UNICAMP

NUNO FILIPE DE ANDRADE CARDOSO

TEOREMAS DE DECOMPOSIÇÃO, DEGENERESCÊNCIA E ANULAMENTO EM CARACTERÍSTICA POSITIVA

CAMPINAS
2014

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

NUNO FILIPE DE ANDRADE CARDOSO

TEOREMAS DE DECOMPOSIÇÃO, DEGENERESCÊNCIA E ANULAMENTO EM CARACTERÍSTICA POSITIVA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Marcos Benevenuto Jardim

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA
DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO
NUNO FILIPE DE ANDRADE CARDOSO, E ORIENTADA PELO
PROF. DR. MARCOS BENEVENUTO JARDIM.

Assinatura do Orientador

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

C179t	Cardoso, Nuno Filipe de Andrade, 1988- Teoremas de decomposição, degenerescência e anulamento em característica positiva / Nuno Filipe de Andrade Cardoso. – Campinas, SP : [s.n.], 2014. Orientador: Marcos Benevenuto Jardim. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Hodge, Teoria de. 2. Teoria de deformação (Matemática). 3. De Rham, Cohomologia de. 4. Witt, Vetores de. 5. Categorias derivadas (Matemática). I. Jardim, Marcos Benevenuto,1973-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Decomposition, degeneration and vanishing theorems in positive characteristic
Palavras-chave em inglês:
Hodge theory
Deformation theory (Mathematics)
De Rham cohomology
Witt vectors
Derived categories (Mathematics)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Marcos Benevenuto Jardim [Orientador]
Elizabeth Terezinha Gasparim
Abdelmoubine Amar Henni
Data de defesa: 24-07-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 24 de julho de 2014 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

Prof.(a). Dr(a). ELIZABETH TEREZINHA GASPARIM

Prof.(a). Dr(a). ABDELMOUBINE AMAR HENNI

ABSTRACT

The Hodge degeneration theorem and the Kodaira, Akizuki and Nakano's vanishing theorem are of paramount importance in the theory of complex manifolds. Using Serre's comparison theorem, both can be translated to the context of smooth projective schemes over a field of characteristic zero. For fields of positive characteristic, however, both fail to hold without additional hypotheses, and the first counterexamples were found by Mumford and Raynaud. Our goal in this dissertation is to present a theorem due to Deligne and Illusie that ensures the degeneration of the Hodge-de Rham spectral sequence and a version of the theorem of Kodaira, Akizuki and Nakano for certain smooth projective schemes over a perfect field of positive characteristic. We tried to keep the treatment as self-contained as possible.

Keywords: Hodge Theory, Deformation Theory, De Rham Cohomology, Witt Vectors, Derived Categories.

RESUMO

Os teoremas de degenerescência de Hodge e de anulamento de Kodaira, Akizuki e Nakano são de suma importância na teoria de variedades complexas. Usando o teorema de comparação de Serre, ambos podem ser traduzidos para o contexto de esquemas projetivos e suaves sobre um corpo de característica zero. Para corpos de característica positiva, no entanto, os dois deixam de valer sem hipóteses adicionais, sendo que os primeiros contra-exemplos foram encontrados por Mumford e Raynaud. O objetivo desta dissertação é apresentar um teorema devido a Deligne e Illusie que assegura a degenerescência da seqüência espectral de Hodge-de Rham e uma versão do teorema de Kodaira, Akizuki e Nakano para certos esquemas projetivos e suaves sobre um corpo perfeito de característica positiva. Nos propusemos a dar um tratamento, na medida do possível, auto-suficiente.

Palavras-chave: Teoria de Hodge, Teoria de Deformação, Cohomologia de de Rham, Vetores de Witt, Categorias Derivadas.

SUMÁRIO

A todos aqueles que, por infortúnios da vida, não puderam dar continuidade ao sonho de se tornarem matemáticos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de expressar o meu apreço a todos os professores que tive ao longo da vida. Em particular, ao meu orientador, Prof. Dr. Marcos Jardim, pela paciência e pela liberdade que me proporcionou durante este projeto, à minha orientadora de iniciação científica, Prof.ª Dr.ª Dessislava Kochloukova, por ter me ensinado quase toda a álgebra homológica que utilizei para elaborar este texto, aos professores de inglês e francês, sem os quais nenhuma das referências bibliográficas poderia ter sido lida, e aos de português, que me ajudaram a aprimorar o idioma do presente documento.

Agradeço à Capes e ao CNPq por terem provido o apoio monetário indispensável para uma dedicação exclusiva a este trabalho e à Unicamp por ter propiciado um ambiente adequado à aprendizagem.

Gostaria também de manifestar minha profunda gratidão a todos os meus amigos e colegas, sem os quais provavelmente não teria tido forças para concluir esta empreitada. Em especial, ao Francismar por ter me cedido o código-fonte da sua dissertação, ao Gilmar por ter lido uma versão preliminar do primeiro parágrafo e ao Júlio por ter assistido pacientemente à primeira apresentação que fiz deste trabalho.

Por fim, e mais importante, rendo graças à minha família, à qual devo tudo que sou.

Décidément, nous sommes hors du monde. Plus aucun son. Mon tact a disparu. Ah ! mon château, ma Saxe, mon bois de saules. Les soirs, les matins, les nuits, les jours... Suis-je las !

—Arthur Rimbaud, *Une Saison en Enfer*

INTRODUÇÃO

Sejam k um corpo e X um k-esquema próprio e suave. A cohomologia de de Rham de X sobre k, denotada $\mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k)$, é definida como sendo a hipercohomologia do complexo de formas diferenciais relativas $\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/k}$ de X sobre k e é o limite da seqüência espectral de Hodge-de Rham

(0.0.1) $$\mathrm{E}_1^{ij} = \mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) \Rightarrow \mathrm{H}^{i+j}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k).$$

Para cada n, temos uma filtração

$$0 = \mathrm{F}^{n+1}(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k)) \subseteq \mathrm{F}^n(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k)) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{F}^0(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k)) = \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k),$$

chamada a *filtração de Hodge de* X *sobre* k. Existem, para todo i, isomorfismos canônicos $\mathrm{E}_\infty^{i,n-i} \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}^i(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k))/\mathrm{F}^{i+1}(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k))$ e, caso a seqüência espectral (0.0.1) degenere em E_1, isomorfismos canônicos

$$\mathrm{H}^{n-i}(\mathrm{X}, \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}^i(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k))/\mathrm{F}^{i+1}(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k)).$$

Em virtude do teorema de finitude de Serre-Grothendieck, (0.0.1) consiste de k-espaços vetoriais de dimensão finita e temos, em geral, que

$$\sum_{i+j=n} \dim_k(\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \Omega^i_{\mathrm{X}/k})) \geq \dim_k(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k)),$$

sendo que a igualdade é válida para todo n se, e somente se, (0.0.1) em E_1.

Pergunta **(0.1).** — *Sejam k um corpo e* X *um k-esquema próprio e suave. É verdade que a seqüência espectral de Hodge-de Rham de* X *sobre k sempre degenera em* E_1*?*

Em 1968, Deligne [Del68] mostrou que se k é um corpo de característica zero, então a resposta para (0.1) é afirmativa. A demonstração utiliza o lema de Chow e o teorema de resolução de singularidades de Hironaka para reduzir a questão ao caso projetivo, o princípio de Lefschetz para reduzir ao caso em que k é o corpo dos números complexos **C** e por fim os critérios de comparação estabelecidos por Serre em [GAGA] para obter o resultado a partir do teorema de degenerescência de Hodge para variedades kählerianas compactas.

Por muito tempo se buscou uma demonstração puramente algébrica deste fato. Faltings [Fal88], em 1985, foi o primeiro a obter uma que não utiliza a teoria de Hodge. Para isso, ele emprega o seu teorema de existência de uma decomposição de Hodge-Tate para a cohomologia étale p-ádica de variedades próprias e suaves sobre corpos locais de característica desigual. No entanto, seu argumento não é completamente algébrico, pois faz uso do teorema de comparação de Artin-Grothendieck entre a cohomologia étale e a cohomologia singular para variedades sobre **C**.

Se, no entanto, k é um corpo de característica positiva, mesmo um algebricamente fechado, então a resposta para a pergunta (0.1) é negativa. O primeiro contra-exemplo foi obtido por Mumford [Mum61] ao construir superfícies projetivas e suaves possuindo 1-formas globais não fechadas. Essa deficiência nos leva a fazer a seguinte

Pergunta **(0.2).** — *Sejam k um corpo de característica $p > 0$ e* X *um k-esquema próprio e suave. Quando podemos garantir que a seqüência espectral de Hodge-de Rham de* X *sobre k degenera em* E_1*?*

Em 1985, Kato [Kato87], no caso projetivo, e Fontaine e Messing [FM87] no caso próprio, obtiveram condições que garantem a veracidade de (0.2). Basta exigir que k seja um corpo perfeito, que $\dim(X) < p$ e que X se levante sobre o anel $W(k)$ de vetores de Witt de k. Uma variante do princípio de Lefschetz permite, então, provar (0.1) no caso de um corpo de característica zero. Essa foi a primeira demonstração puramente algébrica desse fato.

O objetivo desta dissertação é expor um aprimoramento dos resultados de Kato, Fontaine e Messing devido a Deligne e Illusie [DI87] e daí obter algumas conseqüências. Uma delas e o seguinte

Teorema **(0.3)** (Deligne-Illusie). — *Sejam k um corpo perfeito de característica $p > 0$ e X um k-esquema suave. Se X admite um levantamento sobre o anel $W_2(k)$ de vetores de Witt de comprimento dois de k, então*

$$\sum_{i+j=n} \dim_k(H^j(X, \Omega^i_{X/k})) = \dim_k(H^n_{dR}(X/k))$$

para todo $n < p$. Em particular, se X for um k-esquema próprio e $\dim(X) < p$, então a seqüência espectral de Hodge-de Rham degenera em E_1.

O teorema (0.3) é obtido a partir de um resultado mais preciso sobre o complexo de de Rham de X sobre k. Denotemos por X' o esquema deduzido de X através da extensão de escalares $k \xrightarrow{\sim} k$ que leva x em x^p e por $F : X \to X'$ o morfismo de Frobenius de X relativo a k. Vale, então, o seguinte:

Teorema **(0.4)** (Deligne-Illusie). — *Sejam k um corpo perfeito de característica $p > 0$ e X um k-esquema suave. Todo levantamento $\widetilde{X}$ de X sobre o anel $W_2(k)$ de vetores de Witt de comprimento dois de k determina um isomorfismo*

$$\varphi_{\tilde{X}} : \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/k}[-i] \to \tau_{<p} F_*(\Omega^\bullet_{X/k})$$

na categoria derivada $\mathbf{D}(X')$ de $\mathscr{O}_{X'}$-módulos.

Raynaud observou que podemos obter a partir de (0.4) um teorema de anulamento do tipo Kodaira em característica positiva:

Teorema **(0.5)** (Raynaud). — *Sejam k um corpo perfeito de característica $p > 0$ e X um k-esquema projetivo, suave, puramente de dimensão $d < p$ e levantável sobre o anel $W_2(k)$ de vetores de Witt de comprimento dois de k. Se $\mathscr{L}$ é um feixe invertível amplo em X, então $H^j(X, \mathscr{L}^{-1} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^i_{X/k}) = 0$ para $i + j < d$. Graças à dualidade de Serre, isso equivale a dizer que $H^j(X, \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^i_{X/k}) = 0$ para $i + j > d$.*

Da mesma forma que o teorema (0.3) implica o resultado análogo em característica zero, o teorema (0.5) permite obter a primeira demonstração algébrica do teorema de anulamento clássico:

Teorema **(0.6)**. — *Sejam k um corpo de característica zero e X um k-esquema projetivo, suave e puramente de dimensão d. Se $\mathscr{L}$ é um feixe invertível amplo em X, então $H^j(X, \mathscr{L}^{-1} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^i_{X/k}) = 0$ para $i + j < d$ e $H^j(X, \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_X} \Omega^i_{X/k}) = 0$ para $i + j > d$.*

Demonstraremos os teoremas (0.3), (0.4) e (0.5) na seção 4.2. No entanto, não figurarão no texto os métodos de redução da característica zero à característica positiva e sugerimos a consulta do artigo original [DI87] ou da exposição mais expandida de Illusie [Ill96, nº 6]. No parágrafo 1, construímos os módulos de diferenciais relativas $\Omega^i_{X/Y}$ associados a um Y-esquema X e mostramos como podemos definir uma diferencial exterior de modo a obter um complexo $\Omega^\bullet_{X/Y}$. No parágrafo 2, estudamos morfismos suaves com uma ênfase voltada para problemas de prolongamentos e levantamentos, que serão cruciais para obter os teoremas supracitados. O parágrafo 3 é dedicado aos morfismos de Frobenius relativos e ao isomorfismo de Cartier. Por fim, no parágrafo 4, demonstramos os teoremas principais após um sumário dos resultados de álgebra homológica que precisaremos. A ordem da exposição é baseada em [Ill96].

Embora tenhamos tentado manter o tratamento das noções diferenciais em geometria algébrica, na medida do possível, auto-suficiente, o mesmo não se aplica a outros pontos. Em particular, supomos que o leitor tenha alguma familiaridade com o seguinte:

(i) *Álgebra comutativa*, sendo as principais referências [AM69], [Mat86] e [Eis04].

(ii) *Álgebra homológica*, para a qual sugerimos [Wei94] e algumas partes de [Tohoku].

(iii) *Teoria de categorias*, no nível dos livros [ML98], [Bor94a] e [Bor94b].

(iv) *Geometria algébrica*, como exposta em [Har77], [Vak13] e [GW10].

Referências precisas serão dadas ao longo do texto.

* * *

Nesta dissertação, todos os anéis serão comutativos e possuirão um elemento identidade. Por outro lado, por vezes precisaremos considerar álgebras não necessariamente comutativas, sempre ligadas ao complexo de de Rham, mas, exceto sob menção expressa do contrário, elas serão também comutativas. Suporemos sempre que os homomorfismos de anéis levam o elemento identidade no elemento identidade e que as álgebras graduadas são $\mathbf{Z}$-graduadas. Todos os módulos serão supostos unitários e a ação do anel, por vezes considerada à esquerda, por vezes à direita, será sempre a mesma.

Optamos por usar o termo *talo* para o que em inglês é chamado de *stalk* e por dizer esquema ou variedade regular em vez de não-singular. Vale ressaltar que, em geral, isso não tem o mesmo significado de suave (2.2.3).

Em uma tentativa de unificar as diversas nomenclaturas existentes, sempre usaremos os termos categóricos limite e colimite como definidos em [Bor94a, 2.6]. Se tivermos uma categoria de índices filtrada, mesmo que seja um conjunto direcionado, diremos colimites filtrados em vez de limites indutivos ou diretos. Em alguns pontos, citaremos referências que não demonstram os teoremas na generalidade de categorias filtradas, mas o mesmo argumento funciona para este caso mais geral. Uma alternativa seria nos valer do fato de, para toda categoria pequena filtrada J, existir um conjunto direcionado I e um funtor cofinal $\mathrm{I} \to \mathrm{J}$ [AR94, 1.5].

Os complexos considerados ao longo do texto serão sempre de cocadeias, ou seja, cujas diferenciais são de grau $+1$. No caso de bicomplexos, ambas as diferenciais serão de grau $+1$ e suporemos que elas anticomutam. Queira ver (4.1.1) para uma lista mais longa de convenções de álgebra homológica.

* * *

No que diz respeito à escolha tipográfica, optamos por seguir, com ligeiras mudanças, aquela das publicações matemáticas do IHES das décadas de 60 e 70, usada por exemplo em [EGA], principalmente pelo estilo de numeração, embora a sua elegância tenha sido também um fator preponderante.

§ 1. CÁLCULO DIFERENCIAL

Neste parágrafo, apresentamos as noções básicas do cálculo diferencial em geometria algébrica. Na seção 1.1 construímos o módulo de 1-diferenciais relativas $\Omega^1_{X/Y}$ de um Y-esquema X, que aqui desempenhará o mesmo papel do fibrado cotangente relativo em geometrial diferencial. Em geral, $\Omega^1_{X/Y}$ é apenas um $\mathscr{O}_X$-módulo quase-coerente, mas se X for um Y-esquema suave, então ele será um $\mathscr{O}_X$-módulo localmente livre de tipo finito (2.1.28). Em uma tentativa de justificar essa alusão à geometria diferencial, provaremos na proposição (1.1.50) que as fibras do módulo de 1-diferenciais relativas de um esquema sobre um corpo em pontos racionais são naturalmente isomorfas ao espaço cotangente de Zariski nesses pontos. Para uma motivação geométrica mais extensa queira ver [Eis04, Seção 16.2] ou [Vak13, 21.1]. Parte dos livros-texto omitem os detalhes da globalização do módulo de 1-diferenciais relativas e isso nos levou a dar um tratamento minucioso ao principal objeto de estudo desta dissertação. Os principais resultados da seção 1.1, embora elementares, são as seqüências cotangente relativa (1.1.38.1) e conormal (1.1.45.1), bem como suas versões locais, que aparecerão de forma recorrente ao longo do texto. Boas referências para a parte local aqui descrita são [Stacks, Tag 00RM], [EGA 0_{IV}, § 20], [Eis04, Capítulo 16] e [Mat86, § 25]. Já para a parte global, sugerimos a consulta de [Stacks, Tags 08RL e 01UM], [EGA IV_4, § 16], [Ill04, Capítulo 3, § 1], [Ill96, nº 1] e [Ill71, Capítulo II, 1.1].

Na seção 1.2, seguindo [EGA 0_{IV}, §§ 18 e 20], compilamos os principais resultados sobre extensões de álgebras, similares às extensões consideradas em categorias abelianas, levando-se em conta, no entanto, a estrutura multiplicativa da álgebra. Veremos como estas estão intimamente relacionadas com derivações, sendo o clímax alcançado no teorema (1.2.17), de onde obteremos, nos teoremas (1.2.19) e (1.2.20), conseqüências fundamentais para o estudo de morfismos formalmente suaves no parágrafo 2. Globalizações para as construções que faremos aqui podem ser encontradas em [Gro68, nº 7] e [Ill71, Capítulo III, 1.1].

Na seção 1.3, que independe da 1.2, veremos como obter o complexo de de Rham em geometria algébrica. A maior dificuldade, que não surge em geometria diferencial, será mostrar que a expressão usual para a diferencial exterior está bem-definida. Faremos isso no teorema (1.3.5) seguindo [Stacks, Tag 07HX]. Outras referências incluem [EGA IV_4, 16.6], [Ill79, 0 3.1.1] e [Ill96, 1.7].

1.1. Derivações e módulos de diferenciais.

Definição **(1.1.1).** — *Sejam* A *um anel,* B *uma* A*-álgebra e* L *um* B*-módulo. Uma* A*-derivação de* B *em* L *é uma aplicação* $D : B \to L$ *que é* A*-linear e satisfaz a regra de Leibniz: quaisquer que sejam* $f, g \in B$*, temos* $D(fg) = D(f)g + fD(g)$*. Observe que se* $D : B \to L$ *é um homomorfismo de grupos abelianos satisfazendo a regra de Leibniz e* $\rho : A \to B$ *é o homomorfismo estrutural da* A*-álgebra* B*, então* D *é* A*-linear se, e somente se,* D *é nula em* $\rho(A)$.

Segue imediatamente da definição que se D, D' são duas A-derivações de B em L e $b \in B$, então tanto $D - D'$ quanto bD também o serão. Portanto, o conjunto das A-derivações de B em L, denotado $\mathrm{Der}_A(B, L)$, é munido de uma estrutura de B-módulo.

(1.1.2) Designaremos por $\mathfrak{C}$ a categoria cujos objetos são as triplas (A, B, L), onde A é um anel, B uma A-álgebra e L um B-módulo; os morfismos dessa categoria serão as triplas $(u, v, w) : (A, B, L) \to (A', B', L')$, onde $u : A' \to A$, $v : B' \to B$ são homomorfismos de anéis tais que $\rho \circ u = v \circ \rho'$, sendo $\rho : A \to B$ e $\rho' : A' \to B'$ os homomorfismos estruturais das álgebras B e B′, respectivamente, e $w : L \to L'$ é um homomorfismo de B′-módulos, onde L é considerado como B′-módulo através de v. A composição de dois morfismos em $\mathfrak{C}$ é definida por $(u', v', w') \circ (u, v, w) = (u \circ u', v \circ v', w' \circ w)$, de modo que temos $(u, v, w) = (1_{A'}, 1_{B'}, w) \circ (1_{A'}, v, 1_L) \circ (u, 1_B, 1_L)$. A melhor maneira de visualizar um morfismo em $\mathfrak{C}$ é através do diagrama

(1.1.2.1)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] & B & L \arrow[d, "w"] \\ A' \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\rho'"'] & B' \arrow[u, "v"'] & L'. \end{tikzcd}$$

(1.1.3) Seja (A, B, L) um objeto de $\mathfrak{C}$. Se L' é um B-módulo e $w : L \to L'$ é um homomorfismo de B-módulos, então temos um homomorfismo de B-módulos

$$w_0 : \mathrm{Der}_A(B, L) \to \mathrm{Der}_A(B, L')$$

definido por $D \mapsto w \circ D$. Por outro lado, se B' é uma A-álgebra e $v : B' \to B$ é um homomorfismo de A-álgebras, fazendo de L e $\mathrm{Der}_A(B, L)$ dois B′-módulos, então temos um homomorfismo de B′-módulos

$$v^0 : \mathrm{Der}_A(B, L) \to \mathrm{Der}_A(B', L)$$

definido por $D \mapsto D \circ v$. Por fim, seja $u : A' \to A$ um homomorfismo de anéis fazendo de B uma A′-álgebra. Então toda A-derivação é também uma A′-derivação e portanto temos um homomorfismo de B-módulos

$$u^0 : \mathrm{Der}_A(B, L) \to \mathrm{Der}_{A'}(B, L).$$

Não é difícil verificar que obtemos um funtor da categoria $\mathfrak{C}$ na categoria **Ab** de grupos abelianos se associarmos ao objeto (A, B, L) de $\mathfrak{C}$ o grupo abeliano $\mathrm{Der}_A(B, L)$ e a um morfismo $(u, v, w) : (A, B, L) \to (A', B', L')$ de $\mathfrak{C}$ o homomorfismo $w_0 \circ v^0 \circ u^0$. Em particular, considerando uma A-álgebra B fixa, temos um endofuntor aditivo $\mathrm{Der}_A(B, \cdot)$ da categoria **Mod**(B) de B-módulos.

Proposição **(1.1.4).** — *Sejam* $u : A \to B$, $v : B \to C$ *dois homomorfismos de anéis e* L *um* C*-módulo. Temos uma seqüência exata de* B*-módulos*

(1.1.4.1)
$$0 \to \mathrm{Der}_B(C, L) \xrightarrow{u^0} \mathrm{Der}_A(C, L) \xrightarrow{v^0} \mathrm{Der}_A(B, L)$$

funtorial em L.

Demonstração. — O fato de u^0 ser injetivo é trivial. Por outro lado, o núcleo de v^0 consiste das A-derivações de C em L que se anulam em $v(B)$, ou seja, aquelas que são na verdade B-derivações (1.1.1) e portanto estão na imagem de u^0. Finalmente, a funtorialidade em L é conseqüência imediata das definições. ▲

Veremos no teorema (1.2.17) que podemos estender a seqüência exata (1.1.4.1) em mais três termos e a partir desta seqüência estendida deduziremos teoremas cruciais para o estudo de morfismos formalmente suaves.

(1.1.5) Seja $u : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Podemos considerar os três seguintes funtores: a extensão de escalares $(\cdot) \otimes_A B : \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(B)$, levando um A-módulo M no B-módulo $M \otimes_A B$, a restrição de escalares $(\cdot)_{[u]} : \mathbf{Mod}(B) \to \mathbf{Mod}(A)$, que considera um B-módulo N como um A-módulo $N_{[u]}$ através de u e o funtor $\mathrm{Hom}_A(B, \cdot) : \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(B)$

que nos dá, a partir de um A-módulo M, o grupo abeliano $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{M})$ com estrutura de B-módulo via a regra $bf : x \to f(bx)$. É conhecido e elementar que $(\cdot)\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ é o funtor adjunto à esquerda do funtor $(\cdot)_{[u]}$ e este último é o adjunto à esquerda de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\cdot)$; essas relações serão simbolicamente denotadas por $(\cdot)\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}\dashv(\cdot)_{[u]}\dashv\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\cdot)$. Quando tivermos um morfismo de feixes de anéis $v : \mathscr{A}\to\mathscr{B}$, obteremos, *mutatis mutandis*, pares adjuntos $(\cdot)\otimes_{\mathscr{A}}\mathscr{B}\dashv(\cdot)_{[v]}$ e $(\cdot)_{[v]}\dashv\mathscr{H}om_{\mathscr{A}}(\mathscr{B},\cdot)$.

Definição **(1.1.6).** — *Seja* B *uma* A*-álgebra. O módulo de* 1*-diferenciais de* B *sobre* A*, denotado por* $\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$*, é o* B*-módulo gerado pelo conjunto* $\{df\}_{f\in\mathrm{B}}$ *sujeito às seguintes relações:*

(i) $d(af+a'g)=adf+a'dg$

(ii) $d(fg)=(df)g+fdg$

para todos $a, a'\in\mathrm{A}$ *e* $f, g\in\mathrm{B}$*. A aplicação* $d:\mathrm{B}\to\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$ *definida por* $f\mapsto df$ *é uma* A*-derivação, chamada diferencial exterior de* B *relativa a* A*. Quando quisermos enfatizar sua dependência da* A*-álgebra* B*, usaremos a notação* $d_{\mathrm{B/A}}$*.*

Por vezes $d_{\mathrm{B/A}}$ é chamada de A-*derivação universal*, o que é justificado pelo seguinte: dado um B-módulo L e uma A-derivação D de B em L, existe um único homomorfismo de B-módulos $u:\Omega^1_{\mathrm{B/A}}\to\mathrm{L}$ tal que $u\circ d_{\mathrm{B/A}}=\mathrm{D}$. Dito de uma outra maneira, temos que a aplicação $u\mapsto u\circ d_{\mathrm{B/A}}$ define um isomorfismo natural no B-módulo L

(1.1.6.1) $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\Omega^1_{\mathrm{B/A}},\mathrm{L})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Der}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L}).$$

Isso equivale a dizer que o funtor $\mathrm{Der}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\cdot)$ é representável, sendo $\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$ o B-módulo que o representa. Na verdade, se considerarmos um morfismo (u,v,w) na categoria $\mathfrak{C}$ (1.1.2.1), obteremos um homomorfismo de B′-módulos

(1.1.6.2) $$\Omega^1_{\mathrm{B'/A'}}\to\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$$

correspondendo à A′-derivação $d_{\mathrm{B/A}}\circ v$ de B′ em $\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$, de forma que temos um diagrama comutativo

(1.1.6.3) $$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\Omega^1_{\mathrm{B/A}},\mathrm{L}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathrm{Der}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L}) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{B'}}(\Omega^1_{\mathrm{B'/A'}},\mathrm{L'}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Der}_{\mathrm{A'}}(\mathrm{B'},\mathrm{L'})\,. \end{tikzcd}$$

Observe que, como $\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$ é B-módulo, um homomorfismo de B′-módulos $\Omega^1_{\mathrm{B'/A'}}\to\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$ é o mesmo (1.1.5) que um homomorfismo de B-módulos

(1.1.6.4) $$\Omega^1_{\mathrm{B'/A'}}\otimes_{\mathrm{B'}}\mathrm{B}\to\Omega^1_{\mathrm{B/A}}.$$

(1.1.7) Sejam $u:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, $v:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ dois homomorfismos de anéis. Denotaremos, então, por $v_{\mathrm{C/B/A}}:\Omega^1_{\mathrm{B/A}}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{C}\to\Omega^1_{\mathrm{C/A}}$ e $u_{\mathrm{C/B/A}}:\Omega^1_{\mathrm{C/A}}\to\Omega^1_{\mathrm{C/B}}$ os homomorfismos de C-módulos obtidos, respectivamente, dos diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r] & \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \arrow[u, "1_{\mathrm{A}}"] \arrow[r, "u"'] & \mathrm{B} \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{B} \arrow[r, "v"] & \mathrm{C} \\ \mathrm{A} \arrow[u, "u"] \arrow[r] & \mathrm{C}\,. \arrow[u, "1_{\mathrm{C}}"'] \end{tikzcd}$$

Proposição **(1.1.8)** (Seqüência cotangente relativa local). — *Com as notações de* (1.1.7)*, temos uma seqüência exata de* C*-módulos*

(1.1.8.1) $$\Omega^1_{\mathrm{B/A}}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{C}\xrightarrow{v_{\mathrm{C/B/A}}}\Omega^1_{\mathrm{C/A}}\xrightarrow{u_{\mathrm{C/B/A}}}\Omega^1_{\mathrm{C/B}}\to 0.$$

Demonstração. — Para todo C-módulo L, obtemos a partir da seqüência (1.1.4.1), levando-se em conta (1.1.6.3), a seqüência exata

$$0 \to \mathrm{Hom_C}(\Omega^1_{C/B}, L) \to \mathrm{Hom_C}(\Omega^1_{C/A}, L) \to \mathrm{Hom_C}(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, L).$$

Como a família de funtores $(\mathrm{Hom_C}(\cdot, L))_{L\in \mathbf{Mod}(C)}$ coletivamente reflete seqüências exatas [Wei94, 1.6.11], isso garante a exatidão de (1.1.8.1). ▲

(1.1.9) Sejam A um anel, B uma A-álgebra e I um ideal de B. Denote por C a A-álgebra quociente B/I e por v o homomorfismo canônico $B \to C$. Então temos um homomorfismo de C-módulos

(1.1.9.1) $$\delta_{C/B/A} : I/I^2 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$$

definido por $x \bmod I^2 \mapsto (d_{B/A}(x)) \otimes 1$. Observe que I/I^2 pode ser visto como C-módulo, pois I aniquila I/I^2.

Proposição **(1.1.10)** (Seqüência conormal local). — *Seguindo as notações de* (1.1.7) *e* (1.1.9), *temos que a seqüência de* C*-módulos*

(1.1.10.1) $$I/I^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega^1_{C/A} \to 0$$

é exata. Além disso, se tivermos um homomorfismo de A*-álgebras* $s : C \to B$ *inverso à direita de* v*, então ela será uma seqüência exata curta cindida.*

Demonstração. — Como $v : B \to C$ é sobrejetivo e $d_{C/B}$ é uma B-derivação, temos que $d_{C/B} = 0$ e portanto $\Omega^1_{C/B} = 0$. Assim, a seqüência cotangente relativa local (1.1.8.1) garante que $v_{C/B/A}$ é um epimorfismo. Para verificar a exatidão no segundo termo, tomamos um C-módulo L e aplicamos o funtor $\mathrm{Hom_C}(\cdot, L)$ à seqüência (1.1.10.1), que se torna, tendo em vista (1.1.6.3),

(1.1.10.2) $$0 \to \mathrm{Der_A}(C, L) \xrightarrow{v^0} \mathrm{Der_A}(B, L) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Hom_C}(I/I^2, L).$$

O núcleo de ∂ consiste das A-derivações de B em L que anulam I e portanto coincide com a imagem de v^0. Isso garante a exatidão de (1.1.10.2) para todo C-módulo L e por conseguinte a exatidão de (1.1.10.1) no segundo termo.

Para a outra parte da proposição, observe que a aplicação $b \mapsto b - s(v(b)) \bmod I^2$ é uma A-derivação de B em I/I^2 e de (1.1.6.1) deduzimos um homomorfismo de B-módulos $\Omega^1_{B/A} \to I/I^2$. De (1.1.5) obtemos um homomorfismo de C-módulos $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to I/I^2$ inverso à direita de $\delta_{C/B/A}$, garantindo, portanto, a veracidade da segunda assertiva. ▲

Veremos nos teoremas (1.2.19) e (1.2.20) condições necessárias e suficientes para que as seqüências (1.1.8.1) e (1.1.10.1) sejam exatas curtas cindidas, condições estas que serão válidas sob hipóteses de suavidade formal (2.1.7).

Proposição **(1.1.11)**. — *Se* A *e* B′ *são duas* A′*-álgebras e* $B = B' \otimes_{A'} A$, *o homomorfismo canônico* (1.1.6.4)

(1.1.11.1) $$\Omega^1_{B'/A'} \otimes_{B'} B \to \Omega^1_{B/A}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. — Observe que temos um isomorfismo canônico de $\Omega^1_{B'/A'} \otimes_{A'} A$ em $\Omega^1_{B'/A'} \otimes_{B'} B$ levando $db' \otimes a$ em $db' \otimes (1 \otimes a)$. Usando essa identificação, (1.1.11.1) se torna o homomorfismo $db' \otimes a \mapsto d(b' \otimes a)$. Para definir sua inversa, consideremos a aplicação $(b', a) \mapsto (db') \otimes a$ de $B' \times A$ em $\Omega^1_{B'/A'} \otimes_{A'} A$. Esta induz uma A-derivação D de B em

$\Omega^1_{B'/A'} \otimes_{A'} A$, que por sua vez induz um homomorfismo $\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{B'/A'} \otimes_{A'} A$ levando $d(b' \otimes a)$ em $(db') \otimes a$ e é claro que este é a inversa buscada. ▲

Proposição **(1.1.12).** — *Sejam* $u : A \to B$ *um homomorfismo de anéis,* S, T *subconjuntos multiplicativos de* A, B*, respectivamente, com* $u(S) \subseteq T$ *e* $v : S^{-1}A \to T^{-1}B$ *o homomorfismo de anéis induzido por* u*. Então o homomorfismo canônico* $\varphi : T^{-1}\Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{T^{-1}B/S^{-1}A}$ *obtido do diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A & \xrightarrow{v} & T^{-1}B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow[u]{} & B \end{array}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. — Obtemos uma $S^{-1}A$-derivação bem-definida $T^{-1}B \to T^{-1}\Omega^1_{B/A}$ associando a b/t o elemento $((db)t - bdt)/t^2$. Esta induz um homomorfismo de $T^{-1}B$-módulos $\Omega^1_{T^{-1}B/S^{-1}A} \to T^{-1}\Omega^1_{B/A}$ inverso de φ. ▲

(1.1.13) Seja B um anel gerado como A-álgebra por uma família de elementos $(f_i)_{i \in I}$. Então $\Omega^1_{B/A}$ é gerado como B-módulo pela família $(df_i)_{i\in I}$. Com efeito, como todo elemento de B é um polinômio nos f_i com coeficientes em A, a A-linearidade de $d_{B/A}$ permite que reduzamos a questão ao caso de monômios, de onde o resultado segue após uma sucessiva aplicação da regra de Leibniz. Em particular, se B é finitamente gerado como A-álgebra, então $\Omega^1_{B/A}$ é finitamente gerado como B-módulo.

Exemplos **(1.1.14).** — (i) Sejam A um anel e $B = A[X_i]_{i\in I}$ uma álgebra de polinômios sobre A. Então $\Omega^1_{B/A}$ é um B-módulo livre, cujos dX_i $(i \in I)$ formam uma base. De fato, de (1.1.13) obtemos que eles geram $\Omega^1_{B/A}$ como B-módulo. Por outro lado, as derivadas parciais formais $\partial/\partial X_i : B \to B$ são A-derivações, induzindo, portanto, homomorfismos de B-módulos $\partial_i : \Omega^1_{B/A} \to B$ tais que $\partial_j(dX_i) = \delta_{ij}$. Isso garante que os dX_i $(i \in I)$ são linearmente independentes e conseqüentemente que $(dX_i)_{i\in I}$ é base de $\Omega^1_{B/A}$. Observe que, para $f \in B$, temos

(1.1.14.1)
$$df = \sum_{i\in I} \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i.$$

Quando I for um conjunto finito, $(\partial_i)_{i\in I}$ será a base dual de $(\Omega^1_{B/A})\check{}$ e assim $(\partial/\partial X_i)_{i\in I}$ será uma base de $\mathrm{Der}_A(B, B)$, em virtude do isomorfismo (1.1.6.1).

(ii) Sejam A e B como em (i) e consideremos K um ideal de B gerado por uma família $(P_j)_{j\in J}$ de polinômios. Como $\Omega^1_{B/A}$ é um B-módulo livre com base $(dX_i)_{i\in I}$, os dX_i formam também uma base do C-módulo livre $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C$. Resulta da definição de $\delta_{C/B/A}$ (1.1.9.1) que sua imagem é o C-submódulo gerado por $dP_j = \sum_i \partial P_j/\partial X_i dX_i$ para todo $j \in J$. A seqüência conormal local (1.1.10.1) garante que $\Omega^1_{C/A}$ é isomorfo ao quociente do C-módulo livre tendo os dX_i $(i \in I)$ como base pelo C-submódulo gerado pelos $dP_j = \sum_i \partial P_j/\partial X_i dX_i$ para todo $j \in J$. Em particular, se C é uma A-álgebra de apresentação finita, podemos obtê-la da maneira precedente com I e J finitos e portanto $\Omega^1_{C/A}$ será um C-módulo de apresentação finita.

(iii) Sejam k um corpo e $K = k(X_i)_{i\in I}$ uma extensão puramente transcendental de k. Então os dX_i formam uma base do K-espaço vetorial $\Omega^1_{K/k}$. Isso segue imediatamente de (i) e (1.1.12).

(iv) Sejam A um anel, M um A-módulo e $S_A(M)$ a álgebra simétrica de M. Provaremos em breve (1.2.16), usando uma interpretação alternativa de derivações, que temos um isomorfismo natural $S_A(M) \otimes_A M \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{S_A(M)/A}$ levando $b \otimes x$ em $bd_{S_A(M)/A}x$. Observe que isso dá uma outra demonstração de (i).

(v) Sejam A, B domínios integrais tais que $A \subseteq B$, A é integralmente fechado (no seu corpo de frações K(A)), B é inteiro sobre A e a extensão K(B)/K(A) é separável. Então o B-módulo $\Omega^1_{B/A}$ é de torção. De fato, para todo $x \in B$, o polinômio mínimo $f(T)$ de x sobre K(A) tem seus coeficientes em A e, como $f(T)$ é separável, temos $f'(x) \neq 0$. Da relação $f(x) = 0$, obtemos que $f'(x)d_{B/A}(x) = 0$, de onde segue nossa assertiva. No caso particular de uma extensão de corpos K/k algébrica separável, concluímos que $\Omega^1_{K/k} = 0$.

(vi) Diremos que um anel A é de característica n, sendo n um inteiro não-negativo, se o núcleo do único homomorfismo de anéis $\mathbf{Z} \to A$ for o ideal gerado por n. Sejam p um número primo e A um anel de característica p. O ***homomorfismo de Frobenius absoluto*** de A é o endomorfismo de anéis $F_A : A \to A$ que leva x em x^p. Se B é uma A-álgebra, denotamos por $B^{(p/A)}$ o coproduto $A_{[F_A]} \otimes_A B$ das A-álgebras $A_{[F_A]}$ e B, onde $A_{[F_A]}$ significa que estamos considerando A com a estrutura de A-álgebra induzida por F_A. Temos, então, um único homomorfismo de anéis $F_{B/A} : B^{(p/A)} \to B$ levando $a \otimes b$ em ab^p, chamado o ***homomorfismo de Frobenius de* B *relativo a* A**.

Consideremos os homomorfismos de anéis $A \to B^{(p/A)} \to B$, sendo o primeiro a injeção canônica de A em $B^{(p/A)}$ e o segundo o homomorfismo de Frobenius relativo $F_{B/A}$. A seqüência cotangente relativa local (1.1.8.1) obtida a partir deles

$$\Omega^1_{B^{(p/A)}/A} \otimes_{B^{(p/A)}} B \to \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{B/B^{(p/A)}} \to 0$$

tem o primeiro morfismo nulo, pois este leva $d(a \otimes b) \otimes b'$ em $b'd(ab^p)$ e este último coincide com $p \cdot (ab'b^{p-1}db) = 0$. Assim, temos um isomorfismo canônico $\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{B/B^{(p/A)}}$.

Estudaremos na seção 3.1 os morfismos de Frobenius absoluto e relativo de maneira global para esquemas de característica p. Destes tiraremos conseqüências que serão fundamentais para a demonstração do teorema de Deligne-Illusie (4.2.1). Neste exemplo, explicitamos o seu comportamento local.

(1.1.15) Seja B uma A-álgebra. Denotaremos por $p_{B/A} : B \otimes_A B \to B$ o homomorfismo sobrejetivo de A-álgebras induzido pela multiplicação em B e por $I_{B/A}$ o seu núcleo. Então $I_{B/A}/I^2_{B/A}$ tem estrutura canônica de B-módulo e se definirmos $D_{B/A} : B \to I_{B/A}/I^2_{B/A}$ como sendo a aplicação que leva x em $x \otimes 1 - 1 \otimes x \bmod I^2_{B/A}$, obteremos uma A-derivação canônica.

Proposição **(1.1.16)**. — *O único homomorfismo de* B*-módulos* $u : \Omega^1_{B/A} \to I_{B/A}/I^2_{B/A}$ *correspondendo a* $D_{B/A}$ *via* (1.1.6.1) *é um isomorfismo.*

Demonstração. — Para deixar a notação mais leve, denotaremos $I_{B/A}$ simplesmente por I. Seja $j_2 : B \to B \otimes_A B$ a injeção na segunda coordenada $x \mapsto 1 \otimes x$ e consideremos $B \otimes_A B$ como B-álgebra através de j_2. Então $p_{B/A} : B \otimes_A B \to B$ é um homomorfismo sobrejetivo de B-álgebras e, portanto, obtemos, da mesma maneira que em (1.1.9.1), um homomorfismo de B-módulos $\delta : I/I^2 \to \Omega^1_{B\otimes_A B/B} \otimes_{B\otimes_A B} B$ levando $z \bmod I^2$ em $(dz) \otimes 1$. Por outro lado, temos de (1.1.11) um isomorfismo canônico $\Omega^1_{B/A} \otimes_B (B \otimes_A B) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{B\otimes_A B/B}$ que leva $(dx) \otimes z$ em $z \cdot d(x \otimes 1)$ e que garante a existência de um homomorfismo

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B\otimes_A B/B} \otimes_{B\otimes_A B} B \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{B/A} \otimes_B (B \otimes_A B)) \otimes_{B\otimes_A B} B \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{B/A}$$

mapeando $x \otimes 1 - 1 \otimes x \bmod \mathrm{I}^2$ em dx, sendo então o inverso de u. ▲

***

Nosso objetivo a partir de agora será globalizar a construção do módulo de diferenciais relativas para morfismos de esquemas. Ao invés de tratarmos esse caso diretamente, consideraremos mais geralmente a definição do módulo de diferenciais para feixes de álgebras, o que permitirá uma descrição mais simples do caso visado.

Definição **(1.1.17).** — *Sejam* X *um espaço topológico,* $\mathscr{A}$ *um feixe de anéis,* $\mathscr{B}$ *um feixe de* $\mathscr{A}$*-álgebras e* $\mathscr{F}$ *um feixe de* $\mathscr{B}$*-módulos. Uma* $\mathscr{A}$*-derivação de* $\mathscr{B}$ *em* $\mathscr{F}$ *é um morfismo de* $\mathscr{A}$*-módulos* $\mathrm{D} : \mathscr{B} \to \mathscr{F}$ *satisfazendo a regra de Leibniz*

$$\mathrm{D}(fg) = \mathrm{D}(f)g + f\mathrm{D}(g)$$

para todo aberto U *de* X *e todo par de seções* (f, g) *de* $\mathscr{B}$ *sobre* U.

Se $\mathrm{D} : \mathscr{B} \to \mathscr{F}$ é um morfismo de feixes conjuntos, então dizer que D é uma $\mathscr{A}$-derivação é o mesmo que dizer que para todo $x \in \mathrm{X}$, a aplicação $\mathrm{D}_x : \mathscr{B}_x \to \mathscr{F}_x$ é uma $\mathscr{A}_x$-derivação.

(1.1.18) As $\mathscr{A}$-derivações de $\mathscr{B}$ em $\mathscr{F}$ formam um $\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{B})$-módulo $\mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{F})$. Assim, para cada aberto U de X, $\mathrm{Der}_{\mathscr{A}|_\mathrm{U}}(\mathscr{B}|_\mathrm{U}, \mathscr{F}|_\mathrm{U})$ é um $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{B})$-módulo e a aplicação $\mathrm{U} \mapsto \mathrm{Der}_{\mathscr{A}|_\mathrm{U}}(\mathscr{B}|_\mathrm{U}, \mathscr{F}|_\mathrm{U})$, juntamente com os mapas de restrição óbvios, define um feixe de $\mathscr{B}$-módulos, chamado *feixe de* $\mathscr{A}$*-derivações de* $\mathscr{B}$ *em* $\mathscr{F}$ e que será denotado por $\mathscr{D}er_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{F})$.

(1.1.19) Como no caso local, essa globalização de derivações é funtorial. Aqui, porém, precisaremos apenas da funtorialidade em $\mathscr{F}$. Precisamente, dado um morfismo de feixes de $\mathscr{B}$-módulos $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, obtemos, para cada aberto U de X, um homomorfismo de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{B})$-módulos

$$\mathrm{Der}_{\mathscr{A}|_\mathrm{U}}(\mathscr{B}|_\mathrm{U}, \mathscr{F}|_\mathrm{U}) \to \mathrm{Der}_{\mathscr{A}|_\mathrm{U}}(\mathscr{B}|_\mathrm{U}, \mathscr{G}|_\mathrm{U})$$

levando uma $\mathscr{A}|_\mathrm{U}$-derivação D na $\mathscr{A}|_\mathrm{U}$-derivação $\mathrm{D} \circ \varphi|_\mathrm{U}$. É fácil ver que esses homomorfismos são compatíveis com restrições e obtemos, portanto, um morfismo de feixes de $\mathscr{B}$-módulos $\mathscr{D}er_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{F}) \to \mathscr{D}er_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{G})$. Assim, temos funtores aditivos $\mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \cdot)$ e $\mathscr{D}er_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \cdot)$ da categoria $\mathbf{Mod}(\mathscr{B})$ de feixes de $\mathscr{B}$-módulos nas categorias $\mathbf{Mod}(\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{B}))$ e $\mathbf{Mod}(\mathscr{B})$, respectivamente.

(1.1.20) Seja $\mathscr{B}$ um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras. Dados abertos $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$ de X, temos um diagrama comutativo de homomorfismos de anéis

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(\mathrm{V}) \arrow[r] & \mathscr{B}(\mathrm{V}) \\ \mathscr{A}(\mathrm{U}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{B}(\mathrm{U}) \arrow[u] \end{tikzcd},$$

que induz um homomorfismo de $\mathscr{B}(\mathrm{U})$-módulos $\Omega^1_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})} \to \Omega^1_{\mathscr{B}(\mathrm{V})/\mathscr{A}(\mathrm{V})}$ (1.1.6.2), sendo $\Omega^1_{\mathscr{B}(\mathrm{V})/\mathscr{A}(\mathrm{V})}$ considerado como $\mathscr{B}(\mathrm{U})$-módulo através de $\mathscr{B}(\mathrm{U}) \to \mathscr{B}(\mathrm{V})$, tal que o diagrama

(1.1.20.1)
$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}(\mathrm{U}) \arrow[r] \arrow[d, "d_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})}"'] & \mathscr{B}(\mathrm{V}) \arrow[d, "d_{\mathscr{B}(\mathrm{V})/\mathscr{A}(\mathrm{V})}"] \\ \Omega^1_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})} \arrow[r] & \Omega^1_{\mathscr{B}(\mathrm{V})/\mathscr{A}(\mathrm{V})} \end{tikzcd}$$

é comutativo. Estes definem os mapas de restrição de um pré-feixe de $\mathscr{B}$-módulos

(1.1.20.2)
$$\mathrm{U} \mapsto \Omega^1_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})}.$$

Definição **(1.1.21)**. — *O módulo de* 1*-diferenciais de* $\mathscr{B}$ *sobre* $\mathscr{A}$*, denotado* $\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$*, é o* $\mathscr{B}$*-módulo associado ao pré-feixe* $\mathrm{U} \mapsto \Omega^1_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})}$*. Graças à compatibilidade das diferenciais exteriores* $d_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})}$*, descrita em* (1.1.20.1)*, obtemos uma* $\mathscr{A}$*-derivação* $d_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} : \mathscr{B} \to \Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$*, chamada diferencial exterior de* $\mathscr{B}$ *relativa a* $\mathscr{A}$*.*

Proposição **(1.1.22)**. — *Para todo* $\mathscr{B}$*-módulo* $\mathscr{F}$*, a aplicação* $u \mapsto u \circ d_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ *é um isomorfismo de* $\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{B})$*-módulos*

(1.1.22.1)
$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{F})$$

natural em $\mathscr{F}$*. Como conseqüência,* $\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ *representa o funtor* $\mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \cdot)$*.*

Demonstração. — Denotemos por $(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})^{\mathrm{pre}}$ o pré-feixe de $\mathscr{B}$-módulos (1.1.20.2). Como o funtor de feixeficação é o adjunto à esquerda do funtor do esquecimento que considera um $\mathscr{B}$-módulo simplesmente como um pré-feixe de $\mathscr{B}$-módulos, temos um isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}((\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})^{\mathrm{pre}}, \mathscr{F})$. Por outro lado, considerando (1.1.6.1) para cada aberto U de X, conseguimos um isomorfismo natural $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}((\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})^{\mathrm{pre}}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{F})$ e é claro que a composição destes dois coincide com (1.1.22.1). ▲

(1.1.23) Sejam $f : \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos e $\mathscr{A}$ um feixe de anéis em X. Podemos, então, considerar os funtores imagem inversa $f^{-1} : \mathrm{Sh}(\mathrm{X}, \mathbf{CRings}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{W}, \mathbf{CRings})$ e imagem direta $f_* : \mathrm{Sh}(\mathrm{W}, \mathbf{CRings}) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{X}, \mathbf{CRings})$ de feixes de anéis. Estes formam um par adjunto $f^{-1} \dashv f_*$. Seja $\eta_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \to f_*(f^{-1}(\mathscr{A}))$ o morfismo de feixes de anéis obtido a partir da unidade da adjunção. O morfismo de espaços anelados $(f, \eta_{\mathscr{A}}) : (\mathrm{W}, f^{-1}(\mathscr{A})) \to (\mathrm{X}, \mathscr{A})$ dá origem a funtores $f^{-1} : \mathbf{Mod}(\mathscr{A}) \to \mathbf{Mod}(f^{-1}(\mathscr{A}))$ e $f_* : \mathbf{Mod}(f^{-1}(\mathscr{A})) \to \mathbf{Mod}(\mathscr{A})$, sendo denotados propositadamente como os primeiros, de modo que também temos um par adjunto $f^{-1} \dashv f_*$.

Se $\mathscr{B}$ é um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras, então, para todo $f^{-1}(\mathscr{B})$-módulo $\mathscr{F}$, obtemos, a partir do isomorfismo adjunto $\mathrm{Hom}_{f^{-1}(\mathscr{A})}(f^{-1}(\mathscr{B}), \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, f_*(\mathscr{F}))$, um isomorfismo natural

(1.1.23.1)
$$\mathrm{Der}_{f^{-1}(\mathscr{A})}(f^{-1}(\mathscr{B}), \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, f_*(\mathscr{F})).$$

Proposição **(1.1.24)**. — *Sejam* $f : \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ *uma aplicação contínua entre espaços topológicos,* $\mathscr{A}$ *um feixe de anéis e* $\mathscr{B}$ *um feixe de* $\mathscr{A}$*-álgebras. Então temos um isomorfismo natural de* $f^{-1}(\mathscr{B})$*-módulos*

(1.1.24.1)
$$\Omega^1_{f^{-1}(\mathscr{B})/f^{-1}(\mathscr{A})} \xrightarrow{\sim} f^{-1}(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})$$

compatível com as diferenciais exteriores.

Demonstração. — Seja $\mathscr{F}$ um $f^{-1}(\mathscr{B})$-módulo. Temos de (1.1.22) e (1.1.23) a seqüência de isomorfismos naturais

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{f^{-1}(\mathscr{B})}(f^{-1}(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}), \mathscr{F}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}, f_*(\mathscr{F})) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, f_*(\mathscr{F})) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{f^{-1}(\mathscr{A})}(f^{-1}(\mathscr{B}), \mathscr{F}).\end{aligned}$$

Isso diz que $f^{-1}(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})$ e $\Omega^1_{f^{-1}(\mathscr{B})/f^{-1}(\mathscr{A})}$ representam o mesmo funtor e o lema de Yoneda [Bor94a, 1.3.3] garante que eles são naturalmente isomorfos. ▲

Corolário **(1.1.25)**. — *Sejam* X *um espaço topológico,* $\mathscr{A}$ *um feixe de anéis e* $\mathscr{B}$ *um feixe de* $\mathscr{A}$*-álgebras. Então:*

(i) *Se* U *é um aberto de* X*, temos um isomorfismo natural* $\Omega^1_{(\mathscr{B}|_U)/(\mathscr{A}|_U)} \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})|_U$.

(ii) *Se* x *é um ponto de* X*, temos um isomorfismo natural* $\Omega^1_{\mathscr{B}_x/\mathscr{A}_x} \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})_x$.

Demonstração. — Para (i) aplique (1.1.24) considerando $W = U$ e para (ii) considere $W = \{x\}$, sendo f, em ambos os casos, a inclusão de W em X. ▲

Corolário **(1.1.26).** — *Sejam* $\mathscr{A}$ *um feixe de anéis,* $\mathscr{B}$ *um feixe de* $\mathscr{A}$*-álgebras e* $\mathscr{F}$ *um* $\mathscr{B}$*-módulo. Então temos um isomorfismo natural*

(1.1.26.1) $$\mathscr{H}om_{\mathscr{B}}(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}er_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{F}).$$

Demonstração. — Para cada aberto U de X, temos a partir de (1.1.25, (i)) e (1.1.22.1) um isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}|_U}((\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})|_U, \mathscr{F}|_U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_{\mathscr{A}|_U}(\mathscr{B}|_U, \mathscr{F}|_U)$ compatível com restrições, de onde obtemos (1.1.26.1). ▲

(1.1.27) O módulo $\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$, como no caso local, depende funtorialmente do morfismo $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$. De fato, correspondendo a um diagrama comutativo de morfismos de feixes de anéis

(1.1.27.1) $$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r] & \mathscr{B} \\ \mathscr{A}' \arrow[u] \arrow[r] & \mathscr{B}' \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

temos um morfismo de $\mathscr{B}'$-módulos $\Omega^1_{\mathscr{B}'/\mathscr{A}'} \to \Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ obtido a partir da $\mathscr{A}'$-derivação $d_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} \circ v$, sendo $\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ visto como $\mathscr{B}'$-módulo através de v.

Definição **(1.1.28).** — *Sejam* $(f, f^\#) : X \to Y$ *um morfismo de espaços anelados*[1] *e* $\mathscr{F}$ *um* $\mathscr{O}_X$*-módulo. Uma* Y*-derivação de* $\mathscr{O}_X$ *em* $\mathscr{F}$ *é uma* $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$*-derivação no sentido de* (1.1.17)*. Nesse caso, utilizaremos as notações mais econômicas* $\mathrm{Der}_Y(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ *e* $\mathscr{D}er_Y(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ *em vez de* $\mathrm{Der}_{f^{-1}(\mathscr{O}_Y)}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ *e* $\mathscr{D}er_{f^{-1}(\mathscr{O}_Y)}(\mathscr{O}_X, \mathscr{F})$ (1.1.18)*, respectivamente. O módulo de* 1*-diferenciais* $\Omega^1_{X/Y}$ *de* X *sobre* Y *é o módulo de diferenciais* $\Omega^1_{\mathscr{O}_X/f^{-1}(\mathscr{O}_Y)}$ *de* $\mathscr{O}_X$ *sobre* $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$ (1.1.21)*. A diferencial exterior* $d_{X/Y}$ *de* X *relativa a* Y *é a* Y*-derivação* $d_{\mathscr{O}_X/f^{-1}(\mathscr{O}_Y)}$ (1.1.21)*. Quando* $Y = \mathrm{Spec}(A)$ *for um esquema afim, denotaremos* $\Omega^1_{X/Y}$ *simplesmente por* $\Omega^1_{X/A}$.

(1.1.29) Vale a pena dar uma descrição mais concreta do que significa uma Y-derivação, ou melhor, do que significa um morfismo ser $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$-linear. Suponha que $D : \mathscr{O}_X \to \mathscr{F}$ seja um morfismo de feixes de grupos abelianos. Então, D é $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$-linear se, e somente se, para todo aberto V de X, toda seção t de $\mathscr{O}_X$ sobre V e toda seção s de $\mathscr{O}_Y$ sobre um aberto U de Y tal que $V \subseteq f^{-1}(U)$, temos

(1.1.29.1) $$D((s|_V)t) = (s|_V)D(t),$$

sendo que $s|_V$ é a restrição a V da imagem de s através do morfismo natural de feixes $\mathscr{O}_Y \to f_*(f^{-1}(\mathscr{O}_Y))$. Isso decorre diretamente da definição de $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$ se olharmos para os talos dos feixes.

[1] Aqui cometeremos o abuso de notação usual denotando o morfismo de feixes de anéis como se este fosse determinado por f, no entanto $f^\#$ será um morfismo de $f^{-1}(\mathscr{O}_Y)$ em $\mathscr{O}_X$. A notação $f^\flat$ será usada para denotar o morfismo correspondente $\mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ através do isomorfismo adjunto. Isso difere da convenção utilizada em [Har77, p. 72], mas está mais de acordo com a notação empregada para o isomorfismo adjunto em [EGA 0_I, 3.5.3] e segue referências mais modernas [GW10, Definição 2.29].

(1.1.30) Consideremos um diagrama comutativo de morfismos de espaços anelados

(1.1.30.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

Então $g_*(d_{X/Y}) \circ g^\flat : \mathscr{O}_{X'} \to g_*(\Omega^1_{X/Y})$ é uma Y′ derivação e deduzimos de (1.1.22.1) um morfismo de $\mathscr{O}_{X'}$-módulos

(1.1.30.2)
$$s_g : \Omega^1_{X'/Y'} \to g_*(\Omega^1_{X/Y}).$$

Por outro lado, obtemos, a partir de (1.1.30.1), o diagrama comutativo de morfismos de feixes de anéis

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(\mathscr{O}_Y) \arrow[r, "f^\#"] & \mathscr{O}_X \\ g^{-1}((f')^{-1}(\mathscr{O}_{Y'})) \arrow[u] \arrow[r, "g^{-1}((f')^\#)"'] & g^{-1}(\mathscr{O}_{X'}) \arrow[u, "g^\#"'] \end{tikzcd}$$

e conseguimos de (1.1.27.1), levando-se em conta o isomorfismo (1.1.24.1), um morfismo de $g^{-1}(\mathscr{O}_{X'})$-módulos $g^{-1}(\Omega^1_{X'/Y'}) \to \Omega^1_{X/Y}$. Por fim, usando (1.1.5), obtemos um morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos

(1.1.30.3)
$$c_g : g^*(\Omega^1_{X'/Y'}) \to \Omega^1_{X/Y}.$$

Não é difícil ver que os morfismos (1.1.30.2) e (1.1.30.3) são correspondentes através do isomorfismo determinado pelo par adjunto $g^* \dashv g_*$.

Se tivermos um outro diagrama comutativo de morfismos de espaços anelados

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "h'"] \\ X'' \arrow[r, "f''"'] & Y'', \end{tikzcd}$$

então teremos $s_{g'\circ g} = g'_*(s_g) \circ s_{g'}$ como morfismos de $\Omega^1_{X''/Y''}$ em $(g' \circ g)_*(\Omega^1_{X/Y})$, de onde deduzimos, identificando $g^*(g'^*(\Omega^1_{X''/Y''}))$ com $(g' \circ g)^*(\Omega^1_{X''/Y''})$, que

(1.1.30.4)
$$c_{g'\circ g} = c_g \circ g^*(c_{g'})$$

como morfismos de $(g' \circ g)^*(\Omega^1_{X''/Y''})$ em $\Omega^1_{X/Y}$.

Proposição **(1.1.31)**. — *Sejam* $f : X \to Y$ *um morfismo de espaços anelados,* U, V *subconjuntos abertos de* X, Y, *respectivamente, com* $f(U) \subseteq V$ *e* $f_U : U \to V$ *o morfismo de espaços anelados induzido por* f. *Então temos um isomorfismo natural*

(1.1.31.1)
$$\Omega^1_{U/V} \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{X/Y})|_U$$

compatível com as diferenciais exteriores.

Demonstração. — É suficiente observar que $f_U^\# : f_U^{-1}(\mathscr{O}_Y|_V) \to \mathscr{O}_X|_U$ coincide, a menos do isomorfismo natural $f_U^{-1}(\mathscr{O}_Y|_V) \xrightarrow{\sim} (f^{-1}(\mathscr{O}_Y))|_U$, com $f^\#|_U$. O resultado é, então, uma conseqüência imediata de (1.1.25, (i)). ▲

(1.1.32) Doravante nos concentraremos no caso de esquemas, apesar de parte dos resultados continuarem valendo no contexto mais geral de espaços anelados. Observemos inicialmente o seguinte: dado um esquema afim $X = \mathrm{Spec}(B)$, seja $\widetilde{(\cdot)} : \mathbf{Mod}(B) \to \mathbf{Mod}(X)$ o funtor que leva um B-módulo L no $\mathscr{O}_X$-módulo quase-coerente $\widetilde{L}$ visto apenas como como $\mathscr{O}_X$-módulo e seja $\Gamma(X, \cdot) : \mathbf{Mod}(X) \to \mathbf{Mod}(B)$ o funtor que toma seções globais de um $\mathscr{O}_X$-módulo. Nessa generalidade, podemos ainda garantir que $\widetilde{(\cdot)}$ é o funtor adjunto à esquerda de $\Gamma(X, \cdot)$.

Lema **(1.1.33).** — *Sejam* A *um anel,* B *uma* A*-álgebra e* $\mathscr{F}$ *um* $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(B)}$*-módulo. Então a aplicação que associa a uma* $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$*-derivação* D *de* $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(B)}$ *em* $\mathscr{F}$ *sua ação nas seções globais é um isomorfismo natural de* B*-módulos*

(1.1.33.1) $$\mathrm{Der}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(B)}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_A(B, \mathscr{F}(\mathrm{Spec}(B))).$$

Demonstração. — Para que a notação fique mais leve, denotemos $X = \mathrm{Spec}(B), Y = \mathrm{Spec}(A)$ e $L = \Gamma(\mathrm{Spec}(B), \mathscr{F})$. Levando-se em conta (1.1.29), é claro que $\Gamma(X, D) : B \to L$ é uma A-derivação. Por outro lado, se $D' : B \to L$ é uma A-derivação, definimos uma Y-derivação $D : \mathscr{O}_X \to \mathscr{F}$ da seguinte maneira: considere $U = D(f)$ um aberto afim básico de X; então pomos

$$D(b/f^n) = (1/f^n)D(b)|_U - (b/f^{2n})D(f^n)|_U.$$

Embora um pouco longo, o argumento para mostrar que temos um morfismo de feixes $D : \mathscr{O}_X \to \mathscr{F}$ e que este é uma Y-derivação é direto. Novamente, (1.1.29) vem a calhar. ▲

Proposição **(1.1.34).** — *Sejam* A *um anel e* B *uma* A*-álgebra. Então temos um isomorfismo natural de* $\mathscr{O}_{\mathrm{Spec}(B)}$*-módulos*

(1.1.34.1) $$\Omega^1_{\mathrm{Spec}(B)/\,\mathrm{Spec}(A)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Omega^1_{B/A}}$$

compatível com as diferenciais exteriores.

Demonstração. — Usemos a notação $X = \mathrm{Spec}(B), Y = \mathrm{Spec}(A)$ e seja $\mathscr{F}$ um $\mathscr{O}_X$-módulo. Temos de (1.1.32), (1.1.6.1) e (1.1.33.1) a seqüência de isomorfismos naturais

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{\Omega^1_{B/A}}, \mathscr{F}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, \Gamma(X, \mathscr{F}))\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_A(B, \Gamma(X, \mathscr{F}))\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_Y(\mathscr{O}_X, \mathscr{F}).\end{aligned}$$

Isso mostra que $\widetilde{\Omega^1_{B/A}}$ e $\Omega^1_{X/Y}$ representam o mesmo funtor e o lema de Yoneda garante que eles são naturalmente isomorfos. ▲

Corolário **(1.1.35).** — *Seja* $f : X \to Y$ *um morfismo de esquemas. Então o módulo de* 1*-diferenciais* $\Omega^1_{X/Y}$ *de* X *sobre* Y *é um* $\mathscr{O}_X$*-módulo quase-coerente e quando* f *for localmente de tipo finito (resp. localmente de apresentação finita),* $\Omega^1_{X/Y}$ *será um* $\mathscr{O}_X$*-módulo de tipo finito (resp. de apresentação finita).*

Demonstração. — A quase-coerência de $\Omega^1_{X/Y}$ segue imediatamente de (1.1.31) e (1.1.34). Se f for localmente de tipo finito (resp. localmente de apresentação finita), então basta utilizar (1.1.13) (resp. (1.1.14, (ii))) para obter a conclusão. ▲

(1.1.36) Sejam $f : X \to Y$ um morfismo localmente de apresentação finita e $\mathscr{F}$ um $\mathscr{O}_X$-módulo quase-coerente. O fato de $\Omega^1_{X/Y}$ ser de apresentação finita, assegura que o $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/Y}, \mathscr{F})$ é quase-coerente e do isomorfismo (1.1.26.1) deduzimos a quase-coerência de $\mathscr{D}er_{\mathrm{Y}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}},\mathscr{F})$. Se $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B}),\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ são esquemas afins e $\mathscr{F}=\widetilde{\mathrm{L}}$ para um B-módulo L, obtemos a partir de (1.1.33.1) um isomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos $\widetilde{\mathrm{Der}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L})}\xrightarrow{\sim}\mathscr{D}er_{\mathrm{Y}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}},\mathscr{F})$, de modo que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\Omega^1_{\mathrm{B/A}},\mathrm{L})} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathrm{Der}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L})} \arrow[d] \\
\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}(\Omega^1_{\mathrm{X/Y}},\mathscr{F}) \arrow[r] & \mathscr{D}er_{\mathrm{Y}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}},\mathscr{F})
\end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo os morfismos horizontais obtidos de (1.1.6.1) e (1.1.26.1).

(1.1.37) Sejam $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}, g:\mathrm{Y}\to\mathrm{Z}$ dois morfismos de esquemas. Denotaremos por $f_{\mathrm{X/Y/Z}}:f^*(\Omega^1_{\mathrm{Y/Z}})\to\Omega^1_{\mathrm{X/Z}}$ e $g_{\mathrm{X/Y/Z}}:\Omega^1_{\mathrm{X/Z}}\to\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}$ os morfismos de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos obtidos, respectivamente, dos diagramas comutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Z} \arrow[d, "1_{\mathrm{Z}}"] \\
\mathrm{Y} \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Z}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, "g"] \\
\mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{Z}.
\end{tikzcd}$$

Quando tivermos $\mathrm{X}=\mathrm{Spec}(\mathrm{C}),\mathrm{Y}=\mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ e $\mathrm{Z}=\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ esquemas afins e $u:\mathrm{A}\to\mathrm{B}, v:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ forem os homomorfismos de anéis correspondendo a g,f, respectivamente, teremos que os morfismos $f_{\mathrm{X/Y/Z}}$ e $g_{\mathrm{X/Y/Z}}$ serão oriundos, a menos de isomorfismos naturais, de $v_{\mathrm{C/B/A}}:\Omega^1_{\mathrm{B/A}}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{C}\to\Omega^1_{\mathrm{C/A}}$ e $u_{\mathrm{C/B/A}}:\Omega^1_{\mathrm{C/A}}\to\Omega^1_{\mathrm{C/B}}$ (1.1.7), respectivamente.

Proposição **(1.1.38)** (Seqüência cotangente relativa). — *Com as notações de* (1.1.37)*, temos uma seqüência exata de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos quase-coerentes*

(1.1.38.1)
$$f^*(\Omega^1_{\mathrm{Y/Z}})\xrightarrow{f_{\mathrm{X/Y/Z}}}\Omega^1_{\mathrm{X/Z}}\xrightarrow{g_{\mathrm{X/Y/Z}}}\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}\to 0$$

Demonstração. — Tomando abertos afins apropriados, o resultado segue diretamente do caso local (1.1.8). ▲

(1.1.39) Sejam $i:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ uma imersão fechada de esquemas e $\mathscr{I}$ o ideal quase-coerente de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$ associado a i. O funtor $i_*:\mathbf{Qcoh}(\mathrm{X})\to\mathbf{Qcoh}(\mathrm{Z})$ é pleno, fiel, exato e tem como imagem essencial os $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulos quase-coerentes $\mathscr{G}$ tais que $\mathscr{I}\mathscr{G}=0$. Com efeito, observe inicialmente que, como i é um morfismo quase-compacto e quase-separado, o funtor i_* leva módulos quase-coerentes em quase-coerentes [GW10, Corolário 10.27]. A exatidão decorre do fato de i ser um morfismo afim. Haja vista que i_* tem como funtor adjunto à esquerda $i^*:\mathbf{Qcoh}(\mathrm{Z})\to\mathbf{Qcoh}(\mathrm{X})$, dizer que ele é pleno e fiel equivale a dizer que a counidade da adjunção $i^*i_*\to 1_{\mathbf{Qcoh}(\mathrm{X})}$ é um isomorfismo natural. Isso vem do seguinte fato algébrico: dado um anel A, um ideal I de A e um (A/I)-módulo M, o homomorfismo de (A/I)-módulos $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A/I})\to\mathrm{M}$, induzido pela multiplicação por escalares, é um isomorfismo. Determinemos, por fim, a imagem essencial. Dados um $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulo $\mathscr{G}$ e um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo $\mathscr{F}$ tais que $\mathscr{G}\cong i_*(\mathscr{F})$, é claro que $\mathscr{I}\mathscr{G}\cong\mathscr{I}(i_*(\mathscr{F}))=0$. Por outro lado, se $\mathscr{I}\mathscr{G}=0$, então o morfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulos $\mathscr{G}\to i_*(i^*(\mathscr{G}))$, obtido da unidade da adjunção, é um isomorfismo, sendo que isso decorre do fato algébrico: para um anel A, um ideal I e um A-módulo N tal que $\mathrm{IN}=0$, o homomorfismo de A-módulos $\mathrm{N}\to\mathrm{N}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A/I})$ que leva x em $x\otimes 1$ é um isomorfismo. Concluímos, então, que i_* nos dá uma equivalência entre a categoria de

$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos quase-coerentes e a subcategoria plena estrita de **Qcoh**(Z) obtida a partir dos $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulos quase-coerentes aniquilados por $\mathscr{I}$.

Definição **(1.1.40).** — *Sejam $i:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ uma imersão fechada de esquemas e $\mathscr{I}$ o ideal quase-coerente de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$ associado a i. O $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo quase-coerente $i^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)$ é chamado o feixe conormal de i (ou, quando não houver risco de confusão, de* X *em* Z*) e será denotado $\mathscr{C}_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}$. Mais geralmente, se considerarmos uma imersão $i:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$, de modo que tenhamos $i=j\circ i_0$, sendo $i_0:\mathrm{X}\to\mathrm{U}$ uma imersão fechada e $j:\mathrm{U}\to\mathrm{Z}$ uma imersão aberta, definiremos o feixe conormal de i como sendo o feixe conormal de i_0.*

Observações **(1.1.41).** — (i) A fatoração de uma imersão i em uma imersão fechada seguida por uma imersão aberta não é única; no entanto, não é difícil justificar que o feixe conormal independe da fatoração escolhida. Uma alternativa seria considerar o maior aberto de Z para o qual temos uma fatoração desse tipo e definir o feixe conormal de i como sendo o da imersão fechada assim obtida.

(ii) Parte da literatura define o feixe conormal de uma imersão fechada como sendo o $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulo quase-coerente $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$. Esse abuso de notação é justificado por (1.1.39).

Proposição **(1.1.42).** — *Consideremos um diagrama cartesiano na categoria de esquemas*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "h'"'] & \mathrm{Z}' \arrow[d, "h"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "i"'] & \mathrm{Z} \end{tikzcd}$$

e suponhamos que i seja uma imersão. Necessariamente devemos ter que i' é uma imersão e existe um epimorfismo canônico de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-módulos $(h')^*(\mathscr{C}_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}})\to\mathscr{C}_{\mathrm{X}'/\mathrm{Z}'}$. Este será um isomorfismo se h for plano.

Demonstração. — Podemos supor, sem perda de generalidade, que i é uma imersão fechada. Seja $\mathscr{I}$ o ideal quase-coerente de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$ que define X como subesquema fechado de Z. Como temos um diagrama cartesiano, i' é uma imersão fechada e X′ é definido como subesquema fechado de Z′ pelo ideal $\mathscr{I}'=h^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathrm{Z}'}=\mathrm{Im}\left(h^*(\mathscr{I})\to\mathscr{O}_{\mathrm{Z}'}\right)$. Assim, temos um epimorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}'}$-módulos $h^*(\mathscr{I})\to\mathscr{I}'$, que induz um também epimorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}'}$-módulos $h^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)\to\mathscr{I}'/\mathscr{I}'^2$. Aplicando o funtor $(i')^*$, que é exato à direita, obtemos o epimorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-módulos $u:(h')^*(\mathscr{C}_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}})\to\mathscr{C}_{\mathrm{X}'/\mathrm{Z}'}$ desejado. Para ver que u será um isomorfismo quando h for plano, basta notar que, nesse caso, o funtor h^* será exato e isso garantirá que $h^*(\mathscr{I})\to\mathscr{I}'$, e portanto também que u, será um isomorfismo. ▲

(1.1.43) Sejam $i:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ uma imersão fechada de esquemas e $\mathscr{I}$ o ideal quase-coerente de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$ associado a i. Para qualquer $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulo quase-coerente $\mathscr{G}$, obtemos, aplicando i^* à seqüência exata curta $0\to\mathscr{I}\mathscr{G}\to\mathscr{G}\to\mathscr{G}/\mathscr{I}\mathscr{G}\to 0$, uma seqüência exata à direita

(1.1.43.1) $$i^*(\mathscr{I}\mathscr{G})\to i^*(\mathscr{G})\to i^*(\mathscr{G}/\mathscr{I}\mathscr{G})\to 0$$

de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos quase-coerentes. Olhando em abertos afins, é fácil ver que o primeiro morfismo de (1.1.43.1) é nulo, de onde obtemos um isomorfismo natural de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos quase-coerentes

(1.1.43.2) $$i^*(\mathscr{G})\xrightarrow{\sim} i^*(\mathscr{G}/\mathscr{I}\mathscr{G}).$$

(1.1.44) Sejam $i:\mathrm{X}\to\mathrm{Z}$ uma imersão e $g:\mathrm{Z}\to\mathrm{Y}$ um morfismo de esquemas. Então a diferencial exterior $d_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}}$ induz um morfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos $\delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}/\mathrm{Y}}:\mathscr{C}_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}\to i^*(\Omega^1_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})$.

Com efeito, consideremos $i = j \circ i_0$, sendo $i_0 : \mathrm{X} \to \mathrm{U}$ uma imersão fechada com ideal quase-coerente associado $\mathscr{I}$ e $j : \mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ uma imersão aberta. A diferencial exterior leva, graças à regra de Leibniz, $\mathscr{I}^2$ em $\mathscr{I}(\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}})|_{\mathrm{U}}$, de modo que obtemos um morfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}|_{\mathrm{U}}$-módulos $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to (\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}})|_{\mathrm{U}}/\mathscr{I}(\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}})|_{\mathrm{U}}$. Aplicando o funtor i_0^*, tendo em vista (1.1.43.2), conseguimos o morfismo desejado.

Proposição **(1.1.45)** (Seqüência Conormal). — *Usando as notações de* (1.1.37) *e* (1.1.44)*, temos uma seqüência exata de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos quase-coerentes.*

(1.1.45.1)
$$\mathscr{C}_{\mathrm{X/Z}} \xrightarrow{\delta_{\mathrm{X/Z/Y}}} i^*(\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}}) \xrightarrow{i_{\mathrm{X/Y/Z}}} \Omega^1_{\mathrm{X/Y}} \to 0$$

Demonstração. — Considere abertos afins $\mathrm{Spec(A)} \subseteq \mathrm{Y}$ e $\mathrm{Spec(B)} \subseteq \mathrm{U}$ com $g(\mathrm{Spec(B)}) \subseteq \mathrm{Spec(A)}$. Então $i^{-1}(\mathrm{Spec(B)}) = \mathrm{Spec(B/I)}$, sendo $\mathrm{I} = \Gamma(\mathrm{Spec(B)}, \mathscr{I})$, e se $\mathrm{C} = \mathrm{B/I}$, obtemos, ao aplicarmos $\Gamma(\mathrm{Spec(C)}, \cdot)$ à seqüência (1.1.45.1), a seqüência conormal local (1.1.10.1), que é exata. O resultado segue daí, pois podemos cobrir X com abertos afins satisfazendo essas condições. ▲

Proposição **(1.1.46)**. — *Consideremos um diagrama cartesiano* (1.1.30.1) *na categoria de esquemas. Então os morfismos canônicos $c_g : g^*(\Omega^1_{\mathrm{X'/Y'}}) \to \Omega^1_{\mathrm{X/Y}}$* (1.1.30.3) *e $(g_{\mathrm{X/X'/Y'}}\ f_{\mathrm{X/Y/Y'}}) : g^*(\Omega^1_{\mathrm{X'/Y'}}) \oplus f^*(\Omega^1_{\mathrm{Y/Y'}}) \to \Omega^1_{\mathrm{X/Y'}}$* (1.1.37) *são isomorfismos.*

Demonstração. — Tomando abertos afins apropriados, o fato de c_g ser isomorfismo decorre imediatamente de (1.1.11). Para a segunda afirmação, consideremos a seqüência cotangente relativa (1.1.38.1)

(1.1.46.1)
$$g^*(\Omega^1_{\mathrm{X'/Y'}}) \xrightarrow{g_{\mathrm{X/X'/Y'}}} \Omega^1_{\mathrm{X/Y'}} \xrightarrow{f'_{\mathrm{X/X'/Y'}}} \Omega^1_{\mathrm{X/X'}} \to 0$$

determinada por $g : \mathrm{X} \to \mathrm{X'}$ e $f' : \mathrm{X'} \to \mathrm{Y'}$. Então a composição de $h_{\mathrm{X/Y/Y'}} : \Omega^1_{\mathrm{X/Y'}} \to \Omega^1_{\mathrm{X/Y}}$ com $(c_g)^{-1}$ é uma retração de $g_{\mathrm{X/X'/Y'}}$ e portanto (1.1.46.1) é uma seqüência exata curta cindida, de onde obtemos um isomorfismo

$$\varphi = \begin{pmatrix} (c_g)^{-1} \circ h_{\mathrm{X/Y/Y'}} \\ f'_{\mathrm{X/X'/Y'}} \end{pmatrix} : \Omega^1_{\mathrm{X/Y}} \xrightarrow{\sim} g^*(\Omega^1_{\mathrm{X'/Y'}}) \oplus \Omega^1_{\mathrm{X/X'}}.$$

Por outro lado, também temos um isomorfismo $c_f : f^*(\Omega_{\mathrm{Y/Y'}}) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{\mathrm{X/X'}}$ e usando (1.1.30.4) é fácil ver que $\varphi \circ (g_{\mathrm{X/X'/Y'}}\ f_{\mathrm{X/Y/Y'}}) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_f \end{smallmatrix}\right)$ concluindo, portanto, a demonstração. ▲

(1.1.47) Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo de esquemas. Denotaremos por $\mathrm{T_{X/Y}}$ o dual do $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo $\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}$ e diremos que ele é o *feixe tangente de* X *sobre* Y. Observe que temos um isomorfismo natural $\mathrm{T_{X/Y}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}er_{\mathrm{Y}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ (1.1.26.1) e que se f for um morfismo localmente de apresentação finita, então $\mathrm{T_{X/Y}}$ será um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo quase-coerente (1.1.36).

(1.1.48) Sejam $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ um espaço localmente anelado, x_0 um ponto de X, $\mathscr{F}$ um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo e s uma seção de $\mathscr{F}$ definida em uma vizinhança aberta U de x_0. Denotaremos por $\mathscr{F}(x_0)$ a *fibra de $\mathscr{F}$ em x_0*, ou seja, o $k(x_0)$-espaço vetorial $\mathscr{F}_{x_0} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x_0}} k(x_0)$, sendo $k(x_0)$ o corpo de resíduos de X em x_0, e por $s(x_0)$ o *valor de s em x_0*. Sejam $s_1, \ldots, s_n$ seções de $\mathscr{F}$ definidas em U; se $\mathscr{F}$ for de tipo finito, então o lema de Nakayama garante que o conjunto dos $x \in \mathrm{U}$ tais que $s_1(x), \ldots, s_n(x)$ geram $\mathscr{F}(x)$ é um aberto de X. Como todo módulo finitamente gerado (sobre um anel comutativo) é hopfiano, qualquer conjunto de m elementos que gera um módulo livre de posto m forma uma base [Eis04, Corolário 4.4]. Isto garante que, se $\mathscr{F}$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo localmente livre de tipo finito, o conjunto dos $x \in \mathrm{U}$ tais que $s_1(x), \dots, s_n(x)$ formam uma base de $\mathscr{F}(x)$ é um aberto de X. Como conseqüência, sob esta última hipótese para $\mathscr{F}$, o conjunto dos $x \in \mathrm{U}$ tais que $s_1(x), \dots, s_n(x)$ são linearmente independentes em $\mathscr{F}(x)$ é um aberto de X.

Exemplo **(1.1.49).** — Suponhamos que $\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}$ seja um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo localmente livre de tipo finito (esse será o caso se f for um morfismo suave (2.1.28)), sejam U, V abertos afins de X, Y, respectivamente, com $f(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{V}$ e consideremos seções $s_1, \dots, s_n$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ definidas em U tais que $(ds_1)(x), \dots, (ds_n)(x)$ formam uma base de $\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}(x)$. Tendo em vista (1.1.48) e restringindo U se necessário, podemos supor que os ds_i formam uma base do $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$-módulo $\Gamma(\mathrm{U}, \Omega^1_{\mathrm{X/Y}})$. Então $\Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{T}_{\mathrm{X/Y}})$ é o dual do precedente. Tendo (1.1.14, (i)) como motivação, denotamos por $(\partial_i)_{1 \leq i \leq n}$ a base de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{T}_{\mathrm{X/Y}})$ dual de $(ds_i)_{1 \leq i \leq n}$ e por $(\partial/\partial s_i)_{1 \leq i \leq n}$ a base de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{D}er_{\mathrm{Y}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}))$ correspondente. Toda $\Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$-derivação de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ se escreve, portanto, de uma única maneira como $\mathrm{D} = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}(s_i)\partial/\partial s_i$. Para toda seção $g \in \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$, obtemos

$$dg = \sum_{i=1}^n \partial_i(dg) ds_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial s_i} ds_i.$$

Proposição **(1.1.50).** — *Sejam k um corpo e X um k-esquema. Para todo ponto racional $x \in \mathrm{X}(k)$, temos que a fibra de $\Omega^1_{\mathrm{X}/k}$ em x é naturalmente isomorfa ao espaço cotangente de Zariski $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ em x.*

Demonstração. — Consideremos o homomorfismo sobrejetivo de k-álgebras $v : \mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \to k(x)$. Por hipótese, o homomorfismo estrutural $k \to k(x)$ é um isomorfismo, nos permitindo obter um homomorfismo de k-álgebras inverso à direita de v. Da seqüência conormal local (1.1.10.1), obtemos um isomorfismo de $k(x)$-espaços vetoriais $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/k} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}} k(x)$, concluindo, então, a demonstração. ▲

Observação **(1.1.51).** — Se $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ é um morfismo de esquemas, então o módulo de 1-diferenciais de X sobre Y pode também ser visto como o feixe conormal do morfismo diagonal $\Delta_{\mathrm{X/Y}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$, queira ver, por exemplo, [Stacks, Tag 08S2]. Note que isso é a versão global da proposição (1.1.16).

1.2. Extensões de álgebras e sua relação com derivações.

(1.2.1) Sejam A um anel e B uma A-álgebra. Chamaremos de A-*álgebra aumentada sobre* B uma A-álgebra E munida de um homomorfismo sobrejetivo de A-álgebras $f : \mathrm{E} \to \mathrm{B}$, chamado a *aumentação de* E. O núcleo I de f é dito o *ideal de aumentação.* Diremos que a A-álgebra aumentada E é trivial se existe um homomorfismo de A-álgebras $s : \mathrm{B} \to \mathrm{E}$ que é inverso à direita da aumentação $f : \mathrm{E} \to \mathrm{B}$. Por fim, observe que, para que tenhamos $\mathrm{I}^2 = 0$, é necessário e suficiente que I tenha estrutura de B-módulo tal que, para todos $x \in \mathrm{E}$ e $z \in \mathrm{I}$, $f(x)z = xz$.

(1.2.2) Uma A-*extensão de uma* A-*álgebra* B *por um* B-*módulo* L é uma seqüência exata curta de A-módulos

(1.2.2.1) $$0 \to \mathrm{L} \xrightarrow{j} \mathrm{E} \xrightarrow{f} \mathrm{B} \to 0,$$

sendo E uma A-álgebra, f um homomorfismo de A-álgebras e, para todos $x \in \mathrm{E}$ e $z \in \mathrm{L}$, temos $j(f(x)z) = xj(z)$. Segue de (1.2.1) que $j(\mathrm{L})$ é um ideal de E de quadrado zero. Na maioria das vezes, diremos simplesmente que E é uma extensão de B por L. Duas A-extensões

E, E' de B por L são ditas A-*equivalentes* se existe um isomorfismo de A-álgebras $u : \mathrm{E} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}'$ tal que o diagrama

(1.2.2.2)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{L} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d, "u"', "\wr"] & \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{L} \arrow[r] & \mathrm{E}' \arrow[r] & \mathrm{B} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo. Uma observação simples, mas importante, é que uma vez que tenhamos um homomorfismo de A-álgebras u fazendo o diagrama acima comutar, ele será automaticamente um isomorfismo pelo lema dos cinco.

A noção de A-equivalência define uma relação de equivalência para a qual podemos falar de um *conjunto* de classes de A-extensões A-equivalentes de B por L. Para isso, basta observar o seguinte: dada uma A-extensão de B por L como em (1.2.2.1), o axioma da escolha permite que obtenhamos, para cada $x \in \mathrm{B}$, um elemento $c_x \in \mathrm{E}$ tal que $f(c_x) = x$. A aplicação $\mathrm{E} \to \mathrm{B} \times \mathrm{L}$ que leva um elemento z de E em $(f(x), s)$, sendo s o único elemento de L tal que $j(s) = z - c_{f(z)}$, é uma bijeção, cuja inversa é a aplicação obtida associando a (x, s) o elemento $c_x + j(s)$. Esta permite transpor toda a informação da A-extensão E para $\mathrm{B} \times \mathrm{L}$, de modo que terminamos com A-extensões A-equivalentes e isso garante que toda A-extensão de B por L é A-equivalente a uma A-extensão cujo conjunto subjacente é $\mathrm{B} \times \mathrm{L}$.

(1.2.3) Dadas duas A-extensões $(\mathrm{L}, \mathrm{E}, \mathrm{B}, j, f)$, $(\mathrm{L}', \mathrm{E}', \mathrm{B}', j', f')$, definimos um ***morfismo*** da primeira na segunda como sendo uma tripla (w, u, v) tal que o diagrama

(1.2.3.1)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{L} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "w"'] & \mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{L}' \arrow[r, "j'"'] & \mathrm{E}' \arrow[r, "f'"'] & \mathrm{B}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo u e v homomorfismos de A-álgebras e w um homomorfismo de B-módulos, onde L' é visto como B-módulo através de v. Isso permite que falemos da categoria de A-extensões, cuja regra de composição é definida coordenada a coordenada.

(1.2.4) Dizemos que uma A-extensão E de B por L é A-***trivial*** se E é uma A-álgebra aumentada trivial (1.2.1). Para dar uma descrição equivalente de extensões A-triviais, observe que o A-módulo $\mathrm{B} \times \mathrm{L}$ pode ser visto como uma A-álgebra se definirmos uma multiplicação por $(x, s) \cdot (y, t) = (xy, xt + sy)$. Se considerarmos $j : \mathrm{L} \to \mathrm{B} \times \mathrm{L}$, $f : \mathrm{B} \times \mathrm{L} \to \mathrm{B}$ como sendo as aplicações canônicas, é claro que $0 \to \mathrm{L} \to \mathrm{B} \times \mathrm{L} \to \mathrm{B} \to 0$ é uma A-extensão trivial, chamada a A-***extensão trivial típica de*** B ***por*** L. Abusando da notação, denotaremos tanto $\mathrm{B} \times \mathrm{L}$ com a estrutura de A-álgebra aqui definida quanto a A-extensão trivial típica de B por L por $\mathrm{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{L})$. Sob essa ótica, uma A-extensão de B por L é A-trivial se, e somente se, é A-equivalente a $\mathrm{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{L})$.

As extensões triviais típicas se comportam de maneira funtorial. Para ver isso, consideremos B, B' duas A-álgebras, L um B-módulo, L' um B'-módulo, $v : \mathrm{B} \to \mathrm{B}'$ um homomorfismo de A-álgebras e $w : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ um homomorfismo de B-módulos, sendo L' visto como B-módulo através de v. Então existe um único homomorfismo de A-álgebras $u : \mathrm{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{L}) \to \mathrm{D}_{\mathrm{B}'}(\mathrm{L}')$ tal que (w, u, v) é um morfismo da extensão $\mathrm{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{L})$ na extensão $\mathrm{D}_{\mathrm{B}'}(\mathrm{L}')$.

Nosso objetivo no que segue é obter um grupo de classes de A-extensões que depende funtorialmente da informação inicial. Para isso, precisaremos construir novas extensões a partir daquelas dadas, de modo que A-equivalências sejam preservadas.

(1.2.5) Consideremos primeiro uma A-extensão (E', j', f') de B' por L' e um homomorfismo de A-álgebras $v : \mathrm{B} \to \mathrm{B}'$. Seja $\mathrm{E}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B}$ o produto fibrado de f' e v na categoria de A-álgebras, ou dito de modo mais explícito, $\mathrm{E}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B} = \{(x', b) \in \mathrm{E}' \times \mathrm{B} : f'(x') = v(b)\}$. Denotemos por p_1, p_2 as projeções de $\mathrm{E}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B}$ em E', B, respectivamente. Se definirmos $j : \mathrm{L}' \to \mathrm{E}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B}$ como sendo a aplicação $z' \mapsto (j'(x'), 0)$ e considerarmos L' como B-módulo através de v, é claro que obteremos uma A-extensão

$$0 \to \mathrm{L}' \xrightarrow{j} \mathrm{E}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B} \xrightarrow{p_2} \mathrm{B} \to 0$$

de B por L', de modo que o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L}' \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \mathrm{E}' \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L}' \arrow[r, "j'"'] & \mathrm{E}' \arrow[r, "f'"'] & \mathrm{B}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Diremos que esta é a ***imagem inversa por*** v da extensão E' de B' por L'.

O caráter funtorial do produto fibrado garante que, dado um morfismo entre duas extensões de B'

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L}'_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{E}'_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{B}' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L}'_2 \arrow[r] & \mathrm{E}'_2 \arrow[r] & \mathrm{B}' \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

podemos deduzir um morfismo entre as respectivas imagens inversas por v

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L}'_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{E}'_1 \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, "g \times_{\mathrm{B}'} 1_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L}'_2 \arrow[r] & \mathrm{E}'_2 \times_{\mathrm{B}'} \mathrm{B} \arrow[r] & \mathrm{B} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Em particular, ao considerarmos a imagem inversa de A-extensões A-equivalentes de B' por L', obteremos A-extensões A-equivalentes de B por L'.

(1.2.6) Agora consideremos uma A-extensão (E, j, f) de B por um B-módulo L e um homomorfismo de B-módulos $w : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$. Seja $\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}'$ o A-módulo soma amalgamada de E e L' ao longo de L, isto é, o coproduto fibrado de j e w na categoria de A-módulos, que é obtido quocientando o A-módulo $\mathrm{E} \oplus \mathrm{L}'$ por $\{(j(z), -w(z)) : z \in \mathrm{L}\}$, e denotemos por i_1, i_2 as injeções de E, L' em $\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}'$, respectivamente. Vejamos como podemos munir $\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}'$ de uma estrutura de A-álgebra e obter uma A-extensão $0 \to \mathrm{L}' \to \mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}' \to \mathrm{B} \to 0$. Considerando L' como E-módulo através do homomorfismo de aumentação $\mathrm{E} \to \mathrm{B}$, podemos formar a A-extensão trivial típica $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}')$ (1.2.4). Se $\theta : \mathrm{L} \to \mathrm{D}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}')$ é a aplicação $z \mapsto (j(z), -w(z))$, então é claro que θ é um homomorfismo de $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}')$-módulos, sendo L considerado como $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}')$-módulo através do homomorfismo de aumentação $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}') \to \mathrm{E}$. Visto que $\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}' = \mathrm{D}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}')/\theta(\mathrm{L})$ como A-módulos, a estrutura de A-álgebra de $\mathrm{D}_{\mathrm{E}}(\mathrm{L}')$ é herdada por $\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}'$. Sendo assim, ao considerarmos o homomorfismo de A-álgebras $f' : \mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}' \to \mathrm{B}$ que leva a classe de (x, z') em $f(x)$, é claro que teremos uma A-extensão

$$0 \to \mathrm{L}' \xrightarrow{i_2} \mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}' \xrightarrow{f'} \mathrm{B} \to 0$$

de B por L′ e que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, phantom, "\square^*"] & \mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"] & \mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L}' \arrow[r, "i_2"'] & \mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}' \arrow[r, "f'"'] & \mathrm{B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Diremos que esta nova extensão é a *imagem direta por* w da extensão E de B por L.

O caráter funtorial da soma amalgamada mostra que, dado um morfismo de extensões

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{E}_1 \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{B}_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L} \arrow[r] & \mathrm{E}_2 \arrow[r] & \mathrm{B}_2 \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

podemos deduzir um morfismo entre as respectivas imagens diretas por w

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{L}' \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{E}_1 \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}' \arrow[r] \arrow[d, "g \oplus_{\mathrm{L}} 1_{\mathrm{L}'}"'] & \mathrm{B}_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{L}' \arrow[r] & \mathrm{E}_2 \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}' \arrow[r] & \mathrm{B}_2 \arrow[r] & 0\,.
\end{tikzcd}$$

Em particular, ao considerarmos a imagem direta de A-extensões A-equivalentes de B por L, obteremos A-extensões A-equivaletes de B por L′.

(1.2.7) Fixemos uma A-álgebra B e denotemos provisoriamente por T(L) o *conjunto* de classes de A-extensões de B por L (1.2.2). Denotaremos por [E] a classe de uma A-extensão E de B por L. Dado um homomorfismo de B-módulos $w : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$, definimos uma aplicação $\mathrm{T}(w) : \mathrm{T}(\mathrm{L}) \to \mathrm{T}(\mathrm{L}')$ levando [E] em $[\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}']$, sendo $\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} \mathrm{L}'$ vista como A-extensão de B por L′ como em (1.2.6). Não é difícil verificar que, se $w' : \mathrm{L}' \to \mathrm{L}''$ é um outro homomorfismo de B-módulos, então $\mathrm{T}(w' \circ w) = \mathrm{T}(w') \circ \mathrm{T}(w)$ e $\mathrm{T}(1_{\mathrm{L}}) = 1_{\mathrm{T}(\mathrm{L})}$. Desse modo, obtemos um funtor $\mathrm{T} : \mathbf{Mod}(\mathrm{B}) \to \mathbf{Sets}$, sendo **Sets** a categoria de conjuntos.

Proposição **(1.2.8).** — *O funtor* $\mathrm{T} : \mathbf{Mod}(\mathrm{B}) \to \mathbf{Sets}$ *preserva produtos arbitrários. Dito de maneira explícita, se considerarmos uma família* $(\mathrm{L}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de* B*-módulos, sendo* $\mathrm{L} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{L}_i$ *o seu produto, as projeções* $p_i : \mathrm{L} \to \mathrm{L}_i$ *definem uma bijeção natural*

$$\mathrm{T}(\mathrm{L}) \to \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{T}(\mathrm{L}_i)\,. \tag{1.2.8.1}$$

Demonstração. — Dada, para cada i, uma A-extensão E_i de B por L_i, obtemos uma A-extensão de B por L considerando o produto fibrado dos E_i sobre B. Graças à funtorialidade deste último, isso define uma aplicação $\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{T}(\mathrm{L}_i) \to \mathrm{T}(\mathrm{L})$ e uma verificação direta mostra que ela é a inversa de (1.2.8.1). ▲

(1.2.9) Seja L um B-módulo e identifiquemos $\mathrm{T}(\mathrm{L}) \times \mathrm{T}(\mathrm{L})$ e $\mathrm{T}(\mathrm{L} \times \mathrm{L})$ usando (1.2.8). A adição $s : \mathrm{L} \times \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ e a simetria $t : \mathrm{L} \to \mathrm{L}$ da regra aditiva de L são homomorfismos de B-módulos. Deduzimos, portanto, duas aplicações $\mathrm{T}(s) : \mathrm{T}(\mathrm{L}) \times \mathrm{T}(\mathrm{L}) \to \mathrm{T}(\mathrm{L})$ que leva $([\mathrm{E}_1], [\mathrm{E}_2])$ em $[(\mathrm{E}_1 \times_{\mathrm{B}} \mathrm{E}_2) \oplus_{\mathrm{L} \times \mathrm{L}} \mathrm{L}]$ e $\mathrm{T}(t) : \mathrm{T}(\mathrm{L}) \to \mathrm{T}(\mathrm{L})$ que leva [E] em $[\mathrm{E} \oplus_{\mathrm{L}} (\mathrm{L}, t)]$, onde (L, t) indica que a soma amalgamada é obtida usando t. Interpretando um grupo abeliano como um objeto-grupo abeliano na categoria de conjuntos, ou seja, expressando as identidade algébricas por diagramas, pode-se mostrar, após um longo exercício de paciência, que $\mathrm{T}(s)$

dá a $T(L)$ uma estrutura de grupo abeliano, sendo $T(t)$ a simetria e a classe das A-extensões triviais (1.2.4) o elemento neutro. A naturalidade das bijeções (1.2.8.1) garante que se $w : L \to L'$ é um homomorfismo de B-módulos, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} T(L)\times T(L) \arrow[r, "T(s)"] \arrow[d, "T(w)\times T(w)"'] & T(L) \arrow[d, "T(w)"] \\ T(L')\times T(L') \arrow[r, "T(s')"'] & T(L') \end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo s' a adição em L'. Isso diz que $T(w)$ é um homomorfismo de grupos e portanto temos um funtor $T : \mathbf{Mod}(B) \to \mathbf{Ab}$. Uma verificação direta mostra que T é um funtor aditivo e por conseguinte $T(L)$ tem uma estrutura de B-módulo, cuja multiplicação pelo escalar $b \in B$ é justamente $T(h_b)$, sendo h_b aquela de L. Desse modo, podemos considerar T como um endofuntor B-linear da categoria $\mathbf{Mod}(B)$.[1] Designaremos por $\mathrm{Exalcom}_A(B, L)$ o B-módulo assim obtido e diremos que ele é o *grupo de classes de* A-*extensões de* B *por* L.

(1.2.10) Mostraremos agora que, como no caso de derivações, o grupo de classes define um funtor da categoria $\mathfrak{C}$ (1.1.2) na categoria de grupos abelianos. Aqui, porém, daremos mais detalhes do que precisa ser verificado. Consideremos um objeto (A, B, L) de $\mathfrak{C}$, um B-módulo L' e um homomorfismo de B-módulos $w : L \to L'$. Então

$$w_1 : \mathrm{Exalcom}_A(B, L) \to \mathrm{Exalcom}_A(B, L')$$

será o homomorfismo de B-módulos $T(w) : [E] \mapsto [E \oplus_L L']$.

Por outro lado, se B' é uma A-álgebra e $v : B' \to B$ é um homomorfismo de A-álgebras fazendo de L um B'-módulo, definimos

$$v^1 : \mathrm{Exalcom}_A(B, L) \to \mathrm{Exalcom}_A(B', L)$$

como sendo a aplicação que leva $[E]$ em $[E \times_B B']$, onde $E \times_B B'$ é vista como A-extensão de B' por L do mesmo modo que em (1.2.5). Uma verificação direta mostra que se $w : L \to L'$ é um homomorfismo de B-módulos, então o diagrama

(1.2.10.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Exalcom}_A(B, L) \arrow[r, "v^1"] \arrow[d, "w_1"'] & \mathrm{Exalcom}_A(B', L) \arrow[d, "w_1"] \\ \mathrm{Exalcom}_A(B, L') \arrow[r, "v^1"'] & \mathrm{Exalcom}_A(B', L') \end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo L, L' considerados como B'-módulos através de v na segunda coluna e $w : L \to L'$ como homomorfismo de B'-módulos. Em particular, considerando a adição em L no lugar de w e verificando a compatibilidade de v^1 com o isomorfismo canônico $\mathrm{Exalcom}_A(B, L \times L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exalcom}_A(B, L) \times \mathrm{Exalcom}_A(B, L)$, obtemos que este é um homomorfismo de grupos. De maneira análoga, se olharmos para $\mathrm{Exalcom}_A(B, L)$ como B'-módulo através de v e substituirmos w pela multiplicação pelo escalar $v(b')$, para $b' \in B'$, concluiremos que v^1 é um homomorfismo de B'-módulos.

Por fim, seja $u : A' \to A$ um homomorfismo de anéis fazendo de B uma A'-álgebra. Definimos uma aplicação

$$u^1 : \mathrm{Exalcom}_A(B, L) \to \mathrm{Exalcom}_{A'}(B, L)$$

[1] Dito de maneira mais explícita, o que fizemos foi descrever um isomorfismo da categoria de funtores aditivos de $\mathbf{Mod}(B)$ em $\mathbf{Ab}$ na categoria de endofuntores B-lineares de $\mathbf{Mod}(B)$.

associando a classe de uma A-extensão E de B por L à classe da A′-extensão obtida considerando E como A′-álgebra através de u. Como acima, uma verificação direta mostra que para todo homomorfismo de B-módulos $w : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$, o diagrama

(1.2.10.2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L}) \arrow[r, "u^1"] \arrow[d, "w_1"'] & \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{B},\mathrm{L}) \arrow[d, "w_1"] \\ \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L}') \arrow[r, "u^1"'] & \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{B},\mathrm{L}') \end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo B considerada como A′-álgebra através de u na segunda coluna, e portanto que u^1 é um homomorfismo de B-módulos.

Se associarmos ao objeto $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{L})$ de $\mathfrak{C}$ o grupo abeliano $\mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L})$ e a um morfismo $(u,v,w) : (\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{L}) \to (\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{L}')$ de $\mathfrak{C}$ o homomorfismo $w_1 \circ v^1 \circ u^1$, obteremos um funtor da categoria $\mathfrak{C}$ em **Ab**. Com efeito, é claro o fato dessa associação preservar identidades. Se $(\bar{u},\bar{v},\bar{w}) : (\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{L}') \to (\mathrm{A}'',\mathrm{B}'',\mathrm{C}'')$ é um outro morfismo de $\mathfrak{C}$, então $(\bar{w}\circ w)_1 \circ (v\circ\bar{v})^1 \circ (u\circ\bar{u})^1 = (\bar{w}_1\circ\bar{v}^1\circ\bar{u}^1)\circ(w_1\circ v^1\circ u^1)$ graças à comutatividade dos diagramas (1.2.10.1), (1.2.10.2) e do diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{B},\mathrm{L}) \arrow[r, "v^1"] \arrow[d, "\bar{u}^1"'] & \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{B}',\mathrm{L}) \arrow[d, "\bar{u}^1"] \\ \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}''}(\mathrm{B},\mathrm{L}) \arrow[r, "v^1"'] & \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}''}(\mathrm{B}',\mathrm{L})\,. \end{tikzcd}$$

(1.2.11) Sejam A, A' anéis, $u : \mathrm{A}' \to \mathrm{A}$ um homomorfismo de anéis, B uma A-álgebra e L um B-módulo. O núcleo do homomorfismo de B-módulos

$$u^1 : \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B},\mathrm{L}) \to \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}'}(\mathrm{B},\mathrm{L})$$

consiste das classes de A-extensões de B por L que são A′-*triviais* quando consideradas como A′-extensões através de u. Denotaremos esse núcleo por $\mathrm{Exalcom}_{\mathrm{A}/\mathrm{A}'}(\mathrm{B},\mathrm{L})$.

Proposição **(1.2.12)**. — *Sejam* B *um anel,* I *um ideal de* B, $\mathrm{C} = \mathrm{B}/\mathrm{I}$ *o anel quociente e considere* I/I^2 *com sua estrutura canônica de* C*-módulo. Então, para todo* C*-módulo* L*, a aplicação*

(1.2.12.1) $$\eta_{\mathrm{L}} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}^2,\mathrm{L}) \to \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{C},\mathrm{L})$$

que leva um homomorfismo de C*-módulos* $w : \mathrm{I}/\mathrm{I}^2 \to \mathrm{L}$ *na classe da* B*-extensão* $(\mathrm{B}/\mathrm{I}^2) \oplus_{(\mathrm{I}/\mathrm{I}^2)} \mathrm{L}$ *obtida como imagem direta por* w *da extensão* B/I^2 *de* C *por* I/I^2 *é um isomorfismo de* C*-módulos natural em* L.

Demonstração. — Seja E uma B-extensão de C por L. A restrição a I do homomorfismo estrutural $\mathrm{B} \to \mathrm{E}$ composta com a aumentação $\mathrm{E} \to \mathrm{C}$ é o homomorfismo nulo. Deduzimos, então, um homomorfismo de B-módulos $\mathrm{I} \to \mathrm{L}$ e, graças ao fato da imagem de L em E ser um ideal de quadrado zero (1.2.2), existe um único homomorfismo de C-módulos $w : \mathrm{I}/\mathrm{I}^2 \to \mathrm{L}$ através do qual $\mathrm{I} \to \mathrm{L}$ se fatora. Se E′ for uma B-extensão de C por L B-equivalente a E é imediato da construção que obteremos o mesmo homomorfismo w. Assim, temos uma aplicação $\theta_{\mathrm{L}} : \mathrm{Exalcom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{C},\mathrm{L}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathrm{I}/\mathrm{I}^2,\mathrm{L})$ que leva [E] em $w : \mathrm{I}/\mathrm{I}^2 \to \mathrm{L}$ e argumentando diretamente é fácil verificar que θ_{L} é a aplicação inversa de η_{L}, o que garante que η_{L} é uma bijeção.

Por outro lado, como temos um funtor $\mathrm{Exalcom}_B(C,\cdot) : \mathbf{Mod}(C) \to \mathbf{Mod}(C)$ (1.2.7) e $\eta_L(w) = w_1([B/I^2])$, obtemos, para cada homomorfismo de C-módulos $h : L \to L'$, um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_C(I/I^2, L) \arrow[r, "\eta_L"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(1,h)"'] & \mathrm{Exalcom}_B(C, L) \arrow[d, "h_1"] \\ \mathrm{Hom}_C(I/I^2, L') \arrow[r, "\eta_{L'}"'] & \mathrm{Exalcom}_B(C, L') . \end{tikzcd}$$

Segue daí a naturalidade de η_L em L e considerando h como sendo a adição em L ou a multiplição por um escalar de C, concluímos que η_L é um isomorfismo de C-módulos. ▲

Proposição **(1.2.13)**. — *Sejam* A *um anel,* B, E, C A*-álgebras e* $p : E \to C$, $u : B \to C$ *dois homomorfismos de* A*-álgebras, sendo o núcleo* I *de* p *um ideal de quadrado zero. Suponhamos que exista um homomorfismo de* A*-álgebras* $v_0 : B \to E$ *tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & & & B \arrow[dl, bend right, "v_0"'] \arrow[d, "u"] \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "j"'] & E \arrow[r, "p"'] & C \end{tikzcd}$$

seja comutativo e considere I *como* B*-módulo através de* v_0*. Se* X *é o conjunto dos homomorfismos de* A*-álgebras* $v : B \to E$ *tais que* $u = p \circ v$*, então temos uma ação simplesmente transitiva* $X \times \mathrm{Der}_A(B, I) \to X$ *que leva* (v, D) *em* $v + D$,[1] *fazendo de* X *um espaço homogêneo principal sob o grupo* $\mathrm{Der}_A(B, I)$.

Demonstração. — O fato de I ser um ideal de quadrado zero garante que, para todos $v \in X$, $b \in B$ e $z \in I$, $v(b)z = v_0(b)z$. Sendo assim, é claro que $v + D$ é um homomorfismo de A-álgebras tal que $p \circ (v + D) = u$. Para ver que a ação é simplesmente transitiva, basta observar que a aplicação $\mathrm{Der}_A(B, I) \to X$ que leva D em $v_0 + D$ é uma bijeção, sendo que sua inversa leva um elemento v de X na A-derivação $v - v_0 : B \to I$. ▲

Corolário **(1.2.14)**. — *Sejam* A *um anel,* B, C *duas* A*-álgebras,* L *um* C*-módulo e* $u : B \to C$ *um* A*-homomorfismo. Obtemos uma bijeção natural em* L *de* $\mathrm{Der}_A(B, L)$ *no conjunto* X(L) *dos homomorfismos de* A*-álgebras* $v : B \to D_C(L)$ *tais que* $p \circ v = u$*, sendo* $p : D_C(L) \to C$ *o homomorfismo de aumentação, associando uma derivação* D *à aplicação* $v_D : x \mapsto (u(x), D(x))$*. Em particular, se considerarmos* $C = B$ *e* $u = 1_B$*, teremos uma bijeção natural em* L *entre* $\mathrm{Der}_A(B, L)$ *e o conjunto dos homomorfismos de* A*-álgebras inversos à direita de* $p : D_B(L) \to B$.

Demonstração. — Uma vez que as extensões triviais típicas se comportam de maneira funtorial (1.2.4), podemos olhar para $L \mapsto X(L)$ como um funtor de $\mathbf{Mod}(C)$ em **Sets** e a naturalidade de $D \mapsto v_D$ é imediata das definições. Para ver que são bijeções, basta aplicar (1.2.13) tomando como $v_0 : B \to D_C(L)$ o homomorfismo de A-álgebras $b \mapsto (u(b), 0)$. ▲

Corolário **(1.2.15)**. — *Sejam* A *um anel e* (E, j, p) *uma* A*-extensão de uma* A*-álgebra* C *por um* C*-módulo* L*. Obtemos uma bijeção do conjunto de* A*-derivações* D *de* E *em* L *tais que* $D \circ j = 1_L$ *no conjunto dos homomorfismos de* A*-álgebras inversos à direita de* p *da seguinte maneira: para uma tal derivação consideramos o homomorfismo de* A*-álgebras* $v = 1_E - j \circ D$*. Como* $v \circ j = 0$*, existe um único homomorfismo de* A*-álgebras* $s : C \to E$ *tal que* $s \circ p = v$ *e este é um inverso à direita de* p.

[1] Rigorosamente deveríamos escrever $v + j \circ D$.

Demonstração. — Aplicando (1.2.13) para $B = E$ e $v_0 = 1_E$, obtemos uma bijeção $D \mapsto 1_E - j \circ D$ de $\mathrm{Der}_A(E, L)$ no conjunto X dos homomorfismos de A-álgebras $v : E \to E$ tais que $p \circ v = p$. Se impusermos a condição adicional $D \circ j = 1_L$, então teremos uma bijeção desse subconjunto no subconjunto de X consistindo dos homomorfismos $v : E \to E$ tais que $v \circ j = 0$ e estes correspondem aos inversos à direita de p. ▲

Exemplo **(1.2.16).** — Sejam A um anel, M um A-módulo e $B = S_A(M)$ a álgebra simétrica de M. Conforme prometido em (1.1.14, (iv)), provaremos, para ilustrar a efetividade da interpretação de derivações usando extensões triviais típicas (1.2.14), que a aplicação $b \otimes x \mapsto b d_{B/A}(x)$ é um isomorfismo natural de $B \otimes_A M$ em $\Omega^1_{B/A}$. Para isso, consideremos um B-módulo L e sejam $p : D_B(L) \to B$ o homomorfismo de aumentação e $i : M \to B$ a inclusão canônica. Então temos de (1.1.6.1), (1.2.14), das propriedades universais da álgebra simétrica e do produto de módulos e de (1.1.5) a seqüência de bijeções naturais

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, L) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Der}_A(B, L) \\
&\xrightarrow{\sim} \{v \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{CAlg}(A)}(B, D_B(L)) : p \circ v = 1_B\} \\
&\xrightarrow{\sim} \{f \in \mathrm{Hom}_A(M, B \times L) : p \circ f = i\} \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, L) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, L).
\end{aligned}$$

O lema de Yoneda garante, então, que temos um isomorfismo natural $B \otimes_A M \to \Omega^1_{B/A}$ e é fácil verificar que ele é dado justamente por $b \otimes x \mapsto b d_{B/A}(x)$.

Provaremos agora o principal resultado desta seção, a partir do qual obteremos condições necessárias e suficientes para que as seqüências cotangente relativa local (1.1.8.1) e conormal local (1.1.10.1) sejam exatas curtas cindidas.

Teorema **(1.2.17).** — *Sejam $u : A \to B$, $v : B \to C$ dois homomorfismos de anéis e L um C-módulo. Temos uma seqüência exata de B-módulos*

(1.2.17.1)
$$\begin{aligned}
&0 \to \mathrm{Der}_B(C, L) \xrightarrow{u^0} \mathrm{Der}_A(C, L) \xrightarrow{v^0} \mathrm{Der}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \\
&\xrightarrow{\partial} \mathrm{Exalcom}_B(C, L) \xrightarrow{u^1} \mathrm{Exalcom}_A(C, L) \xrightarrow{v^1} \mathrm{Exalcom}_A(B, L)
\end{aligned}$$

funtorial em L, onde u^0, v^0 foram definidos em (1.1.3), u^1, v^1 em (1.2.10) e ∂ é o homomorfismo de B-módulos que leva uma A-derivação D de B em L na classe de $0 \to L \to D_C(L) \to C \to 0$ vista como B-extensão através dos homomorfismos de A-álgebras $\alpha_D : x \mapsto (v(x), D(x))$ (1.2.14) e $v : B \to C$.

Demonstração. — Parte do teorema foi demonstrada em (1.1.4). Como extensões de álgebras dão um funtor da categoria $\mathfrak{C}$ (1.1.2) na categoria de grupos abelianos, para mostrar a funtorialidade em L é suficiente verificar que, para todo homomorfismo de C-módulos $w : L \to L'$, temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Der}_A(B, L) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "w_0"'] & \mathrm{Exalcom}_B(C, L) \arrow[d, "w_1"] \\
\mathrm{Der}_A(B, L') \arrow[r, "\partial"'] & \mathrm{Exalcom}_B(C, L').
\end{tikzcd}$$

Isso pode ser feito diretamente sem maiores dificuldades e também garante que ∂ é um homomorfismo de B-módulos. Resta verificar a exatidão em três lugares:

1) O núcleo de ∂ consiste das A-derivações D de B em L para as quais $0 \to L \to D_C(L) \to C \to 0$ é uma B-extensão trivial, sendo a estrutura de B-extensão induzida por $\alpha_D : x \mapsto (v(x), D(x))$ e $v : B \to C$. Isso significa que existe um homomorfismo de B-álgebras $s : C \to D_C(L)$ inverso à direita do homomorfismo de aumentação $D_C(L) \to C$. Como, em particular, s é um homomorfismo de A-álgebras, obtemos de (1.2.14) que s é da forma $c \mapsto (c, D'(c))$ para uma A-derivação D' de C em L. Por fim, visto que s é um homomorfismo de B-álgebras, temos $\alpha_D = s \circ v$ e portanto $D = D' \circ v$, ou seja, D é um elemento da imagem de v^0.

2) É claro que $\mathrm{Im}(\partial) \subseteq \mathrm{Ker}(u^1)$. Para a recíproca, consideremos uma B-extensão E de C por L no núcleo de u^1, ou seja, que quando considerada como A-extensão por meio de u é A-trivial. Fixando uma A-equivalência, podemos transpor a estrutura de B-extensão de E para $D_C(L)$, de modo que obtemos B-extensões B-equivalentes. Então o homomorfismo de A-álgebras $B \to D_C(L)$ assim obtido é, graças a (1.2.14), da forma $x \mapsto (v(x), D(x))$, sendo $D : B \to L$ uma A-derivação. Isso garante que $[E] = \partial(D)$, de onde concluimos a exatidão em $\mathrm{Exalcom}_B(C, L)$.

3) Seja E uma B-extensão de C por L. Olhando-a como A-extensão via u e considerando o produto fibrado $E \times_C B$ na categoria de A-álgebras, temos que o homomorfismo estrutural $B \to E$ induz um homomorfismo de A-álgebras $B \to E \times_C B$ inverso à direita da aumentação $E \times_C B \to B$. Isso garante que $\mathrm{Im}(u^1) \subseteq \mathrm{Ker}(v^1)$. Por outro lado, se E é uma A-extensão de B por L cuja imagem inversa por v é A-trivial, então uma inversa à direita de $E \times_C B \to B$ dá origem a um homomorfismo de A-álgebras $B \to E$ que permite ver E como B-extensão de C por L, de modo que sua estrutura de A-álgebra induzida por u coincide com a que tínhamos originalmente. Isso prova, portanto, que $\mathrm{Ker}(v^1) \subseteq \mathrm{Im}(u^1)$ e por conseguinte a exatidão em $\mathrm{Exalcom}_A(C, L)$. ▲

Um leitor atento se questionará, em virtude da notação utilizada no teorema acima e da regularidade com que os termos aparecem, se estamos considerando um caso particular de uma teoria de cohomologia para anéis comutativos. A resposta, felizmente, é afirmativa, embora não seja claro, a partir daquilo que fizemos aqui, como obter os grupos de cohomologia subseqüentes. O funtor Exalcom, bem como suas variantes para os casos não-comutativo e topológico, foram introduzidos por Grothendieck e o teorema (1.2.17) é o corolário (20.2.3) de [EGA 0_{IV}], cuja demonstração é a que demos aqui. Em [LS67], Lichtenbaum e Schlessinger definem grupos de cohomologia $T^q(B/A, L)$ para $q \leq 2$ que estendem a seqüência exata (1.2.17.1) para nove termos. No fim dos anos 60, André [And67] e Quillen [Qui68] introduziram, de forma independente e usando métodos simpliciais, grupos de cohomologia $D^q(B/A, L)$ para $q \geq 0$ coincidindo com $\mathrm{Der}_A(B, L)$ e $\mathrm{Exalcom}_A(B, L)$ para $q = 0$ e 1, respectivamente, e estendendo a seqüência exata (1.2.17.1). A cohomologia de André-Quillen, como ficou conhecida essa teoria de cohomologia, está intimamente relacionada com o complexo cotangente, que é um invariante mais fino, e é essencial para o estudo de teoria de deformação. Para um sumário dos principais resultados queira ver [Qui70] e para exposições detalhadas veja [Qui68] e [And74]. Um material introdutório pode ser encontrado em [Iye07] e [Wei94, 8.8]. Em [Ill71], Illusie globaliza o complexo cotangente para um morfismo de anéis em um topos e *a fortiori* para um morfismo de feixes de anéis em um espaço topológico. A seqüência exata (1.2.17.1), no entanto, será suficiente para todos os nossos propósitos, com exceção do teorema (2.3.8) e circunviremos essa dificuldade adicionando hipóteses de separabilidade.

(1.2.18) Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $f : X' \to X$, $g : X \to X''$ dois morfismos em $\mathcal{A}$. Dizer que $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ é um seqüência exata curta cindida é equivalente a dizer que, para todo objeto Y de $\mathcal{A}$,

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X'', Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X', Y) \to 0$$

é uma seqüência exata curta de grupos abelianos. Para ver isso, observe que qualquer funtor aditivo preserva seqüências exatas curtas cindidas e para a recíproca aplique [Wei94, 1.6.11] para concluir que $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ é uma seqüência exata e tome $Y = X'$ para obter uma inversa à esquerda para f.

Teorema **(1.2.19).** — *Sejam* $u : A \to B$, $v : B \to C$ *dois homomorfismos de anéis. Para que a seqüência cotangente relativa local* (1.1.8.1) *seja exata curta cindida, é necessário e suficiente que tenhamos* $\mathrm{Exalcom}_{B/A}(C, L) = 0$ (1.2.11) *para todo* C*-módulo* L.

Demonstração. — Dizer que a seqüência cotangente relativa local é exata curta cindida significa, graças a (1.2.18) e tendo em vista (1.1.6.3), que, para todo C-módulo L, temos uma seqüência exata curta de B-módulos

$$0 \to \mathrm{Der}_B(C, L) \xrightarrow{u^0} \mathrm{Der}_A(C, L) \xrightarrow{v^0} \mathrm{Der}_A(B, L) \to 0.$$

Do teorema (1.2.17), obtemos que isso equivale a dizer que $\mathrm{Ker}(u^1) = \mathrm{Exalcom}_{B/A}(C, L) = 0$ para todo C-módulo L. ▲

Teorema **(1.2.20).** — *Sejam* A *um anel,* B *uma* A*-álgebra e* I *um ideal de* B*. Denotemos por* C *a* A*-álgebra quociente* B/I*, por* v *o homomorfismo canônico* $B \to C$ *e consideremos a seqüência conormal local* (1.1.10.1) *deles obtida*

(1.2.20.1)
$$I/I^2 \xrightarrow{\delta_{C/B/A}} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{v_{C/B/A}} \Omega^1_{C/A} \to 0.$$

(i) *Se* $E = B/I^2$*, então o homomorfismo* $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{E/A} \otimes_E C$*, obtido tensorizando por* C *o homomorfismo canônico* $\Omega^1_{B/A} \otimes_B E \to \Omega^1_{E/A}$ (1.1.6.4)*, é um isomorfismo.*

(ii) *As seguintes condições são equivalentes:*

a) *A seqüência* (1.2.20.1) *é um seqüência exata curta cindida.*

b) *O homomorfismo* $v^1 : \mathrm{Exalcom}_A(C, L) \to \mathrm{Exalcom}_A(B, L)$ (1.2.10) *é injetivo para todo* C*-módulo L.*

c) *A* A*-álgebra* E *é uma extensão* A*-trivial de* C *por* I/I^2.

(iii) *Temos uma correspondência biunívoca entre as inversas à esquerda de* $\delta_{C/B/A}$ *e as inversas à direita do homomorfismo canônico* $E \to C$.

Demonstração. — (i) Seja $I^2/I^4 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B E \to \Omega^1_{E/A} \to 0$ a seqüência conormal local obtida da A-álgebra B e do ideal I^2. Tensorizando por C, considerado como E-álgebra, e identificando $(\Omega^1_{B/A} \otimes_B E) \otimes_E C$ e $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C$, obtemos a seqüência exata

$$I^2/I^4 \otimes_E C \xrightarrow{\delta'} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{E/A} \otimes_E C \to 0.$$

O homomorfismo δ' é nulo, pois se $x, y \in I$ e $\overline{xy}$ é a classe de $xy \bmod I^4$, então $\delta'(\overline{xy} \otimes 1)$ é por definição, $d_{B/A}(xy) \otimes 1 = ((d_{B/A}(x))y + x d_{B/A}(y)) \otimes 1 = 0$. Assim, temos que o homomorfismo $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{E/A} \otimes_E C$ é um isomorfismo, o que prova a nossa assertiva.

(ii) Seja u o homomorfismo estrutural da A-álgebra B. Como v é sobrejetivo, temos $\mathrm{Der}_B(C, L) = 0$ para todo C-módulo L (1.1.1). A seqüência exata (1.2.17.1) se torna, então,

(1.2.20.2) $$0 \to \mathrm{Der}_A(C, L) \xrightarrow{v^0} \mathrm{Der}_A(B, L) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Exalcom}_B(C, L) \xrightarrow{u^1} \\ \xrightarrow{u^1} \mathrm{Exalcom}_A(C, L) \xrightarrow{v^1} \mathrm{Exalcom}_A(B, L).$$

Usando o isomorfismo natural de C-módulos $\eta_L : \mathrm{Hom}_C(I/I^2, L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Exalcom}_B(C, L)$ (1.2.12) e os isomorfismos (1.1.6.1), obtemos de (1.2.20.2) a seqüência exata

(1.2.20.3) $$0 \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, L) \to \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, L) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_C(I/I^2, L) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ker}(v^1) \to 0,$$

sendo φ obtido de $\eta_L^{-1} \circ \partial$ e ψ obtido de $u^1 \circ \eta_L$. Usando as definições de ∂ e η_L, uma verificação direta mostra que φ é exatamente $\mathrm{Hom}(\delta_{C/B/A}, 1_L)$.

A equivalência entre a) e b) segue imediatamente de (1.2.20.3), afinal (1.2.18) garante que (1.2.20.1) é uma seqüência exata curta cindida precisamente quando $\mathrm{Ker}(v^1) = 0$ para todo C-módulo L. O fato de b) implicar c) é simples e basta observar que a imagem inversa de E por v é uma A-extensão trivial. Para provar que c) implica b), considere uma A-extensão E′ de C por L tal que $v^1([E']) = 0$. Da exatidão de (1.2.20.2), obtemos uma B-extensão F de C por L tal que $u^1([F]) = [E']$. Por (1.2.12), existe um homomorfismo de C-módulos $w : I/I^2 \to L$ tal que $[F] = \eta_L(w) = w_1([E])$. Da funtorialidade de Exalcom (1.2.10) obtemos que

$$[E'] = u^1([F]) = u^1(w_1([E])) = w_1(u^1([E])) = w_1(0) = 0$$

e portanto $\mathrm{Ker}(v^1) = 0$.

(iii) Em (1.2.15), provamos que as inversas à direita de $E \to C$ correspondem biunivocamente ao conjunto das A-derivações $D : E \to I/I^2$ que fixam os elementos de I/I^2. Tendo em vista o isomorfismo (1.1.6.1), elas corresponderão também ao conjunto dos homomorfismos de E-módulos $h : \Omega^1_{E/A} \to I/I^2$ tais que $h \circ (d_{E/A})|_{I/I^2} = 1_{I/I^2}$. Por outro lado, como I/I^2 é um C-módulo, podemos obter, usando o par adjunto extensão ⊣ restrição de escalares (1.1.5), uma bijeção em um subconjunto de $\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{E/A} \otimes_E C, I/I^2)$. Por fim, o isomorfismo $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \to \Omega^1_{E/A} \otimes_E C$ obtido em (i) permite que identifiquemos $\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{E/A} \otimes_E C, I/I^2)$ com $\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, I/I^2)$ e o subconjunto anterior corresponderá ao conjunto das inversas à esquerda de $\delta_{C/B/A}$, concluindo assim, a demonstração. ▲

1.3. O complexo de de Rham.

Excepcionalmente nesta seção, as álgebras não serão, em geral, comutativas. No entanto, isso não se estende aos anéis, que continuarão o sendo.

(1.3.1) Seja A um anel. Uma A-álgebra graduada S é dita *anticomutativa* se, para quaisquer elementos homogêneos não-nulos $x, y \in S$, tivermos $xy = (-1)^{\deg(x)\deg(y)} yx$. Se além disso $x^2 = 0$ para todo elemento homogêneo de grau ímpar $x \in S$, então diremos que S é *estritamente anticomutativa*[1]. Vale ressaltar que se A for um *corpo* de característica diferente de 2, então essa segunda condição é supérflua. Os exemplos mais conhecidos de álgebras estritamente anticomutativas são as álgebras exteriores [BouAl, Capítulo III, § 7.3, Corolário 2].

Definição **(1.3.2).** — *Uma* A*-álgebra diferencial graduada é uma* A*-álgebra graduada* S *juntamente com um endomorfismo* $d : S \to S$ *de* A*-módulos graduados de grau* $+1$ *tal que*

[1]Bourbaki chama uma tal álgebra graduada de alternada [BouAl, Capítulo III, § 4.9, Definição 7]

$d \circ d = 0$ e

$$d(xy) = (dx)y + (-1)^{\deg(x)} x\,dy,$$

sendo $x, y \in S$ dois elementos homogêneos não-nulos. Assim, d é ao mesmo tempo a diferencial de um complexo de A-módulos

$$\cdots \to S^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} S^n \xrightarrow{d^n} S^{n+1} \to \cdots \tag{1.3.2.1}$$

e uma A-antiderivação. Um homomorfismo de A-álgebras diferenciais graduadas é um homomorfismo de A-álgebras graduadas compatível com as diferenciais.

(1.3.3) Seja S uma A-álgebra diferencial graduada e denote por $Z^n(S)$ e $H^n(S)$ os n-ésimos módulos de cociclos e cohomologia, respectivamente, do complexo (1.3.2.1). Então a multiplicação em S induz multiplicações em $Z^*(S) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} Z^n(S)$ e $H^*(S) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^n(S)$ fazendo deles A-álgebras graduadas. Se S for (estritamente) anticomutativa, então $Z^*(S)$ e $H^*(S)$ também o serão.

(1.3.4) Sejam B uma A-álgebra comutativa e n um inteiro não-negativo. Chamamos de *módulo de n-diferencias de* B *sobre* A a n-ésima potência exterior do B-módulo $\Omega^1_{B/A}$ e o denotamos por $\Omega^n_{B/A}$. Estes são as componentes homogêneas da álgebra exterior de $\Omega^1_{B/A}$

$$\Omega^\bullet_{B/A} = \bigwedge\nolimits_B(\Omega^1_{B/A}) = \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n_{B/A},$$

que é uma B-álgebra graduada estritamente anticomutativa.

Teorema **(1.3.5).** — *Existe um único endomorfismo d do grupo abeliano $\Omega^\bullet_{B/A}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $d \circ d = 0$.

(ii) *Para todo $f \in B$, temos que $df = d_{B/A}(f)$.*

(iii) *Para todo par de elementos homogêneos $\omega \in \Omega^n_{B/A}$, $\eta \in \Omega^m_{B/A}$, temos*

$$d(\omega\wedge\eta) = (d\omega)\wedge\eta + (-1)^n \omega \wedge d\eta.$$

Além disso, d é um endomorfismo de A-módulos graduados de grau $+1$.

A antiderivação d garantida pelo teorema é também chamada *diferencial exterior de* B *relativa a* A e denotada $d_{B/A}$ e o complexo $(\Omega^\bullet_{B/A}, d_{B/A})$ é chamado *o complexo de de Rham de* B *sobre* A. Mais que isso, $(\Omega^\bullet_{B/A}, d_{B/A})$ é uma A-álgebra diferencial graduada estritamente anticomutativa.

Demonstração. — Provemos, primeiramente, a unicidade. $\Omega^\bullet_{B/A}$ é gerado como grupo abeliano pelos elementos da forma $g d_{B/A}(f_1)\wedge\ldots\wedge d_{B/A}(f_n)$, sendo $g, f_1, \ldots, f_n \in B$. Quando $n = 1$, (iii) garante que $d(g d_{B/A}(f_1)) = dg \wedge d_{B/A}(f_1) + g d(d_{B/A}(f_1))$. Por outro lado, (i) e (ii) asseguram que $d(g d_{B/A}(f_1)) = d_{B/A}(g)\wedge d_{B/A}(f_1)$. Usando indução em n, obtemos a expressão

$$d(g d_{B/A}(f_1)\wedge\ldots\wedge d_{B/A}(f_n)) = d_{B/A}(g)\wedge d_{B/A}(f_1)\wedge\ldots\wedge d_{B/A}(f_n), \tag{1.3.5.1}$$

que determina d unicamente.

Uma vez demonstrada a existência de um endomorfismo de grupos abelianos d satisfazendo (i), (ii) e (iii), (1.3.5.1) garantirá que as últimas assertivas do teorema serão verdadeiras. Façamos, então, isso agora. Em grau 0, (ii) diz que devemos necessariamente ter $d_{B/A} : B \to \Omega^1_{B/A}$. Para defini-la em grau 1, consideremos o *A-módulo* livre F com base

$\{[f] : f \in \mathrm{B}\}$. Da descrição de $\Omega^1_{\mathrm{B/A}}$ por geradores e relações (1.1.6), temos que o epimorfismo de B-módulos $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \to \Omega^1_{\mathrm{B/A}}$ definido por $g \otimes [f] \mapsto g d_{\mathrm{B/A}}(f)$ tem como núcleo o *subgrupo* R de $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{F}$ gerado por

(1.3.5.2)
$$\begin{cases} b \otimes [f+g] - b \otimes [f] - b \otimes [g], \\ b \otimes [fg] - (bg) \otimes [f] - (bf) \otimes [g], \\ b \otimes [\rho(a)], \end{cases}$$

sendo $b, f, g \in \mathrm{B}, a \in \mathrm{A}$ e $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ o homomorfismo estrutural da A-álgebra B. Definimos $\mathrm{B} \times \mathrm{F} \to \Omega^2_{\mathrm{B/A}}$ como sendo a aplicação que leva $(g, [f])$ em $d_{\mathrm{B/A}}(g) \wedge d_{\mathrm{B/A}}(f)$. Essa é uma aplicação A-bilinear e conseqüentemente induz um homomorfismo de A-módulos $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \to \Omega^2_{\mathrm{B/A}}$. Uma verificação simples mostra que esse mapa anula os elementos em (1.3.5.2) e portanto obtemos um homomorfismo de A-módulos $d^1 : \Omega^1_{\mathrm{B/A}} \to \Omega^2_{\mathrm{B/A}}$ levando $g d_{\mathrm{B/A}}(f)$ em $d_{\mathrm{B/A}}(g) \wedge d_{\mathrm{B/A}}(f)$.

Definiremos agora as diferenciais $d^n : \Omega^n_{\mathrm{B/A}} \to \Omega^{n+1}_{\mathrm{B/A}}$ de grau $n > 1$. Inicialmente observe que temos uma aplicação A-multilinear alternada $\delta : \Omega^1_{\mathrm{B/A}} \times \ldots \times \Omega^1_{\mathrm{B/A}} \to \Omega^{n_1}_{\mathrm{B/A}}$ definida por

$$(\omega_1, \ldots, \omega_1) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \ldots \wedge d^1 \omega_i \wedge \ldots \wedge \omega_n,$$

de onde obtemos um homomorfismo de A-módulos $\bar{\delta} : \Omega^1_{\mathrm{B/A}} \otimes_{\mathrm{A}} \ldots \otimes_{\mathrm{A}} \Omega^1_{\mathrm{B/A}} \to \Omega^{n+1}_{\mathrm{B/A}}$. Por outro lado, temos epimorfismos de A-módulos

$$(\Omega^1_{\mathrm{B/A}})^{\otimes_{\mathrm{A}} n} \to (\Omega^1_{\mathrm{B/A}})^{\otimes_{\mathrm{B}} n} \to \Omega^n_{\mathrm{B/A}},$$

sendo que o primeiro leva $\omega_1 \otimes_{\mathrm{A}} \ldots \otimes_{\mathrm{A}} \omega_n$ em $\omega_1 \otimes_{\mathrm{B}} \ldots \otimes_{\mathrm{B}} \omega_n$ e o segundo leva $\omega_1 \otimes_{\mathrm{B}} \ldots \otimes_{\mathrm{B}} \omega_n$ em $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$. Por construção, o núcleo desse epimorfismo é o *subgrupo* de $(\Omega^1_{\mathrm{B/A}})^{\otimes_{\mathrm{A}} n}$ gerado por

(1.3.5.3)
$$\begin{cases} \omega_1 \otimes \ldots \otimes f\omega_i \otimes \ldots \otimes \omega_n - \omega_1 \otimes \ldots \otimes f\omega_j \otimes \ldots \otimes \omega_n, \text{para todos } i, j, \\ (f\omega_1) \otimes \omega_2 \otimes \ldots \otimes \omega_n, \text{onde } \omega_i = \omega_j \text{para algum } i \neq j, \end{cases}$$

sendo $f \in \mathrm{B}$ e $\omega_1 \ldots \omega_n \in \Omega^1_{\mathrm{B/A}}$. Uma verificação direta mostra que $\bar{\delta}$ anula os elementos em (1.3.5.3) e portanto obtemos um homomorfismo de A-módulos $d^n : \Omega^n_{\mathrm{B/A}} \to \Omega^{n+1}_{\mathrm{B/A}}$ levando $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ em

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \omega_1 \wedge \ldots \wedge d^1 \omega_i \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Se considerarmos $\omega_1 = g d_{\mathrm{B/A}}(f_1)$ e $\omega_i = d_{\mathrm{B/A}}(f_i)\ (2 \leq i \leq n)$, sendo $g, f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{B}$, então obteremos a equação (1.3.5.1) e não é difícil, agora, verificar que $d : \Omega^\bullet_{\mathrm{B/A}} \to \Omega^\bullet_{\mathrm{B/A}}$, provindo dos $d^n (n \geq 0)$, satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) do teorema. ▲

Proposição **(1.3.6)**. — *Sejam* A *um anel,* B *uma* A*-álgebra comutativa e* (S, d) *uma* A*-álgebra diferencial graduada estritamente anticomutativa. Então um homomorfismo de* A*-álgebras comutativas* $u : \mathrm{B} \to \mathrm{S}^0$ *se prolonga de maneira única para um homomorfismo* $\tilde{u} : \Omega^\bullet_{\mathrm{B/A}} \to \mathrm{S}$ *de* A*-álgebras diferenciais graduadas.*

Demonstração. — A unicidade é clara, pois $\Omega^\bullet_{\mathrm{B/A}}$ é gerado como grupo abeliano pelos elementos da forma $g d_{\mathrm{B/A}}(f_1) \wedge \ldots \wedge d_{\mathrm{B/A}}(f_n)$, sendo $g, f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{B}$, e nestes devemos necessariamente ter

$$\tilde{u}(g d_{\mathrm{B/A}}(f_1) \wedge \ldots \wedge d_{\mathrm{B/A}}(f_n)) = u(g) d(u(f_1)) \ldots d(u(f_n)).$$

Para a existência, olhemos S como uma B-álgebra graduada através de $u : \mathrm{B} \to \mathrm{S}^0$. Deste modo, obtemos uma A-derivação $d \circ u : \mathrm{B} \to \mathrm{S}^1$ que induz, graças a (1.1.6.1), um homomorfismo de B-módulos $\bar{u} : \Omega^1_{\mathrm{B/A}} \to \mathrm{S}^1$. Como S é uma A-álgebra graduada estritamente anticomutativa, a propriedade universal da álgebra exterior permite que estendamos o homomorfismo de B-módulos $\Omega^1_{\mathrm{B/A}} \to \mathrm{S}$, obtido compondo $\bar{u}$ com a inclusão $\mathrm{S}^1 \hookrightarrow \mathrm{S}$, para um homomorfismo de B-álgebras graduadas $\tilde{u} : \Omega^\bullet_{\mathrm{B/A}} \to \mathrm{S}$. Segue da construção que $\tilde{u}$ prolonga u e não é difícil verificar que ele é um homomorfismo de A-álgebras diferenciais graduadas. ▲

(1.3.7) A proposição (1.3.6) garante que a construção do complexo de de Rham é funtorial. De fato, consideremos um diagrama comutativo de homomorfismos de anéis

(1.3.7.1)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r] & \mathrm{B} \\ \mathrm{A}' \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{B}' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

O homomorfismo $\mathrm{A}' \to \mathrm{A}$ permite que olhemos $\Omega^\bullet_{\mathrm{B/A}}$ como A'-álgebra diferencial graduada estritamente anticomutativa e então o homomorfismo de A'-álgebras comutativas $\mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ dá origem a um homomorfismo

(1.3.7.2)
$$\Omega^\bullet_{\mathrm{B}'/\mathrm{A}'} \to \Omega^\bullet_{\mathrm{B/A}}$$

de A'-álgebras diferenciais graduadas. Se denotarmos por $\mathbf{dgAlg}(\mathrm{A})$ a categoria de A-álgebras diferenciais graduadas estritamente anticomutativas e por $\mathbf{CAlg}(\mathrm{A})$ a categoria de A-álgebras comutativas, podemos reenunciar (1.3.6) do seguinte modo: o funtor $\Omega^\bullet_{(\cdot)/\mathrm{A}} : \mathbf{CAlg}(\mathrm{A}) \to \mathbf{dgAlg}(\mathrm{A})$ é o adjunto à esquerda do funtor $(\cdot)^0 : \mathbf{dgAlg}(\mathrm{A}) \to \mathbf{CAlg}(\mathrm{A})$ que leva uma A-álgebra diferencial graduada na sua componente homogênea de grau 0.

(1.3.8) No que segue precisaremos de alguns resultados sobre feixes de álgebras exteriores. Infelizmente, as referências tradicionais não abordam o tópico de maneira compreensiva. Um tal tratamento, porém, pode ser encontrado nas notas [Mur06]. Uma alternativa seria adaptar os fatos análogos para feixes de álgebras simétricas de [EGA II, 1.7.4–1.7.7]. Para a comodidade do leitor, compilaremos aqui o que virá a ser utilizado.

Sejam X um espaço topológico, $\mathscr{A}$ um feixe de anéis e $\mathscr{F}$ um $\mathscr{A}$-módulo. Associando a um aberto U de X a álgebra exterior $\bigwedge_{\mathscr{A}(\mathrm{U})}(\mathscr{F}(\mathrm{U}))$ de $\mathscr{F}(\mathrm{U})$ obtemos, graças à sua funtorialidade, um pré-feixe de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas estritamente anticomutativas (1.3.1). O feixe associado, denotado $\bigwedge_{\mathscr{A}}(\mathscr{F})$, é chamado a ***álgebra exterior de*** $\mathscr{F}$. É imediato do caso local que $\bigwedge_{\mathscr{A}}(\mathscr{F})$ tem a seguinte propriedade universal: se $\mathscr{S}$ é um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas estritamente anticomutativas e $u : \mathscr{F} \to \mathscr{S}$ é um morfismo de $\mathscr{A}$-módulos que se fatora através de $\mathscr{S}^1 \hookrightarrow \mathscr{S}$, então existe um único morfismo de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas $\tilde{u} : \bigwedge_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{S}$ tal que $\tilde{u}|_{\mathscr{F}} = u$.

É claro da definição que, para um aberto U de X, temos um isomorfismo natural $\bigwedge_{\mathscr{A}|_{\mathrm{U}}}(\mathscr{F}|_{\mathrm{U}}) \xrightarrow{\sim} (\bigwedge_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}))|_{\mathrm{U}}$ de feixes de $\mathscr{A}|_{\mathrm{U}}$-álgebras graduadas. Usando que a álgebra exterior comuta com colimites filtrados [BouAl, Capítulo III, §7.8, Proposição 9], obtemos também, para todo ponto $x \in \mathrm{X}$, um isomorfismo natural $\bigwedge_{\mathscr{A}_x}(\mathscr{F}_x) \xrightarrow{\sim} (\bigwedge_{\mathscr{A}}(\mathscr{F}))_x$ de $\mathscr{A}_x$-álgebras graduadas.

Quando considerarmos um $\mathscr{A}$-módulo localmente livre (resp. localmente livre de tipo finito), então tanto $\bigwedge_{\mathscr{A}}(\mathscr{F})$ quanto $\bigwedge^i_{\mathscr{A}}(\mathscr{F})$, para todo $i \geq 0$, serão $\mathscr{A}$-módulos localmente livres (resp. localmente livres de tipo finito). Se $\mathscr{F}$ tiver posto n, então $\bigwedge_{\mathscr{A}}(\mathscr{F})$ e $\bigwedge^i_{\mathscr{A}}(\mathscr{F})$ terão postos 2^n e $\binom{n}{i}$, respectivamente.

Se $f : X \to Y$ é um morfismo de espaços anelados e $\mathscr{G}$ é um $\mathscr{O}_Y$-módulo, então a propriedade universal da álgebra exterior garante a existência de um morfismo de feixes de $\mathscr{O}_X$-álgebras graduadas $\bigwedge_{\mathscr{O}_X}(f^*(\mathscr{G})) \to f^*(\bigwedge_{\mathscr{O}_Y}(\mathscr{G}))$. Olhando nos talos e usando que a álgebra exterior comuta com extensões de escalares [BouAl, Capítulo III, § 7.5, Proposição 8], concluímos que ele é um isomorfismo.

Por fim, se $X = \mathrm{Spec}(A)$ é um esquema afim e M é um A-módulo, então o fato da álgebra exterior comutar com extensões de escalares permite concluir também que existe um isomorfismo natural $\bigwedge_{\mathscr{O}_X}(\widetilde{M}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\bigwedge_A(M)}$ de feixes de $\mathscr{O}_X$-álgebras graduadas.

Queremos agora globalizar o complexo de de Rham para morfismos de esquemas. Como no caso do módulo de diferenciais, será mais simples considerar inicialmente a sua globalização para um feixe de álgebras comutativas qualquer.

Definição **(1.3.9)**. — *Seja $\mathscr{A}$ um feixe de anéis em um espaço topológico* X. *Um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas é um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas $\mathscr{S}$ juntamente com um endomorfismo $d : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ de feixes de $\mathscr{A}$-módulos graduados de grau $+1$ tal que $d \circ d = 0$ e*

$$d(xy) = (dx)y + (-1)^n x dy,$$

para todo aberto U *de* X *e seções $x \in \mathscr{S}^n(U)$, $y \in \mathscr{S}^m(U)$. Assim, d é ao mesmo tempo a diferencial de um complexo de feixes de $\mathscr{A}$-módulos*

(1.3.9.1) $$\cdots \to \mathscr{S}^{n-1} \to \mathscr{S}^n \to \mathscr{S}^{n+1} \to \cdots$$

e uma $\mathscr{A}$-antiderivação. Um morfismo de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas é um morfismo de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas compatível com as diferenciais.

Observe que um par $(\mathscr{S}, d)$, sendo $\mathscr{S}$ um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas e $d : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ um endomorfismo de feixes de conjuntos, é um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas se, e somente se, $(\mathscr{S}_x, d_x)$ é uma $\mathscr{A}_x$-álgebra diferencial graduada para todo $x \in X$.

(1.3.10) Seja $\mathscr{S}$ um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas e denote por $\mathscr{Z}^n(\mathscr{S})$ e $\mathscr{H}^n(\mathscr{S})$ os n-ésimos feixes de cociclos e de cohomologia, respectivamente, do complexo (1.3.9.1). Então a estrutura multiplicativa de $\mathscr{S}$ induz estruturas multiplicativas em $\mathscr{Z}^*(\mathscr{S}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{Z}^n(\mathscr{S})$ e $\mathscr{H}^*(\mathscr{S}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{H}^n(\mathscr{S})$ fazendo deles feixes de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas. A maneira mais simples de justificar isso é a seguinte: observe que, apesar da igualdade $\mathscr{S}(U) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{S}^n(U)$ não ser, em geral, verdadeira para um aberto U de X, a estrutura de feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas de $\mathscr{S}$ induz uma estrutura de $\mathscr{A}(U)$-álgebra diferencial graduada em $S_U = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathscr{S}^n(U)$, de modo que o complexo daí obtido coincide com o complexo que conseguimos de (1.3.9.1) aplicando o funtor $\Gamma(U, \cdot)$. Agora note que $\mathscr{Z}^*(\mathscr{S})$ e $\mathscr{H}^*(\mathscr{S})$ são obtidos feixeficando os pré-feixes de $\mathscr{A}$-álgebras graduadas $U \mapsto Z^*(S_U)$ e $U \mapsto H^*(S_U)$ (1.3.3), respectivamente.

Se além disso, $\mathscr{S}$ for um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras (estritamente) anticomutativas, então $\mathscr{Z}^*(\mathscr{S})$ e $\mathscr{H}^*(\mathscr{S})$ também o serão.

(1.3.11) Sejam $\mathscr{B}$ um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras comutativas e n um inteiro não-negativo. Chamamos de *módulo de n-diferenciais de $\mathscr{B}$ sobre $\mathscr{A}$* a n-ésima potência exterior do $\mathscr{B}$-módulo $\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ e o denotamos por $\Omega^n_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$. Estes são as componentes homogêneas do feixe de álgebras exteriores de $\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$

$$\Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} = \bigwedge\nolimits_{\mathscr{B}}(\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Omega^n_{\mathscr{B}/\mathscr{A}},$$

que é um feixe de $\mathscr{B}$-álgebras graduadas estritamente anticomutativas. As propriedades de feixes de álgebras exteriores (1.3.8) combinadas com (1.1.25, (ii)) garantem que temos, para todo ponto $x \in \mathrm{X}$, um isomorfismo natural

(1.3.11.1) $$\Omega^\bullet_{\mathscr{B}_x/\mathscr{A}_x} \xrightarrow{\sim} (\Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})_x$$

de $\mathscr{B}_x$-álgebras graduadas. De maneira semelhante, combinando-as com (1.1.25, (i)), temos assegurada a existência de um isomorfismo natural

(1.3.11.2) $$\Omega^\bullet_{\mathscr{B}|_\mathrm{U}/\mathscr{A}|_\mathrm{U}} \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})|_\mathrm{U}$$

de feixes de $\mathscr{B}|_\mathrm{U}$-álgebras graduadas para todo aberto U de X.

Dados abertos $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$ de X, temos um diagrama comutativo de homomorfismos de anéis

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}(\mathrm{V}) \arrow[r] & \mathscr{B}(\mathrm{V}) \\ \mathscr{A}(\mathrm{U}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{B}(\mathrm{U}) \arrow[u] \end{tikzcd},$$

que induz um homomorfismo de $\mathscr{A}(\mathrm{U})$-álgebras diferenciais graduadas $\Omega^\bullet_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})} \to \Omega^\bullet_{\mathscr{B}(\mathrm{V})/\mathscr{A}(\mathrm{V})}$, sendo $\Omega^\bullet_{\mathscr{B}(\mathrm{V})/\mathscr{A}(\mathrm{V})}$ considerada como $\mathscr{A}(\mathrm{U})$-álgebra diferencial graduada através de $\mathscr{A}(\mathrm{U}) \to \mathscr{A}(\mathrm{V})$. Estes definem os mapas de restrição de um pré-feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas

(1.3.11.3) $$\mathrm{U} \mapsto \Omega^\bullet_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})}.$$

Visto que $\Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ é, como feixe de $\mathscr{B}$-álgebras graduadas, a feixeficação de (1.3.11.3), obtemos a partir das diferenciais exteriores $d_{\mathscr{B}(\mathrm{U})/\mathscr{A}(\mathrm{U})}$ um endomorfismo de $\mathscr{A}$-módulos $d_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} : \Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} \to \Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$, também chamado a diferencial exterior de $\mathscr{B}$ relativa a $\mathscr{A}$, e um argumento direto usando os talos dos feixes mostra que $(\Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}, d_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})$ é um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas e que temos unicidade para $d_{\mathscr{B}/\mathscr{A}}$ sob hipóteses semelhantes às do teorema (1.3.5). Estas unicidades garantem que os isomorfismos (1.3.11.1) e (1.3.11.2) são compatíveis com as diferenciais.

Proposição **(1.3.12).** — *Sejam $\mathscr{A}$ um feixe de anéis, $\mathscr{B}$ um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras comutativas e $(\mathscr{S}, d)$ um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas estritamente anticomutativas. Então um morfismo de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras comutativas $u : \mathscr{B} \to \mathscr{S}^0$ se prolonga de maneira única para um morfismo $\tilde{u} : \Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}} \to \mathscr{S}$ de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas.*

Demonstração. — A unicidade segue imediatamente de (1.3.6) usando os isomorfismos $\Omega^\bullet_{\mathscr{B}_x/\mathscr{A}_x} \xrightarrow{\sim} (\Omega^\bullet_{\mathscr{B}/\mathscr{A}})_x$ de $\mathscr{A}_x$-álgebras diferenciais graduadas (1.3.11.1). Para a existência, procedemos como em (1.3.6) e novamente os usamos para justificar que $\tilde{u}$ é um morfismo de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas. ▲

(1.3.13) Como no caso local (1.3.7), a proposição (1.3.12) garante que a globalização do complexo de de Rham é funtorial e se denotarmos por $\mathbf{dgAlg}(\mathscr{A})$ a categoria de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas estritamente anticomutativas, então podemos reenunciá-la dizendo que o funtor $\Omega^\bullet_{(\cdot)/\mathscr{A}} : \mathbf{CAlg}(\mathscr{A}) \to \mathbf{dgAlg}(\mathscr{A})$ é o adjunto à esquerda do funtor $(\cdot)^0 : \mathbf{dgAlg}(\mathscr{A}) \to \mathbf{CAlg}(\mathscr{A})$ que leva um feixe de $\mathscr{A}$-álgebras diferenciais graduadas na sua componente homogênea de grau 0.

Definição **(1.3.14).** — *Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo de espaços anelados. Definimos o complexo de de Rham de* X *sobre* Y *como sendo o feixe de $f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y})$-álgebras diferenciais graduadas $(\Omega^\bullet_{\mathscr{O}_\mathrm{X}/f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y})}, d_{\mathscr{O}_\mathrm{X}/f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y})})$ obtido a partir do morfismo de feixes de anéis $f^\# : f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y}) \to \mathscr{O}_\mathrm{X}$*

(1.3.11). *Aqui utilizaremos as notações mais econômicas* $\Omega^\bullet_{X/Y}$ *e* $d_{X/Y}$ *em vez de* $\Omega^\bullet_{\mathscr{O}_X/f^{-1}(\mathscr{O}_Y)}$ *e* $d_{\mathscr{O}_X/f^{-1}(\mathscr{O}_Y)}$, *respectivamente. Diremos também que* $d_{X/Y}$ *é a diferencial exterior de* X *relativa a* Y *e quando* $Y = \operatorname{Spec}(A)$ *for um esquema afim, denotaremos* $\Omega^\bullet_{X/Y}$ *simplesmente por* $\Omega^\bullet_{X/A}$.

(1.3.15) Consideremos um diagrama comutativo de morfismos de espaços anelados

(1.3.15.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' \arrow[r, "f'"'] & Y'. \end{tikzcd}$$

Então existe um único morfismo de feixes de $(f')^{-1}(\mathscr{O}_{Y'})$-álgebras

(1.3.15.2)
$$s_g : \Omega^\bullet_{X'/Y'} \to g_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$$

estendendo $g^\flat : \mathscr{O}_{X'} \to g_*(\mathscr{O}_X)$ e compatível com as diferenciais exteriores, ou seja, para todo $n \geq 0$, s_g leva $\Omega^n_{X'/Y'}$ em $g_*(\Omega^n_{X/Y})$, de modo que obtemos um morfismo de complexos. De fato, primeiro observe que $\Omega^\bullet_{X/Y}$ induz em $\bigoplus_{n\geq 0} g_*(\Omega^n_{X/Y})$ uma estrutura de feixe de $(f')^{-1}(\mathscr{O}_{Y'})$-álgebras diferenciais graduadas estritamente anticomutativas, de forma que o monomorfismo[1] canônico $\varphi : \bigoplus_{n\geq 0} g_*(\Omega^n_{X/Y}) \to g_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ é um morfismo de feixes de $(f')^{-1}(\mathscr{O}_{Y'})$-álgebras compatível com as estruturas de complexos. Agora aplicamos (1.3.12) usando o morfismo $g^\flat : \mathscr{O}_{X'} \to g_*(\mathscr{O}_X)$ para obter um morfismo de feixes de $(f')^{-1}(\mathscr{O}_{Y'})$-álgebras diferenciais graduadas $\Omega^\bullet_{X'/Y'} \to \bigoplus_{n\geq 0} g_*(\Omega^n_{X/Y})$ e tomamos como s_g a sua composição com φ. Para a unicidade, basta aplicar (1.3.12), uma vez que um morfismo satisfazendo as condições acima se fatora através de φ.

Se tivermos um outro diagrama comutativo de morfismos de espaços anelados

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "h'"] \\ X'' \arrow[r, "f''"'] & Y'', \end{tikzcd}$$

então teremos, como em (1.1.30), $s_{g'\circ g} = g'_*(s_g) \circ s_{g'}$.

(1.3.16) Sejam $f : X \to Y$ um morfismo de espaços anelados, U, V subconjuntos abertos de X, Y, respectivamente, com $f(U) \subseteq V$. Então usando (1.3.11.2) e argumentando como em (1.1.31), obtemos um isomorfismo natural $\Omega^\bullet_{U/V} \xrightarrow{\sim} (\Omega^\bullet_{X/Y})|_V$ de feixes de álgebras diferenciais graduadas.

Quando $X = \operatorname{Spec}(B)$, $Y = \operatorname{Spec}(A)$ são esquemas afins e f é um morfismo de esquemas, obtemos, combinando (1.1.34) e (1.3.8), um isomorfismo natural $\Omega^\bullet_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Omega^\bullet_{B/A}}$ de $\mathscr{O}_X$-álgebras graduadas, que nos permite transpor a diferencial de $\Omega^\bullet_{X/Y}$ para $\widetilde{\Omega^\bullet_{B/A}}$. Tomando seções

[1]Se $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ é uma família qualquer de $\mathscr{O}_X$-módulos, então o morfismo canônico $\bigoplus_{i\in I} g_*(\mathscr{F}_i) \to g_*(\bigoplus_{i\in I} \mathscr{F}_i)$ é sempre um monomorfismo. Uma justificativa elegante é a seguinte: a categoria de feixes de módulos é cocompleta e seus colimites filtrados são exatos (ou, seguindo a terminologia de Grothendieck em [Tohoku, 1.5], satisfaz o axioma (AB5)). Se considerarmos um subconjunto finito $J \subseteq I$, teremos, do fato de g_* ser um funtor exato à esquerda, que $\bigoplus_{j\in J} g_*(\mathscr{F}_j) \to g_*(\bigoplus_{i\in I} \mathscr{F}_i)$ é um monomorfismo. O resultado segue daí, pois $\bigoplus_{i\in I} g_*(\mathscr{F}_i) = \varinjlim_{J} \bigoplus_{j\in J} g_*(\mathscr{F}_j)$, onde J percorre os subconjuntos finitos de I.

globais, temos uma nova diferencial em $\Omega^\bullet_{B/A}$ e resulta da unicidade estabelecida em (1.3.5) que ela coincide com $d_{B/A}$.

§ 2. MORFISMOS SUAVES, NÃO-RAMIFICADOS E ÉTALES

Neste parágrafo, discutimos as principais propriedades de morfismos suaves, não-ramificados e étales. Se $f : X \to Y$ for um morfismo entre variedades regulares sobre um corpo algebricamente fechado, então ele será suave (resp. não-ramificado, resp. étale) se, e somente se, para todo ponto fechado $x \in X$, tivermos que a aplicação induzida entre os espaços tangentes de Zariski $T_x X \to T_{f(x)} Y$ for sobrejetiva (resp. injetiva, resp. bijetiva). Assim, pelo menos nessa situação particular, temos a mesma definição de submersões, imersões e, em vista do teorema da aplicação inversa, difeomorfismos locais dada em geometria diferencial. No entanto, a topologia de Zariski não é suficientemente fina para obtermos conseqüências semelhantes àquelas do contexto diferencial. Por exemplo, se k é um corpo e n não divide a sua característica, então o morfismo $\mathbf{A}^1_k \to \mathbf{A}^1_k$ dado por $x \mapsto x^n$ é étale exceto na origem, mas se $n > 1$ ele não é um isomorfismo local em ponto algum. Uma maneira de solucionar essa deficiência é considerar a categoria de esquemas com a topologia étale, que não é uma topologia usual determinada por subconjuntos, mas uma topologia de Grothendieck determinada por coberturas. *Grosso modo*, um morfismo étale cuja imagem contém, digamos, um ponto x, faz o papel de uma vizinhança aberta de x. Assim, em vizinhanças étales apropriadas, podemos ver morfismos não-ramificados como imersões fechadas e morfismos étales como imersões abertas. Para o enunciado preciso queira ver [EGA IV_4, 18.4.8]. Além disso, nesse quadro de idéias, morfismos suaves podem ser vistos localmente como projeções do espaço afim (2.1.33).

Existem inúmeras maneiras de se introduzir morfismos suaves. Aqui seguiremos a abordagem de [EGA IV_4, § 17], onde a suavidade é definida por uma condição de finitude apropriada e pela existência local de prolongamentos infinitesimais, encapsulada na definição de morfismos formalmente suaves. Estes últimos serão o principal tópico de estudo da seção 2.1. Após as primeiras definições e exemplos, mostraremos que eles estão intimamente relacionados com extensões de álgebras (2.1.7). Em seguida, veremos que essa é uma condição local no domínio e no contradomínio (2.1.8). Por incrível que isso possa parecer, essa será uma tarefa extremamente não-trivial. Os ingredientes serão dois: primeiramente, na proposição (2.1.21), interpretaremos o problema de prolongamentos infinitesimais usando torsores, cujas definições e propriedades básicas compilamos aqui. O segundo é o teorema de Raynaud-Gruson (2.1.23), que nos limitamos a dar o seu enunciado. Munidos destes dois, seguindo [Stacks, Tag 061K], obteremos em (2.1.29) a conclusão almejada. A partir daí, para provar resultados sobre morfismos formalmente suaves, poderemos sempre nos restringir ao caso local e os teoremas (1.2.19) e (1.2.20) se mostrarão de grande valia. Veja, por exemplo, a proposição (2.1.30), que é o ponto de ligação entre a definição de morfismos suaves que demos aqui e aquela que utiliza o critério jacobiano (2.1.35). Referências para a parte local descrita nesta seção são [EGA 0_{IV}, § 19], [Stacks, Tags 00TH, 00UM e 00UP] e [Mat86, § 25]. Para o ponto de vista global veja [EGA IV_4, § 17], [Ill04, Capítulo 3, §§ 2 e 4], [Ill96, nº 2], [Stacks, Tags 02GZ, 02H7 e 02HF] e [SGA 1, Exposé III].

Na seção 2.2, seguindo [Ill04, Capítulo III, § 3], veremos que as fibras de um morfismo suave são esquemas regulares. No entanto, não é verdade que uma variedade regular tenha morfismo estrutural suave, fenômeno este que, de acordo com o teorema (2.2.3), só pode ocorrer se o corpo não for perfeito e, em particular, não se manifesta em característica 0. Em seguida, no teorema (2.2.5), provaremos que todo morfismo suave é plano. Além disso, veremos que, para um morfismo plano localmente de apresentação finita, o fato de ser suave é uma propriedade de suas fibras. Esse é um resultado de extrema importância e garante, entre outros, que um morfismo suave é aberto, uma propriedade compartilhada por submersões em geometria diferencial. A maior dificuldade será obter um critério de platitude conveniente. Depois estudaremos a relação entre morfismos suaves e dimensão relativa. Esta última é definida como a dimensão da fibra $X_{f(x)}$ no ponto x (2.2.16) e *a priori* não está relacionada com o módulo de 1-diferenciais. Sob hipóteses de suavidade, mostraremos que ela coincide com a dimensão do $k(x)$-espaço vetorial $\Omega^1_{X/Y}(x)$ (2.2.17) e que esta propriedade caracteriza morfismos suaves dentre os que são planos e localmente de apresentação finita (2.2.18). Por fim, relembramos a definição e as propriedades básicas de morfismos radiciais, que no contexto de esquemas coincidem com morfismos universalmente injetivos, para obter caracterizações de monomorfismos localmente de apresentação finita e imersões abertas que serão importantes no estudo de morfismos de Frobenius na seção 3.1. Outras referências incluem [EGA IV_4, § 17], [BLR90, 2.2 e 2.4], [Bos13, Capítulo 8], que pode ser visto como uma versão expandida da anterior, e [SGA 1, Exposés I e II].

Na seção 2.3, estudamos levantamentos de esquemas, por vezes chamados de deformações. Veremos no teorema (2.3.8) que, embora eles sempre existam localmente, há uma obstrução cohomológica para a existência de um levantamento global. Por falta de ferramentas adequadas, só o provaremos sob hipóteses de separabilidade, pois, nesse caso, temos ao nosso dispor o teorema de Leray (4.1.38, (ii)) para comparar a cohomologia do funtor derivado com a cohomologia de Čech de uma cobertura. Seguiremos de perto [Ill04, Capítulo III, § 4] e [SGA 1, Exposé III, nº 6]. Outras referências são [Ill71, Capítulo III, nº 2], [Har10, § 10] e [Ser06, 1.2.5].

2.1. Propriedades diferenciais gerais.

(2.1.1) Diremos que um morfismo de esquemas $i : T_0 \to T$ é um *espessamento de ordem finita* se i for uma imersão fechada definida por um ideal nilpotente $\mathscr{I}$. Quando tivermos $\mathscr{I}^{n+1} = 0$ para um inteiro não-negativo n, chamaremos i de *espessamento de ordem* n. Se $n \geq 1$ e denotarmos por T_m o subesquema fechado de T determinado por $\mathscr{I}^{m+1}$, então i se fatorará em uma seqüência de espessamentos de ordem 1

(2.1.1.1) $$T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_m \to T_{m+1} \to \cdots \to T_n = T.$$

Vale salientar que um espessamento de ordem n é sempre um homeomorfismo e portanto podemos considerar T_0 e T como tendo o mesmo espaço topológico subjacente.

Proposição **(2.1.2)**. — *Seja* $i : T_0 \to T$ *um espessamento de ordem finita. Então, para que* T_0 *seja um esquema afim, é necessário e suficiente que* T *o seja.*

Mais geralmente, para que esta proposição seja válida, basta supor que i seja inteiro e sobrejetivo, mas a demonstração é mais difícil [Stacks, Tag 05YU].

Demonstração. — A condição é claramente suficiente. Para a necessidade, observe que, em virtude da fatoração (2.1.1.1), podemos supor que i é um espessamento de ordem 1. Usaremos o critério de Serre [Stacks, Tag 01XF] para mostrar que T é um esquema afim. Primeiramente, note que, como i é um homeomorfismo, T é quase-compacto. Se $\mathscr{F}$ é um $\mathscr{O}_T$-módulo quase-coerente e $\mathscr{I}$ é o ideal de i, então obtemos da seqüência exata curta

$0 \to \mathscr{I}\mathscr{F} \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{I}\mathscr{F} \to 0$ uma seqüência exata de cohomologias

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{T}, \mathscr{I}\mathscr{F}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{T}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^1(\mathrm{T}, \mathscr{F}/\mathscr{I}\mathscr{F}).$$

Como $\mathscr{I}(\mathscr{I}\mathscr{F}) = \mathscr{I}(\mathscr{F}/\mathscr{I}\mathscr{F}) = 0$, concluímos de (1.1.39) que existem $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$-módulos quase-coerentes $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ tais que $i_*(\mathscr{G}) \cong \mathscr{I}\mathscr{F}$ e $i_*(\mathscr{H}) \cong \mathscr{F}/\mathscr{I}\mathscr{F}$. Assim, da hipótese de T_0 ser afim, temos que $\mathrm{H}^1(\mathrm{T}, \mathscr{I}\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{T}_0, \mathscr{G}) = 0$ e $\mathrm{H}^1(\mathrm{T}, \mathscr{F}/\mathscr{I}\mathscr{F}) \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{T}_0, \mathscr{H}) = 0$ e portanto $\mathrm{H}^1(\mathrm{T}, \mathscr{F}) = 0$, de onde segue o resultado. ▲

Definição **(2.1.3).** — *Um morfismo de esquemas $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ é dito formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale) se, para todo diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{T} \arrow[r] & \mathrm{Y}, \end{tikzcd}$$

onde i é um espessamento de ordem finita entre esquemas afins, existe um (resp. no máximo um, resp. um único) Y-morfismo $g: \mathrm{T} \to \mathrm{X}$ tal que $g \circ i = g_0$.

Diremos que uma A-álgebra B é *formalmente suave* (resp. *formalmente não-ramificada*, resp. *formalmente étale*) se o morfismo correspondente $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ for formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale). Observe que, nesse caso, podemos fazer toda a verificação na categoria de anéis. Explicitamente, B é uma A-álgebra formalmente suave (resp. formalmente não-ramificada, resp. formalmente étale) se, e somente se, para toda A-álgebra C, todo ideal nilpotente I de C e todo homomorfismo de A-álgebras $u_0: \mathrm{B} \to \mathrm{C}/\mathrm{I}$ existe um (resp. no máximo um, resp. um único) homomorfismo de A-álgebras $u: \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ tal que u_0 é a composição $\mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{C}/\mathrm{I}$.

Observações **(2.1.4).** — (i) Podemos expressar o fato de um morfismo de esquemas $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ ser formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale) usando apenas o funtor representável contravariante $h_{\mathrm{X}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\cdot, \mathrm{X}): \mathbf{Sch}_{/\mathrm{Y}} \to \mathbf{Sets}$, sendo $\mathbf{Sch}_{/\mathrm{Y}}$ a categoria de esquemas sobre Y, por ele determinado. Nessa linguagem, o que requeremos é que h_{X} leve espessamentos de ordem finita entre esquemas afins sobre Y em aplicações sobrejetivas (resp. injetivas, resp. bijetivas) e portanto podemos estender essa definição para um funtor contravariante arbitrário de $\mathbf{Sch}_{/\mathrm{Y}}$ em **Sets**.

(ii) A fatoração de um espessamento de ordem $n \geq 1$ descrita em (2.1.1.1) permite concluir que, para verificar que um morfismo de esquemas é formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale), basta considerar em (2.1.3) espessamentos de ordem 1.

(iii) Morfismos formalmente não-ramificados e formalmente étales satisfazem, graças às unicidades requeridas, a condição da definição (2.1.3) para um espessamento de ordem finita entre esquemas não necessariamente afins. No entanto, no caso de um morfismo formalmente suave, existe uma obstrução cohomológica para a existência de um prolongamento global g de g_0 (2.1.21, (ii)).

(iv) É simples verificar que a classe de morfismos formalmente suaves (resp. formalmente não-ramificados, resp. formalmente étales) é estável por composição e mudança de base.

(v) Sejam $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}, g: \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ dois morfismos de esquemas. Um argumento direto mostra que se $g \circ f$ é formalmente não-ramificado, então f é formalmente não-ramificado. Supondo de antemão que g seja formalmente não-ramificado, vale a afirmação análoga para morfismos formalmente suaves. Assim, quando g for formalmente étale, teremos que f é formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale) se, e somente se, $g \circ f$ o for.

Definição **(2.1.5).** — *Um morfismo de esquemas $f : X \to Y$ é dito suave (resp. não-ramificado*[1]*, resp. étale) se é localmente de apresentação finita e formalmente suave (resp. formalmente não-ramificada, resp. formalmente étale).*

Seja A um anel. Diremos que B é uma A-álgebra *suave* (resp. *não-ramificada*, resp. *étale*) se o morfismo correspondente $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ for suave (resp. não-ramificado, resp. étale). Isso equivale a dizer que B é uma A-álgebra de apresentação finita e formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale).

Exemplos **(2.1.6).** — (i) Sejam X um esquema sobre um corpo k e $k[\varepsilon] = k[T]/(T^2)$ o anel de números duais sobre k, onde ε denota a classe de resíduos de T. Dado um ponto racional x de X, temos que o espaço tangente de Zariski $T_x X$ de X no ponto x se identifica naturalmente com o conjunto $X(k[\varepsilon])_x$ de morfismos de $\mathrm{Spec}(k[\varepsilon])$ em X tais que sua composição com o espessamento de ordem 1 canônico $\mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(k[\varepsilon])$ é exatamente x. Consideremos um morfismo de k-esquemas $f : X \to Y$ e seja $y = f(x)$, que é um ponto racional de Y. Temos, então, um homomorfismo de k-espaços vetoriais entre os espaços tangentes $T_x X \to T_y Y$ e, usando a identificação natural anterior, este corresponde à aplicação $u : X(k[\varepsilon])_x \to Y(k[\varepsilon])_y$ induzida por f. Segue diretamente da definição que se f for formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale), então u, e portanto também $T_x X \to T_y Y$, será sobrejetivo (resp. injetivo, resp. bijetivo).

(ii) É imediato da definição que um monomorfismo na categoria de esquemas, em particular uma imersão, é formalmente não-ramificado. Já imersões abertas são étales e provaremos no futuro (2.2.24) que estas são as únicas imersões étales. No entanto, imersões fechadas não são, em geral, formalmente suaves. Para isso, observe que se A é um anel e I é um ideal de A, então A/I é uma A-álgebra formalmente étale se, e somente se, $I = I^2$. Assim, um contra-exemplo concreto é a imersão fechada $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, sendo p um número primo.

(iii) Sejam A um anel e S um subconjunto multiplicativo de A. Então $S^{-1}A$ é uma A-álgebra formalmente étale. De fato, primeiro observe que $S^{-1}A$ é uma A-álgebra formalmente não-ramificada, pois o seu homomorfismo estrutural $A \to S^{-1}A$ é um epimorfismo na categoria de anéis. Para verificar que ela é uma A-álgebra formalmente suave, basta estabelecer, graças à propriedade universal da localização, o seguinte: se C é um anel e I é um ideal nilpotente de C, então todo elemento $x \in C$ que é invertível em C/I é também invertível em C. Para isso observe que, por hipotése, existem $y \in C$ e um inteiro positivo n tal que $(xy-1)^n = 0$ e portanto $xz = 1$ para algum $z \in C$.

Como conseqüência, tendo em vista (2.1.4, (v)), temos o seguinte: se $A \to B$ é um homomorfismo de anéis e T é um subconjunto multiplicativo de B tal que $u(S) \subseteq T$, então uma condição suficiente para que $T^{-1}B$ seja uma $S^{-1}A$-álgebra formalmente suave (resp. formalmente não-ramificada, resp. formalmente étale) é que B seja uma A-álgebra formalmente suave (resp. formalmente não-ramificada, resp. formalmente étale).

[1]A maioria dos resultados importantes para morfismos não-ramificados continua valendo supondo que ele seja apenas localmente de tipo finito e formalmente não-ramificado e isso leva alguns autores a adotarem essa condição mais fraca na sua definição. Uma vantagem é que, nesse caso, imersões fechadas são sempre não-ramificadas.

(iv) Provaremos adiante (2.2.5) que todo morfismo suave de esquemas é plano. Entretanto, o mesmo não pode ser dito para morfismos formalmente suaves, mesmo que eles sejam formalmente étales. Para isso, observe que se considerarmos um domínio integral A onde podemos garantir a existência de um ideal idempotente próprio e não-zero I, então por (ii) teremos que A/I é uma A-álgebra formalmente étale. Tomando $a \neq 0$ em I, vemos que a multiplicação por a em A/I é o homomorfismo nulo, embora seja injetiva quando considerada em A, o que garante que A/I não é uma A-álgebra plana. Para um exemplo concreto, considere o anel $\mathscr{O}$ de todos os inteiros algébricos, ou seja, o fecho integral de $\mathbf{Z}$ em $\mathbf{C}$, e I o ideal gerado por $2, 2^{1/2}, 2^{1/4}, 2^{1/8}, \ldots$

Contudo, um morfismo formalmente suave $f : X \to Y$ entre esquemas localmente noetherianos é sempre plano. Essa afirmação é conseqüência de um teorema sofisticado de Grothendieck que assegura que um homomorfismo local formalmente suave entre anéis locais noetherianos é plano [EGA 0_{IV}, 19.7.1]. Para reduzir a esse caso, note que, como imersões abertas são étales, (2.1.4, (iv)) e (2.1.4, (v)) garantem que podemos considerar um morfismo entre esquemas afins. Este corresponde a um homomorfismo formalmente suave de anéis $\varphi : A \to B$. Se $\mathfrak{q}$ é um ideal primo de B e $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ é a sua contração em A, então (iii) implica que o homomorfismo induzido $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ é também formalmente suave. Uma observação que devemos fazer quanto a esta referência é que Grothendieck define álgebras formalmente suaves de modo mais geral levando em conta topologias nos anéis [EGA 0_{IV}, 19.3.1]. No teorema supracitado são consideradas as topologias ádicas induzidas pelos ideais maximais dos anéis locais. A noção que definimos aqui corresponde àquela onde as topologias são discretas e não é difícil provar que ela implica a versão que faz uso das topologias ádicas.

(v) Sejam A um anel e M um A-módulo. Para que a álgebra simétrica $B = S_A(M)$ de M seja uma A-álgebra formalmente suave, é necessário e suficiente que M seja um A-módulo projetivo. Com efeito, a suficiência da condição segue diretamente das definições. Por outro lado, se B é uma A-álgebra formalmente suave, então, como veremos na proposição (2.1.28), $\Omega^1_{B/A}$ é um B-módulo projetivo. Vimos em (1.2.16) que $\Omega^1_{B/A}$ é isomorfo a $B \otimes_A M$. Assim, considerando A como B-álgebra através do homomorfismo $B \to A$ que leva os elementos de M em 0, temos que $M \cong A \otimes_B \Omega^1_{B/A}$ é um A-módulo projetivo.

Temos, em particular, o caso de uma álgebra de polinômios $A[X_i]_{i \in I}$ sobre A e esta será formalmente étale se, e somente se, I for vazio. Tendo em conta (2.1.4, (iv)), obtemos que a projeção canônica $\mathbf{A}^n_Y \to Y$ é suave para todo esquema Y e a proposição (2.1.8) garantirá que a projeção canônica $\mathbf{P}^n_Y \to Y$ é também suave. Em (2.1.33), provaremos que, dados um morfismo suave $f : X \to Y$ e um ponto $x \in X$, é possível obter uma vizinhança aberta U de x tal que $f|_U$ se fatora em um morfismo étale $U \to \mathbf{A}^n_Y$ seguido pela projeção canônica $\mathbf{A}^n_Y \to Y$. Em muitas situações, usamos este fato para simplificar problemas envolvendo morfismos suaves.

(vi) Sejam A um anel, J uma categoria de índices, $F : J \to \mathbf{CAlg}(A)$ um funtor e denote $F(j)$ por B_j. Se cada B_j for uma A-álgebra formalmente étale (resp. formalmente não-ramificada), então $B = \operatorname{colim}_{j \in J} B_j$ também o será. Para isso, basta observar que, como em (2.1.4, (i)), dizer que B é uma A-álgebra formalmente étale (resp. formalmente não-ramificada) equivale a dizer que projeções canônicas $C \to C/I$, sendo C uma A-álgebra e I um ideal nilpotente, são levadas em aplicações bijetivas (resp. injetivas) pelo funtor representável covariante $h^B = \operatorname{Hom}_{\mathbf{CAlg}(A)}(B, \cdot) : \mathbf{CAlg}(A) \to \mathbf{Sets}$. Como $B = \operatorname{colim}_{j \in J} B_j$, temos que $h^B = \lim_{j \in J} h^{B_j}$, de onde segue o resultado, afinal limites preservam isomorfismos (resp.

produtos fibrados e em particular monomorfismos).

No entanto, o mesmo não pode ser dito para colimites de álgebras formalmente suaves, mesmo que a categoria de índices seja filtrada. Como exemplo, considere um A-módulo plano que não é projetivo M, sendo o exemplo mais simples o $\mathbf{Z}$-módulo $\mathbf{Q}$. Um teorema de Lazard [Stacks, Tag 058G] garante que M é um colimite filtrado de A-módulos livres finitamente gerados. Temos, em virtude de (v) e do fato da álgebra simétrica comutar com colimites filtrados [BouAl, Capítulo III, § 6.5, Proposição 8], que $S_A(M)$ é um colimite filtrado de A-álgebras formalmente suaves, mas não é formalmente suave.

(vii) Se K/k é uma extensão de corpos algébrica separável, então K é uma k-álgebra formalmente étale. Em (2.1.36) provaremos isso para uma extensão finita separável. Para justificar a versão mais geral aqui enunciada, basta usar um argumento de colimite. Explicitamente, primeiro observe que, como K/k é uma extensão algébrica, K é o colimite filtrado das subextensões finitas de K/k. O resultado segue, então, de (vi).

Um teorema de Cohen [EGA 0_{IV}, 19.6.1; Mat86, 26.9] garante que se K/k é uma extensão de corpos, não necessariamente algébrica, então K é uma k-álgebra formalmente suave se, e somente se, K/k é uma extensão separável.

Proposição **(2.1.7).** — *Seja* A *um anel. Uma* A*-álgebra* B *é formalmente suave se, e somente se,* $\mathrm{Exalcom}_A(B, L) = 0$ *para todo* B*-módulo* L.

Demonstração. — Suponha que B seja uma A-álgebra formalmente suave e consideremos uma A-extensão (E, j, f) de B por L. O homomorfismo de A-álgebras $f : E \to B$ tem como núcleo o ideal nilpotente $j(L)$ (1.2.2). Sendo assim, a hipótese de suavidade formal garante que existe um homomorfismo de A-álgebras $s : B \to E$ tal que $f \circ s = 1_B$ e portanto E é uma A-extensão trivial. Para a recíproca, consideremos uma A-álgebra C, um ideal nilpotente I de C e um homomorfismo de A-álgebras $u_0 : B \to C/I$. Graças a (2.1.4, (ii)) podemos supor $I^2 = 0$. Nesse caso, I tem uma estrutura canônica de C/I-módulo e $0 \to I \to C \to C/I \to 0$ é uma A-extensão de C/I por I. Por hipótese, sua imagem inversa $C \times_{C/I} B \to B$ por u_0 (1.2.5) é uma A-extensão trivial. Logo, obtemos um homomorfismo de A-álgebras $t : B \to C \times_{C/I} B$ inverso à direita do homomorfismo de aumentação $C \times_{C/I} B \to B$ e podemos tomar como $u : B \to C$ a composição de s com a projeção $C \times_{C/I} B \to C$, o que mostra que B é uma A-álgebra formalmente suave. ▲

Proposição **(2.1.8).** — *Seja* $f : X \to Y$ *um morfismo de esquemas.*

(i) *Se* $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ *é uma cobertura aberta de* X *e* $\iota_\alpha : U_\alpha \to X$ *são as respectivas inclusões, então, para que* f *seja formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale), é necessário e suficiente que cada um dos morfismos* $f \circ \iota_\alpha$ *o seja. Vale também a afirmação análoga para morfismos suaves (resp. não-ramificados, resp. étales).*

(ii) *Se* $(V_\beta)_{\beta \in J}$ *é uma cobertura aberta de* Y*, então* f *é formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale) se, e somente se, cada uma das restrições* $f^{-1}(V_\beta) \to V_\beta$ *de* f *o é. Como no item anterior, vale também a afirmação análoga para morfismos suaves (resp. não-ramificados, resp. étales).*

Demonstração. — Primeiro observe que, graças a (2.1.4, (v)) e ao fato de imersões abertas serem étales (2.1.6, (ii)), (ii) é uma conseqüência de (i). As últimas afirmações em (i) e (ii) decorrem das primeiras e das propriedades de morfismos localmente de apresentação finita. Nos concentremos, então, em (i). Como ι_α é um morfismo étale para cada α, a necessidade decorre de (2.1.4, (iv)). Resta, então, provar que se cada $f \circ \iota_\alpha$ for formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale), então o mesmo valerá para f.

Vejamos primeiro o caso formalmente não-ramificado. Sejam $i : T_0 \to T$ um espessamento de ordem finita entre esquemas afins sobre Y e $g_0 : T_0 \to X$ um Y-morfismo. Podemos supor que T_0 e T têm o mesmo espaço topológico subjacente (2.1.1). Denotemos por W_α (resp. W^0_α) o esquema induzido por T (resp. T_0) sobre o aberto $g_0^{-1}(U_\alpha)$. Então i induz, para cada α, um espessamento de ordem finita $i_\alpha : W^0_\alpha \to W_\alpha$. Sejam g, g' dois Y-morfismos de T em X tais que $g \circ i = g' \circ i = g_0$. Suas restrições a W_α se fatoram através de ι_α, de modo que obtemos Y-morfismos $g_\alpha, g'_\alpha : W_\alpha \to U_\alpha$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd} W^0_\alpha \arrow[r] \arrow[d, "i_\alpha"'] & U_\alpha \arrow[d, "f\circ\iota_\alpha"] \\ W_\alpha \arrow[r] \arrow[ur, shift left, "g_\alpha"] \arrow[ur, shift right, "g'_\alpha"'] & Y \end{tikzcd}$$

é comutativo. Tendo em conta (2.1.4, (iii)), a hipótese de $f \circ \iota_\alpha$ ser formalmente não-ramificado garante que $g_\alpha = g'_\alpha$ e portanto $g|_{W_\alpha} = g'|_{W_\alpha}$ para cada α, de onde concluímos que $g = g'$. Assim, f é formalmente não-ramificado.

Para o caso formalmente étale podemos, também com o auxílio de (2.1.4, (iii)), proceder de maneira similar, desta vez obtendo morfismos $g_\alpha : W_\alpha \to U_\alpha$ fazendo o diagrama acima comutar e usamos a unicidade para justificar que $(\iota_\alpha \circ g_\alpha)|_{W_\alpha \cap W_\beta} = (\iota_\beta \circ g_\beta)|_{W_\alpha \cap W_\beta}$ para todo par de índices $\alpha, \beta \in I$. Assim, podemos colar os morfismos $\iota_\alpha \circ g_\alpha$ para obter um prolongamento global g de g_0.

Claramente essa abordagem não funciona para morfismos formalmente suaves e, para provar esse caso, precisaremos de algumas preliminares. Concluiremos a demonstração da proposição em (2.1.29).

(2.1.9) Sejam X um espaço topológico, $\mathscr{G}$ um feixe de grupos, não necessariamente abelianos, e $\mathscr{P}$ um feixe de conjuntos. Dizemos que $\mathscr{G}$ *age à esquerda em* $\mathscr{P}$ ou que $\mathscr{P}$ é um $\mathscr{G}$*-feixe à esquerda* se existe um morfismo de feixes de conjuntos $\mathscr{G} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ tal que, para todo aberto U de X, a aplicação $\mathscr{G}(U) \times \mathscr{P}(U) \to \mathscr{P}(U)$ é uma ação à esquerda do grupo $\mathscr{G}(U)$ no conjunto $\mathscr{P}(U)$. Um *morfismo de* $\mathscr{G}$*-feixes à esquerda*, também dito um $\mathscr{G}$*-morfismo*, é um morfismo de feixes $\varphi : \mathscr{P} \to \mathscr{Q}$ tal que $\varphi_U : \mathscr{P}(U) \to \mathscr{Q}(U)$ é $\mathscr{G}(U)$-equivariante para todos os abertos U de X. No restante do texto consideraremos apenas ações à esquerda e diremos simplesmente $\mathscr{G}$-feixes.

Definição **(2.1.10).** — *Um* $\mathscr{G}$*-torsor em* X*, também dito um torsor sob* $\mathscr{G}$ *em* X*, é um* $\mathscr{G}$*-feixe* $\mathscr{P}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *Sempre que* $\mathscr{P}(U)$ *for não-vazio, sendo* U *um aberto de* X*, a ação de* $\mathscr{G}(U)$ *em* $\mathscr{P}(U)$ *é simplesmente transitiva.*

(ii) *Para todo ponto* x *de* X*,* $\mathscr{P}_x$ *é não-vazio. Isso equivale a dizer que existe uma cobertura aberta* $(U_i)_{i\in I}$ *de* X *tal que* $\mathscr{P}(U_i) \neq \varnothing$ *para todo* $i \in I$.

Se $\mathscr{P}$ *satisfizer apenas* (i)*, diremos que ele é um pseudotorsor.*

(2.1.11) Um exemplo de $\mathscr{G}$-torsor é o próprio feixe de grupos $\mathscr{G}$ agindo sobre si mesmo por translações à esquerda. Se $\mathscr{P}$ é um $\mathscr{G}$-torsor e U é um aberto de X tal que $\mathscr{P}(U)$ é não-vazio, então, fixando um elemento $t \in \mathscr{P}(U)$, obtemos um isomorfismo de $\mathscr{G}$-feixes $\mathscr{G}|_U \to \mathscr{P}|_U$ levando g em $g(t|_V)$, onde V é um subconjunto aberto de U e $g \in \mathscr{G}(V)$. Assim, para que um $\mathscr{G}$-feixe $\mathscr{P}$ seja um $\mathscr{G}$-torsor, é necessário e suficiente que ele seja localmente $\mathscr{G}$-isomorfo a $\mathscr{G}$ agindo sobre si mesmo por translações à esquerda. Se tivermos um $\mathscr{G}$-isomorfismo global diremos que $\mathscr{G}$ é um $\mathscr{G}$*-torsor trivial.* Isso equivale a dizer que $\mathscr{P}(X)$ é não-vazio. Observe, por fim, que um $\mathscr{G}$-morfismo entre $\mathscr{G}$-torsores é necessariamente um isomorfismo.

Antes de procedermos, relembremos alguns fatos sobre a cohomologia de Čech. Uma das melhores referências, apesar de ter sido escrita há quase 60 anos, é o artigo de Serre [FAC, Capítulo I, §§ 3 e 4]. No que tange à sua relação com a cohomologia do funtor derivado queira ver [Tohoku, 3.8] ou [God58, Capítulo II, 5.4 e 5.9]. Parte disso pode também ser encontrada em [Har77, Capítulo III, § 4].

(2.1.12) Sejam X um espaço topológico, $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ uma cobertura aberta de X e $\mathscr{F}$ um feixe de grupos abelianos em X. Se $s = (i_0, \ldots, i_n) \in \mathrm{I}^{n+1}$, então a notação U_s ou $\mathrm{U}_{i_0 \ldots i_n}$ significará $\mathrm{U}_{i_0} \cap \ldots \cap \mathrm{U}_{i_n}$. Definimos o *complexo de cocadeias de Čech de* $\mathfrak{U}$ *com valores em* $\mathscr{F}$, denotado $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, do modo seguinte: se n é um inteiro não-negativo, $\mathrm{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) = \prod_{s \in \mathrm{I}^{n+1}} \Gamma(\mathrm{U}_s, \mathscr{F})$ e a diferencial $d : \mathrm{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{C}^{n+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ leva uma n-cocadeia f na $(n+1)$-cocadeia

$$(df)_{i_0 \ldots i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j f_{i_0 \ldots \hat{i}_j \ldots i_{n+1}} |_{\mathrm{U}_{i_0 \ldots i_{n+1}}}.$$

O *n-ésimo grupo de cohomologia de Čech de* $\mathfrak{U}$ *com valores em* $\mathscr{F}$ é definido como sendo o n-ésimo grupo de cohomologia de $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ e será denotado $\check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$. Um morfismo de feixes $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ induz um morfismo de complexos $\overline{\varphi} : \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ que leva $f \in \mathrm{C}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ na n-cocadeia de $\mathfrak{U}$ com valores em $\mathscr{G}$ dada por $(\overline{\varphi} f)_s = \varphi_{\mathrm{U}_s}(f_s)$ para todo $s \in \mathrm{I}^{n+1}$ e obtemos, então, um homomorfismo de grupos $\varphi^* : \check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ para cada $n \geq 0$, de modo que $\check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{U}, \cdot) : \mathrm{Sh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$ é um funtor aditivo. Como estamos considerando apenas feixes, os funtores $\Gamma(\mathrm{X}, \cdot)$ e $\check{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{U}, \cdot)$ são naturalmente isomorfos.

(2.1.13) Sejam $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}, \mathfrak{V} = (\mathrm{V}_j)_{j \in \mathrm{J}}$ duas coberturas abertas de X. Dizemos que $\mathfrak{U}$ é um *refinamento* de $\mathfrak{V}$, o que denotamos por $\mathfrak{U} \preceq \mathfrak{V}$, se existe uma aplicação $\tau : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ tal que $\mathrm{U}_i \subseteq \mathrm{V}_{\tau_i}$ para todo $i \in \mathrm{I}$. Dado um feixe de grupos abelianos $\mathscr{F}$, podemos, então, definir um morfismo de complexos $\overline{\tau} : \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \to \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ levando $f \in \mathrm{C}^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F})$ na n-cocadeia de $\mathfrak{U}$ com valores em $\mathscr{F}$ dada por $(\overline{\tau} f)_{i_0 \ldots i_n} = f_{\tau_{i_0} \ldots \tau_{i_n}} |_{\mathrm{U}_{i_0 \ldots i_n}}$. Este induz um homomorfismo de grupos $\check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{V}, \mathscr{F}) \to \check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, que independe de τ [FAC, nº 21, Proposição 3], e será denotado $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$. Se denotarmos por $\mathcal{S}$ a classe de coberturas abertas de X munida da pré-ordem definida por refinamentos e a olharmos como categoria, então teremos funtores $\check{\mathrm{H}}^n(\,\cdot\,, \mathscr{F}) : \mathcal{S}^{op} \to \mathbf{Ab}$. Diremos que duas coberturas $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ são *equivalentes* se elas forem isomorfas em $\mathcal{S}$, em cujo caso $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ será um isomorfismo, e isso define uma relação de equivalência para a qual podemos obter um *conjunto* de representantes para as classes de equivalência. Definimos o *n-ésimo grupo de cohomologia de Čech de* X *com valores em* $\mathscr{F}$, denotado $\check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F})$, como sendo o colimite filtrado

$$\check{\mathrm{H}}^n(\mathrm{X}, \mathscr{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} \check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{U}, \mathscr{F}),$$

onde $\mathfrak{U}$ percorre um conjunto de representantes para as classes de equivalência de coberturas abertas de X. Não é difícil ver que escolhas diferentes de representantes originam grupos isomorfos. No que segue abusaremos da teoria de conjuntos e agiremos como se o colimite tivesse sido tomado sobre todas as coberturas abertas de X. Observe que se $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ é um morfismo de feixes de grupos abelianos e $\mathfrak{U}$ é um refinamento de $\mathfrak{V}$, então temos um diagrama comutativo de morfismos de complexos

$$\begin{tikzcd} C^\bullet(\mathfrak{V},\mathscr{F}) \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\overline{\tau}"'] & C^\bullet(\mathfrak{V},\mathscr{G}) \arrow[d, "\overline{\tau}"] \\ C^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & C^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{G}) \end{tikzcd}$$

e este garante que $\varphi^* \circ \sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) = \sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) \circ \varphi^*$. Assim, passando ao colimite, obtemos homomorfismos de grupos $\varphi^* : \check{H}^n(X,\mathscr{F}) \to \check{H}^n(X,\mathscr{G})$ para cada $n \geq 0$, de forma que temos funtores aditivos $\check{H}^n(X,\cdot) : \mathrm{Sh}(X, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$. Os isomorfismos naturais $\Gamma(X,\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \check{H}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ obtidos para cada cobertura aberta $\mathfrak{U}$ de X dão então origem a um isomorfismo natural entre $\Gamma(X,\mathscr{F})$ e $\check{H}^0(X,\mathscr{F})$.

(2.1.14) A família de funtores $(\check{H}^n(X,\cdot))_{n\geq 0}$ não é, em geral, um ∂-funtor cohomológico. No entanto, $(\check{H}^0(X,\cdot), \check{H}^1(X,\cdot))$ é, usando a terminologia em [Tohoku, 2.1], um ∂-funtor exato em graus $0, 1$ para qualquer espaço topológico X [FAC, nº 24, Corolário 1]. Por outro lado, se $n > 0$ e $\mathscr{F}$ é um feixe flácido, então $\check{H}^n(\mathfrak{U},\mathscr{F}) = 0$ para toda cobertura aberta $\mathfrak{U}$ de X [Har77, Capítulo III, 4.3] e isso garante que cada um dos funtores $\check{H}^n(\mathfrak{U},\cdot)$ e $\check{H}^n(X,\cdot)$ é apagável. Por conseguinte, $(\check{H}^0(X,\cdot), \check{H}^1(X,\cdot))$ é um ∂-funtor exato universal [Tohoku, 2.2.1] e assim os funtores $\check{H}^n(X,\cdot)$ e $H^n(X,\cdot)$ são naturalmente isomorfos para $n = 0, 1$, sendo que $H^n(X,\cdot) = R^n\Gamma(X,\cdot)$. Mais geralmente, o mesmo argumento garante que sempre que pudermos ver os $\check{H}^n(X,\cdot)$ $(0 \leq n \leq b)$ como componentes de um ∂-funtor exato, então eles serão naturalmente isomorfos aos $H^n(X,\cdot)$ $(0 \leq n \leq b)$. Se X for, por exemplo, um espaço paracompacto[1], então isso valerá para todo n [FAC, nº 25, Corolário].

(2.1.15) Sejam X um espaço topológico, $\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}$ uma cobertura aberta de X e $\mathscr{F}$ um feixe de grupos abelianos em X. Se V é um aberto de X, cuja aplicação de inclusão é j, então denotaremos por ${}_V\mathscr{F}$ o feixe de grupos abelianos $j_*(\mathscr{F}|_V)$. Podemos facilmente globalizar a construção do complexo de Čech para obtermos um complexo de feixes. Dado um inteiro não-negativo n, pomos $\mathscr{C}^n(\mathfrak{U},\mathscr{F}) = \prod_{s\in I^{n+1}} {}_{U_s}\mathscr{F}$, de maneira que $\Gamma(V, \mathscr{C}^n(\mathfrak{U},\mathscr{F})) = C^n(\mathfrak{U}\cap V, \mathscr{F}|_V)$, onde $\mathfrak{U}\cap V$ denota a cobertura aberta $(U_i \cap V)_{i\in I}$ de V, e a diferencial $d : \mathscr{C}^n(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \to \mathscr{C}^{n+1}(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ sobre o aberto V é justamente a diferencial em grau n do complexo $C^\bullet(\mathfrak{U}\cap V, \mathscr{F}|_V)$. Observe que esta construção define um funtor aditivo da categoria $\mathrm{Sh}(X, \mathbf{Ab})$ na categoria de complexos de feixes de grupos abelianos em X.

Para cada $i \in I$, temos um morfismo canônico $\mathscr{F} \to {}_{U_i}\mathscr{F}$ que induz, tomando produtos, um morfismo $\varepsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{C}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Então, a seqüência de feixes de grupos abelianos

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathscr{C}^0(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}^1(\mathfrak{U},\mathscr{F}) \cdots$$

é exata ou, dito de uma outra maneira, ε induz um quase-isomorfismo de $\mathscr{F}$, visto como complexo concentrado em grau 0, em $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F})$. Com efeito, o fato de ε ser um monomorfismo e de $\mathrm{Im}(\varepsilon) = \mathrm{Ker}(d)$ segue diretamente dos axiomas de feixes. Para mostrar que o complexo $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F})$ é exato em grau $n \geq 1$, é suficiente obter uma base $\mathfrak{B}$ para a topologia de X tal que os complexos $\Gamma(B, \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U},\mathscr{F})) = C^\bullet(\mathfrak{U}\cap B, \mathscr{F}|_B)$ são exatos em grau $n \geq 1$ para todo $B \in \mathfrak{B}$. Isso equivale a dizer que $\check{H}^n(\mathfrak{U}\cap B, \mathscr{F}|_B) = 0$ para todo $B \in \mathfrak{B}$ e $n \geq 1$. Tomamos, então, $\mathfrak{B}$ como sendo a base para a topologia de X consistindo dos subconjuntos abertos contidos em algum U_i. Assim, $\mathfrak{U}\cap B$ é equivalente a $\{B\}$ e de (2.1.13) obtemos que

[1] Aqui um espaço paracompacto será, por definição, Hausdorff.

$\check{\mathrm{H}}^n(\mathfrak{U}\cap \mathrm{B}, \mathscr{F}|_{\mathrm{B}}) \cong \check{\mathrm{H}}^n(\{\mathrm{B}\}, \mathscr{F}|_{\mathrm{B}})$. Usando que a cohomologia de Čech de uma cobertura pode ser calculada a partir de cocadeias alternadas [FAC, nº 20, Proposição 2], concluímos que $\check{\mathrm{H}}^n(\{\mathrm{B}\}, \mathscr{F}|_{\mathrm{B}}) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Seja $\mathscr{F}^\bullet$ um complexo limitado inferiormente de feixes de grupos abelianos em X. Podemos, então, considerar o bicomplexo $(\mathscr{C}^b(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^a))_{a,b\in\mathbf{Z}}$ cuja diferencial horizontal $d'^{ab} : \mathscr{C}^b(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^a) \to \mathscr{C}^b(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^{a+1})$ é induzida pela diferencial do complexo $\mathscr{F}^\bullet$ e cuja diferencial vertical $d''^{ab} : \mathscr{C}^b(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^a) \to \mathscr{C}^{b+1}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^a)$ é oriunda da diferencial do complexo $\mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^a)$, mas a munimos de um sinal $(-1)^a$ para termos de fato um bicomplexo. O complexo total a ele associado será denotado por $\mathscr{C}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^\bullet)$. Como, para cada $a \in \mathbf{Z}$, temos um quase-isomorfismo $\varepsilon_a : \mathscr{F}^a \to \mathscr{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^a)$, obtemos também um quase-isomorfismo

(2.1.15.1)
$$\mathscr{F}^\bullet \to \mathscr{C}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}^\bullet).$$

Isso é imediato se usarmos as seqüências espectrais associadas a um bicomplexo, mas existem argumentos diretos, como, por exemplo, [Ill04, Capítulo 1, 2.9].

(2.1.16) Sejam $\mathscr{G}$ um feixe de grupos abelianos e $\mathscr{P}$ um $\mathscr{G}$-torsor em um espaço topológico X. Nesse caso, usaremos a notação aditiva para a ação de $\mathscr{G}$ em $\mathscr{P}$. Por hipótese, existe uma cobertura aberta $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de X tal que $\mathscr{P}(\mathrm{U}_i) \neq \varnothing$. Considerando $t_i \in \mathscr{P}(\mathrm{U}_i)$ para cada $i \in \mathrm{I}$, obtemos uma única seção g_{ij} de $\mathscr{G}$ sobre U_{ij} tal que $t_j|_{\mathrm{U}_{ij}} = g_{ij} + t_i|_{\mathrm{U}_{ij}}$ e não é difícil verificar que $g = (g_{ij})$ é um 1-cociclo de Čech de $\mathfrak{U}$ com valores em $\mathscr{G}$. Denotaremos por $c(\mathscr{P})$ o elemento de $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$ daí obtido e uma verificação direta, passando a refinamentos apropriados, mostra que ele independe das escolhas feitas. Observe ainda que se $\mathscr{P}'$ é um $\mathscr{G}$-torsor isomorfo a $\mathscr{P}$, então $c(\mathscr{P}) = c(\mathscr{P}')$. Assim, temos uma aplicação bem-definida $c : \mathrm{Tors}(\mathrm{X}, \mathscr{G}) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$, onde $\mathrm{Tors}(\mathrm{X}, \mathscr{G})$ denota o conjunto de classes e isomorfismos de $\mathscr{G}$-torsores em X.[1]

Proposição **(2.1.17).** — *Com a notação de (2.1.16), a aplicação $c : \mathrm{Tors}(\mathrm{X}, \mathscr{G}) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$ é uma bijeção que faz corresponder à classe de torsores triviais o elemento zero em $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$.*

Demonstração. — Para definir uma inversa α para c procedemos da seguinte maneira: seja ξ um elemento em $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$ representado por um 1-cociclo de Čech (g_{ij}) de uma cobertura aberta $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de X. Podemos a ele associar um $\mathscr{G}$-torsor $\mathscr{P}$ pondo, para cada aberto V de X,

$$\mathscr{P}(\mathrm{V}) = \{(t_i)_{i\in\mathrm{I}} : \ t_i \in \mathscr{G}(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{V}) \text{ e } t_j|_{\mathrm{U}_{ij}\cap\mathrm{V}} - t_i|_{\mathrm{U}_{ij}\cap\mathrm{V}} = g_{ij}|_{\mathrm{U}_{ij}\cap\mathrm{V}}\},$$

sendo os mapas de restrição induzidos pelos de $\mathscr{G}$, e considerando a ação de $\mathscr{G}$ em $\mathscr{P}$ dada, em V, por $(g, (t_i)_{i\in\mathrm{I}}) \mapsto (g|_{\mathrm{U}_i\cap\mathrm{V}} + t_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Definimos, então, $\alpha(\xi)$ como sendo a classe de isomorfismo do $\mathscr{G}$-torsor $\mathscr{P}$ e não é difícil verificar que ela independe da escolha do cociclo de Čech que representa ξ e que é de fato uma inversa para c. ▲

Corolário **(2.1.18).** — *Sejam $\mathscr{G}$ um feixe de grupos abelianos em um espaço topológico* X *e $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ uma cobertura aberta de* X. *O homomorfismo canônico $\check{\mathrm{H}}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$ é injetivo e identifica $\check{\mathrm{H}}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$, através da bijeção estabelecida em (2.1.17), com o conjunto de classes de $\mathscr{G}$-torsores cuja restrição a cada U_i é um $\mathscr{G}|_{\mathrm{U}_i}$-torsor trivial.*

Demonstração. — Sejam g um 1-cociclo de Čech de $\mathfrak{U}$ com valores em $\mathscr{G}$ e $\mathscr{P}$ o $\mathscr{G}$-torsor construído a partir dele na demonstração de (2.1.17). Se a imagem de g em $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$ for o elemento zero, então $\mathscr{P}$ será um $\mathscr{G}$-torsor trivial e assim $\mathscr{P}(\mathrm{X}) \neq \varnothing$ (2.1.11). Da definição

[1] A demonstração da proposição seguinte deixará claro que podemos, de fato, obter um *conjunto* de representantes para as classes de isomorfismo de $\mathscr{G}$-torsores.

de $\mathscr{P}(\mathrm{X})$, obtemos uma 0-cocadeia de Čech t de $\mathfrak{U}$ com valores em $\mathscr{G}$ tal que $d(t) = g$ e isso garante que g representa o elemento zero em $\check{\mathrm{H}}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$, nos permitindo concluir que $\check{\mathrm{H}}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{G})$ é um monomorfismo. A outra afirmação segue diretamente das construções. ▲

Corolário **(2.1.19).** — *Seja $(\mathscr{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ uma família de feixes de grupos abelianos em um espaço topológico* X. *Então o homomorfismo canônico*

(2.1.19.1)
$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{F}_i) \to \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F}_i)$$

é injetivo. Como conseqüência, se X *for um esquema afim e $(\mathscr{F}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ for uma família de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos quase-coerentes, então* $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{F}_i) = 0$.

Demonstração. — A última afirmação decorre imediatamente da primeira utilizando o teorema de anulamento afim de Serre. Haja vista que os funtores $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \cdot)$ e $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \cdot)$ são naturalmente isomorfos para qualquer espaço topológico X (2.1.14), para provar a injetividade de (2.1.19.1), é suficiente considerar a questão análoga para a cohomologia de Čech. Denotemos por $\mathscr{F}$ o produto $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathscr{F}_i$ e seja ξ um elemento de $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F})$ representado por um 1-cociclo de Čech g de uma cobertura aberta $\mathfrak{U}$ de X. Segue da definição dos morfismos induzidos entre as cohomologias de Čech de X (2.1.13) que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F}) \arrow[r] & \prod_{i\in\mathrm{I}} \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F}_i) \\
\check{\mathrm{H}}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \arrow[u] \arrow[r, "u"'] & \prod_{i\in\mathrm{I}} \check{\mathrm{H}}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_i) \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo e o corolário (2.1.18) garante que v é um monomorfismo. Por outro lado, $\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ é o produto dos complexos $\mathrm{C}^{\bullet}(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_i)$ $(i \in \mathrm{I})$ e como a categoria de grupos abelianos satisfaz o axioma (AB4*), isto é, produtos arbitrários formam um funtor exato, temos que u é um isomorfismo. Logo, se a imagem de ξ em $\prod_{i\in\mathrm{I}} \check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}, \mathscr{F}_i)$ for zero, então g será zero e por conseguinte teremos $\xi = 0$, concluindo a demonstração. ▲

Lema **(2.1.20).** — *Sejam $\mathscr{A}$ um feixe de anéis, $\mathscr{B}, \mathscr{E}, \mathscr{C}$ feixes de $\mathscr{A}$-álgebras e $p : \mathscr{E} \to \mathscr{C}$, $u : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ dois morfismos de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras, sendo o núcleo $\mathscr{I}$ de p um ideal de quadrado zero. Suponhamos que exista um morfismo de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras $v_0 : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ tal que $p \circ v_0 = u$ e considere $\mathscr{I}$ como feixe de $\mathscr{B}$-módulos através de v_0. Se* X *é o conjunto dos morfismos de feixes de $\mathscr{A}$-álgebras $v : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ tais que $u = p \circ v$, então temos uma ação simplesmente transitiva $\mathrm{X} \times \mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{I}) \to \mathrm{X}$ que leva (v, D) em $v + \mathrm{D}$, fazendo de* X *um espaço homogêneo principal sob o grupo* $\mathrm{Der}_{\mathscr{A}}(\mathscr{B}, \mathscr{I})$.

Demonstração. — Basta observar que, quando olhamos nos talos dos feixes, obtemos exatamente a situação da proposição (1.2.13) ▲

Proposição **(2.1.21).** — *Consideremos um diagrama comutativo de morfismos de esquemas*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{T} \arrow[r, "h"'] & \mathrm{Y},
\end{tikzcd}$$

sendo i um espessamento de ordem 1. *Seja $\mathscr{P}$ o feixe de conjuntos em T_0 cujas seções sobre um aberto U_0 são os morfismos de feixes de anéis $g^\flat : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}}|_{\mathrm{U}})$ obtidos a partir de* Y*-morfismos*

$g : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *tais que* $g \circ i_{\mathrm{U}_0} = g_0|_{\mathrm{U}_0}$, *sendo* U *o subesquema aberto de* T *correspondendo a* U_0 *e* $i_{\mathrm{U}_0} : \mathrm{U}_0 \to \mathrm{U}$ *o espessamento de ordem* 1 *induzido por* i. *Então:*

(i) $\mathscr{P}$ *tem uma estrutura de pseudotorsor sob o* $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$*-módulo* $\mathscr{G} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}), \mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}})$, *sendo* $\mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}}$ *o feixe conormal de* i (1.1.40).

(ii) *Quando* f *for um morfismo formalmente suave,* $\mathscr{P}$ *será um* $\mathscr{G}$*-torsor e portanto existirá uma obstrução* $o(i, g_0)$ *em* $\mathrm{H}^1(\mathrm{T}_0, \mathscr{G})$, *cujo anulamento é necessário e suficiente para a existência de um prolongamento global* g *de* g_0. *Se* $o(i, g_0) = 0$, *então o conjunto de todos os prolongamentos globais de* g_0 *é um espaço homogêneo principal sob o grupo* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}}(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}), \mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}})$.

Demonstração. — Primeiro observe que, como i é um homeomorfismo, um prolongamento local $g : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ de g_0 é completamente determinado pelo morfismo $g^\flat : \mathscr{O}_\mathrm{X} \to g_*(\mathscr{O}_\mathrm{T}|_\mathrm{U})$. Não é difícil justificar que $\mathscr{P}$ é um feixe de conjuntos: se $\mathrm{V}_0 \subseteq \mathrm{U}_0$ são subconjuntos abertos de T_0 e $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$ são os subesquemas abertos de T a eles associados, então o mapa de restrição $\mathscr{P}(\mathrm{U}_0) \to \mathscr{P}(\mathrm{V}_0)$ leva $g^\flat : \mathscr{O}_\mathrm{X} \to g_*(\mathscr{O}_\mathrm{T}|_\mathrm{U})$ em $(g|_\mathrm{V})^\flat : \mathscr{O}_\mathrm{X} \to (g|_\mathrm{V})_*(\mathscr{O}_\mathrm{T}|_\mathrm{V})$.

Vejamos, então, como justificar o item (i). Observe que dados

$$u \in \mathscr{G}(\mathrm{U}_0) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}|_{\mathrm{U}_0}}\left(g_0^*(\Omega^1_{\mathrm{X/Y}})|_{\mathrm{U}_0}, (\mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}})|_{\mathrm{U}_0}\right)$$

e $g^\flat \in \mathscr{P}(\mathrm{U}_0)$, temos que u corresponde, graças ao par adjunto $(g_0|_{\mathrm{U}_0})^* \dashv (g_0|_{\mathrm{U}_0})_*$, a um morfismo de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-módulos $v : \Omega^1_{\mathrm{X/Y}} \to (g_0|_{\mathrm{U}_0})_*((\mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}})|_{\mathrm{U}_0})$. Como $g \circ i_{\mathrm{U}_0} = g_0|_{\mathrm{U}_0}$, obtemos que $(g_0|_{\mathrm{U}_0})_*((\mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}})|_{\mathrm{U}_0}) = g_*((i_{\mathrm{U}_0})_*((\mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}})|_{\mathrm{U}_0}))$. Por outro lado, sabemos de (1.1.39) que $(i_{\mathrm{U}_0})_*((\mathscr{C}_{\mathrm{T}_0/\mathrm{T}})|_{\mathrm{U}_0})$ é isomorfo a $\mathscr{I}|_\mathrm{U}$, de modo que podemos escrever $v : \Omega^1_{\mathrm{X/Y}} \to g_*(\mathscr{I}|_\mathrm{U})$. Por fim, (1.1.22) garante que essa informação é equivalente à de uma Y-derivação $\mathrm{D}_u : \mathscr{O}_\mathrm{X} \to g_*(\mathscr{I}|_\mathrm{U})$. Assim, definimos $\mathscr{G}(\mathrm{U}_0) \times \mathscr{P}(\mathrm{U}_0) \to \mathscr{P}(\mathrm{U}_0)$ como sendo $(u, g^\flat) \mapsto g^\flat + \mathrm{D}_u$. É claro que isso define uma ação de $\mathscr{G}(\mathrm{U}_0)$ em $\mathscr{P}(\mathrm{U}_0)$ e não é difícil justificar que ela é compatível com as restrições, dando, portanto, uma ação de $\mathscr{G}$ em $\mathscr{P}$.

Resta provar que, fixado $g^\flat \in \mathscr{P}(\mathrm{U}_0)$, a aplicação $\mathscr{G}(\mathrm{U}_0) \to \mathscr{P}(\mathrm{U}_0)$ que leva u em $g^\flat + \mathrm{D}_u$ é uma bijeção. Para isso, note que temos uma bijeção natural entre $\mathrm{Der}_\mathrm{Y}(\mathscr{O}_\mathrm{X}, g_*(\mathscr{I}|_\mathrm{U}))$ e $\mathrm{Der}_{(h^{-1}\mathscr{O}_\mathrm{Y})|_\mathrm{U}}(g^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{X}), \mathscr{I}|_\mathrm{U})$ (1.1.23.1) e se denotarmos por $\varphi : g^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{X}) \to (i_{\mathrm{U}_0})_*(\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}|_{\mathrm{U}_0})$ o morfismo associado a $(g_0|_{\mathrm{U}_0})^\flat$ através do isomorfismo adjunto determinado por $g^{-1} \dashv g_*$, então $\mathscr{P}(\mathrm{U}_0)$ corresponderá através desse isomorfismo ao conjunto $\mathcal{S}$ de morfismos de feixes de anéis $g^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{X}) \to \mathscr{O}_\mathrm{T}|_\mathrm{U}$ que quando compostos com $i^\flat|_\mathrm{U}$ resultam em φ. Por construção, a aplicação $\mathscr{G}(\mathrm{U}_0) \to \mathscr{P}(\mathrm{U}_0)$ corresponde à aplicação $\mathrm{Der}_{(h^{-1}\mathscr{O}_\mathrm{Y})|_\mathrm{U}}(g^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{X}), \mathscr{I}|_\mathrm{U}) \to \mathcal{S}$ que leva uma derivação D em $g^\sharp + \mathrm{D}$. Como $\mathscr{I}|_\mathrm{U}$ é um ideal de quadrado zero, o lema (2.1.20) garante que esta última, e portanto também a primeira, é uma bijeção. Assim, $\mathscr{P}$ é um pseudotorsor sob $\mathscr{G}$.

Para o item (ii), note que a definição de um morfismo formalmente suave garante que $\mathscr{P}(\mathrm{U}_0) \neq \varnothing$ sempre que U_0 for um aberto afim de T_0, o que permite concluir que, nesse caso, $\mathscr{P}$ é um $\mathscr{G}$-torsor. A obstrução $o(i, g_0)$ é justamente a classe de cohomologia associada a $\mathscr{P}$ construída em (2.1.16) e a proposição (2.1.17) garante que o seu anulamento é necessário e suficiente para que $\mathscr{P}$ seja um $\mathscr{G}$-torsor trivial e isso equivale à existência de um prolongamento global g de g_0. A última assertiva de (ii) segue imediatamente do fato de $\mathscr{P}$ ser um $\mathscr{G}$-torsor. ▲

(2.1.22) Com o que fizemos até aqui poderíamos concluir a demonstração da proposição (2.1.8) se supuséssemos de antemão que $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ fosse um morfismo localmente de apresentação finita, pois, nesse caso, $\Omega^1_{\mathrm{X/Y}}$ seria um $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-módulo de apresentação finita (1.1.35), o que asseguraria a quase-coerência do $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$-módulo $\mathscr{G}$ definido na proposição (2.1.21) e por conseguinte teríamos ao nosso dispor o teorema de anulamento afim de Serre para garantir que uma eventual obstrução fosse zero. Esse é o argumento dado em [EGA IV_4, 17.1.6], apesar do enunciado não conter as hipóteses adequadas. A lacuna na demonstração foi percebida logo em seguida e Grothendieck conjectura, já em [Gro68, 9.5.8], se a proposição (2.1.8) é realmente válida para morfismos formalmente suaves. A resposta afirmativa foi obtida alguns anos mais tarde por Raynaud e Gruson [RG71] ao estabelecerem a descida da projetividade ao longo de homomorfismos fielmente planos de anéis, que enunciaremos aqui como o

Teorema **(2.1.23)** (Raynaud-Gruson). — *Sejam* A *um anel e* B *uma* A*-álgebra fielmente plana. Se* M *é um* A*-módulo tal que a extensão de escalares* $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ *é um* B*-módulo projetivo, então* M *é um* A*-módulo projetivo.*

Apesar da simplicidade do enunciado deste teorema, precisaríamos de uma seção inteira para demonstrá-lo, embora as técnicas utilizadas sejam elementares. No artigo original, ele é obtido a partir de um tipo mais geral de homomorfismo [RG71, Segunda Parte, 3.1.4], mas a assertiva nessa generalidade é falsa. Em [Gru73, 1.1], Gruson comenta qual foi o erro e obtém um resultado mais fraco que permite justificar todas as aplicações dadas em [RG71], com exceção justamente do fato que precisamos. Dito isso, sugerimos que o leitor consulte [Stacks, Tag 058B] para uma demonstração completa do teorema (2.1.23).

(2.1.24) Sejam X um esquema e $\mathscr{F}$ um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo quase-coerente. Diremos que $\mathscr{F}$ é *localmente projetivo* se todo ponto x de X tiver uma vizinhança aberta afim U tal que $\mathscr{F}(\mathrm{U})$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$-módulo projetivo. O teorema (2.1.23) garante que $\mathscr{F}(\mathrm{U})$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$-módulo projetivo para *qualquer* aberto afim U de X. Para justificar isso, basta, em virtude do lema de comunicação afim [Vak13, 5.3.2], provar que, para um anel A, um A-módulo P e elementos $f, f_1, \dots, f_n$ de A, (i) se P é um A-módulo projetivo, então P_f é um A_f-módulo projetivo e que (ii) se $f_1, \dots, f_n$ geram o ideal A e cada P_{f_i} é um A_{f_i}-módulo projetivo, então P é um A-módulo projetivo. A demonstração de (i) é trivial. Para (ii) observe que $\prod_{i=1}^n \mathrm{A}_{f_i}$ é uma A-álgebra fielmente plana e $\mathrm{P}\otimes_{\mathrm{A}}(\prod_{i=1}^n \mathrm{A}_{f_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{P}_{f_i}$ é um $\prod_{i=1}^n \mathrm{A}_{f_i}$-módulo projetivo e portanto o teorema (2.1.23) assegura que P é um A-módulo projetivo.

(2.1.25) Uma versão global do teorema de Raynaud-Gruson é a seguinte: consideremos um morfismo $f:\mathrm{X}'\to\mathrm{X}$ fielmente plano e quase-compacto e $\mathscr{F}$ um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo quase-coerente. Para que $\mathscr{F}$ seja localmente projetivo, é necessário e suficiente que $\mathscr{F}' = f^*(\mathscr{F})$ seja localmente projetivo. Com efeito, a necessidade é clara e vale para um morfismo qualquer de esquemas. Para ver que ela é suficiente, observe que, como a questão é local em X, podemos supô-lo um esquema afim. Nesse caso, X' é quase-compacto e portanto uma união finita de abertos afins X'_i. Considere o esquema afim X'' obtido tomando a união disjunta dos subesquemas X'_i e seja $g:\mathrm{X}''\to\mathrm{X}'$ o morfismo canônico. É claro que g é um isomorfismo local sobrejetivo e assim $f\circ g$ é fielmente plano. Como $g^*(\mathscr{F}')\cong(f\circ g)^*(\mathscr{F})$ é localmente projetivo, podemos supor também que X' é um esquema afim. Mas nesse caso, f é fielmente plano se, e somente se, $\Gamma(\mathrm{X}', \mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$ é uma $\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})$-álgebra fielmente plana [GW10, Proposição 14.10] e portanto, tendo em vista (2.1.24), o resultado segue do teorema de Raynaud-Gruson.

Proposição **(2.1.26)**. — *Sejam* X *um esquema e* $\mathscr{F}$ *um* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-módulo quase-coerente. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *$\mathscr{F}$ é de apresentação finita e, para cada ponto x de X, $\mathscr{F}_x$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$-módulo livre.*

b) *$\mathscr{F}$ é localmente livre de tipo finito.*
c) *$\mathscr{F}$ é localmente projetivo de tipo finito.*
d) *$\mathscr{F}$ é plano de apresentação finita.*

Demonstração. — A equivalência entre a) e b) é bastante conhecida e decorre da análise dos talos do $\mathscr{O}_X$-módulo $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G},\mathscr{H})$ quando $\mathscr{G}$ é um $\mathscr{O}_X$-módulo de apresentação finita. Queira ver, por exemplo, [GW10, Proposição 7.27]. É imediato que b) implica c) e que c) implica d). Resta, então, provar que d) implica a). Traduzindo a questão em termos algébricos, devemos justificar o porquê de um A-módulo plano de apresentação finita M, sendo $(A,\mathfrak{m},k)$ um anel local, ser livre de posto finito. Para isso considere uma base do k-espaço vetorial $M\otimes_A k$ e a utilize, em conjunto com o lema de Nakayama, para obter um epimorfismo $u : F \to M$, sendo F um A-módulo livre cujo posto coincide com a dimensão de $M\otimes_A k$. Como M é de apresentação finita, o núcleo N de u é finitamente gerado. Agora observe que $\mathrm{Tor}_1^A(M,k)=0$, pois M é um A-módulo plano, e portanto obtemos uma seqüência exata curta $0\to N\otimes_A k\to F\otimes_A k\to M\otimes_A k\to 0$. Por construção, $u\otimes 1_k$ é um isomorfismo e isso garante que $N\otimes_A k=0$, de onde concluímos que $N=0$, novamente usando o lema de Nakayama. Assim, u é um isomorfismo e por conseguinte M é um A-módulo livre.[1] ▲

Porismo **(2.1.27).** — Observando atentamente a demonstração da proposição acima, vemos que se A é um anel local cujo ideal maximal é nilpotente, então todo A-módulo plano, nesse caso sem qualquer hipótese de finitude, é livre. Mais que isso, dado qualquer subconjunto linearmente independente de $M\otimes_A k$, sendo M um A-módulo plano e k o corpo de resíduos de A, podemos levantá-lo para uma parte de uma base de M. O caso de maior interesse aqui será o de anéis locais artinianos.

Proposição **(2.1.28).** — *Se $f : X\to Y$ é um morfismo formalmente suave, então $\Omega^1_{X/Y}$ é um $\mathscr{O}_X$-módulo localmente projetivo. Em particular, se f for suave, então $\Omega^1_{X/Y}$ será um $\mathscr{O}_X$-módulo localmente livre de tipo finito.*

Demonstração. — O que já provamos em (2.1.8) permite que reduzamos a questão para o caso local. Assim, consideremos uma A-álgebra formalmente suave C e seja B uma álgebra de polinômios sobre A tal que temos um homomorfismo sobrejetivo de anéis $B\to C$, cujo núcleo denotaremos por I. Como vimos em (2.1.7), $\mathrm{Exalcom}_A(C,L)=0$ para todo C-módulo L. O item (ii) do teorema (1.2.20) garante, então, que a seqüência conormal local

$$0\to I/I^2\to \Omega^1_{B/A}\otimes_B C\to \Omega^1_{C/A}\to 0$$

é uma seqüência exata curta cindida e portanto $\Omega^1_{C/A}$ é um C-módulo projetivo, afinal $\Omega^1_{B/A}$ é um B-módulo livre (1.1.14, (i)). A segunda assertiva segue imediatamente da primeira, combinando (1.1.35) e (2.1.26). ▲

(2.1.29) *Fim da demonstração de* (2.1.8). — Suponhamos que cada $f\circ\iota_\alpha$ seja formalmente suave e sejam $i : T_0\to T$ um espessamento de ordem 1 entre esquemas afins e $g_0 : T_0\to X$ um Y-morfismo. As hipóteses asseguram que o pseudotorsor $\mathscr{P}$ da proposição

[1] Uma observação interessante quanto ao que podemos falar em geral sobre as relações entre os tipos de módulos aqui envolvidos é a seguinte: para todo anel R, mesmo um não-comutativo, é verdade que um R-módulo plano finitamente apresentado é projetivo. Uma demonstração elegante usando o dual Pontryagin, por vezes chamado módulo de caracteres, pode ser encontrada em [Wei94, 3.2.7]. Também é verdade que se R é um anel local, então todo R-módulo projetivo, sem qualquer hipótese de finitude, é livre, veja [Kap58, Teorema 2] ou [Mat86, 2.5] no caso comutativo.

(2.1.21) é na verdade um torsor sob o $\mathscr{O}_{T_0}$-módulo $\mathscr{G}=\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{T_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X/Y}),\mathscr{C}_{T_0/T})$ e portanto, para provar que existe um prolongamento global g de g_0, é suficiente mostrar que $H^1(T_0,\mathscr{G})=0$. A proposição (2.1.28) garante que $g_0^*(\Omega^1_{X/Y})$ é um $\mathscr{O}_{T_0}$-módulo localmente projetivo e, como T_0 é um esquema afim, ele é da forma $\widetilde{P}$, sendo P um $\Gamma(T_0,\mathscr{O}_{T_0})$-módulo projetivo (2.1.24). Para mostrar que $H^1(T_0,\mathscr{G})=0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que P é um módulo livre. Nesse caso, teremos que $\mathscr{G}$ é isomorfo a um produto de cópias de $\mathscr{C}_{T_0/T}$ e o anulamento de $H^1(T_0,\mathscr{G})$ é garantido por (2.1.19). ▲

Proposição **(2.1.30).** — (i) *Para que um morfismo $f:X\to Y$ seja formalmente não-ramificado, é necessário e suficiente que $\Omega^1_{X/Y}=0$.*

(ii) *Sejam $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ dois morfismos de esquemas.*

α) *Se f for formalmente suave, então a seqüência cotangente relativa* (1.1.38.1) *prolongada por um zero à esquerda*

(2.1.30.1) $$0\to f^*(\Omega^1_{Y/Z})\to\Omega^1_{X/Z}\to\Omega^1_{X/Y}\to 0$$

será exata e localmente cindida. Em particular, se f for formalmente étale, então o morfismo canônico $f_{X/Y/Z}:f^*(\Omega^1_{Y/Z})\to\Omega^1_{X/Z}$ será um isomorfismo.

β) *Se $g\circ f$ for formalmente suave e a seqüência* (2.1.30.1) *for exata e localmente cindida, então f será formalmente suave. Em particular, se $g\circ f$ for formalmente suave e o morfismo canônico $f_{X/Y/Z}:f^*(\Omega^1_{Y/Z})\to\Omega^1_{X/Z}$ for um isomorfismo, então f será formalmente étale.*

(iii) *Sejam $i:X\to Z$ uma imersão, $g:Z\to Y$ um morfismo e $f=g\circ i$.*

α) *Se f for formalmente suave, então a seqüência conormal* (1.1.45.1) *prolongada por um zero à esquerda*

(2.1.30.2) $$0\to\mathscr{C}_{X/Z}\to i^*(\Omega^1_{Z/Y})\to\Omega^1_{X/Y}\to 0$$

será exata e localmente cindida. Em particular, se f for formalmente étale, então o morfismo canônico $\delta_{X/Z/Y}:\mathscr{C}_{X/Z}\to i^*(\Omega^1_{Z/Y})$ será um isomorfismo.

β) (Critério jacobiano de suavidade formal). *Se g for formalmente suave e a seqüência* (2.1.30.2) *for exata e localmente cindida, então f será formalmente suave. Em particular, se g for formalmente suave e o morfismo canônico $\delta_{X/Z/Y}:\mathscr{C}_{X/Z}\to i^*(\Omega^1_{Z/Y})$ for um isomorfismo, então f será formalmente étale.*

Demonstração. — Em virtude de (2.1.8) é suficiente considerar o caso afim, trocando, onde for preciso, localmente cinde por cinde, para provar a veracidade de todas as assertivas da proposição.

(i) Sejam B uma A-álgebra formalmente não-ramificada, $j_1,j_2:B\to B\otimes_A B$ as injeções na primeira e segunda coordenadas, respectivamente, $p_{B/A}:B\otimes_A B\to B$ o homomorfismo de A-álgebras induzido pela multiplicação em B e I o seu núcleo. Denotemos por $P^1_{B/A}$ a A-álgebra aumentada $(B\otimes_A B)/I^2$, sendo o homomorfismo de aumentação induzido por $p_{B/A}$, e por $\bar{j}_1,\bar{j}_2$ os homomorfismos de B em $P^1_{B/A}$ obtidos a partir de j_1,j_2. Observe que temos um diagrama comutativo de homomorfismos de anéis

$$\begin{tikzcd} B & B \arrow[l, "1_B"'] \arrow[dl, shift right, "\bar{j}_1"'] \arrow[dl, shift left, "\bar{j}_2"] \\ P^1_{B/A} \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

e a hipótese de B ser uma A-álgebra formalmente não-ramificada garante que $\bar{j}_1=\bar{j}_2$. Por outro lado, vimos em (1.1.16) que existe um isomorfismo natural $\Omega^1_{B/A} \xrightarrow{\sim} I/I^2$, de modo que, após identificarmos esses dois, $d_{B/A} = \bar{j}_1 - \bar{j}_2 = 0$ e portanto $\Omega^1_{B/A} = 0$. Já a recíproca segue imediatamente de (1.1.6.1) e (1.2.13).

(ii) Sejam $u : A \to B$, $v : B \to C$ dois homomorfismos de anéis. O teorema (1.2.19) garante que a seqüência cotangente relativa local é exata curta cindida se, e somente se, $\mathrm{Exalcom}_{B/A}(C, L) = 0$ para todo C-módulo L. Por definição (1.2.11), temos uma seqüência exata de C-módulos

$$0 \to \mathrm{Exalcom}_{B/A}(C, L) \to \mathrm{Exalcom}_B(C, L) \xrightarrow{u^1} \mathrm{Exalcom}_A(C, L).$$

Tendo em vista (2.1.7), a hipótese em α) significa que $\mathrm{Exalcom}_B(C, L) = 0$ e portanto assegura que $\mathrm{Exalcom}_{B/A}(C, L) = 0$ para todo C-módulo L. Por outro lado, as hipóteses em β) garantem que $\mathrm{Exalcom}_{B/A}(C, L) = \mathrm{Exalcom}_A(C, L) = 0$ e por conseguinte $\mathrm{Exalcom}_B(C, L) = 0$ para todo C-módulo L, de onde concluímos que C é uma B-álgebra formalmente suave.

(iii) Sejam A um anel, B uma A-álgebra e I um ideal de B. Denotemos por C a A-álgebra quociente B/I e por v o homomorfismo canônico $B \to C$. Graças ao teorema (1.2.20, (ii)), para que a seqüência conormal local seja exata curta cindida, é necessário e suficiente que o homomorfismo $v^1 : \mathrm{Exalcom}_A(C, L) \to \mathrm{Exalcom}_A(B, L)$ seja injetivo para todo C-módulo L. A hipótese em α) significa que $\mathrm{Exalcom}_A(C, L) = 0$ e portanto temos essa injetividade assegurada. Por outro lado, as hipóteses em β) dizem que v^1 é injetivo e $\mathrm{Exalcom}_A(B, L) = 0$ e então necessariamente temos $\mathrm{Exalcom}_A(C, L) = 0$ para todo C-módulo L, garantindo que C é uma A-álgebra formalmente suave. ▲

Proposição **(2.1.31)**. — *Consideremos um diagrama cartesiano na categoria de esquemas*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & Y' \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y, \end{tikzcd}$$

sendo h um morfismo fielmente plano e quase-compacto. Para que f seja formalmente suave (resp. formalmente não-ramificado, resp. formalmente étale), é necessário e suficiente que f' o seja. Além disso, a afirmação análoga para morfismos suaves (resp. não-ramificados, resp. étales) é também verdadeira.

Demonstração. — A última assertiva decorre da primeira, pois sob essas condições f é localmente de apresentação finita se, e somente se, f' também o é [EGA IV_2, 2.7.1].

O caso formalmente não-ramificado é simples e não precisamos que h seja quase-compacto. Para justificá-lo, note que, como o diagrama é cartesiano, a proposição (1.1.46) garante que temos um isomorfismo canônico $(h')^*(\Omega^1_{X/Y}) \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{X'/Y'}$. Por outro lado, visto que h' é fielmente plano, o funtor $(h')^*$ é fiel e exato. Sendo assim, $\Omega^1_{X'/Y'} = 0$ se, e somente se, $\Omega^1_{X/Y} = 0$, de onde, levando-se em conta (2.1.30, (i)), segue o resultado.

Tratemos agora o caso formalmente suave. Já observamos em (2.1.4, (iv)) que se f for formalmente suave, então f' também o será. Suponhamos, então, para a recíproca, que f' seja formalmente suave. Note que, em virtude de (2.1.8), podemos supor que X e Y são esquemas afins, digamos $X = \mathrm{Spec}(B)$ e $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Considerando geradores para a A-álgebra B, é possível obter um homomorfismo sobrejetivo de A-álgebras $A[X_\alpha]_{\alpha \in I} \to B$ e portanto uma imersão fechada de Y-esquemas $i : X \to \mathrm{Spec}(A[X_\alpha]_{\alpha \in I})$. Denotando por Z o esquema afim $\mathrm{Spec}(\mathrm{A}[\mathrm{X}_\alpha]_{\alpha\in\mathrm{I}})$ e por Z' o Y'-esquema $\mathrm{Z}\times_{\mathrm{Y}}\mathrm{Y}'$, obtemos que f' se fatora através de $\mathrm{Z}'\to\mathrm{Y}'$, de modo que temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "h'"'] & \mathrm{Z}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "h''"'] & \mathrm{Y}' \arrow[d, "h"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "i"'] & \mathrm{Z} \arrow[r, "g"'] & \mathrm{Y}, \end{tikzcd}$$

sendo os dois quadrados cartesianos e i, i' imersões fechadas. Tendo em conta (1.1.42) e (1.1.46), obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & (h')^*(\mathscr{C}_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (h')^*\big(i^*(\Omega^1_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})\big) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (h')^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{C}_{\mathrm{X}'/\mathrm{Z}'} \arrow[r] & (i')^*(\Omega^1_{\mathrm{Z}'/\mathrm{Y}'}) \arrow[r] & \Omega^1_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}'} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

sendo que os morfismos verticais são isomorfismos e as linhas são exatas, onde a segunda é exata curta, pois $f' = g'\circ i'$ é, por hipótese, formalmente suave (2.1.30, (iii-α)). Isso garante que a primeira linha é uma seqüência exata curta e como h' é fielmente plano, temos que a seqüência

$$0\to\mathscr{C}_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}\to i^*(\Omega^1_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}})\to\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}\to 0$$

é exata. Por outro lado, (2.1.25) assegura que $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo localmente projetivo e portanto ela, além de exata, é localmente cindida. Visto que g foi obtido a partir de uma álgebra de polinômios, ele é um morfismo formalmente suave (2.1.6, (v)). Assim, o critério jacobiano de suavidade formal (2.1.30, (iii-β)) garante que f é formalmente suave, concluindo a demonstração. ▲

Definição **(2.1.32).** — *Um morfismo de esquemas $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ é dito suave (resp. não-ramificado, resp. étale) em um ponto $x\in\mathrm{X}$ se existe uma vizinhança aberta* U *de x tal que a restrição $f|_{\mathrm{U}}$ seja um morfismo suave (resp. não-ramificado, resp. étale).*

Proposição **(2.1.33)** (Forma local dos morfismos suaves). — *Para que um morfismo de esquemas $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ seja suave em um ponto $x\in\mathrm{X}$, é necessário e suficiente que exista uma vizinhança aberta* U *de x tal que $f|_{\mathrm{U}}$ se fatore em um morfismo étale $\mathrm{U}\to\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}$ seguido pela projeção canônica $\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}\to\mathrm{Y}$.*

Demonstração. — A condição é suficiente, pois a projeção canônica $\rho:\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}\to\mathrm{Y}$ é suave (2.1.6, (v)). Para verificar a necessidade, observe que a hipótese assegura a existência de uma vizinhança aberta U de x tal que $(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})|_{\mathrm{U}}$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}|_{\mathrm{U}}$-módulo localmente livre de tipo finito (2.1.28). Tendo em vista (1.1.48), podemos, restringindo U se necessário, obter seções $s_1,\dots,s_n$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ definidas em U tais que $ds_1,\dots,ds_n$ formam uma base de $(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})|_{\mathrm{U}}$. Estas definem um Y-morfismo $s=(s_1,\dots,s_n):\mathrm{U}\to\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}$ tal que $\rho\circ s = f|_{\mathrm{U}}$. Por construção, o morfismo canônico $s^*(\Omega^1_{\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}})\to(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})|_{\mathrm{U}}$ é um isomorfismo e, como $f|_{\mathrm{U}}$ é suave, a proposição (2.1.30, (ii-β)) garante que s é formalmente étale. Por outro lado, $f|_{\mathrm{U}}$ e ρ são localmente de apresentação finita e isso assegura que s é localmente de apresentação finita, sendo, portanto, étale. ▲

Dizemos que os s_i definidos como na demonstração da proposição anterior formam um *sistema de coordenadas étales de* X *sobre* Y *em* x.

Lema **(2.1.34).** — *Sejam* A *um anel local,* k *o seu corpo de resíduos,* M *um* A*-módulo finitamente gerado,* N *um* A*-módulo projetivo e* $u : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *um homomorfismo de* A*-módulos. Para que* u *tenha uma inversa à esquerda, é necessário e suficiente que* $u \otimes 1_k : \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} k \to \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} k$ *seja injetivo.*

Demonstração. — É claro que a condição é necessária. Para provar que ela é suficiente, note que o fato de $u \otimes 1_k$ ser um homomorfismo injetivo entre k-*espaços vetoriais* garante que ele é invertível à esquerda. Usando que N é projetivo, podemos obter um homomorfismo de A-módulos $v : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ tal que $(v \circ u) \otimes 1_k = 1_{\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} k}$ e, como M é finitamente gerado, o lema de Nakayama permite que concluamos que $v \circ u : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ é um epimorfismo. Haja vista que M é um A-módulo hopfiano, $v \circ u : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ é um isomorfismo e portanto $(v \circ u)^{-1} \circ v$ é uma inversa à esquerda para u. ▲

Proposição **(2.1.35)** (Critério Jacobiano). — *Sejam* $i : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *uma imersão fechada de apresentação finita,* $\mathscr{I}$ *o ideal quase-coerente de* $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$ *associado a* i, x *um ponto de* X *e* $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$ *um morfismo suave em* $z = i(x)$. *Sob essas hipóteses, para que* $f = g \circ i$ *seja suave em* x, *é necessário e suficiente que* $\mathscr{I}_z$ *seja zero ou que existam seções* $s_1, \dots, s_r$ *de* $\mathscr{I}$ *definidas em torno de* z *tais que* $(s_1)_z, \dots, (s_r)_z$ *gerem* $\mathscr{I}_z$ *e os* $ds_i(z)$ *sejam linearmente independentes em* $\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}}(z)$.

Demonstração. — Justifiquemos primeiro o porquê da condição ser necessária. Observe que, após restringirmos f e g a abertos convenientes, podemos supô-las suaves. Assim, (2.1.30, (iii-α)) garante que a seqüência $0 \to \mathscr{C}_{\mathrm{X/Z}} \to i^*(\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}}) \to \Omega^1_{\mathrm{X/Y}} \to 0$ é exata e localmente cindida e isso permite concluir que a seqüência de $k(x)$-espaços vetoriais

(2.1.35.1) $$0 \to (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \to (\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}})(z) \to \Omega^1_{\mathrm{X/Y}}(x) \to 0$$

é exata. Suponhamos que $\mathscr{I}_z \neq 0$. Por hipótese, $\mathscr{I}$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulo de tipo finito e portanto podemos obter seções $s_1, \dots, s_r$ de $\mathscr{I}$ definidas em torno de z tais que suas imagens em $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z)$ formam uma base. O lema de Nakayama assegura que $(s_1)_z, \dots, (s_r)_z$ geram $\mathscr{I}_z$ e a exatidão de (2.1.35.1) permite concluir que $ds_1(z), \dots, ds_r(z)$ são linearmente independentes em $(\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}})(z)$. Para a recíproca, observe que podemos supor novamente, sem perda de generalidade, que g é globalmente suave. É imediato, então, que f é localmente de apresentação finita e, para justificar que ele é formalmente suave em uma vizinhança aberta de x, note que as hipóteses garantem que a seqüência (2.1.35.1) é exata e o lema (2.1.34) implica que
$$0 \to (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)_z \to (\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}})_z \to (\Omega^1_{\mathrm{X/Y}})_x \to 0$$
é uma seqüência exata curta cindida. Como $\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}}$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulo de apresentação finita, é possível obter uma vizinhança aberta U de x tal que
$$0 \to (\mathscr{C}_{\mathrm{X/Z}})|_{\mathrm{U}} \to (i^*(\Omega^1_{\mathrm{Z/Y}}))|_{\mathrm{U}} \to (\Omega^1_{\mathrm{X/Y}})|_{\mathrm{U}} \to 0$$
é uma seqüência exata curta cindida. O critério jacobiano de suavidade formal (2.1.30, (iii-β)) garante, então, que $f|_{\mathrm{U}}$ é formalmente suave e isso conclui a demonstração. ▲

Proposição **(2.1.36).** — *Seja* X *um esquema de tipo finito sobre um corpo* k. *As seguintes condições são equivalentes:*

a) X *é étale sobre* k.

b) X *é não-ramificado sobre* k.

c) X *é isomorfo a* $\mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, *sendo* $\mathrm{A} = \prod_{i=1}^n \mathrm{K}_i$, *onde, para cada* i, K_i *é um corpo e* K_i/k *é uma extensão finita separável.*

Demonstração. — É claro que a) implica b). Para mostrar que c) implica a) observe que basta considerar o caso $n=1$, ou seja, o de uma extensão de corpos K/k finita separável. O teorema do elemento primitivo [Mor96, 5.7] garante que existe $\alpha \in \mathrm{K}$ tal que $\mathrm{K}=k(\alpha)$. Assim, $\mathrm{K} \cong k[\mathrm{X}]/(f(\mathrm{X}))$, onde $f(\mathrm{X})$ é um polinômio irredutível separável. Uma aplicação direta do critério jacobiano (2.1.35) assegura que K é uma k-álgebra suave. Por outro lado, vimos em (1.1.14, (v)) que $\Omega^1_{\mathrm{K}/k}=0$ e portanto K é uma k-álgebra formalmente não-ramificada (2.1.30, (i)), sendo, então, uma k-álgebra étale.

Provemos, por fim, que b) implica c). Primeiro observe que podemos reduzir a questão para o caso em que $\mathrm{X}=\operatorname{Spec}(\mathrm{A})$ é um esquema afim. De fato, podemos cobrir X com finitos abertos afins, que satisfazem o resultado por hipótese de redução, e então cada um deles, e portanto também X, é união de finitos pontos cujos corpos de resíduos são extensões finitas separáveis de k. Isso garante que X é um esquema afim com anel de coordenadas como em c). Note agora que podemos supor que k é um corpo algebricamente fechado. Com efeito, se $\bar{k}$ é um fecho algébrico de k, então $\bar{\mathrm{X}}=\mathrm{X}\otimes_k \bar{k}$ é um $\bar{k}$-esquema não-ramificado (2.1.4, (iv)) e a conclusão assegura que $\mathrm{A}\otimes_k \bar{k}$ é isomorfa, como $\bar{k}$-álgebra, a um produto finito de cópias de $\bar{k}$. Isso garante que A é um k-álgebra finita e geometricamente reduzida e portanto é isomorfa a um produto finito de extensões finitas separáveis de k [EGA IV_2, 4.6.1].

Para finalizar a demonstração precisamos provar que uma k-álgebra não-ramificada A, sendo k um corpo algebricamente fechado, é isomorfa a um produto finito de cópias de k. Sob essas hipóteses, os pontos fechados de $\mathrm{X}=\operatorname{Spec}(\mathrm{A})$ são racionais e a proposição (1.1.50) garante que o espaço cotangente de Zariski $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ é isomorfo a $\Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x)=0$ para todo ponto x de X. O lema de Nakayama assegura que $\mathfrak{m}_x=0$ e assim $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}\cong k$, de onde concluímos que todo ideal maximal de A é um ideal primo minimal e portanto que A é um anel artiniano. Logo, $\mathrm{X}=\operatorname{Spec}(\mathrm{A})$ é um conjunto finito de pontos com a topologia discreta e $\mathrm{A}\cong\prod_{x\in\mathrm{X}}\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. ▲

2.2. Suavidade, regularidade e platitude.

(2.2.1) Sejam A um anel local noetheriano, $\mathfrak{m}$ seu ideal maximal e $k=\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ seu corpo de resíduos. A versão generalizada do teorema do ideal principal de Krull [AM69, 11.16] garante que $\dim(\mathrm{A}) \le \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ e se a igualdade for verificada, diremos que A é um *anel local regular*. Isso equivale a dizer que $\mathfrak{m}$ pode ser gerado por $n=\dim(\mathrm{A})$ elementos $x_1,\ldots,x_n$ e estes serão ditos um *sistema regular de parâmetros de* A. Nesse caso, as imagens dos x_i em $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ formarão uma base.

Consideremos um anel local regular $(\mathrm{A},\mathfrak{m},k)$ de dimensão n e I um ideal próprio de A. Para que A/I seja regular, é necessário e suficiente que existam geradores $x_1,\ldots,x_r$ de I fazendo parte de um sistema regular de parâmetros de A [EGA 0_{IV}, 17.1.9]. Se essas condições forem satisfeitas, então $\dim_k((\mathrm{I}/\mathrm{I}^2)\otimes_{\mathrm{A}} k)=r$ e $\dim(\mathrm{A}/\mathrm{I})=n-r$.

Um teorema de Auslander e Buchsbaum garante que todo anel local regular é um domínio fatorial [Mat86, 20.3]. Aqui, no entanto, precisaremos saber apenas que ele é um domínio integral, cuja demonstração é muito mais simples [Mat86, 14.3]. Além disso, graças a um teorema devido a Serre [Mat86, 19.3], temos que se A é um anel local regular, então, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, a localização $\mathrm{A}_{\mathfrak{p}}$ é também um anel local regular.

(2.2.2) Diremos que um esquema localmente noetheriano X é *regular em um ponto* x de X se $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ for um anel local regular. Quando X for regular em todos os seus pontos, diremos que ele é um *esquema regular*. Um anel noetheriano A é dito *regular* se o esquema afim Spec(A) for regular e nessa situação $\mathbf{A}^n_{\mathrm{A}}$ será um esquema regular para todo $n \geq 0$ [Mat86, 19.5].

Em virtude do teorema de Serre descrito em (2.2.1), no caso de um anel local, essa definição coincide com a que demos anteriormente. Esse teorema combinado com o fato de todo ponto de um esquema localmente noetheriano X especializar para um ponto fechado [Stacks, Tag 02IL] garante que X será regular se ele for regular em todos os seus pontos fechados. Além disso, o fato de todo anel local regular ser um domínio integral assegura que as componentes irredutíveis de um esquema regular são idênticas às suas componentes conexas e estas são abertas [EGA I, 6.1.10].

Teorema **(2.2.3).** — *Seja* X *um esquema localmente de tipo finito sobre um corpo* k.

(i) *Se* X *for um* k*-esquema suave, então* X *será um esquema regular.*

(ii) *Se* k *for um corpo perfeito e* X *for um esquema regular, então* X *será um* k*-esquema suave.*

Antes de demonstrarmos o teorema, vejamos o que pode ocorrer quando k não é um corpo perfeito. Nesse caso, ele é necessariamente de característica $p > 0$ e existe um elemento $a \in k$ que não está na imagem do endomorfismo de Frobenius de k. Assim, o polinômio $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^p - a$ é irredutível em $k[\mathrm{X}]$ e se K for um corpo de decomposição para f, então $f(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - \alpha)^p$ para algum $\alpha \in \mathrm{K}$ e portanto $\mathrm{K} = k(\alpha) \cong k[\mathrm{X}]/(f(\mathrm{X}))$. O k-esquema $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{K})$ não é suave, apesar de ser regular, pois o primeiro morfismo da seqüência conormal local obtida a partir do homomorfismo sobrejetivo de k-álgebras $k[\mathrm{X}] \to \mathrm{K}$

$$\mathrm{I}/\mathrm{I}^2 \to \Omega^1_{k[\mathrm{X}]/k} \otimes_{k[\mathrm{X}]} \mathrm{K} \to \Omega^1_{\mathrm{K}/k} \to 0,$$

onde $\mathrm{I} = (f(\mathrm{X}))$, é nulo e portanto ela não é uma seqüência exata curta cindida.

Demonstração. — (i) Como o problema é local em X, podemos supor que existe uma imersão fechada de k-esquemas $i : \mathrm{X} \to \mathbf{A}^n_k$. Seja $\mathscr{I}$ o ideal quase-coerente de $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_k}$ que define X como subesquema fechado de $\mathbf{A}^n_k$. Se $x \in \mathrm{X}$ e $z = i(x)$, então o critério jacobiano (2.1.35) garante que existem seções $s_1, \ldots, s_r$ de $\mathscr{I}$ definidas em torno de z tais que $(s_1)_z, \ldots, (s_r)_z$ geram $\mathscr{I}_z$ e os $ds_i(z)$ são linearmente independentes em $\Omega^1_{\mathbf{A}^n_k/k}(z)$. Assim, as imagens dos $(s_i)_z$ em $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z)$ formam uma base e definindo $u : (\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \to \mathfrak{m}_{\mathbf{A}^n_k,z}/\mathfrak{m}^2_{\mathbf{A}^n_k,z}$ por $\overline{(s_i)_z} \otimes 1 \mapsto \overline{(s_i)_z}$ obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \arrow[rr, tail] \arrow[dr] & & \Omega^1_{\mathbf{A}^n_k/k}(z) \\
& \mathfrak{m}_{\mathbf{A}^n_k,z}/\mathfrak{m}^2_{\mathbf{A}^n_k,z} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}.$$

Isso garante que $\overline{(s_1)}_z, \ldots, \overline{(s_r)}_z$ são linearmente independentes em $\mathfrak{m}_{\mathbf{A}^n_k,z}/\mathfrak{m}^2_{\mathbf{A}^n_k,z}$ e portanto $(s_1)_z, \ldots, (s_r)_z$ fazem parte de um sistema regular de parâmetros de $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_k,z}$, garantindo que $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \cong \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_k,z}/\mathscr{I}_z$ é um anel local regular (2.2.1). Como isso vale para todo ponto x de X, obtemos que X é um esquema regular.

(ii) Observe inicialmente que, em virtude de (2.1.8), podemos supor que X é um esquema afim. Note também que, como todo ponto especializa para um ponto fechado em um esquema quase-compacto e como, por definição, o conjunto dos pontos onde X é um k-esquema suave é aberto, é suficiente provar a suavidade em pontos fechados. Seja, então, $x \in \mathrm{X}$ um ponto fechado e considere uma imersão fechada de k-esquemas $i : \mathrm{X} \to \mathbf{A}^n_k$ de ideal $\mathscr{I}$. O resultado seguirá do critério jacobiano (2.1.35) uma vez que provarmos que $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \to \Omega^1_{\mathbf{A}^n_k/k}(z)$ é injetivo, onde $z = i(x)$. Como k é perfeito e x é um ponto fechado, o Nullstellensatz assegura que $k(x)/k$ é uma extensão finita separável e portanto $\Omega^1_{k(x)/k} = 0$ (1.1.14, (v)). A seqüência exata

(2.2.3.1) $$(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \to \Omega^1_{\mathbf{A}^n_k/k}(z) \to \Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x) \to 0$$

nos permite concluir que $\dim_{k(z)}\big((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z)\big) \geq n - \dim_{k(x)}\big(\Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x)\big)$. Por outro lado, como $\Omega^1_{k(x)/k} = 0$, o homomorfismo canônico $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to \Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x)$ é sobrejetivo e portanto $\dim_{k(x)}\big(\Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x)\big) \leq \dim_{k(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$. Por hipótese, X é regular em x, de onde obtemos que $\dim_{k(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = \dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$. Por fim, visto que $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \cong \mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_k,z}/\mathscr{I}_z$, (2.2.1) implica que

$$\dim_{k(z)}\big((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z)\big) = \dim(\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_k,z}) - \dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}) \leq n - \dim_{k(x)}\big((\Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x)\big).$$

Assim, $\dim_{k(z)}\big((\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)\big) = n - \dim_{k(x)}\big(\Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x)\big)$ e combinando isso com o fato de (2.2.3.1) ser exata, temos que $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \to \Omega^1_{\mathbf{A}^n_k/k}(z)$ é injetivo, concluindo a demonstração. ▲

Corolário **(2.2.4).** — *Sejam k um corpo e* X *um k-esquema localmente de tipo finito. As seguintes condições são equivalentes:*

a) X *é um k-esquema suave.*

b) *Para toda extensão k' de k,* $\mathrm{X}\otimes_k k'$ *é um esquema regular.*

c) *Existe uma extensão perfeita k' de k tal que* $\mathrm{X}\otimes_k k'$ *é um esquema regular.*

Demonstração. — Como a noção de suavidade é estável por mudança de base, se X for um k-esquema suave e k'/k for uma extensão de corpos qualquer, então $\mathrm{X}\otimes_k k'$ será um k'-esquema suave e portanto regular, graças a (2.2.3, (i)). Isso mostra que a) implica b). É óbvio que b) implica c). Para justificar que a) decorre de c), observe que o fato de k' ser perfeito assegura que $\mathrm{X}\otimes_k k'$ é um k'-esquema suave (2.2.3, (ii)). Por outro lado, k' é uma k-álgebra fielmente plana e a proposição (2.1.31) garante que X é um k-esquema suave. ▲

Teorema **(2.2.5).** — *Sejam $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo localmente de apresentação finita, x um ponto de* X, *$y = f(x)$ e $\mathrm{X}_y = \mathrm{X}\times_{\mathrm{Y}} k(y)$ a fibra de f em y.*

(i) *Para que f seja não-ramificado no ponto x, é necessário e suficiente que X_y seja não-ramificado sobre $k(y)$ no ponto x.*

(ii) *Para que f seja suave no ponto x, é necessário e suficiente que f seja plano no ponto x e que X_y seja suave sobre $k(y)$ no ponto x.*

(iii) *Para que f seja étale no ponto x, é necessário e suficiente que f seja plano no ponto x e que X_y seja étale sobre $k(y)$ no ponto x.*

Demonstraremos este teorema em (2.2.14), pois, embora já seja possível justificar o caso não-ramificado, precisaremos de algumas preliminares para o caso suave. Antes de iniciá-las, note que o teorema (2.2.5) garante que todo morfismo suave é plano e localmente de apresentação finita e por conseguinte é universalmente aberto [GW10, Teorema 14.33]. Uma outra conseqüência é o

Corolário **(2.2.6).** — *Um morfismo de esquemas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ é étale em um ponto x de* X *se, e somente se, ele é plano no ponto x e não-ramificado no ponto x.*

Demonstração. — Isso resulta imediatamente de (2.2.5) e (2.1.36). ▲

(2.2.7) Seja I um ideal de um anel A. Diremos que um A-módulo M é *idealmente separado para* I se, para todo ideal finitamente gerado $\mathfrak{a}$ de A, o A-módulo $\mathfrak{a}\otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ é um espaço topológico Hausdorff quando considerado com a topologia I-ádica.

Seja B uma A-álgebra noetheriana tal que IB está contido no radical de Jacobson de B, que denotaremos J(B). Então todo B-módulo finitamente gerado M é um A-módulo idealmente separado para I. Com efeito, se $\mathfrak{a}$ é um ideal finitamente gerado de A, então $\mathfrak{a}\otimes_A M$ é um B-módulo finitamente gerado e, como $IB \subseteq J(B)$, a topologia I-ádica em $\mathfrak{a}\otimes_A M$ é mais fina que a topologia J(B)-ádica, que é Hausdorff, graças a um corolário do teorema de intersecção de Krull [AM69, 10.19]. Este resultado se aplica, sobretudo, no caso em que A, B são anéis locais noetherianos, $A \to B$ é um homomorfismo local e I é o ideal maximal de A.

Proposição **(2.2.8).** — *Sejam* A *um anel noetheriano,* I *um ideal de* A *e* M *um* A*-módulo idealmente separado para* I*. Para que* M *seja um* A*-módulo plano, é necessário e suficiente que* M/I^nM *seja um* (A/I^n)*-módulo plano para todo* $n \geq 1$.

Esta proposição contém apenas um dos itens de um critério local de platitude utilizado em inúmeras situações e sugerimos que o leitor consulte, para o enunciado completo, [Mat86, 22.3] ou [BouAC, Capítulo III, § 5.2, Teorema 1].

Demonstração. — A condição é claramente necessária e vale sem qualquer hipótese sobre A ou M. Para justificar que ela é suficiente, basta provar que, para todo ideal $\mathfrak{a}$ de A, a aplicação canônica $j : \mathfrak{a}\otimes_A M \to M$ é injetiva [Wei94, 3.2.4]. Como, por hipótese, $\mathfrak{a}\otimes_A M$ é um espaço topológico Hausdorff quando considerado com a topologia I-ádica, temos que $\bigcap_{n\geq 1} I^n(\mathfrak{a}\otimes_A M) = 0$ e o resultado seguirá uma vez que mostrarmos que o núcleo de j está contido em $I^n(\mathfrak{a}\otimes_A M)$ para todo $n \geq 1$. Fixado n, o lema de Artin-Rees [AM69, 10.10] assegura que $\mathfrak{a}_k = I^k \cap \mathfrak{a} \subseteq I^n\mathfrak{a}$ para um inteiro k suficientemente grande. Designemos por $p : \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k$, $g : \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k \to \mathfrak{a}/I^n\mathfrak{a}$ e $h : \mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k \to A/I^k$ as aplicações canônicas. Temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a}\otimes_A M \arrow[r, "p\otimes 1_M"] \arrow[d, "j"'] & (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k)\otimes_A M \arrow[r, "g\otimes 1_M"] \arrow[d, "h\otimes 1_M"] & (\mathfrak{a}/I^n\mathfrak{a})\otimes_A M \\
M \arrow[r] & (A/I^k)\otimes_A M,
\end{tikzcd}$$

de maneira que, como $(\mathfrak{a}/I^n\mathfrak{a})\otimes_A M \cong (\mathfrak{a}\otimes_A M)/I^n(\mathfrak{a}\otimes_A M)$, o núcleo de $(g\circ p)\otimes 1_M$ é justamente $I^n(\mathfrak{a}\otimes_A M)$. Para concluir a demonstração, é suficiente argumentar que $h\otimes 1_M$ é injetivo. Para isso, note que, como $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k$ tem estrutura de (A/I^k)-módulo, $h\otimes 1_M$ coincide, a menos de isomorfismos, com o homomorfismo canônico

$$(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}_k)\otimes_{A/I^k}(M/I^kM) \to M/I^kM,$$

que é injetivo, pois, por hipótese, M/I^kM é um (A/I^k)-módulo plano. ▲

Lema **(2.2.9).** — *Sejam* $A \to B$ *um homomorfismo local entre anéis locais noetherianos,* $\mathfrak{m}$ *o ideal maximal de* A *e* $k = A/\mathfrak{m}$*. Se* M, N *são dois* B*-módulos finitamente gerados, sendo* N *um* A*-módulo plano, e* $u : M \to N$ *é um homomorfismo de* B*-módulos, então, para que* $u\otimes 1_k : M\otimes_A k \to N\otimes_A k$ *seja injetivo, é necessário e suficiente que* u *seja injetivo e que* $\mathrm{Coker}(u)$ *seja um* A*-módulo plano.*

Demonstração. — É claro que a condição é suficiente. Justifiquemos o porquê dela ser necessária. Para simplificar a notação, sejam $A_n = A/\mathfrak{m}^{n+1}$, que é um anel local artiniano, $M_n = M/\mathfrak{m}^{n+1}M$, $N_n = N/\mathfrak{m}^{n+1}N$ e $u_n : M_n \to N_n$ o homomorfismo de A_n-módulos induzido por u. Mostraremos primeiro que u_n tem uma inversa à esquerda para cada $n \geq 0$. Como, por hipótese, $u\otimes 1_k$ é injetivo, temos que cada $u_n\otimes 1_k : M_n\otimes_{A_n} k \to N_n\otimes_{A_n} k$

é também injetivo. Por outro lado, o porismo (2.1.27) garante que o A_n-módulo plano N_n é na verdade um A_n-módulo livre e que se considerarmos uma base do k-espaço vetorial $M_n \otimes_{A_n} k$, podemos levantar sua imagem em $N_n \otimes_{A_n} k$ para uma parte de uma base de N_n, que gera um A_n-submódulo livre L de N_n. Podemos, então, definir um homomorfismo de A_n-módulos $\varphi : L \to M_n$ fazendo o diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, hook] \\ M_n \arrow[r, "u_n"'] & N_n \end{tikzcd}$$

comutar e tal que $\varphi \otimes 1_k : L \otimes_{A_n} k \to M_n \otimes_{A_n} k$ é um isomorfismo. A versão do lema de Nakayama para ideais nilpotentes assegura que φ é sobrejetivo e portanto um isomorfismo, de onde concluimos que u_n tem uma inversa à esquerda. Sendo assim,

$$0 \to M_n \xrightarrow{u_n} N_n \to \operatorname{Coker}(u_n) \to 0$$

é uma seqüência exata curta cindida e o fato de N_n ser um A_n-módulo plano implica que $\operatorname{Coker}(u_n)$ é também um A_n-módulo plano para todo $n \geq 0$. Graças a (2.2.7), $\operatorname{Coker}(u)$ é um A-módulo idealmente separado para $\mathfrak{m}$ e a proposição (2.2.8) garante, então, que $\operatorname{Coker}(u)$ é um A-módulo plano. Por fim, note que, como cada u_n é injetivo e o funtor $\varprojlim$ é exato à esquerda, temos que $\hat{u} : \widehat{M} \to \widehat{N}$ é também injetivo e o fato de M, N serem espaços topológicos Hausdorff quando considerados com a topologia $\mathfrak{m}$-ádica (2.2.7) unido à comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"] \arrow[d, tail] & N \arrow[d, tail] \\ \widehat{M} \arrow[r, tail, "\hat{u}"'] & \widehat{N} \end{tikzcd}$$

é suficiente para garantir que u é injetivo, concluindo a demonstração. ▲

(2.2.10) Sejam A um anel e M um A-módulo. Dizemos que um elemento f de A é M-*regular* se a homotetia $f_M : x \mapsto fx$ de M é injetiva. Mais geralmente, uma seqüência de elementos $f_1, \ldots, f_r$ de A é dita M-*regular* se, para cada i, f_i é $M/\big(\sum_{j=1}^{i-1} f_j M\big)$-regular.[1] Em geral, após permutarmos os elementos de uma seqüência M-regular, não é verdade que eles formarão uma nova seqüência M-regular.

Sejam A um anel local regular e $x_1, \ldots, x_r$ um sistema regular de parâmetros de A. Graças aos fatos reunidos em (2.2.1), $(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1, \ldots, x_r)$ é uma cadeia estritamente crescente de *ideais primos* e portanto $x_1, \ldots, x_r$ é uma seqüência A-regular.

Lema **(2.2.11).** — *Sejam* A *um anel,* B *uma* A*-álgebra noetheriana e* M *um* B*-módulo finitamente gerado.*

(i) *Se* J *é um ideal de* B *contido no seu radical de Jacobson* J(B) *e* $M_n = M/J^{n+1}M$ *é um* A*-módulo plano para todo* $n \geq 0$*, então* M *é um* A*-módulo plano.*

(ii) *Se considerarmos um elemento* M*-regular* f *de* J(B) *e* M/fM *for um* A*-módulo plano, então* M *também o será.*

Demonstração. — (i) Basta provar que, para todo homomorfismo injetivo $u : N' \to N$ de A-módulos finitamente gerados, $v = 1_M \otimes u : M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ é injetivo. Como $M \otimes_A N'$ e

[1] Não exigiremos aqui que $M/\big(\sum_{j=1}^{r} f_j M\big)$ seja diferente de zero.

$M \otimes_A N$ são B-módulos finitamente gerados, eles são espaços topológicos Hausdorff quando considerados com a topologia J(B)-ádica [AM69, 10.19]. Como na demonstração de (2.2.9), para que v seja injetivo é suficiente que o homomorfismo $\hat{v} : (M \otimes_A N')\hat{} \to (M \otimes_A N)\hat{}$ entre os completamentos J(B)-ádicos seja injetivo. Temos que $\hat{v} = \varprojlim v_n$, onde v_n é o homomorfismo $1_{M_n} \otimes u : M_n \otimes_A N' \to M_n \otimes_A N$. Por hipótese, M_n é um A-módulo plano e portanto v_n é injetivo para todo $n \geq 0$. Então $\hat{v}$ é também injetivo, pois o funtor $\varprojlim$ é exato à esquerda.

(ii) Temos, do fato da homotetia $f_M : M \to M$ ser injetiva, que a seqüência

$$0 \to M/f^n M \to M/f^{n+1} M \to M/f M \to 0,$$

sendo o primeiro homomorfismo induzido por f_M, é exata para todo $n \geq 1$. Por indução em n, concluímos que $M/f^n M$ é um A-módulo plano e portanto obtemos de (i) que M também o é. ▲

Proposição **(2.2.12)**. — *Sejam* $A \to B$ *um homomorfismo local entre anéis locais noetherianos,* k *o corpo de resíduos de* A*,* $f_1, \ldots, f_r$ *uma seqüência de elementos do ideal maximal de* B *e* M *um* B*-módulo finitamente gerado. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *A seqüência* $f_1, \ldots, f_r$ *é* M*-regular e os quocientes* $M_i = M/\big(\sum_{j=1}^{i} f_j M\big)$ *são* A*-módulos planos para* $1 \leq i \leq r$*.*

b) *A seqüência* $f_1, \ldots, f_r$ *é* M*-regular e* M_r *é um* A*-módulo plano.*

c) *A seqüência* $f_1 \otimes 1, \ldots, f_r \otimes 1$ *de elementos de* $B \otimes_A k$ *é* $(M \otimes_A k)$*-regular e* M *é um* A*-módulo plano.*

Demonstração. — É claro que a) implica b). Para provar que b) implica c), podemos, por indução em r, nos restringir ao caso em que $r = 1$, mas este decorre imediatamente de (2.2.9) e (2.2.11, (ii)). Por fim, note que para justificar que c) implica a) é também suficiente considerar o caso em que $r = 1$, que é uma conseqüência direta de (2.2.9). ▲

Proposição **(2.2.13)**. — *Sejam* $g : Z \to Y$ *um morfismo localmente de apresentação finita,* $\mathscr{F}$ *um* $\mathscr{O}_Z$*-módulo quase-coerente de apresentação finita,* z *um ponto de* Z*,* $y = g(z)$ *e* $s_1, \ldots, s_r$ *seções globais de* $\mathscr{O}_Z$ *tais que* $(s_1)_z, \ldots, (s_r)_z$ *pertencem ao ideal maximal* $\mathfrak{m}_z$ *de* $\mathscr{O}_{Z,z}$*. Denotemos por* Z_y *a fibra de* g *em* y *e por* $\mathscr{F}_y$ *a imagem inversa do* $\mathscr{O}_Z$*-módulo* $\mathscr{F}$ *para* Z_y*, que é um* $\mathscr{O}_{Z_y}$*-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *A seqüência* $(s_1)_z, \ldots, (s_r)_z$ *é* $\mathscr{F}_z$*-regular e os quocientes* $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}/\big(\sum_{j=1}^{i} s_j \mathscr{F}\big)$ *são* g*-planos no ponto* z *para* $1 \leq i \leq r$*.*

b) *A seqüência* $(s_1)_z, \ldots, (s_r)_z$ *é* $\mathscr{F}_z$*-regular e o quociente* $\mathscr{F}_r$ *é* g*-planos no ponto* z*.*

c) *A seqüência* $(s_1)_z \otimes 1, \ldots, (s_r)_z \otimes 1$ *de elementos de* $\mathscr{O}_{Z_y,z} \cong \mathscr{O}_{Z,z} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,y}} k(y)$ *é* $(\mathscr{F}_y)_z$*-regular e* $\mathscr{F}$ *é* g*-plano no ponto* z*.*

Demonstração. — Se supusermos que Y é um esquema localmente noetheriano, em cujo caso Z também o será, então o resultado decorre imediatamente de (2.2.12). Para o caso geral, devemos empregar as técnicas de eliminação de hipóteses noetherianas e sugerimos que o leitor consulte [EGA IV_3, 11.3.8] para os detalhes. ▲

(2.2.14) *Demonstração do teorema* (2.2.5). — (i) Como f é localmente de apresentação finita, temos, em virtude de (2.1.30, (i)) e do fato de módulos de tipo finito terem suporte fechado, que f é não-ramificado no ponto x se, e somente se, $(\Omega^1_{X/Y})_x = 0$. Usando o mesmo argumento, concluímos que X_y é um $k(y)$-esquema não-ramificado no ponto x se, e só se, $(\Omega^1_{X_y/k(y)})_x = 0$. Graças a (1.1.46), temos que $(\Omega^1_{X_y/k(y)})_x \cong (\Omega^1_{X/Y})_x/\mathfrak{m}_{Y,y}(\Omega^1_{X/Y})_x$ e o resultado segue, então, do lema de Nakayama.

(ii) Mostremos primeiro que a condição é necessária. Como morfismos suaves são estáveis por mudança de base, é claro que a fibra X_y é um $k(y)$-esquema suave no ponto x. Para justificar que f é plano no ponto x, podemos supor que X, Y são esquemas afins. Nesse caso, temos uma imersão fechada de apresentação finita de Y-esquemas $i:X\to \mathbf{A}^n_Y$, cujo ideal quase-coerente associado denotaremos por $\mathscr{I}$. Se $Z=\mathbf{A}^n_Y$, $z=i(x)$ e $g:Z\to Y$ é a projeção canônica, então o critério jacobiano (2.1.35) garante que existem seções $s_1,\dots,s_r$ de $\mathscr{I}$ definidas em um vizinhança aberta de z tais que $(s_1)_z,\dots,(s_r)_z$ geram $\mathscr{I}_z$ e os $(ds_i)(z)$ são linearmente independentes em $\Omega^1_{Z/Y}(z)\cong(\Omega^1_{Z_y/k(y)})(z)$. Assim, as imagens dos $(s_i)_z$ em $(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z)$ formam uma base e definindo $u:(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z)\to \mathfrak{m}_{Z_y,z}/\mathfrak{m}^2_{Z_y,z}$ por $\overline{(s_i)_z}\otimes 1\mapsto \overline{(s_i)_z\otimes 1}$ obtemos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \arrow[rr, tail] \arrow[dr] & & \Omega^1_{Z/Y}(z) \\
& \mathfrak{m}_{Z_y,z}/\mathfrak{m}^2_{Z_y,z}\,. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Isso assegura que $\overline{(s_1)_z\otimes 1},\dots,\overline{(s_r)_z\otimes 1}$ são linearmente independentes em $\mathfrak{m}_{Z_y,z}/\mathfrak{m}^2_{Z_y,z}$ e portanto $(s_1)_z\otimes 1,\dots,(s_r)_z\otimes 1$ fazem parte de um sistema regular de parâmetros de $\mathscr{O}_{Z_y,z}$. Assim, temos de (2.2.10) que eles formam uma seqüência $\mathscr{O}_{Z_y,z}$-regular e, como $g:Z\to Y$ é um morfismo plano, a proposição (2.2.13) garante que $\mathscr{O}_{X,x}\cong\mathscr{O}_{Z,z}/\big((s_1)_z,\dots,(s_r)_z\big)$ é uma $\mathscr{O}_{Y,y}$-álgebra plana, o que mostra que f é plano no ponto x.

Justifiquemos agora o porquê da condição ser suficiente. Podemos novamente nos restringir ao caso em que X, Y são esquemas afins, de maneira que temos uma imersão fechada de apresentação finita de Y-esquemas $i:X\to\mathbf{A}^n_Y$ de ideal $\mathscr{I}$. Sejam $Z=\mathbf{A}^n_Y$ e $z=i(x)$. Visto que, por hipótese, f é plano no ponto x, temos que a seqüência

$$0\to\mathscr{I}_z\otimes_{\mathscr{O}_{Y,y}}k(y)\to\mathscr{O}_{Z_y,z}\to\mathscr{O}_{X_y,x}\to 0,$$

obtida aplicando o funtor $(\cdot)\otimes_{\mathscr{O}_{Y,y}}k(y)$ à seqüência exata $0\to\mathscr{I}_z\to\mathscr{O}_{Z,z}\to\mathscr{O}_{X,x}\to 0$, é também exata. Como estamos supondo que X_y é um $k(y)$-esquema suave no ponto x, podemos obter, usando o critério jacobiano (2.1.35), seções $t_1,\dots,t_r$ de $\mathscr{O}_{Z_y}$ definidas em torno de z tais que $(t_1)_z,\dots,(t_r)_z$ geram $\mathscr{I}_z\otimes_{\mathscr{O}_{Y,y}}k(y)$ e $dt_1(z),\dots,dt_r(z)$ são linearmente independentes em $\Omega^1_{Z_y/k(y)}(z)\cong\Omega^1_{Z/Y}(z)$. Fazendo uso do lema de Nakayama, concluímos que se levantarmos os t_i para seções s_i de $\mathscr{O}_Z$ definidas em uma vizinhança de z, então $(s_1)_z,\dots,(s_r)_z$ geração $\mathscr{I}_z$ e $ds_1(z),\dots,ds_r(z)$ serão linearmente independentes em $\Omega^1_{Z/Y}(z)$. Após um nova aplicação do critério jacobiano (2.1.35), deduzimos que f é suave no ponto x.

(iii) Decorre imediatamente de (i) e (ii), concluindo a demonstração do teorema. ▲

(2.2.15) A ***dimensão de um espaço topológico*** X ***em um ponto*** x, denotada $\dim_x(X)$ é o número $\inf_U(\dim(U))$, onde U percorre o conjunto de vizinhanças abertas U de x. Segue diremente da definição que a função $x\mapsto\dim_x(X)$ é semicontínua superiormente. Quando X for um k-esquema localmente de tipo finito, podemos calculá-la através da fórmula

(2.2.15.1) $$\dim_x(X)=\dim(\mathscr{O}_{X,x})+\operatorname{tr.deg}_k k(x),$$

cuja demonstração pode ser encontrada em [GW10, Lema 14.94]. Além disso, temos, nesse caso, que $\dim_x(X)=\dim(U)$ para qualquer aberto irredutível U contendo x. Em particular, se X for um k-esquema suave, então $\dim_x(X)$ será exatamente a dimensão da componente irredutível de X que contém x, pois, em virtude de (2.2.3, (i)), X será um esquema regular e portanto suas componentes irredutíveis serão abertas, como relembramos em (2.2.2).

Definição **(2.2.16).** — *Seja* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *um morfismo localmente de tipo finito. A dimensão relativa de* f *no ponto* x *de* X, *denotada* $\dim_x f$, *é o inteiro não-negativo* $\dim_x(\mathrm{X}_{f(x)})$, *sendo* $\mathrm{X}_{f(x)}$ *a fibra de* f *em* x. *Diremos que* f *é puramente de dimensão relativa* n *se tivermos, para todo ponto* $x \in \mathrm{X}$, $\dim_x f = n$.

É interessante saber, embora não precisemos no futuro, que um teorema de Chevalley assegura que a função $x \mapsto \dim_x f$ é semicontínua superiormente [EGA IV_3, 13.1.3].

Proposição **(2.2.17).** — *Seja* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *um morfismo suave. O posto do* $\mathscr{O}_\mathrm{X}$*-módulo localmente livre* $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ (2.1.28) *em um ponto* x *de* X *coincide com* $\dim_x f$ *e, em particular, a função* $x \mapsto \dim_x f$ *é localmente constante.*

Demonstração. — Sejam $y = f(x)$ e X_y a fibra de f em y, que é um $k(y)$-esquema suave (2.2.5). Como vimos em (1.1.46), a imagem inversa do $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-módulo $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ através da projeção $\mathrm{X}_y \to \mathrm{X}$ é isomorfa ao $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_y}$-módulo $\Omega^1_{\mathrm{X}_y/k(y)}$. Assim, eles têm o mesmo posto no ponto x e portanto podemos nos restringir ao caso em que $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(k)$, sendo k um corpo. Agora observe que se $\bar{k}$ é um fecho algébrico de k e $\overline{\mathrm{X}} = \mathrm{X} \otimes_k \bar{k}$, então é possível encontrar um ponto $\bar{x} \in \overline{\mathrm{X}}$ cuja projeção em X é x e usando novamente (1.1.46) e a igualdade $\dim_x(\mathrm{X}) = \dim_{\bar{x}}(\overline{\mathrm{X}})$ [Stacks, Tag 02FY], podemos nos ater ao caso de um corpo algebricamente fechado. Sob essas hipóteses, o Nullstellensatz garante que os pontos fechados de X são densos e coincidem com os pontos racionais. Uma vez que a função $x' \mapsto \dim_{x'}(\mathrm{X})$ é semicontínua superiormente, é sufiente verificar a assertiva nesses pontos. Mas, nesse caso, a proposição (1.1.50) assegura que $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ e $(\Omega^1_{\mathrm{X}/k})(x)$ são isormorfos como k-espaços vetoriais e então $\mathrm{rk}_x(\Omega^1_{\mathrm{X}/k}) = \dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$, pois $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ é um anel local regular (2.2.3, (i)). Por fim, deduzimos da fórmula (2.2.15.1) que $\dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}) = \dim_x f$, concluindo a demonstração. ▲

Proposição **(2.2.18).** — *Seja* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *um morfismo localmente de apresentação finita. Para que* f *seja suave em um ponto* x *de* X, *é necessário e suficiente que* f *seja plano no ponto* x *e que* $(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_x$ *seja gerado como* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$*-módulo por* $\dim_x f$ *elementos.*

Demonstração. — A necessidade decorre de (2.2.5, (ii)) e (2.2.17). Para mostrar que essa condição é suficiente, podemos, em virtude de (1.1.46) e (2.2.5, (ii)) supor que Y é o espectro de um corpo k. Como a questão é local em X podemos supô-lo um esquema afim. Consideremos, então, uma imersão fechada $i : \mathrm{X} \to \mathbf{A}^n_k$ de ideal $\mathscr{I}$ e seja $z = i(x)$. Concluímos, da seqüência exata

$$(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2)(z) \xrightarrow{\delta} (\Omega^1_{\mathbf{A}^n_k/k})(z) \to \Omega^1_{\mathrm{X}/k}(x) \to 0,$$

que a imagem de δ tem dimensão maior ou igual a $r = n - \dim_x(\mathrm{X})$ e portanto podemos obter pelo menos r seções $s_1, \ldots, s_r$ de $\mathscr{I}$ definidas em torno de z tais que os $ds_i(z)$ são linearmente independentes em $(\Omega^1_{\mathbf{A}^n_k/k})(z)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que as seções s_i estão definidas globalmente. Assim, o critério jacobiano (2.1.35) assegura que elas definem um subsesquema fechado X′ de $\mathbf{A}^n_k$ suave sobre k no ponto z, cuja dimensão nesse ponto coincide, graças à proposição (2.2.17), com a dimensão de X em x. Como $s_1, \ldots, s_r$ são seções de $\mathscr{I}$, temos uma imersão fechada $j : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$. Por outro lado, podemos tomar um ponto fechado y de X especializando x e tal que X′ é suave sobre k de dimensão relativa $\dim_x(\mathrm{X})$ no ponto $y' = j(y)$. O teorema (2.2.3, (i)) garante, então, que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}',y'}$ é um anel local regular e, em particular, um domínio integral (2.2.1). Como y especializa x, temos que $\dim_y(\mathrm{X}) \geq \dim_x(\mathrm{X})$. Já da fórmula (2.2.15.1), obtemos que $\dim_y(\mathrm{X}) = \dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X},y})$ e que $\dim_{y'}(\mathrm{X}') = \dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X}',y'})$. Isso implica que o homomorfismo sobrejetivo $\mathscr{O}_{\mathrm{X}',y'} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},y}$ correspondendo à imersão fechada j é um isomorfismo, pois, caso contrário, teríamos do fato de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}',y'}$ ser um domínio integral que $\dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X}',y'}) > \dim(\mathscr{O}_{\mathrm{X},y})$. Assim, $\mathscr{J}_{y'} = 0$, sendo $\mathscr{J}$ o ideal de j, que é de tipo finito, pois X' é um esquema noetheriano, e portanto existe uma uma vizinhança aberta U' de y' tal que $\mathscr{J}|_{\mathrm{U}'} = 0$. Assim, $\mathrm{U}' \subseteq \mathrm{Im}(j) = \mathrm{Supp}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}/\mathscr{J})$ e, como conseqüência, j induz um isomorfismo de esquemas $\mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}'$, onde $\mathrm{U} = j^{-1}(\mathrm{U}')$ é uma vizinhança aberta de y, e por conseguinte de x, e então X é suave no ponto x, concluindo a demonstração. ▲

(2.2.19) Uma extensão de corpos K/k é dita ***puramente inseparável*** se é algébrica e o polinômio mínimo de cada elemento de K sobre k tem uma única raiz distinta em um corpo de decomposição. Uma extensão puramente inseparável entre corpos de característica 0 é trivial. Se, por outro lado, estes forem de característica $p > 0$, então K/k é puramente inseparável se, e somente se, para todo $\alpha \in \mathrm{K}$, existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $\alpha^{p^n} \in k$.

Existem várias outras caracterizações de extensões puramente inseparáveis. Para nós a mais importante será a seguinte: para que uma extensão de corpos K/k seja puramente inseparável, é necessário e suficiente que, para toda extensão L de k, exista no máximo um k-homomorfismo $\mathrm{K} \to \mathrm{L}$. Esta condição é claramente necessária. Para justificar que ela é também suficiente, provaremos a contrapositiva da afirmação. Assim, suponhamos que K/k não seja puramente inseparável. Existem duas possibilidades. Ou ela é (i) transcendental ou ela é (ii) algébrica e existe $\alpha \in \mathrm{K}$ tal que seu polinômio mínimo $f(\mathrm{X})$ sobre k tem duas raízes distintas em um corpo de decomposição. Para o caso (i), seja $(t_i)_{i\in\mathrm{I}}$ uma base de transcendência de K sobre k e L um fecho algébrico de K, que é também um fecho algébrico de $k((t_i)_{i\in\mathrm{I}})$. Sempre temos pelo menos dois k-automorfismos distintos de $k((t_i)_{i\in\mathrm{I}})$, sendo o pior dos casos aquele em que $k = \mathbf{F}_2$ e $|\mathrm{I}| = 1$, onde temos $\mathrm{Aut}_{\mathbf{F}_2}(\mathbf{F}_2(t)) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F}_2) \cong \mathrm{S}_3$, que se estendem, graças ao teorema de extensão de isomorfismos [Mor96, 3.20], a dois k-homomorfismos distintos $\mathrm{K} \to \mathrm{L}$. Já para (ii), usamos o mesmo teorema para obter dois k-homomorfismos $\mathrm{K} \to \mathrm{L}$, um deles levando α em α e o outro levando α em uma outra raiz de $f(\mathrm{X})$ em L.

(2.2.20) Um morfismo de esquemas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ é dito *radicial* se é injetivo e, para todo $x \in \mathrm{X}$, o homomorfismo de corpos $k(f(x)) \to k(x)$ faz de $k(x)$ uma extensão puramente inseparável de $k(f(x))$. O nome radicial provém do fato de, em francês, extensões puramente inseparáveis serem chamadas *extensions radicielles*.

Proposição **(2.2.21)**. — *Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo de esquemas. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *f é radicial.*
b) *Para todo corpo* K*, a aplicação* $\mathrm{X}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Y}(\mathrm{K})$ *induzida por f é injetiva.*
c) *f é universalmente injetivo.*
d) *O morfismo diagonal $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é uma bijeção.*

Demonstração. — Para justificar que a) implica b), consideremos dois morfismos u_1, u_2 de Spec(K) em X tais que $f \circ u_1 = f \circ u_2$. Como estamos supondo f radicial, temos da injetividade que as imagens de u_1, u_2 consistem de um mesmo ponto x de X. Assim, u_1, u_2 correspondem a dois $k(f(x))$-homomorfismos de $k(x)$ em K e, como estamos supondo que a extensão $k(x)/k(f(x))$ é puramente inseparável, temos de (2.2.19) que estes dois coincidem, garantindo, então, que $u_1 = u_2$.

Agora vejamos como justificar que b) implica c). Observe primeiro que a condição b) é estável por mudança de base e portanto é suficiente mostrar que ela garante que f é injetivo. Para isso, tomemos dois pontos $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Note que a $k(y)$-álgebra $k(x_1) \otimes_{k(y)} k(x_2)$ é diferente de zero e quocientando-a por um ideal maximal, obtemos um corpo K e dois $k(y)$-homomorfismos $k(x_1) \to \mathrm{K}$ e $k(x_2) \to \mathrm{K}$. A partir destes, conseguimos dois morfismos u_1, u_2 de Spec(K) em X tais que $f \circ u_1 = f \circ u_2$, que devem coincidir, pois, por hipótese, $\mathrm{X(K)} \to \mathrm{Y(K)}$ é injetivo, e portanto $x_1 = x_2$.

É óbvio que c) implica d). Justifiquemos o porquê de d) implicar a). Primeiro devemos mostrar que f é injetivo. Sejam, então, $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ tais que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Se p_1, p_2 denotam as projeções de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ em X, então existe um ponto $z \in \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ tal que $p_1(z) = x_1$ e $p_2(z) = x_2$. Como $\Delta_{\mathrm{X/Y}}$ é uma bijeção, podemos obter $x_3 \in \mathrm{X}$ tal que $\Delta_{\mathrm{X/Y}}(x_3) = z$ e isso garante que $x_1 = x_2 = x_3$. Por fim, mostremos que, para todo $x \in \mathrm{X}$, o homomorfismo canônico $k(f(x)) \to k(x)$ faz de $k(x)$ uma extensão puramente inseparável de $k(f(x))$. Para isso usaremos novamente o critério estabelecido em (2.2.19). Seja, então, K um corpo e consideremos dois $k(y)$-homomorfismos de $k(x)$ em K. Estes determinam dois morfismos u_1, u_2 de Spec(K) em X tais que $f \circ u_1 = f \circ u_2$, que dão origem a um morfismo $u : \mathrm{Spec(K)} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ tal que $p_1 \circ u = u_1$ e $p_2 \circ u = u_2$ e assim $u = \Delta_{\mathrm{X/Y}} \circ u_1 = \Delta_{\mathrm{X/Y}} \circ u_2$. Por hipótese, $\Delta_{\mathrm{X/Y}}$ é uma bijeção e portanto uma imersão fechada, que é um monomorfismo na categoria de esquemas, e então $u_1 = u_2$. Isso garante que os dois $k(y)$-homomorfismos considerados inicialmente coincidem e por conseguinte $k(x)/k(f(x))$ é uma extensão puramente inseparável, concluindo a demonstração. ▲

(2.2.22) Como conseqüências simples da caracterização de morfismos radiciais estabelecida em (2.2.21), temos os seguintes resultados: todo monomorfismo na categoria de esquemas é radicial, a classe de morfismos radiciais é estável por composição e mudança de base, se $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}, g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ são dois morfismos tais que $g \circ f$ é radicial, então f é radicial, todo morfismo radicial é separado e para verificar que um morfismo é radicial é suficiente verificar a condição b) acima para corpos algebricamente fechados.

Uma observação que devemos fazer aqui é que, apesar de no contexto de esquemas as noções de morfismos radiciais e universalmente injetivos coincidirem, em situações mais gerais, por exemplo a de espaços algébricos, existem noções correspondentes e não podemos garantir que elas são sempre equivalentes.

Proposição **(2.2.23)**. — *Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo localmente de apresentação finita. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *f é um monomorfismo.*

b) *f é radicial e não-ramificado.*

c) *Para todo $y \in \mathrm{Y}$, a fibra $f^{-1}(y)$ é vazia ou o morfismo estrutural $f^{-1}(y) \to \mathrm{Spec}(k(y))$ é um isomorfismo.*

Demonstração. — Provaremos primeiro que a) implica c). Como observamos em (2.2.22), um monomorfismo é universalmente injetivo e temos, portanto, que $f^{-1}(y) \to \mathrm{Spec}(k(y))$ é injetivo. Assim, $f^{-1}(y)$ é vazia ou consiste de um só ponto e por conseguinte é um esquema afim com anel de coordenadas, digamos, A. Visto que $f^{-1}(y) \to \mathrm{Spec}(k(y))$ é um monomorfismo, o morfismo diagonal por ele determinado é um isomorfismo e portanto o homomorfismo $\mathrm{A} \otimes_{k(y)} \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ induzido pela multiplicação em A é bijetivo. Quando tivermos $f^{-1}(y) \neq \varnothing$, A será diferente de zero e se o homomorfismo $u : k(y) \to \mathrm{A}$ não fosse bijetivo, teríamos um elemento $a \in \mathrm{A}$ que não estaria na imagem de u e portanto $1, a$ seriam elementos linearmente independentes de A sobre $k(y)$, o que contrariaria o fato de $\mathrm{A} \otimes_{k(y)} \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ ser um isomorfismo, pois $a \otimes 1 \neq 1 \otimes a$, mas suas imagens em A são iguais a a.

É imediato que a condição em c) garante que f é universalmente injetivo e portanto radicial (2.2.21) e o fato de podermos verificar nas fibras que um morfismo é não-ramificado (2.2.5, (i)) garante que ele é também não-ramificado e assim c) implica b).

Por fim, para mostrar que b) implica a), é suficiente provar que o morfismo diagonal $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um isomorfismo. A hipótese de f ser radicial garante que ele é bijetivo e portanto uma imersão fechada sobrejetiva e *a fortiori* um homeomorfismo. Sejam $\mathscr{I}$ o ideal de $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ e $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}), \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ abertos afins de X, Y, respectivamente, tais que $f(\mathrm{Spec}(\mathrm{B})) \subseteq \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Como estamos supondo que f é não-ramificado, temos que $\Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} = 0$ e, em virtude de (1.1.16), I/I^2 é também zero, sendo $\mathrm{I} = \Gamma(\mathrm{Spec}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}), \mathscr{I})$. Como podemos cobrir $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ com abertos afins desse tipo, obtemos que $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 = 0$. Visto que f é, por hipótese, localmente de apresentação finita, $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ também o é, o que garante que $\mathscr{I}$ é um ideal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}}$ de tipo finito. O lema de Nakayama, por sua vez, assegura que $\mathscr{I}_z = 0$ para todo $z \in \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ e assim $\mathscr{I} = 0$, o que mostra que $\mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}} \to (\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ é um isomorfismo de feixes de anéis e por conseguinte que $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um isomorfismo, concluindo a demonstração. ▲

Proposição **(2.2.24).** — *Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo de esquemas. As seguintes condições são equivalentes:*

a) *f é uma imersão aberta.*
b) *f é uma imersão étale.*
c) *f é um monomorfismo plano localmente de apresentação finita.*
d) *f é étale e radicial.*

Demonstração. — Dizer que f é um monomorfismo localmente de apresentação finita equivale a dizer, em virtude de (2.2.23), que f é radicial e não-ramificado. Por outro lado, vimos em (2.2.6) que um morfismo é étale se, e somente se, é plano e não-ramificado. Assim, c) e d) são equivalentes. É claro que a) implica b) e que b) implica c). Resta, então, mostrar que c) implica a). Para isso, note que, como um morfismo plano localmente de apresentação finita é universalmente aberto [GW10, Teorema 14.33], podemos, após substituir Y por $f(\mathrm{X})$, supor que f é sobrejetivo, sendo, então, fielmente plano. Como monomorfismos são universalmente injetivos (2.2.22), f é um homeomorfismo universal e *a fortiori* quase-compacto. Denote por $f' : \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ o morfismo obtido a partir de f após fazermos a mudança de base por meio de f. Por hipótese, f é um monomorfismo e por conseguinte $\Delta_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um isomorfismo. Assim, f' é também um isomorfismo e, visto que f é fielmente plano e quase-compacto, isso garante que f é também um isomorfismo [GW10, Proposição 14.51], concluindo a demonstração. ▲

Por fim, precisaremos de um resultado sobre a estrutura local de um morfismo não-ramificado, cuja demonstração, por falta de espaço, não daremos aqui. Sugerimos que o leitor consulte [EGA IV_4, 18.4.7] ou [SGA 1, Exposé I, 7.8].

Proposição **(2.2.25)** (Forma local dos morfismos não-ramificados)**.** — *Para que um morfismo de esquemas $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ seja não-ramificado em um ponto $x \in \mathrm{X}$, é necessário e suficiente que exista uma vizinhança aberta* U *de x tal que $f|_{\mathrm{U}}$ se fatore em uma imersão fechada de apresentação finita* $\mathrm{U} \to \mathrm{Z}$ *seguida por um morfismo étale* $\mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$.

2.3. Levantamentos de esquemas.

Definição **(2.3.1).** — *Sejam* X_0 *um* Y_0*-esquema plano e* $i : Y_0 \to Y$ *um espessamento de ordem* 1*. Um levantamento, também dito uma deformação, de* X_0 *sobre* Y *é um* Y*-esquema plano* X *juntamente com um morfismo* $j : X_0 \to X$ *tal que o diagrama*

(2.3.1.1)
$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_0 \arrow[r, "i"'] & Y, \end{tikzcd}$$

é cartesiano, onde f_0, f *são os morfismos estruturais de* X_0, X*, respectivamente. Se* Y *for um esquema afim com anel de coordenadas* A*, então diremos simplesmente um levantamento de* X_0 *sobre* A*. Dois levantamentos* $(X_1, j_1), (X_2, j_2)$ *de* X_0 *sobre* Y *são ditos isomorfos se existe um* Y*-isomorfismo* $g : X_1 \to X_2$ *tal que* $j_2 = g \circ j_1$.

Observação **(2.3.2).** — Com a notação acima, temos que se $g : X_1 \to X_2$ é um Y-*morfismo* tal que $j_2 = g \circ j_1$, então ele será automaticamente um isomorfismo. Com efeito, como j_1, j_2 são espessamentos de ordem 1 e *a fortiori* homeomorfismos, temos que g é também um homeomorfismo. Por outro lado, se $\mathscr{J}_1, \mathscr{J}_2$ são os ideais de j_1, j_2, respectivamente, então temos um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{J}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{X_2} \arrow[r, "j_2^\flat"] \arrow[d, "g^\flat"'] & j_{2*}(\mathscr{O}_{X_0}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & g_*(\mathscr{J}_1) \arrow[r] & g_*(\mathscr{O}_{X_1}) \arrow[r, "g_*(j_1^\flat)"'] & j_{2*}(\mathscr{O}_{X_0}) \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

sendo ambas as linhas exatas. Visto que, para $k = 1, 2$, f_k é plano, o item (ii) da proposição seguinte garante que temos isomorfismos $f_k^*(\mathscr{I}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{J}_k$, sendo $\mathscr{I}$ o ideal de i. De (1.1.39) obtemos um isomorfismo natural $\mathscr{I} \to i_*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})$ e o fato de i ser afim assegura que os morfismos canônicos $f_k^*\big(i_*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big) \to j_{k*}\big(f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big)$ são isomorfismos [GW10, Proposição 12.6]. Por conseguinte, temos isomorfismos $\mathscr{J}_k \to j_{k*}\big(f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big)$ compatíveis com o morfismo $\mathscr{J}_2 \to g_*(\mathscr{J}_1)$, garantindo que ele, e portanto também que $g^\flat$, é um isomorfismo. Logo, g é um isomorfismo de esquemas.

Proposição **(2.3.3).** — *Consideremos um diagrama comutativo de morfismos de esquemas com a mesma notação de* (2.3.1.1).

(i) *Se* i, j *são imersões fechadas de ideais* $\mathscr{I}, \mathscr{J}$*, respectivamente, então o diagrama é cartesiano se, e somente se, o morfismo canônico* $f^*(\mathscr{I}) \to \mathscr{J}$ *é um epimorfismo de* $\mathscr{O}_X$*-módulos.*

(ii) *Se* f_0 *é um morfismo plano e* i, j *são espessamentos de ordem finita, então* f *é plano e o diagrama é cartesiano se, e somente se, o morfismo canônico* $f^*(\mathscr{I}) \to \mathscr{J}$ *é um isomorfismo.*

Demonstração. — (i) A demonstração deste item é elementar e o incluímos apenas por uma questão de exaustividade. É fundamental lembrar que uma imersão fechada é um monomorfismo na categoria de esquemas e que um morfismo $\varphi : Z \to X$ se fatora através de j se, e somente se, $\varphi^\flat(\mathscr{J}) = 0$.

(ii) Se f for plano e o diagrama for cartesiano, então $\mathscr{J} = \mathrm{Im}(f^*(\mathscr{I}) \to \mathscr{O}_X)$ e o resultado é claro, pois o funtor f^* é exato. Para a recíproca, observe que (i) garante que o diagrama é cartesiano. O fato de f ser plano é conseqüência do lema seguinte, aplicado tomando $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$, $\mathrm{I} = \mathscr{I}_y$ e $\mathrm{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, sendo x um ponto de X e $y = f(x)$. ▲

Lema **(2.3.4).** — *Sejam* A *um anel,* I *um ideal nilpotente de* A *e* M *um* A*-módulo. As seguintes condições são equivalentes:*

a) M *é um* A*-módulo plano.*

b) M/IM *é um* (A/I)*-módulo plano e o homomorfismo canônico* $\mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{IM}$ *é bijetivo.*

c) $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$ *para todo* A*-módulo* N *anulado por* I.

Demonstração. — É imediato que a) implica b). Vejamos o porquê de b) implicar c). Primeiro observe que, como $\mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{IM}$ é um isomorfismo, $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathrm{I}, \mathrm{M}) = 0$ e portanto $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{F}, \mathrm{M}) = 0$ para todo A/I-módulo livre F. Se N é um A-módulo anulado por I, então podemos vê-lo como A/I-módulo e por conseguinte obter uma seqüência exata curta de A/I-módulos $0 \to \mathrm{K} \xrightarrow{u} \mathrm{F} \to \mathrm{N} \to 0$, sendo F um A/I-módulo livre. Assim, obtemos que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ é o núcleo do homomorfismo $u \otimes_{\mathrm{A}} 1_{\mathrm{M}} : \mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \to \mathrm{F} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$. Como K, F são A/I-módulos, este último homomorfismo é, a menos de isomorfismos, o homomorfismo $u \otimes_{\mathrm{A}/\mathrm{I}} 1_{\mathrm{M}/\mathrm{IM}} : \mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}/\mathrm{I}} \mathrm{M}/\mathrm{IM} \to \mathrm{F} \otimes_{\mathrm{A}/\mathrm{I}} \mathrm{M}/\mathrm{IM}$, que é injetivo, pois, por hipótese, M/IM é um (A/I)-módulo plano e isso garante que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$. Por fim, resta mostrar que c) implica a). Para isso mostraremos que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$ para *todo* A-módulo N. Se n é um inteiro não-negativo, então obtemos da seqüência exata curta $0 \to \mathrm{I}^{n+1}\mathrm{N} \to \mathrm{I}^n\mathrm{N} \to \mathrm{I}^n\mathrm{N}/\mathrm{I}^{n+1}\mathrm{N} \to 0$ um epimorfismo de A-módulos $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{I}^{n+1}\mathrm{N}, \mathrm{M}) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{I}^n\mathrm{N}, \mathrm{M})$. Como existe k tal que $\mathrm{I}^k = 0$, concluímos, usando indução descendente, que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{M}) = 0$, obtendo o resultado desejado. ▲

Proposição **(2.3.5).** — *Sejam* $i : \mathrm{Y}_0 \to \mathrm{Y}$ *um espessamento de ordem finita,* X_0 *um* Y_0*-esquema plano e* X *um levantamento de* X_0 *sobre* Y. *Para que* X *seja um* Y*-esquema suave (resp. não-ramificado, resp. étale), é necessário e suficiente que* X_0 *seja um* Y_0*-esquema suave (resp. não-ramificado, resp. étale).*

Uma lista mais compreensiva de propriedades que satisfazem as conclusões desta proposição pode ser encontrada em [Stacks, Tag 06AG].

Demonstração. — Denotemos por f_0, f os morfismos estruturais de X_0, X, respectivamente. A condição é claramente necessária, pois essas propriedades são estáveis por mudança de base. Por outro lado, se y_0 é um ponto de Y_0 e $y = i(y_0)$, então a fibra de f_0 em y_0 é obtida da fibra de f em y fazendo a mudança de base por meio do morfismo canônico $\mathrm{Spec}(k(y_0)) \to \mathrm{Spec}(k(y))$, que é um isomorfismo, pois i é uma imersão fechada, e portanto $(\mathrm{X}_0)_{y_0}$ é um $k(y_0)$-esquema suave (resp. não-ramificado, resp. étale) se, e somente se, X_y é um $k(y)$-esquema suave (resp. não-ramificado, resp. étale). Como f é plano, o resultado seguirá do teorema (2.2.5) uma vez que mostrarmos que f é localmente de apresentação finita. Visto que essa é uma condição local no domínio e no contradomínio, podemos supor que todos os esquemas em questão são afins, digamos $\mathrm{X}_0 = \mathrm{Spec}(\mathrm{B}_0), \mathrm{Y}_0 = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}_0), \mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{B})$ e $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, sendo $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0 \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{B}$. Seja I o núcleo de $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_0$, que, por hipótese, é um ideal nilpotente. Sejam $p_0 : \mathrm{A}_0[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{B}_0$ um homomorfismo sobrejetivo de A_0-álgebras e $p : \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{B}$ um homomorfismo de A-álgebras obtido levantando arbitrariamente as imagens dos X_i em B_0 para B. Então, $1_{\mathrm{A}/\mathrm{I}} \otimes_{\mathrm{A}} p$ difere de p_0 por isomorfismos e portanto é também sobrejetivo. Da versão do lema de Nakayama para ideais nilpotentes, concluímos que p é sobrejetivo. Se denotarmos o seu núcleo núcleo por K, então o fato de B ser uma A-álgebra plana garante que $(\mathrm{A}/\mathrm{I}) \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ é o núcleo de p_0, que, por hipótese, deve ser um ideal finitamente gerado. Uma nova aplicação do lema de Nakayama assegura que K também o é. Por conseguinte, B é uma A-álgebra finitamente apresentada, concluindo a demonstração. ▲

(2.3.6) Antes de demonstrarmos o principal resultado desta seção, relembremos alguns isomorfismos notáveis quando consideramos módulos localmente livres de tipo finito:

(i) Sejam X um espaço anelado e $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ três $\mathscr{O}_X$-módulos. Então existe um morfismo natural de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}),$$

que é um isomorfismo se $\mathscr{F}$ for localmente livre de tipo finito [GW10, Proposição 7.7].

(ii) Visto que todo $\mathscr{O}_X$-módulo localmente livre de tipo finito é reflexivo e que existe um isomorfismo natural $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G}, \mathscr{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, \mathscr{H}))$, obtemos de (i) que se $\mathscr{F}$ for localmente livre de tipo finito, então teremos um isomorfismo natural de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F}^\vee, \mathscr{H}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{G}, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{H}).$$

(iii) Por fim, se $f : W \to X$ é um morfismo de espaços anelados, então temos um morfismo natural de $\mathscr{O}_W$-módulos

$$f^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_W}(f^*(\mathscr{F}), f^*(\mathscr{G}))$$

que é um isomorfismo se $\mathscr{F}$ for localmente livre de tipo finito [GW10, Exercício 7.20].

Como conseqüência de (ii), temos que se $\mathscr{F}$ é localmente livre de tipo finito, então o funtor $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\cdot) : \mathbf{Mod}(X) \to \mathbf{Mod}(X)$, além de exato, preserva $\mathscr{O}_X$-módulos injetivos. Já de (i) obtemos que os funtores $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \cdot)$ e $\Gamma(X, \mathscr{F}^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} (\cdot))$ são isomorfos e portanto, para todo $i \geq 0$, os funtores $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \cdot)$ e $H^i(X, \mathscr{F}^\vee \otimes_{\mathscr{O}_X} (\cdot))$ são também isomorfos.

(2.3.7) Consideremos o problema de prolongamento de morfismos descrito na proposição (2.1.21), supondo agora que f é um morfismo suave. Haja vista que, nesse caso, $\Omega^1_{X/Y}$ é um $\mathscr{O}_X$-módulo localmente livre de tipo finito (2.1.28), concluímos de (2.3.6, (i)) e (2.3.6, (iii)) que o $\mathscr{O}_{T_0}$-módulo quase-coerente $\mathscr{G} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{T_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X/Y}), \mathscr{C}_{T_0/T})$ é isomorfo a $g_0^*(T_{X/Y}) \otimes_{\mathscr{O}_{T_0}} \mathscr{C}_{T_0/T}$, onde $T_{X/Y}$ é o feixe tangente de X sobre Y (1.1.47). Além disso, podemos ver a obstrução $o(i, g_0)$ para a existência de um prolongamento global de g_0 como um elemento de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{T_0}}(g_0^*(\Omega^1_{X/Y}), \mathscr{C}_{T_0/T})$.

Teorema **(2.3.8).** — *Sejam* X_0 *um* Y_0*-esquema suave e* $i : Y_0 \to Y$ *um espessamento de ordem* 1.

(i) *Existe uma obstrução* $\omega(X_0, i) \in \mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_{X_0}}\big(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big)$ *cujo anulamento é necessário e suficiente para a existência de um levantamento de* X_0 *sobre* Y.

(ii) *O conjunto de classes de isomorfismo de levantamentos de* X_0 *sobre* Y *é vazio ou um espaço homogêneo principal sob o grupo* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_0}}\big(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big)$.

(iii) *Se* (X, j) *é um levantamento de* X_0 *sobre* Y, *então o seu grupo de automorfismos se identifica naturalmente com* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_0}}\big(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big)$.

Note que, em virtude de (2.3.6) e do fato de $\Omega^1_{X_0/Y_0}$ ser localmente livre de tipo finito (2.1.28), temos, para cada i, um isomorfismo canônico

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_{X_0}}\big(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big) \xrightarrow{\sim} H^i(X_0, \mathscr{G}),$$

onde $\mathscr{G} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{X_0}}\big(\Omega^1_{X_0/Y_0}, f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})\big) \cong T_{X_0/Y_0} \otimes_{\mathscr{O}_{X_0}} f_0^*(\mathscr{C}_{Y_0/Y})$.

Demonstração. — (iii) De acordo com a observação (2.3.2), um automorfismo do levantamento X é o mesmo que um Y-morfismo $g : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tal que $j = g \circ j$. De (2.1.21, (ii)), sabemos que o conjunto $\mathcal{S}$ de tais morfismos é um espaço homogêneo principal sob o grupo $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}}(j^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}), \mathscr{C}_{\mathrm{X}_0/\mathrm{X}})$, que é isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{Y}_0}, f_0^*(\mathscr{C}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{Y}}))$ graças a (1.1.42) e (1.1.46). Como existe um automorfismo privilegiado, a identidade de X, temos uma bijeção entre $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}_0}}(\Omega^1_{\mathrm{X}_0/\mathrm{Y}_0}, f_0^*(\mathscr{C}_{\mathrm{Y}_0/\mathrm{Y}}))$ e $\mathcal{S}$ e não é difícil verificar que ela é um isomorfismo de grupos.

(i) Provemos primeiro que todo ponto x_0 de X_0 tem uma vizinhança aberta admitindo um levantamento sobre Y. Como a questão é local, podemos supor que Y_0 e Y são esquemas afins, cujos anéis de coordenadas serão denotados, respectivamente, por A_0 e A e que existe uma imersão fechada de Y_0-esquemas $i_0 : \mathrm{X}_0 \to \mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}_0}$, cujo ideal de $\mathrm{A}_0[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]$ correspondente será denotado por I_0. Em virtude do critério jacobiano (2.1.35), existem geradores $p_1, \dots, p_r$ de I_0 tais que $dp_1(x_0), \dots, dp_r(x_0)$ são linearmente independentes. Assim, podemos obter uma vizinhança aberta U_0 de x_0 tal que $dp_1(x), \dots, dp_r(x)$ são linearmente independentes para todo $x \in \mathrm{U}_0$. Sejam $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_r$ levantamentos arbitrários de $p_1, \dots, p_r$ em $\mathrm{A}[\mathrm{T}_1, \dots, \mathrm{T}_n]$, V o subesquema fechado por eles determinado e U o subesquema aberto de V correspondendo a U_0. Então, $d\tilde{p}_1(x), \dots, d\tilde{p}_r(x)$ são linearmente independentes para todo $x \in \mathrm{U}$ e uma nova aplicação do critério jacobiano garante que U é suave sobre Y e por conseguinte um levantamento de U_0 sobre Y.

Em vista disso, podemos obter uma cobertura $\mathfrak{U} = ((\mathrm{U}_i)_0)_{i \in \mathrm{I}}$ de X_0 consistindo de abertos afins, de modo que, para cada i, existe um levantamento U_i de $(\mathrm{U}_i)_0$. Para simplificar, suporemos que X_0 é um esquema separado. No entanto, a teoria do complexo cotangente [Ill71, Capítulo III, 2.1.7] ou a teoria de gerbes de Giraud [Gir71, Capítulo VII, 1.2] asseguram que tal hipótese é supérflua. Nesse caso, as intersecções $(\mathrm{U}_{ij})_0 = (\mathrm{U}_i)_0 \cap (\mathrm{U}_j)_0$ são ainda abertos afins de X_0 e concluímos de (2.1.21, (ii)) que existem isomorfismos de levantamentos $u_{ji} : \mathrm{U}_i|_{(\mathrm{U}_{ij})_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_j|_{(\mathrm{U}_{ij})_0}$ para todo par (i, j). Ele é unicamente determinado, a menos de uma seção de $\mathscr{G}$ sobre $(\mathrm{U}_{ij})_0$. Se tivéssemos, sobre $(\mathrm{U}_{ijk})_0$, que $u_{kj} \circ u_{ji} = u_{ki}$, então poderíamos colar os U_i através dos u_{ji} para obter um levantamento de X_0 sobre Y. Mais geralmente, um tal levantamento existe se, e somente se, é possível modificar os u_{ji} usando seções g_{ji} de $\mathscr{G}$ sobre U_{ij} para obter isomorfismos $u'_{ji} : \mathrm{U}_i|_{(\mathrm{U}_{ij})_0} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_j|_{(\mathrm{U}_{ij})_0}$ satisfazendo a condição de colamento acima.

Denotemos por c_{ijk} o automorfismo $u_{ki}^{-1} \circ u_{kj} \circ u_{ji}$ de $\mathrm{U}_i|_{(\mathrm{U}_{ijk})_0}$. De acordo com (i), ele se identifica a uma seção de $\mathscr{G}$ definida em $(\mathrm{U}_{ijk})_0$ e não é difícil verificar que, sob essa identificação, $c = (c_{ijk})$ é um 2-cociclo de Čech de $\mathfrak{U}$ com valores em $\mathscr{G}$. Observe também que a condição de colamento para os u'_{ji} equivale à fórmula $c = dg$. Assim, para que exista um levantamento de X_0 sobre Y, é necessário e suficiente que a classe de cohomologia em $\check{\mathrm{H}}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ definida pelo cociclo c seja nula. Como estamos supondo que X_0 é um esquema separado e $\mathfrak{U}$ é uma cobertura aberta de X_0 consistindo de abertos afins, o teorema de Leray (4.1.38, (ii)) garante que $\check{\mathrm{H}}^2(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ é naturalmente isomorfo a $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$. A classe de cohomologia obtida em $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ não depende da cobertura aberta afim considerada e é ela que tomamos como sendo $\omega(\mathrm{X}_0, i)$.

(ii) Denotemos por $\mathcal{E}$ o conjunto de classes de isomorfismos de levantamentos de X_0 sobre Y. Em virtude de (2.1.14), os grupos $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ e $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ são naturalmente isomorfos e o raciocínio descrito na demonstração de (iii) mostra que podemos definir uma ação de $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ em $\mathcal{E}$. Resta provar que se existe um levantamento (X_1, j_1) de X_0 sobre Y, então a aplicação de $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ em $\mathcal{E}$ daí obtida é uma bijeção. Para isso descreveremos a sua aplicação inversa. A partir de um levantamento (X_2, j_2) de X_0 sobre Y, podemos considerar o feixe de conjuntos $\mathscr{P}$ em X_0 cujas seções sobre um aberto U_0 são os Y-morfismos $g : \mathrm{U}_1 \to \mathrm{X}_2$ tais que $j_2 = g \circ j_1$ em U_0, sendo U_1 o aberto de X_1 correspondendo a U_0. Como vimos em (2.1.21, (ii)), ele é um $\mathscr{G}$-torsor e sua classe $o(j_1, j_2)$ em $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ é a obstrução cujo anulamento é necessário e suficiente para a existência de um isomorfismo de levantamentos entre X_1 e X_2. Não é difícil ver que $[(\mathrm{X}_2, j_2)] \mapsto o(j_1, j_2)$, onde $[(\mathrm{X}_2, j_2)]$ denota a classe de isomorfismo do levantamento X_2 de X_0 sobre Y, é uma aplicação bem-definida de $\mathcal{E}$ em $\check{\mathrm{H}}^1(\mathrm{X}_0, \mathscr{G})$ e que ela é a inversa que buscávamos. ▲

§ 3. PECULIARIDADES DA CARACTERÍSTICA POSITIVA

Neste parágrafo, estudaremos alguns aspectos fundamentais do cálculo diferencial em característica positiva. Usando os métodos aqui compilados, seremos capazes, na seção 4.2, de demonstrar os principais teoremas desta dissertação. Na seção 3.1, sumarizamos as propriedades básicas dos morfismos de Frobenius relativos, sendo o teorema (3.1.5) o resultado mais importante. Seguimos de perto [SGA 5, Exposé XV, n^{os} 1 e 2], embora algumas idéias venham de [Ill96, nº 3].

Na seção 3.2, demonstramos o isomorfismo de Cartier (3.2.2), seguindo principalmente [Katz70, Seção 7]. As referências [Ill96, nº 3], [Ill79, 0 2] e [Kin10] são também de grande valia. Em seguida, exploramos a sua relação com prolongamentos do morfismo de Frobenius relativo (3.2.4), sendo esta uma observação devida a Mazur [Maz73, Introdução], nos baseando em [DI87, nº 2], [Ill96, nº 3] e [Oes87, § 5]. Por fim, compendiamos as principais propriedades do anel de vetores de Witt, para as quais sugerimos a consulta de [Ser79, Capítulo II, § 6], [Ill79, 0 1] e [Haz09].

Ao longo deste parágrafo p designará um número primo fixo.

3.1. Morfismos de Frobenius.

(3.1.1) Dizemos que um esquema X é *de característica* p se $p \cdot 1_{\mathscr{O}_X} = 0$. Isso equivale a dizer que o único morfismo $X \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$ se fatora, necessariamente de maneira única, através da imersão fechada $\operatorname{Spec}(\mathbf{F}_p) \to \operatorname{Spec}(\mathbf{Z})$. Se denotarmos por $\mathbf{Sch}_p$ a subcategoria plena da categoria de esquemas consistindo dos esquemas de característica p, então isso descreve um isomorfismo de categorias $\mathbf{Sch}_p \xrightarrow{\sim} \mathbf{Sch}_{/\mathbf{F}_p}$.

(3.1.2) Seja X um esquema de característica p. O *morfismo de Frobenius absoluto de* X é o endomorfismo de esquemas $F_X : X \to X$ que é a identidade sobre o espaço topológico subjacente a X e cujo morfismo de feixes de anéis $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$ leva uma seção local b de $\mathscr{O}_X$ em b^p. Quando $X = \operatorname{Spec}(B)$ for um esquema afim, F_X correponderá ao homomorfismo de Frobenius absoluto F_B de B definido em (1.1.14, (vi)).

O morfismo de Frobenius absoluto define uma transformação natural $1_{\mathbf{Sch}_p} \Rightarrow 1_{\mathbf{Sch}_p}$. De maneira explícita, isso significa que, para todo morfismo $f : X \to Y$ de esquemas de característica p, o diagrama

(3.1.2.1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "F_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

é comutativo. Denotemos por $X^{(p/Y)}$ o produto fibrado $(Y, F_Y) \times_Y X$, ou mesmo por X' se não houver ambigüidade, onde (Y, F_Y) significa que estamos considerando Y como um Y-esquema por meio de F_Y, e por $W_{X/Y} : X^{(p/Y)} \to X$ a projeção em X. A comutatividade do diagrama (3.1.2.1) garante que existe um único Y-morfismo $F_{X/Y} : X \to X^{(p/Y)}$, chamado o *morfismo de Frobenius de* X *relativo a* Y, tal que sua composição com $W_{X/Y}$ coincide com F_X.

Temos, portanto, um diagrama comutativo

(3.1.2.2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_{X/Y}"] \arrow[rr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, "f"'] & X^{(p/Y)} \arrow[r, "W_{X/Y}"] \arrow[d, "f^{(p/Y)}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "F_Y"'] & Y, \end{tikzcd}$$

onde o quadrado é cartesiano. Quando $Y = \mathrm{Spec}(A)$ for um esquema afim, usaremos a notação mais econômica $F_{X/A}$ e diremos que ele é o morfismo de Frobenius de X relativo a A. Se $X = \mathrm{Spec}(B)$ for também afim, então $F_{X/Y}$ corresponderá ao homomorfismo de Frobenius de B relativo a A definido em (1.1.14, (vi)).

Observe que, para qualquer $x \in \mathbf{F}_p$, temos $x^p = x$. Assim, o morfismo de Frobenius absoluto de um esquema X de característica p nada mais é que o morfismo de Frobenius de X relativo a $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)$, o que justifica o nome.

Fixemos um esquema Y de característica p, em cujo caso, todos os Y-esquemas serão também de característica p. Seja $p_Y : \mathbf{Sch}_{/Y} \to \mathbf{Sch}_{/Y}$ o funtor mudança de base definido pelo morfismo $F_Y : Y \to Y$, que, usando a notação acima, leva X em $X^{(p/Y)}$. Então o morfismo de Frobenius relativo define uma transformação natural $1_{\mathbf{Sch}_{/Y}} \Rightarrow p_Y$.

Exemplo **(3.1.3).** — Para fixar as idéias, vejamos como se comporta o morfismo de Frobenius relativo do espaço afim de dimensão relativa n sobre um anel A de característica p. Afirmamos que $F_{\mathbf{A}^n_A/A}$ é um morfismo finito e fielmente plano. Com efeito, temos que $\mathbf{A}_A^{n\,(p/A)} \cong \mathbf{A}^n_A$ e o morfismo de Frobenius relativo corresponde ao homomorfismo de A-álgebras $u : A[X_1, \ldots, X_n] \to A[X_1, \ldots, X_n]$ que leva X_i em X_i^p. Denotemos por B a álgebra de polinômios $A[X_1, \ldots, X_n]$ e usemos a notação $B_{[u]}$ para indicar que estamos considerando B como B-álgebra através de u. É claro que os monômios $X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n}$, onde $0 \le i_j < p$, geram $B_{[u]}$ como B-módulo e olhando os índices módulo p não é difícil ver que eles são linearmente independentes, formando, portanto, uma base com p^n elementos e garantindo que $B_{[u]}$ é um B-módulo livre de posto finito. Por conseguinte, $F_{\mathbf{A}^n_A/A}$ é um morfismo finito e fielmente plano.

Proposição **(3.1.4).** — (i) *Sejam* S *um esquema de característica* p *e* $f : X \to Y$ *um morfismo de* S*-esquemas. Então temos um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_{X/Y}"] \arrow[rr, bend left, "F_{X/S}"] \arrow[dr, "f"'] & X^{(p/Y)} \arrow[r] \arrow[d] & X^{(p/S)} \arrow[r, "W_{X/S}"] \arrow[d, "f^{(p/S)}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "F_{Y/S}"] \arrow[dr] & Y^{(p/S)} \arrow[r, "W_{Y/S}"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ & & S \arrow[r, "F_S"'] & S, \end{tikzcd}$$

sendo seus três quadrados cartesianos. Em particular, concluímos que $F_{X/S} = (F_{Y/S})_{(X^{(p/S)})} \circ F_{X/Y}$, *onde* $(F_{Y/S})_{(X^{(p/S)})}$ *denota o morfismo obtido de* $F_{Y/S}$ *após fazermos a mudança de base por meio* *do morfismo* $f^{(p/\mathrm{S})}$.

(ii) *Sejam* $h : \mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$ *um morfismo de esquemas de característica* p *e* X *um* Y*-esquema. Temos um isomorfismo natural* $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}' \xrightarrow{\sim} (\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}')^{(p/\mathrm{Y}')}$, *que pode ser escrito de maneira mais simples como* $(\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})})' \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}'^{(p/\mathrm{Y}')}$, *sendo que a adição do apóstrofo significa que estamos considerando a mudança de base por meio de* h, *e sob essa identificação temos que* $\mathrm{F}_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}'} = (\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})'$.

Demonstração. — O resultado segue diretamente das propriedades formais do produto fibrado. ▲

Teorema **(3.1.5).** — *Seja* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *um morfismo entre esquemas de característica* p.

(i) *O morfismo de Frobenius relativo* $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}$ *é inteiro, sobrejetivo e radicial, o que equivale a dizer que ele é um homeomorfismo universal.*

(ii) *Se* f *é uma imersão fechada de ideal* $\mathscr{I}$, *então* $f^{(p/\mathrm{Y})}$ *é também uma imersão fechada e o seu ideal* $\mathscr{I}^{(p/\mathrm{Y})}$ *é tal que, para todo aberto afim* V *de* Y, $\mathscr{I}^{(p/\mathrm{Y})}(\mathrm{V})$ *é o ideal de* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{V})$ *gerado pelas potências p-ésimas de elementos de* $\mathscr{I}(\mathrm{V})$. *Além disso,* $\mathrm{F}^{\flat}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} : \mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}} \to (\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ *coincide com a restrição a* $\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}$ *da aumentação canônica* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}/\mathscr{I}^{(p/\mathrm{Y})} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}/\mathscr{I}$.

(iii) *Se* f *é um morfismo localmente de apresentação finita, então as seguintes condições são equivalentes:*

a) f *é não-ramificado.*
b) $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ *é não-ramificado.*
c) $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ *é um monomorfismo.*

(iv) *Se* f *é um morfismo localmente de apresentação finita, então as seguintes condições são equivalentes:*

a) f *é étale.*
b) $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ *é étale.*
c) $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ *é um isomorfismo.*

(v) *Se* f *é um morfismo suave, então* $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ *é um morfismo finito, fielmente plano e a* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$*-álgebra* $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ *é localmente livre de tipo finito, cujo posto será* p^n *se* f *for puramente de dimensão relativa* n.

Demonstração. — (i) Notemos primeiro que, como um morfismo inteiro é universalmente fechado [GW10, Proposição 12.12] e como um morfismo radicial é o mesmo que um morfismo universalmente injetivo (2.2.21), todo morfismo inteiro, sobrejetivo e radicial é um homeomorfismo universal. A recíproca, que não nos será útil posteriormente, não é tão simples e sugerimos a consulta de [Stacks, Tag 04DF] ou [EGA IV$_4$, 18.12.11] para a demonstração.

Para provar a assertiva sobre morfismos de Frobenius relativos, é suficiente justificá-la para morfismos de Frobenius absolutos. Com efeito, temos que $\mathrm{F}_{\mathrm{X}} = \mathrm{W}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} \circ \mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$, sendo $\mathrm{W}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ obtido de F_{Y} fazendo uma mudança de base. Se o resultado vale para o caso absoluto, então $\mathrm{W}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é também inteiro, sobrejetivo e radicial e, em particular, um morfismo separado. Segue disso que $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um morfismo inteiro. Como $\mathrm{W}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um homeomorfismo, $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é sobrejetivo e o fato dele ser radicial decorre de (2.2.22).

Por fim, mostremos que o resultado é válido no caso absoluto. É imediato da definição que estes são bijetivos e afins. Localmente, eles correspondem ao homomorfismo de anéis $\mathrm{A} \to \mathrm{A}$ que leva a em a^p, que é inteiro, pois, para todo $a \in \mathrm{A}$, temos que $\mathrm{X}^p - a^p$ é um polinômio mônico que tem a como raiz e isso garante que F_{X} é um morfismo inteiro. Para ver que ele é também radicial, procedemos de modo análogo: dado $x \in \mathrm{X}$, o homomorfismo canônico $k(\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x)) \to k(x)$ é exatamente $\alpha \mapsto \alpha^p$. Assim, o polinômio mínimo de $\alpha \in k(x)$

sobre $k(\mathrm{F_X}(x))$ divide $\mathrm{X}^p - \alpha^p$ e portanto tem uma única raiz em um corpo de decomposição, garantindo que $k(x)/k(\mathrm{F_X}(x))$ é uma extensão puramente inseparável e por conseguinte que $\mathrm{F_X}$ é radicial.

(ii) Haja vista que imersões fechadas são estáveis por mudança de base, $f^{(p/\mathrm{Y})}$ é também uma imersão fechada e sabemos que o seu ideal é $\mathrm{F_Y^*}(\mathscr{I})\mathscr{O}_\mathrm{Y} = \mathrm{Im}(\mathrm{F_Y^*}(\mathscr{I}) \to \mathscr{O}_\mathrm{Y})$. Uma vez que $\mathrm{F_Y}$ é, como morfismo entre os espaços topológicos subjacentes, a aplicação identidade, temos que $\mathrm{F_Y^*}(\mathscr{I}) = \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{Y}} (\mathscr{O}_\mathrm{Y})_{[\varphi]}$, onde $\varphi : \mathscr{O}_\mathrm{Y} \to \mathscr{O}_\mathrm{Y}$ é o morfismo de feixes de anéis que determina $\mathrm{F_Y}$ e a notação $(\mathscr{O}_\mathrm{Y})_{[\varphi]}$ indica que estamos considerando $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$ como feixe de $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$-álgebras por meio de φ. Assim, $\mathscr{I}^{(p/\mathrm{Y})} = \mathrm{Im}(\mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{Y}} (\mathscr{O}_\mathrm{Y})_{[\varphi]} \to \mathscr{O}_\mathrm{Y})$ e é claro que ele satisfaz a condição descrita no enunciado. Para a segunda assertiva, observe que o triângulo comutativo de (3.1.2.2) garante que o diagrama

(3.1.5.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_\mathrm{Y}/\mathscr{I}^{(p/\mathrm{Y})} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathscr{O}_\mathrm{Y}/\mathscr{I} \arrow[d, "\wr"] \\
f_*^{(p/\mathrm{Y})}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}) \arrow[r, "f_*^{(p/\mathrm{Y})}(\mathrm{F}^\flat_{\mathrm{X/Y}})"'] & f_*(\mathscr{O}_\mathrm{X})
\end{tikzcd}$$

é comutativo, sendo o morfismo na primeira linha a aumentação canônica, e o resultado segue aplicando o funtor $(f^{(p/\mathrm{Y})})^{-1}$.

(iii) Primeiro observe que, como estamos supondo f localmente de apresentação finita, $f^{(p/\mathrm{Y})}$ também o é. Da igualdade $f = f^{(p/\mathrm{Y})} \circ \mathrm{F_{X/Y}}$, concluímos que o mesmo vale para $\mathrm{F_{X/Y}}$. Assim, a equivalência entre b) e c) segue de (i) e (2.2.23). Por outro lado, a seqüência cotangente relativa (1.1.38.1) obtida a partir de $\mathrm{F_{X/Y}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}$ e $f^{(p/\mathrm{Y})} : \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})} \to \mathrm{Y}$

$$(\mathrm{F_{X/Y}})^*(\Omega^1_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}/\mathrm{Y}}) \to \Omega^1_{\mathrm{X/Y}} \to \Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}} \to 0$$

tem o primeiro morfismo nulo, fato este que pode ser verificado localmente e já o fizemos em (1.1.14, (vi)), e portanto $\Omega^1_{\mathrm{X/Y}} \cong \Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$. Logo, a equivalência entre a) e b) decorre da caracterização de morfismos formalmente não-ramificados dada em (2.1.30, (i)).

(iv) O mesmo argumento dado em (iii) assegura que $\mathrm{F_{X/Y}}$ é localmente de apresentação finita. Assim, o fato de a) implicar b) decorre da observação (2.1.4, (v)). Por outro lado, a equivalência entre b) e c) segue de (i) e (2.2.24). Resta mostrar que b) implica a). Como $\mathrm{F_{X/Y}}$ é étale e ***a fortiori*** não-ramificado, temos de (iii) que f é também não-ramificado e a proposição (2.2.25) garante que podemos fatorá-lo localmente como uma imersão fechada seguida por um morfismo étale. Sendo assim, (3.1.4, (i)) permite que reduzamos a questão ao caso de uma imersão fechada de apresentação finita f de ideal $\mathscr{I}$. Da equivalência entre b) e c) e do diagrama (3.1.5.1) deduzimos que a aumentação canônica $\mathscr{O}_\mathrm{Y}/\mathscr{I}^{(p/\mathrm{Y})} \to \mathscr{O}_\mathrm{Y}/\mathscr{I}$ é um isomorfismo e por conseguinte $\mathscr{I} = \mathscr{I}^{(p/\mathrm{Y})}$, de onde concluímos que a igualdade $\mathscr{I} = \mathscr{I}^p$ também se verifica. Do lema de Nakayama, obtemos que $\mathscr{I}_y = 0$ ou $\mathscr{I}_y = \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ para todo ponto y de Y e isso assegura que f é uma imersão aberta e, em particular, étale.

(v) Já sabemos de (i) que $\mathrm{F_{X/Y}}$ é sobrejetivo. Como as outras condições podem ser verificadas localmente, podemos, usando a forma local dos morfismos suaves (2.1.33), supor que f é a composição de um morfismo étale $h : \mathrm{X} \to \mathbf{A}^n_\mathrm{Y}$ seguido pela projeção canônica $\mathbf{A}^n_\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$. Suponhamos que a conclusão seja válida para esta última. Temos de (iv) que $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathbf{A}^n_\mathrm{Y}}$

é um isomorfismo e portanto (3.1.4, (i)) garante que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})} \arrow[d, "h^{(p/\mathrm{Y})}"] \\ \mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}}"'] & \mathbf{A}^{n\,(p/\mathrm{Y})}_{\mathrm{Y}} \end{tikzcd}$$

é cartesiano. Segue daí que $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é também finito e plano. Por outro lado, como $\mathrm{F}_{\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}}$ é afim, temos que o morfismo canônico

$$\big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*\big((\mathrm{F}_{\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}})_*(\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}})\big) \to (\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$$

é um isomorfismo [GW10, Proposição 12.6]. Como estamos supondo que $(\mathrm{F}_{\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}/\mathrm{Y}})_*(\mathscr{O}_{\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}})$ é um $\mathscr{O}_{\mathbf{A}^{n\,(p/\mathrm{Y})}_{\mathrm{Y}}}$-módulo localmente livre de posto p^n, concluímos que $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulo localmente livre de posto p^n. Reduzimos, assim, a questão ao caso de projeções canônicas $\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}} \to \mathrm{Y}$, que pode, graças a (3.1.4, (ii)), ser ainda mais simplicada para o caso em que $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)$, que já vimos ser verdadeiro em (3.1.3). ▲

3.2. O isomorfismo de Cartier.

Como faremos uso da estrutura multiplicativa do complexo de de Rham, as álgebras nesta seção não serão necessariamente comutativas. Também usaremos livremente a notação da seção anterior e a do exemplo (1.1.14, (vi)).

(3.2.1) Consideremos um morfismo $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ entre esquemas de característica p e seja $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}$ o morfismo de Frobenius relativo. O complexo de de Rham de X sobre Y tem diferencial $f^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$-linear e portanto a diferencial do complexo $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ é, *a priori*, $(f^{(p/\mathrm{Y})})^{-1}(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$-linear. Se $\mathrm{Spec}(\mathrm{B}), \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ são abertos afins de X, Y, respectivamente, tais que $f(\mathrm{Spec}(\mathrm{B})) \subseteq \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, então

$$\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big)|_{\mathrm{Spec}(\mathrm{B}^{(p/\mathrm{A})})} \cong \widetilde{(\Omega^\bullet_{\mathrm{B}/\mathrm{A}})_{[\mathrm{F}_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}]}}$$

e $d : \mathrm{B} \to \Omega^1_{\mathrm{B}/\mathrm{A}}$ é $\mathrm{B}^{(p/\mathrm{A})}$-linear, pois $d((a \otimes b) \cdot 1) = d(ab^p) = p \cdot ab^{p-1}db = 0$, garantindo que a diferencial do complexo $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ é, na verdade, $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-linear e, em particular, que os seus feixes de cociclos, cobordos e cohomologia são $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulos. Como $\bigoplus_{i \geq 0}(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^i_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ tem estrutura de feixe de álgebras diferenciais graduadas estritamente anticomutativas, temos de (1.3.10) que

$$\bigoplus_{i \geq 0} \mathscr{Z}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big) \quad \text{e} \quad \bigoplus_{i \geq 0} \mathscr{H}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big)$$

têm estrutura de feixes de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-álgebras graduadas estritamente anticomutativas.

Teorema **(3.2.2).** — *Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo entre esquemas de característica p.*

(i) *Existe um único morfismo de feixes de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-álgebras graduadas*

$$\gamma_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} : \Omega^\bullet_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}/\mathrm{Y}} \to \bigoplus_{i \geq 0} \mathscr{H}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big)$$

tal que $\gamma_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}((dg) \otimes 1) = [g^{p-1}dg]$, onde g é uma seção local de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, $(dg) \otimes 1 \in \Omega^1_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}/\mathrm{Y}}$ é a imagem inversa da seção dg de $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ via $\mathrm{W}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} : \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})} \to \mathrm{X}$ e $[g^{p-1}dg]$ é a classe de $g^{p-1}dg$ em $\mathscr{H}^1\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big)$.

(ii) *Se f for suave, então $\gamma_{X/Y}$ será um isomorfismo.*

No caso (ii), diremos que $\gamma_{X/Y}$ é o ***isomorfismo de Cartier*** de X sobre Y e usaremos a notação $C^{-1}_{X/Y}$. Quando Y for um esquema perfeito, isto é, quando F_Y for um automorfismo, então $W_{X/Y}$ será um isomorfismo e por conseguinte teremos um isomorfismo de feixes de $\mathscr{O}_X$-álgebras graduadas $\Omega^\bullet_{X/Y} \xrightarrow{\sim} (W_{X/Y})_*(\Omega^\bullet_{X^{(p/Y)}/Y})$ que, quando composto com $(W_{X/Y})_*(\gamma_{X/Y})$, dá origem à seguinte variação do isomorfismo de Cartier

$$\Omega^\bullet_{X/Y} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\geq 0} \mathscr{H}^i\big((F_X)_*(\Omega^\bullet_{X/Y})\big).$$

Um dos casos mais significantes nas aplicações é aquele onde Y é o espectro de um corpo perfeito.

Demonstração. — (i) Como $\Omega^\bullet_{X^{(p/Y)}/Y} = \bigwedge_{\mathscr{O}_{X^{(p/Y)}}}(\Omega^1_{X^{(p/Y)}/Y})$, temos da propriedade universal da álgebra exterior (1.3.8) que, para especificar $\gamma_{X/Y}$, é necessário e suficiente descrevê-lo em grau 1. Por outro lado, em virtude de (1.1.46), dar um morfismo de $\mathscr{O}_{X^{(p/Y)}}$-módulos $\Omega^1_{X^{(p/Y)}/Y} \to \mathscr{H}^1\big((F_{X/Y})_*(\Omega^\bullet_{X/Y})\big)$ é o mesmo que dar um morfismo de $\mathscr{O}_X$-módulos

$$\Omega^1_{X/Y} \to (W_{X/Y})_*\big(\mathscr{H}^1\big((F_{X/Y})_*(\Omega^\bullet_{X/Y})\big)\big).$$

Uma vez que morfismos de Frobenius relativos são homeomorfismos universais (3.1.5, (i)), $W_{X/Y}$ é um homeomorfismo. Portanto, $(W_{X/Y})_*$ é um funtor exato e assim comuta com cohomologia. Disso obtemos que $\gamma_{X/Y}$ é completamente determinado por uma Y-derivação $D : \mathscr{O}_X \to \mathscr{H}^1\big((F_X)_*(\Omega^\bullet_{X/Y})\big)$. Por fim, ao exigir que tenhamos $\gamma_{X/Y}((dg)\otimes 1) = [g^{p-1}dg]$, necessariamente devemos ter $D(g) = [g^{p-1}dg]$. Isso responde à questão da unicidade. Para a existência, é suficiente verificar que essa aplicação é de fato uma Y-derivação. A única parte não-trivial é a aditividade de D, que segue da identidade

$$\frac{1}{p}\big((X+Y)^p - X^p - Y^p\big) = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{j} X^j Y^{p-j}$$

em $\mathbf{Q}[X, Y]$.

(ii) Consideremos primeiramente a questão mais simples onde $Y = \operatorname{Spec}(A)$ é um esquema afim, $X = \mathbf{A}^n_A$ e f é a projeção canônica. Denotemos por B a álgebra de polinômios $A[X_1, \ldots, X_n]$. Nesse caso, temos que $(F_{X/Y})_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \cong (K^\bullet(n) \otimes_{\mathbf{F}_p} B^{(p/A)})^\sim$, onde $K^\bullet(n)$ é o complexo de $\mathbf{F}_p$-espaços vetoriais tal que, quando $0 \leq i \leq n$, $K^i(n)$ tem como base as formas diferenciais $X_1^{\lambda_1} \ldots X_n^{\lambda_n} dX_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dX_{\mu_i}$, onde $0 \leq \lambda_j < p$ para $j = 1, \ldots, n$ e $1 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_i \leq n$, ficando subentendido que o produto vazio vale 1, quando $i < 0$ ou $i > n$, $K^i(n) = 0$ e cuja diferencial opera como a diferencial exterior. Assim, o fato do funtor $\widetilde{(\cdot)}$ ser exato e de tensorizarmos sobre $\mathbf{F}_p$ assegura que temos um isomorfismo de $\mathscr{O}_{X^{(p/Y)}}$-módulos entre $\mathscr{H}^i\big((F_{X/Y})_*(\Omega^\bullet_{X/Y})\big)$ e $\big(H^i\big(K^\bullet(n)\big) \otimes_{\mathbf{F}_p} B^{(p/A)}\big)^\sim$. Sob essa identificação, $\gamma_{X/Y}$ é oriundo do homomorfismo de $B^{(p/A)}$-álgebras que leva

$$dX_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dX_{\mu_i} \;\text{ em }\; [X^{p-1}_{\mu_1} \ldots X^{p-1}_{\mu_i} dX_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dX_{\mu_i}] \otimes 1.$$

Para mostrar que ele é um isomorfismo, basta provar que $[X^{p-1}_{\mu_1} \ldots X^{p-1}_{\mu_i} dX_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dX_{\mu_i}]$, onde $0 \leq i \leq n$ e $1 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_i \leq n$, é uma base do $\mathbf{F}_p$-espaço vetorial $H^i(K^\bullet(n))$. Justificaremos isso por indução em n. O resultado é claro quando n é igual a 1. Suponha, então, que $n > 1$ e que o resultado seja válido para $n-1$. Não é difícil ver que $K^\bullet(n)$ é o produto tensorial dos complexos $\mathrm{K}^\bullet(n-1)$ e $\mathrm{K}^\bullet(1)$. Da fórmula de Künneth [Wei94, 3.6.3], concluímos que

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{K}^\bullet(n)) \cong \bigoplus_{r+s=i} \mathrm{H}^r(\mathrm{K}^\bullet(n-1)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathrm{H}^s(\mathrm{K}^\bullet(1)),$$

de onde segue o resultado desejado.

Para o caso geral, observe que, como a questão é local no domínio e no contradomínio, podemos, usando a forma local dos morfismos suaves (2.1.33), supor que $\mathrm{Y} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ é um esquema afim e que f é a composição de um morfismo étale $h : \mathrm{X} \to \mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}$ seguido pela projeção canônica $\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}} \to \mathrm{Y}$. Denotemos por Z o espaço afim $\mathbf{A}^n_{\mathrm{Y}}$. De (3.1.5, (iv)) sabemos que $\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Z}}$ é um isomorfismo e portanto (3.1.4, (i)) garante que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})} \arrow[d, "h^{(p/\mathrm{Y})}"] \\ \mathrm{Z} \arrow[r, "\mathrm{F}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}}"'] & \mathrm{Z}^{(p/\mathrm{Y})} \end{tikzcd}$$

é cartesiano. Como $\mathrm{F}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}}$ é um morfismo afim, o morfismo canônico de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulos

$$\big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*\big((\mathrm{F}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^i_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})\big) \to (\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*\big(h^*(\Omega^i_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})\big)$$

é um isomorfismo para todo $i \geq 0$ [GW10, Proposição 12.6]. Por outro lado, o fato de h ser étale assegura que $h^*(\Omega^1_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})$ e $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ são naturalmente isomorfos (2.1.30, (ii-α)) e por conseguinte temos um isomorfismo de feixes de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-álgebras graduadas $h^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}}) \xrightarrow{\sim} \Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ (1.3.8). Assim, para cada $i \geq 0$, obtemos um isomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulos

$$\big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*\big((\mathrm{F}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^i_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})\big) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^i_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$$

e não é difícil verificar que eles são compatíveis com as diferenciais exteriores, dando, portanto, um isomorfismo de *complexos* de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulos

$$\big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*\big((\mathrm{F}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})\big) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}).$$

Note agora que, como $h^{(p/\mathrm{Y})}$ é étale e *a fortiori* plano (2.2.5, (iii)), o funtor $\big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*$ é exato, comutanto, então, com o funtor de cohomologia. Assim, para cada $i \geq 0$, obtemos um isomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulos

$$\big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*\big(\mathscr{H}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})\big)\big) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big).$$

Visto que $h^{(p/\mathrm{Y})}$ é étale, temos também um isomorfismo de feixes de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-álgebras graduadas $\big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{Z}^{(p/\mathrm{Y})}/\mathrm{Y}}) \xrightarrow{\sim} \Omega^\bullet_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}/\mathrm{Y}}$ e uma verificação direta mostra que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*(\Omega^\bullet_{\mathrm{Z}^{(p/\mathrm{Y})}/\mathrm{Y}}) \arrow[r, "(h^{(p/\mathrm{Y})})^*(\gamma_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})"] \arrow[d, "\wr"] & \big(h^{(p/\mathrm{Y})}\big)^*\big(\bigoplus_{i\geq 0} \mathscr{H}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}})\big)\big) \arrow[d, "\wr"] \\ \Omega^\bullet_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}/\mathrm{Y}} \arrow[r, "\gamma_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}"'] & \bigoplus_{i\geq 0} \mathscr{H}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big) \end{tikzcd}$$

é comutativo, de onde obtemos que $\gamma_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um isomorfismo, pois, como vimos inicialmente, $\gamma_{\mathrm{Z}/\mathrm{Y}}$ é um isomorfismo e isso conclui a demonstração do teorema. ▲

Corolário **(3.2.3).** — *Se $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ é um morfismo suave entre esquemas de característica p, então os $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulos* $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^i_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$, $\mathscr{Z}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big)$, $\mathscr{B}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big)$ *e* $\mathscr{H}^i\big((\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})\big)$ *são localmente livres de tipo finito para todo* $i \geq 0$.

Demonstração. — Como a questão é local em X, podemos supor que f é um morfismo puramente de dimensão relativa n. Nesse caso, $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo localmente livre de posto n (2.2.17). Assim, $\Omega^i_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo localmente livre de posto $\binom{n}{i}$ (1.3.8) para cada i. Em particular, o complexo de de Rham é nulo em graus maiores que n. Temos de (3.1.5, (v)) que $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^i_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ é um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulo localmente livre de posto $p^n\binom{n}{i}$ e o isomorfismo de Cartier (3.2.2, (ii)) assegura que as cohomologias do complexo $(\mathrm{F}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ são também $\mathscr{O}_{\mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}}$-módulos localmente livres de posto $p^n\binom{n}{i}$. O resultado segue, então, do seguinte: seja Z um esquema e $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}'' \to 0$ uma seqüência exata curta de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulos quase-coerentes, onde $\mathscr{E}, \mathscr{E}''$ são $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulos localmente livres de tipo finito. Usando, por exemplo, a proposição (2.1.26), é fácil justificar que o mesmo pode ser dito de $\mathscr{E}'$. Como conseqüência, um argumento indutivo descendente mostra que se $\mathscr{E}^\bullet$ é um complexo limitado de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulos localmente livres de tipo finito cujas cohomologias são $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$-módulos localmente livres de tipo finito, então os seus feixes de cociclos e cobordos também o serão. ▲

(3.2.4) Existe uma ligação estreita entre o isomorfismo de Cartier e prolongamentos do morfismo de Frobenius relativo. A idéia remonta ao artigo de Mazur [Maz73, Introdução] e é dela que se origina o teorema de Deligne-Illusie (4.2.1).

Sejam $i : \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})$ o espessamento de ordem 1 canônico, Y um esquema de característica p e suponhamos que exista um levantamento $\widetilde{\mathrm{Y}}$ de Y sobre $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Para simplificar, identificaremos os espaços topológicos subjacentes a Y e $\widetilde{\mathrm{Y}}$. Como o ideal de Y em $\widetilde{\mathrm{Y}}$ é $p\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$, temos uma seqüência exata curta de $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}$-módulos

(3.2.4.1) $$0 \to p\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}} \to \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \to 0.$$

Se $\tilde{y}$ for uma seção de $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}$ sobre um aberto U, então a sua ***redução módulo** p* será a seção $y \in \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{U})$ obtida através do morfismo $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$. Visto que $\widetilde{\mathrm{Y}}$ é um $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$-esquema plano, temos também uma seqüência exata curta de $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}$-módulos

(3.2.4.2) $$0 \to p\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}} \to \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}} \xrightarrow{u} p\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}} \to 0,$$

sendo o morfismo u a multiplicação por p. As seqüências exatas (3.2.4.1) e (3.2.4.2) garantem que temos um isomorfismo $\mathbf{p} : \mathscr{O}_{\mathrm{Y}} \xrightarrow{\sim} p\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}$ de $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}$-módulos. Se y for uma seção local de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y}}$, então podemos obter uma seção local $\tilde{y}$ de $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}$ cuja redução módulo p é y e temos que $\mathbf{p}(y) = p\tilde{y}$.

Seja $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo suave de esquemas de característica p. Visando uma melhor legibilidade do que segue, denotaremos o morfismo de Frobenius de X relativo a Y simplesmente por $\mathrm{F} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$, sendo $\mathrm{X}' = \mathrm{X}^{(p/\mathrm{Y})}$. Suponhamos que existam levantamentos $\widetilde{\mathrm{X}}, \widetilde{\mathrm{X}}'$ de X, X', respectivamente, sobre $\widetilde{\mathrm{Y}}$ e que exista um $\widetilde{\mathrm{Y}}$-morfismo $\widetilde{\mathrm{F}} : \widetilde{\mathrm{X}} \to \widetilde{\mathrm{X}}'$ prolongando F, ou seja, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{F}"'] & \widetilde{\mathrm{X}} \arrow[d, "\widetilde{\mathrm{F}}"] \\ \mathrm{X}' \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{X}}' \end{tikzcd}$$

é comutativo. Com a intenção de simplificar a exposição, identificaremos os espaços topológicos subajacentes a X e $\widetilde{\mathrm{X}}$ (resp. X′ e $\widetilde{\mathrm{X}}'$). Como $\widetilde{\mathrm{X}}$ é um $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$-esquema plano e $\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}}$ é um $\mathscr{O}_{\tilde{\mathrm{X}}}$-módulo localmente livre de tipo finito e, em particular, um $\mathscr{O}_{\tilde{\mathrm{X}}}$-módulo plano, obtemos uma seqüência exata curta de $\mathscr{O}_{\tilde{\mathrm{X}}}$-módulos

$$0 \to p\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}} \to \Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}} \xrightarrow{v} p\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}} \to 0,$$

onde o morfismo v é a multiplicação por p. Note que $\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}}/p\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}}$ é isomorfo a $\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}} \otimes_{\mathscr{O}_{\tilde{\mathrm{X}}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ que, por sua vez, é isomorfo a $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ (1.1.46) e portanto existe um isomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos

$$\mathbf{p} : \Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}} \xrightarrow{\sim} p\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}}.$$

Por abuso de notação, o denotamos também por $\mathbf{p}$. O morfismo $s_{\mathrm{F}} : \Omega^1_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}} \to \mathrm{F}_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ obtido a partir de F (1.1.30.2) é nulo e isso garante que a imagem do morfismo $s_{\tilde{\mathrm{F}}} : \Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}'/\tilde{\mathrm{Y}}} \to \widetilde{\mathrm{F}}_*(\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}})$ induzido por $\widetilde{\mathrm{F}}$ está contida no núcleo do morfismo $\widetilde{\mathrm{F}}_*(\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}}) \to \mathrm{F}_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ obtido a partir da redução módulo p, que é justamente $p\widetilde{\mathrm{F}}_*(\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}})$. Denotaremos também por $s_{\tilde{\mathrm{F}}}$ o morfismo de $\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}'/\tilde{\mathrm{Y}}}$ em $p\widetilde{\mathrm{F}}_*(\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}})$ daí obtido. É claro que $s_{\tilde{\mathrm{F}}}$ anula $p\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}'/\tilde{\mathrm{Y}}}$ e por conseguinte existe um único morfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-módulos $f : \Omega^1_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}} \to \mathrm{F}_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}'/\tilde{\mathrm{Y}}} \arrow[r, "s_{\tilde{\mathrm{F}}}"] \arrow[d, two heads] & p\widetilde{\mathrm{F}}_*(\Omega^1_{\tilde{\mathrm{X}}/\tilde{\mathrm{Y}}}) \\
\Omega^1_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}} \arrow[r, "f"'] & \mathrm{F}_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}) . \arrow[u, "\mathbf{p}"', "\wr"]
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Diremos que f é deduzido de $s_{\tilde{\mathrm{F}}}$ por divisão por p e usaremos a notação $p^{-1}s_{\tilde{\mathrm{F}}}$. Se $\tilde{x}$ é uma seção local de $\mathscr{O}_{\tilde{\mathrm{X}}}$, de redução x módulo p, e $\tilde{x}'$ levanta em $\mathscr{O}_{\tilde{\mathrm{X}}'}$ a imagem x' de x em $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$, então temos que

(3.2.4.3) $$\widetilde{\mathrm{F}}^\flat(\tilde{x}) = \tilde{x}^p + \mathbf{p}(u(\tilde{x})),$$

onde $u(\tilde{x})$ é uma seção de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, pois a redução módulo p de $\widetilde{\mathrm{F}}^\flat(\tilde{x})$ é $\mathrm{F}^\flat(x') = x^p$, e portanto $s_{\tilde{\mathrm{F}}}(d\tilde{x}') = \mathbf{p}(x^{p-1}dx + d(u(\tilde{x})))$. Assim, obtemos que

(3.2.4.4) $$f(dx') = x^{p-1}dx + d(u(\tilde{x})).$$

Em particular, $d \circ f = 0$ e portanto f define um morfismo de complexos

$$\varphi^1_{\tilde{\mathrm{F}}} : \Omega^1_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}}[-1] \to \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$$

tal que $\mathscr{H}^1(\varphi^1_{\tilde{\mathrm{F}}})$ é o isomorfismo de Cartier $\mathrm{C}^{-1}_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ em grau 1. Não é difícil ver que se $i \geq 1$, então a composição de $\bigwedge^i_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}}(f) : \Omega^i_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}} \to \bigwedge^i_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}}(\mathrm{F}_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}))$ com o morfismo de $\bigwedge^i_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}}(\mathrm{F}_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}))$ em $\mathrm{F}_*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ induzido pelo produto define um morfismo de complexos $\varphi^i_{\tilde{\mathrm{F}}} : \Omega^i_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}}[-1] \to \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$. Assim, temos um morfismo de complexos de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-módulos

$$\varphi_{\tilde{\mathrm{F}}} : \bigoplus_{i\geq 0} \Omega^i_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}}[-1] \to \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}),$$

onde $\varphi^0_{\tilde{\mathrm{F}}}$ é obtido a partir de $\mathrm{F}^\flat$. Este induz, tomando cohomologias, um morfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-álgebras graduadas

$$\Omega^\bullet_{\mathrm{X}'/\mathrm{Y}} \to \bigoplus_{i\geq 0} \mathscr{H}^i(\mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}))$$

que coindide com o isomorfismo de Cartier em grau 1 e, em virtude de (3.2.2, (i)), deve também coincidir em todos os outros graus. Em particular, $\varphi_{\tilde{\mathrm{F}}}$ é um quase-isomorfismo.

Exemplo **(3.2.5)** (O anel de vetores de Witt)**.** — Sejam p um número primo e $(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots)$ variáveis. Os ***polinômios de Witt relativos a** p* são dados por

$$\mathrm{W}_n = \sum_{i=0}^{n} p^i \mathrm{X}_i^{p^{n-i}} = \mathrm{X}_0^{p^n} + p\mathrm{X}_1^{p^{n-1}} + \ldots + p^n \mathrm{X}_n,$$

onde $n \geq 0$ é um inteiro. consideremos um polinômio Φ nas variáveis X, Y com coeficientes inteiros. Então é possível garantir que existe uma única seqüência de polinômios $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots)$ em $\mathbf{Z}[\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i]_{i \geq 0}$ tal que

$$\mathrm{W}_n(\varphi_0, \varphi_1, \ldots) = \Phi(\mathrm{W}_n(\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots), \mathrm{W}_n(\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1, \ldots))$$

para todo $n \geq 0$. Observe que é fácil justificar a existência e a unicidade dos φ_i no anel de polinômios com coeficientes em $\mathbf{Z}[p^{-1}]$ e portanto a única dificuldade é mostrar que seus coeficientes são inteiros. Para isso, queira ver [Ser79, Capítulo II, § 6, Teorema 5]. Denotaremos por $\mathrm{S}_0, \mathrm{S}_1, \ldots$ (resp. $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots$) os polinômios $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ associados ao polinômio $\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ (resp. $\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{XY}$). Temos, por exemplo, que

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_0 &= \mathrm{X}_0 + \mathrm{Y}_0, & \mathrm{S}_1 &= \mathrm{X}_1 + \mathrm{Y}_1 + \tfrac{1}{p}(\mathrm{X}_0^p + \mathrm{Y}_0^p - (\mathrm{X}_0 + \mathrm{Y}_0)^p), \\ \mathrm{P}_0 &= \mathrm{X}_0 \mathrm{Y}_0, & \mathrm{P}_1 &= \mathrm{X}_0^p \mathrm{Y}_1 + \mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_0^p + p\mathrm{X}_1 \mathrm{Y}_1. \end{aligned}$$

Se A é um anel, então o *anel de vetores de Witt de* A *relativo a* p, denotado W(A), tem como conjunto subjacente $\mathrm{A}^{\mathbf{N}}$, de modo que um vetor de Witt $a \in \mathrm{W}(\mathrm{A})$ se escreve como uma seqüência $a = (a_0, a_1, \ldots)$ de elementos de A, e, para $a, b \in \mathrm{W}(\mathrm{A})$, a soma $a + b$ e o produto ab em W(A) são definidos por

$$\begin{aligned} a + b &= (\mathrm{S}_0(a, b), \mathrm{S}_1(a, b), \ldots), \\ ab &= (\mathrm{P}_0(a, b), \mathrm{P}_1(a, b), \ldots), \end{aligned}$$

onde as notações $\mathrm{S}_n(a, b), \mathrm{P}_n(a, b)$ indicam que estamos avaliando esses polinômios trocando as variáveis $\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i$ por a_i, b_i, respectivamente. O elemento identidade de W(A) é $(1, 0, 0, \ldots)$. Além disso, temos um homomorfismo de grupos abelianos $\mathrm{V}_\mathrm{A} : \mathrm{W}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}(\mathrm{A})$, dito *Verschiebung*, dado por $(a_0, a_1, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$.

Seja $n \geq 1$ um inteiro. O conjunto A^n munido da adição e multiplicação definidas, respectivamente, pelos polinômios S_i e P_i para $0 \leq i \leq n - 1$, é um anel quociente de W(A), chamado o *anel de vetores de Witt de comprimento* n *de* A e será denotado por $\mathrm{W}_n(\mathrm{A})$. Note que $\mathrm{W}_1(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ e que W(A) é o limite dos $\mathrm{W}_n(\mathrm{A})$ seguindo os homomorfismos sobrejetivos de anéis $\mathrm{W}_{n+1}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}_n(\mathrm{A})$ que levam $(a_0, \ldots, a_n)$ em $(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Se $u : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ é um homomorfismo de anéis, então a aplicação $\mathrm{W}(u) : \mathrm{W}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}(\mathrm{B})$ dada por $(a_0, a_1, \ldots) \mapsto (u(a_0), u(a_1), \ldots)$ é também um homomorfismo de anéis. Considerando a definição análoga para vetores de Witt de comprimento finito, obtemos endofuntores W, W_n da categoria de anéis para todo $n \geq 1$.

Suponhamos que A seja um anel de característica p. O homomorfismo de Frobenius absoluto F_A de A induz um homomorfismo de anéis $\sigma_\mathrm{A} : \mathrm{W}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}(\mathrm{A})$, chamado o *endomorfismo de Frobenius de* W(A), que leva $(a_0, a_1, \ldots)$ em $(a_0^p, a_1^p, \ldots)$. Temos, então, a identidade $\mathrm{V}_\mathrm{A} \circ \sigma_\mathrm{A} = \sigma_\mathrm{A} \circ \mathrm{V}_\mathrm{A} = p_{\mathrm{W}(\mathrm{A})}$, onde $p_{\mathrm{W}(\mathrm{A})} : \mathrm{W}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}(\mathrm{A})$ denota a multiplicação por p em W(A). Se A for um anel perfeito, ou seja, se F_A for um automorfismo, então o ideal de W(A) gerado por $p^n \cdot 1$ consiste dos vetores de Witt $a = (a_0, a_1, \ldots)$ tais que $a_i = 0$ para $0 \leq i \leq n-1$. Assim, $\mathrm{W}_n(\mathrm{A})$ é exatamente o quociente de W(A) por $p^n\mathrm{W}(\mathrm{A})$.

Por fim, consideremos o caso de um corpo perfeito k de característica p. É possível mostrar que existe, a menos de isomorfismo, um único anel de valorização discreta completo cujo uniformizador é $p \cdot 1$ e cujo corpo de resíduos é k [Ser79, Capítulo II, § 5, Teorema 3]. Além disso, ele pode ser visto concretamente como o anel de vetores de Witt $\mathrm{W}(k)$ de k [Ser79, Capítulo II, § 6, Teorema 7]. Como conseqüência, $\mathrm{W}(\mathbf{F}_p)$ é o anel $\mathbf{Z}_p$ dos inteiros p-ádicos e $\mathrm{W}_n(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Note ainda que $\mathrm{W}(k)$ é necessariamente de característica 0 e portanto é um $\mathbf{Z}$-módulo livre de torção ou, o que é o mesmo, um $\mathbf{Z}$-módulo plano. Assim, $\mathrm{W}_n(k)$ é plano sobre $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ e temos um isomorfismo de anéis $\mathrm{W}_n(k)/p\mathrm{W}_n(k) \xrightarrow{\sim} k$. Essas propriedades caracterizam $\mathrm{W}_n(k)$ a menos de isomorfismo [Spe14] e podem ser ditas da seguinte maneira: denotemos por $i : \mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ o espessamento de ordem $n-1$ canônico. Se olharmos para $\mathrm{Spec}(k)$ como um $\mathbf{F}_p$-esquema, então existe, a menos de isomorfismo, um único levantamento X de $\mathrm{Spec}(k)$ sobre $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Com efeito, em virtude da proposição (2.1.2), um tal levantamento deve ser um esquema afim e após traduzirmos o problema algebricamente, concluímos que $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{W}_n(k))$.

§ 4. DEGENERESCÊNCIA DA SEQÜÊNCIA ESPECTRAL DE HODGE-DE RHAM

Neste parágrafo, demonstramos os teoremas que dão título a esta dissertação. Antes, porém, na seção 4.1, sumarizamos os pontos mais importantes de álgebra homológica que utilizaremos. A discussão é razoavelmente longa, mas não tentamos mantê-la auto-suficiente. De qualquer modo, esperamos que ela sirva como um guia para a literatura apropriada. Após fixarmos as notações e as convenções de sinais, definimos o que se entende por uma categoria triangulada (4.1.4) e como exemplo consideramos a categoria de homotopia de complexos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ obtida a partir de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$. Em seguida, compilamos as definições e resultados mais importantes sobre localizações de categorias (4.1.9)–(4.1.17). Munidos dessas informações, definimos a categoria derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ como sendo deduzida de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ invertendo formalmente a classe de quase-isomorfismos (4.1.18). Ela herda naturalmente a estrutura triangulada de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, embora em raras ocasiões seja abeliana (4.1.22). A partir dela, podemos redefinir o que se entende por funtores derivados (4.1.26). Esse ponto de vista permite simplificar inúmeras questões envolvendo funtores de hipercohomologia. Por uma questão de espaço, só consideramos como exemplos os funtores derivados do funtor que toma seções globais de um $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulo e do produto tensorial de complexos de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos (4.1.31). Existem várias referências sobre a teoria de categorias derivadas. As mais importantes para o que fizemos aqui são [Wei94, Capítulo 10], [Ill04, Capítulo 1], [Stacks, Tag 05QI], [Har66, Capítulos I e II] e [GM03, Capítulos II e III]. As notas [Büh07] são bastante precisas e ajudam a esclarecer algumas questões delicadas. Do ponto de vista histórico, sugerimos a consulta de [Ill90] e [Ver96], sendo que esta última ainda contém alguns tópicos que não aparecem na literatura subseqüente.

Na segunda parte da seção, revisamos alguns pontos de seqüências espectrais. Após introduzir a terminologia que usaremos, lembramos que, a partir de um funtor aditivo e de um complexo limitado inferiormente, sempre podemos obter duas seqüências espectrais birregulares, ditas de hipercohomologia (4.1.36). Como exemplos, consideramos a seqüência espectral de Hodge-de Rham (4.1.38.1), que desempenhará um papel importante na seção seguinte, e a seqüência espectral de Cartan-Leray (4.1.38.3), que relaciona a cohomologia de Čech de uma cobertura com a cohomologia do funtor derivado. A partir dela, provaremos o teorema de Leray, que foi empregado na demonstração de (2.3.8). Como referências sugerimos [EGA 0_{III}, § 11] e [Ill04, Capítulo 3, § 6].

Na seção 4.2, estabelecemos os teoremas supracitados: o de Deligne-Illusie (4.2.1), que garante, sob hipóteses adequadas, que um truncamento do complexo $\mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$, onde Y é um esquema de característica positiva, X é um Y-esquema e $\mathrm{F}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}'$ é o morfismo de Frobenius relativo, é decomponível na categoria derivada de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-módulos, a degenerescência da seqüência espectral de Hodge-de Rham para certos esquemas sobre um corpo perfeito de característica positiva (4.2.4) e por fim uma versão do teorema de Kodaira-Akizuki-Nakano em característica positiva devida a Raynaud (4.2.5). Para concluir, listamos algumas versões aprimoradas e conseqüências destes teoremas (4.2.6) e enumeramos alguns exemplos e contra-exemplos (4.2.7). A referência original é o artigo de Deligne e Illusie [DI87]. Recomendamos também a consulta dos textos expositórios [Ill96, n$^{\mathrm{os}}$ 5–8] e [Oes87].

4.1. Categorias derivadas e seqüências espectrais.

(4.1.1) Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Denotaremos por $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ a categoria de complexos de $\mathcal{A}$. Um objeto de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ será quase sempre denotado por uma letra maiúscula, digamos K, em vez de $\mathrm{K}^\bullet$. A subcategoria plena de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ consistindo dos complexos limitados inferiormente (resp. limitados superiormente, resp. limitados) será denotada por $\mathbf{Ch}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{Ch}^-(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{Ch}^b(\mathcal{A})$). Designaremos por $\mathrm{Z}^n(\mathrm{K}), \mathrm{B}^n(\mathrm{K})$ e $\mathrm{H}^n(\mathrm{K})$ os objetos de cociclos, cobordos e cohomologia, respectivamente, em grau n. Se X for um espaço anelado e $\mathcal{A}$ for a categoria de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-módulos, então utilizaremos a notação mais econômica $\mathbf{Ch}(\mathrm{X})$, bem como suas variantes para as subcategorias plenas acima, em vez de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Nesse caso, usaremos também a notação mais estilizada $\mathscr{Z}^n(\mathrm{K}), \mathscr{B}^n(\mathrm{K})$ e $\mathscr{H}^n(\mathrm{K})$ para os feixes de cociclos, cobordos e cohomologia, respectivamente.

Para um inteiro n, o ***truncamento ingênuo*** $\sigma_{\le n}\mathrm{K}$ (resp. $\sigma_{\ge n}\mathrm{K}$) de um complexo K de $\mathcal{A}$ é o complexo quociente (resp. subcomplexo) de K que coincide com K em graus menores ou iguais (resp. maiores ou iguais) a n e tem componentes nulas nos outros lugares. Já o ***truncamento canônico*** $\tau_{\le n}\mathrm{K}$ (resp. $\tau_{\ge n}\mathrm{K}$) é o subcomplexo (resp. complexo quociente) de K de componentes K^i para $i<n, \mathrm{Z}^i(\mathrm{K})$ para $i=n$ e 0 para $i>n$ (resp. K^i para $i>n, \mathrm{K}^i/\mathrm{B}^i(\mathrm{K})$ para $i=n$ e 0 para $i<n$). A notação $\tau_{<n}\mathrm{K}$ significará $\tau_{\le n-1}\mathrm{K}$. Note que os truncamentos ingênuos e canônicos definem endofuntores aditivos da categoria de complexos de $\mathcal{A}$.

A ***translação*** $\mathrm{K}[n]$ de um complexo K é o complexo de componentes $\mathrm{K}[n]^i=\mathrm{K}^{i+n}$ e diferencial $d_{\mathrm{K}[n]}=(-1)^n d_\mathrm{K}$. Observe que esta é uma construção funtorial. Um complexo é dito ***concentrado em grau n*** (resp. ***em um intervalo*** $[a,b]$) se $\mathrm{K}^i=0$ para $i\neq n$ (resp. $i\notin[a,b]$). Um objeto A de $\mathcal{A}$ muitas vezes é visto como um complexo concentrado em grau 0 e nesse caso $\mathrm{A}[-n]$ é um complexo concentrado em grau n com componente A nesse grau.

Um morfismo de complexos $u:\mathrm{K}\to\mathrm{L}$ é chamado um ***quase-isomorfismo*** se, para todo inteiro n, $\mathrm{H}^n(u):\mathrm{H}^n(\mathrm{K})\to\mathrm{H}^n(\mathrm{L})$ é um isomorfismo. Dizemos que um complexo K é ***acíclico*** se $\mathrm{H}^n(\mathrm{K})=0$ para todo $n\in\mathbf{Z}$. Note que os funtores de truncamento canônico e translação preservam quase-isomorfismos, embora o mesmo não possa ser dito dos funtores de truncamento ingênuos.

(4.1.2) Seja $u:\mathrm{K}\to\mathrm{L}$ um morfismo de complexos. O ***cone de u***, denotado por $\mathrm{Cone}(u)$, é o complexo cuja componente de grau n é $\mathrm{K}^{n+1}\oplus\mathrm{L}^n$ e cuja diferencial é dada pela matriz $\begin{pmatrix} -d_\mathrm{K}^{n+1} & 0 \\ u^{n+1} & d_\mathrm{L}^n \end{pmatrix}$. Temos, então, uma seqüência exata curta de complexos

(4.1.2.1) $$0\to\mathrm{L}\xrightarrow{i}\mathrm{Cone}(u)\xrightarrow{p}\mathrm{K}[1]\to 0,$$

onde i e p são, respectivamente, os morfismos de inclusão e projeção canônicos. Identificando $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}[1])$ com $\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K})$, temos que o morfismo conectante $\partial:\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{K})\to\mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{L})$ da seqüência exata longa de cohomologias associada a (4.1.2.1) é exatamente $\mathrm{H}^{n+1}(u)$ para todo inteiro n. Isso pode ser justificado tanto diretamente quanto usando o teorema do mergulho pleno de Mitchell[1] [Fre64, 7.34]. Como conseqüência, u é um quase-isomorfismo se, e somente se, o seu cone é um complexo acíclico.

(4.1.3) Um ***funtor de translação*** em uma categoria aditiva $\mathcal{D}$ é um automorfismo T de $\mathcal{D}$. Se $\mathcal{D}$ é uma categoria aditiva munida de um funtor de translação T, então um ***triângulo em*** $\mathcal{D}$ é uma seqüência de morfismos $\mathrm{X}\xrightarrow{u}\mathrm{Y}\xrightarrow{v}\mathrm{Z}\xrightarrow{w}\mathrm{T}(\mathrm{X})$. Um ***morfismo*** de um

[1] Na verdade é suficiente aplicar uma versão mais fraca deste teorema.

triângulo (X, Y, Z, u, v, w) em um triângulo (X', Y', Z', u', v', w') é uma tripla (f, g, h) tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X') \end{tikzcd}$$

é comutativo. Essas definições permitem que falemos da categoria de triângulos em $\mathcal{D}$, onde a regra de composição é definida coordenada à coordenada.

Definição **(4.1.4).** — *Uma categoria triangulada é uma categoria aditiva $\mathcal{D}$ munida de um funtor de translação* T *e de uma classe de triângulos, chamados os triângulos distinguidos de $\mathcal{D}$, satisfazendo os quatro seguintes axiomas:*

(TR1) *Todo triângulo em $\mathcal{D}$ isomorfo a um triângulo distinguido é também um triângulo distinguido. Os triângulos $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to T(X)$ são distinguidos para todo objeto* X *de $\mathcal{D}$. Todo morfismo $u : X \to Y$ em $\mathcal{D}$ está contido em um triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to T(X)$.*

(TR2) (Rotação) *Um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ em $\mathcal{D}$ é distinguido se, e somente se, o triângulo $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X) \xrightarrow{-T(u)} T(Y)$ também o é.*

(TR3) *Dados dois triângulos distinguidos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ e $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} T(X')$ e morfismos $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ tais que $u' \circ f = g \circ u$, existe um morfismo $h : Z \to Z'$, não necessariamente único, tal que a tripla (f, g, h) é um morfismo de triângulos. Temos o seguinte diagrama mnemônico:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & T(X') . \end{tikzcd}$$

(TR4) (Octaedro) *Dados três triângulos distinguidos*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{j} Z' \xrightarrow{k} T(X),$$
$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{l} X' \xrightarrow{i} T(Y),$$
$$X \xrightarrow{v \circ u} Z \xrightarrow{m} Y' \xrightarrow{n} T(X),$$

existe um quarto triângulo distinguido $Z' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{h} T(Z')$ tal que o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & T(X) \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "v \circ u"] \arrow[d, "u"'] & Z \arrow[r, "m"] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "n"] \arrow[d, "g"'] & T(X) \arrow[d, "T(u)"] \\ Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "l"] & X' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & T(Y) \arrow[dl, "T(j)"] \\ & & T(Z') & \end{tikzcd}$$

.

Observações **(4.1.5).** — (i) No que segue, sempre que dissermos que $\mathcal{D}$ é uma categoria triangulada deixaremos subentendidos o funtor de translação e a classe de triângulos distinguidos.

(ii) Os axiomas (TR1)–(TR4) não são independentes. É possível demonstrar que o axioma (TR3) decorre dos outros três [May01, 2.2]. No entanto, existem razões, além das históricas, para mantê-lo na lista. Uma delas é que muitas vezes consideramos categorias, comumente chamadas de pré-trianguladas, satisfazendo apenas os axiomas (TR1)–(TR3) para tentar obter formulações equivalentes do axioma (TR4).

(iii) O axioma (TR2) garante que se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ é um triângulo distinguido em $\mathcal{D}$, então, para todo inteiro n, o triângulo

$$T^n(X) \xrightarrow{(-1)^n T^n(u)} T^n(Y) \xrightarrow{(-1)^n T^n(v)} T^n(Z) \xrightarrow{(-1)^n T^n(w)} T^{n+1}(X)$$

também o é.

(iv) A categoria $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ também tem estrutura de categoria triangulada. Seu funtor de translação é $T^{\mathrm{op}} = \mathrm{op} \circ T^{-1} \circ \mathrm{op}^{-1}$, onde $\mathrm{op} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ denota o funtor contravariante canônico, e um triângulo

$$X^{\mathrm{op}} \xrightarrow{u^{\mathrm{op}}} Y^{\mathrm{op}} \xrightarrow{v^{\mathrm{op}}} Z^{\mathrm{op}} \xrightarrow{w^{\mathrm{op}}} T^{\mathrm{op}}(X^{\mathrm{op}})$$

em $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ é distinguido se, e somente se, o triângulo $Z \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} X \xrightarrow{T(w)} T(Z)$ em $\mathcal{D}$ é distinguido.

(4.1.6) Sejam $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ duas categorias trianguladas. Um ***funtor triangulado*** de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{D}'$ é um par (F, α), onde $F : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ é um funtor aditivo e $\alpha : F \circ T \Rightarrow T' \circ F$ é um isomorfismo natural, tal que se $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ é um triângulo distinguido em $\mathcal{D}$, então o triângulo

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\alpha_X \circ F(w)} T'(F(X))$$

é distinguido em $\mathcal{D}'$. Em geral, abusamos da notação e escrevemos α como se fosse uma igualdade de funtores.

Suponhamos que $\mathcal{D}$ seja uma categoria triangulada e que $\mathcal{D}'$ seja uma subcategoria aditiva de $\mathcal{D}$. Dizemos que $\mathcal{D}'$ é uma ***subcategoria triangulada*** se $\mathcal{D}'$ é fechada sob T e T^{-1}, de modo que T induz um funtor de translação T' em $\mathcal{D}'$ para o qual $\mathcal{D}'$ se torna uma categoria triangulada e o funtor de inclusão $\mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{D}$ é triangulado. Para que uma subcategoria aditiva ***plena*** $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ seja uma subcategoria triangulada, é necessário e suficiente que $\mathcal{D}'$ seja fechada sob T e T^{-1} e que, para todo morfismo $u : X \to Y$ em $\mathcal{D}'$, exista um triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \to Z \to T(X)$ em $\mathcal{D}$ com $Z \in \mathcal{D}'$. Nesse caso, a classe de triângulos distinguidos em $\mathcal{D}'$ consiste dos triângulos distinguidos de $\mathcal{D}$ cujos objetos estão em $\mathcal{D}'$.

Uma subcategoria triangulada plena $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ é dita ***saturada*** se, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{D}$, a sua soma $X \oplus Y$ é isomorfa a um objeto de $\mathcal{D}'$ se, e somente se, tanto X quanto Y também o são.

(4.1.7) Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria triangulada e $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um funtor aditivo $H : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ é dito ***cohomológico*** se, para todo triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ em $\mathcal{D}$, a seqüência

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z)$$

é exata em $\mathcal{A}$. É comum denotarmos $\mathrm{H}(\mathrm{T}^n(\mathrm{X}))$ por $\mathrm{H}^n(\mathrm{X})$ para todo inteiro n. Em virtude de (4.1.5, (iii)), obtemos uma seqüência exata longa

$$\cdots \to \mathrm{H}^n(\mathrm{X}) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(u)} \mathrm{H}^n(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(v)} \mathrm{H}^n(\mathrm{Z}) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(w)} \mathrm{H}^{n+1}(\mathrm{X}) \to \cdots$$

Um funtor aditivo *contravariante* $\mathrm{H}: \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ é dito *cohomológico* se o funtor correspondente $\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}$ é cohomológico.

Sejam $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ duas categorias trianguladas e $\mathrm{F}: \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ um funtor triangulado. O *núcleo de* F, denotado Ker(F), é a subcategoria plena de $\mathcal{D}$ determinada pelos objetos X tais que $\mathrm{F}(\mathrm{X}) = 0$. De maneira semelhante, se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana e $\mathrm{H}: \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico, então o *núcleo de* H, denotado Ker(H), é a subcategoria plena de $\mathcal{D}$ obtida considerando os objetos X tais que $\mathrm{H}^n(\mathrm{X}) = 0$ para todo inteiro n. Não é difícil justificar que o núcleo de um funtor triangulado ou um funtor cohomológico é uma subcategoria triangulada saturada.

Exemplos **(4.1.8). —** (i) Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e denotemos por $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ a categoria de complexos de $\mathcal{A}$ a menos de homotopias, ou seja, a categoria cujos objetos são os mesmos de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$, mas os morfismos são as *classes de homotopia* de morfismos de complexos. A categoria $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ é aditiva, mas em geral não é uma categoria abeliana. Para que isso ocorra, é necessário e suficiente que $\mathcal{A}$ seja uma categoria abeliana semi-simples (4.1.22). No entanto, $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ tem estrutura de categoria triangulada. Seu funtor de translação leva um complexo K no complexo K[1] e é o epônimo dos funtores de translação. Note que ele é bem-definido, pois, por ser um funtor aditivo, preserva homotopias. Um triângulo em $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ é distinguido se, e somente se, é isomorfo a um triângulo da forma

(4.1.8.1) $$\mathrm{K} \xrightarrow{u} \mathrm{L} \xrightarrow{i} \mathrm{Cone}(u) \xrightarrow{-p} \mathrm{K}[1],$$

onde i e p são, respectivamente, os morfismos de inclusão e projeção canônicos. A verificação dos axiomas (TR1)–(TR4) é razoavelmente longa e a omitiremos. Sugerimos que o leitor consulte [Wei94, 10.2.4], [GM03, Capítulo IV, § 1.9] ou [Stacks, Tag 014S]. Deve-se, porém, atentar ao fato de que as convenções de sinais em algumas dessas referências diferem das nossas.

Designaremos por $\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$, resp. $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$) as subcategorias plenas de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ consistindo dos complexos limitados inferiormente (resp. limitados superiormente, resp. limitados). Todas elas são subcategorias trianguladas. Se X for um espaço anelado e $\mathcal{A}$ for a categoria de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos, então usaremos a notação mais breve $\mathbf{K}(\mathrm{X})$, bem como suas variantes para essas subcategorias trianguladas, em vez de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

(ii) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ duas categorias abelianas e $\mathrm{F}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor aditivo. Então F induz um funtor aditivo $\mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathbf{Ch}(\mathcal{B})$, também denotado F, que leva morfismos homotópicos em morfismos homotópicos e que, por sua vez, induz um funtor aditivo $\mathrm{F}: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{B})$. Não é difícil ver que este último é um funtor triangulado. De maneira análoga, obtemos funtores triangulados $\mathrm{F}: \mathbf{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}^*(\mathcal{B})$, onde $* \in \{+, -, b\}$.

(iii) Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. O exemplo epônimo de funtor cohomológico é o funtor de cohomologia. Inicialmente observe que, para um inteiro n, o n-ésimo funtor de cohomologia $\mathrm{H}^n: \mathbf{Ch}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ leva morfismos homotópicos em um mesmo morfismo e portanto pode ser visto como um funtor de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$. O que temos é que $\mathrm{H}^0: \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico. Para justificar essa assertiva é suficiente considerar os triângulos distinguidos da forma (4.1.8.1) e o resultado decorre, então, da observação feita em (4.1.2).

Como $H^0(K[n]) = H^n(K)$ para todo $n \in \mathbf{Z}$, aquilo que se convencionou em (4.1.7) condiz com a realidade. Em particular, para todo triângulo distinguido $K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} K[1]$ em $\mathbf{K}(\mathcal{A})$, obtemos uma seqüência exata longa

$$\cdots \to H^n(K) \xrightarrow{H^n(u)} H^n(L) \xrightarrow{H^n(v)} H^n(M) \xrightarrow{H^n(w)} H^{n+1}(K) \to \cdots$$

em $\mathcal{A}$. O núcleo de H^0 é a subcategoria triangulada saturada $\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ consistindo dos complexos acíclicos. De modo semelhante, obtemos funtores cohomológicos $H^0 : \mathbf{K}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, onde $* \in \{+, -, b\}$, cujos núcleos serão denotados por $\mathbf{Ac}^*(\mathcal{A})$.

(iv) Seja $\mathcal{D}$ uma categoria triangulada e X um objeto de $\mathcal{D}$. Segue diretamente dos axiomas (TR1)–(TR3) que os funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, X)$ são cohomológicos. Se n é um inteiro, então o *grupo de morfismos de grau n de* X *para* Y *em* $\mathcal{D}$, denotado $\mathrm{Hom}^n_{\mathcal{D}}(X, Y)$, é definido como sendo o grupo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, T^n(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(T^{-n}(X), Y)$. Observe que esta notação está de acordo com (4.1.7).

Definição **(4.1.9).** — *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e* S *uma classe de morfismos em $\mathcal{C}$. Uma localização de $\mathcal{C}$ com respeito a* S *é uma categoria $\mathcal{D}$, juntamente com um funtor $q : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) *Para todo elemento s de* S*, o morfismo $q(s)$ é um isomorfismo.*

(ii) *Se $\mathcal{E}$ é uma categoria e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é um funtor tal que $F(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in S$, então existe um único funtor $\widetilde{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ tal que $\widetilde{F} \circ q = F$.*

Caso exista, o par $(\mathcal{D}, q)$ é único a menos de um único isomorfismo. Nesse caso, denotaremos uma tal categoria $\mathcal{D}$ por $\mathcal{C}[S^{-1}]$.

Exemplo **(4.1.10).** — Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e S a classe de equivalências homotópicas de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. Então, a categoria $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de complexos de $\mathcal{A}$ a menos de homotopias pode ser vista como a localização de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ com respeito a S [Wei94, 10.1.2].

É possível mostrar, ignorando-se questões de teoria de conjuntos[1] que, no entanto, surgem apenas quando S é uma *classe própria*, que a localização de $\mathcal{C}$ com respeito a S sempre existe. Veja, por exemplo, [GM03, Capítulo III, § 2.2]. Nessa situação, $\mathcal{C}[S^{-1}]$ tem os mesmo objetos de $\mathcal{C}$ e um morfismo $X \to Y$ de $\mathcal{C}[S^{-1}]$ é uma classe de equivalência de um diagrama da forma

$$X \to X_1 \leftarrow X_2 \to \cdots \to X_{n-1} \leftarrow X_n \to Y,$$

onde as flechas apontando para a esquerda são elementos de S e o inteiro n pode variar. Entretanto, nessa generalidade, a categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$ não é muito tratável e várias patologias podem ocorrer. Esse fenômeno se manifesta já no caso de um anel não-comutativo, que nada mais é que uma **Ab**-categoria com um objeto, como pode ser constatado em [Lam99, § 9]. Motivados por considerações de localização de anéis não-comutativos, temos a seguinte

Definição **(4.1.11).** — *Uma classe de morfismos* S *em uma categoria $\mathcal{C}$ admite um cálculo de frações à direita se*

(i) *Para todo objeto* C *de $\mathcal{C}$, o morfismo identidade 1_C pertence a* S *e a composição de dois elementos de* S *é ainda um elemento de* S.

(ii) *Todo diagrama da forma $X \xrightarrow{u} Y' \xleftarrow{s} Y$, onde $s \in S$, pode ser completado para um diagrama*

[1] Explicitamente, que temos um *conjunto* de morfismos entre dois objetos prefixados.

comutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "t"'] & Y \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y', \end{tikzcd}$$

sendo t *um elemento de* S.

(iii) *Para todo par de morfismos* $u, v : X \to Y$ *e todo elemento* $s : Y \to Y'$ *tais que* $s \circ u = s \circ v$, *existe um elemento* $t : X' \to X$ *de* S *tal que* $u \circ t = v \circ t$.

Diremos que a classe S *admite um cálculo de frações à esquerda se ela satisfizer as condições duais de* (i)–(iii) *e que ela é um sistema multiplicativo se admitir um cálculo de frações tanto à direita quanto à esquerda.*

(4.1.12) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e S uma classe de morfismos admitindo um cálculo de frações à direita. Nesse caso, a categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$ tem uma descrição bastante simples. Um morfismo $X \to Y$ de $\mathcal{C}[S^{-1}]$ pode ser visto como uma fração à direita us^{-1}, onde $s : X_1 \to X$ é um elemento de S e $u : X_1 \to Y$ é um morfismo de $\mathcal{C}$. Precisamente, a categoria $\mathcal{C}[S^{-1}]$ é construída da seguinte maneira:[1] Os objetos de $\mathcal{C}[S^{-1}]$ serão os mesmos de $\mathcal{C}$. Um morfismo $X \to Y$ de $\mathcal{C}[S^{-1}]$ é a classe de equivalência de um diagrama da forma $X \overset{s}{\leftarrow} X_1 \overset{u}{\to} Y$, onde s é um elemento de S, sendo que se (t, v) for um outro diagrama dessa forma, então (s, u) será equivalente a (t, v) exatamente quando existir um terceiro deles (r, w) e um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "u"] & \\ X & X_3 \arrow[l, "r"'] \arrow[r, "w"] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\ & X_2 \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd} .$$

A composição em $\mathcal{C}[S^{-1}]$ é efetuada do modo seguinte: consideremos dois morfismos representados, respectivamente, por diagramas $X \overset{s}{\leftarrow} X_1 \overset{u}{\to} Y$ e $Y \overset{t}{\leftarrow} Y_1 \overset{v}{\to} Z$. Usando a condição (4.1.11, (ii)), podemos obter morfismos $t_1 : X_2 \to X_1$ e $u_1 : X_2 \to Y_1$, sendo o primeiro deles em S, tais que $u \circ t_1 = t \circ u_1$. O morfismo composto é então representado pelo diagrama $X \xleftarrow{s \circ t_1} X_2 \xrightarrow{v \circ u_1} Z$. Mnemonicamente temos

$$\begin{tikzcd} & & X_2 \arrow[dl, dashed, "t_1"'] \arrow[dr, dashed, "u_1"] & & \\ & X_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "u"] & & Y_1 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "v"] & \\ X & & Y & & Z. \end{tikzcd}$$

[1]Como já observamos anteriormente, existem alguns pontos delicados de teoria de conjuntos que surgem quando S é uma classe própria. Estes, no entanto, serão ignorados aqui. Isso se deve ao fato de, nas nossas aplicações concretas, eles poderem ser justificados. Veja, por exemplo, a observação (4.1.20, (ii)).

O funtor $q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[S^{-1}]$ é a identidade nos objetos e envia um morfismo $u:X\to Y$ na classe do diagrama $X\xleftarrow{1_X}X\xrightarrow{u}Y$. Várias verificações precisam ser feitas para mostrar que dessa forma obtemos uma categoria satisfazendo as condições da definição (4.1.9) e referimos o leitor a [Stacks, Tag 04VB] ou [GM03, Capítulo III, § 2.8] para uma discussão detalhada.

(4.1.13) De maneira dual, se $\mathcal{C}$ é uma categoria e S é uma classe de morfismos admitindo um cálculo de frações à esquerda, então podemos descrever os morfismos de $\mathcal{C}[S^{-1}]$ usando frações à esquerda. Se S for um sistema multiplicativo, então a propriedade universal da localização garante que as descrições de $\mathcal{C}[S^{-1}]$ via frações à direita e à esquerda são canonicamente isomorfas. Dependendo das circunstâncias, no entanto, pode ser mais conveniente usar uma ou outra.

Dizemos que um sistema multiplicativo S é *saturado* se os únicos morfismos de $\mathcal{C}$ transformados em isomorfismos por q são os seus elementos.

(4.1.14) Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria aditiva e S uma classe de morfismos em $\mathcal{A}$ admitindo um cálculo de frações à direita ou à esquerda. Então, a categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ é também aditiva e o funtor de localização $q:\mathcal{A}\to\mathcal{A}[S^{-1}]$ é aditivo. Além disso, se $\mathcal{B}$ for uma categoria aditiva e $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ for um funtor aditivo tal que $F(s)$ é um isomorfismo para todo $s\in S$, então existe um único funtor aditivo $\widetilde{F}:\mathcal{A}[S^{-1}]\to\mathcal{B}$ tal que $F=\widetilde{F}\circ q$. Se $\mathcal{A}$ for uma categoria abeliana e S for um *sistema multiplicativo*, então a categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ é abeliana e o funtor de localização é exato. Uma aplicação interessante disso é a construção do quociente de uma categoria abeliana por uma subcategoria de Serre. Para as demonstrações desses fatos, queira ver [Stacks, Tags 05QC e 02MN].

Definição **(4.1.15)**. — *Seja $\mathcal{D}$ uma categoria triangulada. Um sistema multiplicativo* S *em $\mathcal{D}$ é dito compatível com as estrutura triangulada se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) *Para todo $s\in S$, tanto $T(s)$ quanto $T^{-1}(s)$ são elementos de* S.

(ii) *Na situação do axioma* (TR3) *para categorias trianguladas, se f e g são elementos de* S, *então h pode ser escolhido em* S.

(4.1.16) Sejam $\mathcal{D}$ uma categoria triangulada e S um sistema multiplicativo compatível com a estrutura triangulada. De (4.1.14) já sabemos que $\mathcal{D}[S^{-1}]$ é uma categoria aditiva e que o funtor de localização $q:\mathcal{D}\to\mathcal{D}[S^{-1}]$ é aditivo. Temos de (4.1.15, (i)) que o funtor de translação de $\mathcal{D}$ se prolonga para um funtor de translação em $\mathcal{D}[S^{-1}]$. Um triângulo em $\mathcal{D}[S^{-1}]$ será dito distinguido se for isomorfo à imagem através de q de um triângulo distinguido de $\mathcal{D}$. É possível demonstrar que com essa estrutura $\mathcal{D}[S^{-1}]$ é uma categoria triangulada e que q é um funtor triangulado. Além disso, se $\mathcal{D}'$ é uma categoria triangulada e $F:\mathcal{D}\to\mathcal{D}'$ é um funtor triangulado tal que $F(s)$ é um isomorfismo para todo elemento s de S, então existe um único funtor triangulado $\widetilde{F}:\mathcal{D}[S^{-1}]\to\mathcal{D}'$ tal que $F=\widetilde{F}\circ q$. Uma propriedade semelhante é válida para funtores cohomológicos. Os detalhes aqui omitidos podem ser encontrados em [Stacks, Tag 05R1].

(4.1.17) Um jeito bastante simples de se obter sistemas multiplicativos compatíveis com a estrutura triangulada é o seguinte: consideremos uma categoria triangulada $\mathcal{D}$ e uma subcategoria triangulada plena $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$. Definamos S como sendo a classe consistindo dos morfismos $u:X\to Y$ para os quais é possível obter um triângulo distinguido $X\xrightarrow{u}Y\to Z\to T(X)$, onde Z é um objeto de $\mathcal{D}'$. Então S é um sistema multiplicativo compatível com a estrutura triangulada de $\mathcal{D}$ e ele será saturado se, e somente se, $\mathcal{D}'$ for uma subcategoria triangulada saturada. Sugerimos a consulta de [Stacks, Tag 05RG] para uma demonstração desses fatos.

(4.1.18) Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. A subcategoria plena $\mathbf{Ac}(\mathcal{A})$ de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ consistindo dos complexos acíclicos é o núcleo do funtor cohomológico $\mathrm{H}^0 : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ sendo, portanto, uma subcategoria triangulada saturada. O sistema multiplicativo saturado compatível com a estrutura triangulada que ela dá origem (4.1.17) é exatamente a classe dos quase-isomorfismos em $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ e será denotado $\mathrm{Qis}(\mathcal{A})$. A *categoria derivada* $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ *de* $\mathcal{A}$ é a categoria triangulada obtida localizando $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ com respeito a $\mathrm{Qis}(\mathcal{A})$. Temos, então, que o funtor de localização $q_{\mathcal{A}} : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathbf{D}(\mathcal{A})$ é triangulado e um morfismo $\mathrm{K} \to \mathrm{L}$ em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ obtido a partir de um morfismo de complexos u é um isomorfismo se, e somente se, u é um quase-isomorfismo.

Para cada inteiro n, os funtores de cohomologia $\mathrm{H}^n : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ levam quase-isomorfismos em isomorfismos e, em virtude da propriedade universal da categoria derivada (4.1.14), podem ser vistos como funtores aditivos de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$. Além disso, $\mathrm{H}^0 : \mathbf{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{A}$ é um funtor cohomológico (4.1.16). De maneira semelhante, os funtores de truncamento canônico podem ser vistos como endofuntores aditivos de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, mas o mesmo não pode ser dito dos funtores de truncamento ingênuo. Se K e L são dois complexos de $\mathcal{A}$, então o grupo de morfismos de grau n de K para L em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ (4.1.8, (iv)) será denotado por $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(\mathrm{K}, \mathrm{L})$ em vez de $\mathrm{Hom}^n_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(\mathrm{K}, \mathrm{L})$. É possível mostrar que se A e B são objetos de $\mathcal{A}$ vistos como complexos concentrados em grau 0, então o grupo $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ é isomorfo ao grupo de classes de n-extensões de A por B [Ver96, Capítulo III, 3.2.12] e portanto a notação se justifica.

(4.1.19) A restrição do funtor cohomológico $\mathrm{H}^0 : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ a $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$, onde $* \in \{+, -, b\}$ é ainda um funtor cohomológico, de modo que o seu núcleo, denotado $\mathbf{Ac}^*(\mathcal{A})$, é uma subcategoria triangulada saturada de $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ que dá origem a um sistema multiplicativo saturado $\mathrm{Qis}^*(\mathcal{A})$ em $\mathbf{K}^*(\mathcal{A})$ (4.1.17). Existem funtores triangulados $\mathbf{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathbf{D}(\mathcal{A})$ (4.1.16) e pode-se mostrar que cada um deles é pleno e fiel [Stacks, Tag 05RW]. Eles permitem que vejamos $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$ como subcategoria triangulada plena de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, o que faremos sem maiores comentários no que segue.

Se X for um espaço anelado e $\mathcal{A}$ for a categoria de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos, então usaremos a notação mais curta $\mathbf{D}(\mathrm{X})$, bem como suas variantes para as subcategorias trianguladas acima, em vez de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. Caso seja preciso, deixaremos claro o feixe de anéis que estamos considerando através da notação $\mathbf{D}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$.

Observações **(4.1.20).** — (i) Poderíamos ter definido a categoria derivada de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ como sendo a localização da categoria de complexos de $\mathcal{A}$ com respeito à classe de quase-isomorfismos. Existem, no entando, dois motivos para não o fazermos. O primeiro deles é que em $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ a classe de quase-isomorfismos não é, em geral, um sistema multiplicativo e portanto não podemos expressar um morfismo de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ como uma fração de morfismos de $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$. O segundo é que a categoria derivada não é, em geral, abeliana (4.1.22), mas, como vimos, herda naturalmente a estrutura de categoria triangulada de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$.

(ii) Estritamente falando, a categoria derivada de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$ nem sempre existe. Se $\mathcal{A}$ for uma categoria pequena, isto é, uma categoria cujos objetos formam um *conjunto*, então isso não é um problema, pois $\mathrm{Qis}(\mathcal{A})$ será também um conjunto. Um caso bastante importante em que podemos garantir a existência de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ é o de uma categoria de Grothendieck [KS06, 14.3.1 (iv)]. Isso significa que $\mathcal{A}$ admite um gerador, ou seja, um objeto G tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathrm{G}, \cdot)$ é um funtor fiel, é cocompleta e colimites filtrados são exatos. Os exemplos mais importantes de categorias de Grothendieck são as categorias de R-módulos à direita $\mathbf{Mod}(\mathrm{R})$, sendo R um anel possivelmente não-comutativo, de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-módulos $\mathbf{Mod}(\mathrm{X})$, onde X é um espaço anelado e de $\mathscr{O}_S$-módulos quase-coerentes **Qcoh**(S), sendo S um esquema. Para esta última veja [Stacks, Tag 077P], pois este não é um resultado elementar.

As categorias $\mathbf{D}^*(\mathcal{A})$, onde $* \in \{+,-,b\}$, existirão sob hipóteses mais fracas. Se $\mathcal{A}$ tiver suficiente injetivos (resp. projetivos), então $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ (resp. $\mathbf{D}^-(\mathcal{A})$) existe e é equivalente à categoria $\mathbf{K}^+(\mathcal{I})$ (resp. $\mathbf{K}^-(\mathcal{P})$), sendo $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{P}$) a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ consistindo dos objetos injetivos (resp. projetivos) [Wei94, 10.4.8].

(4.1.21) Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $0 \to K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \to 0$ uma seqüência exata curta de complexos de $\mathcal{A}$. Então, $\varphi = (0\ \ v) : \mathrm{Cone}(u) \to M$ é um morfismo de complexos tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathrm{Cone}(u)) \arrow[r, "-H^n(p)"] \arrow[d, "H^n(\varphi)"'] & H^{n+1}(K) \arrow[d, equal] \\ H^n(M) \arrow[r, "\partial"'] & H^{n+1}(K) \end{tikzcd}$$

é comutativo, onde $p : \mathrm{Cone}(u) \to K[1]$ é o morfismo de projeção canônico e ∂ é o morfismo conectante da seqüência exata longa de cohomologias associada à seqüência exata curta $0 \to K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \to 0$. Em virtude de (4.1.2), concluímos que φ é um quase-isomorfismo e portanto temos um triângulo distinguido $K \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} M \xrightarrow{w} K[1]$ em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$, sendo $w = -p \circ \varphi^{-1}$, tal que $H^n(w) = \partial$. Essa é a razão da conveção de sinal na definição do triângulo (4.1.8.1). Além disso, todo triângulo distinguido em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ é isomorfo a um triângulo obtido dessa maneira e essa construção é funtorial, ou seja, um morfismo de seqüências exatas curtas de complexos induz um morfismo entre os triângulos distinguidos assim construídos.

Exemplo **(4.1.22).** — O propósito deste exemplo é mostrar que categorias derivadas raramente são abelianas. A exposição se baseia em [Büh12]. Primeiro, notemos que todo monomorfismo $v : Y \to Z$ em uma categoria triangulada $\mathcal{D}$ cinde. Com efeito, usando (TR1) e (TR2), podemos obter um triângulo distinguido $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$ e, visto que a composição de dois morfismos consecutivos em um triângulo distinguido é sempre zero,[1] concluímos que $u = 0$ e portanto que o homomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y)$ induzido por v é sobrejetivo. Em particular, v tem uma inversa à esquerda. Um argumento dual garante que todo epimorfismo em uma categoria triangulada cinde. Como conseqüência, se uma categoria triangulada $\mathcal{D}$ é abeliana, então, para todo morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{D}$, podemos obter um morfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g \circ f = f$. De fato, escrevendo f como a composição de um epimorfismo e seguido por um monomorfismo m, basta tomar $g = e' \circ m'$, onde e' é uma inversa à direita para e e m' é uma inversa à esquerda para m.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Para que a categoria derivada $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ seja abeliana, é necessário e suficiente que $\mathcal{A}$ seja semi-simples, isto é, que todas as suas seqüências exatas curtas cindam. A necessidade decorre do que fizemos no primeiro parágrafo e do fato funtor que leva um objeto de $\mathcal{A}$ em um complexo concentrado em grau 0 em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ ser pleno e fiel, pois, dado um monomorfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{A}$, podemos obter um morfismo $g : B \to A$ em $\mathcal{A}$ tal que $f \circ g \circ f = f$ e por conseguinte $g \circ f = 1_A$. Por outro lado, se $\mathcal{A}$ for uma categoria abeliana semi-simples, então $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ é equivalente a $\mathcal{A}^{\mathbf{Z}}$ [GM03, Capítulo III, § 2.4] e portanto é abeliana. Um argumento análogo permite mostrar que a categoria de homotopia de complexos $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ é abeliana se, e somente se, a categoria $\mathcal{A}$ é semi-simples.

[1] Essa é uma das coisas que devemos mostrar para justificar que o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \cdot)$ é cohomológico.

Apenas como observação lateral, se R for um anel não necessariamente comutativo e $\mathcal{A}$ for a categoria de R-módulos à direita, então $\mathcal{A}$ será semi-simples se, e somente se, R for um anel semi-simples [Wei94, 4.2.2].

(4.1.23) Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Um objeto K de $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$ é dito *decomponível* se for isomorfo em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ a um complexo com diferencial nula. Uma condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que existam morfismos $f_n : \mathrm{H}^n(\mathrm{K})[-n] \to \mathrm{K}$ em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ tais que $\mathrm{H}^n(f_n) = 1_{\mathrm{H}^n(\mathrm{K})}$ para todo inteiro n. Nesse caso, uma *decomposição de* K é um morfismo $f : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{H}^n(\mathrm{K})[-n] \to \mathrm{K}$ tal que $\mathrm{H}^n(f) = 1_{\mathrm{H}^n(\mathrm{K})}$ para todo inteiro n. Note que, como K é limitado inferiormente, a soma $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{H}^n(\mathrm{K})[-n]$ é na verdade finita e portanto faz sentido em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$.

Seja K um complexo de $\mathcal{A}$ concentrado em graus 0 e 1. Note que uma decomposição de K é completamente determinada por um morfismo $f_1 : \mathrm{H}^1(\mathrm{K})[-1] \to \mathrm{K}$ em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathrm{H}^1(f_1) = 1_{\mathrm{H}^1(\mathrm{K})}$. De (4.1.21) e do fato de termos um quase-isomorfismo de $\mathrm{K}/\mathrm{H}^0(\mathrm{K})$ em $\mathrm{H}^1(\mathrm{K})[-1]$, obtemos que a seqüência exata curta $0 \to \mathrm{H}^0(\mathrm{K}) \to \mathrm{K} \to \mathrm{K}/\mathrm{H}^0(\mathrm{K}) \to 0$ determina um triângulo distinguido

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{K}) \to \mathrm{K} \to \mathrm{H}^1(\mathrm{K})[-1] \to \mathrm{H}^0(\mathrm{K})[1]$$

em $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ que, por sua vez, dá origem à seqüência exata

$$\textbf{(4.1.23.1)} \qquad \begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K}), \mathrm{H}^0(\mathrm{K})) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K})[-1], \mathrm{K}) \to \\ \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K}), \mathrm{H}^1(\mathrm{K})) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K}), \mathrm{H}^0(\mathrm{K})), \end{aligned}$$

pois $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K})[-1], \cdot)$ é um funtor cohomológico (4.1.8, (iv)) e $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{A})}(\mathrm{L}, \mathrm{M}) = 0$ para todos os complexos L, M tais que $\mathrm{L} = \sigma_{\leq i}\mathrm{L}$, $\mathrm{M} = \sigma_{\geq j}\mathrm{M}$ e $i < j$.

Concluímos de (4.1.23.1) que uma condição necessária e suficiente para que K seja decomponível é que a imagem $c_1 \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K}), \mathrm{H}^0(\mathrm{K}))$ de $1_{\mathrm{H}^1(\mathrm{K})}$ por α seja zero e que se este for o caso, então o conjunto de decomposições de K é um espaço homogêneo principal sob o grupo $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathrm{H}^1(\mathrm{K}), \mathrm{H}^0(\mathrm{K}))$.

(4.1.24) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ duas categorias abelianas e $\mathrm{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor aditivo. Classicamente, sabemos que se $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos, então é possível definir funtores derivados $\mathrm{R}^n\mathrm{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de F, onde $n \geq 0$, de forma que $(\mathrm{R}^n\mathrm{F})_{n\geq 0}$ seja um ∂-funtor cohomológico universal. Unsado resoluções de Cartan-Eilenberg, podemos também construir funtores hiperderivados $\mathbb{R}^n\mathrm{F} : \mathbf{Ch}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ de F, onde $n \in \mathbf{Z}$, de forma que $(\mathbb{R}^n\mathrm{F})_{n\in\mathbf{Z}}$ é um ∂-funtor cohomológico, sendo também universal, desde que nos restrinjamos à subcategoria plena de $\mathbf{Ch}^+(\mathcal{A})$ consistindo dos complexos K tais que $\mathrm{K}^i = 0$ se $i < 0$. No entanto, essa teoria clássica de funtores derivados é insuficiente para descrever inúmeros fenômenos que surgem em aplicações concretas. A idéia, então, é tentar obter um funtor $\mathbf{R}\mathrm{F}$ de $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ em $\mathbf{D}(\mathcal{B})$ cuja composição com o funtor de cohomologia H^n e com o funtor canônico $\mathbf{Ch}^+(\mathcal{A}) \to \mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ redunde em $\mathbb{R}^n\mathrm{F}$. Ingenuamente, poderíamos tentar prolongar o funtor triangulado $\mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{B})$ induzido por F (4.1.8, (ii)) para um funtor de $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ em $\mathbf{D}(\mathcal{B})$. Isso, porém, só é possível quando $\mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{B})$ preserva quase-isomorfismos, o que equivale a dizer que F é um funtor exato. Assim, precisaremos de uma definição mais engenhosa do que significa um funtor derivado $\mathbf{R}\mathrm{F}$ de F. Aqui trataremos apenas o caso de funtores derivados à direita, deixando a cargo do leitor as definições e teoremas duais.

(4.1.25) Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $\mathbf{K}$ uma subcategoria triangulada plena de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$. A restrição de $\mathrm{H}^0 : \mathbf{K}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ a $\mathbf{K}$ é um funtor cohomológico cujo sistema multiplicativo saturado associado ao seu núcleo (4.1.17) é exatamente aquele formado pelos quase-isomorfismos entre complexos em $\mathbf{K}$, que denotaremos por $\mathrm{Qis}(\mathcal{A})\cap\mathbf{K}$. Dizemos que $\mathbf{K}$ é uma *subcategoria localizante* de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ se o funtor canônico $\mathbf{K}[(\mathrm{Qis}(\mathcal{A})\cap\mathbf{K})^{-1}]\to\mathbf{D}(\mathcal{A})$ é pleno e fiel. Nesse caso, denotaremos por $\mathbf{D}$ a categoria $\mathbf{K}[(\mathrm{Qis}(\mathcal{A})\cap\mathbf{K})^{-1}]$ e por $q:\mathbf{K}\to\mathbf{D}$ o funtor de localização. Note que ela pode ser vista como uma subcategoria triangulada plena de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$. Como observamos em (4.1.19) as subcategorias $\mathbf{K}^+(\mathcal{A}),\mathbf{K}^-(\mathcal{A})$ e $\mathbf{K}^b(\mathcal{A})$ de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ são localizantes e as subcategorias trianguladas de $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ correspondentes são $\mathbf{D}^+(\mathscr{A}),\mathbf{D}^-(\mathcal{A})$ e $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$, respectivamente.

(4.1.26) Sejam $\mathcal{A},\mathcal{B}$ duas categorias abelianas, $\mathbf{K}$ uma subcategoria localizante de $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ e $\mathrm{F}:\mathbf{K}\to\mathbf{K}(\mathcal{B})$ um funtor triangulado. Um funtor derivado à direita de F é um par $(\mathbf{R}\mathrm{F},\xi)$ consistindo de um funtor triangulado $\mathbf{R}\mathrm{F}:\mathbf{D}\to\mathbf{D}(\mathcal{B})$ e de uma tranformação natural $\xi:q_{\mathcal{B}}\circ\mathrm{F}\Rightarrow\mathbf{R}\mathrm{F}\circ q$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: para todo funtor triangulado $\mathrm{G}:\mathbf{D}\to\mathbf{D}(\mathcal{B})$ e toda transformação natural $\zeta:q_{\mathcal{B}}\circ\mathrm{F}\Rightarrow\mathrm{G}\circ q$, existe uma única transformação natural $\eta:\mathbf{R}\mathrm{F}\Rightarrow\mathrm{G}$ tal que $\zeta=\eta_q\circ\xi$, onde $\eta_q:\mathbf{R}\mathrm{F}\circ q\Rightarrow\mathrm{G}\circ q$ é a transformação natural deduzida de η.

É imediato da definição que se o funtor derivado à direita $(\mathbf{R}\mathrm{F},\xi)$ de F existir, então ele será único a menos de um único isomorfismo. Nesse caso, o *n-ésimo funtor de hipercohomologia* $\mathbf{R}^n\mathrm{F}:\mathbf{D}\to\mathcal{B}$ de F é definido como sendo a composição de $\mathbf{R}\mathrm{F}:\mathbf{D}\to\mathbf{D}(\mathcal{B})$ com H^n.

Observe que se F preserva quase-isomorfismos, então ele se prolonga para um funtor de $\mathbf{D}$ em $\mathbf{D}(\mathcal{B})$, que também denotaremos por F, e, tomando ξ como sendo a identidade, é claro que (F,ξ) é o funtor derivado à direita de F. Um caso particular é aquele onde $\mathrm{F}:\mathbf{K}\to\mathbf{K}(\mathcal{B})$ é oriundo de um funtor exato $\mathrm{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$.

(4.1.27) Suponhamos que exista uma subcategoria triangulada plena $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ satisfazendo as duas condições seguintes:

(i) Para todo objeto $\mathrm{K}\in\mathbf{K}$ existe um objeto $\mathrm{L}\in\mathbf{L}$ e um quase-isomorfismo de K em L.

(ii) Se $\mathrm{L}\in\mathbf{L}$ é um complexo acíclico, então o complexo F(L) é também acíclico.

Então, podemos garantir a existência de um funtor derivado à direita $(\mathbf{R}\mathrm{F},\xi)$ de F. Além disso, para todo $\mathrm{L}\in\mathbf{L}$, o morfismo $\xi_{\mathrm{L}}:q_{\mathcal{B}}(\mathrm{F}(\mathrm{L}))\to\mathbf{R}\mathrm{F}(q(\mathrm{L}))$ é um isomorfismo. Em particular, se tivermos um quase-isomorfismo $u:\mathrm{K}\to\mathrm{L}$, onde $\mathrm{K}\in\mathbf{K}$ e $\mathrm{L}\in\mathbf{L}$, então $\xi_{\mathrm{L}}^{-1}\circ\mathbf{R}\mathrm{F}(u)$ é um isomorfismo em $\mathbf{D}(\mathcal{B})$ de $\mathbf{R}\mathrm{F}(\mathrm{K})$ em F(L). Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [Har66, Capítulo I, 5.1].

Suponhamos que exista uma subcategoria aditiva plena $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ tal que todo objeto A de $\mathcal{A}$ admite um monomorfismo $\mathrm{A}\rightarrowtail\mathrm{A}'$ em um objeto A' de $\mathcal{A}'$. Se K é um complexo de $\mathcal{A}$ tal que $\mathrm{K}^i=0$ para $i<n$, então existem um complexo K' de $\mathcal{A}'$ tal que $\mathrm{K}'^i=0$ se $i<n$ e um quase-isomorfismo $\mathrm{K}\to\mathrm{K}'$. Em particular, a condição (i) acima é satisfeita tomando $\mathbf{K}=\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$ e $\mathbf{L}=\mathbf{K}^+(\mathcal{A}')$. Um argumento bastante elegante devido a Bernhard Keller para justificar isso pode ser encontrado em [Büh07, 9.7]. Embora nessa referência o autor se restrinja às categorias abelianas com suficientes injetivos, o argumento se estende, *mutatis mutandis*, para o caso aqui enunciado. Como conseqüência, se $\mathcal{A}$ for uma categoria abeliana com suficientes injetivos e $\mathbf{K}=\mathbf{K}^+(\mathcal{A})$, então podemos garantir a existência do funtor derivado à direita $(\mathbf{R}\mathrm{F},\xi)$ de F. Com efeito, tomamos $\mathbf{L}=\mathbf{K}^+(\mathcal{I})$, onde $\mathcal{I}$ é a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ consistindo dos objetos injetivos. Já justificamos o porquê de (i) ser verdade. Para (ii), basta observar que um complexo limitado inferiormente de injetivos é homotopicamente equivalente ao complexo zero.

(4.1.28) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ duas categorias abelianas, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor aditivo e consideremos o funtor triangulado $F : \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{B})$ induzido por F (4.1.8, (ii)). Nesse caso, podemos obter um critério para a existência de $\mathbf{R}F : \mathbf{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathbf{D}(\mathcal{B})$ em termos da categoria $\mathcal{A}$ e do funtor aditivo $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Uma subcategoria aditiva plena $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ é dita *adaptada à direita para* F se ela satisfaz as seguintes condições:

(i) Para todo objeto A de $\mathcal{A}$, podemos obter um monomorfismo $A \rightarrowtail A'$, onde A' é um objeto de $\mathcal{A}'$.

(ii) Se $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ é uma seqüência exata curta em $\mathcal{A}$ tal que $A', A \in \mathcal{A}'$, então A'' é também um objeto de $\mathcal{A}'$.

(iii) F leva seqüências exatas curtas de objetos de $\mathcal{A}'$ em seqüências exatas curtas.

Nessa situação, considerando $\mathbf{L} = \mathbf{K}^+(\mathcal{A}')$, temos que (i) garante que $\mathbf{L}$ satisfaz (4.1.27, (i)) e (ii) e (iii) asseguram que $\mathbf{L}$ satisfaz (4.1.27, (ii)). Em particular, se $\mathcal{A}$ é uma categoria com suficientes injetivos, então a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ consistindo dos objetos injetivos é adaptada à direita para qualquer funtor aditivo F. Mais geralmente, a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ formada pelos objetos F-acíclicos é adaptada à direita para F.

Supondo que $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos, é simples justificar que o n-ésimo funtor de hipercohomologia $\mathbf{R}^n F$ visto como um funtor de $\mathbf{Ch}^+(\mathcal{A})$ em $\mathcal{B}$ coincide com aquele definido classicamente usando resoluções de Cartan-Eilenberg.

(4.1.29) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ três categorias abelianas, $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}, \mathbf{K}_{\mathcal{B}}$ subcategorias localizantes de $\mathbf{K}(\mathcal{A}), \mathbf{K}(\mathcal{B})$, respectivamente, e $F : \mathbf{K}_{\mathcal{A}} \to \mathbf{K}(\mathcal{B}), G : \mathbf{K}_{\mathcal{B}} \to \mathbf{K}(\mathcal{C})$ dois funtores triangulados. Suponhamos que $F(\mathbf{K}_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathbf{K}_{\mathcal{B}}$ e que existam subcategorias trianguladas plenas $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}, \mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{K}_{\mathcal{A}}, \mathbf{K}_{\mathcal{B}}$ satisfazendo as condições (i) e (ii) de (4.1.27) para F, G, respectivamente, e tais que $F(\mathbf{L}_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathbf{L}_{\mathcal{B}}$. Então, podemos garantir a existência dos funtores derivados à direita $(\mathbf{R}F, \xi_F), (\mathbf{R}G, \xi_G), (\mathbf{R}(G \circ F), \xi_{G \circ F})$ de $F, G, G \circ F$, respectivamente, e usando a construção explícita de $\mathbf{R}F$ é possível justificar que $\mathbf{R}F(\mathbf{D}_{\mathcal{A}}) \subseteq \mathbf{D}_{\mathcal{B}}$. Da propriedade universal de $(\mathbf{R}(G \circ F), \xi_{G \circ F})$, obtemos uma única transformação natural $\eta : \mathbf{R}(G \circ F) \Rightarrow \mathbf{R}G \circ \mathbf{R}F$ tal que $\eta_q \circ \xi_{G \circ F} = \mathbf{R}G(\xi_F) \circ (\xi_G)_F$, onde $\eta_q, \mathbf{R}G(\xi_F), (\xi_G)_F$ são as transformações naturais obtidas a partir de η, ξ_F, ξ_G por meio dos funtores $q, \mathbf{R}G, F$, respectivamente, e não é difícil ver que η é, na verdade, um isomorfismo natural.

(4.1.30) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ três categorias abelianas e $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ dois funtores aditivos. Suponhamos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tenham suficientes injetivos e que F leve objetos injetivos em G-acíclicos. Se $F : \mathbf{K}^+(\mathcal{A}) \to \mathbf{K}(\mathcal{B})$ e $G : \mathbf{K}^+(\mathcal{B}) \to \mathbf{K}(\mathcal{C})$ são os funtores triangulados induzidos por F e G, então tomando $L_{\mathcal{A}} = \mathbf{K}^+(\mathcal{I})$, onde $\mathcal{I}$ é a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ consistindo dos objetos injetivos e $\mathbf{L}_{\mathcal{B}} = \mathbf{K}^+(\mathcal{B}')$, onde $\mathcal{B}'$ é a subcategoria plena de $\mathcal{B}$ formada pelos objetos G-acíclicos, as condições em (4.1.29) são satisfeitas e portanto temos um isomorfismo natural entre os funtores $\mathbf{R}(G \circ F)$ e $\mathbf{R}G \circ \mathbf{R}F$.

Exemplos **(4.1.31).** — (i) Sejam X um espaço anelado e $\Gamma(X, \cdot) : \mathbf{Mod}(X) \to \mathbf{Ab}$ o funtor que toma seções globais. Como $\mathbf{Mod}(X)$ tem suficientes injetivos, podemos garantir a existência do funtor derivado à direita $\mathbf{R}\Gamma(X, \cdot) : \mathbf{D}^+(X) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ de $\Gamma(X, \cdot)$ (4.1.28). Usaremos a notação mais sugestiva $\mathbf{H}^n(X, \cdot) : \mathbf{D}^+(X) \to \mathbf{Ab}$ para o n-ésimo funtor de hipercohomologia de $\Gamma(X, \cdot)$ e se $\mathscr{F}^\bullet$ for um complexo limitado inferiormente de $\mathscr{O}_X$-módulos, diremos que $\mathbf{H}^n(X, \mathscr{F}^\bullet)$ é o n-ésimo grupo de hipercohomologia de $\mathscr{F}^\bullet$.

Na verdade, $\Gamma(X, \cdot)$ é um funtor de $\mathbf{Mod}(X)$ em $\mathbf{Mod}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X))$ e difere do primeiro pelo funtor do esquecimento $U : \mathbf{Mod}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X)) \to \mathbf{Ab}$. Como este último é exato, concluímos de (4.1.30) que $\mathbf{R}\Gamma(X, \cdot)$ pode ser visto como indo de $\mathbf{D}^+(X)$ em $\mathbf{D}(\Gamma(X, \mathscr{O}_X))$.

Sejam $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ um morfismo de esquemas e $\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ o complexo de de Rham de X sobre Y. Definimos o *n-ésimo grupo de cohomologia de de Rham de* X *sobre* Y, denotado $\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/\mathrm{Y})$, como sendo o n-ésimo grupo de hipercohomologia $\mathbf{H}^n(\mathrm{X}, \Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ do complexo $\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$. Observe que a diferencial de $\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ não é, em geral, $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-linear, mas apenas $f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y})$-linear. Assim, nesse caso, devemos considerar $\mathbf{H}^n(\mathrm{X}, \cdot)$ como um funtor de $\mathbf{D}^+(f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y}))$ em $\mathbf{D}(\mathrm{Y})$.

(ii) Sejam X um espaço anelado e $\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet$ dois complexos de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-módulos. Denotaremos o seu produto tensorial por $\mathscr{F}^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^\bullet$. Lembre que este é definido como sendo o complexo total associado ao bicomplexo $(\mathscr{F}^p \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^q)_{p,q \in \mathbf{Z}}$ cuja diferencial horizontal (resp. vertical)

$$d'^{pq} : \mathscr{F}^p \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^q \to \mathscr{F}^{p+1} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^q \quad (\text{resp. } d''^{pq} : \mathscr{F}^p \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^q \to \mathscr{F}^p \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^{q+1})$$

é $d^p \otimes 1$ (resp. $(-1)^p \otimes d^q$). Temos, então, um bifuntor $\mathbf{Ch}(\mathrm{X}) \times \mathbf{Ch}(\mathrm{X}) \to \mathbf{Ch}(\mathrm{X})$, aditivo em cada variável separadamente, que leva $(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$ em $\mathscr{F}^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^\bullet$ e não é difícil justificar que ele se estende para um bifuntor $\mathbf{K}(\mathrm{X}) \times \mathbf{K}(\mathrm{X}) \to \mathbf{K}(\mathrm{X})$ que é triangulado em cada variável separadamente. Fixemos $\mathscr{F}^\bullet \in \mathbf{K}^-(\mathrm{X})$. A subcategoria plena de $\mathbf{K}^-(\mathrm{X})$ consistindo dos complexos limitados inferiormente cujas componentes são $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-módulos planos satisfaz as hipóteses duais dos itens (i) e (ii) de (4.1.27) para o funtor triangulado $\mathrm{F}_{\mathscr{F}^\bullet} = \mathscr{F}^\bullet \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} (\cdot) : \mathbf{K}^-(\mathrm{X}) \to \mathbf{K}(\mathrm{X})$. Portanto, o seu funtor derivado à esquerda $\mathbf{L}\mathrm{F}_{\mathscr{F}^\bullet} : \mathbf{D}^-(\mathrm{X}) \to \mathbf{D}(\mathrm{X})$ existe. A propriedade universal dos funtores derivados garante que, fixado $\mathscr{G}^\bullet \in \mathbf{D}^-(\mathrm{X})$, temos um funtor $\mathscr{F}^\bullet \mapsto \mathbf{L}\mathrm{F}_{\mathscr{F}^\bullet}(\mathscr{G})$ de $\mathbf{K}^-(\mathrm{X})$ em $\mathbf{D}(\mathrm{X})$. É possível mostrar que ele é triangulado e que leva quase-isomorfismos em isomorfismos, induzindo, portanto, um funtor triangulado de $\mathbf{D}^-(\mathrm{X})$ em $\mathbf{D}(\mathrm{X})$. Assim, temos um bifuntor $\mathbf{D}^-(\mathrm{X}) \times \mathbf{D}^-(\mathrm{X}) \to \mathbf{D}(\mathrm{X})$, triangulado em cada variável separadamente, chamado o *produto tensorial derivado*. Seu valor em $(\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet)$ será denotado $\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^\bullet$. Se tivéssemos derivado $\otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}}$ primeiro na primeira variável e depois na segunda, obteríamos um bifuntor isomorfo ao construído acima. Além disso, podemos mostrar que se $\mathscr{F}^\bullet, \mathscr{G}^\bullet, \mathscr{H}^\bullet \in \mathbf{D}^-(\mathrm{X})$, então existe um isomorfismo natural

$$(\mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{G}^\bullet) \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{H}^\bullet \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} (\mathscr{G}^\bullet \otimes^{\mathbf{L}}_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \mathscr{H}^\bullet)$$

que permite considerar o produto tensorial derivado em n variáveis. Para mais detalhes, queira ver [Har66, Capítulo II, § 4].

*
* *

Relembremos agora alguns fatos sobre seqüências espectrais que virão a ser utilizados. Seguiremos quase sempre a terminologia de [EGA 0_{III}, § 11].

(4.1.32) Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $a \geq 0$ um inteiro. Uma *seqüência espectral* E *em $\mathcal{A}$ começando na página a* consiste dos seguintes elementos:

(i) Uma família (E_r^{pq}) de objetos de $\mathcal{A}$ para todos $p, q \in \mathbf{Z}$ e $r \geq a$.

(ii) Uma família de morfismos $d_r^{pq} : \mathrm{E}_r^{pq} \to \mathrm{E}_r^{p+r,q-r+1}$ tais que $d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{pq} = 0$. Definindo $\mathrm{Z}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq}) = \mathrm{Ker}(d_r^{pq})$, $\mathrm{B}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq}) = \mathrm{Im}(d_r^{p-r,q+r-1})$, obtemos que

$$\mathrm{B}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq}) \subseteq \mathrm{Z}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq}) \subseteq \mathrm{E}_r^{pq}.$$

(iii) Uma família de isomorfismos $\alpha_r^{pq} : \mathrm{Z}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq})/\mathrm{B}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}_{r+1}^{pq}$.

Antes de prosseguirmos é conveniente introduzir algumas notações. Para $k \geq r+1$, definimos, por indução em $k - r$, subobjetos $\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_r^{pq})$ e $\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_r^{pq})$ de E_r^{pq} como imagens inversas pelo morfismo canônico $\mathrm{E}_r^{pq} \to \mathrm{E}_r^{pq}/\mathrm{B}_{r+1}(\mathrm{E}_r^{pq})$ dos subobjetos deste quociente identificados por α_r^{pq} aos subobjetos $\mathrm{B}_k(\mathrm{E}_{r+1}^{pq})$ e $\mathrm{Z}_k(\mathrm{E}_{r+1}^{pq})$, respectivamente. É claro que

$B_k(E_r^{pq})$ está contido em $Z_k(E_r^{pq})$ e que temos isomorfismos canônicos

(4.1.32.1) $$Z_k(E_r^{pq})/B_k(E_r^{pq}) \xrightarrow{\sim} E_k^{pq}$$

para $k \geq r+1$. Se definirmos $B_r(E_r^{pq}) = 0$ e $Z_r(E_r^{pq}) = E_r^{pq}$, então temos as inclusões

$$0 = B_r(E_r^{pq}) \subseteq B_{r+1}(E_r^{pq}) \subseteq B_{r+2}(E_r^{pq}) \subseteq \ldots \subseteq Z_{r+2}(E_r^{pq}) \subseteq Z_{r+1}(E_r^{pq}) \subseteq Z_r(E_r^{pq}) = E_r^{pq}.$$

Voltemos agora à definição dos outros elementos de E:

(iv) Dois subobjetos $B_\infty(E_a^{pq})$ e $Z_\infty(E_a^{pq})$ de E_a^{pq} tais que $B_\infty(E_a^{pq}) \subseteq Z_\infty(E_a^{pq})$ e, para todo $k \geq a$, $B_k(E_a^{pq}) \subseteq B_\infty(E_a^{pq})$ e $Z_\infty(E_a^{pq}) \subseteq Z_k(E_a^{pq})$. Definimos, então, E_∞^{pq} como sendo $Z_\infty(E_a^{pq})/B_\infty(E_a^{pq})$.

(v) Uma família $(E^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de objetos de $\mathcal{A}$, cada um deles munido de uma filtração decrescente $(F^p(E^n))_{p\in\mathbf{Z}}$. Definimos $\mathrm{gr}_p(E^n)$ como sendo o quociente $F^p(E^n)/F^{p+1}(E^n)$.

(vi) Para todo par $(p,q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, um isomorfismo $\beta^{pq} : E_\infty^{pq} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_p(E^{p+q})$.

A família $(E^n)_{n\in\mathbf{Z}}$, sem as filtrações associadas, é chamada o *limite* da seqüência espectral E. Muitas vezes, denotamos uma seqüência espectral simplesmente por (E_r^{pq}, E^n) ou então $E_a^{pq} \Rightarrow E^{p+q}$ deixando subentendidas todas as outras informações que a acompanham.

(4.1.33) Se $E = (E_r^{pq}, E^n), E' = (E_r'^{pq}, E'^n)$ são duas seqüências espectrais começando em uma mesma página a, então um *morfismo de seqüências espectrais* $u : E \to E'$ consiste de morfismos $u_r^{pq} : E_r^{pq} \to E_r'^{pq}$ e $u^n : E^n \to E'^n$, sendo estes últimos compatíveis com as filtrações de E^n e E'^n e sendo os diagramas

$$\begin{array}{ccc} E_r^{pq} & \xrightarrow{d_r^{pq}} & E_r^{p+r,q-r+1} \\ {\scriptstyle u_r^{pq}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_r^{p+r,q-r+1}} \\ E_r'^{pq} & \xrightarrow[d_r'^{pq}]{} & E_r'^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

comutativos. Além disso, exigimos que $\alpha_r'^{pq} \circ \bar{u}_r^{pq} = u_{r+1}^{pq} \circ \alpha_r^{pq}$, onde

$$\bar{u}_r^{pq} : Z_{r+1}(E_r^{pq})/B_{r+1}(E_r^{pq}) \to Z_{r+1}(E_r'^{pq})/B_{r+1}(E_r'^{pq})$$

é obtido de u_r^{pq} passando aos quocientes, e que $u_a^{pq}(B_\infty(E_a^{pq}))$ (resp. $u_a^{pq}(Z_\infty(E_a^{pq}))$) esteja contido em $B_\infty(E_a'^{pq})$ (resp. $Z_\infty(E_a'^{pq})$), de modo que se $u_\infty^{pq} : E_\infty^{pq} \to E_\infty'^{pq}$ é o morfismo obtido de u_a^{pq} passando aos quocientes, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_\infty^{pq} & \xrightarrow{u_\infty^{pq}} & E_\infty'^{pq} \\ {\scriptstyle \beta^{pq}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta'^{pq}} \\ \mathrm{gr}_p(E^{p+q}) & \xrightarrow[\mathrm{gr}_p(u^{p+q})]{} & \mathrm{gr}_p(E'^{p+q}) \end{array}$$

deve ser comutativo.

Com as definições precedentes temos uma categoria de seqüências espectrais em $\mathcal{A}$ começando em uma página prefixada e não é difícil justificar que ela é uma categoria aditiva.

(4.1.34) Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e E uma seqüência espectral em $\mathcal{A}$ começando na página a. Dizemos que E é *birregular* se ela satisfaz as seguintes condições:

(i) Para cada par de inteiros (p,q), as seqüências $(B_k(E_a^{pq}))_{k\geq a}$ e $(Z_k(E_a^{pq}))_{k\geq a}$ são estacionárias e temos que $B_\infty(E_a^{pq}) = B_k(E_a^{pq})$ e $Z_\infty(E_a^{pq}) = Z_k(E_a^{pq})$ para k suficientemente grande.

(ii) Para todo inteiro n, a filtração $(\mathrm{F}^p(\mathrm{E}^n))_{p\in\mathbf{Z}}$ é finita, isto é, existem inteiros $s \leq t$, dependendo de n, tais que $\mathrm{F}^s(\mathrm{E}^n) = \mathrm{E}^n$ e $\mathrm{F}^t(\mathrm{E}^n) = 0$.

Diremos que uma seqüência espectral birregular E *degenera na página* $r \geq a$, ou, dito de uma outra forma, *degenera em* E_r, se tivermos $d_s^{pq} = 0$ para todos $p, q \in \mathbf{Z}$ e $s \geq r$. Diremos que ela *colapsa na página* $r \geq a$ se, para todo inteiro n, tivermos no máximo um inteiro $p(n)$ para o qual $\mathrm{E}_r^{p(n),n-p(n)} \neq 0$. Nesse caso, E eventualmente degenera e E^n é isomorfo a $\mathrm{E}_s^{p(n),n-p(n)}$ se isso ocorrer na página s.

Proposição **(4.1.35).** — *Sejam* A *um anel e* E *uma seqüência espectral birregular começando na página* a *em* $\mathbf{Mod}(\mathrm{A})$. *Se* E_a^{pq} *é um* A*-módulo de comprimento finito para todos* $p, q \in \mathbf{Z}$*, então o mesmo vale para cada um dos módulos* E_r^{pq} *e* E^n. *Além disso, temos, para cada* r *e* n*, a desigualdade*

(4.1.35.1)
$$\sum_{p+q=n} \ell(\mathrm{E}_r^{pq}) \geq \ell(\mathrm{E}^n),$$

onde $\ell(\mathrm{M})$ *denota o comprimento de um* A*-módulo de comprimento finito* M. *Fixado* r*, vale a igualdade em* (4.1.35.1) *para todo* n *se, e somente se,* E *degenera na página* r.

Demonstração. — Observe que, em virtude de (4.1.32.1) e (4.1.32, (iii)), cada E_r^{pq} é isomorfo a um subquociente de E_a^{pq} e portanto é também de comprimento finito e $\ell(\mathrm{E}_{r+1}^{pq})$ é menor ou igual a $\ell(\mathrm{E}_r^{pq})$ [AM69, 6.3 e 6.9]. Como $\mathrm{E}_\infty^{pq} = \mathrm{E}_s^{pq}$ para s suficientemente grande, concluímos de (4.1.32, (vi)) que $\mathrm{gr}_p(\mathrm{E}^n)$ é um A-módulo de comprimento finito e que $\ell(\mathrm{E}_r^{pq}) \geq \ell(\mathrm{gr}_p(\mathrm{E}^n))$ para todos $p, q \in \mathbf{Z}$ tais que $p+q=n$. A desigualdade (4.1.35.1) decorre, então, do fato da filtração $(\mathrm{F}^n(\mathrm{E}^n))_{p\in\mathbf{Z}}$ ser finita, pois nesse caso um argumento indutivo descendente aplicado à seqüência exata curta $0 \to \mathrm{F}^{p+1}(\mathrm{E}^n) \to \mathrm{F}^p(\mathrm{E}^n) \to \mathrm{gr}_p(\mathrm{E}^n) \to 0$ assegura que cada E^n é de comprimento finito e que temos a seguinte expressão

$$\sum_{p+q=n} \ell(\mathrm{gr}_p(\mathrm{E}^n)) = \ell(\mathrm{E}^n).$$

Vale a igualdade em (4.1.35.1) para todo n se, e somente se, $\ell(\mathrm{E}_s^{pq}) = \ell(\mathrm{E}_{s+1}^{pq})$ para todos $p, q \in \mathbf{Z}$ e $s \geq r$ e isto equivale a dizer que $\mathrm{Z}_{s+1}(\mathrm{E}_s^{pq}) = \mathrm{E}_s^{pq}$, ou seja, que $d_s^{pq} = 0$ para todos $p, q \in \mathbf{Z}$ e $s \geq r$, de onde obtemos a conclusão almejada. ▲

(4.1.36) Aqui estamos primariamente interessados na seqüência espectral de Hodge-de Rham (4.1.38.1), que é um caso particular de uma seqüência espectral de hipercohomologia. Precisamente, temos o seguinte:

Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ duas categorias abelianas e $\mathrm{F}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um funtor aditivo. Suponhamos que $\mathcal{A}$ tenha suficientes injetivos, de modo que podemos garantir a existência do funtor derivado à direita $\mathbf{R}\mathrm{F}: \mathbf{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathbf{D}(\mathcal{B})$ de F (4.1.28). Dado um complexo limitado inferiormente K de $\mathcal{A}$, existem duas seqüências espectrais birregulares cujo limite é a hipercohomologia $\mathbf{R}^*\mathrm{F}(\mathrm{K}) = (\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K}))_{n\in\mathbf{Z}}$ de F com respeito a K.

(i) A primeira delas, chamada de *primeira seqüência espectral de hipercohomologia de* F *com respeito a* K, tem termos E_1 dados por $\mathrm{R}^q\mathrm{F}(\mathrm{K}^p)$ e $d_1^{pq} = \mathrm{R}^q\mathrm{F}(d^p)$, onde $d^p: \mathrm{K}^p \to \mathrm{K}^{p+1}$ é a diferencial de K. Além disso, ela é funtorial em $\mathrm{K} \in \mathbf{Ch}^+(\mathcal{A})$ e mesmo em $\mathrm{K} \in \mathbf{K}^+(\mathcal{A})$, desde que a consideremos da segunda página em diante, e a filtração $({}'\mathrm{F}^p(\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K})))_{p\in\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K})$ é dada por ${}'\mathrm{F}^p(\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K})) = \mathrm{Im}(\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\sigma_{\geq p}\mathrm{K}) \to \mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K}))$.

(ii) A segunda delas, chamada de *segunda seqüência espectral de hipercohomologia de* F *com respeito a* K, tem termos E_2 dados por $\mathrm{R}^p\mathrm{F}(\mathrm{H}^q(\mathrm{K}))$, é funtorial em $\mathrm{K} \in \mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ e a filtração

$({}''\mathrm{F}^p(\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K})))_{p\in\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K})$ é dada por ${}''\mathrm{F}^p(\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K})) = \mathrm{Im}(\mathbf{R}^n\mathrm{F}(\tau_{\leq n-p}\mathrm{K}) \to \mathbf{R}^n\mathrm{F}(\mathrm{K}))$.

Referimos o leitor a [Ill04, Capítulo 3, 6.15] e [CEZ+14, 3.3.2.7] para uma demonstração detalhada desses fatos.

Proposição **(4.1.37)** (Seqüências espectrais de Grothendieck). — *Sejam* $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ *três categorias abelianas e* $\mathrm{F}: \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathrm{G}: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *dois funtores aditivos. Suponhamos que* $\mathcal{A}$ *e* $\mathcal{B}$ *tenham suficientes injetivos e que* F *leve objetos injetivos em objetos* G*-acíclicos. Então, dado um complexo limitado inferiormente* K *de* $\mathcal{A}$*, existe uma seqüência espectral birregular*

$$\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{R}^p\mathrm{G}(\mathbf{R}^q\mathrm{F}(\mathrm{K})) \Rightarrow \mathbf{R}^{p+q}(\mathrm{G}\circ\mathrm{F})(\mathrm{K}).$$

Além disso, ela depende funtorialmente de $\mathrm{K} \in \mathbf{D}^+(\mathcal{A})$.

Demonstração. — Basta tomar a segunda seqüência espectral de hipercohomologia de G com respeito ao complexo $\mathbf{R}\mathrm{F}(\mathrm{K})$ e usar o fato dos funtores $\mathbf{R}(\mathrm{G}\circ\mathrm{F})$ e $\mathbf{R}\mathrm{G}\circ\mathbf{R}\mathrm{F}$ serem isomorfos (4.1.30). ▲

Exemplos **(4.1.38).** — (i) Consideremos um morfismo de esquemas $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$. A primeira seqüência espectral de hipercohomologia associada ao funtor $\Gamma(\mathrm{X}, \cdot)$ definido da categoria de $f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y})$-módulos na categoria de $\Gamma(\mathrm{X}, f^{-1}(\mathscr{O}_\mathrm{Y}))$-módulos e ao complexo de de Rham $\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}$ de X sobre Y

(4.1.38.1) $$\mathrm{E}_1^{pq} = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \Omega^p_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/\mathrm{Y})$$

é chamada de *seqüência espectral de Hodge-de Rham de* X *sobre* Y. Os grupos $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \Omega^p_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ são chamados os *grupos de cohomologia de Hodge de* X *sobre* Y.

Se X for um esquema afim, então o teorema de anulamento de Serre garante que a seqüência espectral de Hodge-de Rham colapsa na primeira página e degenera da segunda em diante. Logo, temos um isomorfismo canônico

$$\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/\mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\Gamma(\mathrm{X}, \Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}}))$$

para todo n. A partir disso e de um argumento padrão para o cálculo das cohomologias do complexo de de Rham $\Omega^\bullet_{\mathrm{A}/k}$, sendo k um corpo e $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_d]$, concluímos que $\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathbf{A}^d_k/k)$ tem dimensão um se $n = 0$ e zero caso contrário. Já para o caso de um espaço projetivo $\mathbf{P}^d_k$, pode-se mostrar que $\mathrm{H}^q(\mathbf{P}^d_k, \Omega^p_{\mathbf{P}^d_k/k})$ tem dimensão um para $0 \leq p = q \leq n$ e zero caso contrário e portanto sua seqüência espectral de Hodge-de Rham tanto colapsa quanto degenera na primeira página. Assim, $\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathbf{P}^d_k/k)$ tem dimensão um se n é par e $0 \leq n \leq 2d$ e zero caso contrário.

Suponhamos que Y seja o espectro de um anel artiniano A, sendo o caso mais importante aquele onde A é um corpo, e que f seja um morfismo próprio. O teorema de finitude de Serre-Grothendieck [EGA III_1, 3.2.3] assegura que os grupos de cohomologia de Hodge de X sobre A são A-módulos de comprimento finito e a proposição (4.1.35) garante que os grupos de cohomologia de de Rham de X sobre A também o são e que temos a seguinte desigualdade

(4.1.38.2) $$\sum_{p+q=n} \ell(\mathrm{H}^q(\mathrm{X}, \Omega^p_{\mathrm{X}/\mathrm{A}})) \geq \ell(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/\mathrm{A})).$$

Além disso, a igualdade é válida para todo n se, e somente se, a seqüência espectral de Hodge-de Rham degenera na primeira página.

(ii) Sejam X um espaço topológico e $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ uma cobertura aberta de X. Existe uma seqüência espectral birregular funtorial, chamada a *seqüência espectral de Cartan-Leray*, relacionando a cohomologia de Čech de $\mathfrak{U}$ com a cohomologia do funtor derivado. Para um feixe de grupos abelianos $\mathscr{F}$, ela é dada por

$$\textbf{(4.1.38.3)} \qquad \mathrm{E}_2^{pq} = \check{\mathrm{H}}^p(\mathfrak{U}, \underline{\mathrm{H}}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{X}, \mathscr{F}),$$

onde $\underline{\mathrm{H}}^q(\mathscr{F})$ denota o pré-feixe $\mathrm{V} \mapsto \mathrm{H}^q(\mathrm{V}, \mathscr{F})$ em X, e é um caso particular de uma seqüência espectral de Grothendieck. Com efeito, consideremos o funtor de inclusão $\iota : \mathrm{Sh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab}) \hookrightarrow \mathrm{PSh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab})$, sendo $\mathrm{PSh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab})$ a categoria de pré-feixes de grupos abelianos em X, e o funtor $\check{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{U}, \cdot) : \mathrm{PSh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}$ que toma a 0-ésima cohomologia de Čech de $\mathfrak{U}$ com valores em um pré-feixe, que é definida da mesma maneira que em (2.1.12). É bem conhecido que $\mathrm{Sh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab})$ tem suficientes injetivos e um argumento semelhante garante que o mesmo vale para $\mathrm{PSh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab})$ [Wei94, 2.3.13]. Para um inteiro $p \geq 0$, é possível mostrar que $\mathrm{R}^p\check{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{U}, \cdot) = \check{\mathrm{H}}^p(\mathfrak{U}, \cdot)$ [Stacks, Tag 01EN][1] e isso assegura que ι leva feixes injetivos em feixes $\check{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{U}, \cdot)$-acíclicos. Argumentando diretamente, não é difícil concluir que $\mathrm{R}^q\iota = \underline{\mathrm{H}}^q$. Note também que $\check{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{U}, \cdot) \circ \iota$ é isomorfo a $\Gamma(\mathrm{X}, \cdot)$ e portanto podemos aplicar a proposição (4.1.37) para obter a seqüência espectral (4.1.38.3).

A seqüência espectral de Cartan-Leray é necessariamente trivial fora do primeiro quadrante, ou seja $\mathrm{E}_2^{pq} = 0$ se $p < 0$ ou $q < 0$, e portanto temos um homomorfismo natural

$$\textbf{(4.1.38.4)} \qquad \check{\mathrm{H}}^p(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \mathscr{F}),$$

sendo este um isomorfismo sempre que $\mathscr{F}$ for acíclico em toda intersecção finita de elementos de $\mathfrak{U}$. De fato, nesse caso temos que $\mathrm{C}^p(\mathfrak{U}, \underline{\mathrm{H}}^q(\mathscr{F})) = \prod_{s\in \mathrm{I}^{p+1}} \mathrm{H}^q(\mathrm{U}_s, \mathscr{F}) = 0$ para todo $p \geq 0$ e todo $q > 0$ e portanto a seqüência espectral de Cartan-Leray colapsa e degenera na segunda página. Este resultado é conhecido como o *teorema de Leray*. Um caso particular de fundamental importância é aquele onde X é um esquema separado, $\mathfrak{U}$ é uma cobertura de X consistindo de subesquemas abertos afins e $\mathscr{F}$ é um $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-módulo quase-coerente. Sob essas hipóteses, temos, então, que os funtores $\check{\mathrm{H}}^p(\mathfrak{U}, \cdot), \mathrm{H}^p(\mathrm{X}, \cdot) : \mathbf{Qcoh}(\mathrm{X}) \to \mathbf{Ab}$ são isomorfos para todo $p \geq 0$.

4.2. Decomposição do complexo de de Rham e aplicações.

Ao longo desta seção, p designará um número primo fixo.

Teorema **(4.2.1)** (Deligne-Illusie)**.** — *Sejam* $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})$ *o espessamento de ordem* 1 *canônico,* Y *um esquema de característica* p *e suponhamos que exista um levantamento* $\widetilde{\mathrm{Y}}$ *de* Y *sobre* $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$*. Seja* X *um* Y*-esquema suave e denotemos por* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ *o morfismo de Frobenius de* X *relativo a* Y*. A todo levantamento* $\widetilde{\mathrm{X}}'$ *de* X' *sobre* $\widetilde{\mathrm{Y}}$ *está canonicamente associada uma decomposição de* $\tau_{<p}\mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ *em* $\mathbf{D}(\mathrm{X}')$.

De acordo com (4.1.23), uma decomposição de $\tau_{<p}\mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$ é um morfismo

$$\bigoplus_{i<p} \mathscr{H}^i(\mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})) \xrightarrow{\sim} \tau_{<p}\mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/\mathrm{Y}})$$

[1] É fácil demonstrar que a família de funtores $\left(\check{\mathrm{H}}^p(\mathfrak{U}, \cdot) : \mathrm{PSh}(\mathrm{X}, \mathbf{Ab}) \to \mathbf{Ab}\right)_{p\geq 0}$ é um ∂-funtor cohomológico e para justificar que eles coincidem com os funtores derivados de $\check{\mathrm{H}}^0(\mathfrak{U}, \cdot)$ é suficiente mostrar que $\check{\mathrm{H}}^p(\mathfrak{U}, \cdot)$ é apagável para cada $p > 0$. Isso dá um pouco mais de trabalho e não segue do fato de todo *feixe* flácido ter cohomologia de Čech trivial para $p > 0$, pois não é sempre possível mergulhar um *pré-feixe* em um feixe flácido.

em $\mathbf{D}(X')$ induzindo a identidade em $\mathscr{H}^i$ para todo $i < p$. Graças ao isomorfismo de Cartier (3.2.2, (ii)), isso equivale a dar um morfismo

$$\varphi_{\widetilde{X}'} : \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/Y}[-i] \to \tau_{<p} F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$$

em $\mathbf{D}(X')$ tal que $\mathscr{H}^i(\varphi_{\widetilde{X}'})$ coincide com $C^{-1}_{X/Y}$ em grau i para todo $i < p$.

Demonstração. — *Passo* 1*: Redução à definição de* $\varphi^1_{\widetilde{X}'}$. Notemos primeiro que, para obter um morfismo $\varphi_{\widetilde{X}'}$ em $\mathbf{D}(X')$ satisfazendo as condições acima, é suficiente construir morfismos $\varphi^i_{\widetilde{X}'} : \Omega^i_{X'/Y}[-i] \to F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ em $\mathbf{D}(X')$ tais que $\mathscr{H}^i(\varphi^i_{\widetilde{X}'})$ coincide com o isomorfismo de Cartier em grau i. O morfismo $\varphi^0_{\widetilde{X}'}$ é necessariamente a composição do isomorfismo de Cartier $\mathscr{O}_{X'} \to \mathscr{H}^0(F_*(\Omega^\bullet_{X/Y}))$ em grau 0 e da inclusão canônica de $\mathscr{H}^0(F_*(\Omega^\bullet_{X/Y}))$ em $F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$. Suponhamos, então, que sabemos construir $\varphi^1_{\widetilde{X}'}$ tendo as propriedades desejadas. A partir dele, obtemos, para todo $i \geq 1$, um morfismo em $\mathbf{D}(X')$

$$(\varphi^1_{\widetilde{X}'})^{\overset{\mathbf{L}}{\otimes} i} : (\Omega^1_{X'/Y}[-1])^{\overset{\mathbf{L}}{\otimes} i} \to (F_*(\Omega^\bullet_{X/Y}))^{\overset{\mathbf{L}}{\otimes} i}.$$

Como X' é um Y-esquema suave, $\Omega^1_{X'/Y}$ é um $\mathscr{O}_{X'}$-módulo localmente livre de tipo finito (2.1.28) e, em particular, um $\mathscr{O}_{X'}$-módulo plano. Assim, $(\Omega^1_{X'/Y}[-1])^{\overset{\mathbf{L}}{\otimes} i} \cong (\Omega^1_{X'/Y})^{\otimes i}[-i]$ (4.1.31, (ii)). De modo análogo, cada um dos $F_*(\Omega^a_{X/Y})$ é localmente livre de tipo finito (3.2.3) e por conseguinte $(F_*(\Omega^\bullet_{X/Y}))^{\overset{\mathbf{L}}{\otimes} i} \cong (F_*(\Omega^\bullet_{X/Y}))^{\otimes i}$. Para $1 \leq i < p$, definimos

$$\varphi^i_{\widetilde{X}'} : \Omega^i_{X'/Y}[-i] \to F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$$

como a composição, em vista dos isomorfismos precedentes, do morfismo de anti-simetrização canônico $\Omega^i_{X'/Y}[-i] \to (\Omega^1_{X'/Y})^{\otimes i}[-i]$, que é dado por

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_i \mapsto \frac{1}{i!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_i} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \wedge \ldots \wedge \omega_{\sigma(i)},$$

e é bem-definido, pois $i < p$, do morfismo $(\varphi^1_{\widetilde{X}'})^{\overset{\mathbf{L}}{\otimes} i}$ e do morfismo induzido pelo produto $(F_*(\Omega^\bullet_{X/Y}))^{\otimes i} \to F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$. Como o morfismo de anti-simetrização é uma seção da projeção de $(\Omega^1_{X'/Y})^{\otimes i}$ sobre $\Omega^i_{X'/Y}$, a propriedade multiplicativa do isomorfismo de Cartier garante que $\varphi^i_{\widetilde{X}'}$ induz $C^{-1}_{X/Y}$ ao aplicarmos o funtor $\mathscr{H}^i$. Portanto, é suficiente que construamos $\varphi^1_{\widetilde{X}'} : \Omega^1_{X'/Y}[-1] \to F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ induzindo em $\mathscr{H}^1$ o isomorfismo de Cartier em grau 1. Isso será feito nos passos seguintes.

Passo 2*: Comparação entre os morfismos obtidos de prolongamentos distintos de* $F : X \to X'$. Suponhamos que exista um levantamento $\widetilde{X}$ de X sobre $\widetilde{Y}$ e que o morfismo de Frobenius relativo $F : X \to X'$ se prolongue para um $\widetilde{Y}$-morfismo $\widetilde{F} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$. Vimos em (3.2.4) como obter um morfismo de $\mathscr{O}_{X'}$-módulos

(4.2.1.1) $$f = p^{-1} s_{\widetilde{F}} : \Omega^1_{X'/Y} \to F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$$

que induz um morfismo de complexos $\varphi^1_{\widetilde{F}} : \Omega^1_{X'/Y}[-1] \to F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ tal que $\mathscr{H}^1(\varphi^1_{\widetilde{F}})$ coincide com o isomorfismo de Cartier em grau 1.

No passo seguinte, justificaremos o porquê de prolongamentos do morfismo de Frobenius sempre existirem *localmente* e como podemos usar a categoria derivada $\mathbf{D}(X')$ para colar a informação local que eles determinam para obter $\varphi^1_{\widetilde{X}'}$. Antes disso, no entanto, precisamos comparar os morfismos (4.2.1.1) obtidos a partir de prolongamentos distintos de $F: X \to X'$.

Para $i = 1, 2$, sejam $\widetilde{X}_i$ um levantamento de X sobre $\widetilde{Y}$ e $\widetilde{F}_i: \widetilde{X}_i \to \widetilde{X}'$ um prolongamento do morfismo de Frobenius. Suponhamos que exista um isomorfismo de levantamentos $u: \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$. Então o prolongamento $\widetilde{F}_2 \circ u$ de F não depende de u. Com efeito, considerando que os espaços topológicos subjacentes a $\widetilde{X}_1$ e $\widetilde{X}_2$ estão identificados, temos que $u^\flat - v^\flat$ determina uma derivação de $\mathscr{O}_{\widetilde{X}_2}$ em $p\mathscr{O}_{\widetilde{X}_1}$ e o resultado decorre da fórmula explícita de $\widetilde{F}_2^\flat$ (3.2.4.3). De acordo com (2.3.8, (ii)), os levantamentos de $\widetilde{X}_1$ e $\widetilde{X}_2$ de X são localmente isomorfos e portanto podemos obter um prolongamento *local* de F a partir de $\widetilde{F}_2$ e da escolha de um isomorfismo u, definido apenas localmente, de $\widetilde{X}_1$ em $\widetilde{X}_2$. Em virtude do argumento precedente, ele se globaliza para um prolongamento $\widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}'$ de F. Por abuso de notação, o denotaremos por $\widetilde{F}_2 \circ u$. Temos, então, de (2.1.21, (ii)) que $\widetilde{F}_1$ e $\widetilde{F}_2 \circ u$ determinam um morfismo de $\mathscr{O}_{X'}$-módulos $h_{12}: \Omega^1_{X'/Y} \to F_*(\mathscr{O}_X)$. Explicitamente, ele é o único morfismo de $\mathscr{O}_{X'}$-módulos tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_{\widetilde{X}'} \arrow[r, "(\tilde{F}_2\circ u)^\flat - \tilde{F}_1^\flat"] \arrow[d] & F_*(p\mathscr{O}_{\widetilde{X}_1}) \\
\mathscr{O}_{X'} \arrow[d, "d"'] & \\
\Omega^1_{X'/Y} \arrow[r, "h_{12}"'] & F_*(\mathscr{O}_X) \arrow[uu, "\wr", "\mathbf{p}"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo. A partir das fórmulas (3.2.4.3) e (3.2.4.4), não é difícil ver que

$$f_2 - f_1 = d \circ h_{12},$$

onde f_1, f_2 são os morfismos (4.2.1.1) determinados, respectivamente, por $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2 \circ u$.

Quando temos um terceiro prolongamento $\widetilde{F}_3: \widetilde{X}_3 \to \widetilde{X}'$ do morfismo de Frobenius relativo, sendo $\widetilde{X}_3$ um levantamento de X sobre $\widetilde{Y}$, podemos obter também morfismos de $\mathscr{O}_{X'}$-módulos $h_{13}, h_{23}: \Omega^1_{X'/Y} \to F_*(\mathscr{O}_X)$ e é imediato que

$$h_{12} - h_{13} + h_{23} = 0.$$

Passo 3: Caso geral. De acordo com (2.3.8, (i)) e (2.1.21, (ii)), podemos obter uma cobertura aberta $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X, de modo que, para cada i, existe um levantamento $\widetilde{U}_i$ de U_i sobre $\widetilde{Y}$ e um prolongamento $\widetilde{F}_i: \widetilde{U}_i \to \widetilde{U}'_i$ de $F_{U_i}: U_i \to U'_i$, onde $U'_i, \widetilde{U}'_i$ são os subesquemas abertos de $X', \widetilde{X}'$ correspondendo a U_i e F_{U_i} é induzido pelo morfismo de Frobenius relativo $F: X \to X'$. Da mesma forma que no passo 2, temos morfismos de $\mathscr{O}_{X'}|_{U'_i}$-módulos

$$f_i = p^{-1} s_{\widetilde{F}_i}: (\Omega^1_{X'/Y})|_{U'_i} \to (F_{U_i})_*(\Omega^1_{U_i/Y})$$

e morfismos de $\mathscr{O}_{X'}|_{U'_{ij}}$-módulos $h_{ij}: (\Omega^1_{X'/Y})|_{U'_{ij}} \to (F_{U_{ij}})_*(\mathscr{O}_X|_{U_{ij}})$. Eles satisfazem as seguintes relações:

$$\textbf{(4.2.1.2)} \qquad \begin{cases} d \circ f_i = 0 & \text{para todo } i, \\ f_j - f_i = d \circ h_{ij} & \text{sobre } U'_{ij} \text{ e para todos } i, j, \\ h_{ij} - h_{ik} + h_{jk} = 0 & \text{sobre } U'_{ijk} \text{ e para todos } i, j, k. \end{cases}$$

Seja $\mathscr{C}(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_{X/Y})$ o complexo total associado ao bicomplexo de Čech de $\Omega^\bullet_{X/Y}$ (2.1.15). Como o morfismo de Frobenius relativo $F: X \to X'$ é um homeomorfismo (3.1.5, (i)), obtemos a partir do quase-isomorfismo $\Omega^\bullet_{X/Y} \to \mathscr{C}(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_{X/Y})$ (2.1.15.1) um quase-isomorfismo

(4.2.1.3)
$$F_*(\Omega^\bullet_{X/Y}) \to F_*(\mathscr{C}(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_{X/Y})).$$

Definimos $\varphi^1_{(\mathfrak{U},(\widetilde{F}_i))} = \left(\begin{smallmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{smallmatrix}\right) : \Omega^1_{X'/Y} \to F_*(\mathscr{C}(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_{X/Y}))^1 = F_*(\mathscr{C}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X)) \oplus F_*(\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}, \Omega^1_{X/Y}))$ da seguinte maneira: primeiro observe que o morfismo h_{ij} corresponde a um morfismo de $\Omega^1_{X'/Y}$ em $F_*({}_{U_{ij}}\mathscr{O}_X)$. Tomando produtos, obtemos $\varphi_1 : \Omega^1_{X'/Y} \to F_*(\mathscr{C}^1(\mathfrak{U}, \mathscr{O}_X))$. De maneira análoga, a informação do morfismo f_i é equivalente à de um morfismo de $\Omega^1_{X'/Y}$ em $F_*({}_{U_i}\Omega^1_{X/Y})$ e, novamente tomando produtos, conseguimos $\varphi_2 : \Omega^1_{X'/Y} \to F_*(\mathscr{C}^0(\mathfrak{U}, \Omega^1_{X/Y}))$. As relações (4.2.1.2) asseguram que $\varphi_{(\mathfrak{U},(\widetilde{F}_i))}$ define um morfismo de complexos

(4.2.1.4)
$$\varphi_{(\mathfrak{U},(\widetilde{F}_i))} : \Omega^1_{X'/Y}[-1] \to F_*(\mathscr{C}(\mathfrak{U}, \Omega^\bullet_{X/Y})).$$

Definimos, então, $\varphi^1_{\widetilde{X}'} : \Omega^1_{X'/Y}[-1] \to F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ como sendo o morfismo em $\mathbf{D}(X')$ obtido a partir de (4.2.1.4) e (4.2.1.3). Devemos verificar que ele não depende da escolha de $(\mathfrak{U}, (\widetilde{F}_i)_{i\in I})$. Inicialmente note que se considerarmos uma cobertura aberta de X mais fina que $\mathfrak{U}$ e os prolongamentos induzidos pelos $\widetilde{F}_i$, então obteremos frações à esquerda equivalentes e por conseguinte o mesmo morfismo em $\mathbf{D}(X')$. Se $(\mathfrak{U} = (U_i)_{i\in I}, (\widetilde{F}_i)_{i\in I})$ e $(\mathfrak{V} = (V_j)_{j\in J}, (\widetilde{F}_j)_{j\in J})$ são duas escolhas arbitrárias, então as coberturas abertas $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ são mais finas que $\mathfrak{U} \amalg \mathfrak{V}$, indexada por $I \amalg J$, e $(\mathfrak{U}, (\widetilde{F}_i)_{i\in I})$ e $(\mathfrak{V}, (\widetilde{F}_j)_{j\in J})$ definem o mesmo morfismo que $(\mathfrak{U} \amalg \mathfrak{V}, (\widetilde{F}_i)_{i\in I\amalg J})$.

Para concluir a demonstração, precisamos mostrar que $\varphi^1_{\widetilde{X}'}$ induz o isomorfismo de Cartier em $\mathscr{H}^1$. Como esta é uma questão local, podemos supor que existe um levantamento $\widetilde{X}$ de X sobre $\widetilde{Y}$ e um prolongamento $\widetilde{F} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ do morfismo de Frobenius relativo. Nesse caso, $\varphi^1_{\widetilde{X}'}$ coincide com o morfismo de complexos $\varphi^1_{\widetilde{F}}$ induzido por (4.2.1.1) e já vimos que $\mathscr{H}^1(\varphi^1_{\widetilde{F}})$ coincide com $C^{-1}_{X/Y}$ em grau 1. ▲

Corolário **(4.2.2).** — *Sejam k um corpo perfeito de característica p e X um k-esquema suave. Denotemos por $F : X \to X'$ o morfismo de Frobenius de X relativo a k. Se X se levanta sobre $W_2(k)$, então $\tau_{<p}F_*(\Omega^\bullet_{X/k})$ é decomponível em $\mathbf{D}(X')$. Em particular, se X tiver dimensão menor do que p, então $F_*(\Omega^\bullet_{X/k})$ será decomponível em $\mathbf{D}(X')$.*

Demonstração. — Seja $Y = \mathrm{Spec}(k)$. Já sabemos de (3.2.5) que $\widetilde{Y} = \mathrm{Spec}(W_2(k))$ é um levantamento de Y sobre $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$. Seja $\widetilde{X}'$ o $\widetilde{Y}$-esquema obtido a partir de $\widetilde{X}$ fazendo a mudança de base através do morfismo $\widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$ induzido pelo automorfismo de Frobenius σ_k de $W_2(k)$. Uma verificação formal mostra que $\widetilde{X}'$ é um levantamento de X' sobre $\widetilde{Y}$ e o resultado decorre, então, do teorema (4.2.1). ▲

(4.2.3) Sejam k um corpo perfeito de característica p, X um k-esquema suave de dimensão d e denotemos por $F : X \to X'$ o morfismo de Frobenius de X relativo a k. Diremos que X é *dR-decomponível* se o complexo $F_*(\Omega^\bullet_{X/k})$ for decomponível em $\mathbf{D}(X')$. Graças a (4.2.2), uma condição suficiente para que X seja dR-decomponível é que ele se levante sobre o anel de vetores de Witt de comprimento dois de k e d seja menor do que p.

Teorema **(4.2.4).** — *Sejam k um corpo perfeito de característica p e X um k-esquema próprio e dR-decomponível. Então a seqüência espectral de Hodge-de Rham de X sobre k* (4.1.38.1)

$$E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \Rightarrow H^{i+j}_{\mathrm{dR}}(X/k)$$

degenera na primeira página.

Demonstração. — De (4.1.38.2), sabemos que a conclusão equivale a dizer que

$$\sum_{i+j=n} \dim_k(\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \Omega^i_{\mathrm{X}/k})) = \dim_k(\mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k))$$

para todo n. Levando-se em conta o isomorfismo de Cartier, temos, por hipótese, um isomorfismo $\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \Omega^i_{\mathrm{X}'/k}[-i] \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/k})$ em $\mathbf{D}(\mathrm{X}')$, de onde obtemos, ao aplicar o funtor $\mathbf{H}^n(\mathrm{X}', \cdot)$, um isomorfismo de k-espaços vetoriais

$$\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{H}^j(\mathrm{X}', \Omega^i_{\mathrm{X}'/k}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^n(\mathrm{X}', \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/k})).$$

O funtor F_* leva feixes injetivos em flácidos e, como F é um homeomorfismo, é exato. Concluímos de (4.1.30) que $\mathbf{H}^n(\mathrm{X}', \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/k})) \cong \mathbf{H}^n(\mathrm{X}, \Omega^\bullet_{\mathrm{X}/k}) = \mathrm{H}^n_{\mathrm{dR}}(\mathrm{X}/k)$ para todo n. Por outro lado, visto que X' é deduzido de X por um extensão do corpo de escalares, temos que $\dim_k(\mathrm{H}^j(\mathrm{X}', \Omega^i_{\mathrm{X}'/k})) = \dim_k(\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \Omega^i_{\mathrm{X}/k}))$ e isso conclui a demonstração. ▲

Teorema **(4.2.5)** (Raynaud)**.** — *Sejam k um corpo perfeito de característica p, X um k-esquema projetivo, puramente de dimensão d e dR-decomponível. Se $\mathscr{L}$ é um feixe invertível amplo em X, então temos que*

(4.2.5.1) $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{L} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) = 0$ *para* $i + j > d$,

(4.2.5.2) $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{L}^{-1} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) = 0$ *para* $i + j < d$.

Demonstração. — Observe inicialmente que, devido ao teorema de dualidade de Serre [AK70, Capítulo I, 1.3 e 4.6], se $\mathscr{M}$ é um feixe invertível em X e $i + i' = d = j + j'$, então os k-espaços vetoriais de dimensão finita

$$\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) \text{ e } \mathrm{H}^{j'}(\mathrm{X}, \mathscr{M}^{-1} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^{i'}_{\mathrm{X}/k})$$

são canonicamente duais. Portanto, (4.2.5.1) e (4.2.5.2) são equivalentes e podemos nos restringir à demonstração da segunda. O teorema de anulamento de Serre [Har77, Capítulo III, 5.3], por sua vez, garante que existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{L}^{p^n} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) = 0$ para todo $j > 0$ e todo i. Novamente pela dualidade de Serre, obtemos que $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{L}^{-p^n} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) = 0$ para todo $j < d$ e todo i e, em particular, para todo par (i, j) tal que $i + j < d$.

Usando uma argumento indutivo descendente sobre n, é suficiente, para estabelecer o teorema, provar que se $\mathscr{M}$ é um feixe invertível em X tal que $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{M}^p \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) = 0$ para todo par (i, j) tal que $i + j < d$, então $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}) = 0$ para todo par (i, j) tal que $i + j < d$.

Sejam $\mathrm{F}_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ o morfismo de Frobenius absoluto de X e $\mathrm{F} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ o morfismo de Frobenius de X relativo a k. Como $\mathrm{F}^*_\mathrm{X}(\mathscr{M})$ é isomorfo a $\mathscr{M}^p$, temos que $\mathrm{F}^*(\mathscr{M}')$ é isomorfo a $\mathscr{M}^p$, onde $\mathscr{M}'$ é a imagem inversa de $\mathscr{M}$ em X'. Da fórmula de projeção, obtemos, para todo i, um isomorfismo de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}$-módulos

(4.2.5.3) $$\mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}} \mathrm{F}_*(\Omega^i_{\mathrm{X}/k}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}_*(\mathscr{M}^p \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k}).$$

Consideremos a primeira seqüência espectral de hipercohomologia do funtor $\Gamma(\mathrm{X}', \cdot)$ com respeito ao complexo $\mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}} \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/k})$ (4.1.36, (i)):

$$\mathrm{E}^{ij}_1 = \mathrm{H}^j(\mathrm{X}', \mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}} \mathrm{F}_*(\Omega^i_{\mathrm{X}/k})) \Rightarrow \mathbf{H}^{i+j}(\mathrm{X}', \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}} \mathrm{F}_*(\Omega^\bullet_{\mathrm{X}/k})).$$

Como F é um homeomorfismo, o funtor F_* é exato e concluímos de (4.2.5.3) que E^{ij}_1 é isomorfo a $\mathrm{H}^j(\mathrm{X}, \mathscr{M}^p \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{X}} \Omega^i_{\mathrm{X}/k})$ para todo par (i, j). Nossa hipótese indutiva garante, então, que $E_1^{ij} = 0$ se $i + j < d$ e portanto que $\mathbf{H}^n(X', \mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} F_*(\Omega^\bullet_{X/k})) = 0$ para todo $n < d$. Por hipótese, o complexo $F_*(\Omega^\bullet_{X/k})$ é decomponível em $\mathbf{D}(X')$ e, em vista do isomorfismo de Cartier, temos um isomorfismo $\bigoplus_{i\in\mathbf{Z}} \Omega^i_{X'/k}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*(\Omega^\bullet_{X/k})$ em $\mathbf{D}(X')$. Logo,

$$\mathbf{H}^n(X', \mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} F_*(\Omega^\bullet_{X/k})) \cong \bigoplus_{i+j=n} H^j(X', \mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \Omega^i_{X'/k})$$

e isso assegura que $H^j(X', \mathscr{M}' \otimes_{\mathscr{O}_{X'}} \Omega^i_{X'/k}) = 0$ para todo par (i, j) tal que $i + j < d$, de onde segue o resultado, pois X' foi obtido a partir de X fazendo uma extensão do corpo de escalares e $\mathscr{M}'$ é a imagem inversa de $\mathscr{M}$ em X'. ▲

Generalizações e complementos **(4.2.6)**. — (i) O termo *canonicamente* do teorema de Deligne-Illusie (4.2.1) se traduz no seguinte resultado: para que X' admita um levantamento sobre $\widetilde{Y}$ é necessário e suficiente que $\tau_{\leq 1} F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ seja decomponível em $\mathbf{D}(X')$, o que equivale, em virtude do passo 1 de (4.2.1), à decomponibilidade de $\tau_{<p} F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ em $\mathbf{D}(X')$ e, caso isso ocorra, existe uma bijeção $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X'}}(\Omega^1_{X'/Y}, \mathscr{O}_{X'})$-equivariante entre o conjunto de classes de isomorfismo de levantamentos de X' sobre $\widetilde{Y}$ e o conjunto de decomposições de $\tau_{\leq 1} F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})$ em $\mathbf{D}(X')$, sendo que aqui identificamos os grupos

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X'}}(\Omega^1_{X'/Y}, \mathscr{O}_{X'}) \ \text{ e } \ \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{H}^1(F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})), \mathscr{H}^0(F_*(\Omega^\bullet_{X/Y})))$$

considerados em (2.3.8) e (4.1.23) via o isomorfismo de Cartier. A justificativa desse fato emprega a teoria de gerbes de Giraud e pode ser encontrada em [DI87, 3.5 e 3.6].

(ii) Sejam k um corpo perfeito de característica p e X um k-esquema suave de dimensão d. Em virtude de (i), uma condição necessária para que X seja dR-decomponível é que ele se levante sobre o anel de vetores de Witt de comprimento dois de k. Se, além disso, $d < p$, então ela será também suficiente de acordo com o corolário (4.2.2). Fazendo uso da dualidade de Grothendieck, é possível obter a mesma conclusão no caso em que $d = p$ [DI87, 2.3]. No entanto, quando $d > p$, não se sabe ainda se este resultado continua valendo. Porém, como vimos em (3.2.4), se conseguirmos prolongar o morfismo de Frobenius de X relativo a k para levantamentos de X e X' sobre $W_2(k)$, então ele será dR-decomponível qualquer que seja d. Uma outra situação onde podemos garantir que se levantar sobre $W_2(k)$ implica dR-decomponível é aquela onde X é um k-esquema suave paralelizável, ou seja, tal que o $\mathscr{O}_X$-módulo $\Omega^1_{X/k}$ é livre [Ill96, 8.3].

(iii) Se k for um corpo de característica 0, então é possível demonstrar, a partir dos métodos aqui apresentados, a degenerescência da seqüência espectral de Hodge-de Rham associada a um k-esquema próprio e suave e uma versão de (4.2.5), dito o teorema de Kodaira, Akizuki e Nakano, para um k-esquema projetivo, suave e puramente de dimensão d. Para os detalhes, queira ver [DI87, 2.7 e 2.11] ou [Ill96, nº 6].

Exemplos e contra-exemplos **(4.2.7)**. — (i) O teorema de anulamento de Grothendieck [Har77, Capítulo III, 2.7] combinado com o teorema (2.3.8) garante que todo k-esquema suave, onde k é um corpo perfeito de característica p, quase-compacto e de dimensão 1 se levanta sobre o anel de vetores de Witt de comprimento dois de k e portanto é dR-decomponível.

(ii) Existem superfícies projetivas e suaves X sobre um corpo algebricamente fechado de característica p para as quais a seqüência espectral de Hodge-de Rham não degenera na primeira página. O primeiro contra-exemplo foi dado por Mumford [Mum61] e posteriormente surgiram outros. Queira ver, por exemplo, [Lan79] e [Fos81]. Existem outras onde podemos obter um feixe invertível amplo $\mathscr{L}$ tal que $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{L}^{-1}) \neq 0$ [Ray78; Fle81]. De acordo com (4.2.6, (ii)), essas superfícies não se levantam sobre $\mathrm{W}_2(k)$.

(iii) Se k for um corpo perfeito de característica p, então um teorema de Grothendieck garante que toda variedade abeliana, ou seja, um k-esquema grupo projetivo e geometricamente integral, se levanta sobre $\mathrm{W}_2(k)$ e, como estas são paralelizáveis, concluímos de (4.2.6, (ii)) que elas são dR-decomponíveis.

(iv) Seja k um corpo algebricamente fechado de característica p. Deligne mostrou que toda superfície K3, isto é, uma k-superfície projetiva, suave e tal que $\Omega^2_{\mathrm{X}/k} \cong \mathscr{O}_\mathrm{X}$ e $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) = 0$, se levanta sobre $\mathrm{W}_2(k)$ [Del81] e é, portanto, em vista de (4.2.6, (ii)), dR-decomponível.

(v) Variedades de Calabi-Yau de dimensão 3, ou seja, k-esquemas projetivos, suaves, puramente de dimensão 3 e tais que $\Omega^3_{\mathrm{X}/k} \cong \mathscr{O}_\mathrm{X}$ e $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) = \mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X}) = 0$, não se levantam, em geral sobre $\mathrm{W}_2(k)$. Veja, por exemplo, [Hir99] e [Sch04].

Queira ver [Ill05, 8.5] para uma discussão mais longa sobre problemas de levantamentos.

BIBLIOGRAFIA

[AK70] A. Altman e S. Kleiman, *Introduction to Grothendieck duality theory*, Lecture Notes in Mathematics **146**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1970, ii+185 pp. DOI: 10.1007/BFb0060932 (veja p. 104)

[AM69] M. Atiyah e I. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1969, ix+128 pp. (veja pp. 3, 55, 58, 60, 98)

[And67] M. André, *Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative*, Lecture Notes in Mathematics **32**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1967, iii+122 pp. DOI: 10.1007/BFb0077199 (veja p. 27)

[And74] M. André, *Homologie des algèbres commutatives*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **206**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1974, xv+341 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-51449-4 (veja p. 27)

[AR94] J. Adámek e J. Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series **189**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xiv+316 pp. DOI: 10.1017/CBO9780511600579 (veja p. 3)

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebohmert e M. Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **21**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1990, x+325 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-51438-8 (veja p. 38)

[Bor94a] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1, Basic category theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **50**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xvi+345 pp. DOI: 10.1017/CBO9780511525858 (veja pp. 3, 12)

[Bor94b] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 2, Categories and structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **51**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xviii+443 pp. DOI: 10.1017/CBO9780511525865 (veja p. 3)

[Bos13] S. Bosch, *Algebraic geometry and commutative algebra*, Universitext. Springer, London, 2013, x+504 pp. DOI: 10.1007/978-1-4471-4829-6 (veja p. 38)

[BouAC] N. Bourbaki, *Commutative algebra, Chapters 1–7*, Second printing, Elements of Mathematics. Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xxiv+625 pp. (veja p. 58)

[BouAl] N. Bourbaki, *Algebra I, Chapters 1–3*, Second printing, Elements of Mathematics. Springer, Berlin-Heidelberg, 1998, xxiv+710 pp. (veja pp. 29, 32, 33, 42)

[Büh12] T. Bühler, *When is the derived category abelian?*, Mathematics Stack Exchange, URL: http://math.stackexchange.com/q/191734, versão de 06/09/2012 (veja p. 92)

[Büh07] T. Bühler, *An introduction to the derived category*, 2007. URL: http://www.uni-math.gwdg.de/theo/intro-derived.pdf, acessado em 23/09/2014 (veja pp. 83, 94)

[CEZ+14] E. Cattani, F. El Zein, P. Griffiths e L. Tráng, eds., *Hodge Theory*, Mathematical Notes **49**. Princeton University Press, Princeton, 2014, xviii+608 pp. (veja p. 99)

[Del68] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **35**: 259–278, 1968. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1968__35__107_0 (veja p. 1)

[Del81] P. Deligne, "Relèvement des surfaces K3 en caractéristique nulle", em *Algebraic surfaces*, Lecture Notes in Mathematics **868**, Prepared for publication by Luc Illusie, Springer, Berlin-Heidelberg, 1981, 58–79. DOI: 10.1007/BFb0090642 (veja p. 106)

[DI87] P. Deligne e L. Illusie, Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham, *Inventiones Mathematicae*, **89**: 247–270, 1987. DOI: 10.1007/BF01389078 (veja pp. 2, 71, 83, 105)

[EGA] A. Grothendieck e J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique I, II, III, IV, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1960–1967 (veja pp. 3, 5, 13, 27, 32, 37, 38, 41, 42, 49, 52, 55, 56, 60, 62, 65, 73, 83, 96, 99)

[Eis04] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Third corrected printing, Graduate Texts in Mathematics **150**. Springer, New York, 2004, xvi+797 pp. DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1 (veja pp. 3, 5, 18)

[FAC] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, *Annals of Mathematics*, **61**: 197–278, 1955. DOI: 10.2307/1969915 (veja pp. 44–46)

[Fal88] G. Faltings, p-adic Hodge theory, *Journal of the American Mathematical Society*, **1**: 255–299, 1988. DOI: 10.2307/1990970 (veja p. 1)

[Fle81] M. Flexor, "Nouveaux contre-exemples aux énoncés d'annulation "à la Kodaira" en caractéristique $p > 0$", em *Séminaire sur les pinceaux de coubes de genre au moins deux, par L. Szpiro*, Astérisque **86**, 1981, 79–89 (veja p. 106)

[FM87] J.-M. Fontaine e W. Messing, "p-adic periods and p-adic étale cohomology", em *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, California, 1985)*, Contemporary Mathematics **67**, American Mathematical Society, Providence, 1987, 179–207. DOI: 10.1090/conm/067/902593 (veja p. 1)

[Fos81] R. Fossum, "Formes différentielles non fermées", em *Séminaire sur les pinceaux de coubes de genre au moins deux, par L. Szpiro*, Astérisque **86**, 1981, 90–96 (veja p. 105)

[Fre64] P. Freyd, *Abelian categories, An introduction to the theory of functors*, Harper's Series in Modern Mathematics. Harper & Row Publishers, New York, 1964, xi+164 (veja p. 84)

[GAGA] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Annales de l'Institut Fourier*, **6**: 1–42, 1956. DOI: 10.5802/aif.59 (veja p. 1)

[Gir71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **179**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1971, ix+467 pp. (veja p. 69)

[GM03] S. Gelfand e Y. Manin, *Methods of homological algebra*, Second edition, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin-Heidelberg, 2003, xx+372 pp. DOI: 10.1007/978-3-662-12492-5 (veja pp. 83, 87, 88, 90, 92)

[God58] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Actualités Scientifiques et Industrielles **1252**. Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts, Paris, 1958, viii+283 pp. (veja p. 44)

[Gro68] A. Grothendieck, *Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif*, Lecture Notes in Mathematics **79**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1968, ii+167 pp. DOI: 10.1007/BFb0082437 (veja pp. 5, 49)

[Gru73] L. Gruson, "Dimension homologique des modules plats sur un anneau commutatif noethérien", em *Symposia Mathematica, Vol. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971)*, Academic Press, London, 1973, 243–254 (veja p. 49)

[GW10] U. Görtz e T. Wedhorn, *Algebraic geometry I, Schemes with examples and exercises*, Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2010, viii+615 pp. DOI: 10.1007/978-3-8348-9722-0 (veja pp. 3, 13, 16, 49, 50, 57, 61, 65, 66, 68, 73, 75, 77)

[Har10] R. Hartshorne, *Deformation theory*, Graduate Texts in Mathematics **257**. Springer, New York, 2010, viii+234 pp. DOI: 10.1007/978-1-4419-1596-2 (veja p. 38)

[Har66] R. Hartshorne, *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics **20**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1966, vii+423 pp. DOI: 10.1007/BFb0080482 (veja pp. 83, 94, 96)

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**. Springer, New York, 1977, xvi+496 pp. DOI: 10.1007/978-1-4757-3849-0 (veja pp. 3, 13, 44, 45, 104, 105)

[Haz09] M. Hazewinkel, "Witt vectors. Part 1", em *Handbook of algebra, Volume 6*, North-Holland, Amsterdam, 2009, 319–472. DOI: 10.1016/S1570-7954(08)00207-6 (veja p. 71)

[Hir99] M. Hirokado, A non-liftable Calabi-Yau threefold in characteristic 3, *The Tohoku Mathematical Journal*, **51**: 479–487, 1999. DOI: 10.2748/tmj/1178224716 (veja p. 106)

[Ill04] L. Illusie, *Topics in algebraic geometry*, Lecture Notes taken by Yi Ouyang, 2004. URL: http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/Illusie.pdf, acessado em 23/09/2014 (veja pp. 5, 37, 38, 46, 83, 99)

[Ill05] L. Illusie, "Grothendieck's existence theorem in formal geometry", em *Fundamental algebraic geometry*, Mathematical Surveys and Monographs **123**, With a letter of Jean-Pierre Serre, American Mathematical Society, Providence, 2005, 179–233 (veja p. 106)

[Ill71] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformations I*, Lecture Notes in Mathematics **239**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1971, xv+355 pp. DOI: 10.1007/BFb0059052 (veja pp. 5, 27, 38, 69)

[Ill79] L. Illusie, Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **12**: 501–661, 1979. URL: http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_4_501_0 (veja pp. 5, 71)

[Ill90] L. Illusie, Catégories dérivées et dualité: travaux de J.-L. Verdier, *L'Enseignement Mathématique*, **36**: 369–391, 1990. DOI: 10.5169/seals-57914 (veja p. 83)

[Ill96] L. Illusie, "Frobenius et dégénérescence de Hodge", em *Introduction à la théorie de Hodge*, Panoramas et Synthèses **3**, Société Mathématique de France, Paris, 1996, 113–168 (veja pp. 2, 3, 5, 37, 71, 83, 105)

[Iye07] S. Iyengar, "André-Quillen homology of commutative algebras", em *Interactions between homotopy theory and algebra*, Contemporary Mathematics **436**, American Mathematical Society, Providence, 2007, 203–234. DOI: 10.1090/conm/436/08410 (veja p. 27)

[Kap58] I. Kaplansky, Projective modules, *Annals of Mathematics*, **68**: 372–377, 1958. DOI: 10.2307/1970252 (veja p. 50)

[Kato87] K. Kato, "On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing)", em *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Advanced Studies in Pure Mathematics **10**, North-Holland, Amsterdam, 1987, 207–251 (veja p. 1)

[Katz70] N. Katz, Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **39**: 175–232, 1970. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1970__39__175_0 (veja p. 71)

[Kin10] L. Kindler, *The Cartier isomorphism*, 2010. URL: http://www.mi.fu-berlin.de/users/kindler/documents/cartieriso.pdf, acessado em 23/09/2014 (veja p. 71)

[KS06] M. Kashiwara e P. Schapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **332**. Springer, Berlin-Heidelberg, 2006, x+497. DOI: 10.1007/3-540-27950-4 (veja p. 91)

[Lam99] T. Lam, *Lectures on modules and rings*, Graduate Texts in Mathematics **189**. Springer, New York, 1999, xxiv+557 pp. DOI: 10.1007/978-1-4612-0525-8 (veja p. 88)

[Lan79] W. Lang, Quasi-elliptic surfaces in characteristic three, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **12**: 473–500, 1979. URL: http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_4_473_0 (veja p. 105)

[LS67] S. Lichtenbaum e M. Schlessinger, The cotangent complex of a morphism, *Transactions of the American Mathematical Society*, **128**: 41–70, 1967. DOI: 10.1090/S0002-9947-1967-0209339-1 (veja p. 27)

[Mat86] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **8**. Cambridge University Press, Cambridge, 1986, xiv+320 pp. DOI: 10.1017/CBO9781139171762 (veja pp. 3, 5, 37, 42, 50, 55, 56, 58)

[May01] J. P. May, The additivity of traces in triangulated categories, *Advances in Mathematics*, **163**: 34–73, 2001. DOI: 10.1006/aima.2001.1995 (veja p. 86)

[Maz73] B. Mazur, Frobenius and the Hodge filtration (estimates), *Annals of Mathematics*, **98**: 58–95, 1973. DOI: 10.2307/1970906 (veja pp. 71, 78)

[ML98] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics **5**. Springer, New York, 1998, xii+314 pp. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8 (veja p. 3)

[Mor96] P. Morandi, *Field and Galois theory*, Graduate Texts in Mathematics **167**. Springer, New York, 1996, xvi+281 pp. DOI: 10.1007/978-1-4612-4040-2 (veja pp. 55, 63)

[Mum61] D. Mumford, Pathologies of modular algebraic surfaces, *American Journal of Mathematics*, **83**: 339–342, 1961 (veja pp. 1, 105)

[Mur06] D. Murfet, *Special sheaves of algebras*, Mathematics Notes, 2006. URL: http://therisingsea.org/notes/SpecialSheavesOfAlgebras.pdf, acessado em 23/09/2014 (veja p. 32)

[Oes87] J. Oesterlé, Dégénérescence de la suite spectrale de Hodge vers de Rham (d'après Deligne et Illusie), *Séminaire Bourbaki nº 673, Astérisque*, **152-153**, 67–83, 1987. URL: http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__67_0 (veja pp. 71, 83)

[Qui68] D. Quillen, *On the homology of commutative rings*, Mimeographed Notes, MIT, 1968 (veja p. 27)

[Qui70] D. Quillen, "On the (co-) homology of commutative rings", em *Applications of Categorical Algebra (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XVII, New York, 1968)*, American Mathematical Society, Providence, 1970, 65–87. DOI: 10.1090/pspum/017 (veja p. 27)

[Ray78] M. Raynaud, "Contre-exemple au "vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$", em *C. P. Ramanujam – A tribute*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics **8**, Springer, Berlin-New York, 1978, 273–278 (veja p. 106)

[RG71] M. Raynaud e L. Gruson, Critères de platitude et de projectivité, Techniques de « platification » d'un module, *Inventiones Mathematicae*, **13**: 1–89, 1971. DOI: 10.1007/BF01390094 (veja p. 49)

[Sch04] S. Schröer, Some Calabi-Yau threefolds with obstructed deformations over the Witt vectors, *Compositio Mathematica*, **140**: 1579–1592, 2004. DOI: 10.1112/S0010437X04000545 (veja p. 106)

[Ser06] E. Sernesi, *Deformations of algebraic schemes*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **334**. Springer, Berlin-Heidelberg, 2006, xii+339 pp. DOI: 10.1007/978-3-540-30615-3 (veja p. 38)

[Ser79] J.-P. Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics **67**. Springer, New York, 1979, viii+241 pp. DOI: 10.1007/978-1-4757-5673-9 (veja pp. 71, 80, 81)

[SGA 1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–61*, Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1971, xxii+447 pp. DOI: 10.1007/BFb0058656 (veja pp. 37, 38, 65)

[SGA 5] A. Grothendieck, *Cohomologie ℓ-adique et fonctions* L, *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1965–66*, Lecture Notes in Mathematics **589**. Springer, Berlin-Heidelberg, 1977, xii+484. DOI: 10.1007/BFb0096802 (veja p. 71)

[Spe14] D. Speyer, *Why is* $\mathrm{W}_n(k)$ *the unique flat lifting of a perfect field* k *over* $\mathbf{Z}/p^n$*?*, Mathematics Stack Exchange, URL: http://math.stackexchange.com/q/909864, versão de 26/08/2014 (veja p. 81)

[Stacks] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, http://stacks.math.columbia.edu, 2014 (veja pp. 5, 19, 37, 38, 42, 49, 56, 62, 67, 73, 83, 87, 90–92, 100)

[Tohoku] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohoku Mathematical Journal*, **9**: 119–221, 1957. DOI: 10.2748/tmj/1178244839 (veja pp. 3, 35, 44, 45)

[Vak13] R. Vakil, *Math 216: Foundations of algebraic geometry*, 2013. URL: http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGjun1113public.pdf, acessado em 23/09/2014 (veja pp. 3, 5, 49)

[Ver96] J.-L. Verdier, Des catégories dérivées des catégories abéliennes, *Astérisque*, **239**, xii+253 pp. 1996, With a preface by Luc Illusie, edited and with a note by Georges Maltsiniotis (veja pp. 83, 91)

[Wei94] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **38**. Cambridge University Press, Cambridge, 1994, xiv+450 pp. DOI: 10.1017/CBO9781139644136 (veja pp. 3, 8, 27, 28, 50, 58, 77, 83, 87, 88, 92, 93, 100)