quad C^2 = -\alpha_x\, u_x + \alpha\, u_{xx}, \quad C^3 = -\alpha_y\, u_x + \alpha\, u_{xy}.$$

- Para o gerador V_3, de translação em y, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = -\alpha\, e^u\, u_y, \quad C^2 = -\alpha_x\, u_y + \alpha\, u_{xy}, \quad C^3 = -\alpha_y\, u_y + \alpha\, u_{yy}.$$

- Para o gerador V_4, de dilatação em t e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \alpha\, e^u, \quad C^2 = (1+u)\,\alpha_x - \alpha\, u_x, \quad C^3 = (1+u)\,\alpha_y - \alpha\, u_y.$$

- Para o gerador V_5, de rotação no plano xy, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$\begin{aligned} C^1 &= (x\,u_y - y\,u_x)\,e^u\,\alpha, \\ C^2 &= (\alpha_y - \alpha_{xy}\,x - \alpha_{yy}\,y)\,u - (\alpha_x\,y - \alpha_y\,x)\,u_x + \alpha\,y\,(u_{xx} + u_{yy}), \\ C^3 &= (\alpha_{xy}\,y + \alpha_{xx}\,x + \alpha_x)\,u - (\alpha_x\,y - \alpha_y\,x)\,u_y - \alpha\,x\,(u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

- Para o gerador V_6, de dilatação, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$\begin{aligned} C^1 &= -\alpha\,e^u\,(2 + x\,u_x + y\,u_y), \\ C^2 &= \alpha_x\,(u-2) + (\alpha_{xy}\,y - \alpha_{yy}\,x)\,u - (\alpha_x\,x + \alpha_y\,y)\,u_x + \alpha\,x\,(u_{xx} + u_{yy}), \\ C^3 &= \alpha_y\,(u-2) + (\alpha_{xy}\,x - \alpha_{xx}\,y)\,u - (\alpha_x\,x + \alpha_y\,y)\,u_y + \alpha\,y\,(u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

Como um segundo exemplo de aplicação do **Teorema 1.1** obtivemos o corolário

Corolário 1.6: A equação do fluxo de Ricci 2D, (3.16), é uma equação não-linearmente autoadjunta.

Como um segundo exemplo de aplicação do **NTLC** obtivemos o corolário

Corolário 1.7: As leis de conservação para a equação do fluxo de Ricci 2D, (3.16), geradas pela sub-álgebra de Lie:

$$U_1 = t\,\frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial u},\ \ U_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ \ U_3 = \frac{\partial}{\partial x},\ \ U_4 = \frac{\partial}{\partial y}, U_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u},\ \ U_6 = y\,\frac{\partial}{\partial y} - u\,\frac{\partial}{\partial u},$$

e $a = a(x)$, $b = b(y)$ funções diferenciáveis tais que $a(x) + b(y) \neq 0$, são as divergências

$$Div(C) := \mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3,$$

as quais se anulam sobre as soluções da equação (3.16), e seus vetores conservados $C := (C^1, C^2, C^3)$ são dados por:

- Para o gerador U_1, de dilatação em t e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = (a+b)\,u,\ C^2 = -\frac{b}{u}\,u_y,\ C^3 = -\frac{a}{u}\,u_x.$$

- Para o gerador U_2, de translação em t, as componentes do vetor conservado C são nulas.
- Para o gerador U_3, de translação em x, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = a_x\, u,\ C^2 = 0,\ C^3 = -\frac{1}{u}\, a_x\, u_x.$$

- Para o gerador U_4, de translação em y, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = b_y\, u,\ C^2 = -\frac{1}{u}\, b_y\, u_y,\ C^3 = 0.$$

- Para o gerador U_5, de dilatação em x e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = a_x\, x\, u,\ C^2 = 0,\ C^3 = -\frac{1}{u}\, x\, a_x\, u_x.$$

- Para o gerador U_6, de dilatação em y e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = b_y\, y\, u,\ C^2 = -\frac{1}{u}\, y\, b_y\, u_y,\ C^3 = 0.$$

Como um terceiro exemplo de aplicação do **Teorema 1.1** obtivemos o corolário

Corolário 1.8: A equação do calor não-linear, (3.18), é uma equação não-linearmente autoadjunta.

Como um terceiro exemplo de aplicação do **NTLC** obtivemos o corolário

Corolário 1.9: As leis de conservação para a equação do calor não-linear, (3.18), com $f(u) = u^p$, $p \neq 0$, geradas pela sua álgebra de Lie:

$$W_1 = t\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{p}\, u\,\frac{\partial}{\partial u},\ W_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ W_3 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$W_4 = \frac{\partial}{\partial y},\ W_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{p}\, u\,\frac{\partial}{\partial u},\ W_6 = y\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{p}\, u\,\frac{\partial}{\partial u},$$

e $a = a(x)$, $b = b(y)$ funções diferenciáveis tais que $a(x) + b(y) \neq 0$, são as divergências

$$Div(C) := \mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3,$$

as quais se anulam sobre as soluções da equação (3.18), e seus vetores conservados $C := (C^1, C^2, C^3)$ são dados por:

- Para o gerador W_1, de dilatação em t e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = -\frac{1}{p}(a+b)\,u, \quad C^2 = \frac{b}{p}\,u^p\,u_y, \quad C^3 = \frac{a}{p}\,u^p\,u_x.$$

- Para o gerador W_2, de translação em t, as componentes do vetor conservado C são nulas.
- Para o gerador W_3, de translação em x, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = a_x\,u, \quad C^2 = 0, \quad C^3 = -a_x\,u^p\,u_x.$$

- Para o gerador W_4, de translação em y, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = b_y\,u, \quad C^2 = -b_y\,u^p\,u_y, \quad C^3 = 0.$$

- Para o gerador W_5, de dilatação em x e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \left(x\,a_x + \frac{p+1}{p}(a+b)\right)u,\ C^2 = -\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y,\ C^3 = -\left(x\,a_x + \frac{p+1}{p}\,a\right)u^p\,u_x.$$

- Para o gerador W_6, de dilatação em y e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \left(y\,b_y + \frac{p+1}{p}(a+b)\right)u, \quad C^2 = -b_y\,u^p\,y\,u_y - \frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y, \quad C^3 = 0.$$

Como um quarto exemplo de aplicação do **NTLC** obtivemos o corolário

Corolário 1.10: As leis de conservação para a equação do calor não-linear, (3.18), com $f(u) = e^u$, geradas pela sua álgebra de Lie:

$$Z_1 = t\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Z_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_4 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad Z_6 = y\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u},$$

e $a = a(x)$, $b = b(y)$ funções diferenciáveis tais que $a(x) + b(y) \neq 0$, são as divergências

$$Div(C) := \mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3,$$

as quais se anulam sobre as soluções da equação (3.18), e seus vetores conservados $C := (C^1, C^2, C^3)$ são dados por:

- Para o gerador Z_1, de dilatação em t e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = -(a + b), \quad C^2 = -\frac{1}{2}\,b_y\,e^u + \frac{1}{2}\,(a - b)\,e^u\,u_y, \quad C^3 = -\frac{1}{2}\,a_x\,e^u + \frac{1}{2}\,(b - a)\,e^u\,u_x.$$

- Para o gerador Z_2, de translação em t, as componentes do vetor conservado C são nulas.

- Para o gerador Z_3, de translação em x, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = a_x\,u, \quad C^2 = 0, \quad C^3 = -a_x\,e^u\,u_x.$$

- Para o gerador Z_4, de translação em y, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = b_y\,u, \quad C^2 = -b_y\,e^u\,u_y, \quad C^3 = 0.$$

- Para o gerador Z_5, de dilatação em x e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$\begin{aligned} C^1 &= x\,a_x\,u + (a + b)(1 + u), \\ C^2 &= \frac{1}{2}\,b_y\,e^u - \frac{1}{2}\,(a + b)\,e^u\,u_y, \\ C^3 &= \frac{1}{2}\,a_x\,e^u - \left(x\,a_x + \frac{1}{2}\,(a + b)\right)\,e^u\,u_x. \end{aligned}$$

- Para o gerador Z_6, de dilatação em y e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$
\begin{aligned}
C^1 &= y\, b_y\, u + (a+b)\,(1+u),\\
C^2 &= \frac{1}{2}\, b_y\, e^u - \left(y\, b_y + \frac{1}{2}(a+b)\right) e^u\, u_y,\\
C^3 &= \frac{1}{2}\, a_x\, e^u - \frac{1}{2}(a+b)e^u\, u_x.
\end{aligned}
$$

Como um quarto exemplo de aplicação do **Teorema 1.1** obtivemos o corolário

Corolário 1.11: A equação do fluxo de Ricci modificada, (3.21), é uma equação não-linearmente autoadjunta.

Como um quinto exemplo de aplicação do **NTLC** obtivemos o corolário

Corolário 1.12: As leis de conservação para a equação do fluxo de Ricci modificada, (3.21), geradas pela sua álgebra de Lie:

$$X_1 = (a\,t+c)\,\frac{\partial}{\partial t} + a\,u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = (a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,\frac{\partial}{\partial t} + a(1+\ln(a\,t+c))u\,\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = y\,\frac{\partial}{\partial y} - u\,\frac{\partial}{\partial u},$$

com $A = A(x)$ e $B = B(y)$ funções diferenciáveis tais que $A(x) + B(y) \neq 0$, são as divergências

$$Div(C) := \mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3,$$

as quais se anulam sobre as soluções da equação (3.21), e seus vetores conservados $C := (C^1, C^2, C^3)$ são dados por:

- Para o gerador X_1, de dilatação em t e u, as componentes do vetor conservado C são nulas.
- Para o gerador X_2, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \frac{A+B}{a\,t+c}\,a\,u,\ C^2 = -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y,\ C^3 = -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x.$$

- Para o gerador X_3, de translação em x, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \frac{A_x}{a\,t+c}\,u,\ C^2 = 0,\ C^3 = -\frac{A_x}{a\,t+c}\,\frac{u_x}{u}.$$

- Para o gerador X_4, de translação em y, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \frac{B_y}{a\,t+c}\,u,\ C^2 = -\frac{B_y}{a\,t+c}\,\frac{u_y}{u},\ C^3 = 0.$$

- Para o gerador X_5, de dilatação em x e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \frac{A_x}{a\,t+c}\,x\,u,\ C^2 = 0,\ C^3 = -\frac{1}{2}\,\frac{A_x}{a\,t+c}\left(1+\frac{2}{u}\,x\,u_x\right).$$

- Para o gerador X_6, de dilatação em y e u, as componentes do vetor conservado C são dadas por:

$$C^1 = \frac{B_y}{a\,t+c}\,y\,u,\ C^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{B_y}{a\,t+c}\left(1+\frac{2}{u}\,y\,u_y\right),\ C^3 = 0.$$

Finalmente no Capítulo 4 estudamos a autoadjunticidade não-linear da equação do segundo tipo (1.2) e demonstramos os seguintes teorema e corolários.

O **Teorema 1.2** nos dá condições necessárias e suficientes para que a equação diferencial (1.2) seja uma equação não-linearmente autoadjunta.

Teorema 1.2: A equação diferencial

$$\begin{aligned} R\,u_{tt} &= A\,u_{xy} + B\,u_x\,u_y + C\,u_{xx} + D\,u_{yy} + E\,u_y \\ &+ F\,u_x + P\,u_x^2 + Q\,u_y^2 + G + H\,u_t + I\,u_t^2, \end{aligned} \tag{1.38}$$

com $R \neq 0$, é uma equação não-linearmente autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi = \varphi(t,x,y,u)$ não-nula, duas vezes diferenciável tal que as funções coeficientes satisfaçam as seguintes relações:

$$(\varphi\,R)_u = -\varphi\,I \tag{1.39}$$

se ao menos uma das funções $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ abaixo definidas, for não-nula,

$$(\varphi\, R)_{tu} + (\varphi\, I)_t + H\,(\varphi_u + R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) = 0, \tag{1.40}$$

$$((\varphi\, A)_u - \varphi\, B)_y + 2\,((\varphi\, C)_u - \varphi\, P)_x - 2\,F\,(\varphi_u + R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) = 0, \tag{1.41}$$

$$((\varphi\, A)_u - \varphi\, B)_x + 2\,((\varphi\, D)_u - \varphi\, Q)_y - 2\,E\,(\varphi_u + R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) = 0, \tag{1.42}$$

$$\begin{gathered}(\varphi\, R)_{tt} - (\varphi\, A)_{xy} - (\varphi\, C)_{xx} - (\varphi\, D)_{yy} = \\ -(\varphi\, E)_y - (\varphi\, F)_x - (\varphi\, H)_t - \varphi_u\, G - (2\, G\, R^{-1}\,(I + R_u) - G_u)\,\varphi,\end{gathered} \tag{1.43}$$

onde A, B, C, D, E, F, P, Q, G, H, I e $R \neq 0$ são funções de t, x, y, u, e as funções $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ são dadas por

$$\begin{aligned}&A_1 := R\, A_u - A\, R_u, \quad B_1 := D\, C_u - C\, D_u, \quad C_1 := R\, C_u - C\, R_u,\\ &D_1 := R\, D_u - D\, R_u, \quad E_1 := A\, C_u - C\, A_u, \quad F_1 := A\, D_u - D\, A_u.\end{aligned}$$

Além disso, as funções coeficientes satisfazem as seguintes relações:

$$A_1 = A\, I + R\, B, \tag{1.44}$$

$$B_1 = D\, P - C\, Q, \tag{1.45}$$

$$C_1 = C\, I + R\, P, \tag{1.46}$$

$$D_1 = D\, I + R\, Q, \tag{1.47}$$

$$E_1 = A\, P - C\, B, \tag{1.48}$$

$$F_1 = A\, Q - D\, B. \tag{1.49}$$

O primeiro corolário do **Teorema 1.2** nos dá condições necessárias e suficientes para que a equação diferencial (4.1) seja uma equação quase autoadjunta.

Corolário 1.13: Nas condições do enunciado do **Teorema 1.2**, a equação diferencial (4.1) é uma equação quase autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi = \varphi(u)$ diferenciável não-nula, tal que as funções coeficientes satisfaçam as seguintes relações:

$$(\varphi\, R)_u = -\varphi\, I \tag{1.50}$$

se ao menos uma das funções $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ for não-nula,

$$(\varphi\, R_t)_u + H\,\varphi_u + (I_t + H\,R^{-1}\,(I + R_u))\,\varphi = 0, \tag{1.51}$$

$$(\varphi\, A_y)_u + 2\,(\varphi\, C_x)_u - 2\,F\,\varphi_u - (B_y + 2\,P_x + 2\,F\,R^{-1}\,(I + R_u))\,\varphi = 0, \tag{1.52}$$

$$(\varphi\, A_x)_u + 2\,(\varphi\, D_y)_u - 2\,E\,\varphi_u - (B_x + 2\,Q_y + 2\,E\,R^{-1}\,(I + R_u))\,\varphi = 0, \tag{1.53}$$

$$G\,\varphi_u + (R_{tt} - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} + E_y + F_x + H_t + 2\,G\,R^{-1}\,(I + R_u) - G_u)\,\varphi = 0, \tag{1.54}$$

onde A, B, C, D, E, F, P, Q, G, H, I e $R \neq 0$ são funções de t, x, y, u, e as funções A_1, $B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ definidas no enunciado do **Teorema 1.2**, satisfazem as relações (1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49).

O segundo corolário do **Teorema 1.2** nos dá condições necessárias e suficientes para que a equação diferencial (4.1) seja uma equação estritamente autoadjunta.

Corolário 1.14: Nas condições do enunciado do **Teorema 1.2**, a equação diferencial (4.1) é uma equação estritamente autoadjunta se, e somente se, suas funções coeficientes satisfaçam as seguintes relações:

$$I + R_u = -\frac{R}{u} \tag{1.55}$$

se ao menos uma das funções $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ for não-nula,

$$R_t + H + (R_{tu} + I_t + H\,R^{-1}\,(I + R_u))\,u = 0, \tag{1.56}$$

$$A_y + 2\,C_x - 2\,F + (A_{yu} + 2\,C_{xu} - B_y - 2\,P_x - 2\,F\,R^{-1}\,(I + R_u))\,u = 0, \tag{1.57}$$

$$A_x + 2\,D_y - 2\,E + (A_{xu} + 2\,D_{yu} - B_x - 2\,Q_y - 2\,E\,R^{-1}\,(I + R_u))\,u = 0, \tag{1.58}$$

$$G + (R_{tt} - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} + E_y + F_x + H_t + 2\,G\,R^{-1}\,(I + R_u) - G_u)\,u = 0, \tag{1.59}$$

onde as funções $A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1,\ E_1,\ F_1$ definidas no enunciado do **Teorema 1.2** satisfazem as relações (1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49).

Como um primeiro exemplo de aplicação do **Teorema 1.2** obtivemos o corolário

Corolário 1.15: A equação do fluxo geométrico hiperbólico, (1.20), é uma equação não-linearmente autoadjunta.

Como um primeiro exemplo de aplicação do **Corolário 1.13** obtivemos o corolário

Corolário 1.16: A equação do fluxo geométrico hiperbólico, (1.20), é uma equação quase autoadjunta.

Como um sexto exemplo de aplicação do **NTLC** obtivemos o corolário

Corolário 1.17: A única lei de conservação não-trivial para a equação do fluxo geométrico hiperbólico, (1.20), gerada pela sua álgebra de Lie:

$$X = (c_1 + c_2\, t)\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y} + 2\,(c_2 - \xi_x)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

onde c_1, c_2 são constantes arbitrárias, $\xi_x = \eta_y$, $\eta_x = -\xi_y$, é a divergência

$$Div(C) := \mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3,$$

a qual se anula sobre as soluções da equação (1.20), e seu vetor conservado $C := (C^1, C^2, C^3)$ é dado por:

$$C^1 = e^u\, u_t, \quad C^2 = -u_x, \quad C^3 = -u_y.$$

Como um segundo exemplo de aplicação do **Teorema 1.2** obtivemos o corolário

Corolário 1.18: A equação

$$u_{tt} = f(u)\,(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2$$

com $f = f(u)$ e λ ambos não-nulos, é uma equação não-linearmente autoadjunta se, e somente se, $f(u) = a\, e^{\lambda\, u}$ onde a é uma constante não-nula.

Como um segundo exemplo de aplicação do **Corolário 1.13** obtivemos o corolário

Corolário 1.19: A equação do fluxo geométrico hiperbólico modificada, (1.21), é uma equação quase autoadjunta.

Como um sétimo exemplo de aplicação do **NTLC** obtivemos o corolário

Corolário 1.20: As leis de conservação para a equação do fluxo geométrico hiperbólico modificada, (1.21), geradas pela sub-álgebra de Lie:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial t}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x}, V_3 = \frac{\partial}{\partial y}, V_4 = t\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial u}, V_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial u}, V_6 = y\,\frac{\partial}{\partial x} - x\,\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $\alpha = \alpha(x, y)$ e $\beta = \beta(x, y)$ são funções harmônicas tais que $\alpha\, t + \beta \neq 0$, são as divergências

$$Div(C) := \mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3,$$

as quais se anulam sobre as soluções da equação (1.21), e seus vetores conservados $C := (C^1, C^2, C^3)$ são dados por:

- Para o gerador V_1, de translação em t, as componentes do vetor conservado são

$$C^1 = e^{-\lambda\, u}\, \alpha\, u_t,\ C^2 = \alpha_x\, u - \alpha\, u_x,\ C^3 = \alpha_y\, u - \alpha\, u_y.$$

- Para o gerador V_2, de translação em x, as componentes do vetor conservado são

$$\begin{aligned} C^1 &= \left[\frac{2}{\lambda}\,\alpha_x - \alpha_x\, u + (\alpha_x\, t + \beta_x)\, u_t + (\lambda\, u - 2)\, \alpha\, u_x\right] e^{-\lambda\, u}, \\ C^2 &= \left(\frac{2}{\lambda} - u\right) (\alpha_{yy}\, t + \beta_{yy}) - (\alpha_x\, t + \beta_x)\, u_x - (\lambda\, u - 2)\, \alpha\, e^{-\lambda\, u}\, u_t, \\ C^3 &= \left(u - \frac{2}{\lambda}\right) (\alpha_{xy}\, t + \beta_{xy}) - (\alpha_x\, t + \beta_x)\, u_y. \end{aligned}$$

- Para o gerador V_3, de translação em y, as componentes do vetor conservado são

$$\begin{aligned} C^1 &= [-\alpha_y\, u + (\alpha_y\, t + \beta_y)\, u_t + \lambda\, u\, \alpha\, u_y]\, e^{-\lambda\, u}, \\ C^2 &= (\alpha_{xy}\, t + \beta_{xy})\, u - (\alpha_y\, t + \beta_y)\, u_x, \\ C^3 &= -(\alpha_{xx}\, t + \beta_{xx})\, u - (\alpha_y\, t + \beta_y)\, u_y - \lambda\, u\, \alpha\, e^{-\lambda\, u}\, u_t. \end{aligned}$$

- Para o gerador V_4, de dilatação em t e u, as componentes do vetor conservado são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \left[\frac{2}{\lambda}\,\alpha\,u \;+ (2\,\alpha\,t+\beta)\,u_t\right] e^{-\lambda\,u},\\
C^2 &= \left(u-\frac{2}{\lambda}\right)(\alpha_x\,t+\beta_x) + t\,\alpha_x\,u - (2\,\alpha\,t+\beta)\,u_x,\\
C^3 &= \left(u-\frac{2}{\lambda}\right)(\alpha_y\,t+\beta_y) + t\,\alpha_y\,u - (2\,\alpha\,t+\beta)\,u_y.
\end{aligned}
$$

- Para o gerador V_5, de dilatação em x, y e u, as componentes do vetor conservado são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \Big[\frac{2}{\lambda}\,\alpha_x\,x - (\alpha_x\,x+\alpha_y\,y+2\,\alpha)\,u + [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,x + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,y]\,u_t\\
&+ (\lambda\,u-2)\,\alpha\,x\,u_x + \lambda\,u\,\alpha\,y\,u_y\Big]\,e^{-\lambda\,u},\\
C^2 &= \left(\frac{2}{\lambda}-u\right)(\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy})\,x + \left(\frac{2}{\lambda}+u\right)(\alpha_x\,t+\beta_x)\\
&+ (\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,y\,u - [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,x + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,y]\,u_x - (\lambda\,u-2)\,\alpha\,x\,e^{-\lambda\,u}\,u_t,\\
C^3 &= \left(u-\frac{2}{\lambda}\right)(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,x + [\alpha_y\,t+\beta_y - (\alpha_{xx}\,t+\beta_{xx})\,y]\,u\\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,x + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,y]\,u_y - \lambda\,u\,\alpha\,y\,e^{-\lambda\,u}\,u_t.
\end{aligned}
$$

- Para o gerador V_6, de rotação no plano Oxy, as componentes do vetor conservado são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \Big[\frac{2}{\lambda}\,\alpha_x\,y - (\alpha_x\,y-\alpha_y\,x)\,u + [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,y - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,x]\,u_t\\
&+ (\lambda\,u-2)\,\alpha\,y\,u_x - \lambda\,u\,\alpha\,x\,u_y\Big]\,e^{-\lambda\,u},\\
C^2 &= \left(\frac{2}{\lambda}\;-u\right)(\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy})\,y - [(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,x + \alpha_y\,t+\beta_y]\,u\\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,y - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,x]\,u_x - (\lambda\,u-2)\,\alpha\,y\,e^{-\lambda\,u}\,u_t,\\
C^3 &= \left(u-\frac{2}{\lambda}\right)(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,y + \left(\frac{2}{\lambda}+u\right)(\alpha_x\,t+\beta_x)\\
&+ (\alpha_{xx}\,t+\beta_{xx})\,x\,u - [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,y - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,x]\,u_y + \lambda\,u\,\alpha\,x\,e^{-\lambda\,u}\,u_t.
\end{aligned}
$$

Capítulo 2

O Método de Ibragimov

Neste capítulo desenvolvemos a teoria de Ibragimov para equações diferenciais escalares nas variáveis independentes t, x, e y, a menos de declaração contrária. Para equações mais gerais a literatura básica recomendada são os artigos [5, 18, 19, 6, 20, 21, 9, 22]. Entre as muitas aplicações desta teoria citamos, por exemplo, os artigos [25, 26, 27, 28, 29, 20, 30, 31, 32].

Na primeira seção estudamos a equação adjunta.

Na segunda seção estudamos o Teorema de Noether, enfatizando a Identidade de Noether, a qual é fundamental na teoria de Ibragimov.

Na última seção estudamos o NTLC de Ibragimov, o qual foi uma das motivações na escolha do tema da tese, logo é o teorema central para a obtenção dos resultados originais do trabalho.

2.1 A equação adjunta

Definimos uma função diferencial conforme [5, 18, 6, 9].

Definição 2.1: Sejam t, x, y as variáveis independentes, $u = u(t, x, y)$ a variável dependente, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, etc., suas derivadas parciais. Uma função $\mathcal{F}$ das variáveis t, x, y, u, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, etc., é chamada de função diferencial se ela for localmente analítica, isto é, se ela admitir localmente uma expansão em série de Taylor.

O conceito de Lagrangeana formal é introduzido de acordo com [5, 21, 9].

Definição 2.2: Sejam $\mathcal{F}$ uma função diferencial das variáveis t, x, y, u, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, etc. e $v = v(t,x,y)$ uma nova variável dependente, chamada de variável adjunta, também chamada de variável não-local (conforme [5]). Definimos a função Lagrangeana formal de $\mathcal{F}$ para ser a seguinte função diferencial das variáveis t, x, y, u, v, u_t, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, etc.

$$\mathcal{L} := v\,\mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Definição 2.3: [1] Sejam dadas a função diferencial $\mathcal{F}$ e a equação diferencial

$$\mathcal{F}(t,x,y,u,u_t,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy},\cdots) = 0, \tag{2.2}$$

denotada por $\mathcal{F}[u] = 0$, definimos a função diferencial adjunta $\mathcal{F}^*$ por

$$\mathcal{F}^* := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u}, \tag{2.3}$$

e definimos a equação adjunta à equação diferencial acima por

$$\mathcal{F}^*(t,x,y,u,v,u_t,v_t,u_x,v_x,u_y,v_y,u_{xx},v_{xx},u_{xy},v_{xy},u_{yy},v_{yy},\cdots) = 0, \tag{2.4}$$

denotada por $\mathcal{F}^*[u,v] = 0$, onde

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_t\frac{\partial}{\partial u_t} - \mathcal{D}_x\frac{\partial}{\partial u_x} - \mathcal{D}_y\frac{\partial}{\partial u_y} + \mathcal{D}_x\mathcal{D}_y\frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \mathcal{D}_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \mathcal{D}_y^2\frac{\partial}{\partial u_{yy}} - \cdots \tag{2.5}$$

é o operador de Euler-Lagrange relativo à variável u e

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_t &= \tfrac{\partial}{\partial t} + u_t\tfrac{\partial}{\partial u} + v_t\tfrac{\partial}{\partial v} + u_{tt}\tfrac{\partial}{\partial u_t} + v_{tt}\tfrac{\partial}{\partial v_t} + u_{tx}\tfrac{\partial}{\partial u_x} + v_{tx}\tfrac{\partial}{\partial v_x} + u_{ty}\tfrac{\partial}{\partial u_y} + v_{ty}\tfrac{\partial}{\partial v_y} + \cdots,\\
\mathcal{D}_x &= \tfrac{\partial}{\partial x} + u_x\tfrac{\partial}{\partial u} + v_x\tfrac{\partial}{\partial v} + u_{tx}\tfrac{\partial}{\partial u_t} + v_{tx}\tfrac{\partial}{\partial v_t} + u_{xx}\tfrac{\partial}{\partial u_x} + v_{xx}\tfrac{\partial}{\partial v_x} + u_{xy}\tfrac{\partial}{\partial u_y} + v_{xy}\tfrac{\partial}{\partial v_y} + \cdots,\\
\mathcal{D}_y &= \tfrac{\partial}{\partial y} + u_y\tfrac{\partial}{\partial u} + v_y\tfrac{\partial}{\partial v} + u_{ty}\tfrac{\partial}{\partial u_t} + v_{ty}\tfrac{\partial}{\partial v_t} + u_{xy}\tfrac{\partial}{\partial u_x} + v_{xy}\tfrac{\partial}{\partial v_x} + u_{yy}\tfrac{\partial}{\partial u_y} + v_{yy}\tfrac{\partial}{\partial v_y} + \cdots.
\end{aligned}$$

são os operadores de derivadas totais em relação às variáveis t, x e y respectivamente.

[1] Em [18, 19, 21, 9] esta definição é mais geral. Aqui consideramos o caso de três variáveis independentes e uma variável dependente.

Agora definimos as equações não-linearmente autoadjuntas, quase autoadjuntas e estritamente autoadjuntas segundo [9].

Definição 2.4: [2] Considere as equações diferenciais (2.2) e (2.4) na **Definição 2.3**. A equação diferencial (2.2) é chamada de *não-linearmente autoadjunta*, se existir uma função diferenciável não-nula

$$v = \varphi(t, x, y, u) \tag{2.6}$$

satisfazendo a igualdade

$$\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} = \lambda\, \mathcal{F} \tag{2.7}$$

para algum coeficiente $\lambda = \lambda(t, x, y, u, \cdots)$ a ser determinado. Se $v = \varphi(u)$, a equação (2.2) é chamada de *quase autoadjunta*. E se $v = u$, a equação (2.2) é chamada de *estritamente autoadjunta*.

Observamos que a função adjunta $v = \varphi(t, x, y, u)$ é uma solução particular da equação adjunta (2.4) sempre que $u = f(t, x, y)$ for uma solução da equação (2.2).

As equações determinantes de autoadjunticidade não-linear para a equação (2.2) são obtidas equacionando os coeficientes dos monômios u_t, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, $u_x\, u_y$, u_x^2, u_y^2, u_x, u_y, etc. na equação (2.7).

Vejamos alguns exemplos encontrados em [21, 9]:

Exemplo 2.1: [[21], página 9] A equação do calor

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}$$

é uma equação não-linearmente autoadjunta, mas não é uma equação quase autoadjunta.

[2] Esses conceitos foram introduzidos por Ibragimov na seguinte ordem temporal: equação *autoadjunta* [5, 18, 6], equação *quase autoadjunta* [19, 20], equação *quase autoadjunta* generalizada [9] e, finalmente, equação *não-linearmente autoadjunta* [21, 9]. Em [19, 20] a equação *quase autoadjunta* é definida exigindo que $\varphi'(u) \neq 0$, em [9] Ibragimov a generaliza da forma aqui apresentada. Observamos que existe o conceito de equação *fracamente autoadjunta* introduzido por Gandarias em [22, 23], o qual exige que φ dependa explicitamente de todas as variáveis, veja a dissertação [24].

De fato, sua Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L} := v(u_t - u_{xx} - u_{yy}),$$

e sua função diferencial adjunta é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^* := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} &= \left(-\mathcal{D}_t \frac{\partial}{\partial u_t} + \mathcal{D}_x^2 \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \mathcal{D}_y^2 \frac{\partial}{\partial u_{yy}} - \cdots \right)(v(u_t - u_{xx} - u_{yy})) \\
&= -\mathcal{D}_t v - \mathcal{D}_x^2 v - \mathcal{D}_y^2 v.
\end{aligned}$$

Substituindo $v = \varphi(t, x, y, u)$ e suas derivadas parciais

$$v_t = \varphi_t + \varphi_u\, u_t,\ v_x = \varphi_x + \varphi_u\, u_x,\ v_y = \varphi_y + \varphi_u\, u_y,\ v_{xx} = \varphi_{xx} + 2\,\varphi_{xu}\, u_x + \varphi_{uu}\, u_x^2 + \varphi_u\, u_{xx},$$

$$v_{xy} = \varphi_{xy} + \varphi_{xu}\, u_y + \varphi_{yu}\, u_x + \varphi_{uu}\, u_x\, u_y + \varphi_u\, u_{xy},\ v_{yy} = \varphi_{yy} + 2\,\varphi_{yu}\, u_y + \varphi_{uu}\, u_y^2 + \varphi_u\, u_{yy},$$

na função diferencial adjunta, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} &= -\varphi_t - \varphi_u\, u_t - \varphi_{xx} - 2\,\varphi_{xu}\, u_x - \varphi_{uu}\, u_x^2 - \varphi_u\, u_{xx} - \varphi_{yy} - 2\,\varphi_{yu}\, u_y - \\
&\quad \varphi_{uu}\, u_y^2 - \varphi_u\, u_{yy} \\
&= -\varphi_u\, u_t - \varphi_u\, u_{xx} - \varphi_u\, u_{yy} - 2\,\varphi_{yu}\, u_y - 2\,\varphi_{xu}\, u_x - \varphi_{uu}\, u_x^2 - \varphi_{uu}\, u_y^2 - \\
&\quad \varphi_t - \varphi_{xx} - \varphi_{yy}.
\end{aligned}$$

Agora obtemos as equações determinantes de autoadjunticidade não-linear equacionando os coeficientes dos monômios u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_y, u_x, u_x^2, u_y^2 e $\mathbf{1}$ na equação (2.7):

$$\begin{aligned}
u_t\colon &\quad & -\varphi_u &= \lambda, \\
u_{xx}\colon &\quad & -\varphi_u &= -\lambda, \\
u_{yy}\colon &\quad & -\varphi_u &= -\lambda, \\
u_y\colon &\quad & -2\,\varphi_{yu} &= 0, \\
u_x\colon &\quad & -2\,\varphi_{xu} &= 0, \\
u_x^2\colon &\quad & -\varphi_{uu} &= 0, \\
u_y^2\colon &\quad & -\varphi_{uu} &= 0, \\
\mathbf{1}\colon &\quad & -\varphi_t - \varphi_{xx} - \varphi_{yy} &= 0.
\end{aligned}$$

Somando as duas primeiras equações determinantes segue que a função φ é qualquer solução não-nula $\varphi = \varphi(t, x, y)$ para a equação adjunta, a saber,

$$\varphi_t + \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0.$$

Como a função φ é independente da variável u, então a equação do calor não é quase autoadjunta.

Porém ela pode se tornar uma equação estritamente autoadjunta através de um multiplicador $\mu = \mu(u) \neq 0$ adequado. Com efeito, a sua nova função diferencial adjunta é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^* &= \frac{\delta}{\delta u}(v\mu[u_t - u_{xx} - u_{yy}]) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_t\frac{\partial}{\partial u_t} + \mathcal{D}_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \mathcal{D}_y^2\frac{\partial}{\partial u_{yy}} - \cdots\right)(v\mu[u_t - u_{xx} - u_{yy}]) \\
&= v\,\mu'\,(u_t - u_{xx} - u_{yy}) - \mu\,\mathcal{D}_t v - v\,\mu'\,u_t - \mu\,(\mathcal{D}_x^2 v + \mathcal{D}_y^2 v) - 2\,\mu'\,u_x\,\mathcal{D}_x v - \\
&\quad 2\,\mu'\,u_y\,\mathcal{D}_y v - v\,(\mu'\,u_{xx} + \mu'\,u_{yy} + \mu''\,u_x^2 + \mu''\,u_y^2) \\
&= -\mu\,\mathcal{D}_t v - \mu\,(\mathcal{D}_x^2 v + \mathcal{D}_y^2 v) - 2\,\mu'\,(u_x\,\mathcal{D}_x v + u_y\,\mathcal{D}_y v) - \\
&\quad v\,(2\,\mu'\,u_{xx} + 2\,\mu'\,u_{yy} + \mu''\,u_x^2 + \mu''\,u_y^2),
\end{aligned}$$

e após a substituição de $v = \varphi(t, x, y, u)$ e suas derivadas parciais na função $\mathcal{F}^*$ obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} &= -\mu\,(\varphi_t + \varphi_u\,u_t) - \mu\,(\varphi_{xx} + 2\,\varphi_{xu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x^2 + \varphi_u\,u_{xx} + \varphi_{yy} + \\
&\quad 2\,\varphi_{yu}\,u_y + \varphi_{uu}\,u_y^2 + \varphi_u\,u_{yy}) - 2\,\mu'\,u_x\,(\varphi_x + \varphi_u\,u_x) - \\
&\quad 2\,\mu'\,u_y\,(\varphi_y + \varphi_u\,u_y) - \varphi\,(2\,\mu'\,u_{xx} + 2\,\mu'\,u_{yy} + \mu''\,u_x^2 + \mu''\,u_y^2) \\
&= -\mu\,\varphi_u\,u_t - (\mu\,\varphi_u + 2\,\mu'\,\varphi)u_{xx} - (\mu\,\varphi_u + 2\,\mu'\,\varphi)u_{yy} - \\
&\quad 2(\mu\,\varphi_{yu} + \mu'\,\varphi_y)u_y - 2(\mu\,\varphi_{xu} + \mu'\,\varphi_x)u_x - (\mu\,\varphi_{uu} + 2\,\mu'\,\varphi_u + \mu''\,\varphi)u_x^2 - \\
&\quad (\mu\,\varphi_{uu} + 2\,\mu'\,\varphi_u + \mu''\,\varphi)u_y^2 - \mu(\varphi_t + \varphi_{xx} + \varphi_{yy}).
\end{aligned}$$

Assim temos as equações determinantes de autoadjunticidade não-linear:

$$
\begin{array}{rrcl}
u_t\colon & -\mu\,\varphi_u & = & \lambda\,\mu,\\
u_{xx}\colon & -(\mu\,\varphi_u + 2\,\mu'\,\varphi) & = & -\lambda\,\mu,\\
u_{yy}\colon & -(\mu\,\varphi_u + 2\,\mu'\,\varphi) & = & -\lambda\,\mu,\\
u_y\colon & -2(\mu\,\varphi_{yu} + \mu'\,\varphi_y) & = & 0,\\
u_x\colon & -2(\mu\,\varphi_{xu} + \mu'\,\varphi_x) & = & 0,\\
u_x^2\colon & -(\mu\,\varphi_{uu} + 2\,\mu'\,\varphi_u + \mu''\,\varphi) & = & 0,\\
u_y^2\colon & -(\mu\,\varphi_{uu} + 2\,\mu'\,\varphi_u + \mu''\,\varphi) & = & 0,\\
\mathbf{1}\colon & -\mu(\varphi_t + \varphi_{xx} + \varphi_{yy}) & = & 0.
\end{array}
$$

Tais equações são equivalentes às seguintes:

$$
\begin{array}{rcl}
-\mu\,\varphi_u & = & \lambda\,\mu,\\
-(\mu\,\varphi_u + 2\,\mu'\,\varphi) & = & -\lambda\,\mu,\\
(\mu\,\varphi)_{yu} & = & 0,\\
(\mu\,\varphi)_{xu} & = & 0,\\
(\mu\,\varphi)_{uu} & = & 0,\\
(\mu\,\varphi)_t + (\mu\,\varphi)_{xx} + (\mu\,\varphi)_{yy} & = & 0.
\end{array}
$$

Somando as duas primeiras equações temos que a função $\mu\,\varphi$ é qualquer solução não-nula $\alpha = \alpha(t,x,y)$ para a equação $\alpha_t + \alpha_{xx} + \alpha_{yy} = 0$. Uma solução particular é obtida tomando $\mu = \frac{1}{u}$ e $\varphi = u$.

Exemplo 2.2: [[9], página 15] A equação de Burgers

$$u_t = u_{xx} + u\,u_x$$

é uma equação não-linearmente autoadjunta, não é uma equação quase autoadjunta, mas torna-se uma equação estritamente autoadjunta via um multiplicador $\mu = \mu(u) \neq 0$.

De fato, a sua função diferencial adjunta é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^* &= \frac{\delta}{\delta u}(v\,\mu[u_t - u_{xx} + u\,u_x]) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_t\frac{\partial}{\partial u_t} - \mathcal{D}_x\frac{\partial}{\partial u_x} + \mathcal{D}_x^2\frac{\partial}{\partial u_{xx}} - \cdots\right)(v\,\mu[u_t - u_{xx} + u\,u_x]) \\
&= v\,\mu'\,(u_t - u_{xx} + u\,u_x) + v\,\mu\,u_x - \mu\,\mathcal{D}_t v - v\,\mu'\,u_t - \\
&\quad \mu\,u\,\mathcal{D}_x v - v\,(\mu'\,u + \mu)u_x - \mu\,\mathcal{D}_x^2 v - 2\,\mu'\,u_x\,\mathcal{D}_x v - v\,(\mu'\,u_{xx} + \mu''\,u_x^2) \\
&= -\mu\,\mathcal{D}_t v - \mu\,\mathcal{D}_x^2 v - (\mu\,u + 2\,\mu'\,u_x)\mathcal{D}_x v - v\,(2\,\mu'\,u_{xx} + \mu''\,u_x^2),
\end{aligned}
$$

e após a substituição de $v = \varphi(t,x,y,u)$ e suas derivadas parciais na função $\mathcal{F}^*$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} &= -\mu\,(\varphi_t + \varphi_u\,u_t) - \mu\,(\varphi_{xx} + 2\,\varphi_{xu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x^2 + \varphi_u\,u_{xx}) - \\
&\quad (\mu\,u + 2\,\mu'\,u_x)\,(\varphi_x + \varphi_u\,u_x) - \varphi\,(2\,\mu'\,u_{xx} + \mu''\,u_x^2) \\
&= -\mu\,\varphi_u\,u_t - (\mu\,\varphi_u + 2\,\mu'\,\varphi)u_{xx} - (2\,\mu\,\varphi_{xu} + 2\,\mu'\,\varphi_x + \mu\,u\,\varphi_u)u_x - \\
&\quad (\mu\,\varphi_{uu} + 2\,\mu'\,\varphi_u + \mu''\,\varphi)u_x^2 - \mu\,\varphi_t - \mu\,\varphi_{xx} - \mu\,u\,\varphi_x.
\end{aligned}
$$

Assim temos as equações determinantes de autoadjunticidade não-linear:

$$
\begin{aligned}
u_t\colon &\quad & -\mu\,\varphi_u &= \lambda\,\mu, \\
u_{xx}\colon &\quad & -(\mu\,\varphi_u + 2\,\mu'\,\varphi) &= -\lambda\,\mu, \\
u_x\colon &\quad & -(2\,\mu\,\varphi_{xu} + 2\,\mu'\,\varphi_x + \mu\,u\,\varphi_u) &= \lambda\,\mu\,u, \\
u_x^2\colon &\quad & -(\mu\,\varphi_{uu} + 2\,\mu'\,\varphi_u + \mu''\,\varphi) &= 0, \\
\mathbf{1}\colon &\quad & -\mu\,\varphi_t - \mu\,\varphi_{xx} - \mu\,u\,\varphi_x &= 0.
\end{aligned}
$$

Somando as duas primeiras equações temos que a função $\mu\,\varphi$ é independente de u. Substituindo-a nas outras equações chegamos a conclusão de que $\mu\,\varphi = c$, uma constante não-nula. Uma solução particular é obtida tomando $\mu = \frac{1}{u}$ e $\varphi = u$. Considerando a equação original, sem o multiplicador μ, obtemos uma solução particular φ constante não-nula, implicando que a equação de Burgers é não-linearmente autoadjunta e não é quase autoadjunta.

Agora vejamos a definição clássica de operador adjunto para um operador diferencial conforme [33].

Definição 2.5: Seja $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert formado por todas as funções $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de quadrado integrável, com o produto interno entre u e v definido por

$$< u, v >:= \int_{\mathbb{R}^m} u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Seja $\mathbf{L} : \mathcal{D}(\mathbf{L}) \to \mathcal{H}$ um operador cujo domínio $\mathcal{D}(\mathbf{L}) \subseteq \mathcal{H}$ é um subespaço linear denso em $\mathcal{H}$. Definimos o operador adjunto como o operador $\mathbf{L}^* : \mathcal{D}(\mathbf{L}^*) \to \mathcal{H}$ satisfazendo a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{L}[u(\mathbf{x})]\, v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^m} u(\mathbf{x})\, \mathbf{L}^*[v(\mathbf{x})]\, d\mathbf{x},$$

para todas as funções $u \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$ e $v \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^*)$.

O operador $\mathbf{L}$ é chamado de autoadjunto quando $\mathbf{L}^* = \mathbf{L}$.

Seja $\mathbf{L}$ o operador diferencial linear de ordem n, um número inteiro positivo, definido por

$$\mathbf{L}[u] := c\, u + b^i\, u_i + a^{ij}\, u_{ij} + \cdots + a^{i_1 \cdots i_n}\, u_{i_1 \cdots i_n}, \tag{2.8}$$

onde as somas obedecem a notação de Einstein[3], e as funções reais c, b^i, $a^{ij}, \cdots, a^{i_1 \cdots i_n}$ são funções diferenciáveis da variável $\mathbf{x}$ até a ordem n, com ao menos uma das funções $a^{i_1 \cdots i_n}$ não-nula. Observamos que os índices variam conforme $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq m$ para todo $1 \leq l \leq n$.

Um dos primeiros resultados da teoria de Ibragimov garante que a equação adjunta para uma equação diferencial linear coincide com a sua adjunta clássica. Para demonstrá-lo consideramos os lemas seguintes:

Lema 2.1: Sejam u, $v : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis arbitrárias e n um número inteiro positivo. Então são verdadeiras as relações seguintes:

$$\begin{aligned}
\sum v\, u_{i_1 \cdots i_n} &= \sum \mathcal{D}_{i_1} \left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} v_{i_2 \cdots i_{n-s+1}}\, u_{i_{n-s+2} \cdots i_n} \right) + (-1)^n v_{i_1 \cdots i_n}\, u \quad \text{se } n \text{ é ímpar}, \\
\sum v\, u_{i_1 \cdots i_n} &= \sum \mathcal{D}_{i_1} \left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s} v_{i_2 \cdots i_{n-s+1}}\, u_{i_{n-s+2} \cdots i_n} \right) + (-1)^n v_{i_1 \cdots i_n}\, u \quad \text{se } n \text{ é par},
\end{aligned} \tag{2.9}$$

[3]se o mesmo índice aparece exatamente duas vezes em algum termo monomial, uma vez como índice superior e outra como índice inferior, então devemos somar o monômio sobre todos os valores possíveis daquele índice.

nas quais a soma é sobre todos os índices $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n \leq m$, e convencionamos que $v_{i_2\cdots i_n}\, u_{i_{n+1}i_n} := v_{i_2\cdots i_n}\, u$, $v_{i_2 i_1}\, u_{i_2\cdots i_n} := v\, u_{i_2\cdots i_n}$, $v_{i_2\cdots i_{n-1}}\, u_{i_n i_n} := v_{i_2\cdots i_{n-1}}\, u_{i_n}$, e $v_{i_2 i_2}\, u_{i_3\cdots i_n} := v_{i_2}\, u_{i_3\cdots i_n}$ quando o índice mudo s varia entre 1 e n.

Demonstração: As relações são consequências da regra da derivada do produto de funções diferenciáveis e do Príncipio de Indução Finita. ❖

Lema 2.2: [4] Considere os operadores diferenciais $\mathcal{D}_k$, $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_l}}$ com $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_l \leq m$ para todos $2 \leq l \leq n$, e inteiros positivos n, m, k. Então são verdadeiras as relações seguintes:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\,\mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_k\,\frac{\partial}{\partial u},\\
\mathcal{D}_i\,\frac{\partial}{\partial u_i}\,\mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_k\,\frac{\partial}{\partial u} + \mathcal{D}_{ki}\,\frac{\partial}{\partial u_i},\\
\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_l}}\,\mathcal{D}_k &= \delta^k_{i_1}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_2\cdots i_l}} + \mathcal{D}_k\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_l}},\\
\mathcal{D}_{i_1\cdots i_l}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_l}}\,\mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_{ki_2\cdots i_l}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_2\cdots i_l}} + \mathcal{D}_{ki_1\cdots i_l}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_l}},
\end{aligned}
$$

nas quais a soma é sobre todos os índices $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_n \leq m$, convencionamos que $\mathcal{D}_{i_1\cdots i_l} := \mathcal{D}_{i_1}\cdots\mathcal{D}_{i_l}$.

Demonstração: Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\,\mathcal{D}_k &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + u_k\frac{\partial}{\partial u} + v_k\frac{\partial}{\partial v} + u_{kj}\frac{\partial}{\partial u_j} + v_{kj}\frac{\partial}{\partial v_j} + \cdots\right)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial u} + u_k\frac{\partial^2}{\partial u^2} + v_k\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} + u_{kj}\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u} + v_{kj}\frac{\partial^2}{\partial v_j \partial u} + \cdots\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + u_k\frac{\partial}{\partial u} + v_k\frac{\partial}{\partial v} + u_{kj}\frac{\partial}{\partial u_j} + v_{kj}\frac{\partial}{\partial v_j} + \cdots\right)\frac{\partial}{\partial u}\\
&= \mathcal{D}_k\,\frac{\partial}{\partial u},
\end{aligned}
$$

[4] *Lemma 7.1*, [9]. Aqui o apresentamos escrito de forma compacta.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_i}\,\mathcal{D}_k &= \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial u_i} + u_k \frac{\partial^2}{\partial u \partial u_i} + v_k \frac{\partial^2}{\partial v \partial u_i} + u_{kj} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_i} + v_{kj} \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial u_i} + \cdots + \delta_i^k \frac{\partial}{\partial u} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + u_k \frac{\partial}{\partial u} + v_k \frac{\partial}{\partial v} + u_{kj} \frac{\partial}{\partial u_j} + v_{kj} \frac{\partial}{\partial v_j} + \cdots \right) \frac{\partial}{\partial u_i} + \delta_i^k \frac{\partial}{\partial u} \\
&= \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_i} + \delta_i^k \frac{\partial}{\partial u}, \\
\mathcal{D}_i \frac{\partial}{\partial u_i}\,\mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_{ki} \frac{\partial}{\partial u_i} + \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u}.
\end{aligned}
$$

Convencionamos que $\delta_{i_1 \cdots i_l}^{k j_1 \cdots j_{l-1}} = 1$ se $\{k, j_1, \cdots, j_{l-1}\} = \{i_1, \cdots, i_l\}$ e é zero nos outros casos.

Para $l = 2$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}}\,\mathcal{D}_k &= \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial u_{i_1 i_2}} + u_k \frac{\partial^2}{\partial u \partial u_{i_1 i_2}} + v_k \frac{\partial^2}{\partial v \partial u_{i_1 i_2}} + u_{kj} \frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_{i_1 i_2}} + v_{kj} \frac{\partial^2}{\partial v_j \partial u_{i_1 i_2}} + \cdots \\
&+ \quad \delta_{i_1 i_2}^{kj} \frac{\partial}{\partial u_j} \\
&= \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}} + \delta_{i_1}^k \frac{\partial}{\partial u_{i_2}}, \\
\mathcal{D}_{i_1 i_2} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}}\,\mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_{k i_1 i_2} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}} + \mathcal{D}_{k i_2} \frac{\partial}{\partial u_{i_2}}.
\end{aligned}
$$

Para $l = 3$ temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 i_3}}\,\mathcal{D}_k &= \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial u_{i_1 i_2 i_3}} + \cdots + u_{k j_1 j_2} \frac{\partial^2}{\partial u_{j_1 j_2} \partial u_{i_1 i_2 i_3}} + v_{k j_1 j_2} \frac{\partial^2}{\partial v_{j_1 j_2} \partial u_{i_1 i_2 i_3}} + \cdots + \\
&\quad \delta_{i_1 i_2 i_3}^{k j_1 j_2} \frac{\partial}{\partial u_{j_1 j_2}} \\
&= \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 i_3}} + \delta_{i_1}^k \frac{\partial}{\partial u_{i_2 i_3}}, \\
\mathcal{D}_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 i_3}}\,\mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_{k i_1 i_2 i_3} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 i_3}} + \mathcal{D}_{k i_2 i_3} \frac{\partial}{\partial u_{i_2 i_3}}.
\end{aligned}
$$

Finalmente para $3 \leq l \leq n$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_l}}\,\mathcal{D}_k &= \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial u_{i_1 \cdots i_l}} + \cdots + u_{k j_1 \cdots j_{l-1}} \frac{\partial^2}{\partial u_{j_1 \cdots j_{l-1}} \partial u_{i_1 \cdots i_l}} + \cdots + \delta_{i_1 \cdots i_l}^{k j_1 \cdots j_{l-1}} \frac{\partial}{\partial u_{j_1 \cdots j_{l-1}}} \\
&= \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_l}} + \delta_{i_1}^k \frac{\partial}{\partial u_{i_2 \cdots i_l}}, \\
\mathcal{D}_{i_1 \cdots i_l} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_l}}\,\mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_{k i_1 \cdots i_l} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_l}} + \mathcal{D}_{k i_2 \cdots i_l} \frac{\partial}{\partial u_{i_2 \cdots i_l}}.
\end{aligned}
$$

❖

Lema 2.3: [4] Sejam k um número inteiro positivo, $\mathcal{D}_k$ um operador diferencial e $\frac{\delta}{\delta u}$ o operador de Euler-Lagrange. Então é verdadeira a relação seguinte:

$$\frac{\delta}{\delta u}\,\mathcal{D}_k = 0. \tag{2.10}$$

Demonstração: Aplicando o **Lema 2.2** e manipulando os índices obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta u}\,\mathcal{D}_k &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_j\,\frac{\partial}{\partial u_j} + \mathcal{D}_{ij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}} - \cdots + (-1)^n \mathcal{D}_{i_1\cdots i_n}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_n}} + \cdots\right)\mathcal{D}_k\\
&= \mathcal{D}_k\,\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_k\,\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_{kj}\,\frac{\partial}{\partial u_j} + \mathcal{D}_{kj}\frac{\partial}{\partial u_j} + \mathcal{D}_{kij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}} - \cdots + (-1)^n \mathcal{D}_{ki_2\cdots i_n}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_2\cdots i_n}} +\\
&\quad (-1)^n \mathcal{D}_{ki_1\cdots i_n}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_n}} + (-1)^{n+1}\mathcal{D}_{ki_2\cdots i_{n+1}}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_2\cdots i_{n+1}}} +\\
&\quad (-1)^{n+1}\mathcal{D}_{ki_1\cdots i_{n+1}}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_n}} + \cdots\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\delta}{\delta u}\,\mathcal{D}_k \;=\; 0.$$

❖

Proposição 2.1: [5] Considere $\mathbf{L}$ o operador diferencial linear de ordem n definido por (2.8) e a equação diferencial linear $\mathbf{L}[u] = 0$. Então a igualdade seguinte está garantida para todo $v \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^*)$:

$$\mathbf{L}^*[v] = \mathcal{L}^*[v],$$

onde $\mathcal{L}^*[v] = 0$ é a sua equação adjunta conforme a **Definição 1.3**.

[4] *Lemma 7.2*, [9].

[5] Esta é a *Proposition 1.1*, [9], a qual é demonstrada para o caso de k variáveis dependentes. A nossa prova é específica para o caso de uma única variável dependente sendo simplificada pelo uso do **Lema 2.1**.

Demonstração: Sem perda de generalidade, supomos que n seja um número inteiro positivo ímpar e aplicamos a primeira relação do **Lema 2.1** para a função diferencial $v\,\mathbf{L}[u]$. Analogamente se prova para n um número inteiro positivo par. Então obtemos

$$\begin{aligned}
v\,\mathbf{L}[u] &= v\,(c\,u + b^i\,u_i + a^{ij}\,u_{ij} + \cdots + a^{i_1\cdots i_n}\,u_{i_1\cdots i_n}) \\
&= u\,c\,v + \mathcal{D}_i(b^i\,v\,u) - \mathcal{D}_i(b^i\,v)\,u + \mathcal{D}_i(a^{ij}\,v\,u_j - \mathcal{D}_j(a^{ij}\,v)\,u) + \mathcal{D}_{ij}(a^{ij}\,v)\,u \\
&\quad + \cdots + \sum \mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}(a^{i_1\cdots i_n}\,v)_{i_2\cdots i_{n-s+1}}\,u_{i_{n-s+2}\cdots i_n}\right) \\
&\quad +(-1)^n(a^{i_1\cdots i_n}\,v)_{i_1\cdots i_n}\,u \\
&= u\,\left(c\,v - \mathcal{D}_i(b^i\,v) + \mathcal{D}_{ij}(a^{ij}\,v) + \cdots +(-1)^n\mathcal{D}_{i_1\cdots i_n}(a^{i_1\cdots i_n}\,v)\right) \\
&\quad + \sum \mathcal{D}_{i_1}\left(b^{i_1}\,v\,u + a^{i_1 j}\,v\,u_j - \mathcal{D}_j(a^{i_1 j}\,v)\,u\right) \\
&\quad + \cdots + \mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}(a^{i_1\cdots i_n}\,v)_{i_2\cdots i_{n-s+1}}\,u_{i_{n-s+2}\cdots i_n}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$v\,\mathbf{L}[u] \;=\; u\,\mathbf{L}^*[v] + \mathcal{D}_{i_1}C^{i_1}, \tag{2.11}$$

onde o operador diferencial adjunto é definido por

$$\mathbf{L}^*[v] \;:=\; c\,v - \mathcal{D}_i(b^i\,v) + \mathcal{D}_{ij}(a^{ij}\,v) + \cdots + (-1)^n\mathcal{D}_{i_1\cdots i_n}(a^{i_1\cdots i_n}\,v), \tag{2.12}$$

e as funções C^{i_1} são dadas por

$$C^{i_1} \;=\; b^{i_1}\,v\,u + a^{i_1 j}\,v\,u_j - \mathcal{D}_j(a^{i_1 j}\,v)\,u + \cdots + \sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+1}(a^{i_1\cdots i_n}\,v)_{i_2\cdots i_{n-s+1}}\,u_{i_{n-s+2}\cdots i_n}.$$

A função diferencial adjunta para o operador diferencial $\mathbf{L}$ é dada por

$$\mathcal{L}^*[v] := \frac{\delta}{\delta u}[v\,\mathbf{L}[u]],$$

ou seja,

$$\mathcal{L}^*[v] = \frac{\delta}{\delta u}[u\,\mathbf{L}^*[v] + \mathcal{D}_{i_1}C^{i_1}],$$

conforme a relação (2.11).

Como

$$\frac{\delta}{\delta u}[u\,\mathbf{L}^*[v]] = \mathbf{L}^*[v],$$

e pelo **Lema 2.3** segue que

$$\frac{\delta}{\delta u}(\mathcal{D}_{i_1} C^{i_1}) = 0,$$

então

$$\mathcal{L}^*[v] = \mathbf{L}^*[v].$$

Portanto, a Proposição está provada. ❖

O fato da equação do calor (veja o **Exemplo 2.1**) ser uma equação não-linearmente autoadjunta decorre do resultado seguinte, o qual é verdadeiro para todas as equações diferenciais lineares.

Proposição 2.2: [6] Considere $\mathbf{L}$ o operador diferencial linear de ordem n definido por (2.8) e a equação diferencial linear $\mathbf{L}[u] = 0$. Então ela é uma equação não-linearmente autoadjunta.

Demonstração: Como o operador diferencial adjunto

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^*[v] &= c\,v - \mathcal{D}_i(b^i\,v) + \mathcal{D}_{ij}(a^{ij}\,v) + \cdots + (-1)^n \mathcal{D}_{i_1\cdots i_n}(a^{i_1\cdots i_n}\,v)\\
&:= c^0\,v + c^i\,v_i + c^{ij}\,v_{ij} + \cdots + c^{i_1\cdots i_n}\,v_{i_1\cdots i_n}
\end{aligned}$$

é independente da variável u, substituindo-o na relação (2.7)

$$\mathbf{L}^*|_{v=\varphi(\mathbf{x},u)} = \lambda\,\mathbf{L},$$

para obtermos as equações determinantes de autoadjunticidade não-linear:

$$\begin{array}{lrcl}
u_{i_1\cdots i_n}: & (-1)^n\,a^{i_1\cdots i_n}\,\varphi_u & = & \lambda\,a^{i_1\cdots i_n},\\
\vdots & \vdots & & \\
\mathbf{1}: & c^0\,\varphi + c^i\,\varphi_i + c^{ij}\,\varphi_{ij} + \cdots + c^{i_1\cdots i_n}\,\varphi_{i_1\cdots i_n} & = & \lambda\,c\,u.
\end{array}$$

[6]Esta é a *Proposition 3.2*, [9].

Supondo, sem perda de generalidade, que a equação diferencial adjunta admita uma solução não-nula $v = \varphi(\mathbf{x})$, tomamos $\lambda = (-1)^n \varphi_u$ (uma vez que $a^{j_1 \cdots j_n} \neq 0$ para certos índices $j_1, \cdots, j_n$). Daí φ satisfaz todas as equações determinantes; já que todas elas, exceto a última, envolvem φ_u ou derivadas parciais de φ_u em suas parcelas. Portanto segue a autoadjunticidade não-linear da equação diferencial linear. ❖

O fato da equação de Burgers (veja o **Exemplo 2.2**) ser uma equação não-linearmente autoadjunta decorre do resultado seguinte:

Proposição 2.3: [7] Considere a equação diferencial $\mathcal{F}[u] = 0$. Então ela é uma equação não-linearmente autoadjunta se, e somente se, ela for estritamente autoadjunta quando reescrita na forma

$$\mu(\mathbf{x}, u)\, \mathcal{F}[u] = 0$$

para algum multiplicador $\mu \neq 0$ conveniente.

Demonstração: A condição de ser estritamente autoadjunta para a equação

$$\mu(\mathbf{x}, u)\, \mathcal{F}[u] = 0 \qquad \text{é dada por} \qquad \frac{\delta}{\delta u}(w\, \mu\, \mathcal{F})\Big|_{w=u} = \tilde{\lambda}\, \mathcal{F},$$

onde w é a variável adjunta e $\tilde{\lambda} = \lambda_1\, \mu$ para algum coeficiente λ_1. Para qualquer solução u de $\mathcal{F}[u] = 0$ temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} - \cdots \right)(w\, \mu\, \mathcal{F}) \;&=\; w\, \frac{\partial \mu}{\partial u}\, \mathcal{F} + w\, \mu\, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \mathcal{D}_i \left(w\, \mu\, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_i} \right) \\ &+\; \mathcal{D}_{ij}(w\, \mu\, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{ij}}) - \cdots \\ &=\; w\, \frac{\partial \mu}{\partial u}\, \mathcal{F} + \frac{\delta}{\delta u}(v\, \mathcal{F}), \end{aligned}$$

com $v = w\, \mu(\mathbf{x}, u)$ a nova variável adjunta.

Suponhamos que a equação diferencial $\mathcal{F}[u] = 0$ seja não-linearmente autoadjunta. Então a relação anterior implica que a condição de ser estritamente autoadjunta está satisfeita tomando $\mu(\mathbf{x}, u) = \frac{\varphi(\mathbf{x}, u)}{u}$ e $\tilde{\lambda} = \lambda + u\, \frac{\partial \mu}{\partial u}$.

---

[7] *Theorem 3.1*, [9].

Reciprocamente, suponhamos que a equação $\mu(\mathbf{x}, u)\,\mathcal{F}[u] = 0$ seja estritamente autoadjunta, então a equação $\mathcal{F}[u] = 0$ torna-se não-linearmente autoadjunta tomando $\varphi(\mathbf{x}, u) = u\,\mu(\mathbf{x}, u)$ e $\lambda = \tilde{\lambda} - u\,\frac{\partial \mu}{\partial u}$. ❖

2.2 A identidade de Noether

No estudo de equações diferenciais o conceito de leis de conservação, o qual é uma formulação matemática das familiares leis da física de conservação de energia, conservação de momento linear, etc, têm um papel importante na determinação de estimativas *a priori* e análise das propriedades básicas das soluções.

Em 1918, Emmy Noether provou um resultado fundamental para as equações que surgem de um príncipio variacional. Tal resultado nos diz que cada lei de conservação vem de uma correspondente propriedade de simetria da equação. Por exemplo, a invariância de um príncipio variacional, isto é, do funcional de ação, sob um grupo de translações no tempo implica a conservação de energia para as soluções das equações de Euler-Lagrange associadas, e a invariância sob um grupo de translações espaciais implica a conservação do momento linear.

A seguir desenvolvemos a teoria de Noether conforme a perspectiva da nossa proposta de tese, para resultados mais gerais recomendamos o livro fundamental de P. Olver [4], e as teses em português [34], [35].

Começamos com algumas definições básicas, depois apresentamos a Identidade de Noether e o Teorema de Noether. As leis de conservação para uma equação diferencial são expressões de divergência conforme a definição seguinte:

Definição 2.6: Dada uma equação diferencial $\mathcal{F}[u] = 0$, uma lei de conservação para a equação é uma expressão na forma de divergência

$$Div(C) = \mathcal{D}_i C^i,$$

para alguma função vetorial $C(\mathbf{x}, u^{(n)}) = (C^1, \cdots, C^m)$, chamada de vetor conservado, tal que a divergência se anula sobre todas as soluções $u = f(\mathbf{x})$ da equação diferencial dada. O símbolo $u^{(n)}$ representa o conjunto formado pela variável dependente u e pelas suas derivadas parciais até uma certa ordem n, onde n é um número inteiro positivo.

Quando $C(\mathbf{x}, u^{(n)}) \equiv 0$ para todas as soluções da equação diferencial, dizemos que a lei de conservação é trivial do primeiro tipo.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.3: Considere a equação de onda unidimensional escrita na forma de um sistema de duas equações evolutivas de primeira ordem:

$$
\begin{aligned}
u_t &= v_x, \\
v_t &= u_x.
\end{aligned}
$$

Considere os vetores conservados dados por:

$$
\begin{aligned}
C &= \left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2, -u_t u_x\right), \\
\tilde{C} &= \left(\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}u_x^2, -v_x u_x\right), \\
B &= \left(\frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}v_x^2, v_x u_x - u_t u_x\right).
\end{aligned}
$$

As expressões seguintes são leis de conservação:

$$
\begin{aligned}
Div(C) &= \mathcal{D}_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) - \mathcal{D}_x(u_t u_x) \\
&= u_t u_{tt} + u_x u_{xt} - (u_{tx} u_x + u_t u_{xx}) \\
&= u_t u_{tt} - u_t u_{xx} \\
&= 0, \\
Div(\tilde{C}) &= \mathcal{D}_t\left(\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) - \mathcal{D}_x(v_x u_x) \\
&= 0, \\
Div(B) &= \mathcal{D}_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}v_x^2\right) + \mathcal{D}_x(v_x u_x - u_t u_x) \\
&= \mathcal{D}_t 0 + \mathcal{D}_x 0 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

sobre as soluções do sistema. Notemos que $Div(B) = 0$ é uma lei de conservação trivial do primeiro tipo.

Definição 2.7: Um segundo tipo de trivialidade ocorre quando a identidade $\mathcal{D}_i C^i = 0$ é válida para qualquer função $u = f(\mathbf{x})$, independentemente dela ser solução de uma equação diferencial, tal divergência é chamada de trivial do segundo tipo.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.4: A divergência $\mathcal{D}_t(u_x) - \mathcal{D}_x(u_t) = 0$ é satisfeita por qualquer função $u = f(t, x)$ duas vezes diferenciável.

Exemplo 2.5: A expressão $\mathcal{D}_t C^1 + \mathcal{D}_x C^2 + \mathcal{D}_y C^3 = 0$ é uma divergência trivial do segundo tipo se, e só se, C for um campo vetorial rotacional, $C = rot(Q)$ com

$$Q = (Q_1, Q_2, Q_3),\ Q_1 = Q_1(t, x, y, u),\ Q_2 = Q_2(t, x, y, u),\ Q_3 = Q_3(t, x, y, u),$$
$$C^1 = \mathcal{D}_x Q_3 - \mathcal{D}_y Q_2,\ C^2 = -\mathcal{D}_t Q_3 + \mathcal{D}_y Q_1,\ C^3 = \mathcal{D}_t Q_2 - \mathcal{D}_x Q_1.$$

Definição 2.8: Dizemos que uma lei de conservação é trivial quando ela for uma combinação linear de leis de conservação dos dois tipos acima. Duas leis de conservação são equivalentes se elas diferem por uma lei de conservação trivial.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.6: No **Exemplo 2.3** temos

$$Div(C) - Div(\tilde{C}) = \mathcal{D}_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}v_x^2\right) + \mathcal{D}_x(v_x u_x - u_t u_x) = Div(B),$$

ou seja, as leis de conservação determinadas por C e $\tilde{C}$ são equivalentes.

A identidade seguinte é de fundamental importância na teoria de Noether e de Ibragimov, sendo válida para qualquer operador diferencial, não necessariamente gerador infinitesimal. A origem de tal identidade se encontra em [3] e aparece explicitamente em [36] e depois em [37] (mas não está demonstrada com rigor). Uma prova é dada em [38], devido a sua importância. Apresentaremos a nossa versão para tal demonstração.

Proposição 2.4 (**Identidade de Noether):** Considere o operador

$$X = \xi^i(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_\nu(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial u^\nu},$$

e sua correspondente característica $W = (W_1, \cdots, W_p)$, $W_\nu = \eta_\nu - \xi^i\, u_i^\nu$ e $X^{(n)}$ a sua n-ésima extensão infinitesimal, $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\mathbf{x}, u^{(n)}]$ uma função diferencial arbitrária definida sobre $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^p$, então existe uma função vetorial $C_n(\mathbf{x}, u^{(n)}) = (C^1, \cdots, C^m)$ tal que

$$X^{(n)}(\mathcal{L}) + Div(\xi)\,\mathcal{L} = W_\nu\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u^\nu} + Div(C_n),$$

onde

$$Div(\xi) = \mathcal{D}_i\xi^i,$$

$$\begin{aligned}
C^i \;&=\; \xi^i\,\mathcal{L} + W_\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i^\nu} - \mathcal{D}_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\nu} + \mathcal{D}_{jk}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\nu} + \cdots + (-1)^{n+1}\mathcal{D}_{i_2\cdots i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_n}^\nu}\right]\\
&+\; (\mathcal{D}_jW_\nu)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}^\nu} - \mathcal{D}_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\nu} + \mathcal{D}_{kl}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}^\nu} + \cdots + (-1)^{n}\mathcal{D}_{i_3\cdots i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{iji_3\cdots i_n}^\nu}\right]\\
&+\; (\mathcal{D}_{jk}W_\nu)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}^\nu} - \mathcal{D}_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}^\nu} + \mathcal{D}_{ls}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijkls}^\nu} + \cdots + (-1)^{n+1}\mathcal{D}_{i_4\cdots i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijki_4\cdots i_n}^\nu}\right]\\
&+\; \cdots + (\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n-1}}W_\nu)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_{n-1}}^\nu} - \mathcal{D}_{i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_n}^\nu}\right] + (\mathcal{D}_{i_2\cdots i_n}W_\nu)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_n}^\nu}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Demonstração: O n-ésimo gerador infinitesimal estendido é dado conforme (**Theorem 2.36**, [4], página 110) por

$$\begin{aligned}
X^{(n)} \;&=\; \xi^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_\nu\,\frac{\partial}{\partial u^\nu} + \eta_\nu^{i_1\cdots i_k}\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}^\nu}\\
&=\; \xi^i\,\frac{\partial}{\partial x^i} + (W_\nu + \xi^i\,u_i^\nu)\frac{\partial}{\partial u^\nu} + (\mathcal{D}_{i_1\cdots i_k}W_\nu + \xi^i\,u_{i_1\cdots i_k i}^\nu)\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}^\nu}\\
&=\; \xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\nu\,\frac{\partial}{\partial u^\nu} + u_{i_1\cdots i_k i}^\nu\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}^\nu}\right) + W_\nu\,\frac{\partial}{\partial u^\nu} + \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k}W_\nu\,\frac{\partial}{\partial u_{i_1\cdots i_k}^\nu}\\
&=\; \xi^i\,\mathcal{D}_i + X_W^{(n)},
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde

$$X_W^{(n)} \;=\; W_\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu} + \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} W_\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}}.$$

Podemos reescrever tal operador como

$$\begin{aligned} X_W^{(n)} &= W_\nu \left(\frac{\partial}{\partial u^\nu} + (-1)^k \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} \right) + \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} W_\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} + (-1)^{k+1} W_\nu \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} \\ &= W_\nu \frac{\delta}{\delta u^\nu} + \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} W_\nu \frac{\partial}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} + (-1)^{k+1} W_\nu \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}}, \end{aligned}$$

onde $\frac{\delta}{\delta u^\nu}$ é o operador de Euler-Lagrange relativo à variável u^ν.

Então temos

$$\begin{aligned} X^{(n)}(\mathcal{L}) + Div(\xi)\,\mathcal{L} &= \xi^i\,\mathcal{D}_i(\mathcal{L}) + X_W^{(n)}(\mathcal{L}) + Div(\xi)\,\mathcal{L} \\ &= Div(\xi\,\mathcal{L}) + X_W^{(n)}(\mathcal{L}) \\ &= Div(\xi\,\mathcal{L}) + W_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\nu} + \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} + (-1)^{k+1} W_\nu\, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}}. \end{aligned}$$

Agora basta provarmos que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} + (-1)^{k+1} W_\nu\, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} = Div(C_n - \xi\,\mathcal{L}), \qquad (2.15)$$

onde C_n é dado por (2.13).

Aplicando o Príncipio de Indução Finita sobre n obtemos:

$$\mathcal{D}_i W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} + W_\nu\,\mathcal{D}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} = \mathcal{D}_i \left(W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} \right),$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_i W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} + W_\nu\,\mathcal{D}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} + \mathcal{D}_i\mathcal{D}_j W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} - W_\nu\,\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} = \\ &\mathcal{D}_i \left(W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} \right) + \mathcal{D}_i \left(\mathcal{D}_j W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} \right) - \mathcal{D}_j W_\nu\,\mathcal{D}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} - W_\nu\,\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} = \\ &\mathcal{D}_i \left(W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} + \mathcal{D}_j W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} \right) - \mathcal{D}_j \left(W_\nu\,\mathcal{D}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} \right) + W_\nu\,\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} - W_\nu\,\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} = \\ &\mathcal{D}_i \left[W_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_i} - \mathcal{D}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} \right) + \mathcal{D}_j W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ij}} \right]. \end{aligned}$$

Assim a sentença (2.15) é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$.

Agora vejamos que a sentença (2.15) é verdadeira para $n+1$ sempre que ela o for para $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} + (-1)^{k+1} W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_k}} &= Div(C_n - \xi\, \mathcal{L}) + \mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} \\
&+ (-1)^{n+2}\, W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}},
\end{aligned}$$

C_n é dado pela hipótese de indução, válida para $n > 1$, e

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} + (-1)^{n+2}\, W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} = \\
&\mathcal{D}_{i_1} \left(\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} \right) - \mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}} W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} + (-1)^{n+2}\, W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}.
\end{aligned}$$

Aplicando o **Lema 2.1** com $u := W_\nu$ e $v := \mathcal{D}_{i_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}$, sem perda de generalidade assumimos que n seja um inteiro positivo ímpar, analogamente podemos provar para n um inteiro positivo par, então temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}} W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} &= \mathcal{D}_{i_{n+1}} \left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1-s}} W_\nu \, \mathcal{D}_{i_{n+2-s}\cdots i_n i_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} \right) \\
&+ (-1)^n \, W_\nu \, \mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1} i_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}.
\end{aligned}$$

Continuando os cálculos,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} + (-1)^{n+2}\, W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} = \\
&\mathcal{D}_{i_1} \left(\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}} W_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} \right) - \mathcal{D}_{i_{n+1}} \left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} \mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1-s}} W_\nu \, \mathcal{D}_{i_{n+2-s}\cdots i_n i_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} \right) \\
&+ (-1)^{n+1}\, W_\nu \, \mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1} i_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} + (-1)^{n+2}\, W_\nu \, \mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}} =
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{i_1}\left(\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}W_\nu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1-s}}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_{n+2-s}\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)+$$
$$(-1)^{n+1}\left(W_\nu\,\mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\mathcal{D}_{i_1}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)+$$
$$(-1)^{n+2}\,\mathcal{D}_{i_1}\left(W_\nu\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)=$$
$$\mathcal{D}_{i_1}\left(\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}W_\nu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\sum_{s=1}^{n}(-1)^s\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1-s}}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_{n+2-s}\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)+$$
$$\mathcal{D}_{i_1}\left((-1)^{n+1}\,W_\nu\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+(-1)^{n+2}\,W_\nu\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)=$$
$$\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1-s}}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_{n+2-s}\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)=$$
$$\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{s=1}^{n+1}(-1)^{s+1}\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+2-s}}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_{n+3-s}\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right).$$

Finalmente, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n+1}\mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}}W_\nu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+(-1)^{k+1}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_1\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}=$$
$$Div(C_n-\xi\,\mathcal{L})+\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{s=1}^{n+1}(-1)^{s+1}\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+2-s}}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_{n+3-s}\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)=$$
$$\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{r=1}^{n}\mathcal{D}_{i_2\cdots i_r}W_\nu\,\sum_{s=r}^{n}(-1)^{s-r}\mathcal{D}_{i_{r+1}\cdots i_s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ii_2\cdots i_s}}\right)+$$
$$\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{s=1}^{n+1}(-1)^{s+1}\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+2-s}}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_{n+3-s}\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)=$$
$$\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{r=1}^{n}\mathcal{D}_{i_2\cdots i_r}W_\nu\,\sum_{s=r}^{n}(-1)^{s-r}\mathcal{D}_{i_{r+1}\cdots i_s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ii_2\cdots i_s}}+\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}W_\nu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\right.$$
$$(-1)\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_n}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n-1}}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_n i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\cdots+$$
$$(-1)^n\,\mathcal{D}_{i_2 i_3}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_4\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+(-1)^{n+1}\,\mathcal{D}_{i_2}W_\nu\,\mathcal{D}_{i_3\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+$$
$$\left.(-1)^{n+2}\,W_\nu\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)=$$

$$
\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{r=1}^{n}\mathcal{D}_{i_2\cdots i_r}W_\nu\sum_{s=r}^{n}(-1)^{s-r}\mathcal{D}_{i_{r+1}\cdots i_s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ii_2\cdots i_s}}+W_\nu\,(-1)^{n+1-1}\,\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\right.
$$

$$
\mathcal{D}_{i_2}W_\nu\,(-1)^{n+1-2}\,\mathcal{D}_{i_3\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\mathcal{D}_{i_2i_3}W_\nu\,(-1)^{n+1-3}\,\mathcal{D}_{i_4\cdots i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\cdots+
$$

$$
\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n-1}}W_\nu\,(-1)^{n+1-n+1}\,\mathcal{D}_{i_ni_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+\mathcal{D}_{i_2\cdots i_n}W_\nu\,(-1)^{n+1-n}\,\mathcal{D}_{i_{n+1}}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}+
$$

$$
\left.\mathcal{D}_{i_2\cdots i_{n+1}}W_\nu\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{i_1\cdots i_{n+1}}}\right)=
$$

$$
\mathcal{D}_{i_1}\left(\sum_{r=1}^{n+1}\mathcal{D}_{i_2\cdots i_r}W_\nu\sum_{s=r}^{n+1}(-1)^{s-r}\mathcal{D}_{i_{r+1}\cdots i_s}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^\nu_{ii_2\cdots i_s}}\right)=Div(C_{n+1}-\xi\,\mathcal{L}).
$$

Portanto, segue do Príncipio de Indução o resultado que gostaríamos de obter. ❖

Enunciamos o Teorema de Noether, conforme [4]. Primeiro definimos as simetrias variacionais como o seguinte:

Definição 2.9: Dizemos que um gerador infinitesimal X é um gerador de simetria variacional para um problema variacional com a Lagrangeana $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\mathbf{x},u^{(n)})$ se a seguinte identidade é satisfeita:

$$
X^{(n)}(\mathcal{L})+Div(\xi)\,\mathcal{L}=0.
$$

Teorema 2.1: [11][Teorema de Noether] Considere G um grupo de simetrias variacionais para o problema variacional com a Lagrangeana $\mathcal{L}=\mathcal{L}[\mathbf{x},u^{(n)}]$. Dado um gerador infinitesimal variacional

$$
X=\xi^i(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial x^i}+\eta_\nu(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial u^\nu},
$$

e sua correspondente característica

$$
W_\nu=\eta_\nu-\xi^i\,u^\nu_i.
$$

Então existe uma lei de conservação para a respectiva equação de Euler-Lagrange, ou seja, existe um vetor conservado $C(\mathbf{x},u^{(n)})=(C^1,...,C^m)$, dado conforme (2.13) tal

[11] *Theorem 4.29*, [4], página 272.

que sua divergência $Div(C)$ se anula quando $u = f(\mathbf{x})$ for solução da equação de Euler-Lagrange.

Demonstração: Com a Identidade de Noether em mãos a prova é direta. Segue do critério infinitesimal de invariância (**Theorem 4.12**, página 253, [4]), ou da **Definição 2.9** que

$$0 \;=\; X^{(n)}(\mathcal{L}) + Div(\xi)\,\mathcal{L} = W_\nu \,\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\nu} + Div(C).$$

Como a equação de Euler-Lagrange se anula para todas as soluções do problema variacional, então $Div(C) = 0$. ❖

2.3 O novo teorema sobre leis de conservação

Com o intuito de superar as restrições de aplicabilidade do Teorema de Noether, tais como para as equações do tipo evolutivas, para as equações de ordem ímpar e para as equações de Euler-Lagrange que não tem simetrias variacionais, Ibragimov desenvolveu um método em que podemos associar uma lei de conservação não-local para cada simetria (não necessariamente variacional) de uma equação diferencial.

O primeiro resultado importante da teoria é que qualquer equação diferencial pode ser interpretada como uma das equações de um sistema de equações de Euler-Lagrange para um problema variacional.

Proposição 2.5: [12] Considere $\mathcal{F}[u] = 0$ uma equação diferencial arbitrária e $\mathcal{F}^*[u, v] = 0$ sua equação diferencial adjunta. Então o sistema de equações diferenciais $\mathcal{F}[u] = 0$ e $\mathcal{F}^*[u, v] = 0$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange para o problema variacional com a função Lagrangeana formal $\mathcal{L} = v\,\mathcal{F}[u]$.

Demonstração: De fato, as derivadas variacionais de (2.2) relativas às variáveis u e v

[12] *Theorem 3.2*, [6], página 319.

são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v} &= \left(\frac{\partial}{\partial v} - \mathcal{D}_t\frac{\partial}{\partial v_t} - \mathcal{D}_x\frac{\partial}{\partial v_x} - \mathcal{D}_y\frac{\partial}{\partial v_y} + ...\right)(v\mathcal{F}[u]) = \mathcal{F}[u],\\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - \mathcal{D}_t\frac{\partial}{\partial u_t} - \mathcal{D}_x\frac{\partial}{\partial u_x} - \mathcal{D}_y\frac{\partial}{\partial u_y} + ...\right)(v\mathcal{F}[u]) = \mathcal{F}^*[u,v].\end{aligned}$$

❖

O próximo resultado garante que as simetrias de uma equação geram simetrias variacionais para o sistema de equações de Euler-Lagrange descrito anteriormente.

Proposição 2.6: [13] Considere $\mathcal{F}[u] = 0$ uma equação diferencial e $\mathcal{F}^*[u,v] = 0$ sua equação diferencial adjunta. Dado o gerador infinitesimal

$$X = \xi^i(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial u},$$

para a equação $\mathcal{F}[u] = 0$, então ele determina o seguinte gerador infinitesimal variacional para o sistema de equações $\mathcal{F}[u] = 0$ e $\mathcal{F}^*[u,v] = 0$,

$$Y = \xi^i(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_*(\mathbf{x},u,v)\frac{\partial}{\partial v},$$

para alguma função $\eta_* = \eta_*(\mathbf{x},u,v)$ a ser determinada.

Demonstração: Pelo critério infinitesimal de invariância (**Theorem 2.31**, página 104, [4]) temos

$$X^{(n)}(\mathcal{F}) = \lambda\,\mathcal{F},$$

para algum coeficiente $\lambda = \lambda(\mathbf{x},u)$ a ser determinado. Para que uma extensão infinitesimal da forma

$$Y = \xi^i(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(\mathbf{x},u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_*(\mathbf{x},u,v)\frac{\partial}{\partial v}$$

seja um gerador infinitesimal variacional para o funcional determinado pela Lagrangeana formal $\mathcal{L} = v\,\mathcal{F}[u]$, o critério de invariância variacional (**Theorem 4.12**, página 253, [4]) deve ser satisfeito:

$$Y^{(n)}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}\,\mathcal{D}_i(\xi^i) = 0.$$

[13] *Theorem 3.3*, [6], página 320, o qual é válido para simetrias de Lie, de Lie-Bäcklund e simetrias não-locais. Aqui o apresentamos para simetrias de Lie.

Ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= Y^{(n)}(\mathcal{L}) + Div(\xi)\,\mathcal{L} = X^{(n)}(v\,\mathcal{F}) + (Y - X)(v\,\mathcal{F}) + v\,\mathcal{F}\,Div(\xi)\\
&= v\,X^{(n)}(\mathcal{F}) + \eta_*\,\mathcal{F} + v\,\mathcal{F}\,Div(\xi) = v\,\lambda\,\mathcal{F} + \eta_*\,\mathcal{F} + v\,\mathcal{F}\,Div(\xi)\\
&= [v\,\lambda + \eta_* + v\,Div(\xi)]\mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Assim tomando $\eta_* = -[\lambda + Div(\xi)]v$ na definição do gerador infinitesimal Y, concluímos a demonstração. ❖

Agora enunciamos o NTLC.

Teorema 2.2: [14][**Novo Teorema sobre Leis de Conservação (NTLC)**.] Considere X um gerador infinitesimal de simetrias para a equação diferencial $\mathcal{F}[u] = 0$. Seja $\mathcal{L} = v\,\mathcal{F}[u]$ a Lagrangeana formal e X dado por

$$X = \xi^i(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial u},$$

e sua correspondente característica dada por

$$W = \eta(\mathbf{x}, u) - \xi^i(\mathbf{x}, u)u_i.$$

Então existe uma lei de conservação não-local para a equação diferencial dada e sua equação diferencial adjunta, ou seja, existe um vetor conservado $C(\mathbf{x}, u^{(n)}, v^{(n)}) = (C^1, ..., C^m)$ tal que

$$Div(C) = 0 \quad \text{quando} \quad \mathcal{F}[u] = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}^*[u, v] = 0,$$

onde

$$\begin{aligned}
C^i &= \xi^i\mathcal{L} + W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_i} - \mathcal{D}_j\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}} + \mathcal{D}_j\mathcal{D}_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} + \cdots + (-1)^{n+1}\mathcal{D}_{i_2}\cdots\mathcal{D}_{i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_n}}\right]\\
&+ (\mathcal{D}_jW)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ij}} - \mathcal{D}_k\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} + \mathcal{D}_k\mathcal{D}_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}} + \cdots + (-1)^{n}\mathcal{D}_{i_3}\cdots\mathcal{D}_{i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{iji_3\cdots i_n}}\right]\\
&+ (\mathcal{D}_j\mathcal{D}_kW)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijk}} - \mathcal{D}_l\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijkl}} + \mathcal{D}_l\mathcal{D}_s\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijkls}} + \cdots + (-1)^{n+1}\mathcal{D}_{i_4}\cdots\mathcal{D}_{i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ijki_4\cdots i_n}}\right]\\
&+ \cdots + (\mathcal{D}_{i_2}\cdots\mathcal{D}_{i_{n-1}}W)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_{n-1}}} - \mathcal{D}_{i_n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_n}}\right] + (\mathcal{D}_{i_2}\cdots\mathcal{D}_{i_n}W)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_n}}.
\end{aligned}$$

[14] *Theorem 3.5*, [6], página 323.

Demonstração: A demonstração é semelhante à do **Teorema de Noether**. Consideramos o sistema de equações diferenciais $\mathcal{F}[u] = 0$ e $\mathcal{F}^*[u, v] = 0$, e seu gerador infinitesimal variacional dado pela **Proposição 2.6**,

$$Y = \xi^i(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(\mathbf{x}, u)\frac{\partial}{\partial u} + \eta_*(\mathbf{x}, u, v)\frac{\partial}{\partial v},$$

para alguma função $\eta_*(\mathbf{x}, u, v)$.

Agora segue da Identidade de Noether e do critério infinitesimal de invariância que

$$0 \;=\; Y^{(n)}(\mathcal{L}) + Div(\xi)\,\mathcal{L} = W\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} + W_2\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta v} + Div(C),$$

com $W_2 = \eta_*(\mathbf{x}, u, v) - \xi^i(\mathbf{x}, u)v_i$.

Assim, $Div(C) = 0$ quando $\mathcal{F}[u] = 0$ e $\mathcal{F}^*[u, v] = 0$. ❖

Observação 2.1: O **Teorema 2.2** é uma consequência do **Teorema 2.1** aplicado à Lagrangeana formal $\mathcal{L} = v\,\mathcal{F}$, e ao gerador infinitesimal variacional Y dado pela **Proposição 2.6**.

Observação 2.2: Uma lei de conservação é chamada de não-local quando ela envolver a variável adjunta (não-local) v.

Uma vez que a demonstração do **Teorema 2.2** é construtiva apresentaremos o

Algoritmo do NTLC:

1) Dado um gerador infinitesimal X calculamos todas as derivadas totais mistas de sua característica W até a ordem $n-1$, onde n é a ordem da equação diferencial $\mathcal{F}[u] = 0$;

2) Reescrevemos a Lagrangeana formal $\mathcal{L} = v\,\mathcal{F}[u]$ na forma simétrica, ou seja, as derivadas parcias mistas da forma u_{ij}, u_{ijk}, etc. são reescritas na forma simétrica: $\frac{1}{2}(u_{ij}+u_{ji})$, $\frac{1}{6}(u_{ijk}+u_{ikj}+u_{jik}+u_{jki}+u_{kji}+u_{kij})$, etc., respectivamente, isto porque em C^i aparecem, por exemplo, $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_1\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i11}}$, $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i12}}$, $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_3\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i13}}$, $\cdots$, $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{i21}}$,

$\mathcal{D}_2\mathcal{D}_2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i22}}, \cdots, \mathcal{D}_3\mathcal{D}_1\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i31}}, \cdots$. Em geral, a derivada $u_{i_1\cdots i_s}$ com $i_1 \leq \cdots \leq i_s$ é substituída por $\frac{s!}{j_1!\cdots j_m!}$ parcelas, a saber, $(u_{i_1\cdots i_s}+u_{i_1\cdots i_s i_{s-1}}+\cdots+u_{i_s\cdots i_1}+u_{i_s\cdots i_2 i_1})$, onde j_l conta o número de repetições de l para cada $1 \leq l \leq m$, e m é o número de variáveis independentes;

3) Calculamos uma solução particular v para a equação adjunta, pesquisando se a equação $\mathcal{F}[u] = 0$ é não-linearmente autoadjunta; depois calculamos as derivadas parciais de $\mathcal{L}$ relativas às variáveis $u_{ii_2\cdots i_s}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_s}}$ para cada s, $1 \leq s \leq n$, que aparecem na equação diferencial, e as derivadas totais mistas destas derivadas parciais de $\mathcal{L}$ até a ordem $n-1$, $\mathcal{D}_{i_{r+1}\cdots i_s}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{ii_2\cdots i_s}}$, para cada r, $1 \leq r \leq n$ e s, $r \leq s \leq n$;

4) Como $\mathcal{L}$ se anula sobre as soluções do sistema $\mathcal{F}[u] = 0$ e $\mathcal{F}^*[u,v] = 0$, ignoramos a parcela $\xi^i\,\mathcal{L}$ em C^i;

5) Finalmente, aplicamos a seguinte regra (conforme [9], páginas 51 e 52) às componentes do vetor conservado:

   Definimos $C_0^1 := C^1$,..., $C_0^m := C^m$, e $C_0 := (C_0^1, ..., C_0^m)$.

   Escrevemos a componente C_0^1 na forma

$$C_0^1 \;\; = \;\; \tilde{C}^1 + \mathcal{D}_2 H_0^2 + \cdots + \mathcal{D}_m H_0^m,$$

   onde $\tilde{C}^1$ é livre das derivadas totais $\mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_m$, se assim for possível, e as funções $H_0^2, ..., H_0^m$ estão definidas no domínio de definição de C^1, trocamos todas as componentes por

$$C_1^1 := \tilde{C}^1, \quad C_1^2 := C_0^2 + \mathcal{D}_1 H_0^2, \quad \cdots, C_1^m := C_0^m + \mathcal{D}_1 H_0^m.$$

   Depois de aplicarmos este procedimento para as $i-1$ primeiras componentes, $2 \leq i \leq m$, escrevemos a componente $C_{i-1}^i := C_{i-2}^i + \mathcal{D}_{i-1} H_{i-1}^i$ (resultante da $i-1$-ésima iteração) na forma

$$C_{i-1}^i \;\; = \;\; \tilde{C}^i + \mathcal{D}_{i+1} H_i^{i+1} + \cdots + \mathcal{D}_m H_i^m,$$

onde $\tilde{C}^i$ é livre, se possível for, das derivadas totais $\mathcal{D}_{i+1}, ..., \mathcal{D}_m$, e as funções $H_i^{i+1}, ..., H_i^m$ estão definidas no domínio de definição de C_{i-1}^i, depois trocamos ela e as componentes seguintes por:

$$C_i^i := \tilde{C}^i, \quad C_i^{i+1} := C_{i-1}^{i+1} + \mathcal{D}_i H_i^{i+1}, \quad \cdots, C_i^m := C_{i-1}^m + \mathcal{D}_i H_i^m.$$

Definimos $C_i := (C_i^1, ..., C_i^m)$ para cada $1 \leq i \leq m$. Então as leis de conservação determinadas por C_{i-1} e C_i são equivalentes, no sentido da **Definição 2.8**, para cada $1 \leq i \leq m$. Portanto, as leis de conservação determinadas por C e C_m são equivalentes.

De fato, para cada $1 \leq i \leq m$ temos que

$$\begin{aligned} Div(C_i - C_{i-1}) &= Div(0, \cdots, 0, -(\mathcal{D}_{i+1} H_i^{i+1} + \cdots + \mathcal{D}_m H_i^m), \mathcal{D}_i H_i^{i+1}, \cdots, \mathcal{D}_i H_i^m) \\ &= -\mathcal{D}_i(\mathcal{D}_{i+1} H_i^{i+1} + \cdots + \mathcal{D}_m H_i^m) + \mathcal{D}_{i+1}\mathcal{D}_i H_i^{i+1} + \cdots + \mathcal{D}_m \mathcal{D}_i H_i^m \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esse procedimento é útil para reduzirmos a ordem das derivadas parciais nas componentes relativas à ordem n da equação.

Capítulo 3

Uma classe de equações evolutivas do primeiro tipo

Neste capítulo provamos o **Teorema 1.1** e seus corolários, além disso calculamos as leis de conservação para as equações do fluxo de Ricci geométrico, do fluxo de Ricci 2D, do fluxo de Ricci modificada e do calor não-linear. Obtemos condições necessárias e suficientes para que a classe de equações evolutivas de segunda ordem quaselineares

$$\mathcal{F} := R\, u_t - A\, u_{xy} - B\, u_x\, u_y - C\, u_{xx} - D\, u_{yy} - E\, u_y - F\, u_x - P\, u_x^2 - Q\, u_y^2 - G = 0, \tag{3.1}$$

seja não-linearmente autoadjunta.

Nas seções seguintes aplicamos o **Teorema 1.1** e o **NTLC** para obter as leis de conservação para as equações supracitadas.

3.1 O primeiro teorema principal

O primeiro teorema principal desta tese nos dá condições necessárias e suficientes para que a classe de equações do primeiro tipo (3.1) seja não-linearmente autoadjunta.

Primeiramente calculamos para à equação (3.1) a sua equação adjunta.

Proposição 3.1: A equação diferencial adjunta à equação (3.1) é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^* := \; & - \quad R\, v_t - A\, v_{xy} - C\, v_{xx} - D\, v_{yy} \\
& + \quad ((B - A_u) u_y + 2\,(P - C_u) u_x + F - A_y - 2\, C_x) v_x \\
& + \quad ((B - A_u) u_x + 2\,(Q - D_u) u_y + E - A_x - 2\, D_y) v_y \\
& + \quad [2\,(B - A_u) u_{xy} + 2\,(P - C_u) u_{xx} + 2(Q - D_u) u_{yy} \\
& + \quad (B_y - A_{yu} + 2\,(P_x - C_{xu})) u_x + (B_x - A_{xu} + 2\,(Q_y - D_{yu})) u_y \\
& + \quad (B_u - A_{uu}) u_x\, u_y + (P_u - C_{uu}) u_x^2 + (Q_u - D_{uu}) u_y^2 \\
& + \quad F_x + E_y - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} - G_u - R_t] v = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Demonstração: De fato, sua Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L} \;=\; v(R\, u_t - A\, u_{xy} - B\, u_x\, u_y - C\, u_{xx} - D\, u_{yy} - E\, u_y - F\, u_x - P\, u_x^2 - Q\, u_y^2 - G).$$

As respectivas derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = v\,(R_u\, u_t - A_u\, u_{xy} - B_u\, u_x u_y - C_u\, u_{xx} - D_u\, u_{yy} - E_u\, u_y - F_u\, u_x - P_u\, u_x^2 - Q_u\, u_y^2 - G_u),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = v\, R, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -v\,(B\, u_y + F + 2\, P\, u_x), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} = -v\,(B\, u_x + E + 2\, Q\, u_y),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -v\, C, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = -v\, D, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -v\, A.$$

As derivadas totais que aparecem no operador de Euler são dadas por

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \;&=\; -v_t\, R - v\,(R_t + R_u\, u_t), \\
-\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \;&=\; v_x\,(B\, u_y + 2\, P\, u_x + F) + v\,(2\, P\, u_{xx} + B\, u_{xy} + B_u\, u_x\, u_y + B_x\, u_y \\
&+\; (F_u + 2\, P_x)\, u_x + 2\, P_u\, u_x^2 + F_x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} &= v_y(B\,u_x + 2\,Q\,u_y + E) + v\,(2\,Q\,u_{yy} + B\,u_{xy} + B_u\,u_x\,u_y + B_y\,u_x \\
&+ (E_u + 2\,Q_y)\,u_y + 2\,Q_u\,u_y^2 + E_y), \\
\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} &= -v_x\,A - v\,(A_x + A_u\,u_x), \\
\mathcal{D}_y \mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} &= -v_{xy}\,A - v_x\,(A_y + A_u\,u_y) - v_y\,(A_x + A_u\,u_x) - v\,(A_u\,u_{xy} + A_{uu}\,u_x\,u_y \\
&+ A_{xu}\,u_y + A_{yu}\,u_x + A_{xy}), \\
\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} &= -v_x\,C - v\,(C_x + C_u\,u_x), \\
\mathcal{D}_x^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} &= -v_{xx}\,C - 2\,v_x\,(C_x + C_u\,u_x) - v\,(C_u\,u_{xx} + 2\,C_{xu}\,u_x + C_{uu}\,u_x^2 + C_{xx}), \\
\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} &= -v_y\,D - v\,(D_y + D_u\,u_y), \\
\mathcal{D}_y^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} &= -v_{yy}\,D - 2\,v_y(D_y + D_u\,u_y) - v\,(D_u\,u_{yy} + 2\,D_{yu}\,u_y + D_{uu}\,u_y^2 + D_{yy}),
\end{aligned}
$$

Substituindo tais expressões na fórmula para a equação adjunta, **Definição 2.3**, obtemos a equação (3.2). ❖

Em segundo lugar determinamos quais são as equações diferenciais que a classe de equações (3.1) deve satisfazer para ser uma equação diferencial não-linearmente autoadjunta.

Proposição 3.2: A equação (3.1) é uma equação diferencial não-linearmente autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi = \varphi(t, x, y, u)$ duas vezes diferenciável com $\varphi \neq 0$ tal que as funções coeficientes satisfaçam as seguintes equações diferenciais:

$$u_t : \; -R\,\varphi_u = \lambda\,R, \tag{3.3}$$

$$u_{xy} : \; -A\,\varphi_u + 2\,(B - A_u)\,\varphi = -\lambda\,A, \tag{3.4}$$

$$u_{xx} : \; -C\,\varphi_u + 2\,(P - C_u)\,\varphi = -\lambda\,C, \tag{3.5}$$

$$u_{yy} : \; -D\,\varphi_u + 2\,(Q - D_u)\,\varphi = -\lambda\,D, \tag{3.6}$$

$$u_x\,u_y : \; -A\,\varphi_{uu} + 2\,(B - A_u)\,\varphi_u + (B_u - A_{uu})\,\varphi = -\lambda\,B, \tag{3.7}$$

$$u_x^2 : \; -C\,\varphi_{uu} + 2\,(P - C_u)\,\varphi_u + (P_u - C_{uu})\,\varphi = -\lambda\,P, \tag{3.8}$$

$$u_y^2: \quad -D\,\varphi_{uu} + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_u + (Q_u - D_{uu})\,\varphi = -\lambda\,Q, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} u_x: \quad & -A\,\varphi_{yu} - 2\,C\,\varphi_{xu} + (B - A_u)\,\varphi_y + 2\,(P - C_u)\,\varphi_x + (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_u \\ & + (B_y - A_{yu} + 2(P_x - C_{xu}))\,\varphi = -\lambda\,F, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} u_y: \quad & -A\,\varphi_{xu} - 2\,D\,\varphi_{yu} + (B - A_u)\,\varphi_x + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_y + (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_u \\ & + (B_x - A_{xu} + 2(Q_y - D_{yu}))\,\varphi = -\lambda\,E, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}: \quad & -R\,\varphi_t - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_x + (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_y \\ & + (F_x + E_y - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} - G_u - R_t)\,\varphi = -\lambda\,G, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para alguma função $\lambda = \lambda(t, x, y, u)$ a ser determinada.

Demonstração: A equação (3.1) é não-linearmente autoadjunta se existir uma função $\varphi(t, x, y, u) \neq 0$ satisfazendo a igualdade

$$\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} = \lambda\,\mathcal{F} \tag{3.13}$$

para algum coeficiente λ a ser determinado.

Substituindo $v = \varphi(t, x, y, u)$ e suas derivadas parciais

$$v_t = \varphi_t + \varphi_u\,u_t,\ v_x = \varphi_x + \varphi_u\,u_x,\ v_y = \varphi_y + \varphi_u\,u_y,\ v_{xx} = \varphi_{xx} + 2\,\varphi_{xu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x^2 + \varphi_u\,u_{xx},$$
$$v_{xy} = \varphi_{xy} + \varphi_{xu}\,u_y + \varphi_{yu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x\,u_y + \varphi_u\,u_{xy}, \quad v_{yy} = \varphi_{yy} + 2\,\varphi_{yu}\,u_y + \varphi_{uu}\,u_y^2 + \varphi_u\,u_{yy},$$

na equação (3.2), **Proposição 3.1**, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} \quad = \quad & -R\,(\varphi_t + \varphi_u\,u_t) - A(\varphi_{xy} + \varphi_{xu}\,u_y + \varphi_{yu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x\,u_y + \varphi_u\,u_{xy}) \\ - \quad & C(\varphi_{xx} + 2\,\varphi_{xu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x^2 + \varphi_u\,u_{xx}) \\ - \quad & D(\varphi_{yy} + 2\,\varphi_{yu}\,u_y + \varphi_{uu}\,u_y^2 + \varphi_u\,u_{yy}) \\ + \quad & ((B - A_u)u_y + 2(P - C_u)u_x + F - A_y - 2\,C_x)(\varphi_x + \varphi_u\,u_x) \\ + \quad & ((B - A_u)u_x + 2(Q - D_u)u_y + E - A_x - 2\,D_y)(\varphi_y + \varphi_u\,u_y) \\ + \quad & [2(B - A_u)u_{xy} + 2(P - C_u)u_{xx} + 2(Q - D_u)u_{yy} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (B_y - A_{yu} + 2(P_x - C_{xu}))u_x + (B_x - A_{xu} + 2(Q_y - D_{yu}))u_y \\
&+ \quad (B_u - A_{uu})u_x\, u_y + (P_u - C_{uu})u_x^2 + (Q_u - D_{uu})u_y^2 \\
&+ \quad F_x + E_y - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} - G_u - R_t]\varphi \\
&= \quad -R\,\varphi_u\, u_t + (-A\,\varphi_u + 2\,(B - A_u)\,\varphi)\, u_{xy} \\
&+ \quad (-A\,\varphi_{uu} + 2\,(B - A_u)\,\varphi_u + (B_u - A_{uu})\,\varphi)\, u_x\, u_y \\
&+ \quad (-C\,\varphi_u + 2\,(P - C_u)\,\varphi)\, u_{xx} + (-D\,\varphi_u + 2\,(Q - D_u)\,\varphi)\, u_{yy} \\
&+ \quad (-A\,\varphi_{xu} - 2\,D\,\varphi_{yu} + (B - A_u)\,\varphi_x + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_y + (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_u \\
&+ \quad (B_x - A_{xu} + 2(Q_y - D_{yu}))\,\varphi)\, u_y \\
&+ \quad (-A\,\varphi_{yu} - 2\,C\,\varphi_{xu} + (B - A_u)\,\varphi_y + 2\,(P - C_u)\,\varphi_x + (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_u \\
&+ \quad (B_y - A_{yu} + 2(P_x - C_{xu}))\,\varphi)\, u_x \\
&+ \quad (-C\,\varphi_{uu} + 2\,(P - C_u)\,\varphi_u + (P_u - C_{uu})\,\varphi)\, u_x^2 \\
&+ \quad (-D\,\varphi_{uu} + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_u + (Q_u - D_{uu})\,\varphi)\, u_y^2 \\
&- \quad R\,\varphi_t - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_x \\
&+ \quad (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_y + (F_x + E_y - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} - G_u - R_t)\,\varphi.
\end{aligned}
$$

Então equacionamos os coeficientes dos monômios u_t, u_{xy}, u_{xx}, u_{yy}, $u_x\, u_y$, u_x^2, u_y^2, u_x, u_y e **1** em ambos os lados da equação (3.13) para obtermos as equações determinantes para a autoadjunticidade da equação (3.1). ❖

Finalmente, tendo estas duas proposições em mãos temos condições de provar nosso primeiro teorema, **Teorema 1.1**, página 9.

Demonstração do Teorema 1.1: Consideramos as equações determinantes dadas na **Proposição 3.2**.

Subtraindo a equação (3.4) multiplicada por C da equação (3.5) multiplicada por A obtemos a equação (1.27).

Subtraindo a equação (3.4) multiplicada por D da equação (3.6) multiplicada por A temos a equação (1.28).

Subtraindo a equação (3.5) multiplicada por D da equação (3.6) multiplicada por C obtemos a equação (1.29).

Da equação (3.3) segue que $\lambda = -\varphi_u$. Substituindo λ na equação (3.12) temos

$$\begin{aligned} 0 &= -(G\,\varphi)_u - R\,\varphi_t - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_x \\ &+ (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_y + (F_x + E_y - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} - R_t)\,\varphi, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (G\,\varphi)_u &= -R\,\varphi_t - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_x \\ &+ (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_y + (F_x + E_y - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} - R_t)\,\varphi, \end{aligned}$$

definimos a função H para ser igual ao lado direito dessa equação, obtendo assim a equação (1.26).

As equações (3.7), (3.8) e (3.9) são consequências das equações (3.4), (3.5) e (3.6), respectivamente.

A equação (3.10)(respec.(3.11)) é consequência das equações (3.3), (3.4) e (3.5), ((3.3), (3.4) e (3.6) respectivamente).

Portanto, a equação (3.1) é não-linearmente autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi(t,x,y,u) \neq 0$ duas vezes diferenciável e uma função $\lambda = \lambda(t,x,y,u)$ satisfazendo as equações (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) e (3.12), ou seja, se, e só se, as funções coeficientes satisfazem as condições (1.26), (1.27), (1.28), (1.29).

Suponhamos que exista uma função $\varphi(t,x,y,u) \neq 0$ duas vezes diferenciável tal que as funções coeficientes satisfaçam as relações (1.26), (1.27), (1.28) e (1.29). Sem perda de generalidade, assumamos que a função A seja não-nula. Então a função φ que satisfaz (1.26) deve ser tal que

$$\varphi = \kappa\,e^{\phi}, \text{ com } \phi = \int (B - A_u)\,A^{-1}du, \kappa = \kappa(t,x,y) \text{ uma função não-nula,}$$

e φ seja uma solução não-nula para a equação (1.23).

Multiplicando a equação (1.23) por C e depois substituindo a equação (1.27) obtemos

$$0 = C\,A\,\varphi_u + C\,(A_u - B)\,\varphi = C\,A\,\varphi_u - A\,(P - C_u)\,\varphi = A\,(C\,\varphi_u - (P - C_u)\,\varphi),$$

ou seja, φ é uma solução não-nula para a equação (1.24).

Multiplicando a equação (1.23) por D e depois substituindo a equação (1.28) obtemos

$$0 = D\,A\,\varphi_u + D\,(A_u - B)\,\varphi = D\,A\,\varphi_u - A\,(Q - D_u)\,\varphi = A\,(D\,\varphi_u - (Q - D_u)\,\varphi),$$

ou seja, φ é uma solução não-nula para a equação (1.25).

Reciprocamente, suponhamos que exista uma função $\varphi(t, x, y, u) \neq 0$ duas vezes diferenciável tal que as funções coeficientes satisfaçam as relações (1.23), (1.24), (1.25) e (1.26).

Subtraindo a equação (1.23) multiplicada por C da equação (1.24) multiplicada por A temos a equação (1.27).

Subtraindo a equação (1.23) multiplicada por D da equação (1.25) multiplicada por A obtemos a equação (1.28).

Subtraindo a equação (1.24) multiplicada por D da equação (1.25) multiplicada por C temos a equação (1.29). ❖

Demonstração do Corolário 1.1: Considerando a definição de quase autoadjunticidade (**Definição 2.4**), o resultado segue do **Teorema 1.1** com $\varphi = \varphi(u)$. ❖

Demonstração do Corolário 1.2: Considerando a definição de autoadjunticidade estrita (**Definição 2.4**), o resultado segue do **Corolário 1.1** com $\varphi = u$. ❖

3.2 A equação do fluxo de Ricci geométrico

A equação do fluxo de Ricci segundo [39] é uma equação evolutiva de segunda ordem não-linear obtida quando as componentes do tensor métrico g_{ij} sobre uma variedade Riemanniana $(\mathcal{M}^m,\, g)$ são deformadas conforme a equação:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -R_{ij} \tag{3.14}$$

onde R_{ij} são as componentes do tensor de Ricci. Sobre uma superfície regular $(\mathcal{M}^2,\, g)$ com a métrica em coordenadas conformes a equação (3.14), (veja a Proposição A.1 no Apêndice), torna-se

$$u_t = e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}), \tag{3.15}$$

a qual é do primeiro tipo (3.1) com as funções coeficientes dadas por

$$C = D = e^{-u}, \qquad R = 1, \qquad A = B = E = F = G = P = Q = 0.$$

Aplicando o **Teorema 1.1** obtemos o **Corolário 1.3**.

Demonstração do Corolário 1.3: Segue das equações (1.24) e (1.25) que

$$\frac{\partial}{\partial u}\big(e^{-u}\,\varphi(t,x,y,u)\big) = 0, \qquad \text{ou seja,} \qquad e^{-u}\,\varphi(t,x,y,u) = \alpha(t,x,y),$$

para alguma função $\alpha = \alpha(t,x,y) \neq 0$. Então $\varphi(t,x,y,u) = e^{u}\,\alpha(t,x,y)$.

De $G = 0$ e (1.26) segue que

$$-\,\alpha_t\,e^{u} - u\,(\alpha_{xx} + \alpha_{yy}) = 0.$$

Daí segue que

$$\alpha_t = 0, \qquad \alpha_{xx} + \alpha_{yy} = 0.$$

Assim, $\varphi(t,x,y,u) = e^{u}\,\alpha(x,y)$ e $\alpha = \alpha(x,y)$ é uma função harmônica não-nula. ❖

Demonstração do Corolário 1.4: Segue do **Corolário 1.3** tomando $\varphi(u) = \alpha\,e^{u}$ com α uma constante não-nula. ❖

Observação 3.1: A equação (3.15) não é estritamente autoadjunta. De fato, segue do **Corolário 1.2** que a equação

$$u_t = \frac{\alpha_0}{u}(u_{xx} + u_{yy}),$$

onde α_0 é um número real, é a única equação estritamente autoadjunta da forma

$$u_t = f(u)(u_{xx} + u_{yy}).$$

Agora vamos calcular algumas leis de conservação para a equação (3.15) aplicando o **Algoritmo do NTLC**, no fim do Capítulo 2. As suas simetrias de Lie estão calculadas em [40] e [10], em termos de duas funções arbitrárias satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann. Nesses trabalhos a seguinte sub-álgebra é discutida:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial t},\ V_2 = \frac{\partial}{\partial x},\ V_3 = \frac{\partial}{\partial y},\ V_4 = t\,\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial u},\ V_5 = y\,\frac{\partial}{\partial x}-x\,\frac{\partial}{\partial y},\ V_6 = x\,\frac{\partial}{\partial x}+y\,\frac{\partial}{\partial y}-2\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

Considerando a variável adjunta $v = e^u\,\alpha(x, y)$ dada na demonstração do **Corolário 1.3**, a Lagrangeana formal é dada por $\mathcal{L} = e^u\,\alpha(u_t - e^{-u}\,u_{xx} - e^{-u}\,u_{yy})$. As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = e^u\,\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -\alpha, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = -\alpha.$$

As derivadas totais que aparecem no vetor conservado são dadas por

$$\mathcal{D}_x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -\alpha_x, \quad \mathcal{D}_y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = -\alpha_y.$$

Seja o gerador infinitesimal geral

$$V = (c_1 + c_4\,t)\,\frac{\partial}{\partial t} + (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,\frac{\partial}{\partial y} + (c_4 - 2\,c_5)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

com c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 constantes arbitrárias.

Então a sua característica é dada por

$$W = c_4 - 2\,c_5 - (c_1 + c_4\,t)\,u_t - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y,$$

e suas derivadas totais por

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_xW &= -c_5\,u_x + c_6\,u_y - (c_1 + c_4\,t)\,u_{xt} - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx} - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xy},\\
\mathcal{D}_yW &= -c_6\,u_x - c_5\,u_y - (c_1 + c_4\,t)\,u_{yt} - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{yy}.
\end{aligned}$$

Daí as componentes do vetor conservado são dadas por

$$\begin{aligned}
C^1 &= W\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\\
&= [c_4 - 2\,c_5 - (c_1 + c_4\,t)\,u_t - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y]\,e^u\,\alpha,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C^2 &= W\left(-\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right) + (\mathcal{D}_x W)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\\
&= (c_4 - 2\,c_5 - (c_1 + c_4\,t)\,u_t - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_x\\
&- (-c_5\,u_x + c_6\,u_y - (c_1 + c_4\,t)\,u_{xt} - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx} - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xy})\,\alpha,\\
C^3 &= W\left(-\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}}\right) + (\mathcal{D}_y W)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}}\\
&= (c_4 - 2\,c_5 - (c_1 + c_4\,t)\,u_t - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_y\\
&- (-c_6\,u_x - c_5\,u_y - (c_1 + c_4\,t)\,u_{yt} - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{yy})\,\alpha.
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,e^u\,\alpha\\
&- (c_1 + c_4\,t)\,(u_{xx} + u_{yy})\,\alpha,\\
C^2 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_x\\
&- (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_x\,u_t + \alpha\,(c_5\,u_x - c_6\,u_y) + \alpha\,(c_1 + c_4\,t)\,u_{xt}\\
&+ \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx} + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xy},\\
C^3 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_y\\
&- (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_y\,u_t + \alpha\,(c_6\,u_x + c_5\,u_y) + \alpha\,(c_1 + c_4\,t)\,u_{yt}\\
&+ \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{yy}.
\end{aligned}
$$

A componente C^1 é simplificada, conforme o passo 5) do **Algoritmo do NTLC**. As parcelas envolvendo derivadas parciais de segunda ordem em x, u_{xx}, são transformadas em derivadas totais em x:

$$
\begin{aligned}
-(c_1 + c_4\,t)\,\alpha\,u_{xx} &= -\mathcal{D}_x[(c_1 + c_4\,t)\,\alpha\,u_x] + (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_x\,u_x\\
&= \mathcal{D}_x[-(c_1 + c_4\,t)\,\alpha\,u_x + (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_x\,u] - (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_{xx}\,u.
\end{aligned}
$$

Depois são transformadas em derivadas totais em t:

$$
\mathcal{D}_t[(c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_x\,u - \alpha\,u_x)] = c_4\,(\alpha_x\,u - \alpha\,u_x) + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_x\,u_t - \alpha\,u_{tx}).
$$

Por fim esta derivada total é somada a componente C^2. Assim as novas componentes C^1 e C^2 (manteremos a mesma notação para as componentes modificadas em todo o texto) tornam-se

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,e^u\,\alpha - (c_1 + c_4\,t)\,u_{yy}\,\alpha \\
&- (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_{xx}\,u, \\
C^2 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_x - (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_x\,u_t \\
&+ \alpha\,(c_5\,u_x - c_6\,u_y) + \alpha\,(c_1 + c_4\,t)\,u_{xt} + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx} \\
&+ \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xy} + c_4\,(\alpha_x\,u - \alpha\,u_x) + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_x\,u_t - \alpha\,u_{tx}) \\
&= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_x \\
&+ \alpha\,((c_5 - c_4)\,u_x - c_6\,u_y) + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx} + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xy}.
\end{aligned}
$$

Agora as parcelas em C^1 que envolvem derivadas parciais de segunda ordem em y, u_{yy}, são transformadas em derivadas totais em y:

$$
\begin{aligned}
-(c_1 + c_4\,t)\,\alpha\,u_{yy} &= -\mathcal{D}_y[(c_1 + c_4\,t)\,\alpha\,u_y] + (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_y\,u_y \\
&= \mathcal{D}_y[(c_1 + c_4\,t)\,\alpha_y\,u - (c_1 + c_4\,t)\,\alpha\,u_y] - (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_{yy}\,u,
\end{aligned}
$$

e transferidas de C^1 para a componente C^3 como derivadas totais em t:

$$
\mathcal{D}_t[(c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,u - \alpha\,u_y)] = c_4\,(\alpha_y\,u - \alpha\,u_y) + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,u_t - \alpha\,u_{ty}).
$$

Então as novas componentes C^1 e C^3 tornam-se

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,e^u\,\alpha \\
&- (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_{xx}\,u - (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_{yy}\,u \\
&= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,e^u\,\alpha,
\end{aligned}
$$

pois $\alpha = \alpha(x, y)$ é uma função harmônica,

$$
\begin{aligned}
C^3 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_y \\
&- (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_y\,u_t + \alpha\,(c_6\,u_x + c_5\,u_y) + \alpha\,(c_1 + c_4\,t)\,u_{yt} \\
&+ \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{yy} \\
&+ c_4\,(\alpha_y\,u - \alpha\,u_y) + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,u_t - \alpha\,u_{ty}) \\
&= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_y + c_4\,\alpha_y\,u \\
&+ \alpha\,(c_6\,u_x + (c_5 - c_4)\,u_y) + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{yy}.
\end{aligned}
$$

Agora a parcela envolvendo derivada parcial de segunda ordem em y, u_{xy}, é transformada em derivada total em y:

$$\alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xy} \;=\; \mathcal{D}_y[\alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_x] - (\alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) + \alpha\,c_5)\,u_x,$$

e transferida de C^2 para a componente C^3 como derivada total em x:

$$\mathcal{D}_x[\alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_x] \;=\; (\alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha\,c_6)\,u_x + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xx}.$$

Logo as novas componentes C^2 e C^3 tornam-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_x \\
&+ \alpha\,((c_5 - c_4)\,u_x - c_6\,u_y) + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx} - (\alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) + \alpha\,c_5)\,u_x \\
&= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_x - (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x \\
&- (\alpha\,c_6 + \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx}, \\
C^3 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,\alpha_y + c_4\,\alpha_y\,u \\
&+ \alpha\,(c_6\,u_x + (c_5 - c_4)\,u_y) + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{yy} \\
&+ (\alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha\,c_6)\,u_x + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_{xx} \\
&= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_y + (\alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y))\,u_x \\
&+ (\alpha\,(c_5 - c_4) - \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} \\
&+ \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}).
\end{aligned}$$

Agora as parcelas em C^3 que envolvem derivadas parciais de segunda ordem mista, u_{yx}, é transformada em derivada total em x:

$$\alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yx} \;=\; \mathcal{D}_x[\alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_y] - (\alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha\,c_5)\,u_y,$$

e é transferida de C^3 para a componente C^2 como derivada total em y:

$$\mathcal{D}_y[\alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_y] \;=\; (\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha\,c_6)\,u_y + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yy}.$$

Daí as novas componentes C^2 e C^3 tornam-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_x - (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x \\
&- (\alpha\,c_6 + \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{xx} \\
&+ (\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha\,c_6)\,u_y + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_{yy} \\
&= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_x - (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x \\
&+ (\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}), \\
C^3 &= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_y + (\alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y))\,u_x \\
&+ (\alpha\,(c_5 - c_4) - \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}) \\
&- (\alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha\,c_5)\,u_y \\
&= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_y - (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y \\
&+ (\alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y))\,u_x + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}).
\end{aligned}$$

Vamos repetir mais uma vez o passo 5) do **Algoritmo do NTLC** para eliminar de C^2 as parcelas envolvendo a derivada u_y. Primeiro transformamos as parcelas envolvendo u_y, em derivadas totais em y:

$$\begin{gathered}
(\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y = \\
\mathcal{D}_y[(\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u] \\
-(\alpha_{yy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,c_6 - \alpha_{xy}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_x\,c_5)\,u,
\end{gathered}$$

depois as transferimos para C^3 como derivada total em x:

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_x[(\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u] = \\
(\alpha_{xy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,c_5 - \alpha_{xx}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) + \alpha_x\,c_6)\,u \\
+(\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x.
\end{gathered}$$

Logo as novas componentes C^2 e C^3 tornam-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_x - (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x \\
&+ \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}) \\
&- (\alpha_{yy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,c_6 - \alpha_{xy}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_x\,c_5)\,u
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_x - (\alpha_{yy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,c_6 - \alpha_{xy}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_x\,c_5)\,u \\
&- (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x \\
&+ \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^3 &= (c_4 - 2\,c_5 + c_4\,u)\,\alpha_y - (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y \\
&+ (\alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y))\,u_x + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}) \\
&+ (\alpha_{xy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,c_5 - \alpha_{xx}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) + \alpha_x\,c_6)\,u \\
&+ (\alpha_y\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_x\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x \\
&= (c_4 - 2\,c_5 + (c_4 + c_5)\,u)\,\alpha_y + (\alpha_{xy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_{xx}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) + \alpha_x\,c_6)\,u \\
&- (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y \\
&+ \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}).
\end{aligned}
$$

Portanto, as componentes simplificadas do vetor conservado são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (c_4 - 2\,c_5 - (c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,u_x - (c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,u_y)\,e^u\,\alpha, \\
C^2 &= (c_4 - 2\,c_5 + (c_4 + c_5)\,u)\,\alpha_x + (\alpha_{xy}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) - \alpha_{yy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,c_6)\,u \\
&- (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_x + \alpha\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}), \\
C^3 &= (c_4 - 2\,c_5 + (c_4 + c_5)\,u)\,\alpha_y + (\alpha_{xy}\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) - \alpha_{xx}\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y) + \alpha_x\,c_6)\,u \\
&- (\alpha\,c_4 + \alpha_x\,(c_2 + c_5\,x + c_6\,y) + \alpha_y\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y))\,u_y + \alpha\,(c_3 - c_6\,x + c_5\,y)\,(u_{xx} + u_{yy}).
\end{aligned}
$$

- Para o gerador V_1, as componentes do vetor conservado C são nulas, o que nos dá uma lei de conservação trivial do primeiro tipo conforme a **Definição 2.6**.
- Para o gerador V_2, as componentes do vetor conservado são

$$C^1 = -\alpha\,e^u\,u_x, \quad C^2 = -\alpha_{yy}\,u - \alpha_x\,u_x + \alpha\,(u_{xx} + u_{yy}), \quad C^3 = \alpha_{xy}\,u - \alpha_x\,u_y.$$

Podemos eliminar de C^2 a parcela envolvendo a derivada u_{yy}, transformando-a em derivada total em y e transferindo-a para C^3 como derivada total em x:

$$\alpha\,u_{yy} = \mathcal{D}_y[\alpha\,u_y] - \alpha_y\,u_y = \mathcal{D}_y[\alpha\,u_y - \alpha_y\,u] + \alpha_{yy}\,u,$$

$$\mathcal{D}_x[\alpha\,u_y - \alpha_y\,u] = \alpha_x\,u_y + \alpha\,u_{xy} - \alpha_{xy}\,u - \alpha_y\,u_x.$$

Portanto, as novas componentes do vetor conservado são

$$C^1 = -\alpha\, e^u\, u_x, \quad C^2 = -\alpha_x\, u_x + \alpha\, u_{xx}, \quad C^3 = -\alpha_y\, u_x + \alpha\, u_{xy}.$$

- Para o gerador V_3, as componentes do vetor conservado são

$$C^1 = -\alpha\, e^u\, u_y, \quad C^2 = \alpha_{xy}\, u - \alpha_y\, u_x, \quad C^3 = -\alpha_{xx}\, u - \alpha_y\, u_y + \alpha\,(u_{xx} + u_{yy}).$$

Podemos eliminar de C^3 a parcela envolvendo a derivada u_{xx}, transformando-a em derivada total em x e transferindo-a para C^2 como derivada total em y:

$$\alpha\, u_{xx} = \mathcal{D}_x[\alpha\, u_x] - \alpha_x\, u_x = \mathcal{D}_x[\alpha\, u_x - \alpha_x\, u] + \alpha_{xx}\, u,$$

$$\mathcal{D}_y[\alpha\, u_x - \alpha_x\, u] = \alpha_y\, u_x + \alpha\, u_{xy} - \alpha_{xy}\, u - \alpha_x\, u_y.$$

Portanto, as novas componentes do vetor conservado são

$$C^1 = -\alpha\, e^u\, u_y, \quad C^2 = -\alpha_x\, u_y + \alpha\, u_{xy}, \quad C^3 = -\alpha_y\, u_y + \alpha\, u_{yy}.$$

- Para o gerador V_4, as componentes do vetor conservado são

$$C^1 = \alpha\, e^u, \quad C^2 = (1+u)\,\alpha_x - \alpha\, u_x, \quad C^3 = (1+u)\,\alpha_y - \alpha\, u_y.$$

- Para o gerador V_5, as componentes do vetor conservado são

$$\begin{aligned} C^1 &= (x\, u_y - y\, u_x)\, e^u\, \alpha, \\ C^2 &= (\alpha_y - \alpha_{xy}\, x - \alpha_{yy}\, y)\, u - (\alpha_x\, y - \alpha_y\, x)\, u_x + \alpha\, y\,(u_{xx} + u_{yy}), \\ C^3 &= (\alpha_{xy}\, y + \alpha_{xx}\, x + \alpha_x)\, u - (\alpha_x\, y - \alpha_y\, x)\, u_y - \alpha\, x\,(u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

- Para o gerador V_6, as componentes do vetor conservado são

$$\begin{aligned} C^1 &= -\alpha\, e^u\,(2 + x\, u_x + y\, u_y), \\ C^2 &= \alpha_x\,(u-2) + (\alpha_{xy}\, y - \alpha_{yy}\, x)\, u - (\alpha_x\, x + \alpha_y\, y)\, u_x + \alpha\, x\,(u_{xx} + u_{yy}), \\ C^3 &= \alpha_y\,(u-2) + (\alpha_{xy}\, x - \alpha_{xx}\, y)\, u - (\alpha_x\, x + \alpha_y\, y)\, u_y + \alpha\, y\,(u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

Portanto, provamos o primeiro corolário do **NTLC**, nesta tese, o **Corolário 1.5**, página 11.

3.3 A equação do fluxo de Ricci 2D

Um dos modelos mais importantes no estudo de buracos negros e na teoria de gravitação quântica está relacionado com as equações do fluxo de Ricci, conforme [41]. Devido as dificuldades que surgem durante a formulação de uma teoria quântica, vários modelos em dimensões menores são considerados. Esses são chamados de modelos mecânicos e os exemplos mais conhecidos são o modelo clássico do campo de Yang-Mills e o modelo 2D para a equação do fluxo de Ricci, [11].

A equação do fluxo de Ricci 2D

$$u_t = \frac{1}{u}\, u_{xy} - \frac{1}{u^2}\, u_x\, u_y, \tag{3.16}$$

é do tipo (3.1) com as funções coeficientes dadas por

$$A = \frac{1}{u}, \qquad B = -\frac{1}{u^2}, \qquad R = 1, \qquad C = D = E = F = G = P = Q = 0.$$

Aplicando o **Teorema 1.1** segue o **Corolário 1.6**.

Demonstração do Corolário 1.6: A equação (1.23) nos dá

$$\varphi\, A_u + \varphi_u\, A = \varphi\, A_u, \quad \text{ou seja,} \quad \varphi = \varphi(t, x, y).$$

Da equação (1.26) e $G = 0$ obtemos

$$\varphi_t + A\, \varphi_{xy} = 0,$$

Daí segue que

$$\varphi_t = 0, \qquad \varphi_{xy} = 0.$$

Assim, $\varphi(x, y) = a(x) + b(y)$ com $a = a(x)$ e $b = b(y)$ funções arbitrárias diferenciáveis, tais que $a(x) + b(y) \neq 0$. ❖

Agora aplicaremos o **Algoritmo do NTLC** para obtermos algumas leis de conservação para a equação (3.16). As suas simetrias de Lie estão calculadas em [11], em termos de duas funções arbitrárias. Uma vez que a sua álgebra de Lie é de dimensão infinita, consideramos a sub-álgebra gerando o setor linear de invariância, conforme [11]:

$$U_1 = t\,\frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial u},\ U_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ U_3 = \frac{\partial}{\partial x},\ U_4 = \frac{\partial}{\partial y},\ U_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} - u\,\frac{\partial}{\partial u},\ U_6 = y\,\frac{\partial}{\partial y} - u\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

Observamos que um gerador infinitesimal do setor linear de invariância é do tipo

$$U = (c_1\,t + c_2)\,\frac{\partial}{\partial t} + (c_3\,x + c_4)\,\frac{\partial}{\partial x} + (c_5\,y + c_6)\,\frac{\partial}{\partial y} + (c_7\,u + c_8)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

onde os c_i são constantes.

Considerando a variável adjunta $v = a(x) + b(y)$ dada na demonstração do **Corolário 1.6**, a Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L} = v\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yx} + \frac{v}{u^2}\,u_x u_y.$$

As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = v, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = \frac{v}{u^2}\,u_y, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} = \frac{v}{u^2}\,u_x, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}.$$

As derivadas totais que aparecem no vetor conservado são dadas por

$$\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -\frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_y, \quad \mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} = -\frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_x.$$

Seja o gerador infinitesimal geral

$$U = (c_1\,t + c_2)\,\frac{\partial}{\partial t} + (c_3 + c_5\,x)\,\frac{\partial}{\partial x} + (c_4 + c_6\,y)\,\frac{\partial}{\partial y} + (c_1 - c_5 - c_6)\,u\,\frac{\partial}{\partial u},$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 são constantes.

A sua característica é

$$W = (c_1 - c_5 - c_6)\,u - (c_1\,t + c_2)\,u_t - (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y,$$

e suas derivadas totais são

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_x W &= -c_5\,u_x + (c_1 - c_5 - c_6)\,u_x - (c_1\,t + c_2)\,u_{xt} - (c_3 + c_5\,x)\,u_{xx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{xy},\\
\mathcal{D}_y W &= -c_6\,u_y + (c_1 - c_5 - c_6)\,u_y - (c_1\,t + c_2)\,u_{yt} - (c_3 + c_5\,x)\,u_{yx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{yy}.
\end{aligned}$$

Então as componentes do vetor conservado são dadas por

$$
\begin{aligned}
C^1 &= W\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\\
&= ((c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y)\,(a+b),\\
C^2 &= W\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x}-\mathcal{D}_y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}}\right)+(\mathcal{D}_yW)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}}\\
&= ((c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y)\left(\frac{v}{u^2}\,u_y+\frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\right.\\
&- \left.\frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_y\right)+((c_1-c_5-2\,c_6)\,u_y-(c_1\,t+c_2)\,u_{yt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{yx}\\
&- (c_4+c_6\,y)\,u_{yy})\left(-\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,((c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y)\frac{1}{u^2}(v\,u_y+v_y\,u)\\
&- \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}((c_1-c_5-2\,c_6)\,u_y-(c_1\,t+c_2)\,u_{yt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{yx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{yy}),\\
C^3 &= W\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y}-\mathcal{D}_x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}}\right)+(\mathcal{D}_xW)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}}\\
&= ((c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y)\left(\frac{v}{u^2}\,u_x+\frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\right.\\
&- \left.\frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_x\right)+((c_1-2\,c_5-c_6)\,u_x-(c_1\,t+c_2)\,u_{xt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{xx}\\
&- (c_4+c_6\,y)\,u_{xy})\left(-\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,((c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y)\frac{1}{u^2}(v\,u_x+v_x\,u)\\
&- \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}((c_1-2\,c_5-c_6)\,u_x-(c_1\,t+c_2)\,u_{xt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{xx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{xy}),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
C^1 &= [(c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y]\,(a+b),\\
C^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}[(c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y]((a+b)\,u_y+v_y\,u)\\
&- \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}[(c_1-c_5-2\,c_6)\,u_y-(c_1\,t+c_2)\,u_{yt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{yx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{yy}],\\
C^3 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}[(c_1-c_5-c_6)\,u-(c_1\,t+c_2)\,u_t-(c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y]((a+b)\,u_x+v_x\,u)\\
&- \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}[(c_1-2\,c_5-c_6)\,u_x-(c_1\,t+c_2)\,u_{xt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{xx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{xy}].
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

- Para o gerador U_1, as componentes do vetor conservado (3.17) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= (u - t\,u_t)\,(a+b),\\
C^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_y + v_y\,u)(u - t\,u_t) - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}(u_y - t\,u_{yt}),\\
C^3 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_x + v_x\,u)(u - t\,u_t) - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}(u_x - t\,u_{xt}).
\end{aligned}$$

Como $u_t = \mathcal{D}_y\left(\frac{u_x}{u}\right) = \mathcal{D}_x\left(\frac{u_y}{u}\right)$, então

$$C^1 = (u - t\,u_t)\,(a+b) = (a+b)\,u - (a+b)\,t\,u_t = (a+b)\,u - \mathcal{D}_y\left(\frac{a\,t}{u}\,u_x\right) - \mathcal{D}_x\left(\frac{b\,t}{u}\,u_y\right).$$

Agora transferimos a derivada total em x, de C^1 para a componente C^2 como derivada total em t:

$$-\mathcal{D}_t\left(\frac{b\,t}{u}\,u_y\right) = -\frac{b}{u}\,u_y - t\,b\left(\frac{u_{ty}}{u} - \frac{u_y\,u_t}{u^2}\right),$$

e a componente C^2 modificada torna-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_y + v_y\,u)(u - t\,u_t) - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}(u_y - t\,u_{yt}) - \frac{b}{u}\,u_y - t\,b\left(\frac{u_{ty}}{u} - \frac{u_y\,u_t}{u^2}\right)\\
&= \frac{v_y}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,t\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u^2}\,t\,u_t\,u_y + \frac{1}{2}\frac{a+b}{u}\,t\,u_{yt} - \frac{b}{u}\,u_y - t\,b\left(\frac{u_{ty}}{u} - \frac{u_y\,u_t}{u^2}\right)\\
&= \frac{v_y}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,t\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{a-b}{u^2}\,t\,u_t\,u_y + \frac{1}{2}\frac{a-b}{u}\,t\,u_{yt} - \frac{b}{u}\,u_y\\
&= \frac{b_y}{2} + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\frac{a-b}{u}\,t\,u_t\right) - \frac{b}{u}\,u_y\\
&= -\frac{b}{u}\,u_y + \mathcal{D}_y\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\frac{a-b}{u}\,t\,u_t\right).
\end{aligned}$$

Depois transferimos a derivada total em y, de C^1 para a componente C^3 como derivada total em t:

$$-\mathcal{D}_t\left(\frac{a\,t}{u}\,u_x\right) = -\frac{a}{u}\,u_x - t\,a\left(\frac{u_{tx}}{u} - \frac{u_x\,u_t}{u^2}\right),$$

e a componente C^3 modificada torna-se

$$\begin{aligned}
C^3 &= \frac{1}{2}\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_x + v_x\,u)(u - t\,u_t) - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}(u_x - t\,u_{xt}) - \frac{a}{u}\,u_x - t\,a\left(\frac{u_{tx}}{u} - \frac{u_x\,u_t}{u^2}\right)\\
&= \frac{v_x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,t\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u^2}\,t\,u_t\,u_x + \frac{1}{2}\frac{a+b}{u}\,t\,u_{xt} - \frac{a}{u}\,u_x - t\,a\left(\frac{u_{tx}}{u} - \frac{u_x\,u_t}{u^2}\right)\\
&= \frac{v_x}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,t\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{b-a}{u^2}\,t\,u_t\,u_x + \frac{1}{2}\frac{b-a}{u}\,t\,u_{xt} - \frac{a}{u}\,u_x\\
&= \frac{a_x}{2} - \frac{a}{u}\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\frac{b-a}{u}\,t\,u_t\right)\\
&= -\frac{a}{u}\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\frac{b-a}{u}\,t\,u_t\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em y, de C^2 para a componente C^3 como derivada total em x:

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{a}{u}\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\frac{b-a}{u}\,t\,u_t\right) + \mathcal{D}_x\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\frac{a-b}{u}\,t\,u_t\right)\\
&= -\frac{a}{u}\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{a}{2}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, transferimos a derivada total em x, de C^3 para a componente C^2 como derivada total em y:

$$C^2 = -\frac{b}{u}\,u_y + \mathcal{D}_y\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{b}{u}\,u_y.$$

Logo, as novas componentes do vetor conservado são

$$C^1 = (a+b)\,u, \quad C^2 = -\frac{b}{u}\,u_y, \quad C^3 = -\frac{a}{u}\,u_x.$$

Notamos que esta lei de conservação foi obtida por Cimpoiasu em [14] através do método direto de construção descrito em [15].

- Para o gerador U_2, as componentes do vetor conservado (3.17) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,u_t,\\
C^2 &= -u_t\left(\frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right) + u_{yt}\left(\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\right),\\
C^3 &= -u_t\left(\frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right) + u_{xt}\left(\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\right).
\end{aligned}$$

Como

$$C^1 \;=\; -(a+b)\,u_t = -\mathcal{D}_y\left(\frac{a}{u}\,u_x\right) - \mathcal{D}_x\left(\frac{b}{u}\,u_y\right),$$

então transferimos a derivada total em x para a componente C^2 como derivada total em t, a componente C^2 modificada torna-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u} + \frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_t + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yt} - b\left(\frac{u_{ty}}{u} - \frac{u_y\,u_t}{u^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}v_y\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}\,(a-b)u_y\,u_t + \frac{1}{2}\,\frac{a-b}{u}\,u_{yt}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_y\left(\frac{a-b}{u}\right)u_t + \frac{1}{2}\,\frac{a-b}{u}\,u_{yt}\\
&= \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,\frac{a-b}{u}\,u_t\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em y, de C^1 para a componente C^3 como derivada total em t, então a componente C^3 modificada torna-se

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u} + \frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_t + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{xt} - a\left(\frac{u_{tx}}{u} - \frac{u_x\,u_t}{u^2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}v_x\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}\,(b-a)u_x\,u_t + \frac{1}{2}\,\frac{b-a}{u}\,u_{xt}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_x\left(\frac{b-a}{u}\right)u_t + \frac{1}{2}\,\frac{b-a}{u}\,u_{xt}\\
&= \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,\frac{b-a}{u}\,u_t\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, transferindo a derivada total em y, de C^2 para a componente C^3 como derivada total em x, obtendo, então, uma lei de conservação trivial do primeiro tipo.

- Para o gerador U_3, as componentes do vetor conservado (3.17) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,u_x,\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_y + v_y\,u)u_x + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx},\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_x + v_x\,u)u_x + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{xx}.
\end{aligned}$$

Como

$$C^1 = -(a+b)\,u_x = -\mathcal{D}_x((a+b)\,u) + v_x\,u,$$

então transferimos a derivada total em x para a componente C^2 como derivada total em t; então a componente C^2 modificada torna-se

$$
\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_x+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx}-(a+b)\,u_t \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_x+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx}-(a+b)\left(\frac{1}{u}\,u_{xy}-\frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\,u_y \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}-\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx} \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{D}_y\left(\frac{a+b}{u}\right)u_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx} \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{D}_y\left(\frac{a+b}{u}\,u_x\right).
\end{aligned}
$$

Transferindo a derivada total em y, de C^2 para a componente C^3 como derivada total em x obtemos

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_x\right) &= -\frac{1}{2}\mathcal{D}_x\left(\frac{a+b}{u}\right)u_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{xx} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}-\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{xx},
\end{aligned}
$$

e a nova componente C^3 torna-se

$$
\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_x+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{xx}-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}-\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{xx} \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_x-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}-\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_x \\
&= -\frac{1}{u}\,v_x\,u_x.
\end{aligned}
$$

Logo, as novas componentes do vetor conservado são

$$
C^1=a_x\,u,\quad C^2=0,\quad C^3=-\frac{1}{u}\,a_x\,u_x.
$$

- Para o gerador U_4, as componentes do vetor conservado (3.17) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,u_y, \\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_y+v_y\,u)u_y+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yy}, \\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}((a+b)\,u_x+v_x\,u)u_y+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{xy}.
\end{aligned}
$$

Como

$$C^1 = -(a+b)\,u_y = -\mathcal{D}_y((a+b)\,u) + v_y\,u,$$

então transferimos a derivada total em y para a componente C^3 como derivada total em t; então a componente C^3 modificada torna-se

$$\begin{aligned} C^3 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u} + \frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_y + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx} - (a+b)\,u_t \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u} + \frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_y + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx} - (a+b)\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u} + \frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_y - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx} + \frac{a+b}{u^2}\,u_x\,u_y \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u} - \frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)u_y - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx} \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{D}_x\left(\frac{a+b}{u}\right)u_y - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yx} \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{D}_x\left(\frac{a+b}{u}\,u_y\right). \end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em x, de C^3 para a componente C^2 como derivada total em y temos

$$\begin{aligned} -\mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_y\right) &= -\frac{1}{2}\mathcal{D}_y\left(\frac{a+b}{u}\right)u_y - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yy} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u} - \frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_y - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yy}, \end{aligned}$$

e a nova componente C^2 torna-se

$$\begin{aligned} C^2 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u} + \frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_y + \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yy} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u} - \frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_y - \frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_{yy} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u} + \frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_y - \frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u} - \frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)u_y \\ &= -\frac{1}{u}\,v_y\,u_y. \end{aligned}$$

Logo, as novas componentes do vetor conservado são

$$C^1 = b_y\,u, \quad C^2 = -\frac{1}{u}\,b_y\,u_y, \quad C^3 = 0.$$

- Para o gerador U_5, as componentes do vetor conservado (3.17) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,(u+x\,u_x),\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,(u+x\,u_x)\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(u_y+x\,u_{yx}),\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,(u+x\,u_x)\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(2\,u_x+x\,u_{xx}).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,(u+x\,u_x) = -(a+b)\,u-(a+b)\,x\,u_x\\
&= -(a+b)\,u-\mathcal{D}_x((a+b)\,x\,u)+v_x\,x\,u+(a+b)\,u\\
&= -\mathcal{D}_x((a+b)\,x\,u)+v_x\,x\,u,
\end{aligned}$$

então transferimos a derivada total em x para a componente C^2 como derivada total em t; daí a componente C^2 modificada torna-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\,(u+x\,u_x)\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(u_y+x\,u_{yx})-(a+b)\,x\,u_t\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_y+\frac{a+b}{u}\,u_y\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)x\,u_x+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}(u_y+x\,u_{yx})-(a+b)\,x\,u_t\\
&= -\frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)x\,u_x+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,x\,u_{yx}-(a+b)\,x\,u_t\\
&= -\frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)x\,u_x+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,x\,u_{yx}-(a+b)\,x\left(\frac{1}{u}\,u_{xy}-\frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,x\,u_x-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{u}\,x\,u_{yx}-(a+b)\,x\,\frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left[v_y+\frac{v_y}{u}\,x\,u_x+\mathcal{D}_y\left(\frac{a+b}{u}\,x\,u_x\right)-\left(\frac{v_y}{u}-\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)x\,u_x-(a+b)\,x\,\frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_y+\frac{v_y}{u}\,x\,u_x+\mathcal{D}_y\left(\frac{a+b}{u}\,x\,u_x\right)-\frac{v_y}{u}\,x\,u_x\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\mathcal{D}_y\left(\frac{a+b}{u}\,x\,u_x\right)\\
&= -\mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,(a+b)+\frac{1}{2}\frac{a+b}{u}\,x\,u_x\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em y, de C^2 para a componente C^3

como derivada total em x:

$$
\begin{aligned}
&- \quad \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,(a+b)+\frac{1}{2}\frac{a+b}{u}\,x\,u_x\right)=-\frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_x-\frac{1}{2}\mathcal{D}_x\left(\frac{a+b}{u}\,u_x\right)\,x\\
&= \quad -\frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_x-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}\,u_x+\frac{a+b}{u}\,u_{xx}-\frac{a+b}{u^2}\,u_x^2\right)\,x.
\end{aligned}
$$

Assim, a nova componente C^3 torna-se

$$
\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\,(u+x\,u_x)\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(2\,u_x+x\,u_{xx})\\
&- \frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_x-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}\,u_x+\frac{a+b}{u}\,u_{xx}-\frac{a+b}{u^2}\,u_x^2\right)\,x\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_x-\frac{a+b}{u}\,u_x\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}\,u_x+\frac{a+b}{u^2}\,u_x^2-\frac{a+b}{u}\,u_{xx}\right)x\\
&- \frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_x-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}\,u_x+\frac{a+b}{u}\,u_{xx}-\frac{a+b}{u^2}\,u_x^2\right)\,x\\
&= -v_x-\frac{v_x}{u}\,u_x\,x.
\end{aligned}
$$

Logo, as novas componentes do vetor conservado são

$$
C^1=a_x\,x\,u,\quad C^2=0,\quad C^3=-\frac{1}{u}\,x\,a_x\,u_x.
$$

- Para o gerador U_6, as componentes do vetor conservado (3.17) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,(u+y\,u_y),\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,(u+y\,u_y)\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(2\,u_y+y\,u_{yy}),\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,(u+y\,u_y)\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(u_x+y\,u_{yx}).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,(u+y\,u_y)=-(a+b)\,u-(a+b)\,y\,u_y\\
&= -(a+b)\,u-\mathcal{D}_y((a+b)\,y\,u)+v_y\,y\,u+(a+b)\,u\\
&= -\mathcal{D}_y((a+b)\,y\,u)+v_y\,y\,u,
\end{aligned}
$$

então transferimos a derivada total em y para a componente C^3 como derivada total em t; então a componente C^3 modificada torna-se

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\,(u+y\,u_y)\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(u_x+y\,u_{yx})-(a+b)\,y\,u_t\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_x+\frac{a+b}{u}\,u_x\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)y\,u_y+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}(u_x+y\,u_{yx})-(a+b)\,y\,u_t\\
&= -\frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)y\,u_y+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,y\,u_{yx}-(a+b)\,y\,u_t\\
&= -\frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\left(\frac{v_x}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)y\,u_y+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,y\,u_{yx}-(a+b)\,y\left(\frac{1}{u}\,u_{xy}-\frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,y\,u_y-\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{u}\,y\,u_{yx}-(a+b)\,y\,\frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left[v_x+\frac{v_x}{u}\,y\,u_y+\mathcal{D}_x\left(\frac{a+b}{u}\,y\,u_y\right)-\left(\frac{v_x}{u}-\frac{a+b}{u^2}\,u_x\right)y\,u_y-(a+b)\,y\,\frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right]\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_x+\frac{v_x}{u}\,y\,u_y+\mathcal{D}_x\left(\frac{a+b}{u}\,y\,u_y\right)-\frac{v_x}{u}\,y\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,v_x-\frac{1}{2}\mathcal{D}_x\left(\frac{a+b}{u}\,y\,u_y\right)\\
&= -\mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,(a+b)+\frac{1}{2}\frac{a+b}{u}\,y\,u_y\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em x, de C^3 para a componente C^2 como derivada total em y:

$$\begin{aligned}
&- \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,(a+b)+\frac{1}{2}\frac{a+b}{u}\,y\,u_y\right)=-\frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_y-\frac{1}{2}\mathcal{D}_y\left(\frac{a+b}{u}\,u_y\right)\,y\\
&= -\frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_y-\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}\,u_y+\frac{a+b}{u}\,u_{yy}-\frac{a+b}{u^2}\,u_y^2\right)\,y.
\end{aligned}$$

Assim, a nova componente C^2 torna-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\,(u+y\,u_y)\left(\frac{v_y}{u}+\frac{a+b}{u^2}\,u_y\right)+\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,(2\,u_y+y\,u_{yy})\\
&- \frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_y-\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}\,u_y+\frac{a+b}{u}\,u_{yy}-\frac{a+b}{u^2}\,u_y^2\right)\,y\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_y-\frac{a+b}{u}\,u_y\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}\,u_y+\frac{a+b}{u^2}\,u_y^2-\frac{a+b}{u}\,u_{yy}\right)y\\
&- \frac{1}{2}\,v_y-\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{u}\,u_y-\frac{1}{2}\left(\frac{v_y}{u}\,u_y+\frac{a+b}{u}\,u_{yy}-\frac{a+b}{u^2}\,u_y^2\right)\,y\\
&= -v_y-\frac{v_y}{u}\,u_y\,y.
\end{aligned}$$

Logo, as novas componentes do vetor conservado são

$$C^1 = b_y\, y\, u, \quad C^2 = -\frac{1}{u}\, y\, b_y\, u_y, \quad C^3 = 0.$$

Portanto, provamos o segundo corolário do **NTLC**, o **Corolário 1.7**, página 12.

3.4 A equação do calor não-linear

A equação do calor não-linear

$$u_t = f(u)\, u_{xy} + f'(u)\, u_x\, u_y \tag{3.18}$$

é do tipo (3.1) com as funções coeficientes dadas por

$$A = f(u), \qquad B = f'(u), \qquad R = 1, \qquad C = D = E = F = G = P = Q = 0.$$

Aplicando o **Teorema 1.1** obtemos o **Corolário 1.8**.

Demonstração do Corolário 1.8: A equação (1.23) nos dá

$$\varphi\, A_u + \varphi_u\, A = \varphi\, A_u, \qquad \text{ou seja,} \quad \varphi = \varphi(t, x, y).$$

Da equação (1.26) e $G = 0$ segue que

$$\varphi_t + A\, \varphi_{xy} = 0,$$

Daí segue que

$$\varphi_t = 0, \qquad \varphi_{xy} = 0.$$

Assim, $\varphi(x, y) = a(x) + b(y)$ com $a = a(x)$ e $b = b(y)$ funções arbitrárias diferenciáveis, tais que $a(x) + b(y) \neq 0$. ❖

Observação 3.2: O **Corolário 1.6** é uma consequência desse, considerando $f(u) = \frac{1}{u}$.

Observação 3.3: A equação (3.18) não é estritamente autoadjunta. De fato, segue do **Corolário 1.2** que a equação

$$u_t = f(u)\, u_{xy} + g(u)\, u_x\, u_y,$$

com $f = f(u)$ uma função diferenciável, é uma equação estritamente autoadjunta se, e só se,

$$g(u) = \frac{1}{u}\, f(u) + f'(u).$$

Observação 3.4: Em [13] Cimpoiasu e Constantinescu provaram que existem quatro possíveis escolhas para a função $f(u)$ tais que a equação (3.18) admita simetrias de Lie, a saber: $f(u) = 1$, $f(u) = 1/u$, $f(u) = u^p$ onde $p \neq 0$, $p \neq -1$, e $f(u) = e^u$. O primeiro caso corresponde à equação do calor 2D linear. Para a equação do calor linear em qualquer dimensão, leis de conservação são obtidas em [21]. O caso $f(u) = 1/u$ corresponde ao modelo do fluxo de Ricci 2D estudado na seção (2.3).

Nas subseções seguintes estabeleceremos as leis de conservação relativas aos dois casos restantes via o **Algoritmo do NTLC**.

3.4.1 O caso $f(u) = u^p$ com $p \neq 0$ e $p \neq -1$

As simetrias de Lie da equação $u_t = u^p\, u_{xy} + p\, u^{p-1}\, u_x\, u_y$ estão calculadas em [13] e são geradas por

$$W_1 = t\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{p}\, u\,\frac{\partial}{\partial u}, W_2 = \frac{\partial}{\partial t}, W_3 = \frac{\partial}{\partial x}, W_4 = \frac{\partial}{\partial y}, W_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{p}\, u\,\frac{\partial}{\partial u}, W_6 = y\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{p}\, u\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

Considerando a variável adjunta $v = a(x) + b(y)$ dada na demonstração do **Corolário 1.8**, a Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L} = v\, u_t - \frac{1}{2}\, v\, u^p\, u_{xy} - \frac{1}{2}\, v\, u^p\, u_{yx} - v\, p\, u^{p-1}\, u_x\, u_y.$$

As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = v, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -v\, p\, u^{p-1}\, u_y, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} = -v\, p\, u^{p-1}\, u_x, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -\frac{1}{2}\, v\, u^p.$$

As derivadas totais que aparecem no vetor conservado são dadas por

$$\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -\frac{1}{2}\, v_y\, u^p - \frac{1}{2}\, v\, p\, u^{p-1}\, u_y, \quad \mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} = -\frac{1}{2}\, v_x\, u^p - \frac{1}{2}\, v\, p\, u^{p-1}\, u_x.$$

Seja o gerador infinitesimal geral

$$X = (c_2 + c_1\, t)\, \frac{\partial}{\partial t} + (c_3 + c_5\, x)\, \frac{\partial}{\partial x} + (c_4 + c_6\, y)\, \frac{\partial}{\partial y} - (c_1 - c_5 - c_6) \frac{1}{p}\, u\, \frac{\partial}{\partial u},$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 são constantes arbitrárias.

A sua característica é

$$W = -(c_1 - c_5 - c_6) \frac{1}{p}\, u - (c_2 + c_1\, t)\, u_t - (c_3 + c_5\, x)\, u_x - (c_4 + c_6\, y)\, u_y,$$

e suas derivadas totais são

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_x W &= -c_5\, u_x - (c_1 - c_5 - c_6) \frac{1}{p}\, u_x - (c_2 + c_1\, t)\, u_{xt} - (c_3 + c_5\, x)\, u_{xx} - (c_4 + c_6\, y)\, u_{xy} \\
&= -(c_1 + (p-1)\, c_5 - c_6) \frac{1}{p}\, u_x - (c_2 + c_1\, t)\, u_{xt} - (c_3 + c_5\, x)\, u_{xx} - (c_4 + c_6\, y)\, u_{xy}, \\
\mathcal{D}_y W &= -c_6\, u_y - (c_1 - c_5 - c_6) \frac{1}{p}\, u_y - (c_2 + c_1\, t)\, u_{yt} - (c_3 + c_5\, x)\, u_{yx} - (c_4 + c_6\, y)\, u_{yy} \\
&= -(c_1 - c_5 + (p-1)\, c_6) \frac{1}{p}\, u_y - (c_2 + c_1\, t)\, u_{yt} - (c_3 + c_5\, x)\, u_{yx} - (c_4 + c_6\, y)\, u_{yy}.
\end{aligned}$$

Então as componentes do vetor conservado são dadas por

$$\begin{aligned}
C^1 &= W\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \\
&= -\left((c_1 - c_5 - c_6) \frac{1}{p}\, u + (c_2 + c_1\, t)\, u_t + (c_3 + c_5\, x)\, u_x + (c_4 + c_6\, y)\, u_y \right)\, v, \\
C^2 &= W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} \right) + (\mathcal{D}_y W)\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} \\
&= -\left((c_1 - c_5 - c_6) \frac{1}{p}\, u + (c_2 + c_1\, t)\, u_t + (c_3 + c_5\, x)\, u_x + (c_4 + c_6\, y)\, u_y \right) \big(-v\, p\, u^{p-1}\, u_y \\
&+ \frac{1}{2}\, v_y\, u^p + \frac{1}{2}\, v\, p\, u^{p-1}\, u_y \big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{2}\left((c_1 - c_5 + (p-1)\,c_6)\frac{1}{p}\,u_y + (c_2 + c_1\,t)\,u_{yt} + (c_3 + c_5\,x)\,u_{yx} + (c_4 + c_6\,y)\,u_{yy}\right) v\,u^p \\
&= \quad -\frac{1}{2}\left((c_1 - c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u + (c_2 + c_1\,t)\,u_t + (c_3 + c_5\,x)\,u_x + (c_4 + c_6\,y)\,u_y\right)(v_y\,u^p \\
&- \quad v\,p\,u^{p-1}\,u_y) \\
&+ \quad \frac{1}{2}\left((c_1 - c_5 + (p-1)\,c_6)\frac{1}{p}\,u_y + (c_2 + c_1\,t)\,u_{yt} + (c_3 + c_5\,x)\,u_{yx} + (c_4 + c_6\,y)\,u_{yy}\right) v\,u^p,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^3 \quad &= \quad W\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} - \mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}}\right) + (\mathcal{D}_x W)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} \\
&= \quad -\left((c_1 - c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u + (c_2 + c_1\,t)\,u_t + (c_3 + c_5\,x)\,u_x + (c_4 + c_6\,y)\,u_y\right)\Big(-v\,p\,u^{p-1}\,u_x \\
&+ \quad \frac{1}{2}\,v_x\,u^p + \frac{1}{2}\,v\,p\,u^{p-1}\,u_x\Big) \\
&+ \quad \frac{1}{2}\left((c_1 + (p-1)\,c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u_x + (c_2 + c_1\,t)\,u_{xt} + (c_3 + c_5\,x)\,u_{xx} + (c_4 + c_6\,y)\,u_{xy}\right) v\,u^p \\
&= \quad -\frac{1}{2}\left((c_1 - c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u + (c_2 + c_1\,t)\,u_t + (c_3 + c_5\,x)\,u_x + (c_4 + c_6\,y)\,u_y\right)(v_x\,u^p \\
&- \quad v\,p\,u^{p-1}\,u_x) \\
&+ \quad \frac{1}{2}\left((c_1 + (p-1)\,c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u_x + (c_2 + c_1\,t)\,u_{xt} + (c_3 + c_5\,x)\,u_{xx} + (c_4 + c_6\,y)\,u_{xy}\right) v\,u^p,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
C^1 \quad &= \quad -\left((c_1 - c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u + (c_2 + c_1\,t)\,u_t + (c_3 + c_5\,x)\,u_x + (c_4 + c_6\,y)\,u_y\right)\,v, \\
C^2 \quad &= \quad -\frac{1}{2}\left((c_1 - c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u + (c_2 + c_1\,t)\,u_t + (c_3 + c_5\,x)\,u_x + (c_4 + c_6\,y)\,u_y\right)(v_y\,u^p \\
&- \quad v\,p\,u^{p-1}\,u_y) \\
&+ \quad \frac{1}{2}\left((c_1 - c_5 + (p-1)\,c_6)\frac{1}{p}\,u_y + (c_2 + c_1\,t)\,u_{yt} + (c_3 + c_5\,x)\,u_{yx} + (c_4 + c_6\,y)\,u_{yy}\right) v\,u^p, \\
C^3 \quad &= \quad -\frac{1}{2}\left((c_1 - c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u + (c_2 + c_1\,t)\,u_t + (c_3 + c_5\,x)\,u_x + (c_4 + c_6\,y)\,u_y\right)(v_x\,u^p \\
&- \quad v\,p\,u^{p-1}\,u_x) \\
&+ \quad \frac{1}{2}\left((c_1 + (p-1)\,c_5 - c_6)\frac{1}{p}\,u_x + (c_2 + c_1\,t)\,u_{xt} + (c_3 + c_5\,x)\,u_{xx} + (c_4 + c_6\,y)\,u_{xy}\right) v\,u^p.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

- Para o gerador W_1, as componentes do vetor conservado (3.19) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -\left(\frac{1}{p}\,u + t\,u_t\right)\,(a+b),\\
C^2 &= \frac{1}{2}\left(-v_y\,u^p + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_y\right)\left(\frac{1}{p}\,u + t\,u_t\right) + \frac{1}{2}\,(a+b)\,u^p\left(\frac{1}{p}\,u_y + t\,u_{yt}\right),\\
C^3 &= \frac{1}{2}\left(-v_x\,u^p + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_x\right)\left(\frac{1}{p}\,u + t\,u_t\right) + \frac{1}{2}\,(a+b)\,u^p\left(\frac{1}{p}\,u_x + t\,u_{xt}\right).
\end{aligned}
$$

Como $u_t = \mathcal{D}_y(u^p\,u_x) = \mathcal{D}_x(u^p\,u_y)$, então

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -\left(\frac{1}{p}\,u + t\,u_t\right)\,(a+b) = -\frac{1}{p}\,u\,(a+b) - (a+b)\,t\,u_t = -\frac{1}{p}\,u\,(a+b) - \mathcal{D}_y(t\,a\,u^p\,u_x)\\
&- \mathcal{D}_x(t\,b\,u^p\,u_y).
\end{aligned}
$$

Agora transferimos a derivada total em x, de C^1 para a componente C^2 como derivada total em t:

$$
-\mathcal{D}_t(t\,b\,u^p\,u_y) = -b\,u^p\,u_y - t\,b(p\,u^{p-1}\,u_t\,u_y + u^p\,u_{ty}),
$$

então a componente C^2 modificada torna-se

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p}\,v_y\,u^{p+1} - v_y\,u^p\,t\,u_t + v\,u^p\,u_y + v\,p\,u^{p-1}\,u_y\,t\,u_t + \frac{1}{p}\,v\,u^p\,u_y + v\,u^p\,t\,u_{yt}\right)\\
&- b\,u^p\,u_y - t\,b(p\,u^{p-1}\,u_t\,u_y + u^p\,u_{ty})\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,v_y\,u^{p+1} + \left(1+\frac{1}{p}\right)(a+b)\,u^p\,u_y - v_y\,u^p\,t\,u_t + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,t\,u_y\,u_t\right]\\
&+ \frac{1}{2}\,(a+b)\,u^p\,t\,u_{yt} - b\,u^p\,u_y - b\,p\,u^{p-1}\,t\,u_t\,u_y - b\,u^p\,t\,u_{ty}\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,v_y\,u^{p+1} + \left(\left(\frac{1}{p}-1\right)\,b + \left(1+\frac{1}{p}\right)\,a\right)\,u^p\,u_y - v_y\,u^p\,t\,u_t\right.\\
&+ \left.(a-b)\,p\,u^{p-1}\,t\,u_y\,u_t + (a-b)\,u^p\,t\,u_{yt}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,b_y\,u^{p+1} + \frac{1}{p}\,((1-p)\,b + (1+p)\,a)\,u^p\,u_y - v_y\,u^p\,t\,u_t\right.\\
&+ \left.(a-b)\,p\,u^{p-1}\,t\,u_y\,u_t + \mathcal{D}_y((a-b)\,u^p\,t\,u_t) - (-b_y\,u^p + (a-b)\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,t\,u_t\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,\mathcal{D}_y(b\,u^{p+1}) + \frac{1}{p}\,(p+1)\,b\,u^p\,u_y + \frac{1}{p}\,((1-p)\,b + (1+p)\,a)\,u^p\,u_y\right.\\
&+ \left.\mathcal{D}_y((a-b)\,u^p\,t\,u_t)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}\,(2\,b + (1+p)\,a)\,u^p\,u_y + \mathcal{D}_y\left(-\frac{1}{p}\,b\,u^{p+1} + (a-b)\,u^p\,t\,u_t\right)\right].
\end{aligned}
$$

Depois transferimos a derivada total em y, de C^1 para a componente C^3 como derivada total em t:

$$-\mathcal{D}_t(t\,a\,u^p\,u_x) \;\;=\;\; -a\,u^p\,u_x - t\,a\,(p\,u^{p-1}\,u_t\,u_x + u^p\,u_{tx}),$$

então a componente C^3 modificada torna-se

$$\begin{aligned}
C^3 \;&=\; \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p}\,v_x\,u^{p+1} - v_x\,u^p\,t\,u_t + v\,u^p\,u_x + v\,p\,u^{p-1}\,u_x\,t\,u_t + \frac{1}{p}\,v\,u^p\,u_x + v\,u^p\,t\,u_{xt}\right)\\
&-\; a\,u^p\,u_x - t\,a\,(p\,u^{p-1}\,u_t\,u_x + u^p\,u_{tx})\\
&=\; \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,v_x\,u^{p+1} + \left(1+\frac{1}{p}\right)(a+b)\,u^p\,u_x - v_x\,u^p\,t\,u_t + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,t\,u_x\,u_t\right]\\
&+\; \frac{1}{2}\,(a+b)\,u^p\,t\,u_{xt} - a\,u^p\,u_y - a\,p\,u^{p-1}\,t\,u_t\,u_x - a\,u^p\,t\,u_{tx}\\
&=\; \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,v_x\,u^{p+1} + \left(\left(\frac{1}{p}-1\right)\,a + \left(1+\frac{1}{p}\right)\,b\right)u^p\,u_x - v_x\,u^p\,t\,u_t\right.\\
&+\; \left.(b-a)\,p\,u^{p-1}\,t\,u_x\,u_t + (b-a)\,u^p\,t\,u_{xt}\right]\\
&=\; \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,a_x\,u^{p+1} + \frac{1}{p}\,((1-p)\,a + (1+p)\,b)\,u^p\,u_x - v_x\,u^p\,t\,u_t\right.\\
&+\; \left.(b-a)\,p\,u^{p-1}\,t\,u_x\,u_t + \mathcal{D}_x((b-a)\,u^p\,t\,u_t) - (-a_x\,u^p + (b-a)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,t\,u_t\right]\\
&=\; \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{p}\,\mathcal{D}_x(a\,u^{p+1}) + \frac{1}{p}\,(p+1)\,a\,u^p\,u_x + \frac{1}{p}\,((1-p)\,a + (1+p)\,b)\,u^p\,u_x\right.\\
&+\; \left.\mathcal{D}_x((b-a)\,u^p\,t\,u_t)\right]\\
&=\; \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}\,(2\,a + (1+p)\,b)\,u^p\,u_x + \mathcal{D}_x\left(-\frac{1}{p}\,a\,u^{p+1} + (b-a)\,u^p\,t\,u_t\right)\right].
\end{aligned}$$

Finalmente, transferindo a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x; depois transferindo a derivada total em x, de C^3 para C^2 como derivada total em y, obtemos as componentes simplificadas do vetor conservado

$$C^1 = -\frac{1}{p}\,(a+b)\,u, \quad C^2 = \frac{b}{p}\,u^p\,u_y, \quad C^3 = \frac{a}{p}\,u^p\,u_x.$$

- Para o gerador W_2, as componentes do vetor conservado (3.19) são

$$\begin{aligned}
C^1 \;&=\; -(a+b)\,u_t,\\
C^2 \;&=\; \frac{1}{2}\,[(-v_y\,u^p + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,u_t + (a+b)\,u^p\,u_{yt}],\\
C^3 \;&=\; \frac{1}{2}\,[(-v_x\,u^p + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,u_t + (a+b)\,u^p\,u_{xt}].
\end{aligned}$$

Como

$$C^1 \;\; = \;\; -(a+b)\,u_t = -\mathcal{D}_y(a\,u^p\,u_x) - \mathcal{D}_x(b\,u^p\,u_y),$$

transferindo a derivada total em x para C^2 como derivada total em t temos

$$\begin{array}{rcl}
C^2 & = & \dfrac{1}{2}\,[(-v_y\,u^p + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,u_t + (a+b)\,u^p\,u_{yt}] - b\,(p\,u^{p-1}\,u_t\,u_y + u^p\,u_{ty}) \\
& = & \dfrac{1}{2}\,(-v_y\,u^p\,u_t + (a-b)\,p\,u^{p-1}\,u_y\,u_t + (a-b)u^p\,u_{yt}) \\
& = & \dfrac{1}{2}\,[-v_y\,u^p\,u_t + (a-b)\,p\,u^{p-1}\,u_y\,u_t + \mathcal{D}_y((a-b)\,u^p\,u_t) \\
& + & (b_y\,u^p - (a-b)\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,u_t] \\
& = & \mathcal{D}_y\left(\dfrac{1}{2}\,(a-b)\,u^p\,u_t\right),
\end{array}$$

Transferindo a derivada total em y, de C^1 para C^3 como derivada total em t obtemos

$$\begin{array}{rcl}
C^3 & = & \dfrac{1}{2}\,[(-v_x\,u^p + (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,u_t + (a+b)\,u^p\,u_{xt}] - a\,(p\,u^{p-1}\,u_t\,u_x + u^p\,u_{tx}) \\
& = & \dfrac{1}{2}\,(-v_x\,u^p\,u_t + (b-a)\,p\,u^{p-1}\,u_x\,u_t + (b-a)u^p\,u_{xt}) \\
& = & \dfrac{1}{2}\,[-v_x\,u^p\,u_t + (b-a)\,p\,u^{p-1}\,u_x\,u_t + \mathcal{D}_x((b-a)\,u^p\,u_t) \\
& + & (a_x\,u^p - (b-a)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,u_t] \\
& = & \mathcal{D}_x\left(\dfrac{1}{2}\,(b-a)\,u^p\,u_t\right).
\end{array}$$

Finalmente, transferindo a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x obtemos uma lei de conservação trivial do primeiro tipo.

- Para o gerador W_3, as componentes do vetor conservado (3.19) são

$$\begin{array}{rcl}
C^1 & = & -(a+b)\,u_x, \\
C^2 & = & -\dfrac{1}{2}\,[(v_y\,u^p - (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,u_x - (a+b)\,u^p\,u_{yx}], \\
C^3 & = & -\dfrac{1}{2}\,[(v_x\,u^p - (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,u_x - (a+b)\,u^p\,u_{xx}].
\end{array}$$

Como

$$C^1 \;\; = \;\; -(a+b)\,u_x = -\mathcal{D}_x((a+b)\,u) + v_x\,u,$$

a derivada total em x é transferida de C^1 para C^2 como derivada total em t, então a nova componente C^2 torna-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\left[(v_y\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_y)\, u_x - (a+b)\, u^p\, u_{yx}\right] - (a+b)\, u_t \\
&= -\frac{1}{2}\left[(v_y\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_y)\, u_x - (a+b)\, u^p\, u_{yx}\right] - (a+b)\,(u^p\, u_{xy} + p\, u^{p-1}\, u_x\, u_y) \\
&= -\frac{1}{2}\left[v_y\, u^p\, u_x + (a+b)\,(u^p\, u_{xy} + p\, u^{p-1}\, u_x\, u_y)\right] \\
&= -\mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,(a+b)\, u^p\, u_x\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x:

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\left[(v_x\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_x)\, u_x - (a+b)\, u^p\, u_{xx}\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[a_x\, u^p\, u_x + (a+b)\,(u^p\, u_{xx} + p\, u^{p-1}\, u_x\, u_x)\right] \\
&= -a_x\, u^p\, u_x.
\end{aligned}$$

Assim as componentes do vetor conservado são dadas por

$$C^1 = a_x\, u, \quad C^2 = 0, \quad C^3 = -a_x\, u^p\, u_x.$$

- Para o gerador W_4, as componentes do vetor conservado (3.19) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\, u_y, \\
C^2 &= -\frac{1}{2}\left[(v_y\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_y)\, u_y - (a+b)\, u^p\, u_{yy}\right], \\
C^3 &= -\frac{1}{2}\left[(v_x\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_x)\, u_y - (a+b)\, u^p\, u_{xy}\right].
\end{aligned}$$

Como

$$-(a+b)\, u_y = -\mathcal{D}_y((a+b)\, u) + v_y\, u,$$

a derivada total em y é transferida de C^1 para C^3 como derivada total em t, então a nova componente C^3 torna-se

$$
\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\left[(v_x\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_x)\, u_y - (a+b)\, u^p\, u_{xy}\right] - (a+b)\, u_t \\
&= -\frac{1}{2}\left[(v_x\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_x)\, u_y - (a+b)\, u^p\, u_{xy}\right] - (a+b)\,(u^p\, u_{xy} + p\, u^{p-1}\, u_x\, u_y) \\
&= -\frac{1}{2}\left[v_x\, u^p\, u_y + (a+b)\,(u^p\, u_{xy} + p\, u^{p-1}\, u_x\, u_y)\right] \\
&= -\mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,(a+b)\, u^p\, u_y\right).
\end{aligned}
$$

Agora transferimos a derivada total em x, de C^3 para C^2 como derivada total em y:

$$
\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\left[(v_y\, u^p - (a+b)\, p\, u^{p-1}\, u_y)\, u_y - (a+b)\, u^p\, u_{yy}\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[v_y\, u^p\, u_y + (a+b)\,(u^p\, u_{yy} + p\, u^{p-1}\, u_y\, u_y)\right] \\
&= -v_y\, u^p\, u_y.
\end{aligned}
$$

Assim as componentes do vetor conservado são dadas por

$$
C^1 = b_y\, u, \quad C^2 = -b_y\, u^p\, u_y, \quad C^3 = 0.
$$

- Para o gerador W_5, as componentes do vetor conservado (3.19) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (a+b)\left(\frac{1}{p}\, u - x\, u_x\right), \\
C^2 &= \frac{1}{2}\,(v_y\, u^p - v\, p\, u^{p-1}\, u_y)\left(\frac{1}{p}\, u - x\, u_x\right) - \frac{1}{2}\, v\, u^p\left(\frac{1}{p}\, u_y - x\, u_{yx}\right), \\
C^3 &= \frac{1}{2}\,(v_x\, u^p - v\, p\, u^{p-1}\, u_x)\left(\frac{1}{p}\, u - x\, u_x\right) - \frac{1}{2}\, v\, u^p\left(\left(\frac{1}{p} - 1\right)\, u_x - x\, u_{xx}\right).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (a+b)\left(\frac{1}{p}\, u - x\, u_x\right) = \frac{1}{p}\,(a+b)\, u - (a+b)\, x\, u_x \\
&= \frac{1}{p}\,(a+b)\, u - \mathcal{D}_x((a+b)\, x\, u) + v_x\, x\, u + (a+b)\, u,
\end{aligned}
$$

a derivada total em x é transferida de C^1 para C^2 como derivada total em t, então temos

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \frac{1}{2}\left[-(v_y\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_y)x\,u_x + (a+b)\,u^p\,x\,u_{yx} + \frac{1}{p}\,u\,(v_y\,u^p - (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_y)\right.\\
&- \left.\frac{1}{p}\,(a+b)\,u^p\,u_y\right] - (a+b)\,x\,u_t\\
&= \frac{1}{2}\left[-(v_y\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,x\,u_x + (a+b)\,u^p\,x\,u_{yx} + \frac{1}{p}\,(v_y\,u^{p+1} - (p+1)\,(a+b)\,u^p\,u_y)\right]\\
&- (a+b)\,x\,(u^p\,u_{xy} + p\,u^{p-1}\,u_x\,u_y)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\,b_y\,u^{p+1} - \frac{p+1}{p}\,v\,u^p\,u_y - v_y\,u^p\,x\,u_x - v\,p\,u^{p-1}\,x\,u_y\,u_x - v\,u^p\,x\,u_{yx}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\,\mathcal{D}_y(b\,u^{p+1}) - \frac{1}{p}\,(p+1)\,b\,u^p\,u_y - \frac{p+1}{p}\,(a+b)\,u^p\,u_y - \mathcal{D}_y((a+b)\,u^p\,x\,u_x)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{p+1}{p}\,(a+2\,b)\,u^p\,u_y + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{p}\,b\,u^{p+1} - (a+b)\,u^p\,x\,u_x\right)\right).
\end{aligned}
$$

Agora transferimos a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x:

$$
\begin{aligned}
C^3 &= \frac{1}{2}\left[-(v_x\,u^p - (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,x\,u_x + (a+b)\,u^p\,x\,u_{xx} + \frac{1}{p}\,u\,(v_x\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_x)\right]\\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - 1\right)(a+b)\,u^p\,u_x + \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_x\left(\frac{1}{p}\,b\,u^{p+1} - (a+b)\,u^p\,x\,u_x\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[-(v_x\,u^p - (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,x\,u_x + (a+b)\,u^p\,x\,u_{xx} + \frac{1}{p}\,v_x\,u^{p+1}\right]\\
&- \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,(a+b)\,u^p\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_x - \frac{1}{2}\,[(v_x\,u^p + v\,p\,u^{p-1}\,u_x)\,x\,u_x + v\,u^p\,u_x + v\,u^p\,x\,u_{xx}]\\
&= -v_x\,u^p\,x\,u_x - \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,a\,u^p\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,v_x\,u^{p+1}\\
&= -a_x\,x\,u^p\,u_x - \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,a\,u^p\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,\mathcal{D}_x(a\,u^{p+1}) - \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,a\,u^p\,u_x\\
&= -a_x\,x\,u^p\,u_x - \frac{p+1}{p}\,a\,u^p\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,\mathcal{D}_x(a\,u^{p+1}).
\end{aligned}
$$

Finalmente, transferindo a derivada total em x, de C^3 para a componente C^2 como derivada total em y, obtemos a nova componente

$$
C^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,(a+2\,b)\,u^p\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,a\,u^p\,u_y = -\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y.
$$

Assim as componentes do vetor conservado são

$$
C^1 = \left(x\,a_x + \frac{p+1}{p}\,(a+b)\right)\,u, \quad C^2 = -\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y, \quad C^3 = -\left(x\,a_x + \frac{p+1}{p}\,a\right)u^p\,u_x.
$$

- Para o gerador W_6, as componentes do vetor conservado (3.19) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (a+b)\left(\frac{1}{p}\,u - y\,u_y\right),\\
C^2 &= \frac{1}{2}(v_y\,u^p - (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_y)\left(\frac{1}{p}\,u - y\,u_y\right) - \frac{1}{2}\,(a+b)\,u^p\left(\left(\frac{1}{p}-1\right)\,u_y - y\,u_{yy}\right),\\
C^3 &= \frac{1}{2}(v_x\,u^p - (a+b)\,p\,u^{p-1}\,u_x)\left(\frac{1}{p}\,u - y\,u_y\right) - \frac{1}{2}\,(a+b)\,u^p\left(\frac{1}{p}\,u_x - y\,u_{xy}\right).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (a+b)\left(\frac{1}{p}\,u - y\,u_y\right)\\
&= (a+b)\,\frac{1}{p}\,u - (a+b)\,y\,u_y\\
&= (a+b)\,\frac{1}{p}\,u - \mathcal{D}_y((a+b)\,y\,u) + v_y\,y\,u + (a+b)\,u,
\end{aligned}
$$

a derivada total em y é transferida de C^1 para C^3 como derivada total em t, então temos

$$
\begin{aligned}
C^3 &= \frac{1}{2}\left[-(v_x\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_x)y\,u_y + v\,u^p\,y\,u_{xy} + \frac{1}{p}\,u\,(v_x\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_x) - \frac{1}{p}\,v\,u^p\,u_x\right]\\
&- v\,y\,u_t\\
&= \frac{1}{2}\left[-(v_x\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_x)y\,u_y + v\,u^p\,y\,u_{xy} + \frac{1}{p}\,(v_x\,u^{p+1} - (p+1)\,v\,u^p\,u_x)\right]\\
&- v\,y\,(u^p\,u_{xy} + p\,u^{p-1}\,u_x\,u_y)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\,v_x\,u^{p+1} - \frac{p+1}{p}\,v\,u^p\,u_x - v_x\,u^p\,y\,u_y - v\,p\,u^{p-1}\,y\,u_x\,u_y - v\,u^p\,y\,u_{xy}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\,a_x\,u^{p+1} - \frac{p+1}{p}\,v\,u^p\,u_x - \mathcal{D}_x(v\,u^p\,y\,u_y)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{p}\,a\,u^p\,u_x - \frac{p+1}{p}\,(a+b)\,u^p\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{p}\,a\,u^{p+1} - v\,u^p\,y\,u_y\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{p}\,a\,u^{p+1} - v\,u^p\,y\,u_y\right)\right).
\end{aligned}
$$

Agora transferimos a derivada total em x, de C^3 para C^2 como derivada total em y:

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \frac{1}{2}\left[-(v_y\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,y\,u_y + v\,u^p\,y\,u_{yy} + \frac{1}{p}\,u\,(v_y\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_y)\right] \\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-1\right)v\,u^p\,u_y + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{p}\,a\,u^{p+1} - v\,u^p\,y\,u_y\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[-(v_y\,u^p - v\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,y\,u_y + v\,u^p\,y\,u_{yy} + \frac{1}{p}\,v_y\,u^{p+1} - \frac{1}{p}\,v\,u^p\,u_y\right] \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,a\,u^p\,u_y - \frac{1}{2}\left[(v_y\,u^p + v\,p\,u^{p-1}\,u_y)\,y\,u_y + v\,u^p\,u_y + v\,u^p\,y\,u_{yy}\right] \\
&= -v_y\,u^p\,y\,u_y - \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,v_y\,u^{p+1} \\
&= -v_y\,u^p\,y\,u_y - \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,\mathcal{D}_y(b\,u^{p+1}) - \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y \\
&= -b_y\,u^p\,y\,u_y - \frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{1}{p}\,\mathcal{D}_y(b\,u^{p+1}).
\end{aligned}
$$

Finalmente, transferindo a derivada total em y de C^2 para a componente C^3 como derivada total em x, temos a nova componente

$$
C^3 = -\frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_x = 0.
$$

Assim as componentes do vetor conservado são dadas por

$$
C^1 = \left(y\,b_y + \frac{p+1}{p}\,(a+b)\right)u, \quad C^2 = -b_y\,u^p\,y\,u_y - \frac{p+1}{p}\,b\,u^p\,u_y, \quad C^3 = 0.
$$

Portanto, provamos o terceiro corolário do **NTLC**, o **Corolário 1.9**, página 13.

Observação 3.5: O **Corolário 1.7** é uma consequência do **Corolário 1.9**, considerando $p = -1$.

3.4.2 O caso $f(u) = e^u$

As simetrias de Lie da equação $u_t = e^u\,u_{xy} + e^u\,u_x\,u_y$ estão calculadas em [13] e são geradas por

$$
Z_1 = t\,\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial u}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Z_3 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z_4 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z_5 = x\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad Z_6 = y\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}.
$$

A variável adjunta é dada na demonstração do **Corolário 1.8** por $v = a(x) + b(y)$, a Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L} = v\,u_t - \frac{1}{2}\,v\,e^u\,u_{xy} - \frac{1}{2}\,v\,e^u\,u_{yx} - \,v\,e^u\,u_x\,u_y.$$

As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = v, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -v\,e^u\,u_y, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} = -v\,e^u\,u_x, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -\frac{1}{2}\,v\,e^u.$$

As derivadas totais que aparecem no vetor conservado são dadas por

$$\mathcal{D}_y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -\frac{1}{2}\,e^u\,(v_y + v\,u_y), \quad \mathcal{D}_x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} = -\frac{1}{2}\,e^u\,(v_x + v\,u_x).$$

Seja o gerador infinitesimal geral

$$Z = (c_2 + c_1\,t)\,\frac{\partial}{\partial t} + (c_3 + c_5\,x)\,\frac{\partial}{\partial x} + (c_4 + c_6\,y)\,\frac{\partial}{\partial y} - (c_1 - c_5 - c_6)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 são constantes arbitrárias.

A sua característica é

$$W = -c_1 + c_5 + c_6 - (c_2 + c_1\,t)\,u_t - (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y,$$

e suas derivadas totais são

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_xW &= -c_5\,u_x - (c_2 + c_1\,t)\,u_{xt} - (c_3 + c_5\,x)\,u_{xx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{xy} \\
\mathcal{D}_yW &= -c_6\,u_y - (c_2 + c_1\,t)\,u_{yt} - (c_3 + c_5\,x)\,u_{yx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{yy},
\end{aligned}$$

Então as componentes do vetor conservado são dadas por

$$\begin{aligned}
C^1 &= W\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \\
&= -\left(c_1 - c_5 - c_6 + (c_2 + c_1\,t)\,u_t + (c_3 + c_5\,x)\,u_x + (c_4 + c_6\,y)\,u_y\right)\,v, \\
C^2 &= W\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \mathcal{D}_y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}}\right) + (\mathcal{D}_yW)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (c_1 - c_5 - c_6 + (c_2 + c_1\, t)\, u_t + (c_3 + c_5\, x)\, u_x + (c_4 + c_6\, y)\, u_y)\, (v\, e^u\, u_y \\
&- \frac{1}{2}\, e^u\, (v_y + v\, u_y)\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\, (c_6\, u_y + (c_2 + c_1\, t)\, u_{yt} + (c_3 + c_5\, x)\, u_{yx} + (c_4 + c_6\, y)\, u_{yy})\, v\, e^u, \\
C^3 &= W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} - \mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} \right) + (\mathcal{D}_x W)\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}} \\
&= (c_1 - c_5 - c_6 + (c_2 + c_1\, t)\, u_t + (c_3 + c_5\, x)\, u_x + (c_4 + c_6\, y)\, u_y)\, (v\, e^u\, u_x \\
&- \frac{1}{2}\, e^u\, (v_x + v\, u_x)\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\, (c_5\, u_x + (c_2 + c_1\, t)\, u_{xt} + (c_3 + c_5\, x)\, u_{xx} + (c_4 + c_6\, y)\, u_{xy})\, v\, e^u,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -\, (c_1 - c_5 - c_6 + (c_2 + c_1\, t)\, u_t + (c_3 + c_5\, x)\, u_x + (c_4 + c_6\, y)\, u_y)\ (a + b), \\
C^2 &= (c_1 - c_5 - c_6 + (c_2 + c_1\, t)\, u_t + (c_3 + c_5\, x)\, u_x + (c_4 + c_6\, y)\, u_y) \frac{1}{2}\, e^u\, ((a + b)\, u_y - v_y) \\
&+ \frac{1}{2}\, (c_6\, u_y + (c_2 + c_1\, t)\, u_{yt} + (c_3 + c_5\, x)\, u_{yx} + (c_4 + c_6\, y)\, u_{yy})\, (a + b)\, e^u, \\
C^3 &= (c_1 - c_5 - c_6 + (c_2 + c_1\, t)\, u_t + (c_3 + c_5\, x)\, u_x + (c_4 + c_6\, y)\, u_y)\, \frac{1}{2}\, e^u\, ((a + b)\, u_x - v_x) \\
&+ \frac{1}{2}\, (c_5\, u_x + (c_2 + c_1\, t)\, u_{xt} + (c_3 + c_5\, x)\, u_{xx} + (c_4 + c_6\, y)\, u_{xy})\, (a + b)\, e^u.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

- Para o gerador Z_1, as componentes do vetor conservado (3.20) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -(1 + t\, u_t)\, (a + b), \\
C^2 &= \frac{1}{2}\, e^u\, ((a + b)\, u_y - v_y)(1 + t\, u_t) + \frac{1}{2}\, (a + b)\, e^u\, t\, u_{yt}, \\
C^3 &= \frac{1}{2}\, e^u\, ((a + b)\, u_x - v_x)(1 + t\, u_t) + \frac{1}{2}\, (a + b)\, e^u\, t\, u_{xt}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -(1 + t\, u_t)\, (a + b) = -(a + b) - (a + b)\, t\, u_t \\
&= -(a + b) - \mathcal{D}_x(b\, e^u\, t\, u_y) - \mathcal{D}_y(a\, e^u\, t\, u_x),
\end{aligned}
$$

então transferimos a derivada total em x para C^2 como derivada total em t, e obtemos a nova componente

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \frac{1}{2}\,e^u\,((a+b)\,u_y - v_y)(1+t\,u_t) + \frac{1}{2}\,(a+b)\,e^u\,t\,u_{yt} - b\,e^u\,u_y - t\,b\,(e^u\,u_t\,u_y + e^u\,u_{ty})\\
&= \frac{1}{2}\,e^u\,[(a+b)\,u_y - v_y + ((a+b)\,u_y - v_y)\,t\,u_t + (a+b)\,t\,u_{yt}]\\
&- b\,e^u\,(u_y + t\,(u_t\,u_y + u_{ty}))\\
&= \frac{1}{2}\,e^u\,(-v_y + (a-b)\,u_y - v_y\,t\,u_t + (a-b)\,u_y\,t\,u_t + (a-b)\,t\,u_{yt})\\
&= \frac{1}{2}\,e^u\,(-v_y + (a-b)\,u_y) + \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_y((a-b)\,e^u\,t\,u_t).
\end{aligned}
$$

Transferindo a derivada total em y, de C^1 para C^3 como derivada total em t obtemos a nova componente

$$
\begin{aligned}
C^3 &= \frac{1}{2}\,e^u\,((a+b)\,u_x - v_x)(1+t\,u_t) + \frac{1}{2}\,(a+b)\,e^u\,t\,u_{xt} - a\,e^u\,u_x - t\,a\,(e^u\,u_t\,u_x + e^u\,u_{tx})\\
&= \frac{1}{2}\,e^u\,[(a+b)\,u_x - v_x + ((a+b)\,u_x - v_x)\,t\,u_t + (a+b)\,t\,u_{xt}]\\
&- a\,e^u\,(u_x + t\,(u_t\,u_x + u_{tx}))\\
&= \frac{1}{2}\,e^u\,(-v_x + (b-a)\,u_x - v_x\,t\,u_t + (b-a)\,u_x\,t\,u_t + (b-a)\,t\,u_{xt})\\
&= \frac{1}{2}\,e^u\,(-v_x + (b-a)\,u_x) + \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_x((b-a)\,e^u\,t\,u_t).
\end{aligned}
$$

Finalmente transferimos a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x para obtermos as componentes simplificadas do vetor conservado

$$
C^1 = -(a+b), \quad C^2 = -\frac{1}{2}\,b_y\,e^u + \frac{1}{2}\,(a-b)\,e^u\,u_y, \quad C^3 = -\frac{1}{2}\,a_x\,e^u + \frac{1}{2}\,(b-a)\,e^u\,u_x.
$$

- Para o gerador Z_2, as componentes do vetor conservado (3.20) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -(a+b)\,u_t,\\
C^2 &= \frac{1}{2}(e^u\,(a+b)\,u_y - e^u\,v_y)u_t + \frac{1}{2}\,(a+b)\,e^u\,u_{yt},\\
C^3 &= \frac{1}{2}(e^u\,(a+b)\,u_x - e^u\,v_x)u_t + \frac{1}{2}\,(a+b)\,e^u\,u_{xt}.
\end{aligned}
$$

Como

$$
C^1 = -(a+b)\,u_t = -\mathcal{D}_x(b\,e^u\,u_y) - \mathcal{D}_y(a\,e^u\,u_x),
$$

então transferimos a derivada total em x para C^2 como derivada total em t, e obtemos a nova componente

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_y - v_y)\, u_t + (a+b)\, u_{yt}\right] - b\, e^u\, (u_t\, u_y + u_{ty}) \\ &= \frac{1}{2}\, e^u\, (-v_y\, u_t + (a-b)\, u_y\, u_t + (a-b)\, u_{yt}) \\ &= \frac{1}{2}\, \mathcal{D}_y((a-b)\, e^u\, u_t). \end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em y, de C^1 para C^3 como derivada total em t, obtemos a nova componente

$$\begin{aligned} C^3 &= \frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_x - v_x)\, u_t + (a+b)\, u_{xt}\right] - a\, e^u\, (u_t\, u_x + u_{tx}) \\ &= \frac{1}{2}\, e^u\, (-v_x\, u_t + (b-a)\, u_x\, u_t + (b-a)\, u_{xt}) \\ &= \frac{1}{2}\, \mathcal{D}_x((b-a)\, e^u\, u_t). \end{aligned}$$

Finalmente, transferimos a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x para obtermos uma lei de conservação trivial do primeiro tipo.

- Para o gerador Z_3, as componentes do vetor conservado (3.20) são

$$\begin{aligned} C^1 &= -(a+b)\, u_x, \\ C^2 &= \frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_y - v_y)\, u_x + (a+b)\, u_{yx}\right], \\ C^3 &= \frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_x - v_x)\, u_x + (a+b)\, u_{xx}\right]. \end{aligned}$$

Como

$$C^1 = -(a+b)\, u_x = -\mathcal{D}_x((a+b)\, u) + v_x\, u,$$

transferindo a derivada total em x para C^2 como derivada total em t, temos a nova componente

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_y - v_y)\, u_x + (a+b)\, u_{yx}\right] - (a+b)\, e^u\, (u_x\, u_y + u_{xy}) \\ &= -\frac{1}{2}\, e^u\, (v_y\, u_x + (a+b)\, u_y\, u_x + (a+b)\, u_{yx}) \\ &= -\frac{1}{2}\, \mathcal{D}_y((a+b)\, e^u\, u_x). \end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x, obtemos a nova componente

$$\begin{aligned} C^3 &= \frac{1}{2}\, e^u \, [((a+b)\, u_x - v_x)\, u_x + (a+b)\, u_{xx}] - \frac{1}{2}\, e^u \, (v_x\, u_x + (a+b)\, u_x\, u_x + (a+b)\, u_{xx}) \\ &= -e^u\, v_x\, u_x. \end{aligned}$$

Assim as componentes simplificadas são dadas por

$$C^1 = a_x\, u, \quad C^2 = 0, \quad C^3 = -a_x\, e^u\, u_x.$$

- Para o gerador Z_4, as componentes do vetor conservado (3.20) são

$$\begin{aligned} C^1 &= -(a+b)\, u_y, \\ C^2 &= \frac{1}{2}\, e^u \, [((a+b)\, u_y - v_y)\, u_y + (a+b)\, u_{yy}], \\ C^3 &= \frac{1}{2}\, e^u \, [((a+b)\, u_x - v_x)\, u_y + (a+b)\, u_{xy}]. \end{aligned}$$

Como

$$C^1 = -(a+b)\, u_y = -\mathcal{D}_y((a+b)\, u) + v_y\, u,$$

então transferimos a derivada total em y para C^3 como derivada total em t, e obtemos a nova componente

$$\begin{aligned} C^3 &= \frac{1}{2}\, e^u \, [((a+b)\, u_x - v_x)\, u_y + (a+b)\, u_{xy}] - (a+b)\, e^u\, (u_x\, u_y + u_{xy}) \\ &= -\frac{1}{2}\, e^u\, (v_x\, u_y + (a+b)\, u_y\, u_x + (a+b)\, u_{xy}) \\ &= -\frac{1}{2}\, \mathcal{D}_x((a+b)\, e^u\, u_y). \end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em x, de C^3 para C^2 como derivada total em y, obtemos a nova componente

$$\begin{aligned} C^2 &= \frac{1}{2}\, e^u \, [((a+b)\, u_y - v_y)\, u_y + (a+b)\, u_{yy}] - \frac{1}{2}\, e^u \, (v_y\, u_y + (a+b)\, u_y\, u_y + (a+b)\, u_{yy}) \\ &= -e^u\, v_y\, u_y. \end{aligned}$$

Assim as componentes simplificadas do vetor conservado são dadas por

$$C^1 = b_y\, u, \quad C^2 = -b_y\, e^u\, u_y, \quad C^3 = 0.$$

- Para o gerador Z_5, as componentes do vetor conservado (3.20) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= (a+b)(1 - x\, u_x),\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_y - v_y)(1 - x\, u_x) - (a+b)\, x\, u_{yx}\right],\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_x - v_x)(1 - x\, u_x) - (a+b)(u_x + x\, u_{xx})\right].
\end{aligned}$$

Como

$$C^1 = (a+b)(1 - x\, u_x) = a + b - (a+b)\, x\, u_x = a + b - \mathcal{D}_x((a+b)\, x\, u) + (v_x\, x + a + b)\, u,$$

então transferimos a derivada total em x para C^2 como derivada total em t, e obtemos a nova componente

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_y - v_y)(1 - x\, u_x) - (a+b)\, x\, u_{yx}\right] - (a+b)\, x\, e^u\, (u_x\, u_y + u_{xy})\\
&= -\frac{1}{2}\, e^u \left[(a+b)\, u_y - v_y - ((a+b)\, u_y - v_y)\, x\, u_x - (a+b)\, x\, u_{yx}\right]\\
&- (a+b)\, x\, e^u\, (u_x\, u_y + u_{xy})\\
&= -\frac{1}{2}\, e^u \left[-v_y + (a+b)\, u_y + v_y\, x\, u_x + (a+b)\, u_y\, x\, u_x + (a+b)\, x\, u_{yx}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\, e^u\, (-v_y + (a+b)\, u_y) - \frac{1}{2}\, \mathcal{D}_y((a+b)\, e^u\, x\, u_x).
\end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x, obtemos a nova componente

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\, e^u \left[((a+b)\, u_x - v_x)(1 - x\, u_x) - (a+b)(u_x + x\, u_{xx})\right]\\
&- \frac{1}{2}\, e^u \left[(a+b)\, u_x + v_x\, x\, u_x + (a+b)\, u_x\, x\, u_x + (a+b)\, x\, u_{xx}\right]\\
&= -\frac{1}{2}\, e^u\, (-v_x + (a+b)\, u_x + 2\, v_x\, x\, u_x).
\end{aligned}$$

Assim as componentes simplificadas do vetor conservado são dadas por

$$\begin{aligned}
C^1 &= x\, a_x\, u + (a+b)(1+u),\\
C^2 &= \frac{1}{2}\, b_y\, e^u - \frac{1}{2}\, (a+b)\, e^u\, u_y,\\
C^3 &= \frac{1}{2}\, a_x\, e^u - \left(x\, a_x + \frac{1}{2}\, (a+b)\right)\, e^u\, u_x.
\end{aligned}$$

- Para o gerador Z_6, as componentes do vetor conservado (3.20) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= (a+b)\,(1-y\,u_y),\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,e^u\,[((a+b)\,u_y - v_y)(1-y\,u_y) + (a+b)\,(u_y + y\,u_{yy})],\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,e^u\,[((a+b)\,u_x - v_x)(1-y\,u_y) + (a+b)\,y\,u_{xy}].
\end{aligned}
$$

Como

$$
C^1 = a+b-(a+b)\,y\,u_y = a+b-\mathcal{D}_y((a+b)\,y\,u) + (v_y\,y + a + b)\,u
$$

então transferimos a derivada total em y para C^3 como derivada total em t:

$$
\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\,e^u\,[((a+b)\,u_x - v_x)(1-y\,u_y) + (a+b)\,y\,u_{xy}] - (a+b)\,y\,e^u\,(u_x\,u_y + u_{xy})\\
&= -\frac{1}{2}\,e^u\,[-v_x + (a+b)\,u_x + v_x\,y\,u_y + (a+b)\,u_x\,y\,u_y + (a+b)\,y\,u_{xy}]\\
&= -\frac{1}{2}\,e^u\,(-v_x + v\,u_x) + \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_x((a+b)\,e^u\,y\,u_y).
\end{aligned}
$$

Transferindo a derivada total em x, de C^3 para C^2 como derivada total em y, temos a nova componente

$$
\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\,e^u\,[((a+b)\,u_y - v_y)(1-y\,u_y) + (a+b)\,(u_y + y\,u_{yy})]\\
&- \frac{1}{2}\,e^u\,((a+b)\,u_y + v_y\,y\,u_y + (a+b)\,u_y\,y\,u_y + (a+b)\,y\,u_{yy})\\
&= -\frac{1}{2}\,e^u\,(-v_y + (a+b)\,u_y + 2\,v_y\,y\,u_y).
\end{aligned}
$$

Assim as componentes simplificadas são dadas por

$$
\begin{aligned}
C^1 &= y\,b_y\,u + (a+b)\,(1+u),\\
C^2 &= \frac{1}{2}\,b_y\,e^u - \left(y\,b_y + \frac{1}{2}(a+b)\right)e^u\,u_y,\\
C^3 &= \frac{1}{2}\,a_x\,e^u - \frac{1}{2}(a+b)e^u\,u_x.
\end{aligned}
$$

Portanto, provamos o quarto corolário do **NTLC**, o **Corolário 1.10**, página 15.

3.5 A equação do fluxo de Ricci modificada

A equação do fluxo de Ricci modificada é uma equação do calor não-linear generalizada

$$u_t = \frac{1}{u}\, u_{xy} - \frac{1}{u^2}\, u_x\, u_y + \frac{a}{a\,t+c}\, u \tag{3.21}$$

é do tipo (3.1) com as funções coeficientes dadas por

$$A = \frac{1}{u}, \quad B = -\frac{1}{u^2}, \quad G = \frac{a}{a\,t+c}\, u, \quad R = 1, \quad C = D = E = F = P = Q = 0,$$

onde $a\,t + c \neq 0$ e $a \neq 0$.

Aplicando o **Teorema 1.1** segue o **Corolário 1.11**.

Demonstração do Corolário 1.11: A equação (1.23) nos dá

$$-\varphi\,\frac{1}{u^2} + \varphi_u\,\frac{1}{u} = -\varphi\,\frac{1}{u^2}, \qquad \text{ou seja,} \quad \varphi = \varphi(t,x,y).$$

Da equação (1.26) e $G = \frac{a}{a\,t+c}\, u$ obtemos

$$-\left(\varphi_t + \frac{1}{u}\,\varphi_{xy}\right) = \varphi\,\frac{a}{a\,t+c},$$

Daí segue que

$$\varphi_t + \frac{a}{a\,t+c}\,\varphi = 0, \qquad \varphi_{xy} = 0.$$

Assim, a função φ que satisfaz a definição de equação não-linearmente autoadjunta é

$$\varphi(t,x,y) = \frac{A(x)+B(y)}{a\,t+c},$$

com $A = A(x)$ e $B = B(y)$ funções diferenciáveis tais que $A(x) + B(y) \neq 0$. ❖

A seguir aplicaremos o **Algoritmo do NTLC** para obtermos algumas leis de conservação para a equação (3.21). As suas simetrias de Lie geram uma álgebra de Lie 6-dimensional (calculada em [12]):

$$X_1 = (a\,t+c)\,\frac{\partial}{\partial t} + a\,u\,\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = (a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,\frac{\partial}{\partial t} + a(1+\ln(a\,t+c))u\,\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_4=\frac{\partial}{\partial y},\quad X_5=x\,\frac{\partial}{\partial x}-u\,\frac{\partial}{\partial u},\quad X_6=y\,\frac{\partial}{\partial y}-u\,\frac{\partial}{\partial u}.$$

Considerando a variável adjunta $v=\frac{A(x)+B(y)}{a\,t+c}$ dada na demonstração do **Corolário 1.11**, a Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L}=v\,u_t-\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xy}-\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yx}+\frac{v}{u^2}\,u_x\,u_y-\frac{a}{a\,t+c}\,v\,u.$$

As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}=v,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}=\frac{v}{u^2}\,u_y,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_y}=\frac{v}{u^2}\,u_x,\quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xy}}=-\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}.$$

As derivadas totais que aparecem no vetor conservado são dadas por

$$\mathcal{D}_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{xy}}=-\frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}+\frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_y,\quad \mathcal{D}_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_{yx}}=-\frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}+\frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_x.$$

Seja o gerador infinitesimal geral

$$\begin{aligned} X &= (a\,t+c)\,(c_1+c_2\,\ln(a\,t+c))\,\frac{\partial}{\partial t}+(c_3+c_5\,x)\,\frac{\partial}{\partial x}+(c_4+c_6\,y)\,\frac{\partial}{\partial y}\\ &+ [c_1\,a+c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c))-c_5-c_6]\,u\,\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 são constantes arbitrárias.

A sua característica é

$$\begin{aligned} W &= [c_1\,a+c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c))-c_5-c_6]\,u-(a\,t+c)\,(c_1+c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_t\\ &- (c_3+c_5\,x)\,u_x-(c_4+c_6\,y)\,u_y, \end{aligned}$$

e suas derivadas totais são

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_xW &= -c_5\,u_x+[c_1\,a+c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c))-c_5-c_6]\,u_x\\ &- (a\,t+c)\,(c_1+c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{xt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{xx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{xy}\\ &= [c_1\,a+c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c))-2\,c_5-c_6]\,u_x-(a\,t+c)\,(c_1+c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{xt}\\ &- (c_3+c_5\,x)\,u_{xx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{xy}\\ \mathcal{D}_yW &= -c_6\,u_y+[c_1\,a+c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c))-c_5-c_6]\,u_y\\ &- (a\,t+c)\,(c_1+c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{yt}-(c_3+c_5\,x)\,u_{yx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{yy}\\ &= [c_1\,a+c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c))-c_5-2\,c_6]\,u_y-(a\,t+c)\,(c_1+c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{yt}\\ &- (c_3+c_5\,x)\,u_{yx}-(c_4+c_6\,y)\,u_{yy}. \end{aligned}$$

Então as componentes do vetor conservado são dadas por

$$
\begin{aligned}
C^1 &= W\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}\\
&= [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - c_6]\,u - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_t\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y]\,v,\\
C^2 &= W\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \mathcal{D}_y\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}}\right) + (\mathcal{D}_y W)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}}\\
&= [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - c_6]\,u - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_t\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y]\,\left(\frac{v}{u^2}\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u} - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_y\right)\\
&+ [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - 2\,c_6]\,u_y - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{yt}\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_{yx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{yy}]\,\left(-\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\right),\\
C^3 &= W\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} - \mathcal{D}_x\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}}\right) + (\mathcal{D}_x W)\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yx}}\\
&= [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - c_6]\,u - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_t\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y]\,\left(\frac{v}{u^2}\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u} - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_x\right)\\
&+ [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - 2\,c_5 - c_6]\,u_x - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{xt}\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_{xx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{xy}]\,\left(-\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
C^1 &= [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - c_6]\,u - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_t\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y]\,v,\\
C^2 &= [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - c_6]\,u - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_t\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y]\,\left(\frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_y\right)\\
&- \frac{1}{2}\,[[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - 2\,c_6]\,u_y - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{yt}\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_{yx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{yy}]\,\frac{v}{u},\\
C^3 &= [[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - c_5 - c_6]\,u - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_t\\
&- (c_3 + c_5\,x)\,u_x - (c_4 + c_6\,y)\,u_y]\,\left(\frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
- & \frac{1}{2}\,[[c_1\,a + c_2\,a\,(1+\ln(a\,t+c)) - 2\,c_5 - c_6]\,u_x - (a\,t+c)\,(c_1 + c_2\,\ln(a\,t+c))\,u_{xt} \\
- & (c_3 + c_5\,x)\,u_{xx} - (c_4 + c_6\,y)\,u_{xy}]\,\frac{v}{u}. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

- Para o gerador X_1, as componentes do vetor conservado (3.22) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \frac{A+B}{a\,t+c}\,(a\,u - (a\,t+c)\,u_t), \\
C^2 &= \left(\frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_y\right)\,(a\,u - (a\,t+c)\,u_t) - \frac{1}{2}\,(a\,u_y - (a\,t+c)\,u_{yt})\frac{v}{u} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)(a\,u - (a\,t+c)\,u_t) - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}(a\,u_y - (a\,t+c)\,u_{yt}), \\
C^3 &= \left(\frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u} + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,u_x\right)(a\,u - (a\,t+c)\,u_t) + -\frac{1}{2}\,(a\,u_x - (a\,t+c)\,u_{xt})\frac{v}{u} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)(a\,u - (a\,t+c)\,u_t) - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}(a\,u_x - (a\,t+c)\,u_{xt}).
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \frac{A+B}{a\,t+c}\,(a\,u - (a\,t+c)\,u_t) = \frac{A+B}{a\,t+c}\,a\,u - (A+B)\,u_t \\
&= \frac{A+B}{a\,t+c}\,a\,u - B\,\left(\mathcal{D}_x\left(\frac{u_y}{u}\right) + \frac{a\,u}{a\,t+c}\right) - A\,\left(\mathcal{D}_y\left(\frac{u_x}{u}\right) + \frac{a\,u}{a\,t+c}\right) \\
&= -\mathcal{D}_x\left(B\,\frac{u_y}{u}\right) - \mathcal{D}_y\left(A\,\frac{u_x}{u}\right),
\end{aligned}
$$

então transferimos a derivada total em x, de C^1 para C^2 como derivada total em t, e obtemos a nova componente

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \frac{1}{2}\,a\,v_y - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,(a\,t+c)\,u_t\,u_y + \frac{1}{2}\frac{v}{u}\,(a\,t+c)\,u_{yt} - B\left(\frac{u_{ty}}{u} - \frac{u_y\,u_t}{u^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,a\,v_y - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{A-B}{u^2}\,u_t\,u_y + \frac{1}{2}\frac{A-B}{u}\,u_{yt} \\
&= \frac{1}{2}\,a\,v_y - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{A-B}{u^2}\,u_t\,u_y + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\frac{A-B}{u}\,u_t\right) + \frac{1}{2}\,\frac{B_y}{u}\,u_t \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{A-B}{u^2}\,u_t\,u_y \\
&= \frac{a}{2}\,\frac{B_y}{a\,t+c} + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\frac{A-B}{u}\,u_t\right) \\
&= \mathcal{D}_y\left(\frac{a}{2}\,\frac{B}{a\,t+c} + \frac{1}{2}\frac{A-B}{u}\,u_t\right).
\end{aligned}
$$

Transferindo a derivada total em y, de C^1 para C^3 como derivada total em t obtemos a nova componente

$$
\begin{aligned}
C^3 &= \frac{1}{2}\,a\,v_x - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,(a\,t+c)\,u_t\,u_x + \frac{1}{2}\frac{v}{u}\,(a\,t+c)\,u_{xt} - A\left(\frac{u_{tx}}{u} - \frac{u_x\,u_t}{u^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,a\,v_x - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{B-A}{u^2}\,u_t\,u_x + \frac{1}{2}\frac{B-A}{u}\,u_{xt} \\
&= \frac{1}{2}\,a\,v_x - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{B-A}{u^2}\,u_t\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\frac{B-A}{u}\,u_t\right) + \frac{1}{2}\,\frac{A_x}{u}\,u_t \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{B-A}{u^2}\,u_t\,u_x \\
&= \frac{a}{2}\,\frac{A_x}{a\,t+c} + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\frac{B-A}{u}\,u_t\right) \\
&= \mathcal{D}_x\left(\frac{a}{2}\,\frac{A}{a\,t+c} + \frac{1}{2}\frac{B-A}{u}\,u_t\right).
\end{aligned}
$$

Transferindo a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x, obtemos uma lei de conservação trivial do primeiro tipo.

- Para o gerador X_2, as componentes do vetor conservado (3.22) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= v\,[a\,(1+\ln(a\,t+c))\,u - (a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t] \\
&= v\,a\,u + \ln(a\,t+c)\,v\,(a\,u - (a\,t+c)\,u_t), \\
C^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}\,(v\,u_y + v_y\,u)[a\,(1+\ln(a\,t+c))\,u - (a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t] - \\
&\quad \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,[a\,(1+\ln(a\,t+c))\,u_y - (a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_{yt}], \\
C^3 &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}\,(v\,u_x + v_x\,u)[a\,(1+\ln(a\,t+c))\,u - (a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t] - \\
&\quad \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,[a\,(1+\ln(a\,t+c))\,u_x - (a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_{xt}].
\end{aligned}
$$

Como

$$
C^1 = v\,a\,u - \ln(a\,t+c)\,\left(\mathcal{D}_x\left(\frac{B}{u}\,u_y\right) + \mathcal{D}_y\left(\frac{A}{u}\,u_x\right)\right),
$$

então transformamos a derivada total em x em derivada total em t:

$$
-\mathcal{D}_t\left(\ln(a\,t+c)\,\frac{B}{u}\,u_y\right) = -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y - \ln(a\,t+c)\,B\left(\frac{u_{ty}}{u} - \frac{u_y\,u_t}{u^2}\right),
$$

depois a transferimos para a componente C^2:

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,v_y - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t\,u_y \\
&+ \frac{1}{2}\frac{v}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_{yt} - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y - \ln(a\,t+c)\,B\left(\frac{u_{ty}}{u} - \frac{u_y\,u_t}{u^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,v_y - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y \\
&- \frac{A-B}{2}\,\ln(a\,t+c)\left(\frac{u_y\,u_t}{u^2} - \frac{u_{ty}}{u}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,v_y - \frac{1}{2}\,\frac{v_y}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y \\
&- \frac{A-B}{2}\,\ln(a\,t+c)\,\frac{u_y\,u_t}{u^2} + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,\frac{A-B}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t\right) \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{B_y}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t + \frac{1}{2}\,\frac{A-B}{u^2}\,\ln(a\,t+c)\,u_y\,u_t \\
&= \frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,\frac{B_y}{a\,t+c} - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,\frac{A-B}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t\right) \\
&= -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y + \mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,\frac{B}{a\,t+c} + \frac{1}{2}\,\frac{A-B}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t\right).
\end{aligned}
$$

Agora transformamos a derivada total em y, de C^1 em uma derivada total em t:

$$
-\mathcal{D}_t\left(\ln(a\,t+c)\,\frac{A}{u}\,u_x\right) = -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x - \ln(a\,t+c)\,A\left(\frac{u_{tx}}{u} - \frac{u_x\,u_t}{u^2}\right),
$$

depois a transferimos para a componente C^3:

$$
\begin{aligned}
C^3 &= \frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,v_x - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t - \frac{1}{2}\,\frac{v}{u^2}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t\,u_x \\
&+ \frac{1}{2}\frac{v}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_{xt} - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x - \ln(a\,t+c)\,A\left(\frac{u_{tx}}{u} - \frac{u_x\,u_t}{u^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,v_x - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x \\
&- \frac{B-A}{2}\,\ln(a\,t+c)\left(\frac{u_x\,u_t}{u^2} - \frac{u_{tx}}{u}\right) \\
&= \frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,v_x - \frac{1}{2}\,\frac{v_x}{u}\,(a\,t+c)\,\ln(a\,t+c)\,u_t - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x \\
&- \frac{B-A}{2}\,\ln(a\,t+c)\,\frac{u_x\,u_t}{u^2} + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,\frac{B-A}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t\right) \\
&+ \frac{1}{2}\,\frac{A_x}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t + \frac{1}{2}\,\frac{B-A}{u^2}\,\ln(a\,t+c)\,u_x\,u_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\, a\,(1+\ln(a\,t+c))\,\frac{A_x}{a\,t+c} - \frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,\frac{B-A}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t\right)\\
&= -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x + \mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,a\,(1+\ln(a\,t+c))\,\frac{A}{a\,t+c} + \frac{1}{2}\,\frac{B-A}{u}\,\ln(a\,t+c)\,u_t\right).
\end{aligned}
$$

Transferindo a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x, temos as componentes simplificadas do vetor conservado

$$
C^1 = \frac{A+B}{a\,t+c}\,a\,u, \quad C^2 = -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{B}{u}\,u_y, \quad C^3 = -\frac{a}{a\,t+c}\,\frac{A}{u}\,u_x.
$$

- Para o gerador X_3, as componentes do vetor conservado (3.22) são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -v\,u_x = -\mathcal{D}_x(v\,u) + v_x\,u,\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yx},\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xx}.
\end{aligned}
$$

Transferindo a derivada total em x, de C^1 para C^2 como derivada total em t, obtemos a nova componente

$$
\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yx} - \mathcal{D}_t\left(\frac{A+B}{a\,t+c}\,u\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yx} + \frac{a\,(A+B)}{(a\,t+c)^2}\,u - v\,u_t\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yx} + \frac{a}{a\,t+c}\,v\,u - v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y + \frac{a}{a\,t+c}\,u\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yx} - v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,v_y\,u_x - \frac{1}{2}\,v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,v_y\,u_x - \frac{1}{2}\,v\,\mathcal{D}_y\left(\frac{u_x}{u}\right) = -\mathcal{D}_y\left(\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_x\right).
\end{aligned}
$$

Agora transferimos a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x, e a nova componente C^3 torna-se

$$
\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)\,u_x + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xx} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,v_x\,u_x - \frac{1}{2}\,v\,\mathcal{D}_x\left(\frac{u_x}{u}\right)\\
&= -\frac{1}{u}\,v_x\,u_x.
\end{aligned}
$$

Assim as componentes do vetor conservado são dadas por

$$C^1 = \frac{A_x}{a\,t + c}\,u, \quad C^2 = 0, \quad C^3 = -\frac{A_x}{a\,t + c}\,\frac{u_x}{u}.$$

- Para o gerador X_4, as componentes do vetor conservado (3.22) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= -v\,u_y = -\mathcal{D}_y(v\,u) + v_y\,u,\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yy},\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xy}.
\end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em y, de C^1 para C^3 como derivada total em t, temos a nova componente

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xy} - \mathcal{D}_t(v\,u)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xy} + \frac{a}{a\,t + c}\,v\,u - v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y + \frac{a}{a\,t + c}\,u\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)u_y + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{xy} - v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,v_x\,u_y - \frac{1}{2}\,v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,v_x\,u_y - \frac{1}{2}\,v\,\mathcal{D}_x\left(\frac{u_y}{u}\right)\\
&= -\mathcal{D}_x\left(\frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_y\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em x, de C^3 para C^2 como derivada total em y:

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)\,u_y + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,u_{yy} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{u}\,v_y\,u_y - \frac{1}{2}\,v\,\mathcal{D}_y\left(\frac{u_y}{u}\right)\\
&= -\frac{1}{u}\,v_y\,u_y.
\end{aligned}$$

Assim as componentes do vetor conservado são dadas por

$$C^1 = \frac{B_y}{a\,t + c}\,u, \quad C^2 = -\frac{B_y}{a\,t + c}\,\frac{u_y}{u}, \quad C^3 = 0.$$

- Para o gerador X_5, as componentes do vetor conservado (3.22) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= -v\,(u + x\,u_x) = -\mathcal{D}_x(v\,x\,u) + x\,v_x\,u,\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)(u + x\,u_x) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(u_y + x\,u_{yx}),\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)(u + x\,u_x) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(2\,u_x + x\,u_{xx}).
\end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em x, de C^1 para C^2 como derivada total em t, obtemos a nova componente

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)(u + x\,u_x) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(u_y + x\,u_{yx}) - \mathcal{D}_t(v\,x\,u)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_y + \frac{1}{u^2}\,v\,u_y\,x\,u_x + \frac{1}{u}\,v_y\,x\,u_x - \frac{v}{u}\,x\,u_{yx}\right) - x\,v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_y - \frac{1}{u^2}\,v\,x\,u_y\,u_x + \frac{1}{u}\,v_y\,x\,u_x + \frac{v}{u}\,x\,u_{yx}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{B_y}{a\,t + c} + \mathcal{D}_y\left(\frac{u_x}{u}\,v\,x\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\mathcal{D}_y\left(\frac{B}{a\,t + c} + \frac{u_x}{u}\,v\,x\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em y, de C^2 para C^3 como derivada total em x:

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)(u + x\,u_x) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(2\,u_x + x\,u_{xx}) - \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_x\left(\frac{B}{a\,t + c} + \frac{u_x}{u}\,v\,x\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_x - \frac{v}{u}\,u_x + \frac{1}{u^2}\,v\,u_x\,x\,u_x + \frac{1}{u}\,v_x\,x\,u_x - \frac{v}{u}\,x\,u_{xx}\right)\\
&- \ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u^2}\,v\,x\,u_x\,u_x + \frac{1}{u}\,v_x\,x\,u_x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{u}\,x\,u_{xx} + \frac{u_x}{u}\,v\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_x + \frac{2}{u}\,v_x\,x\,u_x\right).
\end{aligned}$$

Assim as componentes do vetor conservado são dadas por

$$C^1 = \frac{A_x}{a\,t + c}\,x\,u, \quad C^2 = 0, \quad C^3 = -\frac{1}{2}\,\frac{A_x}{a\,t + c}\,\left(1 + \frac{2}{u}\,x\,u_x\right).$$

- Para o gerador X_6, as componentes do vetor conservado (3.22) são

$$\begin{aligned}
C^1 &= -v\,(u + y\,u_y) = -\mathcal{D}_y(v\,y\,u) + y\,v_y\,u,\\
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)(u + y\,u_y) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(2\,u_y + y\,u_{yy}),\\
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)(u + y\,u_y) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(u_x + y\,u_{xy}).
\end{aligned}$$

Transferindo a derivada total em y, de C^1 para C^3 como derivada total em t, temos a nova componente

$$\begin{aligned}
C^3 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_x + v_x\,u)(u + y\,u_y) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(u_x + y\,u_{xy}) - \mathcal{D}_t(v\,y\,u)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_x + \frac{1}{u^2}\,v\,u_x\,y\,u_y + \frac{1}{u}\,v_x\,y\,u_y - \frac{v}{u}\,y\,u_{xy}\right) - y\,v\,\left(\frac{1}{u}\,u_{xy} - \frac{1}{u^2}\,u_x\,u_y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_x - \frac{1}{u^2}\,v\,y\,u_y\,u_x + \frac{1}{u}\,v_x\,y\,u_y + \frac{v}{u}\,y\,u_{xy}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{A_x}{a\,t + c} + \mathcal{D}_x\left(\frac{u_y}{u}\,v\,y\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\,\mathcal{D}_x\left(\frac{A}{a\,t + c} + \frac{u_y}{u}\,v\,y\right).
\end{aligned}$$

Agora transferimos a derivada total em x, de C^3 para C^2 como derivada total em y, e a componente C^2 torna-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2}(v\,u_y + v_y\,u)(u + y\,u_y) + \frac{1}{2}\,\frac{v}{u}\,(2\,u_y + y\,u_{yy}) - \frac{1}{2}\,\mathcal{D}_y\left(\frac{A}{a\,t + c} + \frac{u_y}{u}\,v\,y\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_y - \frac{v}{u}\,u_y + \frac{1}{u^2}\,v\,u_y\,y\,u_y + \frac{1}{u}\,v_y\,y\,u_y - \frac{v}{u}\,y\,u_{yy}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u^2}\,v\,y\,u_y\,u_y + \frac{1}{u}\,v_y\,y\,u_y\right)\\
&- \frac{1}{2}\left(\frac{v}{u}\,y\,u_{yy} + \frac{u_y}{u}\,v\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(v_y + \frac{2}{u}\,v_y\,y\,u_y\right).
\end{aligned}$$

Assim as componentes do vetor conservado são dadas por

$$C^1 = \frac{B_y}{a\,t + c}\,y\,u, \quad C^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{B_y}{a\,t + c}\left(1 + \frac{2}{u}\,y\,u_y\right), \quad C^3 = 0.$$

Portanto, provamos o quinto corolário do **NTLC**, o **Corolário 1.12**, página 16.

Capítulo 4

Uma classe de equações evolutivas do segundo tipo

Neste capítulo provamos o **Teorema 1.2** e seus corolários, além disso calculamos as leis de conservação para as equações do fluxo geométrico hiperbólico e a equação modificada. Obtemos condições necessárias e suficientes para que a classe de equações evolutivas de segunda ordem quaselineares do segundo tipo

$$\mathcal{F} := R\,u_{tt} - A\,u_{xy} - B\,u_x\,u_y - C\,u_{xx} - D\,u_{yy} - E\,u_y - F\,u_x - P\,u_x^2 - Q\,u_y^2 - G - H\,u_t - I\,u_t^2 = 0, \tag{4.1}$$

seja não-linearmente autoadjunta.

Nas seções seguintes aplicaremos o **Teorema 1.2** e o **NTLC** para obter as leis de conservação para as equações supracitadas.

4.1 O segundo teorema principal

O segundo teorema principal nos dá condições necessárias e suficientes para que a classe de equações do segundo tipo (4.1) seja não-linearmente autoadjunta.

Primeiramente calculamos para à equação (4.1) a sua equação adjunta.

Proposição 4.1: A equação adjunta à equação (4.1) é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^* &:= R\,v_{tt} - A\,v_{xy} - C\,v_{xx} - D\,v_{yy} \\
&+ [(B - A_u)\,u_y + 2\,(P - C_u)\,u_x + F - A_y - 2\,C_x]\,v_x \\
&+ [(B - A_u)\,u_x + 2\,(Q - D_u)\,u_y + E - A_x - 2\,D_y]\,v_y \\
&+ (H + 2\,R_t + 2\,(I + R_u)\,u_t)\,v_t \\
&+ [2\,(I + R_u)\,u_{tt} + 2(B - A_u)\,u_{xy} + (B_u - A_{uu})\,u_x\,u_y + 2\,(P - C_u)\,u_{xx} \\
&+ 2\,(Q - D_u)\,u_{yy} + (B_x - A_{xu} + 2\,(Q_y - D_{yu}))\,u_y \\
&+ (B_y - A_{yu} + 2\,(P_x - C_{xu}))\,u_x + (P_u - C_{uu})\,u_x^2 \\
&+ (Q_u - D_{uu})\,u_y^2 + R_{tt} - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} \\
&+ E_y + F_x + H_t - G_u + 2\,(I_t + R_{tu})\,u_t + (I_u + R_{uu})\,u_t^2]\,v = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Demonstração: De fato, sua Lagrangeana formal é dada por

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= v\,(R\,u_{tt} - A\,u_{xy} - B\,u_x\,u_y - C\,u_{xx} - D\,u_{yy} - E\,u_y - F\,u_x - P\,u_x^2 - Q\,u_y^2 - G \\
&- H\,u_t - I\,u_t^2).
\end{aligned}
$$

As respectivas derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} &= v\,(R_u\,u_{tt} - A_u\,u_{xy} - B_u\,u_x\,u_y - C_u\,u_{xx} - D_u\,u_{yy} - E_u\,u_y - F_u\,u_x - P_u\,u_x^2 - Q_u\,u_y^2 \\
&- G_u - H_u\,u_t - I_u\,u_t^2), \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} &= -v\,(H + 2\,I\,u_t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -v\,(B\,u_y + 2\,P\,u_x + F), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} = -v\,(2\,Q\,u_y + B\,u_x + E), \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} &= v\,R, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -v\,C, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = -v\,D, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} = -v\,A.
\end{aligned}
$$

As derivadas totais que aparecem no operador de Euler-Lagrange são dadas por

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} &= (2\,I\,u_t + H)\,v_t + (2\,I\,u_{tt} + (H_u + 2\,I_t)\,u_t + 2\,I_u\,u_t^2 + H_t)\,v, \\
-\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} &= (B\,u_y + 2\,P\,u_x + F)\,v_x + (B\,u_{xy} + B_u\,u_x\,u_y + 2\,P\,u_{xx} + B_x\,u_y + (F_u + 2\,P_x)\,u_x \\
&\quad + 2\,P_u\,u_x^2 + F_x)\,v,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_y} =& (2\,Q\,u_y + B\,u_x + E)\,v_y + (B\,u_{xy} + B_u\,u_x\,u_y + 2\,Q\,u_{yy} + (E_u + 2\,Q_y)\,u_y + B_y\,u_x \\
& + 2\,Q_u\,u_y^2 + E_y)\,v, \\
\mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} =& R\,v_t + (R_t + R_u\,u_t)\,v, \\
\mathcal{D}_t^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} =& R\,v_{tt} + 2\,(R_t + R_u\,u_t)\,v_t + (R_u\,u_{tt} + 2\,R_{tu}\,u_t + R_{uu}\,u_t^2 + R_{tt})\,v, \\
\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} =& -A\,v_x - (A_x + A_u\,u_x)\,v, \\
\mathcal{D}_y \mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xy}} =& -A\,v_{xy} - (A_x + A_u\,u_x)\,v_y - (A_y + A_u\,u_y)\,v_x - (A_u\,u_{xy} + A_{uu}\,u_x\,u_y + A_{xu}\,u_y \\
& + A_{yu}\,u_x + A_{xy})\,v, \\
\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} =& -C\,v_x - (C_x + C_u\,u_x)\,v, \\
\mathcal{D}_x^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} =& -C\,v_{xx} - 2\,(C_x + C_u\,u_x)\,v_x - (C_u\,u_{xx} + C_{uu}\,u_x^2 + 2\,C_{xu}\,u_x + C_{xx})\,v, \\
\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} =& -D\,v_y - (D_y + D_u\,u_y)\,v, \\
\mathcal{D}_y^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} =& -D\,v_{yy} - 2\,(D_y + D_u\,u_y)\,v_y - (D_u\,u_{yy} + 2\,D_{yu}\,u_y + D_{uu}\,u_y^2 + D_{yy})\,v,
\end{aligned}
$$

Substituindo tais expressões na fórmula para a equação adjunta, **Definição 2.3**, obtemos a equação (4.2). ❖

Em segundo lugar determinamos quais são as equações diferenciais que a classe de equações (4.1) deve satisfazer para ser uma equação diferencial autoadjunta não-linearmente.

Proposição 4.2: A equação (4.1) é uma equação diferencial não-linearmente autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi = \varphi(t, x, y, u)$ duas vezes diferenciável com $\varphi \neq 0$ tal que as funções coeficientes satisfaçam as seguintes equações diferenciais:

$$u_{tt}: \qquad R\,\varphi_u + 2\,(I + R_u)\,\varphi = \lambda\,R, \tag{4.3}$$

$$u_{xy}: \qquad -A\,\varphi_u + 2\,(B - A_u)\,\varphi = -\lambda\,A, \tag{4.4}$$

$$u_x\,u_y: \qquad -A\,\varphi_{uu} + 2\,(B - A_u)\,\varphi_u + (B_u - A_{uu})\,\varphi = -\lambda\,B, \tag{4.5}$$

$$
\begin{array}{lll}
u_{xx}: & -C\,\varphi_u + 2\,(P - C_u)\,\varphi = -\lambda\, C, & (4.6)\\
u_{yy}: & -D\,\varphi_u + 2\,(Q - D_u)\,\varphi = -\lambda\, D, & (4.7)\\
u_y: & -A\,\varphi_{xu} - 2\,D\,\varphi_{yu} + (B - A_u)\,\varphi_x + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_y & \\
 & +\,(E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_u + (B_x - A_{xu} + 2\,(Q_y - D_{yu}))\,\varphi = -\lambda\, E, & (4.8)\\
u_x: & -A\,\varphi_{yu} - 2\,C\,\varphi_{xu} + (B - A_u)\,\varphi_y + 2\,(P - C_u)\,\varphi_x & \\
 & +\,(F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_u + (B_y - A_{yu} + 2\,(P_x - C_{xu}))\,\varphi = -\lambda\, F, & (4.9)\\
u_t: & 2\,R\,\varphi_{tu} + 2\,(I + R_u)\,\varphi_t + (H + 2\,R_t)\,\varphi_u + 2\,(I_t + R_{tu})\,\varphi = -\lambda\, H, & (4.10)\\
u_x^2: & -C\,\varphi_{uu} + 2\,(P - C_u)\,\varphi_u + (P_u - C_{uu})\,\varphi = -\lambda\, P, & (4.11)\\
u_y^2: & -D\,\varphi_{uu} + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_u + (Q_u - D_{uu})\,\varphi = -\lambda\, Q, & (4.12)\\
u_t^2: & R\,\varphi_{uu} + 2\,(I + R_u)\,\varphi_u + (I_u + R_{uu})\,\varphi = -\lambda\, I, & (4.13)\\
\mathbf{1}: & R\,\varphi_{tt} - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_y & \\
 & +\,(F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_x + (H + 2\,R_t)\,\varphi_t & \\
 & +\,(R_{tt} - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} + E_y + F_x + H_t - G_u)\,\varphi = -\lambda\, G, & (4.14)
\end{array}
$$

para alguma função $\lambda = \lambda(t, x, y, u)$ a ser determinada.

Demonstração: A equação (4.1) é não-linearmente autoadjunta se existir uma função $\varphi(t, x, y, u) \neq 0$ satisfazendo a igualdade

$$
\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} = \lambda\, \mathcal{F} \tag{4.15}
$$

para algum coeficiente λ a ser determinado.

Substituindo $v = \varphi(t, x, y, u)$ e suas derivadas parciais na fórmula (4.2) para a equação adjunta, temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} \;&=\; R\,(\varphi_{tt} + 2\,\varphi_{tu}\,u_t + \varphi_{uu}\,u_t^2 + \varphi_u\,u_{tt})\\
&-\; A\,(\varphi_{xy} + \varphi_{xu}\,u_y + \varphi_{yu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x\,u_y + \varphi_u\,u_{xy})\\
&-\; C\,(\varphi_{xx} + 2\,\varphi_{xu}\,u_x + \varphi_{uu}\,u_x^2 + \varphi_u\,u_{xx})\\
&-\; D\,(\varphi_{yy} + 2\,\varphi_{yu}\,u_y + \varphi_{uu}\,u_y^2 + \varphi_u\,u_{yy})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad ((B - A_u)\, u_y + 2\,(P - C_u)\, u_x + F - A_y - 2\, C_x)\,(\varphi_x + \varphi_u\, u_x) \\
&+ \quad ((B - A_u)\, u_x + 2\,(Q - D_u)\, u_y + E - A_x - 2\, D_y)\,(\varphi_y + \varphi_u\, u_y) \\
&+ \quad (H + 2\, R_t + 2\,(I + R_u)\, u_t)\,(\varphi_t + \varphi_u\, u_t) \\
&+ \quad [2\,(I + R_u)\, u_{tt} + 2(B - A_u)\, u_{xy} + (B_u - A_{uu})\, u_x\, u_y + 2\,(P - C_u)\, u_{xx} \\
&+ \quad 2\,(Q - D_u)\, u_{yy} + (B_x - A_{xu} + 2\,(Q_y - D_{yu}))\, u_y \\
&+ \quad (B_y - A_{yu} + 2\,(P_x - C_{xu}))\, u_x + (P_u - C_{uu})\, u_x^2 \\
&+ \quad (Q_u - D_{uu})\, u_y^2 + R_{tt} - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} \\
&+ \quad E_y + F_x + H_t - G_u + 2\,(I_t + R_{tu})\, u_t + (I_u + R_{uu})\, u_t^2]\, \varphi,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^*|_{v=\varphi(t,x,y,u)} &= (R\,\varphi_u + 2\,(I + R_u)\,\varphi)\, u_{tt} + (-A\,\varphi_u + 2\,(B - A_u)\,\varphi)\, u_{xy} \\
&+ \quad (-A\,\varphi_{uu} + 2\,(B - A_u)\,\varphi_u + (B_u - A_{uu})\,\varphi)\, u_x\, u_y \\
&+ \quad (-C\,\varphi_u + 2\,(P - C_u)\,\varphi)\, u_{xx} + (-D\,\varphi_u + 2\,(Q - D_u)\,\varphi)\, u_{yy} \\
&+ \quad [-A\,\varphi_{xu} - 2\, D\,\varphi_{yu} + (B - A_u)\,\varphi_x + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_y \\
&+ \quad (E - A_x - 2\, D_y)\,\varphi_u + (B_x - A_{xu} + 2\,(Q_y - D_{yu}))\,\varphi]\, u_y \\
&+ \quad [-A\,\varphi_{yu} - 2\, C\,\varphi_{xu} + (B - A_u)\,\varphi_y + 2\,(P - C_u)\,\varphi_x \\
&+ \quad (F - A_y - 2\, C_x)\,\varphi_u + (B_y - A_{yu} + 2\,(P_x - C_{xu}))\,\varphi]\, u_x \\
&+ \quad [2\, R\,\varphi_{tu} + 2\,(I + R_u)\,\varphi_t + (H + 2\, R_t)\,\varphi_u + 2\,(I_t + R_{tu})\,\varphi]\, u_t \\
&+ \quad (-C\,\varphi_{uu} + 2\,(P - C_u)\,\varphi_u + (P_u - C_{uu})\,\varphi)\, u_x^2 \\
&+ \quad (-D\,\varphi_{uu} + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_u + (Q_u - D_{uu})\,\varphi)\, u_y^2 \\
&+ \quad (R\,\varphi_{uu} + 2\,(I + R_u)\,\varphi_u + (I_u + R_{uu})\,\varphi)\, u_t^2 \\
&+ \quad R\,\varphi_{tt} - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (E - A_x - 2\, D_y)\,\varphi_y \\
&+ \quad (F - A_y - 2\, C_x)\,\varphi_x + (H + 2\, R_t)\,\varphi_t \\
&+ \quad (R_{tt} - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} + E_y + F_x + H_t - G_u)\,\varphi.
\end{aligned}
$$

Agora equacionamos os coeficientes dos monômios u_{tt}, u_{xy}, $u_x\, u_y$, u_{xx}, u_{yy}, u_y, u_x, u_x^2, u_y^2, u_t, u_t^2, e $\mathbf{1}$ em ambos os lados da equação (4.15) para obtermos as equações determinantes para a autoadjunticidade da equação (4.1). ❖

Finalmente, tendo estas duas proposições em mãos temos condições de provar nosso segundo teorema, **Teorema 1.2**, página 17.

Demonstração do Teorema 1.2: Com a **Proposição 4.2** em mãos as equações (1.44), (1.45), (1.46), (1.47), (1.48) e (1.49) são obtidas da seguinte forma:

Somando a equação (4.3) multiplicada por A com a equação (4.4) multiplicada por R obtemos

$$2\,A\,(I+R_u)\,\varphi + 2\,R\,(B-A_u)\,\varphi = 0,$$

ou seja,

$$R\,A_u - A\,R_u = A\,I + R\,B = A_1,\ \text{pois}\quad \varphi \neq 0.$$

Subtraindo a equação (4.6) multiplicada por D da equação (4.7) multiplicada por C temos

$$2\,D\,(P-C_u)\,\varphi - 2\,C\,(Q-D_u)\,\varphi = 0,$$

ou seja,

$$D\,C_u - C\,D_u = D\,P - C\,Q = B_1.$$

Somando a equação (4.3) multiplicada por C com a equação (4.6) multiplicada por R obtemos

$$2\,C\,(I+R_u)\,\varphi + 2\,R\,(P-C_u)\,\varphi = 0,$$

ou seja,

$$R\,C_u - C\,R_u = C\,I + R\,P = C_1.$$

Somando a equação (4.3) multiplicada por D com a equação (4.7) multiplicada por R temos

$$2\,D\,(I+R_u)\,\varphi + 2\,R\,(Q-D_u)\,\varphi = 0,$$

ou seja,

$$R\,D_u - D\,R_u = D\,I + R\,Q = D_1.$$

Subtraindo a equação (4.6) multiplicada por A da equação (4.4) multiplicada por C obtemos

$$2\,A\,(P - C_u)\,\varphi - 2\,C\,(B - A_u)\,\varphi = 0,$$

ou seja,

$$A\,C_u - C\,A_u = A\,P - C\,B = E_1.$$

Subtraindo a equação (4.7) multiplicada por A da equação (4.4) multiplicada por D temos

$$2\,A\,(Q - D_u)\,\varphi - 2\,D\,(B - A_u)\,\varphi = 0,$$

ou seja,

$$A\,D_u - D\,A_u = A\,Q - D\,B = F_1.$$

Agora determinamos a equação (4.2) substituindo λ em certas equações; uma vez que $R \neq 0$ a equação (4.3) nos dá

$$\lambda = \varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi.$$

Substituindo λ na equação (4.13) obtemos

$$R\,\varphi_{uu} + 2\,(I + R_u)\,\varphi_u + (I_u + R_{uu})\,\varphi = -I\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi),$$

ou seja,

$$R^2\,\varphi_{uu} + R\,(3\,I + 2\,R_u)\,\varphi_u + (R\,(I_u + R_{uu}) + 2\,I\,(I + R_u))\,\varphi = 0. \qquad (4.16)$$

Substituindo λ na equação (4.5) temos

$$-A\,\varphi_{uu} + 2\,(B - A_u)\,\varphi_u + (B_u - A_{uu})\,\varphi = -B\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi),$$

ou seja,

$$- R\, A\, \varphi_{uu} + R\, (3\, B - 2\, A_u)\, \varphi_u + (R\, (B_u - A_{uu}) + 2\, B\, (I + R_u))\, \varphi = 0. \tag{4.17}$$

Somando a equação (4.16) multiplicada por A com a equação (4.17) multiplicada por R obtemos

$$\begin{aligned} & R\, (A\, (3\, I + 2\, R_u) + R\, (3\, B - 2\, A_u))\, \varphi_u \\ + \{A\, [R\, (I_u + R_{uu}) + 2\, I\, (I + R_u)] + R\, [R\, (B_u - A_{uu}) + 2\, B\, (I + R_u)]\}\, \varphi & = 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Notamos que as equações (1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49) são equivalentes, respectivamente, às seguintes equações:

$$A\, R_u - R\, A_u = -(A\, I + R\, B), \tag{4.19}$$

$$C\, D_u - D\, C_u = -(D\, P - C\, Q), \tag{4.20}$$

$$- R\, (P - C_u) = C\, (I + R_u), \tag{4.21}$$

$$R\, (Q - D_u) = -D\, (I + R_u), \tag{4.22}$$

$$C\, A_u - A\, C_u = -(A\, P - C\, B), \tag{4.23}$$

$$D\, A_u - A\, D_u = -(A\, Q - D\, B). \tag{4.24}$$

Da equação (4.19) obtemos

$$\begin{aligned} R\, (A\, (3\, I + 2\, R_u) + R\, (3\, B - 2\, A_u)) & = R\, (3\, (A\, I + R\, B) + 2\, (A\, R_u - R\, A_u)) \\ & = R\, (A\, I + R\, B), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& A\,[R\,(I_u + R_{uu}) + 2\,I\,(I + R_u)] + R\,[R\,(B_u - A_{uu}) + 2\,B\,(I + R_u)] \\
= \;& R\,[A\,(I_u + R_{uu}) + R\,(B_u - A_{uu})] + 2\,(A\,I + R\,B)(I + R_u) \\
= \;& R\,[(A\,(I + R_u) + R\,(B - A_u))_u - A_u\,(I + R_u) - R_u\,(B - A_u)] + 2\,(A\,I + R\,B)(I + R_u) \\
= \;& -R\,(A_u\,(I + R_u) + R_u\,(B - A_u)) + 2\,(A\,I + R\,B)(I + R_u) \\
= \;& -R\,R_u\,(B - A_u) + (2\,(A\,I + R\,B) - R\,A_u)(I + R_u) \\
= \;& R_u\,A\,(I + R_u) + (2\,(A\,I + R\,B) - R\,A_u)(I + R_u) \\
= \;& (2\,(A\,I + R\,B) + A\,R_u - R\,A_u)(I + R_u) \\
= \;& (A\,I + R\,B)(I + R_u),
\end{aligned}
$$

então a equação (4.18) torna-se

$$
\begin{aligned}
R\,(A\,I + R\,B)\,\varphi_u + (A\,I + R\,B)(I + R_u)\,\varphi &= (A\,I + R\,B)(R\,\varphi_u + (I + R_u)\,\varphi) \\
&= (A\,I + R\,B)((R\,\varphi)_u + I\,\varphi) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Assim $(R\,\varphi)_u + I\,\varphi = 0$ se $A_1 \neq 0$.

Substituindo λ na equação (4.10) temos

$$
-C\,\varphi_{uu} + 2\,(P - C_u)\,\varphi_u + (P_u - C_{uu})\,\varphi = -P\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi),
$$

ou seja,

$$
-\,R\,C\,\varphi_{uu} + R\,(3\,P - 2\,C_u)\,\varphi_u + (R\,(P_u - C_{uu}) + 2\,P\,(I + R_u))\,\varphi = 0. \tag{4.25}
$$

Substituindo λ na equação (4.11) obtemos

$$
-D\,\varphi_{uu} + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_u + (Q_u - D_{uu})\,\varphi = -Q\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi),
$$

ou seja,

$$
-\,R\,D\,\varphi_{uu} + R\,(3\,Q - 2\,D_u)\,\varphi_u + (R\,(Q_u - D_{uu}) + 2\,Q\,(I + R_u))\,\varphi = 0. \tag{4.26}
$$

Subtraindo a equação (4.25) multiplicada por D da equação (4.26) multiplicada por C temos

$$\begin{aligned} R\,(D\,(3\,P-2\,C_u)-C\,(3\,Q-2\,D_u))\,\varphi_u \\ +\{D\,[R\,(P_u-C_{uu})+2\,P\,(I+R_u)]-C\,[R\,(Q_u-D_{uu})+2\,Q\,(I+R_u)]\}\,\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Da equação (4.20) obtemos

$$\begin{aligned} R\,[D\,(3\,P-2\,C_u)-C\,(3\,Q-2\,D_u)] &= R\,[3\,(D\,P-C\,Q)+2\,(C\,D_u-D\,C_u)] \\ &= R\,(D\,P-C\,Q), \end{aligned}$$

Da equação (4.20) segue que

$$\begin{aligned} & D\,[R\,(P_u-C_{uu})+2\,P\,(I+R_u)]-C\,[R\,(Q_u-D_{uu})+2\,Q\,(I+R_u)] \\ = {} & R\,[D\,(P_u-C_{uu})-C\,(Q_u-D_{uu})]+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u) \\ = {} & R\,[(D\,(P-C_u)-C\,(Q-D_u))_u-D_u\,(P-C_u)+C_u\,(Q-D_u)]+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u) \\ = {} & R\,[-D_u\,(P-C_u)+C_u\,(Q-D_u)]+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u). \end{aligned}$$

A equação (4.21) implica que

$$\begin{aligned} & R\,[-D_u\,(P-C_u)+C_u\,(Q-D_u)]+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u) \\ = {} & C\,D_u\,(I+R_u)+R\,C_u\,(Q-D_u)+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u). \end{aligned}$$

A equação (4.22) nos dá

$$\begin{aligned} & C\,D_u\,(I+R_u)+R\,C_u\,(Q-D_u)+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u) \\ = {} & (C\,D_u-D\,C_u)\,(I+R_u)+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u). \end{aligned}$$

Da equação (4.20) obtemos

$$\begin{aligned} & (C\,D_u-D\,C_u)\,(I+R_u)+2\,(D\,P-C\,Q)(I+R_u) \\ = {} & (2\,(D\,P-C\,Q)-D\,C_u+C\,D_u)\,(I+R_u) \\ = {} & (D\,P-C\,Q)(I+R_u). \end{aligned}$$

Então a equação (4.27) torna-se

$$\begin{aligned} R\,(D\,P - C\,Q)\,\varphi_u + (D\,P - C\,Q)\,(I + R_u)\,\varphi &= (D\,P - C\,Q)\,(R\,\varphi_u + (I + R_u)\,\varphi) \\ &= (D\,P - C\,Q)\,((R\,\varphi)_u + I\,\varphi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim $(R\,\varphi)_u + I\,\varphi = 0$ se $B_1 \neq 0$.

Somando a equação (4.16) multiplicada por C com a equação (4.25) multiplicada por R obtemos

$$\begin{aligned} & R\,(C\,(3\,I + 2\,R_u) + R\,(3\,P - 2\,C_u))\,\varphi_u \\ +\{C\,[R\,(I_u + R_{uu}) + 2\,I\,(I + R_u)] + R\,[R\,(P_u - C_{uu}) + 2\,P\,(I + R_u)]\}\,\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Da equação (4.20) obtemos

$$\begin{aligned} R\,[C\,(3\,I + 2\,R_u) + R\,(3\,P - 2\,C_u)] &= R\,[3\,(C\,I + R\,P) + 2\,(C\,R_u - R\,C_u)] \\ &= R\,(C\,I + R\,P). \end{aligned}$$

Da equação (4.21) segue que

$$\begin{aligned} & C\,[R\,(I_u + R_{uu}) + 2\,I\,(I + R_u)] + R\,[R\,(P_u - C_{uu}) + 2\,P\,(I + R_u)] \\ = \;& R\,[C\,(I_u + R_{uu}) + R\,(P_u - C_{uu})] + 2\,(C\,I + R\,P)(I + R_u) \\ = \;& R\,[(C\,(I + R_u) + R\,(P - C_u))_u - C_u\,(I + R_u) - R_u\,(P - C_u)] + 2\,(C\,I + R\,P)(I + R_u) \\ = \;& -R\,[C_u\,(I + R_u) + R_u\,(P - C_u)] + 2\,(C\,I + R\,P)(I + R_u) \\ = \;& -R\,R_u\,(P - C_u) + (2\,(C\,I + R\,P) - R\,C_u)(I + R_u) \\ = \;& R_u\,C\,(I + R_u) + (2\,(C\,I + R\,P) - R\,C_u)(I + R_u) \\ = \;& (2\,(C\,I + R\,P) + C\,R_u - R\,C_u)(I + R_u). \end{aligned}$$

A equação (4.20) implica que

$$(2\,(C\,I + R\,P) + C\,R_u - R\,C_u)(I + R_u) = (C\,I + R\,P)(I + R_u).$$

Então a equação (4.28) torna-se

$$\begin{aligned}
R\,(C\,I + R\,P)\,\varphi_u + (C\,I + R\,P)(I + R_u)\,\varphi &= (C\,I + R\,P)(R\,\varphi_u + (I + R_u)\,\varphi) \\
&= (C\,I + R\,P)((R\,\varphi)_u + I\,\varphi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim $(R\,\varphi)_u + I\,\varphi = 0$ se $C_1 \neq 0$.

Somando a equação (4.16) multiplicada por D com a equação (4.26) multiplicada por R temos

$$\begin{aligned}
&R\,(D\,(3\,I + 2\,R_u) + R\,(3\,Q - 2\,D_u))\,\varphi_u \\
&+\{D\,[R\,(I_u + R_{uu}) + 2\,I\,(I + R_u)] + R\,[R\,(Q_u - D_{uu}) + 2\,Q\,(I + R_u)]\}\,\varphi = 0.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Da equação (4.22) segue que

$$\begin{aligned}
R\,[D\,(3\,I + 2\,R_u) + R\,(3\,Q - 2\,D_u)] &= R\,[3\,(D\,I + R\,Q) + 2\,(D\,R_u - R\,D_u)] \\
&= R\,(D\,I + R\,Q),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D\,[R\,(I_u + R_{uu}) + 2\,I\,(I + R_u)] + R\,[R\,(Q_u - D_{uu}) + 2\,Q\,(I + R_u)] \\
= \;& R\,[D\,(I_u + R_{uu}) + R\,(Q_u - D_{uu})] + 2\,(D\,I + R\,Q)(I + R_u) \\
= \;& R\,[(D\,(I + R_u) + R\,(Q - D_u))_u - D_u\,(I + R_u) - R_u\,(Q - D_u)] + 2\,(D\,I + R\,Q)(I + R_u) \\
= \;& -R\,[D_u\,(I + R_u) + R_u\,(Q - D_u)] + 2\,(D\,I + R\,Q)(I + R_u) \\
= \;& -R\,R_u\,(Q - D_u) + (2\,(D\,I + R\,Q) - R\,D_u)(I + R_u) \\
= \;& R_u\,D\,(I + R_u) + (2\,(D\,I + R\,Q) - R\,D_u)(I + R_u) \\
= \;& (2\,(D\,I + R\,Q) + D\,R_u - R\,D_u)(I + R_u) \\
= \;& (D\,I + R\,Q)(I + R_u).
\end{aligned}$$

Então a equação (4.29) torna-se

$$\begin{aligned}
R\,(D\,I + R\,Q)\,\varphi_u + (D\,I + R\,Q)(I + R_u)\,\varphi &= (D\,I + R\,Q)(R\,\varphi_u + (I + R_u)\,\varphi) \\
&= (D\,I + R\,Q)((R\,\varphi)_u + I\,\varphi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim $(R\,\varphi)_u + I\,\varphi = 0$ se $D_1 \neq 0$.

Subtraindo a equação (4.25) multiplicada por A da equação (4.17) multiplicada por C obtemos

$$\begin{aligned} & R\,(A\,(3\,P - 2\,C_u) - C\,(3\,B - 2\,A_u))\,\varphi_u \\ +\{A\,[R\,(P_u - C_{uu}) + 2\,P\,(I + R_u)] - C\,[R\,(B_u - A_{uu}) + 2\,B\,(I + R_u)]\}\,\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Da equação (4.23) obtemos

$$\begin{aligned} R\,[A\,(3\,P - 2\,C_u) - C\,(3\,B - 2\,A_u)] &= R\,[3\,(A\,P - C\,B) + 2\,(C\,A_u - A\,C_u)] \\ &= R\,(A\,P - C\,B), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A\,[R\,(P_u - C_{uu}) + 2\,P\,(I + R_u)] - C\,[R\,(B_u - A_{uu}) + 2\,B\,(I + R_u)] \\ = {} & R\,[A\,(P_u - C_{uu}) - C\,(B_u - A_{uu})] + 2\,(A\,P - C\,B)(I + R_u) \\ = {} & R\,[(A\,(P - C_u) - C\,(B - A_u))_u - A_u\,(P - C_u) + C_u\,(B - A_u)] + 2\,(A\,P - C\,B)(I + R_u) \\ = {} & R\,[-A_u\,(P - C_u) + C_u\,(B - A_u)] + 2\,(A\,P - C\,B)(I + R_u). \end{aligned}$$

A equação (4.21) nos dá

$$\begin{aligned} & R\,[-A_u\,(P - C_u) + C_u\,(B - A_u)] + 2\,(A\,P - C\,B)(I + R_u) \\ = {} & C\,A_u\,(I + R_u) + R\,C_u\,(B - A_u) + 2\,(A\,P - C\,B)(I + R_u). \end{aligned}$$

A equação (4.19) implica que

$$\begin{aligned} & C\,A_u\,(I + R_u) + R\,C_u\,(B - A_u) + 2\,(A\,P - C\,B)(I + R_u) \\ = {} & (C\,A_u - A\,C_u)\,(I + R_u) + 2\,(A\,P - C\,B)(I + R_u). \end{aligned}$$

Da equação (4.23) segue que

$$(2\,(A\,P - C\,B) - A\,C_u + C\,A_u)(I + R_u) = (A\,P - C\,B)(I + R_u).$$

Então a equação (4.27) torna-se

$$
\begin{aligned}
R\,(A\,P - C\,B)\,\varphi_u + (A\,P - C\,B)\,(I + R_u)\,\varphi &= (A\,P - C\,B)\,(R\,\varphi_u + (I + R_u)\,\varphi) \\
&= (A\,P - C\,B)\,((R\,\varphi)_u + I\,\varphi) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Assim $(R\,\varphi)_u + I\,\varphi = 0$ se $E_1 \neq 0$.

Subtraindo a equação (4.26) multiplicada por A da equação (4.17) multiplicada por D temos

$$
\begin{aligned}
&R\,(A\,(3\,Q - 2\,D_u) - D\,(3\,B - 2\,A_u))\,\varphi_u \\
+&\{A\,[R\,(Q_u - D_{uu}) + 2\,Q\,(I + R_u)] - D\,[R\,(B_u - A_{uu}) + 2\,B\,(I + R_u)]\}\,\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

Da equação (4.24) obtemos

$$
\begin{aligned}
R\,[A\,(3\,Q - 2\,D_u) - D\,(3\,B - 2\,A_u)] &= R\,[3\,(A\,Q - D\,B) + 2\,(D\,A_u - A\,D_u)] \\
&= R\,(A\,Q - D\,B).
\end{aligned}
$$

Da equação (4.24) segue que

$$
\begin{aligned}
&A\,[R\,(Q_u - D_{uu}) + 2\,Q\,(I + R_u)] - D\,[R\,(B_u - A_{uu}) + 2\,B\,(I + R_u)] \\
=\;& R\,[A\,(Q_u - D_{uu}) - D\,(B_u - A_{uu})] + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u) \\
=\;& R\,[(A\,(Q - D_u) - D\,(B - A_u))_u - A_u\,(Q - D_u) + D_u\,(B - A_u)] + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u) \\
=\;& R\,[-A_u\,(Q - D_u) + D_u\,(B - A_u)] + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u).
\end{aligned}
$$

A equação (4.22) implica que

$$
\begin{aligned}
&R\,[-A_u\,(Q - D_u) + D_u\,(B - A_u)] + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u) \\
=\;& D\,A_u\,(I + R_u) + R\,D_u\,(B - A_u) + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u).
\end{aligned}
$$

A equação (4.19) nos dá

$$
\begin{aligned}
&D\,A_u\,(I + R_u) + R\,D_u\,(B - A_u) + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u) \\
=\;& (D\,A_u - A\,D_u)\,(I + R_u) + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u).
\end{aligned}
$$

Da equação (4.24) segue que

$$\begin{aligned}
& (D\,A_u - A\,D_u)\,(I + R_u) + 2\,(A\,Q - D\,B)(I + R_u) \\
= \;& (2\,(A\,Q - D\,B) + D\,A_u - A\,D_u)(I + R_u) \\
= \;& (A\,Q - D\,B)(I + R_u).
\end{aligned}$$

Então a equação (4.31) torna-se

$$\begin{aligned}
R\,(A\,Q - D\,B)\,\varphi_u + (A\,Q - D\,B)\,(I + R_u)\,\varphi &= (A\,Q - D\,B)\,(R\,\varphi_u + (I + R_u)\,\varphi) \\
&= (A\,Q - D\,B)\,((R\,\varphi)_u + I\,\varphi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim $(R\,\varphi)_u + I\,\varphi = 0$ se $F_1 \neq 0$.

A equação (1.40) é obtida substituindo λ na equação (4.10):

$$2\,R\,\varphi_{tu} + 2\,(I + R_u)\,\varphi_t + (H + 2\,R_t)\,\varphi_u + 2\,(I_t + R_{tu})\,\varphi = -H\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi),$$

ou seja,

$$(R\,\varphi)_{tu} + (I\,\varphi)_t + H\,(\varphi_u + R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) = 0.$$

A equação (1.41) é obtida substituindo λ na equação (4.9):

$$\begin{aligned}
-F\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) &= -A\,\varphi_{yu} - 2\,C\,\varphi_{xu} + (B - A_u)\,\varphi_y + 2\,(P - C_u)\,\varphi_x \\
&+ (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_u + (B_y - A_{yu} + 2\,(P_x - C_{xu}))\,\varphi \\
&= (-A\,\varphi_u - A_u\,\varphi + B\,\varphi)_y + 2\,(-C\,\varphi_u - C_u\,\varphi + P\,\varphi)_x + F\,\varphi_u \\
&= (-(A\,\varphi)_u + B\,\varphi)_y + 2\,(-(C\,\varphi)_u + P\,\varphi)_x + F\,\varphi_u,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$((A\,\varphi)_u - B\,\varphi)_y + 2\,((C\,\varphi)_u - P\,\varphi)_x - 2\,F\,(\varphi_u + R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) = 0.$$

A equação (1.42) é obtida substituindo λ na equação (4.8):

$$\begin{aligned}
-E\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) &= -A\,\varphi_{xu} - 2\,D\,\varphi_{yu} + (B - A_u)\,\varphi_x + 2\,(Q - D_u)\,\varphi_y \\
&+ (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_u + (B_x - A_{xu} + 2\,(Q_y - D_{yu}))\,\varphi \\
&= (-A\,\varphi_u - A_u\,\varphi + B\,\varphi)_x + 2\,(-D\,\varphi_u - D_u\,\varphi + Q\,\varphi)_y + E\,\varphi_u \\
&= (-(A\,\varphi)_u + B\,\varphi)_x + 2\,(-(D\,\varphi)_u + Q\,\varphi)_y + E\,\varphi_u,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$((A\,\varphi)_u - B\,\varphi)_x + 2\,((D\,\varphi)_u - Q\,\varphi)_y - 2\,E\,(\varphi_u + R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) = 0.$$

Finalmente, a equação (1.43) é obtida substituindo λ na equação (4.14):

$$\begin{aligned}
-G\,(\varphi_u + 2\,R^{-1}\,(I + R_u)\,\varphi) &= R\,\varphi_{tt} - A\,\varphi_{xy} - C\,\varphi_{xx} - D\,\varphi_{yy} + (E - A_x - 2\,D_y)\,\varphi_y \\
&+ (F - A_y - 2\,C_x)\,\varphi_x + (H + 2\,R_t)\,\varphi_t \\
&+ (R_{tt} - A_{xy} - C_{xx} - D_{yy} + E_y + F_x + H_t - G_u)\,\varphi \\
&= (R\,\varphi)_{tt} - (A\,\varphi)_{xy} - (C\,\varphi)_{xx} - (D\,\varphi)_{yy} + (E\,\varphi)_y \\
&+ (F\,\varphi)_x + (H\,\varphi)_t - G_u\,\varphi,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&(\varphi\,R)_{tt} - (\varphi\,A)_{xy} - (\varphi\,C)_{xx} - (\varphi\,D)_{yy} + (\varphi\,E)_y \\
= \; &-(\varphi\,F)_x - (\varphi\,H)_t - \varphi_u\,G - (2\,G\,R^{-1}\,(I + R_u) - G_u)\,\varphi.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação (4.1) é não-linearmente autoadjunta se, e somente se, existir uma função $\varphi(t, x, y, u) \neq 0$ duas vezes diferenciável e uma função $\lambda = \lambda(t, x, y, u)$ tal que as funções coeficientes satisfazem as condições (1.39), (1.40), (1.41), (1.42), (1.43), (1.44), (1.45), (1.46), (1.47), (1.48) e (1.49). ❖

Como consequências do **Teorema** 1.2 obtemos a quase autoadjunticidade e a autoadjunticidade estrita para a equação (4.1).

Demonstração do Corolário 1.13: Considerando a definição de quase autoadjunticidade (**Definição 2.4**), o resultado segue do **Teorema 1.2** com $\varphi = \varphi(u)$. ❖

Demonstração do Corolário 1.14: Considerando a definição de autoadjunticidade estrita (**Definição 2.4**), o resultado segue do **Corolário 1.13** com $\varphi = u$. ❖

4.2 A equação do fluxo geométrico hiperbólico

A equação do fluxo geométrico hiperbólico conforme [42] é uma equação evolutiva de segunda ordem não-linear obtida quando as componentes do tensor métrico g_{ij} sobre uma variedade riemanniana $(\mathcal{M}^m,\, g)$ são deformadas conforme a equação:

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial t^2} = -R_{ij}, \tag{4.32}$$

onde R_{ij} são as componentes do tensor de Ricci. Essa é a forma natural de estudarmos o comportamento de onda da métrica e das curvaturas Riemanniana, de Ricci e escalar, assim como as singularidades, existência e regularidade das soluções. Além disso, a equação (4.32) pode ser vista como a equação do fluxo geométrico hiperbólico de Einstein no vácuo. Essas questões foram estudadas e respondidas em [42].

Sobre uma superfície regular $(\mathcal{M}^2,\, g)$ com a métrica em coordenadas conformes a equação (4.32), (veja a Proposição A.2 no Apêndice), torna-se

$$u_{tt} = e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - u_t^2, \tag{4.33}$$

a qual é do tipo (4.1) com as funções coeficientes dadas por

$$C = D = e^{-u}, \qquad I = -1, \qquad R = 1, \qquad A = B = E = F = G = P = Q = H = 0.$$

Aplicando o **Teorema 1.2** obtemos o **Corolário 1.15**.

Demonstração do Corolário 1.15: Conforme o **Teorema 1.2** temos

$$\begin{aligned}
A_1 &:= R\,A_u - A\,R_u = 0,\\
B_1 &:= D\,C_u - C\,D_u = 0,\\
C_1 &:= R\,C_u - C\,R_u = -e^{-u},\\
D_1 &:= R\,D_u - D\,R_u = C_1,\\
E_1 &:= A\,C_u - C\,A_u = 0,\\
F_1 &:= A\,D_u - D\,A_u = 0.
\end{aligned}$$

Além disso, as funções coeficientes satisfazem as seguintes relações:

$$A\,I + R\,B = 0 = A_1, \quad D\,P - C\,Q = 0 = B_1, \quad C\,I + R\,P = -e^{-u} = C_1,$$

$$A\,P - C\,B = 0 = E_1, \quad A\,Q - D\,B = 0 = F_1.$$

Como $C_1 \neq 0$ a equação (1.39) nos dá

$$\varphi_u = \varphi, \quad \text{ou seja,} \quad \varphi = \varphi^1\, e^u,$$

com φ^1 uma função não-nula nas variáveis independentes t, x e y.

As equações (1.40, 1.41, 1.42) são satisfeitas trivialmente por φ. Da equação (1.43) obtemos

$$0 = \varphi_{tt} - \varphi_{xx}\, C - \varphi_{yy}\, D = \varphi^1_{tt}\, e^u - \varphi^1_{xx} - \varphi^1_{yy},$$

ou seja,

$$0 = \varphi^1_{tt} = \varphi^1_{xx} + \varphi^1_{yy}.$$

Daí, $\varphi = (\alpha\, t + \beta)\, e^u$ com $\alpha = \alpha(x, y)$ e $\beta = \beta(x, y)$ sendo funções harmônicas tais que $\alpha\, t + \beta \neq 0$. Portanto, a autoadjunticidade não-linear da equação (4.33) está verificada.

❖

Demonstração do Corolário 1.16: O resultado segue do **Corolário 1.15** tomando $\varphi = \beta\, e^u$ com β uma constante não-nula. ❖

Na sequência calcularemos as leis de conservação para a equação (4.33) através do **Algoritmo do NTLC**. As suas simetrias de Lie estão calculadas em [40] e [10] em termos de duas funções arbitrárias satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann, o seu gerador infinitesimal geral é dado por

$$X = (c_1 + c_2\, t)\, \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, y)\, \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\, \frac{\partial}{\partial y} + 2\,(c_2 - \xi_x)\, \frac{\partial}{\partial u},$$

com c_1 e c_2 sendo constantes arbitrárias, $\xi_x = \eta_y$ e $\eta_x = -\xi_y$.

No artigo [10] são calculadas as simetrias de Lie, o sistema optimal de geradores para um caso particular de simetrias. Já em [40] são estudadas as questões de existência, singularidades, soluções grupo-invariantes; em particular, um sistema optimal de geradores e as respectivas soluções exatas grupo-invariantes do tipo onda viajante são calculados.

Considerando a variável adjunta $v = \beta\, e^u$ dada na demonstração do **Corolário 1.16**, a Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L} = \beta\, e^u\,(u_{tt} - e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}) + u_t^2), \text{ ou seja, } \mathcal{L} = \beta\,(e^u\,(u_{tt} + u_t^2) - u_{xx} - u_{yy}).$$

As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = 2\,\beta\, e^u\, u_t, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} = \beta\, e^u, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -\beta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = -\beta.$$

As derivadas totais que aparecem no vetor conservado são dadas por

$$-\mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} = -\beta\, e^u\, u_t, \quad -\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = 0, \quad -\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = 0.$$

Dada a característica

$$W = 2\,(c_2 - \xi_x) - (c_1 + c_2\, t)\, u_t - \xi\, u_x - \eta\, u_y,$$

e suas derivadas totais

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_t W &= -c_2\, u_t - (c_1 + c_2\, t)\, u_{tt} - \xi\, u_{tx} - \eta\, u_{ty} \\
&= -c_2\, u_t - (c_1 + c_2\, t)\,(e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - u_t^2) - \xi\, u_{tx} - \eta\, u_{ty}, \\
\mathcal{D}_x W &= -2\,\xi_{xx} - (c_1 + c_2\, t)\, u_{xt} - \xi_x\, u_x - \eta_x\, u_y - \xi\, u_{xx} - \eta\, u_{xy}, \\
\mathcal{D}_y W &= -2\,\xi_{yx} - (c_1 + c_2\, t)\, u_{yt} - \xi_y\, u_x - \eta_y\, u_y - \xi\, u_{yx} - \eta\, u_{yy},
\end{aligned}$$

as componentes do vetor conservado são dadas por

$$\begin{aligned}
C^1 &= W\,\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}}\right) + \mathcal{D}_t W\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} = W\,\left(2\,\beta\, e^u\, u_t - \beta\, e^u\, u_t\right) + \mathcal{D}_t W\, \beta\, e^u \\
&= \beta\, e^u\,(W\, u_t + \mathcal{D}_t W), \\
C^2 &= W\left(-\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}}\right) + \mathcal{D}_x W\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -\beta\, \mathcal{D}_x W, \\
C^3 &= W\left(-\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}}\right) + \mathcal{D}_y W\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = -\beta\, \mathcal{D}_y W,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \beta\, e^u \,\{[2\,(c_2-\xi_x)-(c_1+c_2\,t)\,u_t-\xi\,u_x-\eta\,u_y]\,u_t\\
&- c_2\,u_t-(c_1+c_2\,t)\,(e^{-u}\,(u_{xx}+u_{yy})-u_t^2)-\xi\,u_{tx}-\eta\,u_{ty}\},\\
C^2 &= \beta\,[2\,\xi_{xx}+(c_1+c_2\,t)\,u_{xt}+\xi_x\,u_x+\eta_x\,u_y+\xi\,u_{xx}+\eta\,u_{xy}],\\
C^3 &= \beta\,[2\,\xi_{yx}+(c_1+c_2\,t)\,u_{yt}+\xi_y\,u_x+\eta_y\,u_y+\xi\,u_{yx}+\eta\,u_{yy}].
\end{aligned}
$$

A componente C^1 é simplificada, conforme o passo 5) do **Algoritmo do NTLC**. As parcelas envolvendo derivadas parciais de segunda ordem, u_{xx} e u_{tx}, são transformadas em derivadas totais em x:

$$
\begin{aligned}
&- \beta\, e^u\,((c_1+c_2\,t)\,e^{-u}\,u_{xx}+\xi\,u_{tx}) = -\beta\,((c_1+c_2\,t)\,u_{xx}+\xi\,e^u\,u_{tx})\\
&= -\beta\,\mathcal{D}_x[(c_1+c_2\,t)\,u_x+\xi\,e^u\,u_t]+\beta\,(\xi_x+\xi\,u_x)\,e^u\,u_t,
\end{aligned}
$$

depois a derivada total em x é transformada em derivada total em t:

$$
\begin{aligned}
&- \beta\,\mathcal{D}_t[(c_1+c_2\,t)\,u_x+\xi\,e^u\,u_t] = -\beta\,[c_2\,u_x+(c_1+c_2\,t)\,u_{tx}+\xi\,(u_t^2+u_{tt})\,e^u]\\
&= -\beta\,[c_2\,u_x+(c_1+c_2\,t)\,u_{tx}+\xi\,(u_{xx}+u_{yy})].
\end{aligned}
$$

Por fim é transferida para a componente C^2.

Assim as novas componentes C^1 e C^2 tornam-se

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \beta\, e^u \,\{[2\,(c_2-\xi_x)-(c_1+c_2\,t)\,u_t-\xi\,u_x-\eta\,u_y]\,u_t\\
&- c_2\,u_t-(c_1+c_2\,t)\,(e^{-u}\,u_{yy}-u_t^2)-\eta\,u_{ty}\}+\beta\,(\xi_x+\xi\,u_x)\,e^u\,u_t\\
&= \beta\,e^u\,[(c_2-\xi_x-\eta\,u_y)\,u_t-(c_1+c_2\,t)\,e^{-u}\,u_{yy}-\eta\,u_{ty}],\\
C^2 &= \beta\,[2\,\xi_{xx}+(c_1+c_2\,t)\,u_{xt}+\xi_x\,u_x+\eta_x\,u_y+\xi\,u_{xx}+\eta\,u_{xy}]\\
&- \beta\,[c_2\,u_x+(c_1+c_2\,t)\,u_{tx}+\xi\,(u_{xx}+u_{yy})]\\
&= \beta\,[2\,\xi_{xx}+(\xi_x-c_4)\,u_x+\eta_x\,u_y+\eta\,u_{xy}-\xi\,u_{yy}].
\end{aligned}
$$

Agora as parcelas em C^1 que envolvem as derivadas parciais de segunda ordem, u_{yy} e u_{ty}, são transformadas em derivadas totais em y:

$$
\begin{aligned}
&- \beta\, e^u\,((c_1+c_2\,t)\,e^{-u}\,u_{yy}+\eta\,u_{ty}) = -\beta\,((c_1+c_2\,t)\,u_{yy}+\eta\,e^u\,u_{ty})\\
&= -\beta\,\mathcal{D}_y[(c_1+c_2\,t)\,u_y+\eta\,e^u\,u_t]+\beta\,(\eta_y+\eta\,u_y)\,e^u\,u_t,
\end{aligned}
$$

depois a derivada total em y é transformada em derivada total em t:

$$\begin{aligned} & - \ \beta\,\mathcal{D}_t[(c_1+c_2\,t)\,u_y+\eta\,e^u\,u_t] = -\beta\,[c_2\,u_y+(c_1+c_2\,t)\,u_{ty}+\eta\,(u_t^2+u_{tt})\,e^u] \\ & = \ -\beta\,[c_2\,u_y+(c_1+c_2\,t)\,u_{ty}+\eta\,(u_{xx}+u_{yy})], \end{aligned}$$

e, por fim, é transferida para a componente C^3.

Então as novas componentes C^1 e C^3 tornam-se

$$\begin{aligned} C^1 &= \beta\,e^u\,(c_2-\xi_x-\eta\,u_y)\,u_t+\beta\,(\eta_y+\eta\,u_y)\,e^u\,u_t = \beta\,c_2\,e^u\,u_t, \\ C^3 &= \beta\,[2\,\xi_{yx}+(c_1+c_2\,t)\,u_{yt}+\xi_y\,u_x+\eta_y\,u_y+\xi\,u_{yx}+\eta\,u_{yy}] \\ &- \beta\,[c_2\,u_y+(c_1+c_2\,t)\,u_{ty}+\eta\,(u_{xx}+u_{yy})] \\ &= \beta\,[2\,\xi_{yx}+\xi_y\,u_x+(\eta_y-c_2)\,u_y+\xi\,u_{yx}-\eta\,u_{xx}]. \end{aligned}$$

Agora as parcelas em C^2 que envolvem as derivadas parciais de segunda ordem, u_{xy} e u_{yy}, são transformadas em derivadas totais em y:

$$\beta\,(\eta\,u_{xy}-\xi\,u_{yy}) \ = \ \beta\,\mathcal{D}_y(\eta\,u_x-\xi\,u_y)-\beta\,(\eta_y\,u_x-\xi_y\,u_y),$$

depois as derivadas totais em y são transformadas em derivadas totais em x:

$$\beta\,\mathcal{D}_x(\eta\,u_x-\xi\,u_y) \ = \ \beta\,(\eta_x\,u_x-\xi_x\,u_y+\eta\,u_{xx}-\xi\,u_{xy}),$$

e, por fim, são transferidas para a componente C^3.

Logo as novas componentes C^2 e C^3 tornam-se

$$\begin{aligned} C^2 &= \beta\,[2\,\xi_{xx}+(\xi_x-c_4)\,u_x+\eta_x\,u_y]-\beta\,(\eta_y\,u_x-\xi_y\,u_y) \\ &= \beta\,[2\,\xi_{xx}+(\xi_x-\eta_y-c_4)\,u_x+(\eta_x+\xi_y)\,u_y] \\ &= \beta\,(2\,\xi_{xx}-c_4\,u_x), \\ C^3 &= \beta\,[2\,\xi_{yx}+\xi_y\,u_x+(\eta_y-c_2)\,u_y+\xi\,u_{yx}-\eta\,u_{xx}]+\beta\,[\eta_x\,u_x-\xi_x\,u_y+\eta\,u_{xx}-\xi\,u_{xy}] \\ &= \beta\,[2\,\xi_{yx}+(\xi_y+\eta_x)\,u_x+(\eta_y-c_2-\xi_x)\,u_y] \\ &= \beta\,(2\,\xi_{yx}-c_2\,u_y). \end{aligned}$$

Finalmente, transformamos a função $2\,\beta\,\xi_{yx} = \mathcal{D}_x(2\,\beta\,\xi_y)$ em derivada total em y, e a transferimos da componente C^3 para a componente C^2; então, observando que ξ é uma função harmônica obtemos

$$C^1 = \beta\, c_2\, e^u\, u_t, \quad C^2 = -\beta\, c_2\, u_x, \quad C^3 = -\beta\, c_2\, u_y.$$

Portanto, provamos o sexto corolário do **NTLC**, o **Corolário 1.17**, página 20.

4.3 A equação do fluxo geométrico hiperbólico modificada

Consideramos a equação do fluxo geométrico hiperbólico modificada

$$u_{tt} = e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2, \tag{4.34}$$

onde λ é uma constante não-nula. Essa equação é uma generalização natural da equação (4.33) e foi sugerida pelos professores Yuri Bozhkov e Igor L. Freire [43]. Ela é do tipo (4.1) com as funções coeficientes dadas por

$$C = D = e^{\lambda\, u}, \qquad I = \lambda, \qquad R = 1, \qquad A = B = E = F = G = P = Q = H = 0.$$

Como uma outra consequência do **Teorema 1.2** obtemos o **Corolário 1.18**.
Demonstração do Corolário 1.18: Segundo o **Teorema 1.2** temos

$$A_1 := R\,A_u - A\,R_u = 0,\; B_1 := D\,C_u - C\,D_u = 0,\; C_1 := R\,C_u - C\,R_u = f'(u),$$

$$D_1 := R\,D_u - D\,R_u = C_1,\; E_1 := A\,C_u - C\,A_u = 0,\; F_1 := A\,D_u - D\,A_u = 0.$$

Além disso, as funções coeficientes devem satisfazer as seguintes relações:

$$A\,I + R\,B = 0 = A_1, \quad D\,P - C\,Q = 0 = B_1, \quad C\,I + R\,P = \lambda\, f(u) = C_1,$$

$$A\,P - C\,B = 0 = E_1, \quad A\,Q - D\,B = 0 = F_1.$$

Assim devemos ter $f'(u) = \lambda f(u)$, ou seja, $f(u) = a\, e^{\lambda u}$ onde a é uma constante não-nula.

Como $C_1 \neq 0$ a equação (1.39) nos dá

$$\varphi_u = -\lambda\, \varphi, \quad \text{ou seja,} \quad \varphi = \varphi^1\, e^{-\lambda\, u},$$

com $\varphi^1 = \varphi^1(t, x, y)$ uma função não-nula.

As equações (1.40,1.41,1.42) são satisfeitas trivialmente por φ. Da equação (1.43) segue que

$$0 = \varphi_{tt} - \varphi_{xx}\, f(u) - \varphi_{yy}\, f(u) = \varphi^1_{tt}\, e^{-\lambda\, u} - a\, (\varphi^1_{xx} + \varphi^1_{yy}),$$

ou seja,

$$0 = \varphi^1_{tt} = \varphi^1_{xx} + \varphi^1_{yy}.$$

Daí, $\varphi = (\alpha\, t + \beta)\, e^{-\lambda\, u}$ com $\alpha = \alpha(x, y)$ e $\beta = \beta(x, y)$ funções harmônicas tais que $\alpha\, t + \beta \neq 0$.

Portanto, a equação $u_{tt} = f(u)\, (u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2$ é não-linearmente autoadjunta se, e somente se, $f(u) = a\, e^{\lambda\, u}$ onde a é uma constante não-nula. ❖

Demonstração do Corolário 1.19: De fato, segue do **Corolário** 1.18 tomando $\varphi = \beta\, e^{-\lambda\, u}$ onde β é uma constante não-nula. ❖

A seguir aplicaremos o **Algoritmo do NTLC** para obtermos algumas leis de conservação para a equação (4.34). As suas simetrias de Lie estão calculadas na **Proposição B.1** no Apêndice, em termos de duas funções arbitrárias satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann. O seu gerador infinitesimal geral é dado por

$$X = (c_1 + c_4\, t)\, \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, y)\, \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{\lambda}\, (\xi_x - c_4)\, \frac{\partial}{\partial u},$$

com c_1 e c_4 constantes arbitrárias, $\xi_x = \eta_y$ e $\eta_x = -\xi_y$.

Considerando a variável adjunta $v = (\alpha\, t + \beta)\, e^{-\lambda\, u}$ dada na demonstração do **Corolário 1.18**, a Lagrangeana formal é dada por

$$\mathcal{L} = (\alpha\, t + \beta)\, e^{-\lambda\, u}\, (u_{tt} - e^{\lambda\, u}\, (u_{xx} + u_{yy}) - \lambda\, u_t^2),$$

ou seja,

$$\mathcal{L} = (\alpha\, t + \beta)\, (e^{-\lambda\, u}\, (u_{tt} - \lambda\, u_t^2) - u_{xx} - u_{yy}).$$

As derivadas parciais de $\mathcal{L}$ são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = -2\, \lambda\, (\alpha\, t + \beta)\, e^{-\lambda\, u}\, u_t,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} = (\alpha\, t + \beta)\, e^{-\lambda\, u},\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = -\alpha\, t - \beta,\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = -\alpha\, t - \beta.$$

As derivadas totais que aparecem no vetor conservado são dadas por

$$-\mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} = -(\alpha - \lambda\, (\alpha\, t + \beta)\, u_t)\, e^{-\lambda\, u}, \quad -\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = \alpha_x\, t + \beta_x, \quad -\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = \alpha_y\, t + \beta_y.$$

Dada a característica

$$W = \frac{2}{\lambda}\, (\xi_x - c_4) - (c_1 + c_4\, t)\, u_t - \xi\, u_x - \eta\, u_y,$$

e suas derivadas totais

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_t W &= -c_4\, u_t - (c_1 + c_4\, t)\, u_{tt} - \xi\, u_{tx} - \eta\, u_{ty} \\
&= -c_4\, u_t - (c_1 + c_4\, t)\, (e^{\lambda\, u}\, (u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2) - \xi\, u_{tx} - \eta\, u_{ty}, \\
\mathcal{D}_x W &= \frac{2}{\lambda}\, \xi_{xx} - (c_1 + c_4\, t)\, u_{xt} - \xi_x\, u_x - \eta_x\, u_y - \xi\, u_{xx} - \eta\, u_{xy}, \\
\mathcal{D}_y W &= \frac{2}{\lambda}\, \xi_{yx} - (c_1 + c_4\, t)\, u_{yt} - \xi_y\, u_x - \eta_y\, u_y - \xi\, u_{yx} - \eta\, u_{yy},
\end{aligned}$$

as componentes do vetor conservado são dadas por

$$\begin{aligned}
C^1 &= W \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \right) + \mathcal{D}_t W\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{tt}} \\
&= W\, [-2\, \lambda\, (\alpha\, t + \beta)\, e^{-\lambda\, u}\, u_t - (\alpha - \lambda\, (\alpha\, t + \beta)\, u_t)\, e^{-\lambda\, u}] + \mathcal{D}_t W\, (\alpha\, t + \beta)\, e^{-\lambda\, u} \\
&= e^{-\lambda\, u}\, [\mathcal{D}_t W\, (\alpha\, t + \beta) - W\, (\alpha + \lambda\, (\alpha\, t + \beta)\, u_t)], \\
C^2 &= W \left(-\mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} \right) + \mathcal{D}_x W\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} = (\alpha_x\, t + \beta_x)\, W - (\alpha\, t + \beta)\, \mathcal{D}_x W, \\
C^3 &= W \left(-\mathcal{D}_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} \right) + \mathcal{D}_y W\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{yy}} = (\alpha_y\, t + \beta_y)\, W - (\alpha\, t + \beta)\, \mathcal{D}_y W,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
C^1 &= e^{-\lambda\,u}\,\{[-c_4\,u_t - (c_1 + c_4\,t)\,(e^{\lambda\,u}\,(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\,u_t^2) - \xi\,u_{tx} - \eta\,u_{ty}]\,(\alpha\,t + \beta)\\
&- \left(\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x - c_4) - (c_1 + c_4\,t)\,u_t - \xi\,u_x - \eta\,u_y\right)(\alpha + \lambda\,(\alpha\,t + \beta)\,u_t)\}\\
&= -\frac{2\,\alpha}{\lambda}\,(\xi_x - c_4)\,e^{-\lambda\,u} + e^{-\lambda\,u}\,\{\alpha\,(c_1 + c_4\,t)\,u_t + \alpha\,\xi\,u_x + \alpha\,\eta\,u_y\\
&+ (\alpha\,t + \beta)\,[-2\,(\xi_x - c_4)\,u_t + \lambda\,(c_1 + c_4\,t)\,u_t^2 + \lambda\,\xi\,u_x\,u_t + \lambda\,\eta\,u_y\,u_t\\
&- c_4\,u_t - (c_1 + c_4\,t)\,(e^{\lambda\,u}\,(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\,u_t^2) - \xi\,u_{tx} - \eta\,u_{ty}]\}\\
&= -\frac{2\,\alpha}{\lambda}\,(\xi_x - c_4)\,e^{-\lambda\,u} + e^{-\lambda\,u}\,\{[\alpha\,(c_1 + c_4\,t) - (\alpha\,t + \beta)\,(2\,\xi_x - c_4)]\,u_t + \alpha\,\xi\,u_x + \alpha\,\eta\,u_y\\
&- (\alpha\,t + \beta)(\xi\,u_{tx} + \eta\,u_{ty}) - (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha\,t + \beta)\,e^{\lambda\,u}\,(u_{xx} + u_{yy})\\
&+ \lambda\,(\alpha\,t + \beta)\,(\xi\,u_x\,u_t + \eta\,u_y\,u_t)\},\\
C^2 &= (\alpha_x\,t + \beta_x)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x - c_4) - (c_1 + c_4\,t)\,u_t - \xi\,u_x - \eta\,u_y\right)\\
&- (\alpha\,t + \beta)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,\xi_{xx} - (c_1 + c_4\,t)\,u_{xt} - \xi_x\,u_x - \eta_x\,u_y - \xi\,u_{xx} - \eta\,u_{xy}\right)\\
&= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_x\,t + \beta_x)\,(\xi_x - c_4) - (\alpha\,t + \beta)\,\xi_{xx}] - (\alpha_x\,t + \beta_x)\,(c_1 + c_4\,t)\,u_t\\
&- [(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\xi - (\alpha\,t + \beta)\,\xi_x]\,u_x - [(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\eta + (\alpha\,t + \beta)\,\xi_y]\,u_y\\
&+ (\alpha\,t + \beta)\,[(c_1 + c_4\,t)\,u_{xt} + \xi\,u_{xx} + \eta\,u_{xy}],\\
C^3 &= (\alpha_y\,t + \beta_y)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x - c_4) - (c_1 + c_4\,t)\,u_t - \xi\,u_x - \eta\,u_y\right)\\
&- (\alpha\,t + \beta)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,\xi_{yx} - (c_1 + c_4\,t)\,u_{yt} - \xi_y\,u_x - \eta_y\,u_y - \xi\,u_{yx} - \eta\,u_{yy}\right)\\
&= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_y\,t + \beta_y)\,(\xi_x - c_4) - (\alpha\,t + \beta)\,\xi_{xy}] - (\alpha_y\,t + \beta_y)\,(c_1 + c_4\,t)\,u_t\\
&- [(\alpha_y\,t + \beta_y)\,\xi - (\alpha\,t + \beta)\,\xi_y]\,u_x - [(\alpha_y\,t + \beta_y)\,\eta - (\alpha\,t + \beta)\,\xi_x]\,u_y\\
&+ (\alpha\,t + \beta)\,[(c_1 + c_4\,t)\,u_{yt} + \xi\,u_{yx} + \eta\,u_{yy}].
\end{aligned}
$$

Simplificamos a componente C^1 transformando as parcelas envolvendo as derivadas parciais de segunda ordem, u_{xx} e u_{tx}, em derivadas totais em x:

$$
\begin{aligned}
&- e^{-\lambda\,u}\,(\alpha\,t + \beta)\,[(c_1 + c_4\,t)\,e^{\lambda\,u}\,u_{xx} + \xi\,u_{tx}]\\
&= -(\alpha\,t + \beta)\,[(c_1 + c_4\,t)\,u_{xx} + e^{-\lambda\,u}\,\xi\,u_{tx}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathcal{D}_x[(\alpha\,t+\beta)\,((c_1+c_4\,t)\,u_x+e^{-\lambda\,u}\,\xi\,u_t)]+(\alpha_x\,t+\beta_x)\,(c_1+c_4\,t)\,u_x\\
&+ [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi+(\alpha\,t+\beta)\,(\xi_x-\lambda\,\xi\,u_x)]\,e^{-\lambda\,u}\,u_t,
\end{aligned}
$$

depois as derivadas totais em x são transformadas em derivadas totais em t:

$$
\begin{aligned}
&- \mathcal{D}_t[(\alpha\,t+\beta)\,((c_1+c_4\,t)\,u_x+e^{-\lambda\,u}\,\xi\,u_t)]\\
&= -\alpha\,((c_1+c_4\,t)\,u_x+e^{-\lambda\,u}\,\xi\,u_t)\\
&- (\alpha\,t+\beta)\,[c_4\,u_x+(c_1+c_4\,t)\,u_{tx}+\xi\,(-\lambda\,u_t^2+u_{tt})\,e^{-\lambda\,u}]\\
&= -[\alpha\,(c_1+c_4\,t)+(\alpha\,t+\beta)\,c_4]\,u_x-\alpha\,\xi\,e^{-\lambda\,u}\,u_t-(\alpha\,t+\beta)\,(c_1+c_4\,t)\,u_{tx}\\
&- (\alpha\,t+\beta)\,\xi\,(u_{xx}+u_{yy}),
\end{aligned}
$$

finalmente, as derivadas totais em t são transferidas para a componente C^2. Assim as novas componentes C^1 e C^2 tornam-se

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -\frac{2\,\alpha}{\lambda}\,(\xi_x-c_4)\,e^{-\lambda\,u}+e^{-\lambda\,u}\,\{[(\alpha\,t+\beta)\,(c_4-\xi_x)+\alpha\,(c_1+c_4\,t)+(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi]\,u_t\\
&+ \alpha\,\xi\,u_x+\alpha\,\eta\,u_y+(\alpha\,t+\beta)[\lambda\,\eta\,u_y\,u_t-(c_1+c_4\,t)\,e^{\lambda\,u}\,u_{yy}-\eta\,u_{ty}]\}\\
&+ (\alpha_x\,t+\beta_x)(c_1+c_4\,t)\,u_x,\\
C^2 &= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_x\,t+\beta_x)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha\,t+\beta)\,\xi_{xx}]-(\alpha_x\,t+\beta_x)\,(c_1+c_4\,t)\,u_t\\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi-(\alpha\,t+\beta)\,\xi_x]\,u_x-[(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta+(\alpha\,t+\beta)\,\xi_y]\,u_y\\
&+ (\alpha\,t+\beta)\,[(c_1+c_4\,t)\,u_{xt}+\xi\,u_{xx}+\eta\,u_{xy}]\\
&- [\alpha\,(c_1+c_4\,t)+(\alpha\,t+\beta)\,c_4]\,u_x-\alpha\,\xi\,e^{-\lambda\,u}\,u_t\\
&- (\alpha\,t+\beta)\,(c_1+c_4\,t)\,u_{tx}-(\alpha\,t+\beta)\,\xi\,(u_{xx}+u_{yy})\\
&= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_x\,t+\beta_x)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha\,t+\beta)\,\xi_{xx}]-[(\alpha_x\,t+\beta_x)\,(c_1+c_4\,t)+\alpha\,\xi\,e^{-\lambda\,u}]u_t\\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi-(\alpha\,t+\beta)\,\xi_x+\alpha\,(c_1+c_4\,t)+(\alpha\,t+\beta)\,c_4]u_x\\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta+(\alpha\,t+\beta)\,\xi_y]u_y+(\alpha\,t+\beta)\,(\eta\,u_{xy}-\xi\,u_{yy}).
\end{aligned}
$$

Agora as parcelas em C^1 que envolvem as derivadas parciais de segunda ordem, u_{yy} e u_{ty}, são transformadas em derivadas totais em y:

$$
\begin{aligned}
&- e^{-\lambda\,u}\,(\alpha\,t+\beta)\,[(c_1+c_4\,t)\,e^{\lambda\,u}\,u_{yy}+\eta\,u_{ty}]\\
&= -(\alpha\,t+\beta)\,[(c_1+c_4\,t)\,u_{yy}+e^{-\lambda\,u}\,\eta\,u_{ty}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathcal{D}_y[(\alpha\, t+\beta)\,((c_1+c_4\, t)\, u_y + e^{-\lambda\, u}\,\eta\, u_t)] + (\alpha_y\, t+\beta_y)\,(c_1+c_4\, t)\, u_y \\
&+ [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta + (\alpha\, t+\beta)\,(\eta_y - \lambda\,\eta\, u_y)]\, e^{-\lambda\, u}\, u_t,
\end{aligned}
$$

depois as derivadas totais em y são transformadas em derivadas totais em t:

$$
\begin{aligned}
&- \mathcal{D}_t[(\alpha\, t+\beta)\,((c_1+c_4\, t)\, u_y + e^{-\lambda\, u}\,\eta\, u_t)] \\
&= -\alpha\,((c_1+c_4\, t)\, u_y + e^{-\lambda\, u}\,\eta\, u_t) \\
&- (\alpha\, t+\beta)\,[c_4\, u_y + (c_1+c_4\, t)\, u_{ty} + \eta\,(-\lambda\, u_t^2 + u_{tt})\, e^{-\lambda\, u}] \\
&= -[\alpha\,(c_1+c_4\, t) + (\alpha\, t+\beta)\, c_4]\, u_y - \alpha\,\eta\, e^{-\lambda\, u}\, u_t - (\alpha\, t+\beta)\,(c_1+c_4\, t)\, u_{ty} \\
&- (\alpha\, t+\beta)\,\eta\,(u_{xx}+u_{yy}).
\end{aligned}
$$

e, finalmente, são transferidas para a componente C^3. Então as novas componentes C^1 e C^3 tornam-se

$$
\begin{aligned}
C^1 &= -\frac{2\,\alpha}{\lambda}\,(\xi_x - c_4)\, e^{-\lambda\, u} + e^{-\lambda\, u}\,\{[(\alpha\, t+\beta)\,(c_4-\xi_x) + \alpha\,(c_1+c_4\, t) + (\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi]\, u_t \\
&+ \alpha\,\xi\, u_x + \alpha\,\eta\, u_y + (\alpha\, t+\beta)\,\lambda\,\eta\, u_y\, u_t\} + (\alpha_x\, t+\beta_x)(c_1+c_4\, t)\, u_x \\
&+ (\alpha_y\, t+\beta_y)\,(c_1+c_4\, t)\, u_y + [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta + (\alpha\, t+\beta)\,(\eta_y - \lambda\,\eta\, u_y)]\, e^{-\lambda\, u}\, u_t \\
&= -\frac{2\,\alpha}{\lambda}\,(\xi_x - c_4)\, e^{-\lambda\, u} + e^{-\lambda\, u}\,\{[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi + \alpha\,(c_1+c_4\, t) + (\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta \\
&+ (\alpha\, t+\beta)\, c_4]\, u_t + \alpha\,(\xi\, u_x + \eta\, u_y)\} + (c_1+c_4\, t)[(\alpha_x\, t+\beta_x)\, u_x + (\alpha_y\, t+\beta_y)\, u_y], \\
C^3 &= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(\xi_x - c_4) - (\alpha\, t+\beta)\,\xi_{xy}] - (\alpha_y\, t+\beta_y)\,(c_1+c_4\, t)\, u_t \\
&- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi - (\alpha\, t+\beta)\,\xi_y]\, u_x - [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta - (\alpha\, t+\beta)\,\xi_x]\, u_y \\
&+ (\alpha\, t+\beta)\,[(c_1+c_4\, t)\, u_{yt} + \xi\, u_{yx} + \eta\, u_{yy}] \\
&- [\alpha\,(c_1+c_4\, t) + (\alpha\, t+\beta)\, c_4]\, u_y - \alpha\,\eta\, e^{-\lambda\, u}\, u_t \\
&- (\alpha\, t+\beta)\,(c_1+c_4\, t)\, u_{ty} - (\alpha\, t+\beta)\,\eta\,(u_{xx}+u_{yy}) \\
&= \frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(\xi_x - c_4) - (\alpha\, t+\beta)\,\xi_{yx}] - [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(c_1+c_4\, t) + \alpha\,\eta\, e^{-\lambda\, u}]\, u_t \\
&- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1+c_4\, t) + (\alpha\, t+\beta)\,(c_4-\xi_x)]\, u_y \\
&- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi - (\alpha\, t+\beta)\,\xi_y]\, u_x - (\alpha\, t+\beta)\,(\eta\, u_{xx} - \xi\, u_{xy}).
\end{aligned}
$$

Agora as parcelas em C^2 que envolvem as derivadas parciais de segunda ordem, u_{xy} e u_{yy}, são transformadas em derivadas totais em y:

$$\begin{aligned}(\alpha\, t+\beta)\,(\eta\, u_{xy}-\xi\, u_{yy}) &= \mathcal{D}_y[(\alpha\, t+\beta)\,(\eta\, u_x-\xi\, u_y)]\\ &- (\alpha_y\, t+\beta_y)\,(\eta\, u_x-\xi\, u_y)-(\alpha\, t+\beta)\,(\eta_y\, u_x-\xi_y\, u_y),\end{aligned}$$

depois são transformadas em derivadas totais em x:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_x[(\alpha\, t+\beta)\,(\eta\, u_x-\xi\, u_y)] &= (\alpha_x\, t+\beta_x)\,(\eta\, u_x-\xi\, u_y)\\ &+ (\alpha\, t+\beta)\,(\eta_x\, u_x-\xi_x\, u_y+\eta\, u_{xx}-\xi\, u_{xy}),\end{aligned}$$

e, finalmente, as derivadas totais em x são transferidas para a componente C^3. Logo as novas componentes C^2 e C^3 tornam-se

$$\begin{aligned}C^2 &= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha\, t+\beta)\,\xi_{xx}]-[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(c_1+c_4\, t)+\alpha\,\xi\, e^{-\lambda\, u}]u_t\\ &- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi-(\alpha\, t+\beta)\,\xi_x+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha\, t+\beta)\, c_4]u_x\\ &- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\eta+(\alpha\, t+\beta)\,\xi_y]u_y+(\alpha\, t+\beta)\,(\eta\, u_{xy}-\xi\, u_{yy})\\ &- (\alpha_y\, t+\beta_y)\,(\eta\, u_x-\xi\, u_y)-(\alpha\, t+\beta)\,(\eta_y\, u_x-\xi_y\, u_y)\\ &= \frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha\, t+\beta)\,\xi_{xx}]-[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(c_1+c_4\, t)+\alpha\,\xi\, e^{-\lambda\, u}]\, u_t\\ &- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta+(\alpha\, t+\beta)\,(c_4-\xi_x+\eta_y)]\, u_x\\ &- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\eta-(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi+(\alpha\, t+\beta)\,(-\eta_x-\xi_y)]\, u_y\\ &= \frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha\, t+\beta)\,\xi_{xx}]-[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(c_1+c_4\, t)+\alpha\,\xi\, e^{-\lambda\, u}]\, u_t\\ &- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta+(\alpha\, t+\beta)\, c_4]\, u_x\\ &- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\eta-(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi]\, u_y,\\ C^3 &= \frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha\, t+\beta)\,\xi_{yx}]-[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(c_1+c_4\, t)+\alpha\,\eta\, e^{-\lambda\, u}]\, u_t\\ &- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha\, t+\beta)\,(c_4-\xi_x)]\, u_y\\ &- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi-(\alpha\, t+\beta)\,\xi_y]\, u_x-(\alpha\, t+\beta)\,(\eta\, u_{xx}-\xi\, u_{xy})\\ &+ (\alpha_x\, t+\beta_x)\,(\eta\, u_x-\xi\, u_y)+(\alpha\, t+\beta)\,(\eta_x\, u_x-\xi_x\, u_y+\eta\, u_{xx}-\xi\, u_{xy})\\ &= \frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha\, t+\beta)\,\xi_{yx}]-[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(c_1+c_4\, t)+\alpha\,\eta\, e^{-\lambda\, u}]\, u_t\\ &- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta+(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha\, t+\beta)\, c_4]\, u_y\\ &- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi-(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\eta]\, u_x.\end{aligned}$$

Agora as parcelas em C^3 que envolvem a derivada segunda ξ_{yx}, são transformadas em derivadas totais em x:

$$-\frac{2}{\lambda}(\alpha\, t+\beta)\,\xi_{yx} \;=\; -\frac{2}{\lambda}\,\mathcal{D}_x[(\alpha\, t+\beta)\,\xi_y]+\frac{2}{\lambda}(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi_y,$$

depois as derivadas totais em x são transformadas em derivadas totais em y:

$$-\frac{2}{\lambda}\,\mathcal{D}_y[(\alpha\, t+\beta)\,\xi_y] \;=\; -\frac{2}{\lambda}(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi_y-\frac{2}{\lambda}(\alpha\, t+\beta)\,\xi_{yy}.$$

finalmente, tais derivadas totais são transferidas para a componente C^2. Assim, o vetor conservado simplificado é dado por

$$\begin{aligned}
C^1 &= -\frac{2\,\alpha}{\lambda}(\xi_x-c_4)\,e^{-\lambda\, u}+e^{-\lambda\, u}\,\{[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta\\
&+ (\alpha\, t+\beta)\,c_4]\,u_t+\alpha\,(\xi\, u_x+\eta\, u_y)\}+(c_1+c_4\, t)[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,u_x+(\alpha_y\, t+\beta_y)\,u_y],\\
C^2 &= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(\xi_x-c_4)-(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi_y]-[(\alpha_x\, t+\beta_x)\,(c_1+c_4\, t)+\alpha\,\xi\, e^{-\lambda\, u}]\,u_t\\
&- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi+(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha\, t+\beta)\,c_4]\,u_x\\
&- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\eta-(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi]\,u_y,\\
C^3 &= \frac{2}{\lambda}[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(\xi_x-c_4)+(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi_y]-[(\alpha_y\, t+\beta_y)\,(c_1+c_4\, t)+\alpha\,\eta\, e^{-\lambda\, u}]\,u_t\\
&- [(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\xi+(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\eta+\alpha\,(c_1+c_4\, t)+(\alpha\, t+\beta)\,c_4]\,u_y\\
&- [(\alpha_y\, t+\beta_y)\,\xi-(\alpha_x\, t+\beta_x)\,\eta]\,u_x.
\end{aligned}$$

Repetindo o **Algoritmo do NTLC** podemos simplificar, mais um pouco, a componente C^2. Primeiro tomamos em C^1 as parcelas envolvendo as derivadas parciais u_x, depois as transformamos em derivadas totais em x:

$$\begin{aligned}
&- \frac{2\,\alpha}{\lambda}\,\xi_x\, e^{-\lambda\, u}+e^{-\lambda\, u}\,\alpha\,\xi\, u_x+(c_1+c_4\, t)\,(\alpha_x\, t+\beta_x)\,u_x\\
&= \mathcal{D}_x\left[\left(-\frac{2\,\alpha}{\lambda}\,\xi+\alpha\,\xi\, u\right)\,e^{-\lambda\, u}+(c_1+c_4\, t)\,(\alpha_x\, t+\beta_x)\,u\right]\\
&+ \frac{2}{\lambda}(\alpha_x-\lambda\,\alpha\, u_x)\,\xi\, e^{-\lambda\, u}-[\alpha_x\,\xi+\alpha\,\xi_x-\lambda\,\alpha\,\xi\, u_x]\,u\, e^{-\lambda\, u}-(c_1+c_4\, t)\,(\alpha_{xx}\, t+\beta_{xx})\,u,
\end{aligned}$$

por fim, tais derivadas totais são transformadas em derivadas totais em t:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{D}_t \left[\left(u - \frac{2}{\lambda} \right) \alpha\, \xi\, e^{-\lambda\, u} + (c_1 + c_4\, t)\, (\alpha_x\, t + \beta_x)\, u \right] \\
= & \left(\alpha\, \xi\, u_t - \lambda \left(u - \frac{2}{\lambda} \right) \alpha\, \xi\, u_t \right) e^{-\lambda\, u} + (c_4\, (\alpha_x\, t + \beta_x) + (c_1 + c_4\, t)\, \alpha_x)\, u \\
+ & \ (c_1 + c_4\, t)\, (\alpha_x\, t + \beta_x)\, u_t,
\end{aligned}
$$

e são transferidas para a componente C^2. Então as novas componentes C^1 e C^2 tornam-se

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \frac{2\,\alpha}{\lambda}\, c_4\, e^{-\lambda\, u} + e^{-\lambda\, u} \{ [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, \xi + \alpha\, (c_1 + c_4\, t) + (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \eta \\
&+ (\alpha\, t + \beta)\, c_4]\, u_t + \alpha\, \eta\, u_y \} + (c_1 + c_4\, t)\, (\alpha_y\, t + \beta_y)\, u_y \\
&+ \frac{2}{\lambda}\, (\alpha_x - \lambda\, \alpha\, u_x)\, \xi\, e^{-\lambda\, u} - [\alpha_x\, \xi + \alpha\, \xi_x - \lambda\, \alpha\, \xi\, u_x]\, u\, e^{-\lambda\, u} - (c_1 + c_4\, t)\, (\alpha_{xx}\, t + \beta_{xx})\, u \\
&= \left[\frac{2}{\lambda}\, (c_4\, \alpha + \alpha_x\, \xi) - (\alpha_x\, \xi + \alpha\, \xi_x)\, u \right] e^{-\lambda\, u} + e^{-\lambda\, u} \{ [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, \xi + (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \eta \\
&+ \alpha\, (c_1 + c_4\, t) + (\alpha\, t + \beta)\, c_4]\, u_t + (\lambda\, u - 2)\, \alpha\, \xi\, u_x + \alpha\, \eta\, u_y \} \\
&+ (c_1 + c_4\, t)\, [(\alpha_y\, t + \beta_y)\, u_y - (\alpha_{xx}\, t + \beta_{xx})\, u], \\
C^2 &= \frac{2}{\lambda}\, [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, (\xi_x - c_4) - (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \xi_y] - [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, (c_1 + c_4\, t) + \alpha\, \xi\, e^{-\lambda\, u}]\, u_t \\
&- [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, \xi + (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \eta + \alpha\, (c_1 + c_4\, t) + (\alpha\, t + \beta)\, c_4]\, u_x \\
&- [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, \eta - (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \xi]\, u_y \\
&+ (\alpha\, \xi\, u_t - (\lambda\, u - 2)\ \alpha\, \xi\, u_t)\ e^{-\lambda\, u} + (c_4\, (\alpha_x\, t + \beta_x) + (c_1 + c_4\, t)\, \alpha_x)\, u \\
&+ (c_1 + c_4\, t)\, (\alpha_x\, t + \beta_x)\, u_t \\
&= (\alpha_x\, t + \beta_x) \left(\frac{2}{\lambda}\, (\xi_x - c_4) + c_4\, u \right) - \frac{2}{\lambda}\, (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \xi_y + (c_1 + c_4\, t)\, \alpha_x\, u \\
&- (\lambda\, u - 2)\, \alpha\, \xi\, e^{-\lambda\, u}\, u_t - [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, \eta - (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \xi]\, u_y \\
&- [(\alpha_x\, t + \beta_x)\, \xi + (\alpha_y\, t + \beta_y)\, \eta + \alpha\, (c_1 + c_4\, t) + (\alpha\, t + \beta)\, c_4]\, u_x.
\end{aligned}
$$

Também podemos simplificar, mais um pouco, a componente C^3. Primeiro tomamos em C^1 as parcelas envolvendo as derivadas parciais u_y, e as transformamos em derivadas totais em y:

$$
\begin{aligned}
& e^{-\lambda u}\,\alpha\,\eta\,u_y + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,t + \beta_y)\,u_y \\
= \;& \mathcal{D}_y[(\alpha\,\eta\,e^{-\lambda u} + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,t + \beta_y))\,u] \\
- \;& [(\alpha_y\,\eta + \alpha\,\eta_y - \lambda\,\alpha\,\eta\,u_y)\,e^{-\lambda u} + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_{yy}\,t + \beta_{yy})]\,u,
\end{aligned}
$$

depois, tais derivadas totais são transformadas em derivadas totais em t:

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{D}_t[(\alpha\,\eta\,e^{-\lambda u} + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,t + \beta_y))\,u] = -\lambda\,\alpha\,\eta\,u_t\,e^{-\lambda u}\,u \\
+ \;& [c_4\,(\alpha_y\,t + \beta_y) + (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_y]\,u + [\alpha\,\eta\,e^{-\lambda u} + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,t + \beta_y)]\,u_t,
\end{aligned}
$$

por fim, são transferidas para a componente C^3. Daí as novas componentes C^1 e C^3 tornam-se

$$
\begin{aligned}
C^1 \;=\;& \left[\frac{2}{\lambda}\,(c_4\,\alpha + \alpha_x\,\xi) - (\alpha_x\,\xi + \alpha\,\xi_x)\,u\right]\,e^{-\lambda u} + e^{-\lambda u}\,\{[(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\xi + (\alpha_y\,t + \beta_y)\,\eta \\
+ \;& \alpha\,(c_1 + c_4\,t) + (\alpha\,t + \beta)\,c_4]\,u_t + (\lambda\,u - 2)\,\alpha\,\xi\,u_x\} - (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_{xx}\,t + \beta_{xx})\,u \\
- \;& [(\alpha_y\,\eta + \alpha\,\eta_y - \lambda\,\alpha\,\eta\,u_y)\,e^{-\lambda u} + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_{yy}\,t + \beta_{yy})]\,u \\
= \;& \left[\frac{2}{\lambda}\,(c_4\,\alpha + \alpha_x\,\xi) - (\alpha_x\,\xi + \alpha_y\,\eta + 2\,\alpha\,\xi_x)\,u\right]\,e^{-\lambda u} + e^{-\lambda u}\,\{[(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\xi \\
+ \;& (\alpha_y\,t + \beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1 + c_4\,t) + (\alpha\,t + \beta)\,c_4]\,u_t + (\lambda\,u - 2)\,\alpha\,\xi\,u_x + \lambda\,u\,\alpha\,\eta\,u_y\}, \\
C^3 \;=\;& \frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_y\,t + \beta_y)\,(\xi_x - c_4) + (\alpha_x\,t + \beta_x)\,\xi_y] - [(\alpha_y\,t + \beta_y)\,(c_1 + c_4\,t) + \alpha\,\eta\,e^{-\lambda u}]\,u_t \\
- \;& [(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\xi + (\alpha_y\,t + \beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1 + c_4\,t) + (\alpha\,t + \beta)\,c_4]\,u_y \\
- \;& [(\alpha_y\,t + \beta_y)\,\xi - (\alpha_x\,t + \beta_x)\,\eta]\,u_x - \lambda\,\alpha\,\eta\,u_t\,e^{-\lambda u}\,u \\
+ \;& [c_4\,(\alpha_y\,t + \beta_y) + (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_y]\,u + [\alpha\,\eta\,e^{-\lambda u} + (c_1 + c_4\,t)\,(\alpha_y\,t + \beta_y)]\,u_t \\
= \;& (\alpha_y\,t + \beta_y)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x - c_4) + c_4\,u\right) + \frac{2}{\lambda}\,(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\xi_y + (c_1 + c_4\,t)\,\alpha_y\,u \\
- \;& [(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\xi + (\alpha_y\,t + \beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1 + c_4\,t) + (\alpha\,t + \beta)\,c_4]\,u_y \\
+ \;& [(\alpha_x\,t + \beta_x)\,\eta - (\alpha_y\,t + \beta_y)\,\xi]\,u_x - \lambda\,u\,\alpha\,\eta\,e^{-\lambda u}\,u_t.
\end{aligned}
$$

Agora podemos eliminar da componente C^2 as parcelas envolvendo u_y. Primeiro transformamos tais derivadas em derivadas totais em y:

$$\begin{aligned}
&- \frac{2}{\lambda}\,(\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_y - [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi]\,u_y \\
&= -\mathcal{D}_y\left[\frac{2}{\lambda}\,(\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi + [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi]\,u\right] \\
&+ \frac{2}{\lambda}\,(\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy})\,\xi + [(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\eta + (\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta_y - (\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy})\,\xi - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_y]\,u,
\end{aligned}$$

depois, transformamos tais derivadas totais em derivadas totais em x:

$$\begin{aligned}
&- \mathcal{D}_x\left[\frac{2}{\lambda}\,(\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi + [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi]\,u\right] \\
&= -\frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\xi + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_x] - [(\alpha_{xx}\,t+\beta_{xx})\,\eta + (\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta_x \\
&- (\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\xi - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_x]\,u - [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi]\,u_x,
\end{aligned}$$

finalmente, são transferidas para a componente C^3. Logo, as novas componentes C^2 e C^3 tornam-se

$$\begin{aligned}
C^2 &= (\alpha_x\,t+\beta_x)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x-c_4)+c_4\,u\right) + (c_1+c_4\,t)\,\alpha_x\,u - (\lambda\,u-2)\,\alpha\,\xi\,e^{-\lambda\,u}\,u_t \\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1+c_4\,t) + (\alpha\,t+\beta)\,c_4]\,u_x + \frac{2}{\lambda}\,(\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy})\,\xi \\
&+ [(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\eta + (\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta_y - (\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy})\,\xi - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_y]\,u \\
&= \left(\frac{2}{\lambda}-u\right)\,(\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy})\,\xi + (\alpha_x\,t+\beta_x)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x-c_4)+(\xi_x+c_4)\,u\right) \\
&+ [(c_1+c_4\,t)\,\alpha_x + (\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\eta - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_y]\,u - (\lambda\,u-2)\,\alpha\,\xi\,e^{-\lambda\,u}\,u_t \\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1+c_4\,t) + (\alpha\,t+\beta)\,c_4]\,u_x, \\
C^3 &= (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\left(\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x-c_4)+c_4\,u\right) + \frac{2}{\lambda}\,(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi_y + (c_1+c_4\,t)\,\alpha_y\,u \\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1+c_4\,t) + (\alpha\,t+\beta)\,c_4]\,u_y \\
&+ [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi]\,u_x - \lambda\,u\,\alpha\,\eta\,e^{-\lambda\,u}\,u_t \\
&- \frac{2}{\lambda}\,[(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\xi + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_x] - [(\alpha_{xx}\,t+\beta_{xx})\,\eta + (\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta_x \\
&- (\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\xi - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi_x]\,u - [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\eta - (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\xi]\,u_x \\
&= \left(u-\frac{2}{\lambda}\right)\,(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy})\,\xi + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\left(-\frac{2}{\lambda}\,c_4+(\xi_x+c_4)\,u\right) \\
&+ \left(u+\frac{2}{\lambda}\right)\,(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi_y + [(c_1+c_4\,t)\,\alpha_y - (\alpha_{xx}\,t+\beta_{xx})\,\eta]\,u \\
&- [(\alpha_x\,t+\beta_x)\,\xi + (\alpha_y\,t+\beta_y)\,\eta + \alpha\,(c_1+c_4\,t) + (\alpha\,t+\beta)\,c_4]\,u_y - \lambda\,u\,\alpha\,\eta\,e^{-\lambda\,u}\,u_t.
\end{aligned}$$

Portanto, o vetor conservado simplificado é dado por

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \left[\frac{2}{\lambda}\left(c_4\,\alpha+\alpha_x\,\xi\right)-\left(\alpha_x\,\xi+\alpha_y\,\eta+2\,\alpha\,\xi_x\right)u\right]e^{-\lambda\,u}+e^{-\lambda\,u}\left\{\left[\left(\alpha_x\,t+\beta_x\right)\xi\right.\right.\\
&+ \left.\left.\left(\alpha_y\,t+\beta_y\right)\eta+\alpha\left(c_1+c_4\,t\right)+\left(\alpha\,t+\beta\right)c_4\right]u_t+\left(\lambda\,u-2\right)\alpha\,\xi\,u_x+\lambda\,u\,\alpha\,\eta\,u_y\right\},\\
C^2 &= \left(\frac{2}{\lambda}-u\right)\left(\alpha_{yy}\,t+\beta_{yy}\right)\xi+\left(\alpha_x\,t+\beta_x\right)\left(\frac{2}{\lambda}\left(\xi_x-c_4\right)+\left(\xi_x+c_4\right)u\right)\\
&+ \left[\left(c_1+c_4\,t\right)\alpha_x+\left(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy}\right)\eta-\left(\alpha_y\,t+\beta_y\right)\xi_y\right]u-\left(\lambda\,u-2\right)\alpha\,\xi\,e^{-\lambda\,u}\,u_t\\
&- \left[\left(\alpha_x\,t+\beta_x\right)\xi+\left(\alpha_y\,t+\beta_y\right)\eta+\alpha\left(c_1+c_4\,t\right)+\left(\alpha\,t+\beta\right)c_4\right]u_x,\\
C^3 &= \left(u-\frac{2}{\lambda}\right)\left(\alpha_{xy}\,t+\beta_{xy}\right)\xi+\left(\alpha_y\,t+\beta_y\right)\left(-\frac{2}{\lambda}\,c_4+\left(\xi_x+c_4\right)u\right)\\
&+ \left(u+\frac{2}{\lambda}\right)\left(\alpha_x\,t+\beta_x\right)\xi_y+\left[\left(c_1+c_4\,t\right)\alpha_y-\left(\alpha_{xx}\,t+\beta_{xx}\right)\eta\right]u\\
&- \left[\left(\alpha_x\,t+\beta_x\right)\xi+\left(\alpha_y\,t+\beta_y\right)\eta+\alpha\left(c_1+c_4\,t\right)+\left(\alpha\,t+\beta\right)c_4\right]u_y-\lambda\,u\,\alpha\,\eta\,e^{-\lambda\,u}\,u_t.
\end{aligned}
$$

Para obtermos leis de conservação específicas consideramos a seguinte subálgebra gerada por:

$$
V_1=\frac{\partial}{\partial t},\; V_2=\frac{\partial}{\partial x},\; V_3=\frac{\partial}{\partial y},\; V_4=t\,\frac{\partial}{\partial t}-\frac{2}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial u},\; V_5=x\,\frac{\partial}{\partial x}+y\,\frac{\partial}{\partial y}+\frac{2}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial u},\; V_6=y\,\frac{\partial}{\partial x}-x\,\frac{\partial}{\partial y}.
$$

Seja o gerador geral

$$
V=\left(c_1+c_4\,t\right)\frac{\partial}{\partial t}+\left(c_2+c_5\,x+c_6\,y\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(c_3-c_6\,x+c_5\,y\right)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{2}{\lambda}\left(c_5-c_4\right)\frac{\partial}{\partial u},
$$

com c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e c_6 constantes arbitrárias.

Assim, as componentes do vetor conservado são

$$
\begin{aligned}
C^1 &= \left[\frac{2}{\lambda}\left(c_4\,\alpha+\alpha_x\left(c_2+c_5\,x+c_6\,y\right)\right)-\left[\alpha_x\left(c_2+c_5\,x+c_6\,y\right)+\alpha_y\left(c_3-c_6\,x+c_5\,y\right)\right]u\right]e^{-\lambda\,u}\\
&+ e^{-\lambda\,u}\left\{-2\,\alpha\,c_5\,u+\left[\left(\alpha_x\,t+\beta_x\right)\left(c_2+c_5\,x+c_6\,y\right)+\left(\alpha_y\,t+\beta_y\right)\left(c_3-c_6\,x+c_5\,y\right)\right.\right.\\
&+ \left.\alpha\left(c_1+c_4\,t\right)+\left(\alpha\,t+\beta\right)c_4\right]u_t+\left(\lambda\,u-2\right)\alpha\left(c_2+c_5\,x+c_6\,y\right)u_x\\
&+ \left.\lambda\,u\,\alpha\left(c_3-c_6\,x+c_5\,y\right)u_y\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^2 &= \left(\frac{2}{\lambda} - u\right)(\alpha_{yy}\, t + \beta_{yy})\,(c_2 + c_5\, x + c_6\, y) + (\alpha_x\, t + \beta_x)\left(\frac{2}{\lambda}\,(c_5 - c_4) + (c_5 + c_4)\, u\right) \\
&+ [(c_1 + c_4\, t)\,\alpha_x + (\alpha_{xy}\, t + \beta_{xy})\,(c_3 - c_6\, x + c_5\, y) - (\alpha_y\, t + \beta_y)\, c_6]\, u \\
&- [(\alpha_x\, t + \beta_x)\,(c_2 + c_5\, x + c_6\, y) + (\alpha_y\, t + \beta_y)\,(c_3 - c_6\, x + c_5\, y) + \alpha\,(c_1 + c_4\, t) \\
&+ (\alpha\, t + \beta)\, c_4] u_x - (\lambda\, u - 2)\,\alpha\,(c_2 + c_5\, x + c_6\, y)\, e^{-\lambda\, u}\, u_t, \\
C^3 &= \left(u - \frac{2}{\lambda}\right)(\alpha_{xy}\, t + \beta_{xy})\,(c_2 + c_5\, x + c_6\, y) + (\alpha_y\, t + \beta_y)\left(-\frac{2}{\lambda}\, c_4 + (c_5 + c_4)\, u\right) \\
&+ \left(u + \frac{2}{\lambda}\right)(\alpha_x\, t + \beta_x)\, c_6 + [(c_1 + c_4\, t)\,\alpha_y - (\alpha_{xx}\, t + \beta_{xx})\,(c_3 - c_6\, x + c_5\, y)]\, u \\
&- [(\alpha_x\, t + \beta_x)\,(c_2 + c_5\, x + c_6\, y) + (\alpha_y\, t + \beta_y)\,(c_3 - c_6\, x + c_5\, y) + \alpha\,(c_1 + c_4\, t) \\
&+ (\alpha\, t + \beta)\, c_4]\, u_y - \lambda\, u\,\alpha\,(c_3 - c_6\, x + c_5\, y)\, e^{-\lambda\, u}\, u_t.
\end{aligned}
$$

Portanto, provamos o sétimo corolário do **NTLC**, o **Corolário 1.20**, página 21.

Observação 4.1: O **Corolário 1.17** é uma consequência do **Corolário 1.20**. De fato, notamos que a equação (4.33) é obtida com $\lambda = -1$; além disso ela é quase autoadjunta, então a variável adjunta é $v = \beta\, e^u$, com $\alpha = 0$ e β constante não-nula nesse corolário, e o único vetor conservado não-trivial é o gerado por V_4.

Capítulo 5

Conclusão

Vimos que o NTLC é uma ferramenta importante para se obter as quantidades conservadas, ou vetores conservados, a partir das simetrias de Lie, etc., da respectiva equação diferencial. Uma vez que tivermos calculados tais simetrias, via Algorítmo de Lie, aplicamos o Algorítmo do NTLC para estabelecermos as leis de conservação correspondentes.

Aplicando o Método de Ibragimov obtivemos algumas leis de conservação para as equações do fluxo de Ricci geométrico, equações do fluxo de Ricci 2D; as leis de conservação para as equações do calor não-linear 2D com não-linearidade do tipo potência $f(u) = u^p$ e do tipo exponencial $f(u) = e^u$, equações do fluxo de Ricci modificada; algumas leis de conservação para as equações do fluxo geométrico hiperbólico modificada. Em particular, concluímos que a equação do fluxo geométrico hiperbólico possui uma única lei de conservação não-trivial.

Em vista destes resultados importantes surgem algumas questões pertinentes.

1) Entre as equações estudadas quais admitem infinitas leis de conservação não-triviais?

2) Se considerarmos outras sub-álgebras obteremos novas leis de conservação, a menos, de equivalência?

3) Quais das equações vistas admitem leis de conservação generalizadas de alta ordem,

no sentido, estudado por Kruskal [7] para a equação de KdV?

Apêndice A

A equação do fluxo de Ricci geométrico

Proposição A.1: Considere a superfície regular $(\mathcal{M}^2,\, g)$ com a métrica em coordenadas conformes, $g_{ij} = \frac{1}{2}\, e^u\, \delta_{ij}$, então a equação do fluxo de Ricci geométrico é dada por

$$u_t = e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}).$$

Demonstração: A equação do fluxo de Ricci é

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -R_{ij}$$

onde R_{ij} são as componentes do tensor de Ricci. Como a métrica é conforme, basta tomarmos $i = j = 1$ e calcularmos R_{11}.

Os símbolos de Christoffel (veja [44], página 62) são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\, g^{kl}\,(g_{lj,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) = e^{-u}\,\delta_{kl}\,\left(\frac{1}{2}\, e^u\, u_i\,\delta_{lj} + \frac{1}{2}\, e^u\, u_j\,\delta_{li} - \frac{1}{2}\, e^u\, u_l\,\delta_{ij}\right)\\
&= \frac{1}{2}\,(u_i\,\delta_{kj} + u_j\,\delta_{ki} - u_k\,\delta_{ij})\,,
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \begin{cases} \frac{1}{2}\, u_k\,(-1)^{1+\delta_{ki}} & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2}\, u_j & \text{se } k = i \neq j \\ \frac{1}{2}\, u_i & \text{se } k = j \neq i. \end{cases}$$

As componentes do tensor curvatura Riemmaniana são dadas por

$$R^k_{ijl} \;=\; \Gamma^k_{il,j} - \Gamma^k_{ij,l} + \Gamma^k_{pj}\,\Gamma^p_{il} - \Gamma^k_{pl}\,\Gamma^p_{ij},$$

e as componentes do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{ij} \;=\; R^k_{ikj}.$$

Então obtemos

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{121} = R^2_{121} = \Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^2_{p2}\,\Gamma^p_{11} - \Gamma^2_{p1}\,\Gamma^p_{12},$$
$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\,u_x, \quad \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}\,u_y, \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2}\,u_x, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\,u_y, \quad \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}\,u_y,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{1}{2}\,u_{xx} - \frac{1}{2}\,u_{yy} + \frac{1}{4}\,u_y^2 + \frac{1}{4}\,u_x^2 - \frac{1}{4}\,u_x^2 - \frac{1}{4}\,u_y^2 \\ &= -\frac{1}{2}\,(u_{xx} + u_{yy}). \end{aligned}$$

Portanto, a equação do fluxo de Ricci é

$$\frac{1}{2}\,e^u\,u_t = \frac{1}{2}\,(u_{xx} + u_{yy}), \qquad \text{ou seja,} \quad u_t = e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}).$$

❖

Proposição A.2: Considere a superfície regular $(\mathcal{M}^2,\, g)$ com a métrica em coordenadas conformes, $g_{ij} = \frac{1}{2}\,e^u\,\delta_{ij}$, então a equação do fluxo de Ricci geométrico hiperbólico é dada por

$$u_{tt} = e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - u_t^2.$$

Demonstração: Segue da **Proposição A.1**. ❖

Apêndice B

A equação do fluxo de Ricci geométrico hiperbólico modificada

Proposição B.1: As simetrias de Lie da equação do fluxo de Ricci geométrico hiperbólico modificada

$$u_{tt} = a\, e^{\lambda\, u}\, (u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2$$

onde a e λ são constantes não-nulas, são geradas pelo seguinte gerador infinitesimal:

$$X = (c_1 + c_4\, t)\, \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, y)\, \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\, \frac{\partial}{\partial y} + \frac{2}{\lambda}\, (\xi_x - c_4)\, \frac{\partial}{\partial u},$$

com c_1 e c_4 constantes arbitrárias, e as funções $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$ satisfazendo as equações de Cauchy-Riemann:

$$\xi_x = \eta_y, \qquad \eta_x = -\xi_y.$$

Demonstração: Seguindo [4], **Theorem 2.36**, página 110, dado o gerador infinitesimal

$$X = \tau\, \frac{\partial}{\partial t} + \xi\, \frac{\partial}{\partial x} + \eta\, \frac{\partial}{\partial y} + \phi\, \frac{\partial}{\partial u},$$

onde $\tau = \tau(t, x, y, u)$, $\xi = \xi(t, x, y, u)$, $\eta = \eta(t, x, y, u)$ e $\phi = \phi(t, x, y, u)$, a sua segunda extensão infinitesimal é dada por

$$X^{(2)} = \tau\, \frac{\partial}{\partial t} + \xi\, \frac{\partial}{\partial x} + \eta\, \frac{\partial}{\partial y} + \phi\, \frac{\partial}{\partial u} + \phi^t\, \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{tt}\, \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xx}\, \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{yy}\, \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \cdots\,,$$

onde os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
\phi^t &= \mathcal{D}_t\phi - (\mathcal{D}_t\tau)u_t - (\mathcal{D}_t\xi)u_x - (\mathcal{D}_t\eta)u_y \\
&= \phi_t + (\phi_u - \tau_t)u_t - \tau_u\, u_t^2 - \xi_t\, u_x - \eta_t\, u_y - \xi_u\, u_t u_x - \eta_u\, u_t u_y, \\
\phi^{tt} &= \mathcal{D}_t\phi^t - (\mathcal{D}_t\tau)u_{tt} - (\mathcal{D}_t\xi)u_{tx} - (\mathcal{D}_t\eta)u_{ty} \\
&= \phi_{tt} + (2\,\phi_{tu} - \tau_{tt})u_t - \xi_{tt}\, u_x - \eta_{tt}\, u_y + (\phi_{uu} - 2\,\tau_{tu})u_t^2 - 2\,\xi_{tu}\, u_t u_x - 2\,\eta_{tu}\, u_t u_y \\
&- \tau_{uu} u_t^3 - \xi_{uu}\, u_t^2 u_x - \eta_{uu}\, u_t^2 u_y + (\phi_u - 2\,\tau_t - 3\,\tau_u\, u_t - \xi_u\, u_x - \eta_u\, u_y)u_{tt} \\
&- 2\,(\xi_t + \xi_u\, u_t)u_{tx} - 2\,(\eta_t + \eta_u\, u_t)u_{ty}, \\
\phi^{xx} &= \phi_{xx} + (2\,\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}\, u_t - \eta_{xx}\, u_y + (\phi_{uu} - 2\,\xi_{xu})u_x^2 - 2\,\tau_{xu}\, u_t u_x - 2\,\eta_{xu}\, u_x u_y \\
&- \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu}\, u_x^2 u_t - \eta_{uu}\, u_x^2 u_y + (\phi_u - 2\,\xi_x - 3\,\xi_u\, u_x - \tau_u\, u_t - \eta_u\, u_y)u_{xx} \\
&- 2\,(\tau_x + \tau_u\, u_x)u_{tx} - 2\,(\eta_x + \eta_u\, u_x)u_{xy}, \\
\phi^{yy} &= \phi_{yy} + (2\,\phi_{yu} - \eta_{yy})u_y - \tau_{yy}\, u_t - \xi_{yy}\, u_x + (\phi_{uu} - 2\,\eta_{yu})u_y^2 - 2\,\tau_{yu}\, u_t u_y - 2\,\xi_{yu}\, u_x u_y \\
&- \eta_{uu} u_y^3 - \tau_{uu}\, u_y^2 u_t - \xi_{uu}\, u_y^2 u_x + (\phi_u - 2\,\eta_y - 3\,\eta_u\, u_y - \tau_u\, u_t - \xi_u\, u_x)u_{yy} \\
&- 2\,(\tau_y + \tau_u\, u_y)u_{ty} - 2\,(\xi_y + \xi_u\, u_y)u_{xy}.
\end{aligned}$$

O critério infinitesimal de invariância (**Theorem 2.31**, página 104) exige que

$$X^{(2)}(u_{tt} - a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - \lambda\, u_t^2) = 0, \qquad \text{quando} \quad u_{tt} - a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - \lambda\, u_t^2 = 0.$$

Assim devemos ter

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\phi\,\frac{\partial}{\partial u} + \phi^t\,\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{tt}\,\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{xx}\,\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{yy}\,\frac{\partial}{\partial u_{yy}}\right)(u_{tt} - a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - \lambda\, u_t^2) \\
&= -\phi\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - \phi^t\, 2\,\lambda\, u_t + \phi^{tt} - (\phi^{xx} + \phi^{yy})\, a\, e^{\lambda\, u}. \qquad \text{(B.1)}
\end{aligned}$$

Agora substituimos a equação $u_{tt} = a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2$ em ϕ^{tt} e o reescrevemos como

$$\phi^{tt} := \tilde{\phi}^{tt} + (\phi_u - 2\,\tau_t - 3\,\tau_u\, u_t - \xi_u\, u_x - \eta_u\, u_y)(a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2) \qquad \text{(B.2)}$$

onde $\tilde{\phi}^{tt}_{u_{tt}} = 0$.

Os coeficientes dos monômios $u_t u_{xx}$, $u_x u_{xx}$ e $u_y u_{yy}$ em (B.1, B.2) são dados por

$$\begin{aligned}
u_t u_{xx}: &\quad -3\,\tau_u\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u} + \tau_u\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u} &=& \quad 0,\\
u_x u_{xx}: &\quad -\xi_u\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u} + 3\,\xi_u\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u} &=& \quad 0,\\
u_y u_{yy}: &\quad -\eta_u\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u} + 3\,\eta_u\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u} &=& \quad 0.
\end{aligned}$$

Como $a\,\lambda \neq 0$ segue que $\tau = \tau(t,x,y)$, $\xi = \xi(t,x,y)$ e $\eta = \eta(t,x,y)$. Então temos

$$\begin{aligned}
\phi^t &=& \phi_t + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_t\, u_x - \eta_t\, u_y,\\
\phi^{tt} &=& \phi_{tt} + (2\,\phi_{tu} - \tau_{tt})u_t - \xi_{tt}\, u_x - \eta_{tt}\, u_y + \phi_{uu}\, u_t^2 - 2\,\xi_t\, u_{tx} - 2\,\eta_t\, u_{ty}\\
&+& (\phi_u - 2\,\tau_t)(a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) + \lambda\, u_t^2)\\
&=& \phi_{tt} + (2\,\phi_{tu} - \tau_{tt})u_t - \xi_{tt}\, u_x - \eta_{tt}\, u_y + (\phi_{uu} + \lambda\,(\phi_u - 2\,\tau_t))\, u_t^2 - 2\,\xi_t\, u_{tx} - 2\,\eta_t\, u_{ty}\\
&+& (\phi_u - 2\,\tau_t)\, a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}),\\
\phi^{xx} &=& \phi_{xx} + (2\,\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}\, u_t - \eta_{xx}\, u_y + \phi_{uu}\, u_x^2 + (\phi_u - 2\,\xi_x)u_{xx} - 2\,\tau_x\, u_{tx}\\
&-& 2\,\eta_x\, u_{xy},\\
\phi^{yy} &=& \phi_{yy} + (2\,\phi_{yu} - \eta_{yy})u_y - \tau_{yy}\, u_t - \xi_{yy}\, u_x + \phi_{uu}\, u_y^2 + (\phi_u - 2\,\eta_y)u_{yy} - 2\,\tau_y\, u_{ty}\\
&-& 2\,\xi_y\, u_{xy},\\
\phi^{xx} + \phi^{yy} &=& \Delta\phi - \Delta\tau\, u_t + (2\,\phi_{xu} - \Delta\xi)u_x + (2\,\phi_{yu} - \Delta\eta)u_y + \phi_{uu}\,(u_x^2 + u_y^2)\\
&+& (\phi_u - 2\,\xi_x)u_{xx} + (\phi_u - 2\,\eta_y)u_{yy} - 2\,\tau_x\, u_{tx} - 2\,\tau_y\, u_{ty} - 2\,(\eta_x + \xi_y)\, u_{xy}.
\end{aligned}$$

Substituindo estas fórmulas em (B.1) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &=& -\phi\, a\,\lambda\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - (\phi_t + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_t\, u_x - \eta_t\, u_y)\, 2\,\lambda\, u_t + \phi_{tt} + (2\,\phi_{tu} - \tau_{tt})u_t\\
&-& \xi_{tt}\, u_x - \eta_{tt}\, u_y + (\phi_{uu} + \lambda\,(\phi_u - 2\,\tau_t))\, u_t^2 - 2\,\xi_t\, u_{tx} - 2\,\eta_t\, u_{ty}\\
&+& (\phi_u - 2\,\tau_t)\, a\, e^{\lambda\, u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - [\Delta\phi - \Delta\tau\, u_t + (2\,\phi_{xu} - \Delta\xi)u_x + (2\,\phi_{yu} - \Delta\eta)u_y\\
&+& \phi_{uu}\,(u_x^2 + u_y^2) + (\phi_u - 2\,\xi_x)u_{xx} + (\phi_u - 2\,\eta_y)u_{yy} - 2\,\tau_x\, u_{tx} - 2\,\tau_y\, u_{ty}\\
&-& 2\,(\eta_x + \xi_y)\, u_{xy}]\, a\, e^{\lambda\, u}. \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

Da equação (B.3) segue que as equações determinantes de simetrias são dadas por

$$
\begin{array}{rrcl}
u_t^2\colon & -2\,\lambda\,(\phi_u-\tau_t)+\phi_{uu}+\lambda\,(\phi_u-2\,\tau_t) & = & 0,\\
u_x^2+u_y^2\colon & \phi_{uu} & = & 0\ ,\\
u_{xx}\colon & -\phi\,a\,\lambda\,e^{\lambda\,u}+(\phi_u-2\,\tau_t)\,a\,e^{\lambda\,u}-(\phi_u-2\,\xi_x)\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0,\\
u_{yy}\colon & -\phi\,a\,\lambda\,e^{\lambda\,u}+(\phi_u-2\,\tau_t)\,a\,e^{\lambda\,u}-(\phi_u-2\,\eta_y)\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0,\\
u_{xy}\colon & 2\,(\eta_x+\xi_y)\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0\ ,\\
u_{tx}\colon & -2\,\xi_t+2\,\tau_x\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0\ ,\\
u_{ty}\colon & -2\,\eta_t+2\,\tau_y\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0\ ,\\
u_tu_x\colon & 2\,\lambda\,\xi_t & = & 0\ ,\\
u_tu_y\colon & 2\,\lambda\,\eta_t & = & 0\ ,\\
u_t\colon & -2\,\lambda\,\phi_t+(2\,\phi_{tu}-\tau_{tt})+\Delta\tau\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0\ ,\\
u_x\colon & -\xi_{tt}-(2\,\phi_{xu}-\Delta\xi)\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0\ ,\\
u_y\colon & -\eta_{tt}-(2\,\phi_{yu}-\Delta\eta)\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0\ ,\\
\mathbf{1}\colon & \phi_{tt}-\Delta\phi\,a\,e^{\lambda\,u} & = & 0\ .
\end{array}
$$

Substituindo a segunda equação determinante na primeira segue que $\phi = \phi(t,x,y)$, visto que $\lambda \neq 0$.

Seguem das oitava e nona equações que $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$. Substituindo tais ξ e η nas sexta e sétima equações obtemos $\tau = \tau(t)$.

Resolvendo a terceira equação para ϕ, temos

$$
-(\phi\,\lambda+2\,\tau_t-2\,\xi_x)\,a\,e^{\lambda\,u}=0, \quad \text{ou seja,} \quad \phi=\frac{2}{\lambda}\,(\xi_x-\tau_t).
$$

Subtraindo as terceira e quarta equações obtemos $\xi_x - \eta_y = 0$. Disso e dá quinta equação segue que as funções $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$
\xi_x = \eta_y, \qquad \eta_x = -\xi_y.
$$

Substituindo τ e ϕ na décima equação segue que $\tau_{tt} = 4\,\tau_{tt}$, ou seja, $\tau = c_1 + c_4\,t$, onde c_1 e c_4 são constantes arbitrárias.

Portanto, $\tau = c_1 + c_4\,t$, as funções $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann, e $\phi = \frac{2}{\lambda}\,(\xi_x - c_4)$. ❖

Corolário B.1: As simetrias de Lie da equação do fluxo de Ricci geométrico hiperbólico

$$u_{tt} = e^{-u}\,(u_{xx} + u_{yy}) - u_t^2$$

são geradas pelo seguinte gerador infinitesimal:

$$X = (c_1 + c_4\,t)\,\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,y)\,\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\,\frac{\partial}{\partial y} + 2\,(c_4 - \xi_x)\,\frac{\partial}{\partial u},$$

com c_1 e c_4 constantes arbitrárias, e as funções $\xi = \xi(x,y)$ e $\eta = \eta(x,y)$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\xi_x = \eta_y, \qquad \eta_x = -\xi_y.$$

Referências Bibliográficas

[1] IBRAGIMOV, N. H. **Lectures on Modern Group Analysis**. Second, revised edition, Johannesburg, 1996.

[2] KHAMITOVA, Raisa. **Symmetries and conservation laws.** 2009. Thesis for the degree of Doctor of Philosophy, Växjö University, Sweden, 2009. Disponível em: `http://www.bth.se/fou/forskinfo.nsf/all/d2a098f807334f13c125758d0037c63f?OpenDocument`. Acesso em: jan 2012.

[3] NOETHER, E. **Invariante Variationsprobleme**. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nachrichten. Mathematisch-physikalische Klasse Heft 2. 235-257, (1918).

[4] OLVER, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**. Graduate Texts in Mathematics, vol. 107, 2nd ed., Springer-Verlag New York, (1986).

[5] IBRAGIMOV, N. H. **The answer to the question put to me by L.V. Ovsyannikov 33 years ago**. Archives of ALGA 3, 55-60, (2006). Disponível em: `http://www.bth.se/fou/forskinfo.nsf/all/39edc7167337c8bec12578be0056f47c?OpenDocument`. Acesso em: jan 2012.

[6] IBRAGIMOV, N. H. **A new conservation theorem**. J. Math. Anal. Appl., 333, 1, 311-328, (2007). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.078`. Acesso em: jan 2012.

[7] KRUSKAL, M. D.; MIURA, R. M.; GARDNER, C. S.; ZABUSKY, N. J. **Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. V. Uniqueness and Nonexistence of Polynomial Conservation Laws**. J. Math. Phys., 11, 3, 952-960, (1970). Disponível em: `http://www.math.ucdavis.edu/~laustria/VIGRE-RFG/Files/JMathPhys_1970_Kruskal_etal.pdf`. Acesso em: jan 2012.

[8] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**. Graduates Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, (1998).

[9] IBRAGIMOV, N. H. **Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws**. Archives of ALGA 7/8, 1-90, (2010-2011). Disponível em: `http://arxiv.org/abs/1109.1728`. Acesso em: jan 2012.

[10] CHAO, X. **Symmetries and geometric flows**. arXiv:1001.1394 v1 [math.GT], 09 Jan 2010. Disponível em: `http://arxiv.org/pdf/1001.1394.pdf`. Acesso em: jan 2012.

[11] CIMPOIASU, R.; CONSTANTINESCU, R. **Symmetries and invariants for the 2D-Ricci flow model**. J. Nonlin. Math. Phys., 13, 285-292, (2006). Disponível em: `http://staff.www.ltu.se/~norbert/home_journal/electronic/132art9.pdf`. Acesso em: jan 2012.

[12] CIMPOIASU, R.; CONSTANTINESCU, R. **The inverse symmetry problem for a 2D generalized second order evolutionary equation**. Nonlin. Anal., 73, 147-154, (2010). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2010.03.007`. Acesso em: jan 2012.

[13] CIMPOIASU, R.; CONSTANTINESCU, R. **Lie symmetries and invariants for a 2D nonlinear heat equation**. Nonlin. Anal., 68, 2261-2268, (2008). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2007.01.053`. Acesso em: jan 2012.

[14] CIMPOIASU, R. **Symmetries and Conservation Laws for the 2D Ricci Flow Model**. arXiv:1108.5446v1 [math-ph], 27/08/2011. Disponível em: `http://128.84.158.119/abs/1108.5446`. Acesso em: jan 2012.

[15] BLUMAN, G. W.; CHEVIAKOV, A. F.; ANCO,S. C. **Applications of symmetry methods to partial differential equations**. Springer, New York, (2010).

[16] BOZHKOV, Y.; SILVA, K. A. A. **Nonlinear self-adjointness of a 2D generalized second order evolution equation**. Nonlin. Anal., 75, 5069-5078, (2012). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2012.04.023`. Acesso em: jan 2012.

[17] SILVA, K. A. A. **Nonlinear self-adjointness and conservation laws for the hyperbolic geometric flow equation**. J. Nonlin. Math. Phys., 20, 1, (2013) - no prelo.

[18] IBRAGIMOV, N. H. **Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians**. J. Math. Anal. Appl., 318, 742-757, (2006). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.012`. Acesso em: jan 2012.

[19] IBRAGIMOV, N. H. **Quasi-self-adjoint differential equations**. Archives of ALGA 4, 55-60, (2007). Disponível em: `http://www.bth.se/fou/forskinfo.nsf/all/2997465595b55dc4c12578be00585fa3?OpenDocument`. Acesso em: jan 2012.

[20] IBRAGIMOV, N. H.; KHAMITOVA, R. S.; VALENTI, A. **Self-adjointness of a generalized Camassa-Holm equation**. Appl. Math. Comp., 218, 2579-2583, (2011). Disponível em: `http://arxiv.org/abs/1102.5719`. Acesso em: jan 2012.

[21] IBRAGIMOV, N. H. **Nonlinear self-adjointness and conservation laws**. J. Phys. A: Math. Theor., 44, 432002, 8 pp., (2011). Disponível em: `http://arxiv.org/abs/1107.4877`. Acesso em: jan 2012.

[22] GANDARIAS, M. L. **Weak self-adjoint differential equations**. J. Phys. A: Math. Theor., 44, 262001, 6 pp., (2011). Disponível em: `http://iopscience.iop.org/1751-8121/44/26/262001`. Acesso em: jan 2012.

[23] GANDARIAS, M. L.; REDONDO, M.; BRUZÓN, M. S. **Some weak self-adjoint Hamilton-Jacobi-Bellman equations arising in financial mathematics**. Nonlin. Anal. RWA, 13, 340-347, (2012). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.07.041`. Acesso em: jan 2012.

[24] CESAR SANTOS SAMPAIO, Júlio. **Simetrias de Lie e leis de conservação de equações evolutivas do tipo Korteweg-de Vries.** 2012. 79 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Centro de Matemática, Computação e Cognição, Fundação Universidade Federal do ABC, Santo André, 2012.

[25] BRUZÓN, M. S.; GANDARIAS, M. L.; IBRAGIMOV, N. H. **Self-adjoint subclasses of generalized thin film equations**. J. Math. Anal. Appl., 357, 307-313, (2009). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.04.028`. Acesso em: jan 2012.

[26] FREIRE, I. L. **Conservation laws for self-adjoint first order evolution equations**. J. Nonlin. Math. Phys., 18, 279-290, (2011). Disponível em: `http://arxiv.org/pdf/1002.3986.pdf`. Acesso em: jan 2012.

[27] FREIRE, I. L. **Self-adjoint sub-classes of third and fourth-order evolution equations**. Appl. Math. Comp., 217, 9467-9473, (2011). Disponível em: `http://arxiv.org/abs/1010.1765`. Acesso em: jan 2012.

[28] FREIRE, I. L.; SAMPAIO, J. C. S. **Nonlinear Self-adjointness of a generalized fifth-order KdV equation**. J. Phys. A: Math. Theor., 45, 032001, (2012). Disponível em: `http://iopscience.iop.org/1751-8121/45/3/032001`. Acesso em: jan 2012.

[29] GANDARIAS, M. L. **Weak self-adjointness and conservation laws for a porous medium equation**. Commun. Nonlin. Sci. Num. Sci., 17, 2342-2349, (2012). Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.10.020`. Acesso em: jan 2012.

[30] IBRAGIMOV, N. H.; TORRISI, M.; TRACINÀ, R. **Quasi self-adjoint nonlinear wave equations**. J. Phys. A: Math. Theor., 43, 442001-442009, (2010). Disponível em: `http://iopscience.iop.org/1751-8121/43/44/442001`. Acesso em: jan 2012.

[31] IBRAGIMOV, N. H.; TORRISI, M.; TRACINÀ, R. **Self-adjointness and conservation laws of a generalized Burgers equation**. J. Phys. A: Math. Theor., 44, 145201-145206, (2011). Disponível em: http://iopscience.iop.org/1751-8121/44/14/145201/. Acesso em: jan 2012.

[32] BOZHKOV, Y.; DIMAS, S.; IBRAGIMOV, N. H. **Conservation laws for a coupled variable-coefficient modified Korteweg-de Vries system in a two-layer fluid model**. Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat., 18, 1127-1135, (2013). Disponível em: http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.09.015. Acesso em: jan 2012.

[33] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. John Wiley and Sons. Inc. New York, N. Y., (1978).

[34] CARLOS GILLI MARTINS, Antonio. **Simetrias de Lie e soluções exatas de equações diferenciais quaselineares.** 2002. 113 p. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

[35] LEITE FREIRE, Igor. **Simetrias de Lie de equações diferenciais parciais semilineares envolvendo o operador de Kohn - Laplace no grupo de Heisenberg.** 2008. 169 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

[36] IBRAGIMOV, N. H. **The Noether Identity**. Continuum Dynamics, Institute of Hydrodynamics, USSR Acad. Sci., Siberian Branch, Novosibirsk, 38, 26-32, (1979).

[37] IBRAGIMOV, N. H. **Transformation groups in mathematical physics**. Moscow: Nauka, 1983. English transl. **Transformation groups applied to mathematical physics**, Reidel, Dordrecht, 1985.

[38] BOZHKOV, Y.; MITIDIERI, E. **The Noether Approach to Pokhozhaev's Identities**. Mediterranean Journal of Mathematics, 4, 383-405, (2007). Disponível em: http://www.springerlink.com/content/4206t52201240686/. Acesso em: jan 2012.

[39] HAMILTON, R. S. **The Ricci flow on surfaces**. Contemporary Mathematics, 71, 237-262, (1988).

[40] WANG, J. **Symmetries and solutions of geometric flows**. 2011. Disponível em: http://www.cms.zju.edu.cn/UploadFiles/AttachFiles/20101127134230546.pdf. Acesso em: jan 2012.

[41] BAKAS, I. **Ricci flows and infinite dimensional algebras**. Fortsch. Phys., 52, 464-471, (2004). Disponível em:¡ http://arxiv.org/abs/hep-th/0312274¿. Acesso em: jan 2012.

[42] KONG, D.; LIU, K. **Wave character of metrics and hyperbolic geometric flow**. J. Math. Phys., 48, 103508, (2007). Disponível em: http://jmp.aip.org/resource/1/jmapaq/v48/i10/p103508_s1. Acesso em: jan 2012.

[43] BOZHKOV, Y.; FREIRE, I. L. Comunicação particular, fev 2012.

[44] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity**. Pure and Applied Mathematics. Academic Press, San Diego, California, (1983).