



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy

Marina T. Mizukoshi[†]

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Rodney C. Bassanezi

Co-Orientador: Prof. Dr. Laécio C. Barros

[†]Este trabalho teve apoio financeiro do PICDT/CAPES.

Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Marina T. Mizukoshi** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de fevereiro de 2004.

Prof. Dr. **Rodney C. Bassanezi**.
Orientador

Prof. Dr. **Laécio C. Barros**.
Co-Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Rodney C. Bassanezi(Orientador, IMECC - UNICAMP)

Profª. Dra. Renata Z. G. de Oliveira(UNESP)

Prof. Dr. Fernando A. C. Gomide(UNICAMP)

Prof. Dr. Geraldo N. Silva (UNESP)

Prof. Dr. Marko A. Rojas-Medar(IMECC - UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Agradecimentos

Agradeço:

- à minha filha, pela paciência e carinho concedido em todos os momentos e ao meu esposo pelas palavras de incentivo.
- aos amigos Adélia, Amauri, Dirceu, Irene, Jones, Luiz, Roberta, Rose, Geci e Yuri, que muito me incentivaram no desenvolvimento do meu trabalho.
- aos colegas de pós-graduação Daniel, Daniela, Fábio, Ilma, Ercílio, Irene, Jones, Luciana, Marcela, Paulo César, Daniel, Ronan, pela agradável companhia.
- aos colegas do grupo de biomatemática Magda, Geraldinho, Karine, Lucy, Maria José, Rosana, João de Deus e também aos professores do grupo de Biomatemática que ampliaram o meu horizonte de conhecimento na matemática aplicada.
- aos funcionários da secretaria de pós-graduação Cidinha, Edinaldo, Fátima e Tânia, por suas esclarecedoras explicações.
- Aos professores do IMECC/UNICAMP que me ajudaram a ampliar meu conhecimento matemático.
- à PICDT/CAPES (Programa de Incentivo a Capacitação Docente e Tecnológico), pelo auxílio financeiro recebido.

Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Rodney C. Basanezi, que tanto me ensinou através de sua experiência como pesquisador e ao meu co-orientador Laécio C. Barros que muito se empenhou para que pudéssemos dar um delineamento a este trabalho.

Resumo

O nosso trabalho tem como objetivo principal, o estudo das propriedades das soluções das equações diferenciais fuzzy autônomas, ou seja, quando o campo não depende explicitamente da variável tempo. Com este intuito, consideramos o Problema do Valor Inicial Fuzzy (PVIF) com a condição inicial e/ou coeficientes da equação diferencial dados por subconjuntos fuzzy, sem a utilização do conceito da derivada de multifunções. Dado o PVIF, mostramos que o conjunto atingível através da família de inclusões diferenciais coincide com as soluções estendidas, via extensão de Zadeh do sistema determinístico associado e que quando os coeficientes e a condição inicial são fuzzy, podemos estudar o PVIF reduzido ao Problema do Valor Inicial Fuzzy onde somente a condição inicial é fuzzy. Estes resultados nos incentivaram a desenvolver o estudo qualitativo dos sistemas fuzzy autônomos usando também o princípio de extensão de Zadeh, onde verificamos que se temos a estabilidade ou instabilidade de um equilíbrio determinístico, então o mesmo ocorrerá para o equilíbrio fuzzy que é a função característica do equilíbrio determinístico e vice-versa. Além disso, estabelecemos um Teorema de linearização fuzzy análogo ao Teorema de Grobman-Hartman como um método alternativo para o estudo do equilíbrio fuzzy que é função característica de algum equilíbrio determinístico.

Abstract

Our work aim, the study of the properties of the solutions of the fuzzy differential equations autonomous, that is, when the field does not depend explicitly on the time variable. We consider the Fuzzy Initial Value Problem (PVIF) with the initial condition and/or coefficients of the differential equation given by fuzzy subsets, without the use of the concept of the derivative of set-valued functions. Given a PVIF, we show that the attainable set obtained via the family of differential inclusions coincides with the solutions, obtained with Zadeh's extension principle of the associated deterministic system and that when the coefficients and the initial condition are fuzzy, we can to study the PVIF reduced to Fuzzy Initial Value Problem, where only the initial condition is fuzzy. This result motivated us to develop the qualitative study of autonomous fuzzy systems using the extension principle of Zadeh, where verified that if we have the stability or instability of a deterministic equilibrium, then the same will happen for the fuzzy equilibrium that is the characteristic function of the deterministic equilibrium and vice-versa. Besides, we established a Theorem of Fuzzy Linearization analogous to Teorema of Grobman-Hartman as an alternative method for the study of the fuzzy equilibrium that is characteristic function of some deterministic equilibrium.

Notações

- $2^Y \setminus \emptyset$ o conjunto de todos os subconjuntos não-vazios de Y .
- $[U]^\alpha$ nível α do subconjunto fuzzy U .
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a família de subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$, cujos α -níveis são compactos e não vazios.
- $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ a família de subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com α -níveis convexos para todo $\alpha \in [0, 1]$.
- $\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais positivos.
- $\uparrow$ convergência de sequências monótonas crescentes.
- $\hat{f}$ extensão de Zadeh de f .
- $\chi_{\{x\}}$ função característica de x .
- $D(U, V)$ distância de Hausdorff dos conjuntos fuzzy U e V .
- $V(x, \varepsilon)$ vizinhança do ponto x e raio ε .
- $Df(x)$ matriz jacobiana do ponto x .

Sumário

Sumário	vi
Introdução	1
1 Sobre a Modelagem de Incertezas	4
1.1 Introdução	4
1.2 Modelos Estocásticos	5
1.3 Inclusões Diferenciais	9
1.4 Subconjunto Fuzzy	13
1.4.1 A extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy	16
1.5 Inclusões Diferenciais Fuzzy	21
2 Equação Diferencial Fuzzy	24
2.1 Introdução	24
2.2 Equação Diferencial Fuzzy via derivada de Hukuhara	26
2.2.1 Aplicações: Fuzicidade Ambiental e Demográfica	28
2.3 Equações Diferenciais Fuzzy via Inclusões Diferenciais Fuzzy	36
2.4 Equação Diferencial Fuzzy via Princípio de Extensão de Zadeh	39
2.5 Equações diferenciais com condição inicial fuzzy.	43
2.6 Equação diferencial com parâmetros fuzzy	46
3 Estabilidade das Equações Diferenciais Fuzzy	53
3.1 Introdução	53
3.2 Preliminares	55
3.3 Sistemas Dinâmicos Fuzzy	64
3.3.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy	66
3.4 O Teorema de linearização para o fluxo fuzzy	81
3.4.1 A linearização fuzzy	82

4	O modelo Presa-Predador com Incerteza nos Parâmetros	93
4.1	Introdução	93
4.2	Lotka-Volterra Compartimentado	96
4.3	Lotka-Volterra com Parâmetros Fuzzy	104
	Considerações Finais	107
	Referências Bibliográficas	109

Introdução

A modelagem de fenômenos reais por meio de sistema de equações diferenciais determinísticas quase sempre está incompleta, pois os valores dos coeficientes das equações diferenciais ou das condições iniciais geralmente não são precisamente conhecidos.

As incertezas foram formalmente admitidas nas ciências há 3 séculos e desde então, a modelagem de incertezas tem sido dominada pelos métodos estocásticos. No entanto, no século atual, temos testemunhado uma onda crescente de teorias e métodos alternativos para se estudar as incertezas e o concomitante decrescimento nos domínios do pensamento probabilístico, embora existam casos onde a teoria estocástica seja ainda a mais indicada [24, 29, 39]. Surgem então, outras aproximações para o estudo das equações variacionais com incertezas, dentre as quais destacamos: a teoria de inclusões diferenciais [2, 10], que surgiu por volta de 1930 e teve um grande desenvolvimento com o surgimento do Princípio do Máximo de Pontryagin; a Teoria de subconjuntos fuzzy, introduzida por Lotfi A. Zadeh[42] em 1965 e a Teoria de Inclusões Diferenciais Fuzzy, que foi inicialmente estudada por Aubin[1] e Baidosov[3]. As aproximações para as equações diferenciais com incertezas são introduzidas no Capítulo 1, juntamente com os pontos de vista de alguns pesquisadores sobre a utilização de cada uma delas na modelagem.

Como acreditamos que a teoria fuzzy é a mais indicada para o estudo das equações diferenciais com incertezas, o nosso trabalho tem como objetivo principal o estudo das propriedades das soluções das equações diferenciais fuzzy, mais especificamente, das equações diferenciais fuzzy autônomas, ou seja, quando o campo não depende explicitamente da variável tempo. A equação diferencial fuzzy(EDF) foi inicialmente estudada em 1978 por Kandel e Byatt[18]. Os conceitos de dife-

renciabilidade e integrabilidade de multifunções fuzzy $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, foram estabelecidos por Puri e Ralescu[32]. Com esses conceitos deu-se início ao estudo das equações diferenciais fuzzy por Kaleva[17], Kloeden[19], Seikkala[36], dentre outros, utilizando uma extensão da derivada de Hukuhara para multifunções fuzzy. O nosso interesse é estudar o Problema do Valor Inicial Fuzzy com a condição inicial e/ou coeficientes da equação diferencial dados por subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ sem a utilização do conceito de derivada de multifunções, pois quando a equação é estudada neste contexto, têm diâmetros crescentes e noções como ponto de equilíbrio, teoria de estabilidade e estabilidade assintótica inconsistentes[6, 14, 37]. Em [16], Buckley considera a equação diferencial em $\mathbb{R}$ com alguns coeficientes independentes do tempo e a solução da mesma é utilizada para definir a solução fuzzy como uma extensão da solução clássica via o princípio de extensão de Zadeh . Já Oberguggenberger e Pittshmann [28] estudam sistema de equações diferenciais com parâmetros fuzzy, aplicando o princípio de extensão de Zadeh nas equações do sistema e nos operadores restrição e solução, conforme seção 2.4. Hüllermeier[14] e outros[3, 6, 35], estudam as equações diferenciais fuzzy utilizando a teoria de inclusões diferenciais. A partir de uma família de inclusões diferenciais clássicas, obtém-se a solução da equação diferencial fuzzy proposta por Hüllermeier. A solução construída dessa maneira têm boas propriedades, por exemplo, o diâmetro das soluções obtidas são necessariamente não crescentes com o tempo. Vale salientar que para o método de Hüllermeier, nós temos a noção de derivadas para multifunções fuzzy.

Nas seções 2.5 e 2.6, consideramos o Problema do Valor Inicial com a condição inicial e/ou coeficientes da equação diferencial dados por subconjuntos fuzzy. As equações diferenciais fuzzy são estudadas de duas maneiras diferentes: uma, através de uma família de inclusões diferenciais e na outra, utilizamos a extensão de Zadeh da solução determinística. Concluimos que, sob certas condições, estas soluções coincidem.

No Capítulo 3 verificamos que a extensão de Zadeh do fluxo determinístico satisfaz as propriedades de semigrupo e assim, podemos dizer que ele é um fluxo em $\mathcal{F}(U)$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto. Além disso, estabelecemos o conceito de equilíbrio fuzzy e uma teoria de estabilidade para o Problema do Valor Inicial Fuzzy com a condição inicial fuzzy, já que o PVIF com coeficientes e/ou condição

inicial sempre pode ser reduzido ao PVIF com condição inicial fuzzy. Na seção 3.4.1 estabelecemos o Teorema de Linearização fuzzy como um método alternativo para o estudo dos equilíbrios fuzzy que são as funções características de equilíbrios hiperbólicos determinísticos, equivalente ao Teorema de Grobman-Hartman para fluxos . Finalizamos o Capítulo 3, introduzindo as noções de plano de fase fuzzy para o sistema autônomo bidimensional e também de solução periódica fuzzy.

No Capítulo 4 fazemos um estudo do modelo presa-predador Lotka-Volterra onde, diante da complexidade da análise via compartimentalização das variáveis de estado, sugerimos que a teoria fuzzy é a indicada para o estudo do modelo quando consideramos também que as interações entre presas e predadores são diferenciadas de acordo com as potencialidades de ser presa ou ser predador.

Em todos os exemplos estudados pudemos verificar que a teoria estabelecida para estudar as propriedades das soluções fuzzy via as soluções estendidas através do princípio de extensão de Zadeh são compatíveis com a teoria clássica existente, isto é, as soluções que eram estáveis para os modelos determinísticos permanecem estáveis para os modelos fuzzy.

Capítulo 1

Sobre a Modelagem de Incertezas

1.1 Introdução

A modelagem matemática, sempre que considera a aproximação determinística, está sujeita à perda de algumas informações inerentes aos fenômenos, que pode ser causada pela natureza das variáveis de estado envolvidas ou através dos parâmetros (coeficientes ou condição inicial). Nestes modelos, a identificação dos parâmetros é usualmente baseada em métodos estatísticos, partindo de dados experimentalmente obtidos da escolha de algum método adequado para sua identificação.

Segundo Giering III e Kandel[15], os modelos estocásticos têm sido uma solução comum para evitar a inclusão de detalhes no modelo, embora muitos dos sistemas que são modelados estocasticamente não são verdadeiramente aleatórios, mas apenas oriundos da dificuldade de se obter os dados dos fenômenos. Por exemplo, no lançamento de uma moeda honesta, o resultado obtido com probabilidade ($1/2$ de ser cara e $1/2$ de ser coroa) é considerado aleatório. No entanto, este resultado deveria levar em consideração a distância e a natureza da superfície de lançamento, bem como a direção da corrente de ar e outras minúcias. Como esses dados são geralmente difíceis ou impossíveis de se medir é utilizada uma simplificação da modelagem estocástica do lançamento da moeda.

Nas últimas décadas outras teorias têm surgido para modelar matematicamente os fenômenos reais e elas levam em conta os detalhes relevantes e respeitam

as especificidades de cada situação problema.

Neste capítulo apresentamos uma análise sintética dos principais contextos existentes para o tratamento dos modelos com incertezas: Modelo Estocástico; Inclusões Dife-renciais a Teoria de Subconjuntos Fuzzy e a Teoria de Inclusões Diferenciais Fuzzy.

Gostaríamos de salientar que este primeiro capítulo tem o intuito de apresentar apenas as noções básicas de teorias utilizadas em modelos que contem-plam dados imprecisos ou onde existem perdas de informações ao longo do processo.

1.2 Modelos Estocásticos

Se a natureza das incertezas do fenômeno estudado é aleatória devido a heterogeneidade das variáveis de estado (estocasticidade demográfica), ou ainda, devido a variabilidade do meio (estocaticidade ambiental), então um modelo determinístico (EDO) pode ser transformado em uma equação diferencial estocástica, introduzindo ruídos nas variáveis ou no parâmetro.

Consideremos o modelo determinístico descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1'(t) &= f_1(x_1(t)) \\ \vdots & \\ x_n'(t) &= f_n(x_n(t)) \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Dado (1.2.1), podemos inserir a incerteza ou ruído introduzindo parâmetros $k_1, \dots, k_n$ na dinâmica, isto é,

$$\begin{cases} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), k_1) \\ \vdots & \\ x_n'(t) &= f_n(x_n(t), k_n). \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Neste caso, devido a complexidade das equações resultantes para os modelos estocásticos, geralmente, é feita a inserção de ruídos de forma linear em k_i ,

isto é, supondo que o ruído entra na dinâmica linearmente, na forma

$$\begin{cases} x'_1(t) &= f_1(x_1(t)) + g_1(x_1(t))k_1(t) \\ \vdots & \\ x'_n(t) &= f_n(x_n(t)) + g_n(x_n(t))k_n(t). \end{cases} \quad (1.2.3)$$

No modelo (1.2.3), os k'_i s são denominados ruídos brancos, derivados da equação diferencial do movimento Browniano (veja Oksendal [29] para maiores detalhes). Quando as flutuações aleatórias do meio são do tipo ruído branco, a distribuição aleatória a partir da qual as flutuações são esboçadas é a mesma em qualquer tempo. Além disso, a variância é dada por σ^2 , não existindo correlação entre flutuações em instantes de tempos distintos.

No caso em que a variabilidade é do tipo ruído branco, a equação de difusão (ou de Fokker-Plank) poderá descrever a evolução da flutuação com densidade de probabilidade $p(t, x)$ da população, de tamanho $x = (x_1, \dots, x_n)$ no tempo t ,

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (m_i p(t, x)) + (1/2) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ((n_{ij}) p(t, x)), \quad (1.2.4)$$

onde $m_i = f_i(x_i)$ e $n_{ij} = \sigma^2 [g_i(x_i)]^2$ (veja Roughgarden[34]). Igualando o lado direito de (1.2.4) à zero obtemos a distribuição probabilidade equilíbrio para (1.2.3), o qual é equivalente ao ponto de equilíbrio para (1.2.1).

No exemplo a seguir estudamos um modelo unidimensional, o modelo de Verhulst, com estocasticidade ambiental, ou seja, com estocasticidade no parâmetro do tipo ruído branco.

Exemplo 1.2.1. [24] *Consideremos a equação logística:*

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)(k - x(t)) \quad (1.2.5)$$

Suponhamos que o parâmetro do meio (capacidade suporte) varie aleato-

riamente, ou seja,

$$k(t) = k_0 + \gamma(t).$$

Aqui k_0 é uma constante, sendo o valor médio de k , e $\gamma(t)$ é uma variável aleatória com média zero.

Assim sendo, de acordo com (1.2.3) temos a seguinte distribuição para (1.2.5)

$$x'(t) = x(k_0 - x) + \gamma(t)x. \quad (1.2.6)$$

Considerando (1.2.6) temos que a função densidade de probabilidade $p(t, x)$ para a população x no instante t é dada por

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(x(k_0 - x)p(t, x)) + (1/2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2\sigma^2 p(t, x)).$$

A distribuição probabilidade equilíbrio é dada por

$$p^*(x) = cx^{(2k_0/\sigma^2)-2} \exp\left(\frac{-2x}{\sigma^2}\right)$$

Exemplo 1.2.2. Consideremos o seguinte modelo de competição

$$\begin{cases} x'(t) &= x(k_1 - x - \alpha y) \\ y'(t) &= y(k_2 - y - \alpha x), \end{cases} \quad (1.2.7)$$

onde k_1 e k_2 são os parâmetros que representam os recursos existentes no ambiente para as espécies x e y ; e α é o coeficiente que mede a competição existente entre as duas espécies.

Considerando perturbações do tipo ruído branco nos coeficientes k_1 e k_2 em (1.2.7), temos

$$\begin{cases} x'(t) &= -x(x + \alpha y) + (k_0 + \gamma_1(t))x \\ y'(t) &= -y(y + \alpha x) + (k_0 + \gamma_2(t))y, \end{cases}$$

As flutuações aleatórias ambientais são introduzidas, como no Exemplo 1.2.1, supondo que os parâmetros k_1 e k_2 sejam variáveis aleatórias. Seja então

$$k_1(t) = k_0 + \gamma_1(t)$$

$$k_2(t) = k_0 + \gamma_2(t),$$

onde k_0 é o valor médio comum de k_1 e k_2 , respectivamente e $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$ são as perturbações e caracterizadas por uma variância comum σ^2 .

cuja função de densidade de probabilidade $p(t, x, y)$ para as populações x e y , no instante t , é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}[x(k_0 - x - \alpha y)p(t, x, y)] - \frac{\partial}{\partial y}[y(k_0 - y - \alpha x)p(t, x, y)] \\ &+ \frac{\partial^2 p(t, x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\sigma^2}{2} [(x^2 + y^2)p(t, x, y)]. \end{aligned}$$

Neste caso, não é possível explicitar a expressão da distribuição de probabilidade equilíbrio, pois não podemos resolver a equação analiticamente, veja May[24] para maiores detalhes.

Embora a modelagem estocástica do tipo (1.2.2) seja razoável na Física e Eletrônica, ela pode não ser apropriada para considerar as perturbações existentes nos modelos biológicos. O ruído branco é uma construção matemática simplificada para considerar as distorções existentes nos fenômenos no sentido de tornar os modelos com incertezas matematicamente tratáveis.

Segundo Krivan [20] modelos baseados em (1.2.4) permitem obter várias características que são importantes biologicamente. Por exemplo a probabilidade de atingir extinção limiar, médias e medianas para o primeiro tempo de extinção, etc, que são informações importantes para a biologia de conservação. Porém, as diferenças entre o ruído real e a sua aproximação através do ruído branco nos modelos de dinâmica populacional podem levar à diferenças substanciais entre os tempos de extinção previstos e os tempos de extinção observados [20].

A seguir apresentaremos outras técnicas que permitem a modelagem de incertezas existentes na dinâmica populacional ou nos problemas onde não é possível obter informações precisas.

Primeiramente estudaremos as inclusões diferenciais, pois segundo Krivan [20] a teoria de inclusões diferenciais permite a inserção de ruídos em (1.2.1) sem o conhecimento exato dos dados reais.

1.3 Inclusões Diferenciais

Nesta seção apresentamos os conceitos básicos referentes às multifunções e damos alguns exemplos de inclusões diferenciais.

Definição 1.3.1. *Sejam X e Y subconjuntos não vazios. A aplicação $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$, é chamada de **multifunção**.*

Assim, uma multifunção é uma aplicação que associa a cada ponto de um conjunto $X \neq \emptyset$ um único subconjunto do conjunto $Y \neq \emptyset$. Denotamos por $2^Y \setminus \emptyset$, a família de todos os subconjuntos não vazios de Y .

Exemplo 1.3.2. *Temos que $F : \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}} \setminus \emptyset$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} [0, 1], & \text{se } x \neq 0 \\ \{0\}, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é uma multifunção.

Definição 1.3.3. *Seja $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção. A **imagem de F** , denotada por $Im(F)$, é definida por:*

$$Im(F) = F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

Definição 1.3.4. *Dada a multifunção $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$, definimos o **gráfico de F** por*

$$graf(F) = \{(x, y) \in X \times Y / y \in F(x)\}.$$

Definição 1.3.5. *Seja $M \subset Y$ um subconjunto qualquer, e $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção. A **pré imagem de M** é definida por:*

$$F^{-1}(M) = \{x \in X / F(x) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Definição 1.3.6. *Seja $F : X \rightarrow 2^Y \setminus \emptyset$ uma multifunção. Diremos que F possui **valores unitários** se $F(x)$ é um conjunto unitário, isto é,*

$$F(x) = \{f(x)\}$$

onde $f : X \rightarrow Y$ é uma função.

A seguir estudaremos as inclusões diferenciais.

Definição 1.3.7. *Seja $x(t)$ uma trajetória em $\mathbb{R}^n$, isto é, $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n} \setminus \emptyset$ uma multifunção. Então defini-se a inclusão diferencial*

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3.8)$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Notemos que (1.3.8) é uma generalização do Problema do (PVI) Valor Inicial autônomo de equações diferenciais ordinárias. Se F depende explicitamente do tempo temos um PVI não autônomo.

A função $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução de (1.3.8) se x é absolutamente contínua e satisfaz (1.3.8) para quase todo $t \in [0, T]$.

Observemos também que enquanto a equação diferencial ordinária especifica em cada ponto do domínio uma direção a qual deve ser tangente à solução (mais precisamente ao gráfico da solução), a inclusão diferencial (1.3.8) especifica em cada ponto um cone de direções e a solução pode ser tangente a qualquer uma das direções do cone.

O conjunto atingível no tempo $t \in [0, T]$ associado ao problema (1.3.8) é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{A}_t(x_0) = \{x(t)/x(\cdot) \text{ é solução de (1.3.8)}\}.$$

Quando $F(x) = \{f(x) + cg(x)u/u \in [a, b]\}$ em (1.3.8) e satisfaz alguma condição de existência de soluções para a inclusão diferencial, temos que para cada $t > 0$, o conjunto atingível para (1.3.8) é dado por

$$\mathcal{A}_t(x_0) = [x(t), y(t)],$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= \min\{f(x(t)) + cg(x(t))u/u \in [a, b]\} \\ y'(t) &= \max\{f(x(t)) + cg(x(t))u/u \in [a, b]\}. \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Agora, para a questão da existência de soluções para (1.3.8) existem essencialmente dois tipos de condições sobre a multifunção F , (veja Aubin e Celina [2] para maiores detalhes): **condições de regularidade sobre F** , isto é, vários tipos e continuidade ou semicontinuidade e **condições topológicas ou geométricas**, tais como, compacidade, convexidade, entre outras sobre a imagem da multifunção.

A forma mais simples para estudar o problema de existência de solução para a inclusão diferencial (1.3.8) é quando o problema é reduzido às equações diferenciais ordinárias.

Neste caso, podemos obter as soluções de (1.3.8) através da chamada **técnica de seleções**. Suponha que exista uma função $f : X \rightarrow Y$ com a propriedade

$$f(x) \in F(x), \quad \forall x \in X,$$

aqui, dizemos que f é uma **seleção** da multifunção F . Pelo axioma de escolha, se $F(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, então F sempre tem uma seleção (veja, [2] para maiores detalhes).

Logo, se F tem uma seleção f , então qualquer solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (1.3.10)$$

será solução de (1.3.8). Por exemplo, se os espaços são de dimensão finita e se f for contínua e limitada, então o clássico teorema de Peano garante a existência de uma solução de (1.3.10) e consequentemente de (1.3.8).

Uma questão mais difícil de ser respondida é saber se dada F , a mesma admite uma seleção com algumas propriedades extras, tais como: continuidade, mensurabilidade, etc. Em geral, se as multifunções são semicontínuas inferiormente temos seleções contínuas e no caso em que F é semicontínua superiormente, existem

apenas ε –seleções contínuas que, às vezes, são suficientes para garantir a existência de soluções para (1.3.8) .

A seguir veremos um exemplo onde utilizamos a técnica de seleções para obtermos a solução para uma dada inclusão diferencial.

Exemplo 1.3.8. *Dada a multifunção $G(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x [0; \sqrt{1-x}]$, temos que as seleções da inclusão diferencial:*

$$\begin{cases} x'(t) & \in G(x(t)) \\ x(0) & = x_0. \end{cases}$$

estão entre as curvas soluções das EDO's, onde os campos são as seleções

$$f_1(x) = \min\{-\lambda_1 x - (\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}) \mid m \in [0; 1]\} = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}$$

$$f_2(x) = \max\{-\lambda_1 x - (\lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x}) \mid m \in [0; 1]\} = -\lambda_1 x.$$

Toda $f(x) \in G(x)$, tal que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ são seleções da multifunção $G(x)$. Por exemplo,

$$f_3(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x(1-x)$$

$$f_4(x) = -\lambda_1 x - \lambda_2 r_0 x \sqrt{1-x} |\sin(1/x^2)|$$

são seleções de $G(x)$.

Observemos que para cada seleção $f(x) \in G(x)$, temos uma solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) & = f(x(t)) \\ x(0) & = x_0. \end{cases} \quad (1.3.11)$$

que será uma solução da inclusão diferencial.

Assim, no exemplo 1.3.8, temos que o conjunto atingível para cada $t > 0$ é dado por

$$A_t(x_0) = [x(t, x_0), y(t, x_0)],$$

onde,

$$x(t, x_0) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 r_0)x_0}{[(\lambda_1 + \lambda_2 r_0) - \lambda_2 r_0 x_0]e^{(\lambda_1 + \lambda_2 r_0)t} + \lambda_2 r_0 x_0};$$

$$y(t, x_0) = x_0 e^{-\lambda_1 t},$$

onde x e y são soluções de (1.3.11) para $f(x)$ dada por $f_1(x)$ e $f_2(x)$, respectivamente.

Na teoria de inclusões diferenciais as velocidades admissíveis não são distinguíveis uma das outras, isto é, todas elas são igualmente prováveis e assim uma análise de (1.3.8) requer o estudo de infinitas soluções. Além disso, se alguma informação adicional sobre o ruído é conhecida, isto é, alguns valores dos parâmetros são mais prováveis do que outros, estamos diante do problema de transferir estas informações para o conjunto de soluções de (1.3.8). Isto pode ser feito com a teoria de subconjuntos fuzzy.

A seguir apresentaremos os principais conceitos da teoria de subconjuntos fuzzy.

1.4 Subconjunto Fuzzy

A teoria de subconjuntos fuzzy foi introduzida por L. A. Zadeh [42] em 1965 para generalizar o conceito de conjunto. A teoria clássica de conjuntos é baseada na lógica booleana ou lógica a dois valores, onde temos que um dado elemento pertence ou não ao conjunto, recebendo valores lógicos 0 ou 1. Na teoria de subconjuntos fuzzy temos que um elemento admite pertinência parcial, isto é, a pertinência de cada elemento poderá ser graduada com valores que variam no intervalo $[0, 1]$.

Definição 1.4.1. *Um subconjunto fuzzy U de X é caracterizado pelo conjunto de pares ordenados $(u, \mu_U(u))$, $u \in X$ onde $\mu_U : X \longrightarrow [0, 1]$ é a função de pertinência de U , denotada por $\mu_U(u)$. Os graus 0 e 1 representam respectivamente a não pertinência e a pertinência de u ao conjunto U .*

Um conjunto clássico A será simplesmente denominado conjunto e para um subconjunto fuzzy U , utilizaremos a palavra fuzzy para diferenciá-lo do

conjunto clássico. Além disso, para simplificar a notação indicaremos a função de pertinência μ_U por U .

Exemplo 1.4.2. A função grau de pertinência do conjunto fuzzy de números reais “próximos a 1”, pode ser definida por

$$\mu_U(t) = U(t) = \exp(-k(t - 1)^2),$$

onde k é um número real positivo.

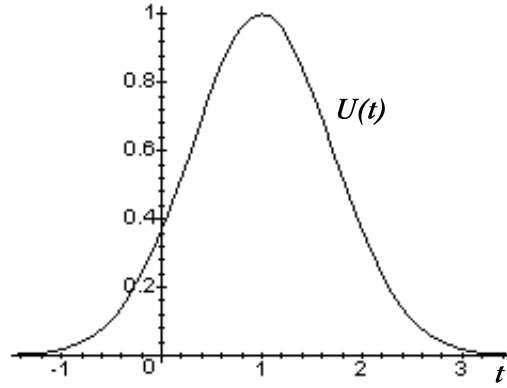


Figura 1.1: Função grau de pertinência para o conjunto fuzzy “próximo a 1.”

Definição 1.4.3. Dado $\alpha \in (0, 1]$ e U um subconjunto fuzzy de X , o conjunto

$$[U]^\alpha = \{x \in X / U(x) \geq \alpha\}$$

é denominado α -nível do subconjunto fuzzy U .

Definição 1.4.4. Seja U um subconjunto fuzzy de X , o suporte de U , denotado por $\text{supp}(U)$, é um subconjunto de X cujos elementos têm grau de pertinência não nulos em U

$$\text{supp}(U) = \{x \in X / U(x) > 0\}$$

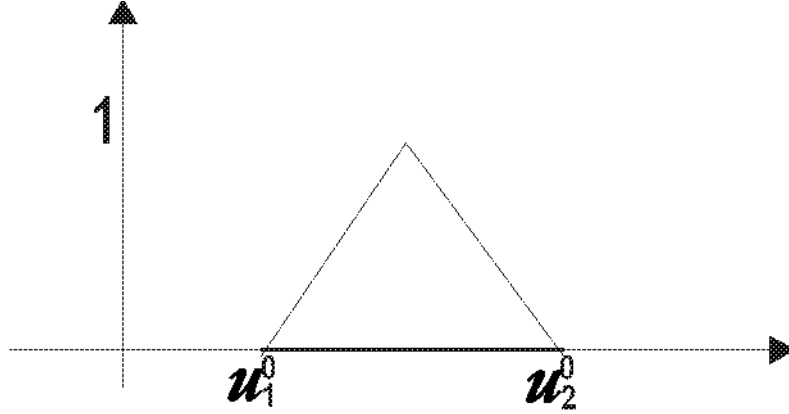


Figura 1.2: O suporte de U é (u_1^0, u_2^0) .

Definição 1.4.5. Um subconjunto fuzzy U de X é denominado normal se existir um $x \in X$ tal que $U(x) = 1$, caso contrário, dizemos que o conjunto é subnormal.

Definição 1.4.6. Um subconjunto fuzzy U de X é denominado convexo se $[U]^\alpha$ for um subconjunto convexo de X , $\forall \alpha \in [0, 1]$.

Definição 1.4.7. Um número fuzzy U é um subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}$ normal e convexo com função de pertinência contínua e de suporte limitado.

Se U não é um número fuzzy convexo, então existe um $\alpha \in [0, 1]$ tal que $[U]^\alpha$ não é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}$.

Sejam U e V subconjuntos fuzzy de um conjunto não vazio X , então temos a seguinte definição:

Definição 1.4.8. A intersecção (união) de U e V é definida, respectivamente, por:

$$(U \cap V)(x) = \min\{U(x), V(x)\} = U(x) \wedge V(x), \forall x \in X.$$

e,

$$(U \cup V)(x) = \max\{U(x), V(x)\} = U(x) \vee V(x), \forall x \in X.$$

Exemplo 1.4.9. Sejam U e V subconjuntos fuzzy de $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ tais que os conjuntos de pertinência dos elementos de X da esquerda para a direita são dados respectivamente por $U(x) = \{0.6, 0.3, 0.6, 1, 0.6, 0.3, 0.4\}$ e $V(x) =$

$\{0.1, 0.3, 0.9, 1, 1, 0.3, 0.3\}$. Então temos que a intersecção e a união são dadas, respectivamente, pelas funções graus de pertinência:

$$(U \cap V)(x) = \{0.1, 0.3, 0.6, 1, 0.6, 0.3, 0.3\}$$

$$(U \cup V)(x) = \{0.6, 0.3, 0.9, 1, 0.6, 0.3, 0.4\}$$

A seguir veremos o conceito e as propriedades relativas à extensão de Zadeh, os quais serão utilizados para o estudo das equações diferenciais fuzzy nos Capítulos 2 e 3.

1.4.1 A extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy

Segundo Nguyen [27], o princípio de extensão proposto por L.A.Zadeh provem uma maneira natural para estender o domínio de uma aplicação ou uma relação definida sobre um conjunto U para subconjuntos fuzzy de U . Em particular, este princípio é útil na conexão com o cálculo de variáveis linguísticas, o cálculo de probabilidades linguísticas, a aritmética dos números fuzzy e, mais geralmente, em aplicações as quais necessitam de uma extensão do domínio de uma relação. Além disso, como mostrado em [25], a análise de números fuzzy através dos α -níveis é mais simples do que através da utilização direta da definição de função de pertinência de subconjuntos fuzzy.

Denotaremos por

• $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a família de subconjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$, cujos α -níveis, dados por:

$[U]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : U(x) \geq \alpha\}$, para $\alpha \in (0, 1]$ são compactos e não vazios.

• $\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ é a família de subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com α -níveis convexos para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Para indicarmos um subconjunto de um conjunto fuzzy, utilizaremos a notação $\in$.

Além disso, temos que $[U]^0 = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : U(x) > 0\}}$,

As operações de adição e multiplicação por escalar real em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ são definidas por [32] da seguinte maneira:

$$(U + V)(x) = \sup_{y+z=x} \min[U(y), V(z)]$$

$$(\lambda U)(x) = \begin{cases} U(x/\lambda) & , \quad \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}} & , \quad \lambda = 0, \end{cases}$$

onde $\chi_{\{0\}}$ é a função característica de zero.

Definição 1.4.10. *O produto cartesiano de dois conjuntos fuzzy distintos $U \in \mathcal{F}(X)$ e $V \in \mathcal{F}(Y)$ é definido por*

$$(U \times V)(u, v) = \min\{U(u), V(v)\}, (u, v) \in X \times Y.$$

Observemos que para $U, V \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall \alpha \in [0, 1]$, tem-se

- i. $[U + V]^\alpha = [U]^\alpha + [V]^\alpha$;
- ii. $[\lambda U]^\alpha = \lambda[U]^\alpha$.

A proposição a seguir é fundamental já que caracteriza um subconjunto fuzzy através dos seus α -níveis.

Proposição 1.4.11. *(Negoita e Ralescu, 1975) Se $[A]^\alpha; \alpha \in [0, 1]$ é um conjunto compacto, convexo e não vazio da família de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tal que :*

- i. $\overline{\bigcup A^\alpha} \subset A^0$;
- ii. $A^{\alpha_2} \subset A^{\alpha_1}$ se $\alpha_1 \leq \alpha_2$;
- iii. $A^\alpha = \bigcap_{k \geq 1} A^{\alpha_k}$, se $\alpha_k \uparrow \alpha > 0$.

então existe $U \in \bullet\mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ tal que $[U]^\alpha = [A]^\alpha$, para todo $\alpha \in (0, 1]$. Além disso,

$$[U]^0 = \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} [U]^\alpha \subset [A]^0.$$

Observemos que se $U, V \in \bullet\mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ com os α -níveis dados por $[U]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$ e $[V]^\alpha = [v_1^\alpha, v_2^\alpha]$, então a multiplicação dos subconjuntos fuzzy U e V é definida através de seus α -níveis por:

$$[UV]^\alpha = [\min(u_i^\alpha v_j^\alpha), \max(u_i^\alpha v_j^\alpha)], \text{ para } i, j = 1, 2.$$

Definição 1.4.12. A extensão de Zadeh da função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a função $\hat{f}$ dada por

$$(\hat{f}(U))(x) = \begin{cases} \sup_{\tau \in f^{-1}(x)} U(\tau) & \text{se } f^{-1}(x) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } f^{-1}(x) = \emptyset, \end{cases} \quad (1.4.12)$$

para qualquer subconjunto fuzzy $U : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$.

A extensão de Zadeh $\hat{f}$ estende a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, identificando $\mathbb{R}^n$ com

$$\{\chi_{\{x\}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), x \in \mathbb{R}^n\},$$

pois $\hat{f}(\chi_{\{x\}}) = \chi_{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}^n$, onde χ_A é a função característica do conjunto A .

Observação 1.4.13. Se f é bijetora, então $((\hat{f}(U))(x) = U(f^{-1}(x))$ e temos o gráfico do conjunto fuzzy $\hat{f}(U)$, representado no eixo vertical, figura 1.3.

Exemplo 1.4.14. Seja $f(x) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Logo, se U é um subconjunto fuzzy, então pela Definição 1.4.12, segue que

$$(\hat{f}(U))(x) = \begin{cases} U(\lambda^{-1}x), & \text{se } \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}} & \text{se } \lambda = 0, \end{cases}$$

pois

$$((\hat{f}(U))(x) = \sup_{f(\tau)=x} U(\tau) = U\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Portanto, segue da definição de um escalar pelo subconjunto fuzzy U que $\hat{f}(U) = \lambda U$.

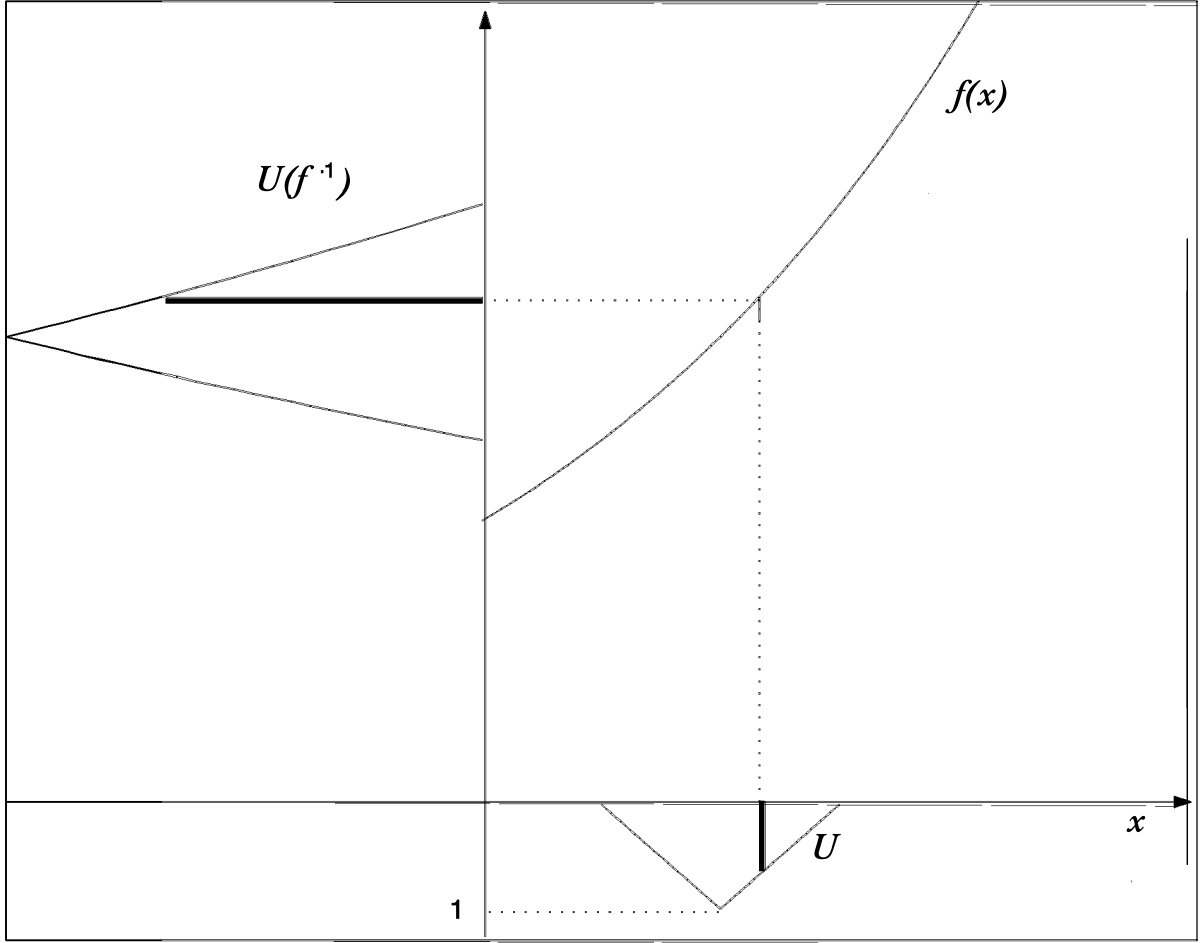


Figura 1.3: Extensão de Zadeh.

Exemplo 1.4.15. *Seja $f(x) = Ax + b$, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, e U um subconjunto fuzzy, então*

$$\left(\hat{f}(U) \right) (x) = \sup_{f(\tau)=x} U(\tau) = \sup_{A\tau+b=x} U(\tau)$$

Logo, se A for uma matriz inversível, temos

$$\left(\hat{f}(U) \right) (x) = U \left(A^{-1}(x - b) \right)$$

O teorema a seguir nos diz que aplicar a extensão de Zadeh a um subconjunto fuzzy através de uma função contínua é equivalente a aplicar a função

nos α -níveis do subconjunto fuzzy.

Teorema 1.4.16. [11] *Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, então a extensão de Zadeh $\hat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ está bem definida e,*

$$[\hat{f}(U)]^\alpha = f([U]^\alpha) = \{f(x)/x \in [U]^\alpha\},$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $U \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Uma consequência imediata do Teorema 1.4.16 é a seguinte:

Corolário 1.4.17. [4] *Se f é contínua, então $\hat{f}$ é monótona no seguinte sentido:*

$$\text{se } U \leq V, \text{ então } \hat{f}(U) \leq \hat{f}(V),$$

onde $U \leq V$ significa que $U(x) \leq V(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

O resultado a seguir nos diz que a extensão de Zadeh de uma função contínua também é contínua em relação a métrica de Hausdorff D sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Mas antes consideremos a seguinte definição para a distância de Hausdorff para subconjuntos fuzzy:

Definição 1.4.18. *Sejam U, V elementos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, a distância de Hausdorff fuzzy entre U e V é definida por:*

$$D(U, V) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([U]^\alpha, [V]^\alpha)$$

onde h é a métrica de Hausdorff usual,

$$h([U]^\alpha, [V]^\alpha) = \max[\rho([U]^\alpha, [V]^\alpha), \rho([V]^\alpha, [U]^\alpha)],$$

e

$$\rho([U]^\alpha, [V]^\alpha) = \sup_{x \in [U]^\alpha} \inf_{y \in [V]^\alpha} \|x - y\|$$

Observemos que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ munido com a métrica D é um espaço métrico completo [23, 32].

Exemplo 1.4.19. Se U e V são números fuzzy em $\mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ tal que $[U]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$, $[V]^\alpha = [v_1^\alpha, v_2^\alpha]$, temos que

$$D(U, V) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([U]^\alpha, [V]^\alpha) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{|u_1^\alpha - v_1^\alpha|, |u_2^\alpha - v_2^\alpha|\},$$

isto é, $h([U]^\alpha, [V]^\alpha)$ é a distância maximal entre os níveis de U e V .

Teorema 1.4.20. [4] Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Então as seguintes condições são equivalentes:

- i. f é contínua (na métrica usual);
- ii. $\widehat{f} : (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D) \longrightarrow (\mathcal{F}(\mathbb{R}^n), D)$ é contínua.

A seguir enunciaremos um teorema que será importante para o estudo de modelos com coeficientes e condição inicial dados por números fuzzy.

Teorema 1.4.21. [11] Seja $f : X \times X \longrightarrow X$ uma função contínua e A e B números fuzzy. Então

$$[\widehat{f}(A, B)]^\alpha = f([A]^\alpha, [B]^\alpha),$$

onde $f([A]^\alpha, [B]^\alpha) = \{f(x_1, x_2) / x_1 \in [A]^\alpha, x_2 \in [B]^\alpha\}$.

Os conceitos básicos preliminares da teoria de inclusões diferenciais e de subconjuntos fuzzy nos permitirão definir as **inclusões diferenciais fuzzy**, que utilizaremos no Capítulo 2.

1.5 Inclusões Diferenciais Fuzzy

Apresentaremos aqui os conceitos relativos à multifunção fuzzy para posteriormente introduzir a teoria de inclusões diferenciais fuzzy. Aqui $E(Y)$ é o espaço de todos os subconjuntos fuzzy de Y .

Definição 1.5.1. Uma aplicação $\Gamma : X \rightarrow E(Y)$, que associa a cada $x \in X$ um subconjunto fuzzy sobre Y , é chamada de **multifunção fuzzy**.

Exemplo 1.5.2. As multifunções $F_\alpha : (-1, 1) \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$, $\alpha \in [0, 1]$, dadas por

$$[F(t)]^0 = [0, 1], [F(t)]^1 = \{1\}, \forall t \in \mathbb{R},$$

e para $\alpha \in (0, 1)$

$$[F(t)]^\alpha = \begin{cases} \{1\}, & \text{se } t \in (-1, 0] \\ \left[1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{t}}, 1\right], & \text{se } t \in (0, 1) \end{cases}$$

definem uma multifunção fuzzy.

A partir da noção de multifunção fuzzy, estenderemos a definição para inclusões diferenciais no contexto fuzzy, isto é, consideraremos as inclusões diferenciais fuzzy.

Dada uma multifunção fuzzy, $F : X \longrightarrow \mathcal{E}(Y)$, consideremos a seguinte relação, também denominada inclusão diferencial fuzzy [14]

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.5.13)$$

onde $x : I \rightarrow X$, $I = [0, t]$, $t \in \mathbb{R}_+$ é uma função usual.

Neste contexto, uma questão surge naturalmente: como o problema (1.5.13) pode ser interpretado?

Uma interpretação foi dada por Zhu e Rao [43] para (1.5.13). Os autores sugeriram que (1.5.13) poderia ser interpretada através de uma família de inclusões diferenciais indexada por $\alpha \in [0, 1]$ e α é uma função $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ tal que o problema (1.5.13) é entendido como

$$\begin{cases} x'(t) \in [F(x(t))]^{\alpha(x)} \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.5.14)$$

Além disso, no mesmo artigo os autores obtém alguns resultados que garantem a existência de soluções para a formulação (1.5.14).

Assim sendo, vimos que (1.5.13) admite formulações diferentes. Qual é a melhor interpretação? Ainda não se tem uma resposta definitiva a esta questão.

Achamos que ela dependerá fortemente dos objetivos que desejamos atingir.

No próximo capítulo estudaremos as equações diferenciais fuzzy, onde o enfoque principal será dado ao caso onde os coeficientes da equação e/ou da condição inicial são subconjuntos fuzzy.

Aos leitores interessados em maiores detalhes da teoria estocástica sugerimos o livro de Oksendal [29], para a teoria de inclusões diferenciais o livro de Aubin [2] e para a teoria de inclusões diferenciais fuzzy sugerimos os artigos citados na última seção deste capítulo, além deste trabalho.

Capítulo 2

Equação Diferencial Fuzzy

2.1 Introdução

Em 1978, a equação diferencial fuzzy foi introduzida e analisada por Kandel e Byatt [18]. A partir de 1987, Problemas de Valor Inicial para a equação diferencial fuzzy de primeira ordem foram investigados por Kaleva [17] e Seikalla [36] e posteriormente, em 2000, por Ouyang e Wu [30], dentre outros. Em 1990 Baidosov[3] e Aubin[1] apresentam a teoria de inclusão diferencial fuzzy, visando uma generalização da equação diferencial fuzzy.

Como podemos interpretar o problema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

dentro de um contexto fuzzy?

Neste Capítulo consideraremos as distintas interpretações para (2.1.1)

i) **Diferencial de Hukuhara:**[17] Neste contexto temos que a variável de estado x é fuzzy e portanto necessitamos do conceito de diferencial de uma função a valores fuzzy (aqui, consideraremos a derivada de Hukuhara). Na seção 2.1 veremos que este enfoque tem uma grande desvantagem, pois as soluções são processos fuzzy com diâmetros não decrescentes.

ii) **Família de Inclusões Diferenciais:** Hüllermeier [14] sugere que

(2.1.1), onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ é uma multifunção fuzzy e $X_0 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, pode ser reescrita como a família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & \in [f(x(t))]^\alpha \\ x(0) & \in [X_0]^\alpha, \end{cases}$$

onde $[f(x)]^\alpha$ e $[X_0]^\alpha$ são os α -níveis dos subconjuntos fuzzy $f(x)$ e X_0 , respectivamente e $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

iii) **Princípio de extensão:** Oberguggenberger e Pittschmann [28] estudam (2.1.1) para o caso em que os parâmetros (para os autores são os coeficientes e a condição inicial) são fuzzy. Os autores definem os operadores equação, restrição e solução para o problema

$$\begin{cases} x'(t) & = f(x) \\ x(0) & = x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

e aplicam o princípio de extensão de Zadeh nos operadores para obter uma solução para (2.1.1). Além disso, eles estabelecem formalmente os conceitos de solução fuzzy e solução fuzzy componente por partes. Na seção 2.4 daremos maiores detalhes sobre a metodologia desenvolvida pelos autores.

Utilizaremos uma idéia similar a de Oberguggenberger e Pittshmann para obter a solução para (2.1.1) para os casos em que somente a condição inicial é fuzzy e quando tanto os coeficientes da equação diferencial como a condição inicial são subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. As soluções para os dois casos considerados serão obtidas aplicando-se a extensão de Zadeh na solução determinística. Notemos que enquanto Oberguggenberger e Pittshmann aplicam o princípio de extensão de Zadeh em vários operadores para obter uma solução para (2.1.1) no contexto fuzzy, aqui nós obtemos a solução para o PVIF quando os coeficientes e/ou condição inicial são fuzzy aplicando o princípio de extensão de Zadeh na solução do problema determinístico associado. Além disso, nas seções 2.5 e 2.6 estabelecemos que, para cada $t > 0$, os conjuntos atingíveis via família de inclusões diferenciais e via extensão de Zadeh da solução determinística são os mesmos nos dois casos.

A seguir apresentaremos as idéias, bem como exemplos de cada um

dos contextos citados anteriormente.

2.2 Equação Diferencial Fuzzy via derivada de Hukuhara

Nesta seção consideramos o seguinte problema do valor inicial fuzzy:

$$\begin{cases} X'(t) = f(X(t)) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

onde $f : \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, X é uma variável fuzzy e $X_0 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$. Mais especificamente, nesta seção consideraremos (2.2.2) com o campo obtido, via extensão de Zadeh, do campo determinístico. Seikkala[36] considera o seguinte problema da valor inicial fuzzy no espaço $\mathcal{F}_C(\mathbb{R})$

$$\begin{cases} X'(t) = \hat{f}(X(t)) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

onde $\hat{f}$ é a extensão de Zadeh da função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e os α -níveis da condição inicial são dados por $[X_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]$, $\alpha \in [0, 1]$.

Para estudarmos (2.2.2) utilizamos o conceito de H-diferenciabilidade de multifunções[17] no contexto da derivada de Hukuhara.

Dados $X, Y \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, se existir $Z \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ tal que $X = Y + Z$, então Z é a H-diferença ou a diferença de Hukuhara, denotada por $X - Y$.

O conceito a seguir foi estabelecido por Puri e Ralescu[32].

Definição 2.2.1. *A aplicação $f : T \longrightarrow E^n$ é diferenciável em $t_0 \in T \subset \mathbb{R}_+$ se existe $f' \in E^n$ tal que os limites*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad e \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0) - f(t_0 - h)}{h}$$

existem e são iguais a $f'(t_0)$. Neste caso dizemos que f é H-diferenciável em t_0 .

Da definição 2.2.1 de diferenciabilidade segue que se f é diferenciável então a multifunção $f^\alpha(t) = [f(t)]^\alpha$ é Hukuhara diferenciável para todo $\alpha \in [0, 1]$ e

$$Df^\alpha(t) = [f'(t)]^\alpha,$$

onde Df^α denota a derivada de Hukuhara de f^α .

A seguir apresentamos o conceito de processo fuzzy estabelecido por Seikkala [36] para o espaço $\mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ e que foi utilizado pelo autor para reescrever o problema (2.2.3) como sendo um sistema bidimensional de equações diferenciais ordinárias.

Definição 2.2.2. *Dado $I = [0, t], t \in \mathbb{R}_+$ um intervalo real. Uma aplicação $X : I \longrightarrow E$ é denominado um processo fuzzy, denotado por:*

$$[X(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)], t \in I, \alpha \in [0, 1].$$

Como caso particular da definição 2.2.1, temos:

$$[X'(t)]^\alpha = [(x_1^\alpha(t))', (x_2^\alpha(t))'], 0 < \alpha \leq 1.$$

O resultado a seguir caracteriza as soluções de uma equação diferencial fuzzy segundo Kaleva [17].

Termos que $Diam(C)$ o diâmetro de um subconjunto compacto não vazio (não necessariamente convexo) de $\mathbb{R}^n$, isto é

$$diam(C) = \max\{\|c_1 - c_2\| / c_1, c_2 \in C\}$$

Teorema 2.2.3. *Se $f : I \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ é diferenciável no intervalo $I = [0, T]$, então para cada $\alpha \in [0, 1]$ a função $t \longrightarrow diam[f(t)]^\alpha$ é não decrescente em $t \in I$.*

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $X(t) \in E$, do Teorema 1.4.16, segue que:

$$[\hat{f}(X)]^\alpha = f([X]^\alpha). \quad (2.2.4)$$

Logo, se $[X(t)]^\alpha = [x_1^\alpha(t), x_2^\alpha(t)]$, então (2.2.3) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} (x_1^\alpha)'(t) &= f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha), x_1^\alpha(0) = x_{01}^\alpha \\ (x_2^\alpha)'(t) &= f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha), x_2^\alpha(0) = x_{02}^\alpha, \end{cases} \quad (2.2.5)$$

para $t \in [0, T)$ e $\alpha \in [0, 1]$, onde

$$\begin{cases} f_1(x_1^\alpha, x_2^\alpha) &= \min\{f(x)/x \in [X]^\alpha\} \\ f_2(x_1^\alpha, x_2^\alpha) &= \max\{f(x)/x \in [X]^\alpha\}. \end{cases}$$

Observemos que o problema fuzzy foi reduzido a um problema do valor inicial em $\mathbb{R}^2$.

A seguir serão dados exemplos que utilizam as noções estabelecidas por Seikkala para (2.2.3).

2.2.1 Aplicações: Fuzicidade Ambiental e Demográfica

Em uma mesma espécie a variação comportamental pode ser bastante acentuada quando consideramos seus elementos isoladamente. Entretanto, quando analisamos os grupos destes indivíduos, a diversidade comportamental acontece em grau mais reduzido. Por exemplo, o conceito de predador pode estar carregado de subjetividade se olharmos o potencial de cada indivíduo. Assim, uma presa com um determinado grau pode se tornar um predador em potencial sobre determinadas circunstâncias intrínsecas da espécie ou do ambiente em que a mesma vive. Sendo assim, o grau de predação é um fator determinante nesta situação, mas esta característica nem sempre pode ser mensurável. Neste caso temos a fuzicidade demográfica que é o análogo da estocasticidade demográfica (onde a variável de estado é a variável aleatória).

Como já foi visto na introdução e na Seção 1.1 do Capítulo 1, os modelos estocásticos são mais indicados para investigar as consequências das variações sujeitas às distribuições de dados estatísticos como esperança de vida, fertilidade, captura, etc. Porém, para se analisar a dinâmica populacional de uma espécie baseada nos diferentes graus de predação, competição, sobrevivência, etc, acredita-

mos que a teoria fuzzy seja a mais adequada.

Neste caso, tanto nas equações diferenciais fuzzy como nas equações de diferenças fuzzy, as estruturas fuzzy podem ser introduzidas através da condição inicial fuzzy.

A seguir ilustraremos o conceito de fuziness demográfica, onde a condição inicial é um conjunto fuzzy em $\mathcal{F}_C(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.4. (*Malthus contínuo*)[4, 21]: Suponhamos que a população obedeça a lei do crescimento Malthusiano, então

$$\begin{cases} U'(t) &= aU(t) \\ U(0) &= U_0, \end{cases} \quad (2.2.6)$$

onde $U_0 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}$.

Como U_0 é um conjunto fuzzy, o campo $F(U) = aU$ associa conjunto fuzzy a conjunto fuzzy. Então, temos uma equação diferencial fuzzy, onde $F(U) = aU$ é a extensão de Zadeh de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Logo, se os α -níveis de U são dados por $[U]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$, então por (2.2.3) e (2.2.5), para obtermos a solução de (2.2.6) devemos resolver os seguintes sistemas determinísticos em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = au_1^\alpha(t), \text{ com } u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = au_2^\alpha(t), \text{ com } u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

para $a \geq 0$, e,

$$\begin{cases} (u_1^\alpha)'(t) = au_2^\alpha(t), \text{ com } u_1^\alpha(0) = u_{01}^\alpha \\ (u_2^\alpha)'(t) = au_1^\alpha(t), \text{ com } u_2^\alpha(0) = u_{02}^\alpha, \end{cases} \quad (2.2.8)$$

para $a < 0$, e para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Temos que as soluções de (2.2.7) e (2.2.8), serão dadas, respectivamente, por

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) &= u_{01}^\alpha e^{at} \\ u_2^\alpha(t) &= u_{02}^\alpha e^{at}, \end{cases} \quad (2.2.9)$$

e,

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) = \left(\frac{u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha}{2} \right) e^{at} + \left(\frac{u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha}{2} \right) e^{-at} \\ u_2^\alpha(t) = \left(\frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} \right) e^{at} + \left(\frac{u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha}{2} \right) e^{-at} \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Assim sendo, a solução $U(t)$ de (2.2.6) tem α -níveis dados por (2.2.9) para $a \geq 0$ e por (2.2.10) para $a < 0$.

Além disso, notemos que para $a \geq 0$, o nível $[U(t)]^1$, se afasta da solução determinística nula e para $a < 0$, as soluções tornam - se cada vez mais difusas, porém o nível $[U(t)]^1$ aproxima-se da solução nula se supormos que $[U_0]^1$ é um ponto, Figura 2.1.

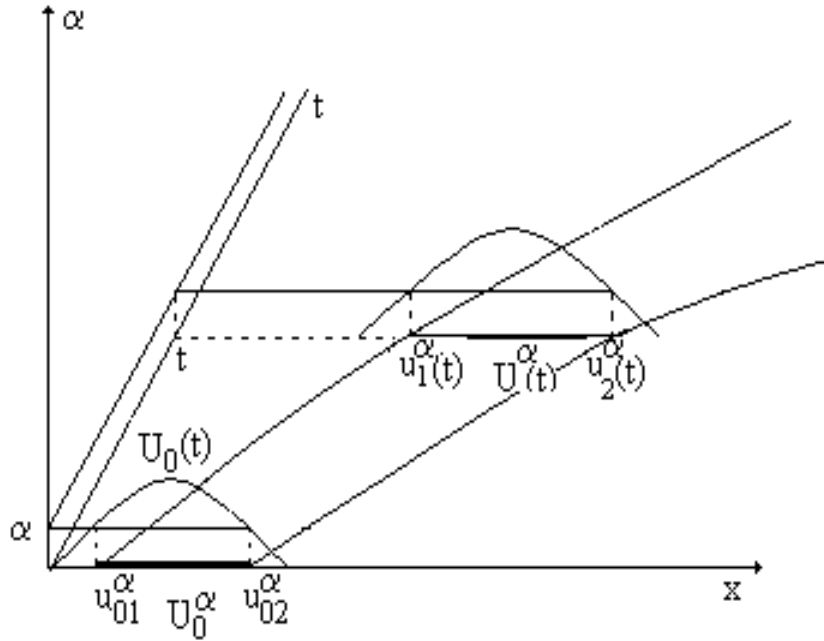


Figura 2.1: As soluções para o modelo malthusiano fuzzy.

As variações abióticas ou ambientais podem também influenciar fortemente no processo de interação entre as espécies e na sua dinâmica populacional, mas quando as variações no tempo são as causas de tais mudanças, as consequências

podem ser analisadas, incorporando-se estocasticidade e neste caso, as soluções são processos estocásticos. Mas quando a influência é dada subjetivamente, temos novamente o contexto fuzzy como opção. Neste caso, consideramos as equações diferenciais (diferenças) fuzzy, com alguns coeficientes modelados por conjuntos fuzzy, cujas soluções são processos fuzzy contínuos ou discretos. Neste caso temos a fuzicidade ambiental que é o análogo da estocasticidade ambiental (o coeficiente é uma variável aleatória).

No entanto, em geral, tanto a fuziness ambiental (coeficiente) como a demográfica (condição inicial) estão presentes nos fenômenos biológicos, ou seja, com a condição inicial e com algum coeficiente dado por subconjuntos fuzzy.

No exemplo a seguir estudado por Barros [4] consideraremos um modelo malthusiano com subjetividade no coeficiente de interação (fuzziness ambiental) e na condição inicial (fuzziness demográfica), onde a pobreza é um fator que supostamente influencia a esperança de vida de um grupo.

Exemplo 2.2.5. [4, 5] *Seja A um conjunto com $x(t)$ indivíduos no instante t . Suponhamos que não ocorra nascimento de indivíduos neste grupo e que a dinâmica do número de indivíduos seja modelada por*

$$\begin{cases} x'(t) &= -\lambda x(t) \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Para incorporarmos a fuzicidade no parâmetro λ , suponhamos que

$$\lambda = \lambda_1 + u_k(r)\lambda_2,$$

onde λ_1 é a taxa de mortalidade natural e $u_k(r)\lambda_2$ é o coeficiente que representa a influência da pobreza na taxa de mortalidade do grupo.

Para (2.2.11) o “conjunto dos pobres” é o conjunto fuzzy dado por:

$$\mu_k(r) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right)^k, & \text{se } 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & \text{se } r \geq r_0, \end{cases}$$

onde r_0 é um valor limiar a partir do qual o fator renda não tem mais influência na taxa de mortalidade do grupo estudado.

Suponhamos ainda que a renda r seja proporcional ao salário S do grupo estudado, isto é, $r = cS^m$, onde c e m constantes. Então, temos o seguinte conjunto fuzzy

$$V_k(S) = \mu_k(cS^m) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{S}{S_0}\right)^{2m}\right)^k, & \text{se } 0 \leq S \leq S_0 \\ 0 & \text{se } S \geq S_0, \end{cases}$$

onde $S_0 = \left(\frac{r_0}{c}\right)^{1/m}$.

Consideremos o seguinte problema de Cauchy fuzzy

$$\begin{cases} U'(t) &= -(\lambda_1 + v_k(S)\lambda_2)U(t) \\ u(0) &\in U_0, \end{cases} \quad (2.2.12)$$

onde $U_0 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$.

Como, os α - níveis de V_k e $U(t)$ são:

$$[V_k(S)]^\alpha = \{S \in \mathbb{R} / v_k(S) \geq \alpha\} = [0, S_0(1 - \alpha^{1/k})^{1/2m}]$$

e,

$$[U]^\alpha = [u_1^\alpha, u_2^\alpha]$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$, segue das operações de adição e multiplicação por escalar de números fuzzy que:

$$[-(\lambda_1 + \lambda_2 V_k(S))U]^\alpha = [-(\lambda_1 + \lambda_2 S_0(1 - \alpha^{1/k})^{1/2m})u_2^\alpha, -\lambda_1 u_1^\alpha]$$

pois, $[-(\lambda_1 + \lambda_2 V_k(S))]^\alpha = -([\chi_{\{\lambda_1\}}]^\alpha + \lambda_2 [V_k(S)]^\alpha)$.

Logo, conforme (2.2.3) e (2.2.5) a solução do problema fuzzy (2.2.12) é obtida, resolvendo - se o seguinte sistema

$$(u_1^\alpha)'(t) = -[\lambda_1 + \lambda_2 S_0(1 - \alpha^{1/k})^{1/2m}]u_2^\alpha = -bu_2^\alpha \quad (2.2.13)$$

$$(u_2^\alpha)'(t) = -\lambda_1 u_1^\alpha, \quad (2.2.14)$$

onde $[U_0]^\alpha = [u_{01}^\alpha, u_{02}^\alpha]$, $\alpha \in [0, 1]$ e $b = \lambda_1 + \lambda_2 S_0(1 - \alpha^{1/k})^{1/2m} \lambda_1 + \lambda_2 S_0(1 - \alpha^{1/k})^{1/2m}$.

Substituindo (2.2.14) em (2.2.13), temos a equação de segunda ordem $(u_1^\alpha(t))'' = -b(u_2^\alpha(t))' = b\lambda_1 u_1^\alpha$ e obtemos as seguintes soluções para (2.2.14) e (2.2.13):

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) &= c_1 e^{-\sqrt{b\lambda_1}t} + c_2 e^{-\sqrt{b\lambda_1}t} \\ u_2^\alpha(t) &= \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} c_1 e^{-\sqrt{b\lambda_1}t} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} c_2 e^{-\sqrt{b\lambda_1}t}, \end{cases}$$

onde $u_{01}^\alpha = u_1^\alpha(0)$ e $u_{02}^\alpha = u_2^\alpha(0)$.

Portanto, a solução de (2.2.12) será dada por

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) &= \frac{1}{2} \left(u_{01}^\alpha + \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} u_{02}^\alpha \right) e^{-\sqrt{b\lambda_1}t} + \frac{1}{2} \left(u_{01}^\alpha - \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} u_{02}^\alpha \right) e^{\sqrt{b\lambda_1}t} \\ u_2^\alpha(t) &= \frac{1}{2} \left(u_{02}^\alpha + \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} u_{01}^\alpha \right) e^{-\sqrt{b\lambda_1}t} + \frac{1}{2} \left(u_{02}^\alpha - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} u_{01}^\alpha \right) e^{\sqrt{b\lambda_1}t}, \end{cases} \quad (2.2.15)$$

Além disso, o diâmetro da solução fuzzy é dado por

$$\begin{aligned} d(\alpha, t) = u_2^\alpha - u_1^\alpha &= \frac{1}{2} \left[u_{01}^\alpha \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} - 1 \right) + u_{02}^\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} \right) \right] e^{-\sqrt{\lambda_1 b}t} \\ &+ \frac{1}{2} \left[u_{02}^\alpha \left(1 + \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} \right) - u_{01}^\alpha \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} \right) \right] e^{\sqrt{\lambda_1 b}t} \end{aligned}$$

Observação 2.2.6. a) Se $S \cong 0$, isto é, se não há interferência do fator renda na dinâmica populacional, temos que b aproxima-se de λ_1 e a solução fuzzy do exemplo anterior se reduz à:

$$\begin{aligned} u_1^\alpha &= \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{u_{01}^\alpha - u_{02}^\alpha}{2} e^{\lambda_1 t} \\ u_2^\alpha &= \frac{u_{01}^\alpha + u_{02}^\alpha}{2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha}{2} e^{\lambda_1 t} \end{aligned}$$

Neste caso, a solução para (2.2.12) é igual a solução do exemplo (2.2.4) para $a < 0$.

b) Se a condição inicial U_0 for determinística, isto é,

$$u_0 = u_{01}^\alpha = u_{02}^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

então (2.2.15) será dada por:

$$\begin{cases} u_1^\alpha(t) &= \frac{u_0}{2} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}}\right) e^{-\sqrt{\lambda_1 b}t} - \left(\sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} - 1\right) e^{\sqrt{\lambda_1 b}t} \right] \\ u_2^\alpha(t) &= \frac{u_0}{2} \left[\left(1 + \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}}\right) e^{-\sqrt{\lambda_1 b}t} - \left(1 - \sqrt{\frac{b}{\lambda_1}}\right) e^{\sqrt{\lambda_1 b}t} \right]. \end{cases}$$

Aqui se $S = 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) = 0 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$ e se $S > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \notin \mathcal{F}_C(\mathbb{R})$, pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\alpha, t) = \frac{u_0}{2} \left(\sqrt{\frac{b}{\lambda_1}} - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} \right) e^{\sqrt{\lambda_1 b}t} = +\infty, \forall \alpha.$$

Logo, se a condição inicial for determinística para $\alpha \in [0, 1]$, a única solução viável é dada por

$$u_1^\alpha = u_2^\alpha = u_0 e^{-\lambda_1 t}, \forall \alpha \in [0, 1],$$

ou seja, a solução fuzzy deverá ser a determinística e dada por $u(t) = u_0 e^{-\lambda_1 t}$, a qual é idêntica à do modelo determinístico (2.2.11).

c) Agora, se desejarmos modelar o mesmo fenômeno, utilizando desde o início, uma equação determinística, obtemos:

$$u^*(t) = u_0^* e^{-\lambda t},$$

como solução do problema

$$\begin{cases} (u^*)'(t) &= -\lambda u^*(t) \\ u^*(0) &= u_0 \end{cases}$$

Aqui, λ é um parâmetro fixo satisfazendo $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + \lambda_2$, tal que

$$u_1^\alpha(t) \leq u^*(t) \leq u_2^\alpha(t), \quad (2.2.16)$$

pois $u_{01}^\alpha \leq u_0^* \leq u_{02}^\alpha$, onde u_{01}^α e u_{02}^α são os α -níveis da solução de (2.2.12).

A desigualdade (2.2.16) nos diz que a solução do problema determinístico tem o maior grau de pertinência ao conjunto de soluções do modelo fuzzy.

Notemos ainda que o modelo (2.2.12) terá algum significado se a solução (2.2.15) satisfizer a condição $u_1^\alpha(t) \geq 0$, ou ainda,

$$t_\alpha \leq \frac{1}{2\sqrt{\lambda_1 b}} \ln \left(\frac{u_{01}^\alpha + \sqrt{b\lambda_1} u_{02}^\alpha}{\sqrt{b/\lambda_1} u_{02}^\alpha - u_{01}^\alpha} \right),$$

onde $b = \lambda_1 + \lambda_2 S_0(1 - \alpha^{1/k})$.

Logo, os extremos para t , são:

$$\begin{aligned} t_0 &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} t_\alpha = \frac{1}{2\lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)S_0} \ln \left(\frac{u_{01}^0 + \sqrt{1 + (\lambda_2/\lambda_1)S_0} u_{02}^0}{\sqrt{1 + (\lambda_2/\lambda_1)S_0} u_{02}^0 - u_{01}^0} \right), \\ t_1 &\leq \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} t_\alpha = \frac{1}{2\lambda_1} \ln \left(\frac{u_{01}^1 + u_{02}^1}{u_{02}^1 - u_{01}^1} \right) \end{aligned}$$

Através destes exemplos podemos ver que quando consideramos a fuzzyidade através do conceito da diferenciabilidade de Hukuhara temos que as soluções fuzzy têm α -níveis crescente com o tempo t , e conceitos tais como ponto de equilíbrio, estabilidade ou equilíbrio assintótico não são compatíveis com as equações diferenciais clássicas. Veja mais detalhes nos artigos de Diamond [6], Hüllermeier [14] e Seikkala [37].

2.3 Equações Diferenciais Fuzzy via Inclusões Diferenciais Fuzzy

No Capítulo 1 (seção 1.3) vimos que uma primeira generalização do problema do valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são as inclusões diferenciais do tipo

$$\begin{cases} x'(t) &\in F(x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n} - \{\emptyset\}$ é uma multifunção e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ou ainda, uma inclusão diferencial onde a condição inicial é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x'(t) &\in F(x(t)) \\ x_0 &\in X_0. \end{cases} \quad (2.3.17)$$

Agora, para (2.3.17), temos que a função $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, com a condição inicial $x_0 \in X_0$ é uma solução de (2.3.17) no intervalo $[0, T]$, se ela é absolutamente contínua e satisfaz (2.3.17), para quase todo $t \in [0, T]$. O conjunto atingível para cada $t \in [0, T]$, associado ao problema (2.3.17), é o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathcal{A}_t(X_0) = \{x(t, x_0) / x(., x_0) \text{ é solução de (2.3.17) com } x_0 \in X_0\}.$$

Uma generalização do problema (2.3.17) sugerida por Hüllermeier [14] para modelar sistemas dinâmicos fuzzy é obtida substituindo o conjunto $F(x)$ em (2.3.17) por um subconjunto fuzzy, isto é, considerando o problema do valor inicial fuzzy dado por:

$$\begin{cases} x'(t) &\in \tilde{F}(x(t)) \\ x_0 &\in \tilde{X}_0, \end{cases} \quad (2.3.18)$$

onde $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$ é uma multifunção fuzzy e $\tilde{X}_0 \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$.

A solução (2.3.18) é caracterizada pelas soluções da família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & \in [\tilde{F}(x(t))]^\alpha \\ x_0 & \in [\tilde{X}_0]^\alpha, \end{cases} \quad (2.3.19)$$

onde $[\tilde{F}(x(t))]^\alpha$ e $[\tilde{X}_0]^\alpha$ para $\alpha \in [0, 1]$ são os α -níveis dos subconjuntos fuzzy $\tilde{F}(x(t))$ e $\tilde{X}_0$, respectivamente.

Para simplificarmos a notação, denotaremos simplesmente por X_0 o conjunto fuzzy da condição inicial.

Para cada $\alpha \in [0, 1]$, definimos $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, como uma α -solução de (2.3.18) se ela é uma solução de (2.3.19). Denotaremos por:

$\mathcal{A}_t^\alpha := \mathcal{A}_t([X_0]^\alpha)$, $0 \leq t \leq T$, $\alpha \in [0, 1]$, o conjunto atingível das α -soluções, isto é,

$$\mathcal{A}_t^\alpha = \mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \{x(t, x_0) / x(\cdot, x_0) \text{ é solução de (2.3.19) com } x_0 \in [X_0]^\alpha\}.$$

O conjunto de todas as α -soluções para (2.3.19) será denotado por $\sum_\alpha(t, X_0)$.

A idéia apresentada por Hüllermeier foi formalizada por Diamond [6], onde ele dá a seguinte interpretação: o conjunto $\sum_\alpha(T, X_0)$ de todas as α -soluções de (2.3.19) será o α -nível do conjunto fuzzy $\sum(T, X_0)$ assim como, os conjuntos atingíveis $\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha)$, $0 \leq t \leq T$, são os níveis de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}(t, X_0)$ sobre $\mathbb{R}^n$. Diamond ainda comenta que $\sum(T, X_0)$ é a solução de (2.3.18). Desta forma as inclusões diferenciais fuzzy capturarão tanto as incertezas como todas as propriedades das inclusões diferenciais.

Todas as considerações feitas por Diamond podem ser resumidas no Teorema 2.3.1 dado a seguir.

Aqui, $\mathcal{K}_C^n$ é o conjunto de compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.3.1. [6] *Seja $X_0 \in \mathcal{K}_C^n$ e seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ contendo $\{0\} \times \text{supp}(X_0)$. Suponhamos que $F : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_n^c$ é semicontínua superiormente e $F(t, x : \alpha) = [F(t, x)]^\alpha$ são conjuntos compactos e convexos de $\mathbb{R}^n$ para todo $(t, x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} \times [0, 1]$. Suponhamos que a condição de limitação com constantes*

b, M, T , seja verdadeira para todo $x_0 \in \text{supp}X_0$. Consideremos a inclusão diferencial

$$\begin{cases} x'(t) & \in [F(t, x)]^0 \\ x(0) & \in \text{supp}(X_0). \end{cases}$$

Então os conjuntos atingíveis $\mathcal{A}_t^\alpha, \alpha \in [0, 1]$, da família de inclusões,

$$\begin{cases} x'(t) & \in [F(x(t))]^\alpha \\ x_\alpha(0) & \in [X_0]^\alpha, \alpha \in [0, 1], \end{cases} \quad (2.3.20)$$

são os α -níveis de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(X_0)$ no conjunto fuzzy normal semi-contínuo superiormente com suporte compacto. Os conjuntos solução $\sum_\alpha(T, X_0)$ de (2.3.20) são os níveis de um conjunto fuzzy $\sum(T, X_0)$ definido sobre $\mathcal{Z}_T(\mathbb{R}^n) = \{x(\cdot) \in C([0, T] : \mathbb{R}^n) : x'(\cdot) \in L^\infty([0, T] : \mathbb{R}^n)\}$.

Prova: Veja Diamond [7]

A seguir consideramos um exemplo onde se considera a equação diferencial fuzzy utilizando o conceito da derivada de Hukuhara e via interpretação de Hüllermeier.

Exemplo 2.3.2. Considere o problema do valor inicial fuzzy,

$$\begin{cases} x'(t) & = ax(t) \\ x(0) & \in X_0, \end{cases} \quad (2.3.21)$$

onde $a < 0$ e X_0 é um número fuzzy cujos níveis para $\alpha \in [0, 1]$ são dados por

$$[X_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha].$$

Pelo Exemplo 2.2.4 temos que a solução fuzzy no contexto da diferencial de Hukuhara é dado por:

$$\begin{cases} x_1^\alpha(t) & = \left(\frac{x_{01}^\alpha - x_{02}^\alpha}{2}\right) e^{at} + \left(\frac{x_{01}^\alpha - x_{02}^\alpha}{2}\right) e^{-at} \\ x_2^\alpha(t) & = \left(\frac{x_{01}^\alpha + x_{02}^\alpha}{2}\right) e^{at} + \left(\frac{x_{02}^\alpha - x_{01}^\alpha}{2}\right) e^{-at}. \end{cases}$$

Assim sendo, se X_0 é um número triangular fuzzy simétrico com suporte $[-1, 1]$, ou seja, $[X_0]^\alpha = [\alpha - 1, 1 - \alpha]$, então para $a = -1$ e $\alpha = 0$, temos que a solução de (2.3.21) é:

$$[X(t)] = [-e^t, e^t],$$

cujo diâmetro é $\text{diam}(X(t)) = 2e^t$ que vai para o infinito quando $t \rightarrow \infty$.

No contexto de Hüllermeier podemos reescrever (2.3.21) como a família de inclusões

$$\begin{cases} x'(t) &= ax(t) \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \quad (2.3.22)$$

pois $[a(x(t))]^\alpha = a[x(t)]^\alpha = a(x(t))$, já que $x(t) \in \mathbb{R}$.

Assim os α -níveis das soluções de (2.3.22) são dados por

$$[X(t)]^\alpha = [(\alpha - 1)e^{at}, (1 - \alpha)e^{at}],$$

tal que para $a = -1$ e $\alpha = 0$, temos

$$X(t) = [-e^{-t}, e^{-t}],$$

cujo diâmetro é $2e^{-t}$ que tenderá a zero para $t \rightarrow \infty$.

Portanto, enquanto no contexto da derivada de Hukuhara temos que as soluções para (2.1.1) são processos fuzzy de diâmetros crescentes, nesta nova interpretação a mesma converge como no modelo malthusiano clássico.

2.4 Equação Diferencial Fuzzy via Princípio de Extensão de Zadeh

Nesta seção apresentamos a técnica proposta por Oberguggenberger e Pittschmann [28] para o estudo de (2.1.1) com parâmetros fuzzy, já que utilizaremos técnica similar para o estudo de (2.1.1) quando a condição inicial e ou coeficiente são dados por subconjuntos fuzzy.

Considere o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), k) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.4.23)$$

com $x_0 \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{R}^p$. Suponhamos que para cada $k \in \mathbb{R}^p$, f seja suave e globalmente Lipschitz com respeito à variável x . Então, existe uma única solução para (2.4.23) e assim o seguinte operador solução está bem definido

$$\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow C^1(\mathbb{R})^m,$$

onde para cada par $(x_0, k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, associamos a solução $x(t) = \varphi(x_0, k)$.

A idéia aqui é fazer com que os parâmetros de (2.4.23) apareçam somente na condição inicial. Para tal consideremos um sistema aumentado de dimensão $m + p = n$, adicionando as equações complementares

$$\begin{cases} x'_{m+1} &= 0 \\ \vdots & \\ x'_{m+p} &= 0 \end{cases}$$

com a condição inicial estendida $\tilde{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m, k_1, \dots, k_p) = (x_0, k)$. Temos o sistema aumentado associado:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(t) &= f(\tilde{x}(t)) \\ \tilde{x}(0) &= (x_0, k). \end{cases} \quad (2.4.24)$$

Por simplicidade continuamos denotando $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m+p}$ por x .

Para o problema (2.4.24), temos que os operadores equação, restrição e solução são definidos respectivamente por:

- i. $E : C^1(\mathbb{R})^n \longrightarrow C(\mathbb{R})^n$, tal que para cada $x(t) \in C^1(\mathbb{R})^n$, $E(x(t)) = x'(t) - f(x(t))$;
- ii. $R : C^1(\mathbb{R})^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que para $x(t) \in C^1(\mathbb{R})^n$, $R(x(t)) = x(0) = x_0$;
- iii. $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow C^1(\mathbb{R})^n$, para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(t) = \varphi(x_0)$,

Agora se a condição inicial é fuzzy, temos o seguinte problema associado a (2.4.24)

$$\begin{cases} x' &= f(x) \\ x(0) &\in X_0, \end{cases} \quad (2.4.25)$$

onde X_0 é um subconjunto fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Para (2.4.25), os operadores equação, restrição e solução são obtidos aplicando-se o princípio de extensão de Zadeh nos operadores definidos para (2.4.24), ou seja,

- i. $\widehat{E} : \mathcal{F}(C^1(\mathbb{R}))^n \longrightarrow \mathcal{F}(C(\mathbb{R})^n);$
- ii. $\widehat{R} : \mathcal{F}(C^1(\mathbb{R})^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n);$
- iii. $\widehat{\varphi} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(C^1(\mathbb{R})^n).$

Considerando estes operadores fuzzy, Oberguggenberger e Pittschmann dão as seguintes definições de solução fuzzy para (2.4.25).

Definição 2.4.1. *Um elemento $X \in \mathcal{F}(C^1(\mathbb{R})^n)$ é denominado uma solução fuzzy com valor inicial $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, se*

$$\widehat{E}X = 0 \text{ em } \mathcal{F}(C(\mathbb{R}^n)), \widehat{R}X = X_0 \text{ em } \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 2.4.2. *Um elemento $X \in \mathcal{F}(C^1(\mathbb{R})^n)$ é denominado uma solução fuzzy por partes com valor inicial $X_0 \in (\mathcal{F}(\mathbb{R}))^n$, se*

$$\widehat{E}X = 0 \text{ em } \mathcal{F}(C(\mathbb{R})^n), \widehat{R}X = X_0 \text{ em } (\mathcal{F}(\mathbb{R}))^n.$$

A diferença entre as Definições 2.4.1 e 2.4.2 é a seguinte. Na Definição 2.4.1 temos que $RX = X_0 = (X_{01}, \dots, X_{0n})$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\sup\{\mu_X(x)/x_1(0) = r_1, \dots, x_n(0) = r_n\} = \min\{\mu_{x_{01}}(r_1), \dots, \mu_{x_{0n}}(r_n)\}$$

e na Definição 2.4.2, temos $R_jX = X_j(0)$ como subconjuntos fuzzy em $\mathbb{R}$, ou seja,

$$\sup\{\mu_X(y)/x_j(0) = r_j\} = \mu_{x_{0j}}(r_j),$$

para cada $j = 1, \dots, n$, ou ainda, podemos estudar o problema (2.4.25) supondo que a condição inicial X_0 esteja em $(\mathcal{F}(\mathbb{R}))^n$ ou em $\mathcal{F}((\mathbb{R})^n)$.

Segundo Oberguggenberger-Pittschmann um candidato natural para a solução fuzzy X é dado pelo conjunto fuzzy das funções $\widehat{\varphi}(X_0)$, obtido quando se aplica a extensão de Zadeh ao operador solução φ em relação ao subconjunto fuzzy da condição inicial X_0 . Neste caso, o grau de pertinência de qualquer função φ de classe C^1 ao longo de $\widehat{\varphi}(X_0)$ é igual ao grau de pertinência do subconjunto fuzzy X_0 .

No exemplo a seguir não utilizaremos toda a sofisticação da técnica proposta por Oberguggenberger e Pittshmann. Utilizaremos simplesmente o fato de que a solução para o problema do valor inicial fuzzy com condição inicial fuzzy é a extensão de Zadeh, em relação a condição inicial da solução determinística, e esta idéia será formalizada nas seções 2.5 e 2.6.

Exemplo 2.4.3. *Dado o PVI determinístico*

$$\begin{cases} x' &= -x \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.4.26)$$

temos que a solução do mesmo é dada por

$$x(t) = x_0 e^{-t}.$$

Supondo agora que a condição inicial seja um número triangular fuzzy, com suporte $[-1, 1]$, temos pelo princípio de extensão de Zadeh que a solução do PVIF é

$$X(t) = [(\alpha - 1)e^{-t}, (1 - \alpha)e^{-t}].$$

Assim a interpretação do PVIF proposta por Oberguggenberger e Pittschmann também nos levam a soluções cujos diâmetros tendem a zero.

A seguir estudaremos o PVIF (2.1.1) com a condição inicial fuzzy e/ou coeficientes dados por subconjuntos fuzzy de acordo com a interpretação de Hüllermeier (via inclusões diferenciais fuzzy) e a outra através da utilização do princípio de extensão de Zadeh na solução determinística proposta por nós, sem ter

de aplicar o princípio de extensão de Zadeh nos vários operadores envolvidos em uma equação diferencial ordinária como sugerido por Oberguggenberger e Pittschmann.

2.5 Equações diferenciais com condição inicial fuzzy.

Consideremos o problema do valor inicial determinístico

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.5.27)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Supondo que a condição inicial x_0 é incerta e modelada por um subconjunto fuzzy, para a equação diferencial dada em (2.5.27) podemos associar o Problema do Valor Inicial Fuzzy(PVIF):

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(0) \in X_0, \end{cases} \quad (2.5.28)$$

onde $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Note que (2.5.28) é uma representação simbólica, cuja interpretação pode ser dada de maneiras distintas. Aqui estudaremos (2.5.28) sem a utilização do conceito de derivada fuzzy no sentido de Hukuhara. Faremos a abordagem de Hüllermeier e da extensão de Zadeh propostas nas seções 2.3 e 2.4 para (2.5.28). Além disso, mostraremos que, sob certas condições, as duas abordagens são equivalentes no sentido de terem as mesmas soluções.

Para cada $t \in [0, T]$, fixado, podemos definir o operador:

$$\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$, onde $\varphi(t, x_0)$ é a solução única de (2.5.27) e, pelo teorema da continuidade com respeito a condição inicial [33, p.145] φ é contínua em relação t e à condição inicial x_0 .

Aplicando o princípio de extensão de Zadeh em φ_t , obtemos

$$\widehat{\varphi}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n),$$

o que pelos Teoremas 1.4.16 e 1.4.20, é contínua, está bem definida e

$$[\widehat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \varphi_t([X_0]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Agora, de acordo com a interpretação de Hüllermeier, podemos reescrever (2.5.28) como a seguinte família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \quad (2.5.29)$$

pois $[\widehat{f}(x(t))]^\alpha = f([x(t)]^\alpha) = f(x(t))$, desde que $x(t) \in \mathbb{R}^n$.

A seguir enunciaremos o resultado que relaciona a solução de Hüllermeier e a obtida através do princípio de extensão proposta por nós.

Teorema 2.5.1. *Suponhamos que f seja contínua e que para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ exista uma única solução para (2.5.27) e que $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Então, temos a seguinte igualdade*

$$\widehat{\varphi}_t(X_0) = \mathcal{A}_t(X_0),$$

onde $\widehat{\varphi}_t$ é a extensão de Zadeh de φ_t , para todo $0 < t \leq T$ e $\mathcal{A}_t(X_0)$ são os conjuntos atingíveis de (2.5.28). Em outras palavras, os conjuntos atingíveis do problema (2.5.28) podem ser obtidos através da imagem da condição inicial fuzzy por meio da extensão de Zadeh da solução determinística.

Prova:

Para provarmos o Teorema 2.5.1 devemos mostrar que

$$[\widehat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \mathcal{A}_t([X_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Por hipótese temos que f é contínua e que para cada $x_0 \in \mathbb{R}^m$ existe

uma única solução para (2.5.27)) no intervalo $[0, T]$. Então para cada $t \in [0, T]$, temos que $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por $\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$, é contínuo e está bem definido (conforme Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias[31, 33]). Assim sendo, dos Teoremas 1.4.16 e 1.4.20 $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ está bem definida e

$$[\widehat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \varphi_t([X_0]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Portanto, dado $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$[\widehat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \varphi_t([X_0]^\alpha) = \{\varphi(t, x_0)/x_0 \in [X_0]^\alpha\}. \quad (2.5.30)$$

Por outro lado, o conjunto atingível do problema (2.5.29) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \bigcup_{x_0 \in [X_0]^\alpha} \mathcal{A}_t(x_0) = \{\varphi(t, x_0)/x_0 \in [X_0]^\alpha\}. \quad (2.5.31)$$

De (2.5.30) e (2.5.31) segue o resultado. ■

Notemos que via interpretação de Hüllermeier para o PVIF, ou seja, quando o PVIF é reescrito como uma família de inclusões diferenciais, as trajetórias são obtidas via técnica de seleções para cada $x_0 \in [X_0]^\alpha$ e para cada t , o ponto onde chega a trajetória tem grau de pertinência α . O conjunto de pontos obtidos desta forma nos dão o conjunto $\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha)$.

Agora, pelo princípio de extensão de Zadeh, temos que os conjuntos atingíveis são obtidos através de $\widehat{\varphi}_t([X_0]^\alpha)$ e as pertinências de cada trajetória é a mesma de cada ponto de $[X_0]^\alpha$, isto é, se $\varphi_t(x_0) \in \widehat{\varphi}_t([X_0]^\alpha)$, então $\varphi_t(x_0)$ terá a mesma pertinência do elemento x_0 ao conjunto $[X_0]^\alpha$.

Exemplo 2.5.2. *Consideremos o modelo Malthusiano fuzzy*

$$\begin{cases} x'(t) = -ax(t) \\ x(0) \in X_0, \end{cases} \quad (2.5.32)$$

onde $a \in \mathbb{R}_+$. Suponhamos que a condição inicial em (2.5.32) é dada pelo subcon-

junto fuzzy $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, cuja função de pertinência é

$$X_0(x_0) = \begin{cases} 1 - x_0 & , \quad x_0 \in [0, 1] \\ 0 & , \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Então, de acordo com a interpretação de Hüllermeier, o problema (2.5.32) pode ser reescrito como a seguinte família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & = & -ax(t) \\ x_0 & \in & [0, 1 - \alpha], \end{cases} \quad (2.5.33)$$

com $\alpha \in [0, 1]$.

Para cada $\alpha \in [0, 1]$ temos que o conjunto atingível de (2.5.33) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = [0, (1 - \alpha)e^{-at}],$$

para cada $t > 0$.

Por outro lado, a solução determinística de (2.5.32), isto é, quando $x(0) = x_0$, é

$$\varphi_t(x_0) = x_0 e^{-at}$$

Desde que $\varphi_t(x_0)$ é contínuo segue do Teorema 1.4.16 que os α -níveis de $\widehat{\varphi}_t(X_0)$ são dados por

$$[\widehat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \varphi_t([X_0]^\alpha) = [0, (1 - \alpha)e^{-at}],$$

para cada $t > 0$ e $\alpha \in [0, 1]$, o que coincide com $\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha)$ obtido acima.

2.6 Equação diferencial com parâmetros fuzzy

Nesta seção discutiremos as equações diferenciais fuzzy geradas por uma equação diferencial determinística com incerteza nos coeficientes da equação e na condição inicial.

Consideremos o problema do valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), k) \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.6.34)$$

onde $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $k \in \mathbb{R}^k$ é um vetor de coeficientes.

Agora, se a condição inicial e os coeficientes são fuzzy, o problema (2.6.34) pode ser tratado de duas maneiras diferentes. A primeira abordagem considera a fuzzificação direta do campo f e obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} x'(t) &\in \widehat{f}(x(t), K) \\ x_0 &\in X_0, \end{cases} \quad (2.6.35)$$

onde $\widehat{f} : \mathbb{R}^m \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é a extensão de Zadeh da função f em k .

Neste caso, de acordo com a interpretação de Hüllermeier, (2.6.35) pode ser reescrito como a família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) &\in [\widehat{f}(x(t), K)]^\alpha = f(x(t), [K]^\alpha) \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \quad (2.6.36)$$

pois como f é contínua, segue do Teorema 1.4.16 que, $[\widehat{f}(x(t), K)]^\alpha = f([x(t)]^\alpha, [K]^\alpha) = f(x(t), [K]^\alpha)$, já que, $x(t)$ é um número real (conjunto crisp).

A segunda abordagem consiste em fazer a mudança $y(t) = (x(t), k)$ (veja seção 2.4) no problema (2.6.34) e considerar o problema determinístico

$$\begin{cases} y'(t) &= F(y(t)) \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \quad (2.6.37)$$

onde $y'(t) = (x'(t), 0)$, $y(0) = (x(0), k(0)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ e $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ tal que $F(y) = (f(x, k), 0)$.

Neste caso, considerar a condição inicial e o parâmetro fuzzy significa

supor que y_0 seja dado por um subconjunto fuzzy, ou seja, temos o seguinte problema

$$\begin{cases} y'(t) &= F(y(t)) \\ y(0) &\in Y_0, \end{cases} \quad (2.6.38)$$

onde $Y_0 = (X_0, K)$ é fuzzy e (2.6.38) é do mesmo tipo dado em (2.5.28).

Agora, de acordo com a interpretação de Hüllermeier, (2.6.38) é dada pela família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} y'(t) &= F(y(t)) \\ y(0) &\in [Y_0]^\alpha = ([X_0]^\alpha \times [K_0]^\alpha). \end{cases} \quad (2.6.39)$$

A seguir provaremos que quando consideramos a fuzicidade dos coeficientes e/ou condição inicial, os conjuntos atingíveis obtidos via fuzificação direta do campo conforme o problema (2.6.35) e quando transformamos em um problema onde somente a condição inicial é fuzzy conforme (2.6.38) são os mesmos.

Proposição 2.6.1. *Para cada $\alpha \in [0, 1]$, os conjuntos atingíveis de (2.6.36) e (2.6.39) são os mesmos.*

De fato,

Notemos que (2.6.39) é uma família de inclusões clássicas do tipo estudado por Filippov e Wazewski [10, 41]. Em outras palavras, para cada $\alpha \in [0, 1]$,

$$f(x(t), [K]^\alpha) = \{f(x, k) : k \in [K]^\alpha\}.$$

Então os conjuntos atingíveis associados à (2.6.36) são dados por

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \{x(t, x_0, k_0) : x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } k_0 \in [K]^\alpha\}, \quad (2.6.40)$$

para $t \in [0, T]$.

Por outro lado, o conjunto atingível associado à (2.6.39) é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([Y_0]^\alpha) &= \{y(t, y_0) : y_0 \in [Y_0]^\alpha = ([X_0]^\alpha \times [Y_0]^\alpha)\} \\ &= \{(x(t, x_0, k_0), k_0) : x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } k_0 \in [K]^\alpha\} \end{aligned} \quad (2.6.41)$$

Portanto, os conjuntos atingíveis (2.6.40) e (2.6.41) coincidem, pois para k_0 constante a projeção de $\mathcal{A}_t([Y_0]^\alpha)$ coincide com o de $\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha)$ ■.

Quando a condição inicial e os parâmetros são fuzzy, devido à Proposição 2.6.1, podemos estudar a solução do problema (2.6.34) fuzzificado através do problema reduzido (2.6.37) também fuzzificado. Em outras palavras, para estudar o problema (2.6.34) considerando fuzzicidade do coeficiente e da condição inicial, inicialmente faz-se uma mudança de variáveis em (2.6.34) e posteriormente fuzzificamos o problema modificado para colocar na forma (2.6.38) com a intenção de reduzi-lo à análise do problema do valor inicial estabelecido na seção 2.5.

Agora, supondo que para cada x_0 e k_0 tenhamos uma solução $y(t, y_0)$ para (2.6.37), aplicando o princípio de extensão de Zadeh em $\varphi_t(y_0) = y(t, y_0)$, obtemos $\hat{\varphi}_t(Y_0)$, o qual é contínuo em Y_0 e que para $\alpha \in [0, 1]$ temos ([11, 27])

$$[\hat{\varphi}_t(Y_0)]^\alpha = [\hat{\varphi}_t(X_0, K_0)]^\alpha = \varphi_t([X_0]^\alpha, [K_0]^\alpha)$$

Então temos o seguinte resultado.

Teorema 2.6.2. *Suponhamos que f seja contínua e que para k_0 fixado satisfaça alguma condição que garanta a unicidade da solução em (2.6.34) e seja $Y_0 = (X_0, K_0) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$. Então, existem os conjuntos $\mathcal{A}_t(Y_0)$, $\hat{\varphi}_t(Y_0)$ do problema do valor inicial fuzzy (2.6.38) e,*

$$\hat{\varphi}_t(Y_0) = \mathcal{A}_t(Y_0)$$

para cada $0 < t \leq T$, isto é,

$$[\hat{\varphi}_t(Y_0)]^\alpha = \mathcal{A}_t([Y_0]^\alpha), \alpha \in [0, 1].$$

Prova:

Como f é contínua e, para k_0 fixado, satisfaz alguma condição para a unicidade de solução em (2.6.34), então para cada $y_0 = (x_0, k_0)$, existe uma única solução $y(t, y_0)$ para (2.6.37) no intervalo $[0, T]$. Então $\varphi_t : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dado por $\varphi_t(y_0) = y(t, y_0)$ está bem definido.

Portanto, existe $\widehat{\varphi}_t(Y_0)$, para $Y_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$.

Além disso, como F é contínua em (2.6.38), pois f é contínua em (2.6.34), temos que existe $\mathcal{A}_t([Y_0]^\alpha)$.

Agora, como $\varphi_t(y_0)$ é contínua, temos pelo Teorema 1.4.20 que $\widehat{\varphi}_t$ é contínua, está bem definida e tais que para cada $\alpha \in [0, 1]$ [11, 27]

$$\begin{aligned} [\widehat{\varphi}_t(Y_0)]^\alpha &= \varphi_t([Y_0]^\alpha) = \{y(t, y_0)/y_0 \in [Y_0]^\alpha\} \\ &= \{(x(t, x_0, k_0), k_0)/x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ and } k_0 \in [K]^\alpha\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o conjunto atingível do problema (2.6.39) é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([Y_0]^\alpha) &= \bigcup_{y_0 \in [Y_0]^\alpha} \mathcal{A}_t(y_0) = \{y(t, y_0)/y_0 \in [Y_0]^\alpha\} \\ &= \{(x(t, x_0, k_0), k_0)/x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } k_0 \in [K]^\alpha\} \end{aligned}$$

Portanto, o resultado está verificado. ■

Exemplo 2.6.3. [5] *Consideremos o modelo de esperança de vida dado no exemplo 2.2.5*

$$\begin{cases} x'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 k)x(t) \\ x(0) = x_0, x_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.6.42)$$

onde $\lambda_2 k$ é o coeficiente que representa a influência da pobreza no crescimento da razão de mortalidade do grupo

Suponhamos que o conjunto fuzzy da pobreza seja definido por

$$k(r) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^j, & \text{se } 0 < r < r_0 \\ 0, & \text{se } r \geq r_0. \end{cases}$$

Considere a mudança $y = (x, k)$ in (2.6.42), então temos o seguinte problema

$$\begin{cases} y'(t) = F(y) \\ y(0) = y_0, y_0 > 0, y_0 \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (2.6.43)$$

onde $F(y) = (f(x, k), 0)$, cuja solução é dada por $y(t) = (x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 k_0)t}, k_0)$.

Supondo que a condição inicial em (2.6.43) é fuzzy devido à fuzicidade do parâmetro k_0 , então a solução de Hüllermeier para (2.6.43) é dada pela solução de,

$$\begin{cases} y'(t) = F(y(t)) \\ y(0) \in [0, r_0 \sqrt{1 - \alpha^j}], \end{cases} \quad (2.6.44)$$

para $\alpha \in [0, 1]$.

O conjunto atingível de (2.6.44) é

$$\mathcal{A}_t([Y_0]^\alpha) = \{(x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 k_0)t}, k_0), k_0 \in [0, r_0 \sqrt{1 - \alpha^j}]\}$$

para cada $t > 0$.

Por outro lado, a solução determinística de (2.6.42) é

$$\varphi_t(y_0) = (x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 k_0)t}, k_0)$$

que é contínua em relação à (x_0, k_0) conforme Teorema da continuidade da solução em relação à condição inicial (veja [31, 38], então pelo Teorema 1.4.16, temos

$$\begin{aligned} [\widehat{\varphi}_t(Y_0)]^\alpha &= \varphi_t([Y_0]^\alpha) = \varphi_t(x_0, [k_0]^\alpha) \\ &= \{(x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 k_0)t}, k_0), k_0 \in [0, r_0 \sqrt{1 - \alpha^j}]\} \end{aligned}$$

para cada $t > 0$.

Portanto os conjuntos atingíveis via Hüllermeier e via Princípio de Extensão coincidem.

Notemos que a escolha de um método ou de outro em um problema prático depende do tipo do problema analisado. Se considerarmos o campo estudado como sendo fuzzy ou se nos atermos apenas na subjetividade dos parâmetros, então o processo de solução pode ser escolhido apropriadamente.

- O método de Hullermeier, que obtém uma família de inclusões diferenciais é relativamente complicado e deve ser utilizado somente para o estudo de equações diferenciais com os campos fuzzy.

- O processo que consiste em estender a solução clássica do modelo determinístico através do princípio de extensão de Zadeh deve ser adotado preferencialmente quando somente os coeficientes e/ou condição inicial são fuzzy. Este método, comparado com a de Hüllermeier é muito mais simples e ainda permite avaliar o grau de pertinência de cada solução (veja [28]).

Capítulo 3

Estabilidade das Equações Diferenciais Fuzzy

3.1 Introdução

A modelagem matemática de fenômenos reais teve um avanço significativo no início do século XX, quando os sistemas dinâmicos começaram a ser analisados do ponto de vista qualitativo. Sabe-se que quando se propõe a modelar um fenômeno da realidade, quanto mais informações são desejadas mais complexo será o modelo e cada vez menos se tem a esperança de obter soluções analíticas. Assim, quanto mais realístico o modelo menos chance se tem de “resolvê-lo”. Na procura de um equilíbrio entre modelagem e resolução, o estudo de sistemas dinâmicos teve um desenvolvimento marcante na primeira metade do século passado. Resultados como os Teoremas de estabilidade de Lyapunov e de linearização de Lyapunov-Poincaré, obtidos como generalizações do conceito físico de energia e demonstrado com rigor por meio de métodos topológicos, foram os pilares que transformaram os sistemas dinâmicos autônomos (bidimensionais) em uma das principais ferramentas de modelagem matemática.

A modelagem matemática, que até então estava a serviço da Física, quase que exclusivamente, passou a ser o instrumento essencial para o estudo de processos ecológicos (modelo de Lotka-Volterra) e epidemiológicos (Kermack-Mckendric).

Os modelos introduzidos no início do século XX, são considerados

paradigmas dos modelos atuais que evoluíram juntamente com a evolução do estudo de tais sistemas dinâmicos.

Com o advento de computadores, a modelagem matemática ganhou mais força e os sistemas passaram a ter dimensões maiores. Não se busca mais soluções analíticas mas soluções aproximadas simuladas através de manipulação dos parâmetros. É importante salientar que o estudo qualitativo das soluções do modelo continua sendo imprescindível para se entender ou buscar soluções aproximadas coerentes com a realidade do fenômeno.

Mais tarde, com o surgimento e evolução de novas teorias matemáticas, como a inclusão diferencial e teoria de conjuntos fuzzy, os modelos passaram a contemplar também a subjetividade inerente aos fenômenos estudados. Os modelos matemáticos ficaram mais complexos e a busca de uma análise qualitativa mais adequada para tais modelos passou a ser imprescindível.

Seguindo os mesmos passos do estudo da estabilidade dos sistemas determinísticos autônomos

$$\begin{cases} x'(t) = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

com $f \in C(\mathbb{R}^n)$, procuramos dar uma primeira aproximação da estabilidade dos sistemas fuzzy autônomos

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x_0 \in X_0, \end{cases}$$

onde X_0 é um subconjunto fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Como destacamos no Capítulo 2, existem diferentes enfoques para tratar o sistema fuzzy. Mostramos que o conjunto atingível quando o sistema é considerado como um problema de inclusão diferencial coincide com as soluções estendidas, via extensão de Zadeh, do sistema determinístico. Este resultado nos incentivou a desenvolver o estudo qualitativo dos sistemas fuzzy autônomos usando também o princípio de extensão.

3.2 Preliminares

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados relativos a teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos determinísticos através da teoria de fluxos (veja [12, 13, 31, 33]).

Considere o sistema linear

$$x' = Ax, \quad (3.2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e A é uma matriz de coeficientes constantes. Neste caso, a estabilidade de um ponto de equilíbrio de (3.2.1) é determinado pelos autovalores da matriz A . Além disso, (3.2.1) tem uma única solução através de cada ponto x_0 no espaço de fase $\mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x_0) = e^{At}x_0, \forall t \in \mathbb{R}$, [31].

No entanto, sabemos que a maioria dos fenômenos são modelados por um sistema não linear do tipo

$$x' = f(x), \quad (3.2.2)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

Veremos que sob certas condições, a estabilidade de um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial não linear é determinada por meio da aproximação linear do seu campo vetorial em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto de equilíbrio(veja, [31, 33]). Mais precisamente, dado o sistema de equações diferenciais não lineares (3.2.2), veremos que o comportamento local de (3.2.2) na vizinhança de um equilíbrio hiperbólico $\bar{x}$ é qualitativamente determinado pelo comportamento de um sistema linear do tipo (3.2.1), onde $A = Df(\bar{x})$, a matriz jacobiana de f em $\bar{x}$ relativo ao campo de (3.2.2). Este resultado é o Teorema de linearização de Grobman-Hartman e em nosso trabalho utilizamos uma versão deste Teorema para fluxos.

Além destes conceitos e resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos via fluxos, daremos alguns conceitos envolvendo conjuntos invariantes que permitirão a caracterização dos equilíbrios fuzzy do tipo χ_X , onde X é algum subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2.1. *Sejam X espaço métrico completo e $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Uma família de aplicações $T_t : X \longrightarrow X, t \geq 0$, é um semigrupo, se:*

i.) $T_0 = I$, onde I é a identidade de X ;

ii.) $T_{t+s} = T_t \circ T_s, \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo 3.2.2. *Dado o sistema linear autônomo (3.2.1), temos que a trajetória por $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é dada por $x(t) = x_0 e^{At}$. Então, fixado $t \in \mathbb{R}_+$, a família de aplicações $\Phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por $\Phi_t(x_0) = e^{At}x_0, t \in \mathbb{R}_+$ satisfaz as propriedades da Definição 3.2.1, pois*

i. $\Phi_0 = I_{\mathbb{R}^n}$;

ii. $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}, \forall t, s \in \mathbb{R}$,

ou seja, $\Phi_t(x_0)$ é o fluxo da equação diferencial dada em (3.2.1).

Além disso, $\Phi_t(x_0) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, isto é, $\Phi_t(x_0)$ é contínua com derivadas de primeira ordem contínuas.

Exemplo 3.2.3. *([13, p.7], [33, p.142]) Seja $\varphi_t(x_0)$ a solução (única) de (3.2.2) para cada x_0 no instante t , definida sobre seu intervalo maximal de existência $I(x_0)$. Para cada $t \in I(x_0)$, o conjunto das aplicações $\varphi_t : U \longrightarrow U$ definidas por*

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

satisfaz as propriedades de semigrupo 3.2.1, e é denominado fluxo da equação diferencial (3.2.2).

Notemos que se o sistema não é autônomo a propriedade ii) da Definição 3.2.1 nem sempre é satisfeita. De fato, se considerarmos a equação

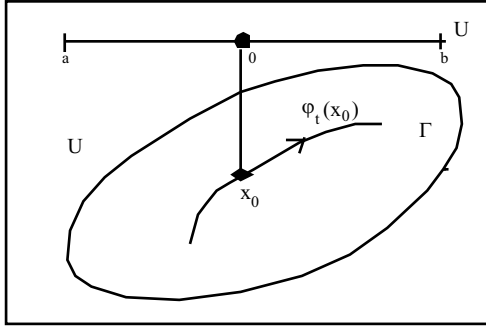
$$x'(t) = tx,$$

com a condição inicial $x(0) = x_0$, temos que $\varphi_t(x_0) = x_0 e^{t^2/2}$ é o fluxo definido pelo campo tx , de modo que:

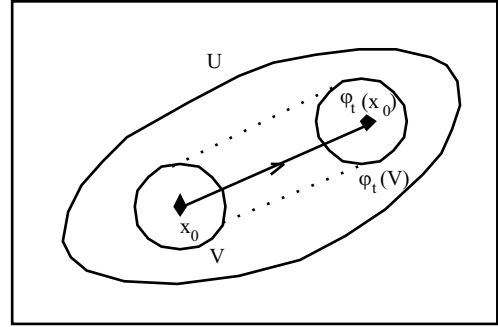
$$\varphi_{t+s}(x_0) = x_0 e^{(t+s)^2/2} \neq \varphi_t(\varphi_s(x_0)) = x_0 e^{t^2/2} e^{s^2/2}$$

A propriedade ii) da Definição 3.2.1 em termos de fluxo quer dizer que se $y = \varphi_s(x)$ é o estado que x assumirá depois do tempo s , então $z = \varphi_t(y)$ é o estado de x no tempo $s + t$, isto é, $z = \varphi_t(\varphi_s(x))$.

Observemos que para cada $x_0 \in V$ fixado, temos uma trajetória $\varphi_t(x_0)$. O fluxo é simplesmente a família das trajetórias obtidas para todo $x_0 \in V \subseteq U$, isto é, o fluxo $\varphi_t : V \longrightarrow U$ pode ser visto como o movimento de todas as partículas no conjunto V .



a. A solução $\varphi(t, x_0)$.



b. O fluxo $\varphi_t(\cdot)$.

A seguir são dadas as definições de ponto de equilíbrio e de estabilidade para (3.2.2).

Definição 3.2.4. Dizemos que $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio ou solução estado estacionário de (3.2.2) se $f(\bar{x}) = 0$, ou ainda, se $\varphi_t(\bar{x}) = \bar{x}, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Definição 3.2.5. Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ de (3.2.2) é dito estável se, dado $\varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, se $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, então a solução $\varphi(t, x_0)$ de (3.2.2), com $\varphi(0, x_0) = x_0$, satisfaz a desigualdade

$$|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

O ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é dito instável se ele não é estável. Se $\bar{x}$ for estável e existir $r > 0$ tal que $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$, para $|x_0 - \bar{x}| < r$, dizemos que $\bar{x}$ é assintoticamente estável.

Da definição 3.2.5 acima vemos que a estabilidade de um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ de (3.2.2) é uma propriedade local do fluxo. Assim, podemos esperar

que, sob certas condições as propriedades de estabilidade do equilíbrio podem ser determinadas através de aproximações lineares, isto é, a derivada do campo f de (3.2.2) próxima à $\bar{x}$.

Seja $Df(\bar{x})$ a matriz jacobiana de f . Temos:

Definição 3.2.6. *Se $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio de (3.2.2), então a equação diferencial linear*

$$x'(t) = Df(\bar{x})x$$

é denominada linearização do campo vetorial f no ponto de equilíbrio $\bar{x}$.

Definição 3.2.7. *Seja $Df(\bar{x})$ a matriz jacobiana do campo f de (3.2.2), se $Df(\bar{x})$ não admite autovalores com a parte real nula, dizemos que o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é não degenerado ou hiperbólico.*

Exemplo 3.2.8. *Consideremos o sistema bidimensional autônomo*

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (3.2.3)$$

onde f_1, f_2 são funções suficientemente suaves.

A linearização do sistema (3.2.3) no ponto de equilíbrio $(\bar{x}, \bar{y})$, nos dá

$$\begin{pmatrix} \xi_1'(t) \\ \xi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix},$$

ou seja, $\xi'(t) = Df(\bar{x}, \bar{y})\xi(t)$, cuja solução é $\xi(t) = e^{tDf(\bar{x}, \bar{y})}\xi(0)$.

Se $A = Df(\bar{z})$, os autovalores λ_i são as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$,

$$\lambda = (1/2)(\tau \pm \sqrt{\Delta}),$$

onde $\tau = \text{tr} A, \delta = \det A$ e $\Delta = \tau^2 - 4\delta$.

Para maiores detalhes, veja [12, 13].

Quando o equilíbrio é hiperbólico temos que o termo linear de um campo vetorial determina o fluxo localmente, isto é, existe uma aplicação injetora e contínua $h : V(\bar{x}, \varepsilon) \longrightarrow U$, onde $V(\bar{x}, \varepsilon)$ é a vizinhança de $\bar{x}$ e U é um aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem. O exemplo a seguir mostra que a aplicação h “leva” o comportamento das soluções de (3.2.2) para os de (3.2.1), na vizinhança de um equilíbrio, conforme a figura 3.1.

Exemplo 3.2.9. *Considere o homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $h(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + (x_1^3)/3)$ e seu inverso dado por $h^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - (y_1^3)/3)$. Temos que, h transforma o sistema não linear*

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t) + x_1^2(t) \end{cases}$$

no linear

$$\begin{cases} x_1'(t) &= -x_1(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t), \end{cases}$$

pois, fazendo $y_1(t) = x_1(t)$ e $y_2(t) = x_2(t) + (x_1^3(t))/3$, então

$$\begin{cases} y_1'(t) &= x_1'(t) \\ y_2'(t) &= x_2'(t) + (2/3)x_1(t)x_1'(t), \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y_1'(t) &= -x_1(t) \\ y_2'(t) &= x_2(t) + x_1^2(t) + (2/3)x_1(t)(-x_1(t)), \end{cases}$$

isto é, $y'(t) = (-y_1(t), y_2(t))$.

Como $y(t) = h(x(t))$, temos que $x(t) = h^{-1}(y(t))$ é dado por:

$$(x_1(t), x_2(t)) = (y_1(t), y_2(t) - y_1^2(t)/3).$$

Veja na figura 3.1 os planos de fase dos sistemas não linear e linear,

respectivamente.

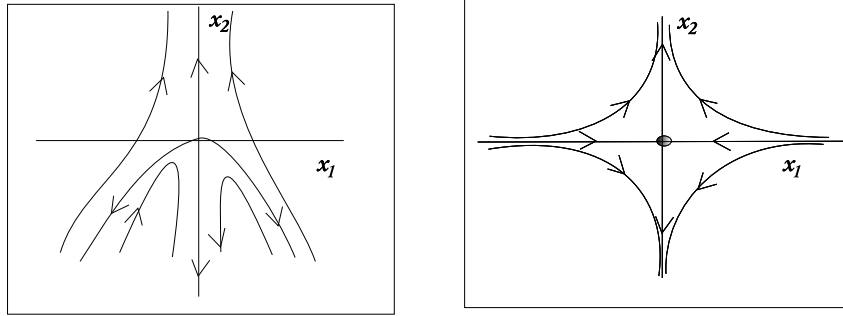


Figura 3.1: Planos de fase do sistema não linear e do sistema linearizado associado.

Definição 3.2.10. [31, p.118] *Dois sistemas autônomos de equações diferenciais tais como (3.2.2) e (3.2.1) são denominados topologicamente equivalentes em uma vizinhança da origem ou, têm a mesma estrutura qualitativa próxima a origem, se existe um homeomorfismo h que leva um conjunto aberto U , contendo a origem, sobre um conjunto aberto V , contendo a origem e, que leva trajetórias de (3.2.2) em U sobre trajetórias de (3.2.1) em V e preserva sua orientação. Se o homeomorfismo h preserva a parametrização do tempo, então os sistemas (3.2.1) e (3.2.2) são denominados topologicamente conjugados em uma vizinhança da origem.*

A priori, quando são topologicamente equivalentes a igualdade poderá estar ocorrendo em tempos diferentes, ou seja, dada a solução não linear e a linear o homeomorfismo poderá estar levando as trajetórias de uma para outra mas em tempos distintos (veja mais detalhes em[33]).

Se o equilíbrio $\bar{x}$ de (3.2.2) for não nulo, para utilizarmos a definição 3.2.10 basta transladarmos $\bar{x}$ para a origem, isto é, fazer a mudança de variável $y = x - \bar{x}$.

Exemplo 3.2.11. *Considere os sistemas lineares $x'(t) = Ax(t)$ e $y'(t) = By(t)$, onde*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3.2.4)$$

Seja $h(x(t)) = Rx(t)$, onde

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

Se $y(t) = h(x(t)) = Rx(t)$, então $y'(t) = By(t)$, pois $B = RAR^{-1}$.

Logo, se $x(t) = x_0 e^{At}$ é a solução de $x' = Ax$ por x_0 , então $y(t) = h(x(t)) = Rx(t) = Re^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0$ é a solução de $y'(t) = By(t)$ através de Rx_0 , isto é, h leva trajetórias do primeiro sistema em trajetórias do segundo e preserva a parametrização, pois

$$h(e^{At}) = e^{Bt}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso os sistemas são topologicamente conjugados.

Geometricamente, temos os planos de fase dos sistemas lineares, com matriz dos coeficientes dados respectivamente por A e B .

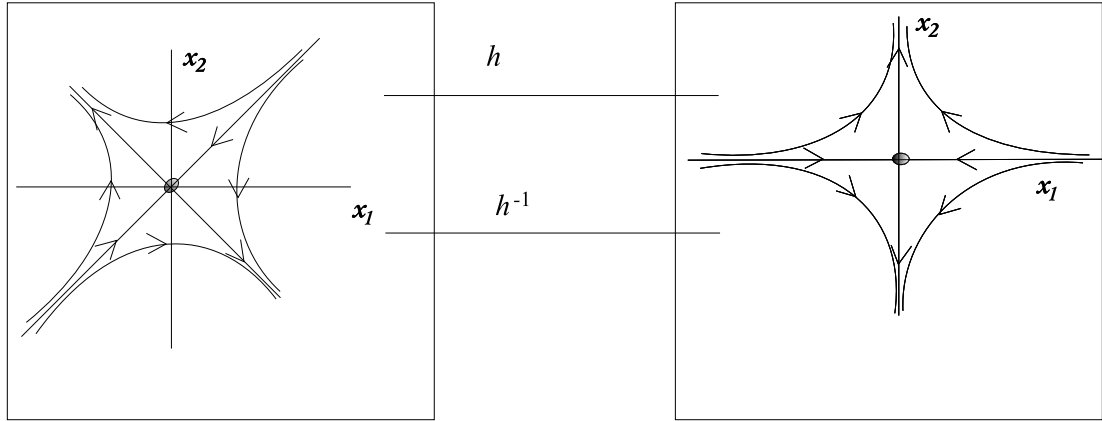


Figura 3.2: O homeomorfismo h representa uma rotação de 45° do plano de fase de $x' = Ax$ para $y' = By$.

O Teorema a seguir nos diz que se os pontos de equilíbrios são hiperbólicos, então o sistema não linear e o linearizado são topologicamente equivalentes e neste caso é suficiente estudar o problema linearizado, pois este resultado garante a equivalência de estabilidade do sistema linearizado para o inicialmente não linear.

Teorema 3.2.12. [33] *Seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de um sistema não linear $x' = f(x)$. Então, o fluxo $\varphi_t(x)$ do sistema não linear é conjugado em uma vizinhança de $\bar{x}$ ao fluxo $\Phi_t(x)$ de $x' = Df(\bar{x})x$, onde $Df(\bar{x})$ é a matriz jacobiana de f no ponto $\bar{x}$. Mais precisamente, existe uma vizinhança V de $\bar{x}$, ou seja, $V = B(\bar{x}, r)$, $r > 0$ e um homeomorfismo $h : V \longrightarrow V$ tal que*

$$h(\varphi_t(x)) = \Phi_t(h(x)), \quad (3.2.6)$$

para $x \in V, \varphi_t(x) \in V$.

O Teorema 3.2.12 nos diz que dado o fluxo $\varphi_t(x_0)$ da equação diferencial de (3.2.2) e $\Phi_t(x_0)$ o fluxo de $\xi'(t) = Df(\bar{x})\xi(t)$, então dada uma vizinhança V de $\bar{x}$, o homeomorfismo $h : V \longrightarrow V$ pode ser escolhido de tal maneira que:

$$h(\varphi_t(x_0)) = \Phi_t(h(x_0)), \forall t$$

com $x_0 \in V$, e $\varphi_t(x_0) \in V$. Isto indica que o comportamento das trajetórias de (3.2.2) em V é o mesmo das trajetórias da linearização em V .

As definições abaixo se encontram em Hale [13] e serão importantes para a caracterização da estabilidade dos equilíbrios fuzzy do PVIF que são do tipo função característica de algum conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$. Para as definições abaixo estamos supondo que X seja um espaço métrico completo e que a família de aplicações $T_t : X \longrightarrow X, t \geq 0$, satisfaz as propriedades de semigrupo.

Definição 3.2.13. *Um conjunto $A \subset X$ é denominado invariante pela família de aplicações $T_t : X \longrightarrow X$, se*

$$T_t(A) = A, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Exemplo 3.2.14. *Dado o sistema não linear*

$$\begin{cases} x'_1 &= -x_1 \\ x'_2 &= x_2 + x_1^2, \end{cases}$$

cujo fluxo φ_t através de $x(0) = c = (c_1, c_2)$, é dado, para t fixo, por

$$\varphi_t(c) = (c_1 e^{-t}, c_2 e^t + (c_1^2)/3(e^t - e^{-2t})).$$

Neste exemplo temos que o conjunto $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 = -(x_1^2)/3\}$ é invariante pelo fluxo φ_t , pois se $c \in A$, temos que $c_2 = -(c_1^2)/3$ e assim

$$\varphi_t(c) = (c_1 e^t, -(c_1^2)/3e^{-2t}) \in A,$$

ou seja, $\varphi_t(A) \subset A, \forall t \in \mathbb{R}_+$.

Definição 3.2.15. Um subconjunto A de X atrai um conjunto $B \subset X$ por meio da família de aplicações $T_t : X \longrightarrow X, t \geq 0$, se

$$\rho(T_t(B), A) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

onde $\rho(T_t(B), A) = \sup_{y \in T_t(B)} \inf_{x \in A} \text{dist}(y, x)$.

Definição 3.2.16. Seja a família de aplicações $T_t : X \longrightarrow X, t \geq 0$, e $A \subset X$. O subconjunto A é denominado atrator local se A é compacto invariante e existe uma vizinhança limitada B de A tal que A atrai B .

Definição 3.2.17. Seja a família de aplicações $T_t : X \longrightarrow X$ e A um conjunto invariante. O conjunto A é estável se, para qualquer vizinhança B de A , existe uma vizinhança C de A tal que $T_t(C) \subset B, \forall t \geq 0$.

Definição 3.2.18. Seja a família de aplicações $T_t : X \longrightarrow X$ e $A \subset X$. O conjunto invariante A é assintoticamente estável se A é estável e atrai pontos localmente.

3.3 Sistemas Dinâmicos Fuzzy

Considere o Problema do Valor Inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), k) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.3.7)$$

onde $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $k \in \mathbb{R}^p$. A este sistema podemos associar um sistema fuzzy, considerando a condição inicial e os coeficientes k_i 's dados por subconjuntos fuzzy. Então, temos

$$\begin{cases} x'(t) &\in f(x(t), K) \\ x(0) &\in X_0, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

onde K e X_0 são subconjuntos fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ e $\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$, respectivamente.

Como no capítulo 2, verificamos que para cada $t > 0$ o conjunto atingível para (3.3.8) obtido através de uma família de inclusões diferenciais coincide com a solução obtida via extensão da solução determinística de (3.3.7), daqui em diante os nossos resultados se referem a solução fuzzy para (3.3.8) via princípio de extensão de Zadeh, mais especificamente através do fluxo determinístico estendido.

A seguir verificaremos que $\widehat{\varphi}_t$, a extensão de Zadeh de φ_t , satisfaz as propriedades de semigrupo em $\mathcal{F}(U)$, onde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto.

Proposição 3.3.1. *Seja $\varphi_t(x_0)$ o fluxo associado ao problema determinístico (3.3.7), então a extensão de Zadeh $\widehat{\varphi}_t : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U)$ é um fluxo em $\mathcal{F}(U)$, ou seja, $\widehat{\varphi}_t$ satisfaz as seguintes propriedades:*

$$i. \quad \widehat{\varphi}_0(X_0) = X_0;$$

$$ii. \quad \widehat{\varphi}_{t+s}(X_0) = (\widehat{\varphi}_t \circ \widehat{\varphi}_s)(X_0), \text{ para } t, s \in \mathbb{R}_+, X_0 \in \mathcal{F}(U),$$

ou equivalentemente, para $\alpha \in [0, 1]$

$$i) [\widehat{\varphi}_0(X_0)]^\alpha = [X_0]^\alpha;$$

$$ii) [\widehat{\varphi}_{t+s}(X_0)]^\alpha = [(\widehat{\varphi}_t \circ \widehat{\varphi}_s)(X_0)]^\alpha,$$

para $t, s \in \mathbb{R}_+, X_0 \in \mathcal{F}(U)$.

Prova:

Como φ_t é um fluxo, temos que ele satisfaz as seguintes propriedades de semigrupo

- 1) $\varphi_0(x_0) = x_0$;
- 2) $\varphi_{t+s}(x_0) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0)$,

para $t, s \in \mathbb{R}_+$ e $x_0 \in U$.

Agora, verifiquemos que

$$\bullet [\widehat{\varphi}_0(X_0)]^\alpha = [X_0]^\alpha.$$

De fato,

Como φ_t é fluxo então, para todo $x_0 \in [X_0]^\alpha$, temos que $\varphi_0(x_0) = x_0$, então

$$\varphi_0([X_0]^\alpha) = [X_0]^\alpha.$$

Por outro lado, como φ_t é contínua, segue do Teorema 1.4.16 que

$$[\widehat{\varphi}_0(X_0)]^\alpha = \varphi_0([X_0]^\alpha).$$

Logo

$$[\widehat{\varphi}_0(X_0)]^\alpha = [X_0]^\alpha.$$

Ainda, da continuidade de φ_t , segue do Teorema 1.4.16 que:

$$\bullet [\widehat{\varphi}_{t+s}(X_0)]^\alpha = \varphi_{t+s}([X_0]^\alpha),$$

e,

$$\bullet [(\widehat{\varphi_t \circ \varphi_s})(X_0)]^\alpha = (\varphi_t \circ \varphi_s)([X_0]^\alpha) = [(\widehat{\varphi_t} \circ \widehat{\varphi_s})(X_0)]^\alpha.$$

Logo, para verificarmos ii), basta verificarmos que:

$$\varphi_{t+s}([X_0]^\alpha) = (\varphi_t \circ \varphi_s)([X_0]^\alpha).$$

De fato,

Por 2), $\forall x_0 \in [X_0]^\alpha, x_0 \in U$,

$$\varphi_{t+s}(x_0) = (\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0) \in (\varphi_t \circ \varphi_s)([X_0]^\alpha),$$

e,

$$(\varphi_t \circ \varphi_s)(x_0) = \varphi_{t+s}(x_0) \in \varphi_{t+s}([X_0]^\alpha). \blacksquare$$

A seguir definiremos ponto de equilíbrio para o PVIF através do fluxo estendido.

Definição 3.3.2. Dizemos que $\bar{X} \in \mathcal{F}(U)$ é um ponto de equilíbrio fuzzy do sistema fuzzy se

$$\hat{\varphi}_t(\bar{X}) = \bar{X}, \forall t \geq 0$$

ou equivalentemente,

$$[\hat{\varphi}_t(\bar{X})]^\alpha = [\bar{X}]^\alpha, \forall \alpha \in [0, 1].$$

A seguir estudaremos a teoria de estabilidade para sistemas autônomos, onde a condição inicial é fuzzy.

3.3.1 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy

O nosso objetivo é introduzir conceito de estabilidade fuzzy para os sistemas PVIF que, de alguma forma, generalizem aqueles usuais dos sistemas determinísticos PVI. A métrica que vamos adotar para o espaço $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é a métrica de Hausdorff.

Equilíbrio para a Equação Diferencial Fuzzy

Conforme salientamos na seção 2.4 do Capítulo 2, um sistema autônomo fuzzy, com coeficientes e condição inicial fuzzy, pode ser tratado como um sistema em que toda a subjetividade esteja apenas na condição inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x_0 &\in X_0, \end{cases} \quad (3.3.9)$$

onde X_0 é um subconjunto fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Para isto, vimos que basta ampliar a

dimensão do sistema inicial e obtemos um sistema autônomo equivalente

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.3.10)$$

A Proposição a seguir mostra que se $\bar{x}$ é um equilíbrio do sistema determinístico, então $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é um equilíbrio do sistema fuzzy associado e vice-versa.

Proposição 3.3.3. *Dados o PVI (3.3.10) e o PVIF (3.3.9), então $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio de (3.3.10), se e somente se, $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é ponto de equilíbrio de (3.3.9).*

Prova:

Sejam $\hat{\varphi}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a extensão de Zadeh de $\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ do fluxo associado a (3.3.10), e $\bar{x}$ ponto de equilíbrio de (3.3.10). Temos que,

$$\hat{\varphi}_t(\chi_{\{\bar{x}\}})(y) = \sup_{\tau \in \varphi_t^{-1}(y)} \chi_{\{\bar{x}\}}(\tau) = \chi_{\{\varphi_t(\bar{x})\}} = \chi_{\{\bar{x}\}},$$

ou seja, $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é ponto de equilíbrio de (3.3.9).

Reciprocamente, se $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é ponto de equilíbrio de (3.3.9), então temos:

$$\hat{\varphi}_t(\chi_{\{\bar{x}\}}) = \chi_{\{\bar{x}\}},$$

ou equivalentemente,

$$[\hat{\varphi}_t(\chi_{\{\bar{x}\}})]^\alpha = [\chi_{\{\bar{x}\}}]^\alpha \iff \varphi_t([\chi_{\{\bar{x}\}}]^\alpha) = \bar{x}, \forall \alpha \in [0, 1].$$

Logo,

$$\varphi_t(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Portanto, $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio de (3.3.10). ■

Definição 3.3.4. *Um ponto de equilíbrio $\bar{X}$ do PVIF (3.3.9) é estável se dado*

$\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que, $\forall X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ se

$$D(X_0, \bar{X}) < \delta, \text{ então } D(\hat{\varphi}_t(X_0), \bar{X}) < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

$\bar{X}$ é assintoticamente estável se for estável e $\exists r > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D(\hat{\varphi}_t(X_0), \bar{X}) = 0, \text{ se } D(X_0, \bar{X}) < r$$

Exemplo 3.3.5. Dado o problema do valor inicial clássico

$$\begin{cases} x' = -ax \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.3.11)$$

podemos verificar que a solução é dada por $\varphi_t(x_0) = x_0 e^{-at}$ e que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável para $a > 0$.

Considerando o sistema fuzzy associado de (3.3.11),

$$\begin{cases} x' &= -ax \\ x(0) &\in X_0, \end{cases} \quad (3.3.12)$$

$X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Então pelo Teorema 1.4.16, temos que os α -níveis do fluxo de (3.3.12) são dados por

$$[\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \varphi_t([X_0]^\alpha) = [x_{01}^\alpha e^{-at}, x_{02}^\alpha e^{-at}],$$

pois $\varphi_t(x_0)$ é uma função contínua em relação a x_0 e $[X_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]$.

Pela Proposição 3.3.3, temos que $\chi_{\{0\}}$ é equilíbrio de (3.3.12), pois $\bar{x} = 0$ é equilíbrio de (3.3.11). Neste caso podemos ver diretamente que $\bar{x} = 0$ é o único equilíbrio de (3.3.12), pois

$$[x_{01}^\alpha e^{-at}, x_{02}^\alpha e^{-at}] = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha], \forall t \geq 0, \text{ se } x_{01}^\alpha = x_{02}^\alpha = 0.$$

Além disso, $\chi_{\{0\}}$ é assintoticamente estável, pois

i. $\chi_{\{0\}}$ é estável.

De fato,

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/M > 0$, tal que $\|X_0\| < \delta$, então

$$\begin{aligned}
D(\hat{\varphi}_t(X_0), \chi_{\{0\}}) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([\varphi_t(X_0)]^\alpha, [\chi_{\{0\}}]^\alpha) \\
&= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h(\varphi_t([X_0]^\alpha), 0) \\
&= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \max\{e^{-at}(|x_{01}^0|, |x_{02}^0|)\} \\
&= e^{-at} \max\{|x_{01}^0|, |x_{02}^0|\} < (\varepsilon/M) \cdot M = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$$ii. \lim_{t \rightarrow +\infty} D(\hat{\varphi}_t(X_0), \chi_{\{0\}}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{-at} \max\{|x_{01}^0|, |x_{02}^0|\}\| = 0.$$

A seguir enunciaremos um lema importante para estabelecermos a equivalência da estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema determinístico e do sistema dinâmico fuzzy correspondente, pois o mesmo caracteriza a vizinhança de um conjunto fuzzy que é função característica de algum conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.3.6. [4] *Seja $\chi_X \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a função característica do conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\begin{aligned}
B(\chi_X, r) &:= \{X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) / D(\chi_X, X_0) < r\} \\
&= \{X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) / [X_0]^0 \subset B(X, r) \text{ e } X \subset B([X_0]^1, r)\}.
\end{aligned}$$

Dem: Veja [4].

Corolário 3.3.7. [4] *Se o conjunto X for unitário, $X = \{\bar{x}\}$, então*

$$B(\chi_X, r) := \{X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) / D(\chi_{\{\bar{x}\}}, X_0) < r\} = \{X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) / [X_0]^0 \subset B(\bar{x}, r)\}$$

e,

$$D(\chi_{\{\bar{x}\}}, X_0) = \sup_{x_0 \in [X_0]^0} \|x_0 - \bar{x}\|.$$

Dem: Segue do Lema 3.3.6.

Teorema 3.3.8. *Seja $\bar{x}$ equilíbrio de (3.3.9). Então,*

i. $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é estável para o sistema (3.3.9) se, e somente se, $\bar{x}$ é estável para (3.3.10);

ii. $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é assintoticamente estável (a.e.) para o sistema (3.3.9) se, e somente se, $\bar{x}$ é a.e. para (3.3.10).

iii. $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é instável se, e somente se, $\bar{x}$ é instável.

Dem:

i) Suponhamos que $\chi_{\{\bar{x}\}}$ seja estável para (3.3.9), então dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\forall X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, se

$$D(X_0, \chi_{\{\bar{x}\}}) < \delta, \text{ então } D(\hat{\varphi}_t(X_0), \chi_{\{\bar{x}\}}) < \varepsilon, \forall t > 0.$$

Em particular vale para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pois $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, $\bar{x}$ é estável para (3.3.10).

Reciprocamente, se $\bar{x}$ é estável para (3.3.10) então dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que, se

$$\|x_0 - \bar{x}\| < \delta, \text{ então } \|\varphi_t(x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$$

Agora, se $D(X_0, \chi_{\{\bar{x}\}}) < \delta$, então

$$\sup_{\tilde{x}_0 \in [X_0]^0} \|\tilde{x}_0 - \bar{x}\| < \delta$$

que implica

$$\|\varphi_t(x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall x_0 \in [X_0]^0 \subset B(\bar{x}, \delta),$$

pois a função norma é contínua e $[X_0]^0$ é compacto.

Do Corolário 3.3.7, temos

$$D(\hat{\varphi}_t(X_0), \chi_{\{\bar{x}\}}) < \varepsilon,$$

ou

$$\sup_{\varphi_t(x_0) \in \varphi_t([X_0]^0)} \|\varphi_t(x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon,$$

ou ainda,

$$\sup_{\varphi_t(x_0) \in [\widehat{\varphi_t}(X_0)]^0} \|\varphi_t(x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon,$$

pois φ_t é contínua em x_0 .

Portanto, $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é estável para (3.3.9).

Prova de ii)

Se $\bar{x}$ é a.e., então $\bar{x}$ é estável e, pelo item i), temos que $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é estável.

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$, então

$$\varphi_t([X_0]^0) \subset B(\bar{x}, \varepsilon).$$

Por hipótese temos que $\bar{x}$ é assintoticamente estável, donde segue que $\exists r > 0$, tal que

$$\|\varphi_t(x_0) - \bar{x}\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ para } \|x_0 - \bar{x}\| < r,$$

ou seja, o ponto $\bar{x}$ atrai cada ponto de $B(\bar{x}, r)$, donde segue que para cada $x_{0i} \in [X_0]^0$, $\exists t_{0i}$ tal que

$$\varphi_{t_{0i}}(x_{0i}) \in B(\bar{x}, r). \quad (3.3.13)$$

Assim sendo, utilizando a continuidade da $\varphi_{t_{0i}}$ em (3.3.13) segue que para cada $x_{0i} \in [X_0]^0$, $\exists V_{x_{0i}}$ vizinhança de x_{0i} tal que

$$\varphi_{t_{0i}}(V_{x_{0i}}) \subset B(\bar{x}, r). \quad (3.3.14)$$

Por outro lado, como $[X_0]^0$ é compacto e $V_{x_{0i}}, x_{0i} \in [X_0]^0$, é uma cobertura aberta de $[X_0]^0$, pois

$$[X_0]^0 \subset \bigcup_{x_{0i} \in [X_0]^0} V_{x_{0i}},$$

então existe subcobertura finita $\{V_{x_{01}}, \dots, V_{x_{0k}}\}$ tal que

$$[X_0]^0 \subset \bigcup_{i=1, \dots, k} V_{x_{0i}}.$$

Além disso,

$$\varphi_{t_{0i}+t}(V_{x_{0i}}) \subset B(\bar{x}, \varepsilon), \forall t \geq 0,$$

pois

$$\varphi_{t_{0i}+t}(V_{x_{0i}}) = \varphi_t(\varphi_{t_{0i}}(V_{x_{0i}})) \subset B(\varphi_t(\bar{x}), \varepsilon) = B(\bar{x}, \varepsilon).$$

Tomando $t_0 = \max\{t_{01}, \dots, t_{0k}\}$, temos

$$\varphi_{t_0+t}(V_{x_{0i}}) \subset B(\bar{x}, \varepsilon),$$

para cada $x_{0i} \in [X_0]^0$ e $t > 0$, desde que $x_{0i} \in V_{x_{0i}}$, para algum $i = 1, \dots, k$. Segue então que,

$$\varphi_{t_0+t}([X_0]^0) \subset B(\bar{x}, \varepsilon),$$

isto é, $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é a.e. para (3.3.9).

A recíproca segue de forma análoga ao item i).

A prova de iii) é consequência imediata de i). ■

O corolário a seguir caracteriza a estabilidade dos equilíbrios fuzzy do tipo $\chi_{\{\bar{x}\}}$ para (3.3.9) através do sinal dos autovalores associados aos equilíbrios determinísticos de (3.3.10).

Corolário 3.3.9. *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com $f'(\bar{x}) = 0$ e λ_i os autovalores associados a $\bar{x}$. Então*

- *Se $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ para todo i , então $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é assintoticamente estável para (3.3.9);*
- *Se $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, para algum i , então $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é instável para (3.3.9).*

Prova:

Segue do Teorema 3.3.8.

A seguir apresentaremos alguns resultados que relacionam conjuntos atratores e estabilidade assintótica.

Teorema 3.3.10. *Seja $\hat{\varphi}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a extensão de Zadeh do fluxo contínuo associado $\varphi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Se $\bar{X}$ é ponto de equilíbrio de $\hat{\varphi}_t$ e,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\hat{\varphi}_t(X_0), \bar{X}) = 0, \text{ para } D(X_0, \bar{X}) < r,$$

então os níveis $[\bar{X}]^\alpha$ atraem os níveis $[X_0]^\alpha$ através da φ_t .

Dem:

Se $D(X_0, \bar{X}) < r$, $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, segue do Lema 3.3.6 que $X_0 \in B(\bar{X}, r)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists t_0 = t_0(\varepsilon)$, tal que para $t \geq t_0$, $D(\hat{\varphi}_t(X_0), \bar{X}) < \varepsilon$, o que implica que

$$h([\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha, [\bar{X}]^\alpha) < \varepsilon,$$

ou seja,

$$h(\varphi_t([X_0]^\alpha), [\bar{X}]^\alpha) < \varepsilon,$$

$\forall \alpha \in [0, 1]$.

Como

$$h(\varphi_t([X_0]^\alpha), [\bar{X}]^\alpha) = \inf \{s : \varphi_t([X_0]^\alpha) \subset B([\bar{X}]^\alpha, s) / [\bar{X}]^\alpha \subset B(\varphi_t([X_0]^\alpha), s)\},$$

podemos concluir que $\varphi_t([X_0]^\alpha) \subset B([\bar{X}]^\alpha, \varepsilon)$, $\alpha \in [0, 1]$, isto é, os níveis de $[\bar{X}]^\alpha$ atraem os níveis $[X_0]^\alpha$ através da φ_t . •

Como o Teorema 3.3.8 caracteriza apenas a estabilidade dos equilíbrios fuzzy que são funções características dos equilíbrios determinísticos, a seguir estabeleceremos as relações de estabilidade existentes entre um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ e o conjunto fuzzy χ_X .

Corolário 3.3.11. *Seja $\hat{\varphi}_t : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ a extensão do fluxo $\varphi_t(x_0)$ associado a (3.3.10). Então o equilíbrio $\chi_{\bar{X}}$ de $\hat{\varphi}_t$ é estável se e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que se $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com $[X_0]^0 \subset B(\bar{X}, \delta)$ e $\bar{X} \subset B([X_0]^1, \delta)$, então $\varphi_t([X_0]^0) \subset B(\bar{X}, \varepsilon)$ e $\bar{X} \subset B(\varphi_t[X_0]^1, \varepsilon)$, $\forall t \geq 0$.*

Dem: Se o equilíbrio $\chi_{\bar{X}}$ é estável, então pela definição de estabilidade, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ com $D(X_0, \chi_{\bar{X}}) < \delta$, então

$$D(\widehat{\varphi}_t(X_0), \chi_{\bar{X}}) < \varepsilon.$$

Logo, segue do Lema 3.3.6 o resultado desejado.

Analogamente verificamos a recíproca. •

No exemplo a seguir mostramos que o PVIF com o campo dado pela extensão de Zadeh do campo determinístico, pode ter outros equilíbrios além daqueles que são previstos pela Proposição 3.3.3. O Corolário 3.3.11 será fundamental para a análise destes novos equilíbrios fuzzy.

Exemplo 3.3.12. *Consideremos o modelo de Verhulst determinístico*

$$\begin{cases} x' = ax(1-x) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (3.3.15)$$

cuja solução é dada por

$$\varphi_t(x_0) = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-at}},$$

Os pontos de equilíbrios de (3.3.15) são 0 e 1, os quais são instável e assintoticamente estável, respectivamente, pois utilizando o resultado da linearização em [13] temos $f'(0) = a > 0$ e $f'(1) = -a < 0$.

Agora associado ao PVI (3.3.15) podemos ter 3 tipos de PVIF:

- 1) Considerando a condição inicial fuzzy, isto é, $x_0 \in X_0, X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$;
- 2) Considerando o coeficiente a fuzzy;
- 3) Considerando a fuzziness do coeficiente a e da condição inicial x_0 fuzzy.

1) Suponhamos que apenas a condição inicial seja fuzzy, então temos o PVIF

$$\begin{cases} x' = ax(1-x) \\ x(0) \in X_0, \end{cases} \quad (3.3.16)$$

onde X_0 é um número fuzzy com seus α -níveis dados por $[X_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]$, $\alpha \in [0, 1]$. Como φ_t , o fluxo associado a (3.3.15), é uma função contínua e crescente

então os α -níveis do fluxo de (3.3.16) para $\alpha \in [0, 1]$ são dados por

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha &= \varphi_t([X_0]^\alpha) = \varphi_t([x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]) = [\varphi_t(x_{01}^\alpha), \varphi_t(x_{02}^\alpha)] \\ &= \left[\frac{x_{01}^\alpha}{x_{01}^\alpha - (x_{01}^\alpha - 1)e^{-at}}, \frac{x_{02}^\alpha}{x_{02}^\alpha - (x_{02}^\alpha - 1)e^{-at}} \right]. \end{aligned}$$

Os equilíbrios de (3.3.16) são obtidos de

$$[\hat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = [X_0]^\alpha,$$

para $\alpha \in [0, 1]$, ou resolvendo o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{x_{01}^\alpha}{x_{01}^\alpha - (x_{01}^\alpha - 1)e^{-at}} = x_{01}^\alpha \\ \frac{x_{02}^\alpha}{x_{02}^\alpha - (x_{02}^\alpha - 1)e^{-at}} = x_{02}^\alpha, \end{cases} \quad (3.3.17)$$

$\forall t \geq 0$.

De (3.3.17) segue que $x_{01}^\alpha = x_{02}^\alpha = 0$ ou $x_{01}^\alpha = x_{02}^\alpha = 1$. Logo, são equilíbrios de (3.3.16) $\chi_{\{0\}}, \chi_{\{1\}}$.

Do Teorema 3.3.8, segue que $\chi_{\{0\}}$ é instável e $\chi_{\{1\}}$ é estável.

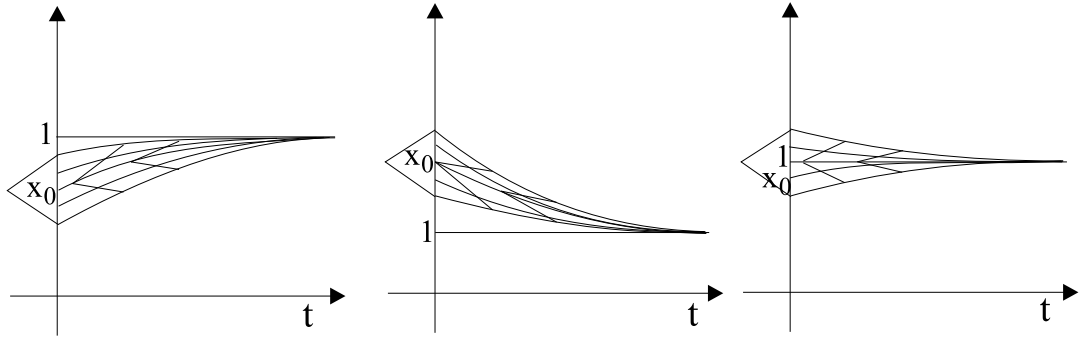


Figura 3.3: Dinâmica em torno de 1.

Temos também que $\chi_{[0,1]}$ é um “ponto” de equilíbrio de (3.3.16), pois

$$\hat{\varphi}_t(\chi_{[0,1]}) = \chi_{[0,1]}.$$

Como, φ_t é contínua, segue do Teorema 1.4.16 que

$$[\widehat{\varphi}_t(\chi_{[0,1]})]^\alpha = \varphi_t([\chi_{[0,1]}]^\alpha) = \varphi_t([0, 1]) = [\varphi_t(0), \varphi_t(1)] = [0, 1] = [\chi_{[0,1]}]^\alpha.$$

Do Corolário 3.3.11 segue que $\chi_{[0,1]}$ é instável, pois se tomarmos $[X_0]^\alpha = [\delta, 1], 0 \leq \delta < 1$, temos

$$D(X_0, \chi_{[0,1]}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([\delta, 1], [0, 1]) = \|\delta\|.$$

e como $\varphi_t([\delta, 1]) = [\varphi_t(\delta), \varphi_t(1)] = [\varphi_t(\delta), 1], 0 \leq \delta < 1$, pois $\varphi_t(x_0)$ é contínua, então:

$$D(\widehat{\varphi}_t(X_0), \chi_{[0,1]}) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} h([\varphi_t(\delta), 1], [0, 1]) = \frac{\delta}{\delta - (\delta - 1)e^{-at}},$$

com $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(\delta) = 1$.

Logo, $[0, 1] \notin B(\varphi_t([X_0]^1), \varepsilon)$ para infinitos valores de $t \in \mathbb{R}$.

2) Coeficiente fuzzy: neste caso primeiro faremos a mudança de variáveis $y = (y_1, y_2) = (x, a)$ em (3.3.15) e obtemos o sistema determinístico ampliado

$$\begin{cases} y'_1 &= y_1 y_2 (1 - y_1) \\ y'_2 &= 0 \\ y_0 &= (x_0, a_0), \end{cases} \quad (3.3.18)$$

tal que o fluxo associado à (3.3.18) é dado por

$$\psi_t(y_0) = (\varphi_t(x_0), a_0) = \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-at}}, a_0 \right).$$

Supondo apenas que o coeficiente a seja um suconjunto fuzzy A_0 com $\text{supp} A_0 \subset (0, +\infty)$ temos que (3.3.18) pode ser reescrito da seguinte maneira

$$\begin{cases} y'_1 &= y_1 y_2 (1 - y_1) \\ y'_2 &= 0 \\ y_0 &\in (x_0, A_0), \end{cases} \quad (3.3.19)$$

onde A_0 é um número fuzzy.

Neste caso, para $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} [\widehat{\psi}_t(Y_0)]^\alpha &= \psi_t([Y_0]^\alpha) = \psi_t(x_0, [A_0]^\alpha) = \psi_t(x_0, [a_1^\alpha, a_2^\alpha]) \\ &= \begin{cases} \left[\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-a_1^\alpha t}}, \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-a_2^\alpha t}} \right], & \text{se } x_0 < 1 \\ \left[\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-a_2^\alpha t}}, \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-a_1^\alpha t}} \right], & \text{se } x_0 > 1, \end{cases} \end{aligned}$$

pois ψ_t em relação a variável a é crescente para $x_0 < 1$ e decrescente para $x_0 > 1$.

Aqui, os equilíbrios são obtidos de

$$\psi_t([Y_0]^\alpha) = [Y_0]^\alpha, \alpha \in [0, 1]$$

ou seja,

$$(\varphi_t(x_0), [a_1^\alpha, a_2^\alpha]) = (x_0, [a_1^\alpha, a_2^\alpha]),$$

e assim obtemos $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$.

Portanto, os únicos equilíbrios são $\chi_{\{0\}}$ e $\chi_{\{1\}}$, os quais são instável e estável, respectivamente pelo Teorema 3.3.8.

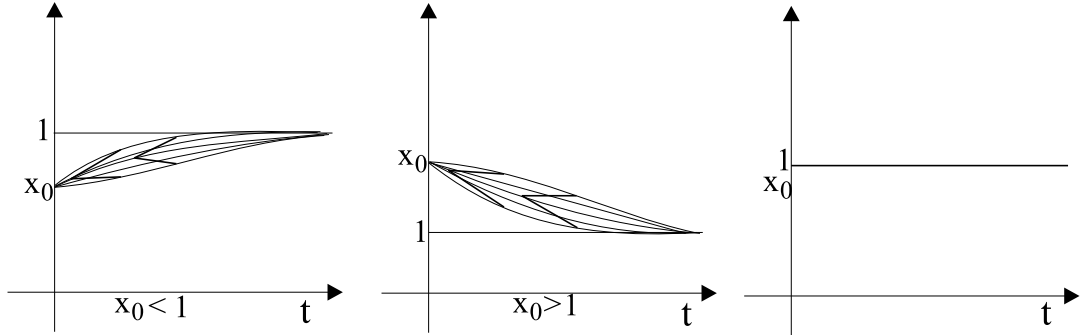


Figura 3.4: Dinâmica em torno de 1 e a fuzzy.

3) Suponhamos que a condição inicial e o parâmetro sejam fuzzy,

então (3.3.18) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 y_2 (1 - y_1) \\ y_2' &= 0 \\ y_0 &\in (X_0, A_0), \end{cases} \quad (3.3.20)$$

onde X_0 e A_0 são números fuzzy. Assim, para $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$[\widehat{\psi}_t(Y_0)]^\alpha = \psi_t([X_0]^\alpha \times [A_0]^\alpha).$$

Como $[x_{01}, x_{02}] \times [a_1, a_2]$ é conexo e ψ_t é uma função contínua com

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-at}} = 1$$

e $x_{01} > 0$, temos que ψ_t assume máximo e mínimo em $[x_{01}, x_{02}] \times [a_1, a_2]$, pois o domínio é compacto.

Notemos que se fixarmos um dos $a_i, i = 1, 2$ temos que $\psi_t(x_0, a_1)$ e $\psi_t(x_0, a_2)$ são monótonas tais que

$$i. \quad \psi_t(x_{01}, a_1) < \psi_t(x_{02}, a_1);$$

$$ii. \quad \psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_2).$$

Agora, se fixarmos x_{0i} , temos:

a) $\psi_t(x_{01}, A_0)$ é monótona se $x_{01} > 1$, o que nos dá $x_{02} > 1$ e assim, $\psi_t(x_{02}, A_0)$ também será monótona. Logo

$$i. \quad \psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{01}, a_1);$$

$$ii. \quad \psi_t(x_{02}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_1).$$

Logo, para $x_{01} > 1$ e $x_{02} > 1$, temos

$$i. \quad \psi_t(x_{01}, a_1) < \psi_t(x_{02}, a_1) \text{ e } \psi_t(x_{02}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_1);$$

$$ii. \quad \psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{01}, a_1) \text{ e } \psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_2);$$

Assim sendo, se $x_{01} > 1$ e $x_{02} > 1$, então

$$\psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{01}, a_1) < \psi_t(x_{02}, a_1) \text{ e } \psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_1),$$

onde o mínimo será $\psi_t(x_{01}, a_2)$ e o máximo $\psi_t(x_{02}, a_1)$.

Logo como,

$$[\hat{\psi}_t(X_0), A_0]^\alpha = [\psi_t(x_{01}, a_1), \psi_t(x_{02}, a_1)],$$

os pontos de equilíbrios de (3.3.20) são dados por

$$[\psi_t(x_{01}, a_2), \psi_t(x_{02}, a_1)] = [x_{01}, x_{02}],$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} \frac{x_{01}}{x_{01} - (x_{01} - 1)e^{-a_2 t}} = x_{01} \\ \frac{x_{02}}{x_{02} - (x_{02} - 1)e^{-a_2 t}} = x_{02} \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos que os possíveis equilíbrios fuzzy são $\chi_{\{0\}}, \chi_{\{1\}}, \chi_{[0,1]}$.

Se $0 < x_{01} < 1$, e $x_{02} > 1$, então

$$\psi_t(x_{01}, a_1) < \psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_1),$$

Aqui,

$$[\hat{\psi}_t(X_0, A_0)]^\alpha = [\psi_t(x_{01}, a_1), \psi_t(x_{02}, a_1)]$$

e seguindo raciocínio análogo ao caso anterior obteremos $\chi_{\{0\}}, \chi_{\{1\}}, \chi_{[0,1]}$ como equilíbrios fuzzy.

Finalmente, se $x_{01} < 1, x_{02} < 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \psi_t(x_{01}, a_1) &< \psi_t(x_{02}, a_1) < \psi_t(x_{02}, a_2) \\ \psi_t(x_{01}, a_1) &< \psi_t(x_{01}, a_2) < \psi_t(x_{02}, a_2) \end{aligned}$$

Neste caso, $\psi_t(x_{01}, a_1)$ é o mínimo e $\psi_t(x_{02}, a_2)$ é o máximo. Logo,

$$[\hat{\psi}_t(X_0), A_0]^\alpha = [\psi_t(x_{01}, a_1), \varphi_t(x_{02}, a_2)],$$

e, o equilíbrio de (3.3.20) é obtido resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{x_{01}}{x_{01} - (x_{01} - 1)e^{-a_1 t}} = x_{01} \\ \frac{x_{02}}{x_{02} - (x_{02} - 1)e^{-a_2 t}} = x_{02}, \end{cases}$$

concluimos que ou $x_{01} = x_{02} = 0$, ou $x_{01} = x_{02} = 1$. Logo, os equilíbrios obtidos neste caso são $\chi_{\{0\}}, \chi_{\{1\}}, \chi_{[0,1]}$.

Seque do Teorema 3.3.8 que os equilíbrios $\chi_{\{0\}}$ é instável e $\chi_{\{1\}}$ é assintoticamente estável.

Verifica-se de forma análoga ao item 1) que $\chi_{[0,1]}$ é instável.

Corolário 3.3.13. Sejam φ_t e $\hat{\varphi}_t$ como no Teorema 3.3.10, então:

i. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto e invariante pela φ_t , com

$$[\bar{X}]^0 \subset B(X, r) \text{ e } X \subset B([\bar{X}]^1, r),$$

então $\bar{X} = X = \chi_X$ (isto é, os pontos fixos são isolados).

ii. Se $[\bar{X}]^\alpha \subset B([\bar{X}]^1, r)$ e $[\bar{X}]^0 \subset B([\bar{X}]^\alpha, r)$, para algum $\alpha \in [0, 1]$, então $[\bar{X}]^0 = [\bar{X}]^1$;

iii. Se $[\bar{X}]^0 \subset B([\bar{X}]^1, r)$, então $[\bar{X}]^0 = [\bar{X}]^1$.

Prova:

i) Primeiramente notemos que como $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e invariante através da φ_t , então por definição $\varphi_t(X) = X$. Logo, para $\alpha \in [0, 1]$

$$[\hat{\varphi}_t(\chi_X)]^\alpha = \varphi_t([\chi_X]^\alpha) = \varphi_t(X) = X = [\chi_X]^\alpha, \quad (3.3.21)$$

ou seja, $\chi_{\{X\}}$ é equilíbrio de $\hat{\varphi}_t$.

Agora, pelo Lema 3.3.6, temos que $[\bar{X}]^0 \subset B(X, r)$ e $X \subset B([\bar{X}]^1, r)$ é equivalente a $D(\bar{X}, \chi_X) < r$, donde segue da hipótese que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\hat{\varphi}_t(\chi_X), \bar{X}) = 0,$$

ou ainda por (3.3.21),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\chi_X, \bar{X}) = 0,$$

e assim $\chi_X = \bar{X}$.

ii) Consequência do item i) para $X = [\bar{X}]^\alpha$.

iii) Imediato pelo item i).

Dos corolários 3.3.13 e 3.3.11 segue que os únicos equilíbrios de $\hat{\varphi}_t$ assintoticamente estáveis, com $h([X]^0, [X]^1) < r$, são as funções características de algum subconjunto compacto $X \subset \mathbb{R}^n$.

A seguir apresentaremos uma outra maneira de estudar a estabilidade dos equilíbrios fuzzy do PVIF.

3.4 O Teorema de linearização para o fluxo fuzzy

Consideremos o Problema do Valor Inicial não linear autônomo

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.4.22)$$

onde $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

Logo, podemos associar a (3.4.22) o seguinte PVI, linearizado em torno do ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$

$$\begin{cases} x'(t) &= g(x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.4.23)$$

onde $g(x) = Df(0)x$ é a matriz jacobiana de f em torno de $x = 0$.

A linearização é uma ferramenta primordial para o estudo qualitativo de sistemas não lineares, pois permite o estudo do comportamento das soluções de

(3.4.22) sem explicitá-las.

Na seção 3.1, vimos que o Teorema 3.2.12 garante que o tipo de estabilidade na vizinhança de um equilíbrio hiperbólico do sistema não linear (3.4.22) pode ser feita através do sistema linearizado (3.4.23), ou seja, o comportamento das trajetórias de (3.4.22) em torno do equilíbrio nulo é o mesmo das trajetórias de (3.4.23).

Nesta seção apresentamos um resultado equivalente ao Teorema 3.2.12 para os equilíbrios fuzzy que são funções características de algum equilíbrio hiperbólico determinístico.

Além disso, com um exemplo mostramos que se o resultado de linearização não é válido para um determinado equilíbrio determinístico então o mesmo ocorrerá para os modelos fuzzy sugeridos neste trabalho. Apresentamos também o conceito de plano de fase fuzzy como um método alternativo, como no caso clássico, para a análise do comportamento das soluções para modelos bidimensionais.

3.4.1 A linearização fuzzy

Consideremos o sistema geral fuzzy autônomo associado a (3.4.22), dado por

$$\begin{cases} x' &= f(x) \\ x_0 &\in X_0, \end{cases} \quad (3.4.24)$$

$X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que se os coeficientes também são considerados fuzzy, sempre podemos ter um sistema ampliado da forma (3.4.24).

Seja $\chi_{\{\bar{x}\}}$ um ponto de equilíbrio de (3.4.24). Considerando $y = x - \bar{x}$, podemos obter o sistema fuzzy linearizado em torno de $x = 0$, associado a (3.4.24), onde $\chi_{\{0\}}$ é o único ponto de equilíbrio. Tal sistema, é dado por:

$$\begin{cases} x'(t) &= g(x(t)) \\ x_0 &\in X_0, \end{cases} \quad (3.4.25)$$

onde $X_0 = \widehat{x_0 - \bar{x}}$ é a extensão de Zadeh de $x_0 - \bar{x}$ e $g(x) = Df(0)x$.

Considerando (3.4.24) e (3.4.25) temos o seguinte teorema de linearização para os equilíbrios fuzzy do tipo $\chi_{\{\bar{x}\}}$.

Teorema 3.4.1. *Seja $\bar{x}$ um equilíbrio hiperbólico de (3.4.22) satisfazendo as condições do Teorema 3.2.12. Se $\bar{X} = \chi_{\{\bar{x}\}}$, então existe o homeomorfismo $\hat{h} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$, a extensão de Zadeh do homeomorfismo h , satisfazendo*

$$\hat{h}(\hat{\varphi}_t(X_0)) = \hat{\Phi}_t(\hat{h}(X_0)),$$

onde $\mathbb{V} = B(\chi_{\{\bar{x}\}}, r), r > 0$, $\hat{\varphi}_t$ é o fluxo fuzzy de (3.4.24) e $\hat{\Phi}_t$ é o fluxo fuzzy de (3.4.25).

Prova

Equivalentemente, vamos mostrar que

$$\hat{h} \circ \hat{\varphi}_t(X_0) = (\widehat{h \circ \varphi_t})(X_0) = (\widehat{\Phi_t \circ H})(X_0) = (\hat{\Phi}_t \circ \hat{h})(X_0).$$

ou ainda que para $\alpha \in [0, 1]$,

$$\left[(\widehat{h \circ \varphi_t})(X_0) \right]^\alpha = \left[(\widehat{\Phi_t \circ h})(X_0) \right]^\alpha,$$

onde para $\forall x_0 \in [X_0]^\alpha$, $x_0 \in V = B(\bar{x}, r)$, φ_t é o fluxo determinístico de (3.4.22) e Φ_t é o fluxo de (3.4.23).

Primeiramente observemos que como h é um homeomorfismo, h e a sua inversa são aplicações contínuas, então segue do Teorema 1.4.20 que $\hat{h}$ e $\widehat{h^{-1}}$ são contínuas.

Temos que $\hat{h}$ é injetora.

De fato,

sejam $X_1, X_2 \in \mathbb{V}$, tais que $\forall x \in [X_1]^\alpha$ e $y \in [X_2]^\alpha$, temos $x, y \in B(\bar{x}, r)$, isto é, $[X_1]^\alpha \cup [X_2]^\alpha \subset B(\bar{x}, r)$, para todo $\alpha \in [0, 1]$. Logo, se para todo $\alpha \in [0, 1]$, temos

$$[\hat{h}(X_1)]^\alpha = [\hat{h}(X_2)]^\alpha,$$

segue do Teorema 1.4.16 que

$$h([X_1]^\alpha) = h([X_2]^\alpha),$$

ou seja, para todo $x \in [X_1]^\alpha$ existe um único $y \in [X_2]^\alpha$ tal que $h(x) = h(y)$, então $x = y$, com $x \in B(\bar{x}, r)$.

Portanto, para todo $\alpha \in [0, 1]$, $X_1 = X_2$. ■

Além disso, $\hat{h}$ é sobrejetora.

De fato,

dado $Y \in \mathbb{V}$, tal que $[Y]^\alpha \subseteq B(\varphi_t(\bar{x}), r)$, da sobrejetividade de h segue que existe $[A]^\alpha \subseteq B(\bar{x}, r)$, tais que

$$[Y]^\alpha = h([A]^\alpha).$$

Além disso, como h têm inversa contínua, temos que

$$h^{-1}([Y]^\alpha) = [A]^\alpha.$$

Como h é injetora com inversa contínua, temos que $[A]^\alpha, \alpha \in [0, 1]$, satisfaz o Teorema de Representação 1.4.11 e assim existe $X \in \mathbb{V}$ tal que $[X]^\alpha = [A]^\alpha$.

Portanto, $\exists X \in \mathbb{V}$ ou seja, dado $Y \in \mathbb{V} = B(\chi_{\{\varphi_t(\bar{x})\}}, r)$, existe $X \in \mathbb{V} = B(\chi_{\{\bar{x}\}}, r)$, tal que $\hat{h}(Y) = X$. ■

Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_t(x_0) & \xrightarrow{h} & \Phi_t(x_0) \\ \downarrow EZ & & \downarrow EZ \\ \hat{\varphi}_t(X_0) & \xrightarrow{\hat{h}} & \hat{\Phi}_t(X_0) \end{array}$$

onde $\hat{\varphi}_t$ e $\hat{\Phi}_t$ são obtidas aplicando-se o princípio de extensão de Zadeh (EZ) em φ_t e Φ_t , respectivamente.

Primeiramente observemos que como h, φ_t e Φ_t são aplicações contínuas, então $h \circ \varphi_t$ e $\Phi_t \circ h$ também o são. Logo, as aplicações $\widehat{h \circ \varphi_t}$ e $\widehat{\Phi_t \circ h}$ são contínuas

[8], então temos:

$$\left[\widehat{(h \circ \varphi_t)}(X_0) \right]^\alpha = (h \circ \varphi_t)([X_0]^\alpha), \quad (3.4.26)$$

e,

$$\left[\widehat{(\Phi_t \circ h)}(X_0) \right]^\alpha = (\Phi_t \circ h)([X_0]^\alpha). \quad (3.4.27)$$

Agora, para $\forall x_0 \in [X_0]^\alpha$, se $x_0 \in B(\bar{x}, r)$, então por (3.2.6) temos que

$$h(\varphi_t(x_0)) = (\Phi_t \circ h)(x_0) \in (\Phi_t \circ h)([X_0]^\alpha),$$

e,

$$\Phi_t(h(x_0)) = (h \circ \varphi_t(x_0)) \in (h \circ \varphi_t)([X_0]^\alpha).$$

Portanto,

$$\left[\widehat{(h \circ \varphi_t)}(X_0) \right]^\alpha = \left[\widehat{(\Phi_t \circ h)}(X_0) \right]^\alpha, \text{ onde para } x_0 \in [X_0]^\alpha, x_0 \in B(\bar{x}, r).$$

Falta mostrar que

$$\widehat{h} \circ \widehat{\varphi_t} = \widehat{h \circ \varphi_t}.$$

De fato:

Temos para $\alpha \in [0, 1]$,

$$\left[\widehat{h \circ \varphi_t}(X_0) \right]^\alpha = (h \circ \varphi_t)[X_0]^\alpha.$$

e,

$$[\widehat{h} \circ \widehat{\varphi_t}(X_0)]^\alpha = [\widehat{h}(\widehat{\varphi_t}(X_0))]^\alpha = h([\widehat{\varphi_t}(X_0)]^\alpha) = h(\varphi_t([X_0]^\alpha)) = (h \circ \varphi_t)([X_0]^\alpha).$$

■

O resultado a seguir estabelece que o tipo de estabilidade dos equilíbrios $\chi_{\{\bar{x}\}}$ de (3.4.24) podem ser estabelecidos através do problema (3.4.25), pois o Teorema 3.4.1 garante que a análise de estabilidade dos equilíbrios que são a função característica de um equilíbrio determinístico de (3.4.24) podem ser feitas através

do problema linearizado fuzzy (3.4.25).

Corolário 3.4.2. *Seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio hiperbólico de (3.4.22). Então:*

- *Se $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é instável para (3.4.25), então $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é um equilíbrio instável para (3.4.24);*
- *Se $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é assintoticamente estável para (3.4.25), então $\chi_{\{\bar{x}\}}$ é um equilíbrio assintoticamente estável para (3.4.24);*

Prova:

É uma consequência do Teorema 3.4.1.

No exemplo a seguir vamos explicitar os homeomorfismos h e $\hat{h}$ e verificar o Teorema anterior.

Exemplo 3.4.3. *Dado o sistema autônomo não linear*

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)(1 - x(t)) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (3.4.28)$$

o homeomorfismo $h : V \rightarrow V$, definido por:

$$h(x) = \frac{x-1}{x} + 1$$

onde $V = B(1, r)$, $0 \leq r < 1$, é a vizinhança suficientemente pequena em torno do equilíbrio $\bar{x} = 1$ de (3.4.28) e h transforma (3.4.28) em

$$\begin{cases} y'(t) &= 1 - y(t) \\ y(0) &= y_0. \end{cases} \quad (3.4.29)$$

De fato, se $y = h(x)$, então

$$y' = \frac{x'x - (x-1)x'}{x^2} = \frac{x'}{x^2} = \frac{x(1-x)}{x^2} = \frac{1-x}{x} = 1 - y.$$

Além disso, temos que o fluxo da equação de (3.4.28) por x_0 é

$$\varphi_t(x_0) = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-t}}$$

e de (3.4.29) por y_0 é

$$\Phi_t(y_0) = (y_0 - 1)e^{-t} + 1,$$

os quais satisfazem o teorema de Grobman-Hartman, pois

$$h(\varphi_t(x_0)) = h\left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-t}}\right) = \frac{(x_0 - 1)e^{-t}}{x_0} + 1 = \Phi_t(h(x_0))$$

Se a condição inicial x_0 e y_0 em (3.4.28) e (3.4.29) são fuzzy, temos os seguintes modelos associados

$$\begin{cases} x'(t) &= x(1 - x) \\ x(0) &\in X_0, \end{cases} \quad (3.4.30)$$

onde $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e,

$$\begin{cases} y'(t) &= y(t) - 1 \\ y(0) &\in Y_0, \end{cases} \quad (3.4.31)$$

com $Y_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Logo, para $[X_0]^\alpha = [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha]$ e $[Y_0]^\alpha = [y_{01}^\alpha, y_{02}^\alpha]$, $\alpha \in [0, 1]$, aplicando o princípio de extensão de Zadeh em $\varphi_t(x_0)$ e $\Phi_t(x_0)$, temos que os α -níveis dos fluxos fuzzy de (3.4.30) e (3.4.31) são dados respectivamente por

$$[\widehat{\varphi}_t(X_0)]^\alpha = \left[\frac{x_{01}^\alpha}{x_{01}^\alpha - (x_{01}^\alpha - 1)e^{-t}}, \frac{x_{02}^\alpha}{x_{02}^\alpha - (x_{02}^\alpha - 1)e^{-t}} \right] \quad (3.4.32)$$

e,

$$[\widehat{\Phi}_t(Y_0)]^\alpha = [(y_{01}^\alpha - 1)e^{-t} + 1, (y_{02}^\alpha - 1)e^{-t} + 1]. \quad (3.4.33)$$

Como $h(x)$ é uma função contínua, então temos que:

$$[\widehat{h}(X)]^\alpha = h([x_1^\alpha, x_2^\alpha]) = \left[\frac{x_1^\alpha - 1}{x_1^\alpha} + 1, \frac{x_2^\alpha - 1}{x_2^\alpha} + 1 \right] \quad (3.4.34)$$

Das continuidades de h , φ_t e Φ_t decorrem que $h \circ \varphi_t$ e $\Phi_t \circ h$ também são contínuas. Logo para $\alpha \in [0, 1]$, temos:

$$\begin{aligned}
\left[(\widehat{h \circ \varphi_t})(X_0) \right]^\alpha &= (h \circ \varphi_t) ([X_0]^\alpha) = h(\varphi_t[X_0]^\alpha) = h([\varphi_t(x_{01}^\alpha), \varphi_t(x_{02}^\alpha)]) \\
&= h \left(\left[\frac{x_{01}^\alpha}{x_{01}^\alpha - (x_{01}^\alpha - 1)e^{-t}}, \frac{x_{02}^\alpha}{x_{02}^\alpha - (x_{02}^\alpha - 1)e^{-t}} \right] \right) \\
&= \left[\frac{(x_{01}^\alpha - 1)e^{-t}}{x_{01}^\alpha} + 1, \frac{(x_{02}^\alpha - 1)e^{-t}}{x_{02}^\alpha} + 1 \right].
\end{aligned}$$

e ,

$$\begin{aligned}
\left[(\widehat{\Phi_t \circ h})(X_0) \right]^\alpha &= (\Phi_t \circ h) ([X_0]^\alpha) = \Phi_t([h(x_{01}^\alpha), h(x_{02}^\alpha)]) \\
&= \Phi_t \left(\left[\frac{x_{01}^\alpha - 1}{x_{01}^\alpha} + 1, \frac{x_{02}^\alpha - 1}{x_{02}^\alpha} + 1 \right] \right) \\
&= \left[\frac{(x_{01}^\alpha - 1)e^{-t}}{x_{01}^\alpha} + 1, \frac{(x_{02}^\alpha - 1)e^{-t}}{x_{02}^\alpha} + 1 \right].
\end{aligned}$$

Portanto, para $\alpha \in [0, 1]$,

$$\left[(\widehat{h \circ \varphi_t})(X_0) \right]^\alpha = \left[(\widehat{\Phi_t \circ h})(X_0) \right]^\alpha,$$

Assim sendo, podemos concluir que se o equilíbrio $\bar{x} = 1$ é estável via o Teorema de linearização de Grobman- Hartman, então $\chi_{\{1\}}$ permanece estável para o problema fuzzy.

A seguir daremos um exemplo no qual os teoremas de Grobman-Hartman e de linearização fuzzy não são válidas para o caso do ponto crítico não ser hiperbólico.

Exemplo 3.4.4. *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} x' &= -y + \varepsilon(x^2 + y^2) \\ y' &= x + \varepsilon(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (3.4.35)$$

No sistema (3.4.35) a origem é um ponto de equilíbrio não hiperbólico, pois os autovalores do jacobiano em $(0, 0)$ são imaginários puros. A seguir verificaremos que o teorema de linearização de Grobman Hartman não garante a equivalência

do comportamento das trajetórias de (3.4.35) e do linearizado dado por

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x. \end{cases}$$

Para obtermos as trajetórias de (3.4.35), façamos $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, em (3.4.35), temos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} \theta' &= 1 \\ r' &= \varepsilon r^2. \end{cases} \quad (3.4.36)$$

Assim temos a seguinte solução para o sistema (3.4.36)

$$\varphi_t(\theta_0, r_0) = \left(t + \theta_0, \frac{r_0}{\varepsilon r_0 t + 1} \right).$$

Logo, as trajetórias de (3.4.36) poderão ser:

- i. um centro se $\varepsilon = 0$;
- ii. uma espiral instável se $\varepsilon > 0$, pois neste caso tanto $r(t)$ quanto $\theta(t)$ estão crescendo com o tempo e temos que a solução está espiralando para fora em sentido anti-horário;
- iii. uma espiral estável se $\varepsilon < 0$, pois $r(t)$ decresce com o tempo e $\theta(t)$ cresce com o tempo fazendo com que as soluções tendam para a origem em um sentido anti horário.

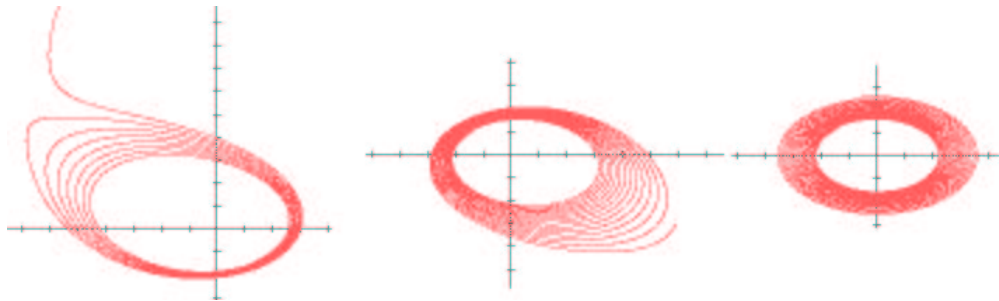


Figura 3.5: Espiral instável, estável e Centro.

Considerando a linearização em torno da origem temos o sistema

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x, \end{cases}$$

ou equivalentemente em coordenadas polares,

$$\begin{cases} \theta' &= 1 \\ r' &= 0, \end{cases} \quad (3.4.37)$$

Neste caso, temos que a origem é um centro e este é apenas o caso em que $\varepsilon = 0$.

Antes de considerarmos a fuzziness do coeficiente ε em (3.4.36) façamos a mudança de variáveis $(z_1, z_2, z_3) = (\theta, r, \varepsilon)$. Assim temos

$$\begin{cases} z'_1 &= 1 \\ z'_2 &= z_3 z_2^2 \\ z'_3 &= 0 \\ Z(0) &= (\theta_0, r_0, \varepsilon_0), \end{cases} \quad (3.4.38)$$

cuja solução é dada por

$$Z_t(\theta_0, r_0, \varepsilon_0) = \left(t + \theta_0, \frac{-r_0}{r_0 \varepsilon_0 t - 1}, \varepsilon_0 \right).$$

Supondo que ε_0 seja um número incerto e dado por $\mathbf{E}$ um número triangular fuzzy simétrico em relação à origem, temos que os α -níveis são dados por

$$Z_t(\theta_0, r_0, [\mathbf{E}]^\alpha) = \left\{ \left(t + \theta_0, \frac{-r_0}{r_0 \varepsilon_0 t - 1}, \varepsilon_0 \right) / \varepsilon_0 \in [\mathbf{E}]^\alpha \right\}$$

Neste caso temos a seguinte situação:

- i. Se $\varepsilon_0 \in [\mathbf{E}]^\alpha$ e está a direita da origem, temos uma família de espirais estáveis;
- ii. Se $\varepsilon_0 \in [\mathbf{E}]^\alpha$ e está a esquerda da origem, temos uma família de espirais estáveis;
- iii. Se $\varepsilon_0 \in [\mathbf{E}]^\alpha$ com $\varepsilon_0 = 0$, então temos um centro.

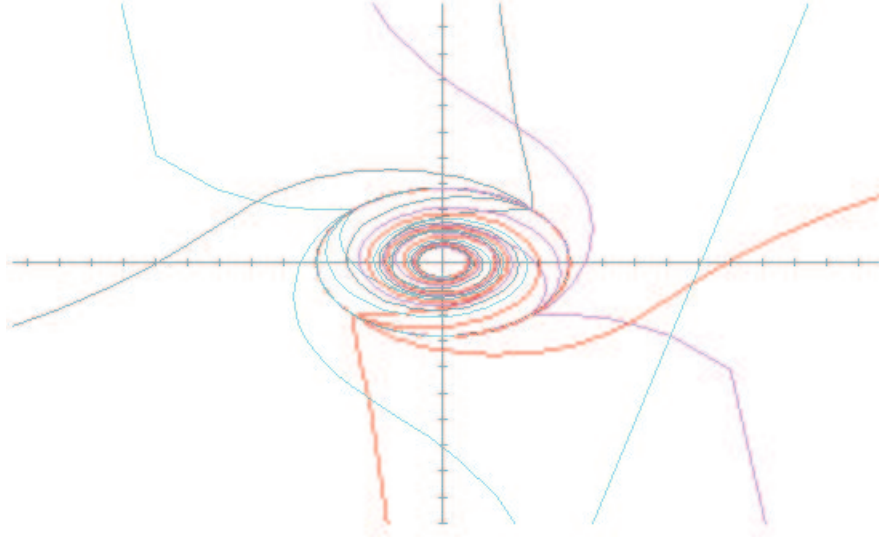


Figura 3.6: As trajetórias para (3.4.38), supondo que $\mathbf{E}_0$ seja um número triangular fuzzy simétrico em relação à origem.

Um processo muito utilizado para a visualização geométrica das soluções de sistemas não lineares de primeira ordem autônomos bidimensionais é o do plano de fase. Isto é, dado

$$\begin{cases} x'(t) = f(x) \\ y'(t) = g(x) \end{cases} \quad (3.4.39)$$

sua equação no **plano de fase** é dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(x)}. \quad (3.4.40)$$

No contexto fuzzy poderíamos pensar em soluções no plano de fase, considerando condição inicial fuzzy e/ou coeficientes fuzzy. Uma primeira tentativa seriam as seguintes definições:

Definição 3.4.5. *A solução de (3.4.40) é uma função $H(x, y, c)$, onde c é um vetor dos coeficientes, ou seja, $c = (c_1, \dots, c_n)$. Se c_i é fuzzy para algum $i = 1, \dots, n$ temos que $\hat{H}(x, y, C)$ obtida aplicando-se o princípio de extensão de Zadeh em H , em relação à c , é a equação no plano de fase fuzzy de (3.4.40) quando algum dos*

coeficientes da mesma for fuzzy.

Definição 3.4.6. *A solução de (3.4.40) é uma função $H(x, y, k)$, onde k é a constante de integração. Se a condição inicial for fuzzy temos que $\widehat{H}(x, y, K)$, obtida aplicando-se o princípio de extensão de Zadeh em H em relação à constante de integração k , é a equação do plano de fase fuzzy de (3.4.40) quando a condição inicial é fuzzy.*

As soluções periódicas fuzzy poderiam ser definidas por:

Definição 3.4.7. *Um ciclo ou órbita periódica de (3.4.24) é qualquer solução fechada de (3.4.24) a qual não é um ponto de equilíbrio da mesma, ou seja, uma solução $\widehat{\varphi}_t(x_0)$ de (3.4.24) é denominada uma solução periódica de período T , com $T > 0$, se*

$$\widehat{\varphi}_{t+T}(X_0) = \widehat{\varphi}_t(X_0), \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

De qualquer forma isto abre um novo caminho para o estudo de sistemas fuzzy no qual esperamos trabalhar no futuro.

Capítulo 4

O modelo Presa-Predador com Incerteza nos Parâmetros

4.1 Introdução

O primeiro modelo presa-predador foi estabelecido e analisado independentemente por Lotka [22] e Volterra [40] por volta de 1925. A dinâmica do modelo é descrita pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' &= ax - \gamma xy \\ y' &= -by + \omega xy, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

onde $x = x(t)$ é a densidade de presas, $y = y(t)$ a do predador e os coeficientes a, b, γ, ω são constantes positivas, tais que a é a taxa de crescimento das presas, b a taxa de mortalidade dos predadores e γ, ω são as medidas de interação entre as duas espécies, respectivamente.

O modelo (4.1.1) reflete a afirmação de que a razão de crescimento da população de presas na ausência de predadores é a , mas decresce linearmente com a presença de predadores. Também, na ausência de presas, os predadores morrem a uma razão constante b , mas cresce linearmente com a densidade das presas. O sistema (4.1.1) admite dois pontos de equilíbrio: a origem que é instável e $(b/\gamma, a/\omega)$ que é estável, sendo que as trajetórias são curvas fechadas no plano de fase [9].

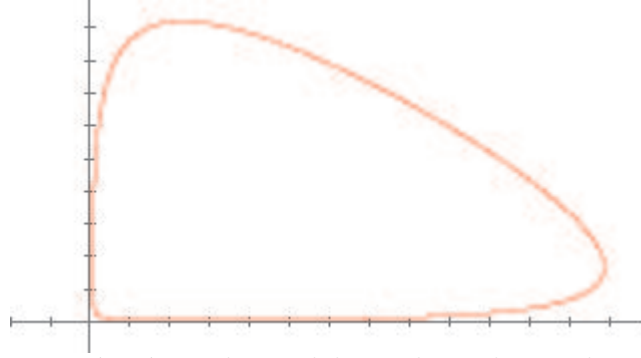


Figura 4.1: Trájetórias do modelo Lotka-Volterra determinístico.

Outro exemplo interessante de interação presa-predador é o modelo proposto por Ivlev e Watt

$$\begin{cases} x' &= rx \left(1 - \frac{x}{ck}\right) - ry[1 - e^{-x}] \\ y' &= -sy + by[1 - e^{-x}], \end{cases}$$

onde considera-se o ruído demográfico. Neste caso, supõe-se que somente a variável de estado x da interação presa-predador é afetado e dado por $1 - e^{-x}$, (veja mais detalhes em [20]), implicando que a razão de nascimento das presas tem uma densidade dependente (estabilizante), isto é, a limitação relativamente fraca da população de presas conduz ao aparecimento de um ciclo limite[24].

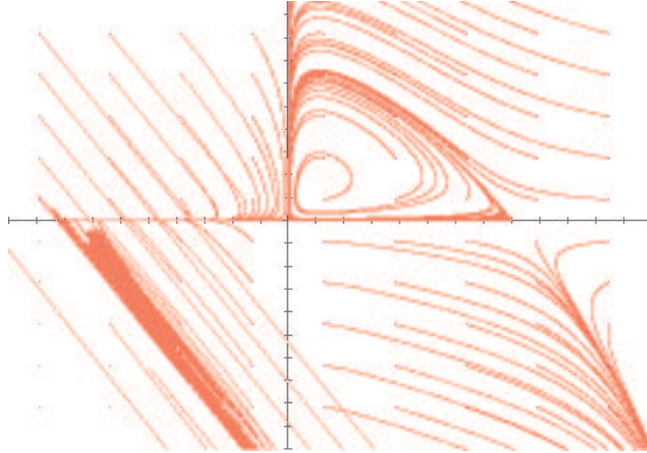


Figura 4.2: O gráfico do modelo de Ivlev e Watt para $b = 3, s = 2, ck = 4, r = s$.

Em 1936, Kolmogorov [9] sugere o seguinte modelo geral para a in-

teração presa-predador

$$\begin{cases} x' &= x f(x, y) \\ y' &= y g(x, y) \end{cases}$$

e mostra que sob certas hipóteses existe um ciclo limite e as populações irão sustentar oscilações periódicas. May [24] verificou que muitos dos modelos Lotka-Volterra específicos na literatura podem originar soluções ciclo limites estáveis, em particular naqueles que têm uma fraca densidade dependente de presas.

No entanto, a modelagem de qualquer sistema envolve a perda de algumas informações inerentes ao sistema. Isto está implícito na modelagem, já que a proposta da mesma é a de permitir a análise ou descrição das partes que interessam para o estudo, excluindo outras que não são de interesse ou ainda aquelas que tornam o modelo intratável.

Usualmente quando ocorrem tais problemas no modelo é sugerido a utilização da teoria estocástica. A priori, podemos considerar as incertezas existentes nos modelos determinístico através da teoria estocástica, supondo que um ou mais parâmetros tenham flutuações aleatórias. Neste caso, no lugar das trajetórias teremos uma distribuição de probabilidade para as populações, com flutuações estocásticas impostas sobre as oscilações determinísticas.

Mas em alguns casos onde a aleatoriedade dos fenômenos não pode ser estabelecida, ou quando não existe dados suficientes para avaliação, modelos que utilizam a teoria de subconjuntos fuzzy podem ser vistos como a aproximação mais indicada.

Na seção 4.2 a seguir verificaremos a dificuldade em se fazer a análise qualitativa de (4.1.1) de forma analítica, ao supormos que as interações entre as duas espécies são diferenciadas, devido a heterogeneidade da população. Primeiramente estudaremos a dinâmica populacional do modelo presa-predador considerando apenas a compartimentalização da população de presas conforme a idade e em seguida tanto das presas como dos predadores.

Na seção 4.3 a fuzicidade existente nas variáveis de (4.1.1) são transportadas para os parâmetros. Sabemos que a solução de (4.1.1) com parâmetros fuzzy é a extensão de Zadeh da solução determinística, conforme Teorema 2.6.2 do Capítulo 2. No entanto, para (4.1.1) sabemos que não podemos obter a solução

analítica resolvendo o sistema de equações diferenciais e além disso nada podemos concluir através do sistema linearizado em torno do equilíbrio não nulo, pois o equilíbrio não é hiperbólico e assim o Teorema de Grobman-Hartman não poderá ser utilizado neste caso (veja o Exemplo 3.4.4). No entanto, no caso bidimensional podemos fazer a análise dos modelos utilizando a equação do plano de fase e aqui a extensão de Zadeh da solução da equação do plano de fase será a solução da equação do plano de fase fuzzy, conforme Definições 3.4.5 e 3.4.6 no final do Capítulo 3.

4.2 Lotka-Volterra Compartmentado

Com o intuito de considerar as diferenças de interação presa-predador conforme a heterogeneidade das presas no modelo (4.1.1), consideraremos o seguinte modelo compartimentalizado, onde a distinção das presas é considerada na idade delas:

Modelo I:

$$x_1' = -k_1x_1 + k_2x_2 - r_1x_1y \quad (4.2.2)$$

$$x_2' = k_1x_1 - k_3x_2 - r_2x_2y \quad (4.2.3)$$

$$y' = -r_3y + r(x_1 + x_2)y, \quad (4.2.4)$$

onde

x_1 : jovens, velhos e doentes da classe de presas;

x_2 : adultos da classe de presas;

y : classe dos predadores;

k_1 : taxa de conversão de filhotes presas para adultos;

k_2 : taxa de natalidade de presas mais a taxa de velhos e doentes para

x_1 ;

k_3 : taxa de passagem de velhos e doentes para x_1 ;

r_1, r_2 : taxa de presas da classe x_1 e x_2 , respectivamente que são capturados pelo predador;

r_3 : taxa de mortalidade dos predadores;

r : taxa de conversão da biomassa de presas capturadas em predadores.

Análise da Estabilidade

Pontos Críticos de (1):

$$-k_1x_1 + k_2x_2 - r_1x_1y = 0 \quad (4.2.5)$$

$$k_1x_1 - k_3x_2 - r_2x_2y = 0 \quad (4.2.6)$$

$$-r_3y + rx_1y + rx_2y = 0 \quad (4.2.7)$$

A equação (4.2.7) nos dá $y = 0$ ou $-r_3 + rx_1 + rx_2 = 0$, ou ainda,

$$x_1^* = \frac{r_3}{r} - x_2^* \quad (4.2.8)$$

Adicionando (4.2.5) com (4.2.6) e utilizando (4.2.8), com a hipótese de que $k_2 = k + k_3$, obtemos:

$$x_2^* = \frac{r_1r_3y^*}{r(k + (r_1 - r_2)y^*)} \quad (4.2.9)$$

Agora, substituindo (4.2.8) e (4.2.9) em (4.2.6), obtemos:

$$y^* = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 + 4r_1r_2kk_1}}{2r_1r_2}, \quad (4.2.10)$$

onde $D = r_1(k_1 + k_3 - k_1(r_1 - r_2))$.

A linearização através do jacobiano no equilíbrio (x_1^*, x_2^*, y^*) , nos dá a seguinte equação característica:

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \quad (4.2.11)$$

onde

$$A = k_1 + r_1y^* + k_3 + r_2y^*,$$

$$B = k_1k_3 + k_1r_2y^* + r_1k_3y^* + r_1r_2(y^*)^2 + rr_1x_1^*y^* + rr_2x_2^*y^* - k_1k_2,$$

$$C = \frac{y^*r_1r_2}{k + (r_1 - r_2)y^*} \{2kr_2y^* + r_2(r_1 - r_2)(y^*)^2 + k(k_1 + k_3)\}.$$

Aqui os coeficientes A e C do polinômio característico são positivos.

Por outro lado, temos as seguintes relações algébricas entre as raízes e os coeficientes de (4.2.11): se λ_1, λ_2 e λ_3 são raízes distintas não nulas de (4.2.11), então:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = -A, \quad \sum_{i,j \atop i \neq j}^3 \lambda_i \lambda_j = B, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -C.$$

Donde segue que:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 < 0, \tag{4.2.12}$$

pois $C > 0$.

Por outro lado por Routh-Hurwitz (veja, [26, p.703]), temos as seguintes condições para os coeficientes de (4.2.11):

$$A > 0, C > 0 \text{ e } AB - C > 0,$$

para que todas as raízes da equação (4.2.11) tenham parte real negativa.

Assim sendo:

- i. Se $AB > C$, então $AB - C > 0$, donde segue por Routh-Hurwitz que as três raízes tem parte real negativa. Logo, o equilíbrio (x_1^*, x_2^*, y^*) é assintoticamente estável;
- ii. Se $AB = C$, a equação característica (4.2.11) se reduz a

$$(\lambda + A)(\lambda^2 + B) = 0$$

Como por hipótese $A > 0$ e $C > 0$, então $B > 0$, então temos uma raiz real negativa e duas imaginárias puras.

Então, o equilíbrio (x_1^*, x_2^*, y^*) será estável.

- iii. Finalmente, para $AB < C$, fazendo $\lambda = -A$, na equação característica (4.2.11), temos

$$-A^3 + A^3 - BA + C = -BA + C > 0.$$

Por outro lado, notemos que para $\lambda \rightarrow -\infty$, (4.2.11) tenderá a $-\infty$ e assim, existirá uma raiz negativa $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_1 \in (-\infty, A)$.

Como λ_1 é uma das raízes de (4.2.11), temos que

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = (\lambda - \lambda_1)(\lambda^2 + (A + \lambda_1)\lambda + \text{resto}).$$

Logo, se λ_2 e λ_3 são as outras duas raízes de (4.2.11), devemos ter $\lambda_2 + \lambda_3 = -(A + \lambda_1) > 0$, pois $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_1 \in (-\infty, A)$ e além disso, $\lambda_2\lambda_3 > 0$, por (4.2.12). Portanto, λ_2 e λ_3 são raízes reais positivas ou um par de complexas conjugadas com a parte real positiva.

Portanto, o equilíbrio (x_1^*, x_2^*, y^*) é instável

Para o equilíbrio nulo, temos que a equação característica (4.2.11) é reduzida a:

$$\lambda^3 + (k_1 + k_3)\lambda^2 + k_1k_3\lambda = 0,$$

cujas raízes são $0, -k_1$ e $-k_3$.

No exemplo a seguir supomos $r_2 = 0.2 < r = 0.25 < r_1 = 0.3$, pois consideramos que seja mais natural que os filhotes e velhos sejam predados mais facilmente do que as presas adultas.

Exemplo 4.2.1. *Consideremos a seguinte compartimentalização do modelo Lotka-Volterra*

$$x_1' = -0.3x_1 + 0.6x_2 - 0.3x_1y \quad (4.2.13)$$

$$x_2' = 0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_2y \quad (4.2.14)$$

$$y' = -0.75y + 0.25xy, \quad (4.2.15)$$

Pontos Críticos:

Os pontos críticos serão obtidos, resolvendo-se o seguinte sistema de equações:

$$-0.3x_1 + 0.6x_2 - 0.3x_1y = 0 \quad (4.2.16)$$

$$0.3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_2y = 0 \quad (4.2.17)$$

$$-0.75y + 0.25xy = 0 \quad (4.2.18)$$

A equação (4.2.19) nos dá $y = 0$ ou $x_1 = 3 - x_2$, pois $x = x_1 + x_2$.

1) se $y = 0$, temos:

$$-0.3x_1 + 0.6x_2 = 0$$

$$0.3x_1 - 0.1x_2 = 0$$

Então, temos que o ponto crítico será dado por $P(0, 0, 0)$.

2) se $y \neq 0$, $x_1 = 3 - x_2$, e

$$-0.9 + 0.9x_2 - 0.9y + 0.3x_2y = 0$$

$$0.9 - 0.4x_2 - 0.2x_2y = 0$$

Temos então o ponto $P_1(1.5, 1.5, 1)$.

Análise de Estabilidade: Temos que a matriz jacobiana associada ao modelo compartimentalizado será dado por:

$$J(x_1^*, x_2^*, y^*) = \begin{bmatrix} -0.3 - 0.3y^* & 0.6 & -0.3x_1^* \\ 0.3 & -0.1 - 0.2y^* & -0.2x_2^* \\ 0.25y^* & 0.25y^* & -0.75 + 0.25(x_1^* + x_2^*) \end{bmatrix}$$

Logo, para o ponto $P(0, 0, 0)$, temos a seguinte equação característica associada

$$\lambda^3 - 0.75\lambda^2 - 0.05\lambda - 0.1575 = 0,$$

cujas raízes são dadas por $\lambda_1 = 0.9692$, $\lambda_{2,3} = -0.1096 \pm 0.3879i$, e donde segue que a origem é um ponto de equilíbrio instável.

Agora, para o ponto $P(1.5, 1.5, 1)$, temos

$$\lambda^3 + 0.9\lambda^2 + 0.1875\lambda + 0.1575 = 0$$

cujas raízes são dadas por $\lambda_1 = -0.8887$, $\lambda_{2,3} = -0.0056 \pm 0.4213i$, ou seja, $P(1.5, 1.5, 1)$ é estável.

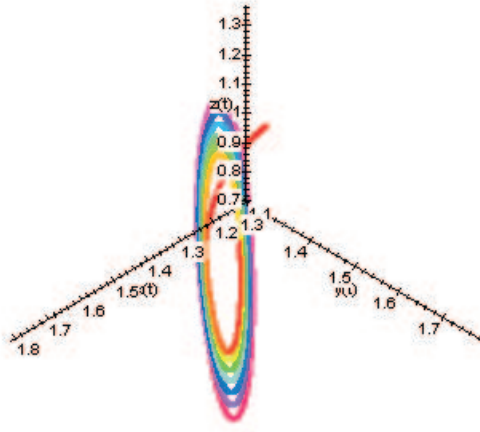


Figura 4.3: Trajetória do modelo Lotka-Volterra compartimentado.

Vimos a dificuldade em fazermos a análise qualitativa de (4.1.1) ao subdividirmos somente a população de presas em duas classes. A seguir faremos um refinamento na divisão das classes de presas e predadores, isto é, as populações de presas e predadores serão divididas em classes de filhotes, adultos e velhos. Além disso, para considerarmos as diferenças existentes entre os indivíduos das populações, consideraremos as seguintes hipóteses: suponhamos que a “força de ser presa e de predador,” sejam dados respectivamente por:

$$P(x) = k_1 * x_1 + k_2 * x_2 + k_3 * x_3$$

$$P(y) = h_1 * y_1 + h_2 * y_2 + h_3 * y_3,$$

onde os k'_i s, representam o quanto os indivíduos de uma determinada classe são mais presas em relação aos de uma outra classe, enquanto os h'_i s, simbolizam o quanto os indivíduos de uma determinada classe predam mais do que de uma outra classe. Sabemos que estas diferenças influenciam na dinâmica da interação dos indivíduos, então temos ainda que:

$$\gamma_i = r * P(x) * P(y)$$

$$\omega = s * P(x) * P(y).$$

Notemos que no encontro de uma presa e um predador, as diferenças etárias influenciam fortemente na interação da presa com o predador, ou seja, nos valores de γ_i e de ω_i , por exemplo, se uma presa filhote se encontra com um predador adulto a chance de ocorrer predação é praticamente certa, mas a biomassa adquirida pelo predador é pequena. No entanto, se o predador encontra uma presa velha a chance de predação em relação ao filhote é um pouco menor, porém em termos de ganho de biomassa para o predador é muito maior.

Levando em conta as considerações anteriores e supondo que as populações de presas e predadores estão subdivididas em filhotes, adultos e velhos, temos o seguinte modelo compartimentado:

Modelo2:

$$\begin{cases} x'_1 &= a_1x_1 - b_1x_1 - \gamma_1x_1y_2 - \gamma_2x_1y_3 \\ x'_2 &= b_1x_1 - b_2x_2 - \gamma_3x_2y_2 - \gamma_4x_2y_3 \\ x'_3 &= b_2x_2 - \gamma_5x_3y_2 - \gamma_6x_3y_3 \\ y'_1 &= -a_2(y_1 + y_2) - c_1y_1 + \omega xy \\ y'_2 &= c_1y_1 - c_2y_2 \\ y'_3 &= c_2y_2 - dy_3, \end{cases} \quad (4.2.19)$$

onde

x_1 : filhotes da classe de presas;

x_2 : adultos da classe de presas;

x_3 : velhos da classe de presas;

y_1 : filhotes da classe dos predadores;

y_2 : adultos da classe dos predadores;

y_3 : velhos da classe dos predadores;

b_1 : taxa de conversão de filhotes presas para adultos;

b_2 : taxa de conversão de adultos presas para velhos;

c_1 : taxa de conversão de filhotes predadores para adultos;

c_2 : taxa de conversão de adultos predadores para velhos;

a_1 : taxa de natalidade de presas;

a_2 : taxa de mortalidade dos predadores filhotes devido a ausência de

presas;

d : taxa de mortalidade dos predadores velhos;

$\gamma_i, i = 1, \dots, 6$: taxas de predação da classe x_1, x_2 e x_3 , respectivamente que são capturados pelo predador adulto ou velho;

ω : conversão da biomassa de presas capturadas em predadores.

Aqui $x_1 + x_2 + x_3 = x$ e $y_1 + y_2 + y_3 = y$.

A seguir apresentamos a simulação do modelo (4.2.19).

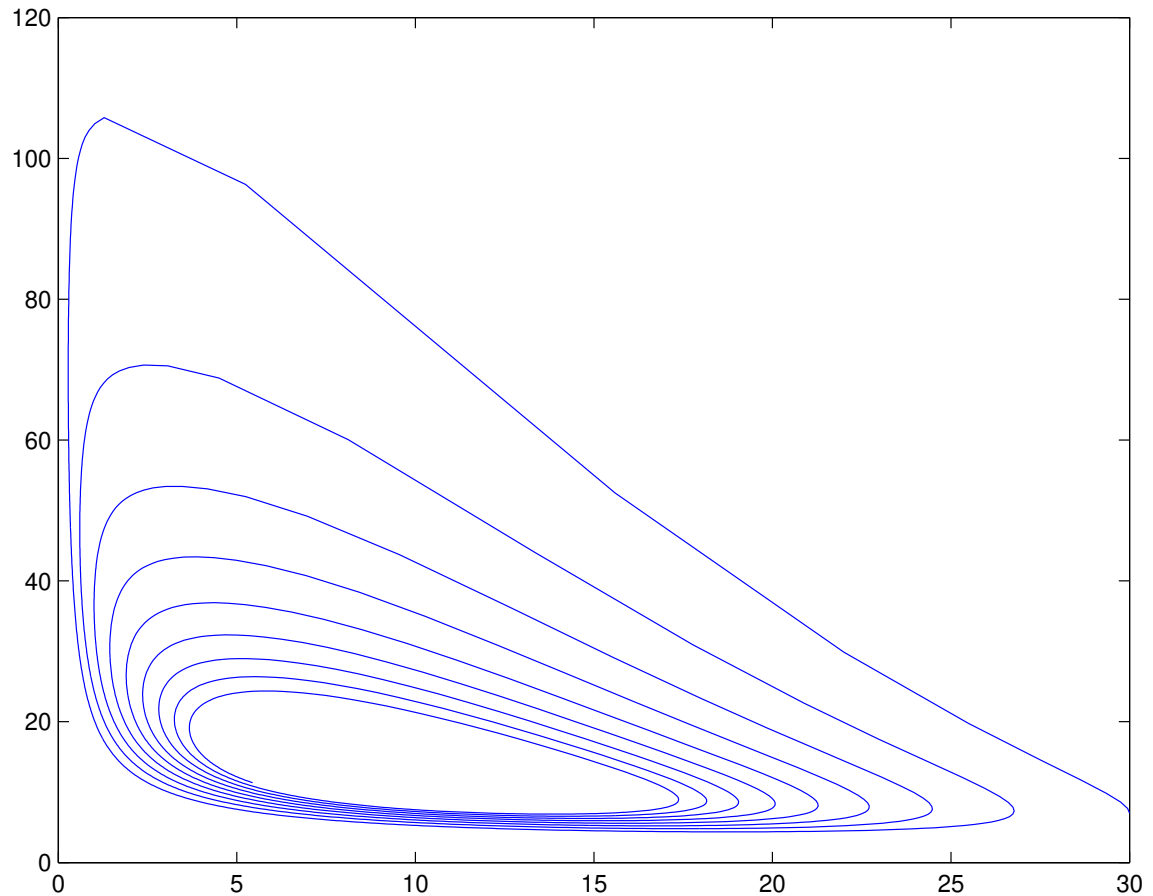


Figura 4.4: Equilíbrio assintoticamente estável do modelo Lotka-Volterra compartmentado em filhotes, adultos e velhos para as presas e predadores .

No modelo (4.2.19) fica claro a dificuldade em fazermos a análise qualitativa analiticamente quando desejamos considerar diferentes aspectos existentes na dinâmica populacional de um modelo presa-predador. A seguir estudaremos o

mo-delo Lotka-Volterra considerando as diferenças de interação das diferentes classes de presas e predadores por meio da teoria fuzzy.

4.3 Lotka-Volterra com Parâmetros Fuzzy

Para considerar a fuzziness dos parâmetros no modelo (4.1.1) oriundo da fuzziness das variáveis de estado, devido a idade das presas e dos predadores ser um fator determinante para o grau de predação na interação da presa com o predador.

A seguir estudaremos o modelo Lotka-Volterra utilizando a teoria desenvolvida no Capítulo 2 para equações diferenciais com parâmetros fuzzy e a de plano de fase fuzzy ao final do Capítulo 3.

Para supor que os parâmetros γ e ω sejam fuzzy no modelo (4.1.1), primeiramente fazemos a mudança de variáveis $z = (x, y, \gamma, \omega)$, em (4.1.1)

$$\begin{cases} z'_1 &= az_1 - z_1 z_2 z_3 \\ z'_2 &= -bz_2 + z_1 z_2 z_4 \\ z'_3 &= 0 \\ z'_4 &= 0 \\ z(0) &= (x(0), y(0), \gamma_0, \omega_0). \end{cases} \quad (4.3.20)$$

Supondo que os parâmetros γ_0 e ω_0 sejam números fuzzy, isto é, $\Gamma_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $\Omega \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, temos simplificadaamente o seguinte modelo

$$\begin{cases} z' &= f(z) \\ z(0) &\in Z_0 \end{cases} \quad (4.3.21)$$

Segundo o Teorema 2.6.2 do Capítulo 2, se pudessemos obter a solução analítica $\Psi_t(z_0)$ diretamente de (4.3.20), então a extensão de Zadeh $\widehat{\Psi}_t(Z_0)$ seria a solução de (4.3.21). No entanto, sabemos que não é possível obter as soluções explícitas de $z_1(t)$ e $z_2(t)$ para (4.3.20).

Assim sendo, a análise do modelo Lotka-Volterra será feita através da

equação do plano de fase de (4.1.1), isto é,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by + \omega xy}{ax - \gamma xy},$$

cuja solução é dada por:

$$H(x_0, y_0, \gamma, \omega) = a \ln y - \gamma y + b \ln(cx) - \omega x = 0, c = \left(\frac{1}{k}\right)^{1/b}, k = \frac{e^{\omega x_0 + \gamma y_0}}{x_0^b y_0^a}.$$

Suponhamos agora que os coeficientes γ e ω no modelo (4.3.20) são números fuzzy em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, com α -níveis dados por $[\Omega]^\alpha = [\omega_{01}^\alpha, \omega_{02}^\alpha]$ e $[\Gamma]^\alpha = [\gamma_{01}^\alpha, \gamma_{02}^\alpha]$, para $\alpha \in [0, 1]$.

Logo, segue da Definição 3.4.5 que a equação no plano de fase fuzzy, é dada pela extensão de Zadeh de $H(x_0, y_0, \gamma, \omega)$ em relação a γ e ω .

Observemos que, para cada $\alpha \in [0, 1]$, temos que:

$$[\hat{H}(x_0, y_0, \Gamma, \Omega)]^\alpha = H(x_0, y_0, [\Gamma \times \Omega]^\alpha) = \{H(x_0, y_0, \gamma, \omega)/\omega \in [\Omega]^\alpha \text{ e } \gamma \in [\Gamma]^\alpha\}.$$

Logo, quando fixamos α, γ e ω , temos que $H(x_0, y_0, [\Gamma \times \Omega]^\alpha)$ é uma equação de plano de fase do tipo determinístico. Assim, o gráfico das trajetórias no plano de fase fuzzy é constituído de uma família de trajetórias do tipo determinístico.

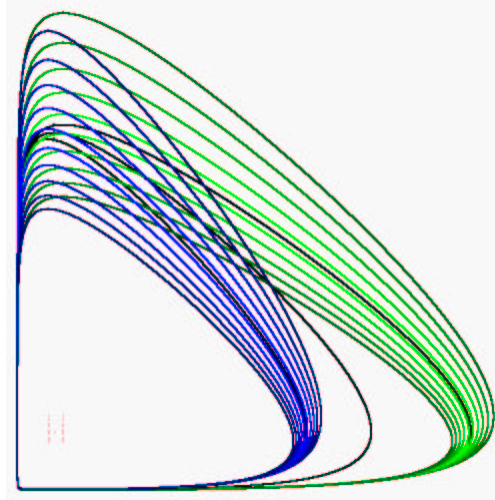


Figura 4.5: Trájetórias do modelo Lotka-Volterra para os coeficientes γ e ω fuzzy.

Se a condição inicial for fuzzy em (4.3.20), temos que os α -níveis de Z_0 serão dados por $[Z_0]^\alpha = [X_0 \times Y_0]^\alpha = \{(x_0, y_0)/x_0 \in [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha] \text{ e } y_0 \in [y_{01}^\alpha, y_{02}^\alpha]\}$.

Neste caso da Definição 3.4.6, segue que os α –níveis para $\alpha \in [0, 1]$ da equação no plano de fase fuzzy do modelo fuzzy (4.3.21) são dadas por

$$[\hat{H}(Z_0, \gamma, \omega)]^\alpha = H([Z_0]^\alpha, \gamma, \omega) = \{H(x_0, y_0, \gamma, \omega) / x_0 \in [x_{01}^\alpha, x_{02}^\alpha] \text{ e } y_0 \in [y_{01}^\alpha, y_{02}^\alpha]\},$$

que é equivalente a fazer a extensão de Zadeh de H em relação a constante de integração $k = \frac{e^{\omega x_0 + \gamma y_0}}{x_0^b y_0^a}$.

Neste último capítulo procuramos estudar as primeiras noções de plano de fase fuzzy que nos conduzirá a outros trabalhos futuros.

Considerações Finais

No Capítulo 2, verificamos que para cada $t > 0$ os conjuntos atingíveis para o PVIF autônomo com coeficientes e/ou condição inicial fuzzy podem ser obtidos via interpretação de Hüllermeier, onde o PVIF é reescrito como uma família de inclusões diferenciais ou via extensão de Zadeh da solução determinística. Observemos que no contexto de Hüllermeier uma das formas clássicas de obtermos as trajetórias é via técnica de seleções, ou seja, fixada uma condição inicial e um elemento da multifunção, temos um problema de Cauchy a se resolver. No entanto, via extensão de Zadeh obtemos todas as trajetórias fuzzy, estendendo a solução do Problema do Valor Inicial (PVI) autônomo determinístico.

No Capítulo 3, estabelecemos a teoria de estabilidade via fluxo determinístico estendido, mais especificamente no Teorema 3.3.8 estabelecemos que se o equilíbrio determinístico é um atrator, então o equilíbrio fuzzy que é a função característica do equilíbrio permanece um atrator no espaço dos subconjuntos fuzzy compactos e não vazios de $\mathbb{R}^n$. As relações de estabilidade existentes entre um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ e o subconjunto fuzzy χ_A são estabelecidas via Teorema 3.3.10 e Corolário 3.3.11. Estes resultados se fizeram necessários pois, através do modelo de Verhulst fuzzy observamos que poderão surgir outros equilíbrios fuzzy além daqueles que são a função característica dos equilíbrios determinísticos, quando os coeficientes e/ou a condição inicial são fuzificados. Porém, no modelo de Verhulst fuzzy, o novo equilíbrio fuzzy obtido não é estável.

Notemos que a teoria de estabilidade fuzzy foi estabelecido somente para o PVIF autônomo, mas convém ressaltar que estabilidade fuzzy para o caso não autônomo foi desenvolvida por Diamond [6] via teoria de inclusões diferenciais.

Para o estudo qualitativo do PVIF autônomo não linear, estabelece-

mos o Teorema de Linearização análogo ao Teorema de Grobman-Hartman, mas falta estabelecer um resultado equivalente para o estudo dos equilíbrios fuzzy que não são as funções características de equilíbrios hiperbólicos determinísticos.

Por último, introduzimos o conceito de plano de fase fuzzy que pode ser aprimorado para ser utilizado no estudo das trajetórias fuzzy.

Referências Bibliográficas

- [1] J. P. Aubin, *Fuzzy differential equation*, Problems of Control and Information theory **19** (1990), 55–67.
- [2] J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential inclusions*, Set-Valued Maps and Viability Theory, Springer-Verlag, Alemanha, 1984.
- [3] V. A. Baidosov, *Fuzzy differential inclusions*, PMM U.S.S.R. **54** (1990), no. 1, 8–13.
- [4] L. C. Barros, *Sobre sistemas dinâmicos fuzzy*, Ph.D. thesis, IMECC-UNICAMP, Departamento de Matemática, Campinas, 1997.
- [5] R. C. Bassanezi and L. C. Barros, *A simple model of life expectancy with subjective parameters*, Kybernetes **24** (1995), no. 7, 91–98.
- [6] P. Diamond, *Time-dependent differential inclusions, cocycle attractors and fuzzy differential equations*, IEEE Trans. Fuzzy Systems **7** (1999), 734–740.
- [7] ———, *Stability and periodicity in fuzzy differential equations*, IEEE Trans. Fuzzy Systems **8** (2000), 583–590.
- [8] E. Román-Flores, L. C. Barros e R. C. Bassanezi, *A note on zadeh extensions*, Fuzzy Sets and Systems **117** (2001), 327–331.
- [9] L. Edelstein-Keshet, *Mathematical models of biology*, Birkhäuser Mathematics, Macgraw-Hill, Mexico, 1988.
- [10] A. F. Fillipov, *On certain questions in the theory of optimal control*, J.SIAM Control **1** (1967), 609–621.

- [11] R. Füller and T. Keresztfalvi, *On generalization of nguyen's theorem*, Fuzzy Sets and Systems **41** (1990), 371–374.
- [12] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [13] J. K. Hale and H. Koçak, *Dynamics and bifurcations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [14] E. Hullermeier, *An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems*, Int.J.Uncertainty, Fuzziness Knoeledge-Bases Syst. **5** (1997), no. 2, 117–137.
- [15] W. Giering III and Abraham Kandel, *The application of fuzzy set theory to the modelling of competition in ecological systems*, Fuzzy Sets and Systems **9** (1983), 103–127.
- [16] J.J.Buckley, *Solving fuzzy equations*, Fuzzy Sets and Systems **50** (1992), 1–14.
- [17] O. Kaleva, *Fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **24** (1987), 301–317.
- [18] A. Kandel and W. J. Byatt, *Fuzzy differential equation*, Proc. Intern. Conf. on Cybernets and Society (1978).
- [19] P. E. Kloeden, *Remarks on peano-like theorems for fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **44** (1991), 161–163.
- [20] V. Krivan and G. Colombo, *A non - stochastic approach for modeling uncertainty in population dynamics*, Bulletin of Mathematical Biology **60** (1998), 721–751.
- [21] R. C. Bassanezi L. C. Barros and P. A. Tonelli, *Fuzzy modelling in population dynamics*, Ecological Modelling **128** (2000), 27–33.
- [22] Lotka, *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.

- [23] R. C. Bassanezi M. Rojas-Medar and H. Román-Flores, *A generalization of the minkowski embedding theorem and applications*, Fuzzy Sets and Systems **102** (1999), 263–269.
- [24] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems*, Princeton University Press, New York, 1973.
- [25] M. Mizumoto and K. Tanaka, *Advances in fuzzy set theory and applications*, pp. 153–164, North-Holland, Amsterdam-New York, 1979.
- [26] J.D. Murray, *Mathematical biology*, second ed., Biomathematics Texts, vol. 19, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [27] H. T. Nguyen, *A note on the extension principle for fuzzy sets*, J. Math. Analysis and Applications **64** (1978), 369–380.
- [28] M. Oberguggenberger and S. Pittschmann, *Differential equations with fuzzy parameters*, Math. Mod. Systems **5** (1999), 181–202.
- [29] B. Oksendal, *Stochastic differential equations: an introduction with applications*, Springer-Verlag, 1992.
- [30] H. Ouyang and Y. Wu, *On fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **32** (2000), no. 2, 321–325.
- [31] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, vol. 7, Springer Verlag, 1993.
- [32] M. L. Puri and D.A. Ralescu, *Differentials for fuzzy functions*, J. Math. Anal. Appl. **91** (1983), 552–558.
- [33] C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, CRC Press LLC, Florida, 1999.
- [34] J. Roughgarden, *Theory of population genetics and evolutionary ecology*, 1979.

- [35] T. Rzezuchowski and J. Wasowski, *Differential equation with fuzzy parameters via differential inclusions*, J. Math. Analysis and Applications **255** (2001), 177–194.
- [36] S. Seikkala, *On the fuzzy initial value problem*, Fuzzy Sets and Systems **24** (1987), 309–330.
- [37] S. Seikkala and D. Vorobiev, *Towards the theory of fuzzy differential equations*, Fuzzy Sets and Systems **125** (2002), 231–237.
- [38] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [39] M. Turelli, *Stochastic community theory: A partially guided tour*, Biomathematics, vol. 17, pp. 321–339, 1986.
- [40] V. Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie d'animali conviventi*, Mem. Acad. Lincei **2** (1926), 31–113.
- [41] T. Wazewski, *On an optimal control problems*, Proc. Conference Differential equations and their applications (1962), 229–242, Praga.
- [42] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control **8** (1965), 338–353.
- [43] Y. Zhu and L. Rao, *Differential inclusions for fuzzy maps*, Fuzzy Sets and Systems **112** (2000), 257–261.