UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

ADRIAN RICARDO GÓMEZ PLATA

EQUAÇÕES DIFERENCIAS FRACIONÁRIAS NÃO LINEARES

ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONALES NO LINEALES

CAMPINAS
2016

Adrian Ricardo Gómez Plata

Equações Diferencias Fracionárias não Lineares

Ecuaciones Diferenciales Fraccionales no Lineales

Tesis presentada al Instituto de Matemáticas, Estadística y Computación Cientifica de la Universidad Estatal de Campinas como requisito parcial exigido para optar por el titulo de Doctor en Matemática Aplicada.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Adrian Ricardo Gómez Plata e orientada pelo Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira.

Campinas
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Gómez Plata, Adrian Ricardo, 1975-
G586e Ecuaciones diferenciales fraccionales no lineales / Adrian Ricardo Gómez Plata. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Edmundo Capelas de Oliveira.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Cálculo fracionário. 2. Burgers, Equação de. 3. Cálculo das variações. 4. Equações diferenciais não-lineares. I. Oliveira, Edmundo Capelas de,1952-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Equações diferenciais fraccionárias não lineares
Palavras-chave em inglês:
Fractional calculus
Burgers equation
Calculus of variations
Partial differential equations, Nonlinear
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutor em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Edmundo Capelas de Oliveira [Orientador]
Jayme Vaz Junior
Marcio José Menon
Rubens de Figueiredo Camargo
Bruto Max Pimentel Escobar
Data de defesa: 01-06-2016
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 01 de junho de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR

Prof(a). Dr(a). MARCIO JOSÉ MENON

Prof(a). Dr(a). RUBENS DE FIGUEIREDO CAMARGO

Prof(a). Dr(a). BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros
encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Para mi esposa Millerlandy, mis hijos Esteban, Lina, Sofia, mis padres Claudio y Tina.

Agradecimentos

En primer lugar agradezco al Profesor EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA quien sabiamente a dirijido mis estudios en el doctorado, por su paciencia, dedicación y calidad humana para acompañarme en este proceso de formación.

Agradezco a la Universidad estadual de Campinas, en especial al IMECC por haberme acogido para estudiar el doctorado, a todas las personas que de alguna forma me colaboraron en la consecución de este objetivo.

Agradezco a diferentes personas, amistades, amigos que me ayudaron en el distrito de Barão Geraldo para que la permanencia de mi familia fuera posible en Campinas. Julian, Luiz, Juan, Jhon, Abel, Bento, Gabi, Koia, Guga, Pedro, David, Horacio, Washintong, Alessandro, Marcelo, Filidor, Didi,..., DEUS...

Finalmente agradezco a la UNIVERSIDAD MILITAR NUEVA GRANADA, por haberme dado los recursos y el tiempo para hacer este doctorado, a compañeros de esta universidad que me ayudarón en tramites administrativos relacionados a la comisión de doctorado como Lucio, Maria Nubia.

Resumo

Esta tese aborda o estudo das equações diferencias parcias fracionárias lineares e não lineares. Vamos encontrar soluções e aproximações das soluções destas equações por diferentes métodos tais como a transformada de Laplace, simetrias de Lie, método de decomposição de Adomian e o método de iteração variacional. Nos resultados que vamos apresentar na tese encontra-se, como conduzir a equação fracionária de Korteweg-de Vries numa equação diferencial fracionária não linear; a aplicação do método de iteração variacional para aproximar a solução da equação de Burgers quando a derivada fracionária é dada segundo Caputo, isto é, vamos resolver a equação de Burgers, com o uso do método de iteração variacional. Propomos um lema envolvendo os multiplicadores de Lagrange gerais associados ao método para tal equação. Finalmente estabelece-se três teoremas de convergência relacionados com a solução exata e a estimativa do máximo erro para o cálculo da solução aproximada através do método de iteração variacional. Faremos uma simples comparação de nosso método e do método de descomposição de Adomian no caso da equação de Burgers e da equação de difussão-onda.

Palavras-chave: Calculo fracionário, equações diferencias parcias, método de iteração variacional, equação de Burgers.

Abstract

In this thesis is studied fractional partial differential equations linear and non-linear. In particular are presented some methods for solve fractional differential equations linear and non-linear. We present different methods for approximate those solutions with the Laplace transform, Lie Symmetries, Adomian descomposition and variational iteration method. As contribution of this tesis, we proved as the fractional Korteweg-de Vries equation, can be converted to a fractional ordinary differential equation, as principal contributions, we present the variational iteration method for bring applications in the fractional Burgers equation finding a lemma to evaluate the Lagrange multipliers for this equations and finally we found three theorems relationship with the exact solution and the maximum error estimation for the calculated the solution approximate. We make simple comparative of the variational iteration method and the Adomian decomposition method in the Burgers equation and diffusion-wave equation.

Keywords: Fractional Calculus, Partial Differential Equations, Variational Iteration Method, Burgers Equation.

Índice de figuras

2.1. Oscilador armónico fraccional, solución con $m = 2, k = 1, c_0 = 1$. 30

2.2. Contorno de Bromwich modificado. 31

2.3. Recuperación de la memória del fenómeno de relajamiento para la solución fundamental $u_0(t) = e_\alpha(t)$ en $0 < \alpha \leq 1$. 34

2.4. Recuperación de la memória del fenómeno de oscilación para la solución fundamental $u_0(t) = e_\alpha(t)$ en $1 < \alpha \leq 2$. 35

2.5. Función de Mainardi, con $M(z; 1/2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$. 48

3.1. Aproximaciones del VIM para Eq.(3.4.63). 85

3.2. VIM para la Eq.(3.3.37) con $\alpha = 1{,}5$. 91

3.3. ADM para la Eq.(3.3.37), con $\alpha = 1{,}5$. 91

3.4. ADM y VIM para la Eq.(3.3.37), con $\alpha = 2$. 91

3.5. Solución exacta para la Eq.(3.3.37), con $\alpha = 2$. 92

4.1. $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x)$, con $\alpha = 0{,}2$. 101

4.2. $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x)$, con $\alpha = 1$. 101

4.3. $u(x, 0) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$, con $\alpha = 0{,}2$. 101

4.4. $u(x, 0) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$, con $\alpha = 1$. 102

4.5. $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), u_t(x, 0) = 0$, con $\alpha = 1{,}2$. 103

4.6. $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), u_t(x, 0) = 0$, con $\alpha = 2$. 103

4.7. ADM para la BF, con $\alpha = 1{,}0$. 105

4.8. VIM para la BF, con $\alpha = 1{,}0$. 105

4.9. Solución exacta BF, con $\alpha = 1{,}0$. 105

4.10. VIM para la BF, con $0 < x \leq 5{,}0 < t \leq 5$, $\alpha = 1{,}0$. 106

4.11. Solución exacta para la BF, con $0 < x \leq 5{,}0 < t \leq 5$, $\alpha = 1{,}0$. 106

4.12. ADM para la BF, con $0 < x \leq 5{,}0 < t \leq 5$, $\alpha = 1{,}0$. 106

Índice de cuadros

3.1. Solución aproximada de las Eqs.(3.3.21), (3.3.22) 64
3.2. Aproximación de la Eq.(3.4.10) y la iteración de Newton. 74
3.3. Comparación del VIM y ADM en el fenómeno de difusión. 88

4.1. Comparación del VIM y ADM en la BF. 105

Abreviaturas

CF	—	Cálculo Fraccional.
ADM	—	Método de Descomposición de Adomian(Adomian Descomposition Method).
KdV	—	Ecuación de Korteweg-de Vries(Korteweg-de Vries equation).
EDP	—	Ecuación Diferencial Fraccional.
EDO	—	Ecuación Diferencial Ordinaria.
EDOF	—	Ecuación Diferencial Ordinaria Fraccional.
EDP	—	Ecuación Diferencial Parcial.
EDPF	—	Ecuación Diferencial Parcial Fraccional.
BF	—	Ecuación Fraccional de Burgers.
KdVF	—	Ecuación Fraccional de Korteweg-de Vries(Korteweg-de Vries Fractional equation).
VIM	—	Método de Iteración Variacional(Variational Iteration Method).
PVI	—	Problema de Valor Inicial.
PVF	—	Problema de Valor en la Frontera.
RL	—	Derivada de Riemann-Liouville.
TL	—	Transformada de Laplace.

Índice general

Introducción **15**

1. Cálculo Fraccional **20**

1.1. Derivada fraccional de Caputo 20

1.1.1. Funciones de Mittag-Leffler y Mainardi 23

2. Ecuaciones diferenciales fraccionales lineales **26**

2.1. Ecuación diferencial de relajamiento-oscilamiento 26

2.2. Ecuación de onda, difusión y de difusión-onda 34

2.2.1. Ecuación de onda 36

2.2.2. Ecuación de difusión 40

2.2.3. Ecuación de difusión-onda 41

3. Ecuaciones diferenciales fraccionales no lineales **50**

3.1. Simetrías de Lie. Ecuaciones fraccionales de Burgers y Korteweg-de Vries . 50

3.1.1. Simétrias de una EDPF 51

3.2. Ecuación fraccional de Korteweg-de Vries e de Burgers 54

3.2.1. Ecuación fraccional de Korteweg-de Vries 54

3.2.2. Ecuación fraccional de Burgers 58

3.3. Método de descomposición de Adomian 59

3.3.1. Solución de una EDOF con ADM 59

3.3.2. Solución de una EDPF con ADM 64

3.4. Método de iteración variacional 68

3.4.1. Multiplicadores de Lagrange generalizados 69

3.4.2. La ecuación de Euler-Lagrange 70

3.4.3. Restricción variacional 74

3.4.4. VIM en EDO 75
3.4.5. VIM en EDOF 83
3.4.6. VIM en EDPF 86

4. Aproximaciones para la BF y convergencia del VIM en EDPF 93
4.1. VIM para EDPF no lineales 93
4.2. Multiplicadores de Lagrange de la BF 94
4.3. Solucion aproximada para BF 99
4.4. VIM por ADM en la BF 103
4.5. VIM y convergencia en EDPF 106

Conclusiones y perspectivas 114

Bibliografia 117

Introducción

Los profesores Rubens Figuereido Camargo y Edmundo Capelas de Oliveira realizan una interesante introduccíon histórica al cálculo fraccional [1] donde se relata la história de las ecuaciones diferenciales fraccionales. En esta introducción se realiza un resumen de las principales fechas que se relacionan con las ecuaciones diferenciales fraccionales según estos profesores; al final se mencionara los diversos métodos para el estudio de las ecuaciones diferenciales fraccionales lineales y no lineales de los últimos tiempos, así como los estudios hechos desde el Imecc (Unicamp) sobre esta temática, orientados por el profesor Edmundo Capelas de Oliveira, también se presentará los aspectos relevantes del contenido temático de esta tesis.

El nacimiento del cálculo fraccional (CF) tiene origen desde una pregunta formulada en un intercambio de correspondencias entre Leibniz y L'Hôpital en 1695. En una de esas correspondencias, Leibniz formuló una pregunta envolviendo la generalización de la derivada de orden entera para una orden arbitraria. L'Hôpital devolvió la pregunta para Leibniz, interrogando en el caso en que la orden de la derivada fuese un medio, osea,

$$D^{1/2}y\left(x\right)=\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}y\left(x\right),$$

una raíz cuadrada o una potencia fraccional. Leibniz, en su respuesta profética, aseguraba que para $y\left(x\right)=x$, la igualdad

$$d^{1/2}x=x\sqrt[2]{dx:x}$$

algún dia generaría muchas consecuencias fructíferas. Este es considerado el primer registro del CF. El término fraccional tiene un significado confuso y generalmente se asocia al *orden de una ecuación diferencial*, confusión que todavía esta abierta.
La primera operación fraccional fue desarrollada por Abel, en 1823 donde obtuvo la so-

lución de una ecuación integral derivada de la formulación del llamado problema de la tautócrona. Este problema determina la forma de una curva plana $f(\eta)$, lisa, pasando por el origen en un plano vertical tal que una partícula de masa m que cae sobre ella por la acción de la gravedad, de tal forma que el tiempo de bajada sea el mismo, independiente de la posición inicial. En este caso si T es constante entonces la ecuación integral de Abel que modela este problema es:

$$\sqrt{2g}T = \int_0^{\eta} (\eta - t)^{-1/2} f'(t)\, dt$$

donde g es la aceleración devido a la gravedad, (ξ, η) es la posición inicial. Se puede mostrar que la solución de esta ecuación es una cicloide con el vértice en el origen y la tangente en el eje-x. La solución de Abel [2] es basada en el hecho que la derivada fraccional de una función constante no es siempre igual a cero, en este caso $D_{\eta}^{1/2}(1) = (\pi\eta)^{-1/2}$.
El cálculo operacional, cuyo objetivo era recuperar funciones lineales, fue desarrollado por Heaviside a partir de 1892, donde introdujo la idea de derivada fraccional en su estudio de potencial y en lineas de transmisión eléctrica. El usa el operador con el simbolo de Gregory en la solución de la ecuación de calor. Heaviside introdució la letra p para el operador diferencial d/dt y dió la solución de la ecuación de difusión [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 p u$$

para la distribución de la temperatura $u(x,t)$ así

$$u(x,t) = Aexp\left(ax\sqrt{p}\right) + Bexp\left(-ax\sqrt{p}\right)$$

donde $p \equiv d/dt$, a, A e B son constantes. Realmente, Heaviside dio una interpretación de $\sqrt{p} = D^{1/2}$ de forma que ${}_0D_t^{1/2}(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

A partir de 1940, en una serie de artículos, Erdélyi y Kober investigaron las propiedades de la integral fraccional para parámetros complejos. Los operadores integrales definidos por Kober, desempeñan un importante papel en el estudio de las ecuaciones integrales. Erdélyi propuso una modificación en los operadores Riemann-Liouville que los lleva a una generalización de la integral fraccional de Riemann-Liouville. Conocida por el nombre de Erdélyi-Kober [4] . Em 1949, en una clásica memoria, Riesz encontro integrales de la

forma de Riemann y de Liouville, emergiendo de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, las cuales son conocidas como transformada de Euler de primera especie [5] .
En 1979 fue publicada la primera tesis de doctorado, escrita por Bagley [6] y orientada por Torvik, cuyo tema está relacionado con las ecuaciones diferenciales de orden arbitrário en el modelage del comportamiento de materias viscoelásticos. [1]

En 1996, fueron discutidas ecuaciones diferenciales de orden arbitrario asociado a fenómenos físicos, entre ellos movimientos oscilatorios, propagación de onda y difusión, sustituyendo la derivada temporal de orden entero por una derivada de orden arbitraria. Se tienen los artículos de Mainardi [9] en las aplicaciones a la mecánica y el de Gorenflo [10], donde se estudia métodos numericos.

En 1999, fue publicado el importante libro Podlubny [11], reuniendo lo esencial del CF para un estudio introductorio, envolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales fraccionales. Sus aplicaciones son basadas en la derivada fraccional de Caputo.
En 2006, Kilbas-Srivastava-Trujillo edita el libro [12], orientan el libro en aplicaciones, inclusive presenta una generalización del método de Frobenius clásico, esto es, permitiendo que las derivadas sean de orden no entero. Tambien en 2006, es reditado el libro de Oldham-Spanier [13] que es una edición revisada del original editado en 1974. Ese libro trata principalmente del desarrollo histórico de las propiedades generales de las operadoras integro-diferenciales y las aplicaciones de sus propiedades matemáticas a problemas de difusión.
En 2007 es publicado, el libro [14] por Jocelyn Sabatier (Université Bordeaux I, França), Prakash Agrawal (Southern Illinois University, EUA) e J.A. Tenreiro Machado (Instituto de Engenharia do Porto, Portugal), cuya importancia es presentar el estado de arte en el estudio de sistemas fraccionales y en la aplicación de la diferenciación fraccional.
Otro libro importante escrito por Mainardi [8] es dedicado exclusivamente al estudio del modelage matemático asociado a problemas de ondas, en particular, en viscoelasticidad. A partir de este estudio vários problemas fueron presentados y discutidos teniendo como base

[1] La tesis de doctorado escrita por Bayley y orientada por Torvik se constituyo en el marco de haber sido la primera tesis relativa al CF, conforme a várias citaciones. Resaltemos, entretanto, que en 1971, Mainardi, sobre la orientación de Caputo, defiende su tesis de doctorado, cuyo resultado fue publicado en 1971 [7]. En Rusia, Rossikhin presento su tesis en 1970 [8].

la mecánica cuántica, en particular en el estudio de la ecuación de Schrödinger fraccional en el tiempo.

Los trabajos mas recientes son los de Wang y colaboradores para determinar una función de Green para ecuaciones Schrödinger, todavia con la fraccionalización de la derivada temporal, y discuten algunas aplicaciones [15]. Al final del siglo XX e inicios del siglo XXI, diferentes investigadores presentan artículos para resolver ecuaciones diferenciales parciales fraccionales lineales. Los más destacados tenemos Odibat, Mohami, Baleanu, Tenreiro, He, Gazizov entre otros. En su mayoria, desenvuelven métodos análiticos y numéricos como transformada de Laplace, Fourier, simetría de Lie, de homotopía, de interacción variacional, descomposición de Adomian [16]-[32].

En el Imecc de la Unicamp se trabajaron cuatro tesis recientemente sobre ecuaciones diferenciales fraccionales. Para marzo de 2009, R. Figueiredo Camargo, publica su tesis de doctorado “Cálculo fraccional y aplicaciones”, orientado por el profesor E. Capelas de Oliveira y coorientado por el profesor Ary O. Chiacchio, el primer texto escrito en portugues donde se realiza un estudio completo sobre las integrales y derivadas de orden arbitrario, donde el autor presenta resultados originales, dando enfásis a las aplicaciones reales, usando en la mayoría de sus aplicaciones la definición de derivada de orden arbitraria para las versiones fraccionales de la ecuación del telégrafo y Langevin [33]. En 2011 Felix Silva Costa publica su tesis de doctorado "Función H de Fox y aplicaciones al cálculo fraccional", dirigido por E. Capelas de Oliveira. El autor presenta un estudio sistemático de la función de Fox y la usa para resolver las ecuaciones del telégrafo, Schrödinger y de difusión de onda [34]. En 2014 Eliana Contharteze Grigoletto, orientada por E. Capelas de Oliveira, publica su tesis de doctorado titulada como Ecuaciones Diferenciales Fraccionales y las funciones de Mittag-Leffler [35] y estudia la ecuación diferencial en el proceso difusivo en la desaceleración de neutrones. En 2015 Fabio Grangeiro Rodrigues defiende su tesis de doctorado titulada Estudio de la ecuación de Bessel via cálculo fraccional [36].

Vemos hasta aquí que la historia del cálculo fraccional lleva parte de la historia de las ecuaciones diferenciales fraccionales. En esta tesis vamos a ver que la historia de estas ecuaciones en su desarrollo histórico no es muy diferente al encontrado en las ecuaciones diferenciales clásicas, en el sentido que primero fueron estudiadas las ecuaciones diferenciales ordinarias y después las ecuaciones diferenciales parciales. Es decir vamos a llegar a las ecuaciones diferenciales parciales fraccionales no lineales, estudiando primero ciertas

ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionales(EDOF) y parciales fraccionales lineales, luego abordaremos métodos para aproximar soluciones de EDPF no lineales.

En el primer capítulo vamos a presentar la derivada fraccional de Riemann-Liouville para definir seguidamente la derivada fraccional de Caputo y sus propiedades mas importantes, al final del capitulo se define la función H de Fox con interes de obtener las funciones de Mittag-Leffler, Wright y Mainardi como casos particulares.

En el segundo capítulo vamos a mostrar como el método de la transformada de Laplace tiene mucho poder para resolver de forma exacta ecuaciones diferenciales fraccionales (EDF) lineales. En particular vamos a presentar como resolver las ecuaciones de relajamiento-oscilamiento y de difusión-onda al pasar primero por un repaso de las ecuaciones clásicas de difusión y onda.

En el tercer capítulo vamos a presentar diferentes métodos para resolver EDPF no lineales, abordando los métodos de las simetrías de Lie, descomposición de Adomian (ADM) y método de iteración variacional (VIM). En particular mostraremos como la simetrías de Lie puede llevar ciertas EDPF no lineal a una EDOF no lineal, en particular mostraremos nuestro primer resutado en el que demostramos como llevar la ecuación fraccional de Korteweg-de Vries (KdVF) en una EDOF no lineal usando la derivada de RL y su respectiva extensión infinitesimal; seguidamente pasamos a definir el VIM en ecuaciones diferenciales fraccionales y aplicar el VIM en la ecuación de difusión-onda en comparación con el ADM.

En el cuarto capítulo vamos a presentar todos nuestros resultados relacionados con la ecuación de Burgers fracional (BF), donde mostraremos un lema para calcular los multiplicadores de Lagrange en la ecuación BF cuando es usado el VIM y presentaremos diferentes casos particulares de esta ecuación que se construyeron como resultados de la tesis para llegar a compararlos con el ADM. Finalmente estableceremos como otros resultados, tres teoremas de convergência para el VIM para aplicarlos en el caso de la ecuación de difusión-onda y de la BF.

Capítulo 1

Cálculo Fraccional

En esta tesis vamos usar la definición de derivada de Riemann-Liouville (RL) y de Caputo. En particular vamos a usar la derivada de Caputo en casi toda la tesis, exeptuando cuando se estudie las simétrias de Lie para EDPF, que usará la derivada RL. El interés por la derivada de Caputo es que aproxima soluciones de EDPF que tienen soluciones exactas y únicas cuando se pretende recuperar la respectiva solución entera, es decir cuando orden de la derivada es de parámetro $\alpha = 1, 2$. Al respecto Diethelm [37] da un concepto al porque se prefiere bajo condiciones físicas la derivada de Caputo: "Una caracteristica típica de estas ecuaciones diferenciales clásicas o fraccionales es la necesidad de especificar las condiciones iniciales para encontrar una solución única. En este aspecto la derivada fraccional de Caputo, usa condiciones iniciales fijas similares a las que se usa en las ecuaciones diferenciales ordinarias. En contraste la derivada de RL usa condiciones iniciales que estan constituidas por ciertas derivadas o integrales fraccionales de un punto inicial que son funciones de x. Estas condiciones iniciales no tienen interpretación fisica inmediata y ademas de eso no es claro como estas condiciones pueden medirse experimentalmente para usarse en análisis."

1.1. Derivada fraccional de Caputo

Vamos a definir la integral fracional de RL, para concluir dando la definición de derivada fraccional de Caputo.

Sea $t > 0, \nu \in \mathbb{C}$ e $Re(\nu) > 0$, definimos la integral fraccional de RL de orden ν, por

$$J_t^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau)\, d\tau. \tag{1.1.1}$$

Sea $\beta \in \mathbb{C}$, con $Re(\beta) > 0$, n el menor entero mayor que $Re(\beta)$ y $\nu = n - \beta$, definamos la derivada fracional de RL de orden β por

$$D_t^{\beta} f(t) = D^n \left[J_t^{\nu} f(t)\right] = \begin{cases} \dfrac{d^n}{dt^n}\left[\dfrac{1}{\Gamma(n-\beta)} \displaystyle\int_0^t \frac{f(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-n}}\right], n-1 < Re(\beta) < n, \\ \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \beta = n. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

Sea $\beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, n el menor entero mayor que $\mathrm{Re}(\beta)$, $\nu = n - \beta$ y D^n que corresponde al operador derivada de orden n. Definamos la derivada fraccional de Caputo como

$${}_cD_t^{\beta} f(t) = J_t^{\nu}[D^n f(t)] = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\beta)} \displaystyle\int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-n}}, \quad n-1 < Re(\beta) < n \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t), \beta = n. \end{cases} \tag{1.1.3}$$

Una relación entre las derivadas de Caputo y RL es dada por:

$${}_cD_t^{\beta} f(t) = D_t^{\beta}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^k(0^+)\right]. \tag{1.1.4}$$

Seguidamente vamos a presentar algunas propiedades de la derivada de Caputo, las cuales son bastantes usadas en problemas que usan el cálculo fraccional.

- **Propiedade 1:** Sea $f(t) = t^{\mu}, \mu > -1$ y $\mu \neq 0$, tenemos que

$${}_cD_t^{\beta} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\beta+1)} t^{\mu-\beta}, \tag{1.1.5}$$

donde $\beta > 0$. Para el caso de $f(t) = k$, donde k es una constante, obtenemos

$${}_cD_t^{\beta} k = 0. \tag{1.1.6}$$

- **Propiedad 2:** Sea $Re(\alpha) > 0$ y $f(t)$ contínua. Entonces,

$$ {}_cD_t^{\alpha} J_t^{\alpha} f(t) = f(t). $$

- **Propiedad 3:** Sea $Re(\alpha) > 0$, si existe la derivada de $f(t)$ de orden $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$ {}_cD_t^{\alpha}(D_t^m f(t)) = {}_cD_t^{\alpha+m} f(t). \tag{1.1.7} $$

- **Propiedad 4:** Sea $f(t) \in \mathbb{C}^1[0,T]$ para algun $T > 0$. Entonces

$$ {}_cD_t^{\alpha}({}_cD_t^{\beta} f(t)) =_c D_t^{\beta}({}_cD_t^{\alpha} f(t)) = {}_cD_t^{\alpha+\beta} f(t), t \in [0,T] \tag{1.1.8} $$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ e $\alpha + \beta \leq 1$.

Recordemos la transformada de Laplace (TL) de uma función real $f(t)$ definida en el intervalo $0 \leq t < \infty$ y $z \in \mathbb{C}$ con $Re(z) > 0$ como

$$ F(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt, $$

siempre que esta integral exista. La representación de la TL é $\mathfrak{L}[f(t)] = F(z)$. Las siguientes propiedades estan relacionadas con la TL.

- **Propiedad 5:** Sea $Re(s) > 0$, $Re(\alpha) > -1$, entonces

$$ \mathfrak{L}[t^{\alpha}](s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}. \tag{1.1.9} $$

- **Propiedade 6:** Sea $\alpha > 0, n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(t) \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^+), f(t) \in L_1(0,b)$, para algun $b > 0$, supongamos que la TL de $f(t)$, $f^n(t)$ existen y $\lim\limits_{t \to +\infty} (D^k f)(t) = 0$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, tenemos

$$ (\mathfrak{L}[{}_cD_t^{\alpha} f(t)])(s) = s^{\alpha}(\mathfrak{L}[f(t)])(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}(D^k f)(0). \tag{1.1.10} $$

En particular, si $0 < \alpha < 1$,

$$ \mathfrak{L}[{}_cD_t^{\alpha} f(t)])(s) = s^{\alpha}(\mathfrak{L}[f(t)])(s) - s^{\alpha-1} f(0). \tag{1.1.11} $$

1.1.1. Funciones de Mittag-Leffler y Mainardi

Vamos a calcular las funciones de Mittag-Leffler y Mainardi desde la representación integral de la función H de Fox, que aparece em diversas aplicaciones del cálculo fraccional [34]. Por ejemplo vamos a ver que la solución de la ecuación de relajamiento-oscilamiento y de la ecuación de difusión-onda se pueden escribir en terminos de las funciones de Mittag Leffler y Mainardi respectivamente. Es importante resaltar que el estudio de las ecuaciones desde las simétrias de Lie puede representar algunas de sus soluciones en términos de la función H de Fox, como se verá en el Capítulo 3.

La función H de Fox, en términos de una integral do tipo Mellin-Barnes [38], es

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{array}{c}(a_1,\alpha_1),\ldots,(a_p,\alpha_p)\\(b_1,\beta_1),\ldots,(b_p,\beta_p)\end{array}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L g(s)z^{-s}ds, \tag{1.1.12}$$

en que

$$g(s)=\frac{\prod_{k=1}^{m}\Gamma(b_k+\beta_k s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s)}{\prod_{k=m+1}^{q}\Gamma(1-b_k-\beta_k s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+\alpha_j s)},$$

donde $z\neq 0, z^{-s}:=\exp\left[-s(ln|z|+i\arg(z))\right], m,n,p,q\in\mathbb{N}$ con $0\leq n\leq p, 1\leq m\leq q$ y $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}_+, a_i,b_i\in\mathbb{C}(i=1,\ldots,p;\, j=1,\ldots,q)$ tal que $\alpha_i(b_j+k)\neq\beta_j(a_i-l-1), k,l\in\mathbb{N}$; $i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m$. Además de eso, L es un contorno adecuado que separa todos los polos de $\Gamma(b_j+\beta_j s)$, $j=1,\ldots,m$, de los polos de $\Gamma(1-\alpha_i-\alpha_i s)$, $i=1,\ldots,n$. Un producto vacio es siempre interpretado como 1.

La forma integral de la función de Mittag-Leffler con tres parámetros $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ puede ser verificada cuando sustituimos $m=1,n=1,p=1,q=2,a_1=1-\gamma,\alpha_1=1,b_1=0,b_2=1-\beta,\beta_1=1$ e $\beta_2=\alpha$ e $z\to -z$ en la integral de Mellin-Barnes para la función H de Fox,

$$H_{1,2}^{1,1}\left[-z\left|\begin{array}{c}(1-\gamma,1)\\(0,1);(1-\beta,\alpha)\end{array}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\gamma-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s}ds. \tag{1.1.13}$$

Calculando la integral en el contorno que contiene los polos de $\Gamma(s)$ através del teorema de los resíduos y usando la siguiente relación,

$$(s+n)\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n+1)}{(s+n-1)\ldots s},$$

el resíduo R_n calculado en cada polo es dado por

$$\begin{aligned} R_n &= \lim_{s\to -n} \frac{(s+n)\Gamma(s)\Gamma(\gamma-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s} \\ &= \lim_{s\to -n} \frac{\Gamma(s+n+1)\Gamma(\gamma-s)}{(s+n-1)\dots s\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^{-s} \\ &= \frac{\Gamma(1)\Gamma(\gamma+n)}{(-1)^n n!\Gamma(\beta+\alpha n)}(-z)^n \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)(\gamma)_n z^n}{\Gamma(\beta+\alpha n)n!}, \end{aligned}$$

así obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \Gamma(\gamma)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\gamma)_n z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)n!} = \Gamma(\gamma)E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z).$$

de donde,

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}H^{1,1}_{1,2}\left[-z\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\gamma,1)\\(0,1);(1-\beta,\alpha)\end{matrix}\right].$$

Esta función generaliza la clásica función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ de un parámetro y la función de Mittag-Leffler de dos parámetros $E_{\alpha,\beta}(z)$, osea, para $\rho=\beta=1$, tenemos:

$$E^1_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z)^k}{\Gamma(k\alpha+1)}, \tag{1.1.14}$$

y para $\rho=1$,

$$E^1_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z)^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)}. \tag{1.1.15}$$

Cuando $\alpha=\rho=\beta=1$, tenemos $E^1_{1,1}(z)=e^z$, es decir encontramos la función exponencial.

Para definir la función de Wright $W_{\alpha,\beta}(z)$ sea $m=1, n=1, p=1, q=2, a_1=0, \alpha_1=0, b_1=0, b_2=1-\beta, \beta_1=1$ e $\beta_2=\alpha$ y $z\to -z$ en la función H de Fox para obtener

$$H^{1,1}_{1,2}\left[-z\,\middle|\,\begin{matrix}(0,0)\\(0,1);(1-\beta,\alpha)\end{matrix}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\beta-\alpha s)}(-z)^s ds.$$

y haciendo un calculado análogo al de la obtención de la función de Mittag-Leffler obte-

nemos

$$H_{1,2}^{1,1}\left[-z\,\middle|\,\begin{matrix}(0,0)\\(0,1);(1-\beta,\alpha)\end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\alpha n+\beta)}=W_{\alpha,\beta}(z) \tag{1.1.16}$$

Um caso particular de la función de Wright conocida como función de Mainardi $M_\nu(z)$, que aparece naturalmente como solución de la ecuación de difusión fraccional en relación al tiempo, es definida por

$$M_\nu(z)=W_{-\nu,1-\nu}(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\nu n+(1-\nu))},\qquad 0<\nu<1. \tag{1.1.17}$$

Su representación en términos de la función H de Fox es obtenida haciendo $-z\to z,\alpha\to -v$ e $\beta\to 1-\nu$ en la Eq.(1.1.16), luego

$$H_{1,2}^{1,1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(0,0)\\(0,1);(\nu,-\nu)\end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\nu n+(1-\nu))}=M_\nu(z).$$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales fraccionales lineales

Una interesante virtud de ciertas ecuaciones diferenciales fraccionales es poder estudiar dos problemas diferentes en un mismo modélo con la idea de recuperar la memória de dos fenómenos. En este capítulo presentaremos dos ecuaciones con estas caracteristicas que fueron estudiadas al usar la derivada de Caputo por el profesor Francesco Mainardi [9], [39], en su valiosa tarea de construir soluciones de EDF lineales. La primera es la ecuación ordinaria fraccional de relajamiento-oscilamiento [40] y la segunda la ecuación parcial fraccional de difusión-onda, en particular el tratamiento de esta última ecuación fue hecho mostrando todo las herramientas matemáticas que lleva a su solución.

2.1. Ecuación diferencial de relajamiento-oscilamiento

La ecuación diferencial de relajamiento-oscilacimiento estudia dos fenómenos en un mismo modelo, uno de ellos es el fenómeno de relajación cuando la derivada fraccional tiene parámetro α en el intervalo $(0,1]$ y el otro de ellos es el fenómeno de oscilación en el caso que la derivada fraccional tiene parámetro α en el intervalo $(1,2]$. Vamos a estudiar aqui este modelo.

Recordando la derivada de Caputo que es dada por la Eq.(1.1.4), se puede introducir la EDF lineal de orden $\alpha > 0$ con $t > 0$, como

$$ {}_cD^{\alpha}u\left(t\right) = D^{\alpha}\left(u\left(t\right) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}u^{(k)}\left(0^{+}\right)\right) = -u\left(t\right) + q\left(t\right), \tag{2.1.1} $$

aqui m es un número entero positivo definido por $m-1<\alpha\leq m$, que dá el número de los valores iniciales prescritos $u^{(k)}\left(0^{+}\right)=c_k$ con $k=0,1,\ldots,m-1$. De la Eq.(2.1.1) obtenemos soluciones $u\left(t\right)$ para $u^{(k)}\left(t\right)$ funciones continuas.

Para $t>0, k=0,1,\ldots,m-1$, en la Eq.(2.1.1), podemos obtener las ecuaciones de relajamiento y oscilamiento fraccional, veamos eso. Con $m=1$ e $0<\alpha\leq 1$ en la Eq.(2.1.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
{}_{c}D^{\alpha}u\left(t\right) &= D^{\alpha}\left(u\left(t\right)-\sum_{k=0}^{1-1}\frac{t^{k}}{k!}u^{(k)}\left(0^{+}\right)\right)\\
&= D^{\alpha}\left(u\left(t\right)-\frac{t^{0}}{0!}u^{(0)}\left(0^{+}\right)\right)\\
&= D^{\alpha}\left(u\left(t\right)\right)-D^{\alpha}\left(u^{(0)}\left(0^{+}\right)\right)\\
&= -u\left(t\right)+q\left(t\right),
\end{aligned}$$

la ecuación de relajamiento fraccional. Si $\alpha=1$, y $D\left(u^{(0)}\left(0^{+}\right)\right)=D\left(c_0\right)=0$, usando la definición de derivada de orden entera tenemos que:

$$D\left(u\left(t\right)\right)=-u\left(t\right)+q\left(t\right)$$

que es la ecuación diferencial de relajamiento de orden entero.

Con $m=2$ e $1<\alpha\leq 2$ en la Eq.(2.1.1), obtenemos

$$D^{\alpha}\left(u\left(t\right)-u^{(0)}\left(0^{+}\right)-tu^{(1)}\left(0^{+}\right)\right)=-u\left(t\right)+q\left(t\right) \tag{2.1.2}$$

que es la ecuación de oscilación fraccional. Si $\alpha=2$, entonces

$$D^{(2)}u\left(t\right)-D^{(2)}\left[u^{(0)}\left(0^{+}\right)-tu^{(1)}\left(0^{+}\right)\right]=-u\left(t\right)+q\left(t\right)$$

de donde,

$$D^{(2)}u\left(t\right)-D^{(2)}\left(c_0\right)-D^{(2)}\left(c_1 t\right)=-u\left(t\right)+q\left(t\right)$$

usando la definición de derivada de orden entera en $D^{(2)}\left(c_0\right)$ y $D^{(2)}\left(c_1 t\right)$, encontramos

$$u''\left(t\right)=-u\left(t\right)+q\left(t\right)$$

con $u\left(0^{+}\right)=c_0$, $u'\left(0^{+}\right)=c_1$; que es la ecuación de oscilación de orden entera.
En la Eq.(2.1.2) cuando las condiciones iniciales con $u^{(0)}\left(0^{+}\right)=0, u^{(1)}\left(0^{+}\right)=0$, $q\left(t\right)=0$ vemos que

$$D^{\alpha}\left(u\left(t\right)\right)+u\left(t\right)=0.$$

Ahora multiplicando el segundo termino por una constante de la forma φ^{α} tenemos

$$D^{\alpha}\left(u\left(t\right)\right)+\varphi^{\alpha}u\left(t\right)=0. \tag{2.1.3}$$

Cuando φ^{α} es la frecuencia angular, $\varphi^{\alpha}=k/m$, $1<\alpha\leq 2$, k una constante y m la masa, se encuentra la ecuación del oscilador armónico fraccional. Para $\alpha=2$ en la Eq.(2.1.3), obtenemos

$$u''\left(t\right)+\varphi^{2}u\left(t\right)=0,$$

la conocida ecuación de oscilador armónico de orden entero. Para resolver la Eq.(2.1.1) se lleva primero a una ecuación integral y después se usa la TL para encontrar la solución. Primero se aplica el operador J^{α} en ambos lados de la Eq.(2.1.1) y después se usa la TL, teniendo en cuenta la TL de la convolución, para obtener

$$\widetilde{u}\left(s\right)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}+1}+\frac{1}{s^{\alpha}+1}\widetilde{q}\left(s\right),$$

introduciendo las funciones auxiliares de la forma Mittag-Leffler

$$e_{\alpha}\left(t\right):=E_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)\div\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1} \tag{2.1.4}$$

y

$$u_k\left(t\right):=J^{k}e_{\alpha}\left(t\right)\div\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}+1}, \tag{2.1.5}$$

donde $f(t)\div g(s)$ se entiende que la transformada de Laplace $f(t)$ es $g(s)$. Con $k=0,1,\ldots,m-1$, y de la fórmula de inversión de la TL en $\widetilde{u}(s)$ y definiendo que

$$\frac{1}{s^{\alpha}+1}\div\left(-u_0'(t)\right)=-e_{\alpha}'(t)$$

podemos escribir la solución como

$$u(t)=\sum_{k=0}^{m-1}c_k u_k(t)-\int_0^t q(t-\tau)\,u_0'(\tau)\,d\tau. \tag{2.1.6}$$

Casos particulares de esta solución son:

a) Con $m=1$, $\alpha=1$ en la Eq.(2.1.6), $u_0(t)=J^0e_1(t)=E_1(-t)=e^{-t}$ e

$$u(t)=c_0e^{-t}-\int_0^t q(t-\tau)\,e^{-\tau}d\tau$$

esta es la solución de la ecuación diferencial de relajamiento de orden entero.

b) Si $m=1,2$ y $\alpha=2$ en la Eq.(2.1.6) obtenemos

$$u_0(t)=J^0e_2\left(t^2\right)=E_2\left(-t^2\right)=\cos t$$

$$u_1(t)=J^1e_2\left(-t^2\right)=J^1E_2\left(-t^2\right)=\int_0^t\cos\tau d\tau=\operatorname{sen}t$$

de donde

$$u(t)=c_0\cos t+c_1\operatorname{sen}t+\int_0^t q(t-\tau)\operatorname{sen}\tau d\tau$$

que es la solución de la ecuación de oscilación de orden entero.

c) Si tenemos

$$D^\alpha(u(t))+\varphi^\alpha u(t)=0,$$

la solución se puede escribir en la forma general como en la Eq.(2.1.6), así

$$u(t)=u\left(0^+\right)+u_0\left(0^+\right)t-\frac{\varphi^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}u(\tau)\,d\tau, \tag{2.1.7}$$

con $1<\alpha\leq 2$. Usemos la TL en esta ecuación así

$$\widetilde{u}(s)=\frac{u\left(0^+\right)}{s}+\frac{u'\left(0^+\right)}{s^2}-\varphi^\alpha\frac{\widetilde{u}(s)}{s^\alpha},$$

$$\widetilde{u}(s)=\frac{u\left(0^+\right)s^{-1}}{1+\varphi^\alpha s^{-\alpha}}+\frac{u'\left(0^+\right)s^{-2}}{1+\varphi^\alpha s^{-\alpha}},$$

de donde con la fórmula de inversión de la transformada de Laplace se encuentra

$$u(t) = u\left(0^+\right) E_\alpha\left(-\varphi^\alpha t^\alpha\right) + u'\left(0^+\right) t E_{\alpha,2}\left(-\varphi^\alpha t^\alpha\right),$$

conocida como la solución fraccional de la ecuación de oscilación armónica. En el caso que $u\left(0^+\right) = c_0$ y $u'\left(0^+\right) = 0$, tenemos:

$$u(t) = c_0 E_\alpha\left(-\varphi^\alpha t^\alpha\right),$$

donde $E_\alpha\left(-\varphi^\alpha t^\alpha\right)$ es la función de Mittag-Leffler de un parámetro para $-\varphi^\alpha t^\alpha$, hecho que demuestra que la solución del oscilador armónico fraccional depende de la frecuencia angular. Por ejemplo para un cuerpo de masa $m = 2$ kilogramos con constantes $k = 1$ y $c_0 = 1$ tenemos la solución $u(t)$ que es dada por

$$u(t) = E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^\alpha t^\alpha\right)$$

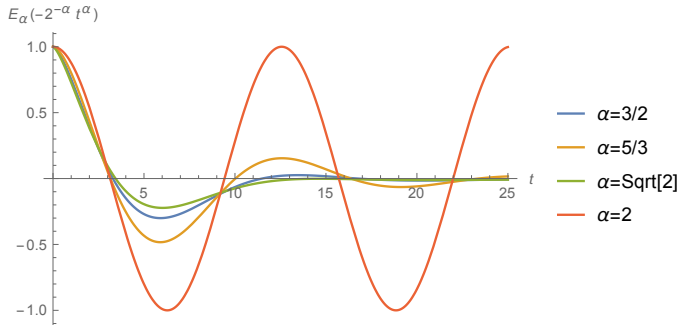

Figura 2.1: Oscilador armónico fraccional, solución con $m = 2, k = 1, c_0 = 1$.

Necesitamos resolver la Eq.(2.1.1) cuando $m - 1 < \alpha \leq m$, donde m es el número de condiciones iniciales necesarias y suficientes para tener la unicidad de la solución $u(t)$. Aqui llamaremos $u_\delta(t) = -e'_\alpha(t)$ a la solución de impulso-respuesta, también conocida como la solución particular de la Eq.(2.1.1), entonces las m funciones $u_k(t) = J^k e_\alpha(t)$ con $k = 0, 1, \ldots, m-1$ son las soluciones particulares de la ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales

$$u_k^h\left(0^+\right) = \delta_{kh}$$

con $k, h = 0, 1, \ldots, m-1$.

La función impulso respuesta $e_\alpha(t)$, se puede estudiar desde su representación en la trans-

formada inversa de Laplace dada por:

$$e_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{Br} e^{st}\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}ds, \quad 0<\alpha\leq 2. \tag{2.1.8}$$

En la Eq.(2.1.8) B_r es el camino de Bromwich, osea la linea $Re\{s\}=\gamma$ con $\gamma\geq 1$ e $Im\{s\}$ desde $[-\infty,\infty]$, es decir la recta AB en al Figura 2.2. Vamos a estudiar la Eq.(2.1.8) para $0<\alpha<1$ y $1<\alpha<2$, entonces usaremos el contorno de Bromwich modificado y el hecho que las contribuciones para $e_\alpha(t)$ se puede encontrar como la suma de

$$e_\alpha(t) = f_\alpha(t) + g_\alpha(t), \quad t>0$$

con

$$f_\alpha := \frac{1}{2\pi i}\int_{H_a(\varepsilon)} e^{st}\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}ds,$$

y

$$g_\alpha(t) = \sum_h \exp\left(s'_h t\right) Res\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}\right] = \frac{1}{\alpha}\sum_h \exp\left(s'_h t\right)$$

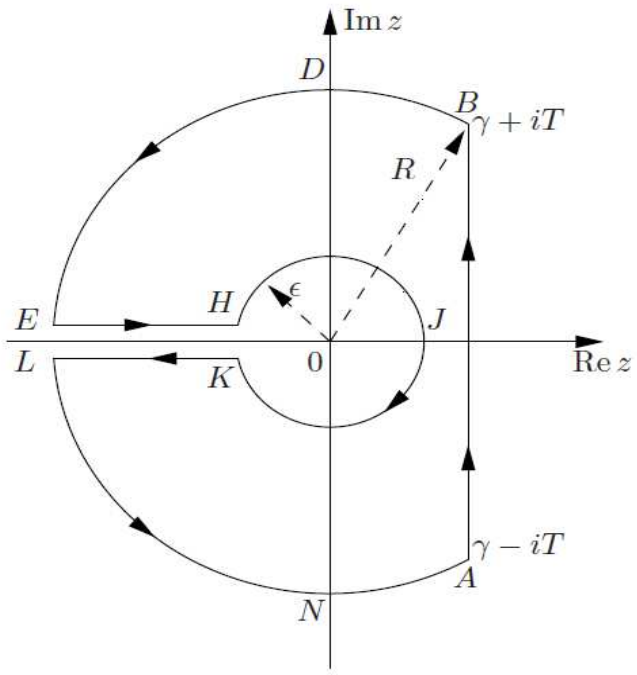

Figura 2.2: Contorno de Bromwich modificado.

donde el camino de Hankel $H_a(\varepsilon)$ denota un pequeño círculo $\mid s \mid = \varepsilon$ con $\varepsilon \longrightarrow 0$ y por los dos bordes EH, KL y s'_h los polos de $\dfrac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1}$. De hecho los polos son $s_h =$

$\exp\left[i\left(2h+1\right)\pi/\alpha\right]$ y tienen modulo unitário, es decir

$$\mid s_h \mid^{\alpha} = \left|\exp\left[\frac{i\left(2h+1\right)\pi}{\alpha}\right]\right|^{\alpha} = \mid \exp\left[i\left(2h+1\right)\pi\right] \mid = \mid \exp\left[i2h\pi\right]\exp\left[i\pi\right] \mid = \mid -1 \mid = 1.$$

Todos los polos relevantes estan en la primera hoja de Riemann, es decir los polos s'_h con argumento $-\pi < arg(s'_h) < \pi$. En el caso $0 < \alpha < 1$, para todo $h \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\mid arg(s_h) \mid = \frac{\mid 2h+1 \mid \pi}{\alpha} > \pi$$

entonces no existe polos en destaque y encontramos que $g_\alpha\left(t\right) \equiv 0$ y $e_\alpha\left(t\right) = f_\alpha\left(t\right)$, $0 < \alpha < 1$. Para $1 < \alpha < 2$ entonces existe dos polos en destaque: $s'_0 = \exp\left(i\pi/\alpha\right)$, $s'_{-1} = \exp\left(-i\pi/\alpha\right) = \bar{s}_0$, los cuales estan en el semiplano izquierdo y

$$\begin{aligned} g_\alpha\left(t\right) = \frac{1}{\alpha}\sum \exp\left[s'_h t\right] &= \frac{1}{\alpha}\exp\left[t\exp\left(\frac{i\pi}{\alpha}\right)\right] + \frac{1}{\alpha}\exp\left[t\exp\left(\frac{-i\pi}{\alpha}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[\exp\left(t\cos\frac{\pi}{\alpha} + it\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\alpha}\right) + \exp\left(t\cos\frac{\pi}{\alpha} - it\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\alpha}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\exp\left(t\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)\left(\exp(it\,\mathrm{sen}\,\frac{pi}{\alpha}) + \exp(-it\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\alpha})\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\exp\left(t\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)\left(2\cos t\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

es decir para $1 < \alpha < 2$ se tiene

$$g_\alpha\left(t\right) = \frac{2}{\alpha}\exp\left(t\cos\frac{\pi}{\alpha}\right)\cos\left(t\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

donde $g_\alpha\left(t\right)$ son oscilaciones con frecuencia circular $w\left(\alpha\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$ y amplitud con tasa de decaimiento exponencial $\lambda\left(t\right) = \mid \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \mid$. El siguiente ejercicio de análisis complejo, es la contribución del camino de Hankel $H_a\left(\varepsilon\right)$ en la función $f_\alpha(t)$ cuando $\varepsilon \to 0$. Sea $s = r\exp\left(i\pi\right)$ y

$$f\left(r\right) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+1} = \frac{\left(r\exp\left(i\pi\right)\right)^{\alpha-1}}{\left(r\exp\left(i\pi\right)\right)^{\alpha}+1} = -\frac{1}{r}\frac{e^{i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha}+r^{-\alpha}}\cdot\frac{e^{-i\pi\alpha}+r^{-\alpha}}{e^{-i\pi\alpha}+r^{-\alpha}}$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{r^{-\alpha}e^{i\pi\alpha}+1}{r^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}+e^{i\pi\alpha}\tau^{-\alpha}+r^{-2\alpha}+1} = -\frac{1}{r}\frac{r^{-\alpha}\left(\cos\alpha\pi + i \quad \mathrm{sen}\,\alpha\pi\right)+1}{r^{-\alpha}2\cos\alpha\pi + r^{-2\alpha}+1},$$

de donde calculamos que la parte imaginaria de $f(r)$ es

$$Im\left\{f\left(r\right)\right\}=-\frac{1}{r}\frac{r^{-\alpha}\operatorname{sen}\alpha\pi}{1+2r^{-\alpha}\cos\alpha\pi+r^{-2\alpha}}=-\frac{1}{r}\frac{\operatorname{sen}\alpha\pi}{r^{\alpha}+2\cos\alpha\pi+r^{-\alpha}},$$

de lo anterior podemos definir que

$$k_{\alpha}\left(r\right)=-\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{r}\frac{\operatorname{sen}\ \alpha\pi}{r^{\alpha}+2\cos\ \alpha\pi+r^{-\alpha}}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\ \alpha\pi}{r^{2\alpha}+2\cos\ \alpha\pi+r^{-\alpha}},$$

de tal forma que cuando $\varepsilon\longrightarrow 0$ se tenga que

$$f_{\alpha}\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-rt}k_{\alpha}\left(r\right)dr. \tag{2.1.9}$$

Tenemos la solución fundamental $u_0\left(t\right)=e_{\alpha}\left(t\right)$, y necesitamos calcular la solución impulso-respuesta $u_{\delta}\left(t\right)=-e_{\alpha}'\left(t\right)=-D^{1}e_{\alpha}\left(t\right)$ para $0<\alpha<1$ y $1<\alpha<2$ teniendo en cuenta que en el caso, $1<\alpha<2$, la solución fundamental es $u_1\left(t\right)=J^{1}e_{\alpha}\left(t\right)$. Entonces por inducción en el operador integral de RL podemos ver que

$$J^{k}f_{\alpha}\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-rt}k_{\alpha,k}\left(r\right)dr$$

con

$$k_{\alpha,k}\left(r\right):=\left(-1\right)r^{-k}k_{\alpha}\left(r\right)=\frac{\left(-1\right)^{k}}{\pi}\frac{r^{\alpha-1-k}\operatorname{sen}\ \alpha\pi}{r^{2\alpha}+2r^{\alpha}\cos\ \alpha\pi+1}$$

donde $k_{\alpha}\left(r\right)=k_{\alpha,0}\left(r\right)$ y

$$J^{k}g\left(t\right)=\frac{2}{\alpha}\exp\left(t\cos\ \frac{\pi}{\alpha}\right)\cos\left[t\operatorname{sen}\frac{\pi}{\alpha}-k\frac{\pi}{\alpha}\right].$$

En conclusión encontramos que las soluciones para ambos casos son

- *Para* $0<\alpha<1$

$$u\left(t\right)=c_{0}u_{0}\left(t\right)+\int_{0}^{t}q\left(t-\tau\right)u_{\delta}\left(\tau\right)d\tau$$

con

$$u_{0}\left(t\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-rt}k_{\alpha,0}\left(r\right)dr,\quad u_{\delta}\left(t\right)=-\int_{0}^{\infty}e^{-rt}k_{\alpha,-1}\left(r\right)dr, \tag{2.1.10}$$

y $u_0\left(0^{+}\right)=1,\quad u_{\delta}\left(0^{+}\right)=\infty.$

- *Para* $1 < \alpha < 2$

$$u(t) = c_0 u_0(t) + c_1 u_1(t) + \int_0^t q(t-\tau)\, u_\delta(\tau)\, d\tau,$$

con

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \int_0^\infty e^{-rt} k_{\alpha,0}(r)\, dr + \frac{2}{\alpha} e^{t\cos\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left[t \operatorname{sen}\frac{\pi}{\alpha}\right], \\ u_1(t) &= \int_0^\infty e^{-rt} k_{\alpha,1}(r)\, dr + \frac{2}{\alpha} e^{t\cos\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left[t \operatorname{sen}\frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha}\right], \\ u_\delta(t) &= -\int_0^\infty e^{-rt} k_{\alpha,-1}(r)\, dr - \frac{2}{\alpha} e^{t\cos\frac{\pi}{\alpha}} \cos\left[t \operatorname{sen}\frac{\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{\alpha}\right], \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

y $u_0\left(0^+\right) = 1$, $u_0'\left(0^+\right) = 0$, $u_1\left(0^+\right) = 0$,$u_1'\left(0^+\right) = 1$, $u_\delta\left(0^+\right) = 0$, $u_\delta'\left(0^+\right) = +\infty$.

En la Figura 2.3 se grafica la solución fundamental en los casos $\alpha = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{3}{4}, \alpha = 1$ obtenidos desde la Eq.(2.1.10). En la Figura 2.4 se grafica la solución fundamental en los casos $\alpha = \sqrt{2}, \alpha = \frac{7}{4}, \alpha = \frac{19}{10}, \alpha = 2$ obtenidos desde la Eq.(2.1.11).

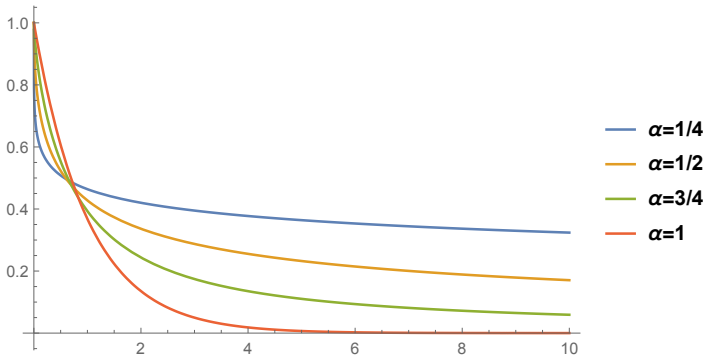

Figura 2.3: Recuperación de la memória del fenómeno de relajamiento para la solución fundamental $u_0(t) = e_\alpha(t)$ en $0 < \alpha \leq 1$.

2.2. Ecuación de onda, difusión y de difusión-onda

La ecuación de difusión-onda estudia dos fenómenos muy interesantes en la fisica-matemática, el primero recupera la memoria del fenómeno de difusión del calor cuando el parámetro fraccional esta en el interválo $(0, 1]$, y otro recupera la memoria del fenómeno de onda desde el interválo $(1, 2]$. Vamos a usar el método clásico de separación de variables para obtener las soluciones de las ecuaciones de difusión y de onda que serán usadas en el Capitulo 3, después con ayuda de la TL y las funciones de Green hacemos el estudio fraccional

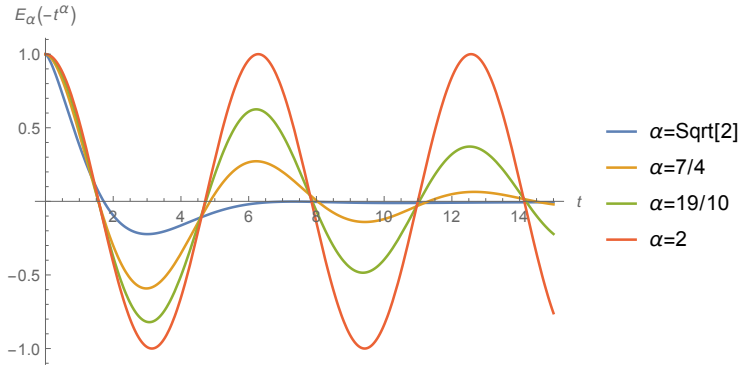

Figura 2.4: Recuperación de la memória del fenómeno de oscilación para la solución fundamental $u_0(t) = e_\alpha(t)$ en $1 < \alpha \leq 2$.

de la ecuación de difusión-onda. Para nuestras ecuaciones de difusión y de onda vamos a considerar ecuaciones con dos variables independientes, que en su forma general estan dadas por

$$A\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}u + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}u + D\frac{\partial}{\partial x}u + E\frac{\partial}{\partial y}u + Fu = G$$

siendo $u = u(x, y)$, donde los coeficientes $A, B, \ldots, F$ y el término no homogeneo G pueden eventualmente, ser funciones de las variables independientes x y/o y. Supongamos, desde el inicio, que $u(x, y)$ bien como los coeficientes, presentes en la ecuación, son continuamente diferenciables y que los coeficientes A, B y C no son simultaneamente nulos. De esta ecuación podemos pensar en la clasificación cuanto al tipo. La clasificación de una ecuación diferencial parcial cuanto al tipo es análoga al estudio de las cuadráticas, esto es, tenemos una ecuación del tipo hiperbólico, parabólico o elíptico.
Se introduce la siguiente notación

$$\triangle \equiv B^2 - AC,$$

algunas veces llamado de discriminante asociado a la ecuación diferencial, decimos que una ecuación es, en cierto punto (x_0, y_0), del tipo hiperbólico, parabólico o elíptico, si tenemos para el discriminante, calculando en este punto, $\triangle > 0$, $\triangle = 0$ o $\triangle < 0$, respectivamente. Si esto es verdad para todos los puntos del dominio en consideración, decimos que la ecuación es del tipo *hiperbólico*, *parabólico* o *elíptico*, respectivamente. Note que en el caso de los coeficientes son funciones de las variables independientes x e/o y el discriminante puede depender de estas variables y con eso mudar de signo. En este caso decimos que la ecuación es de tipo mixto.

Las ecuaciones de difusión y de onda que son de tipo parábolico y hiperbólico respectivamente y la forma general de ella son obtenidas cuando se estudia la derivada en t con respecto de un parámetro α en la ecuación de difusión-onda, con $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$.

2.2.1. Ecuación de onda

Vamos, en esta sección, presentar y resolver el clásico problema de la ecuación de onda (o ecuación de d'Alembert) unidimensional. Consideremos la ecuación de d'Alembert unidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = 0. \tag{2.2.1}$$

Donde x es la variable espacial y t la variable temporal ambas variables independientes, $u(x,t)$ representando el dislocamiento, la variable dependiente y c una constante positiva que es la velocidad de propagación de la luz en el vacío.

En este punto vamos a estudiar el comportamiento de una cuerda de violin, cuya longitud es ℓ. Admitamos que $u(0,t) = 0 = u(\ell,t)$ para todo t, esto es, que la cuerda del violin está fija en los extremos. Como estamos admitiendo condiciones que dependen de la geometría, estas son las llamadas condiciones de contorno que, en este caso son de tipo Dirichlet (valores dados en la función) homogéneas. Por otro lado, vamos imponer dos condiciones mas, las que envuelvan la parte temporal, a saber,

$$u(x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \mid_{t=0} = g(x) \tag{2.2.2}$$

la primera de ellas significa que el dislocamiento inicial es una función de la variable espacial, como tambien es la segunda condición, que representa la velocidad inicial. Visto que ambas son dadas para un tiempo fijo, en este caso $t = 0$, decimos que estas son las condiciones iniciales. Entonces nuestro problema es construido de una ecuación diferencial parcial con dos variables independientes x, t, dos condiciones de contorno y dos condiciones iniciales.

En principio, como tenemos una ecuación diferencial parcial de segundo orden, tanto en la variable x, cuanto en la variable t, necesitamos de cuatro condiciones, o sea, podemos pensar que después de la separabilidad, tenemos dos condiciones para cada una de las

ecuaciones diferenciales ordinarias. Apliquemos el método de separación de variables, es decir buscamos soluciones de la forma

$$u(x,t) = R(x)\,T(t) \equiv RT$$

donde $R(x)$ e $T(t)$ dependen solamente de las variables x y t, respectivamente. Introduciendo esta expresión en la ecuación diferencial parcial, se divide por el producto RT y reordenando, podemos escribirla de la siguiente forma

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R}$$

donde el segundo miembro solo depende de la variable x. podemos igualar esta ultima expresión a una constante a saber

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} = -\lambda^2$$

donde λ es llamada, la constante de separación. De esta última expresión podemos escribir las dos condiciones diferenciales ordinarias, o sea

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x) + \lambda^2 R(x) = 0$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t) + \lambda^2 T(t) = 0.$$

Antes de seguir, es interesante notar que las dos ecuaciones diferenciales ordinarias tienen un parámetro constante. Tambien es de resaltar que si la ecuación diferencial parcial no fuera homogénea, la separación no seria posible. Nosotros tenemos dos condiciones (de contorno) que son homogéneas, después separables. Pasemos a separar las condiciones de contorno, o sea,

$$u(0,t) = R(0)\,T(t) = 0 \qquad \Longrightarrow R(0) = 0$$

y

$$u(\ell,t) = R(\ell)\,T(t) = 0 \qquad \Longrightarrow R(\ell) = 0$$

para todo $T(t)$. Podemos concluir que de la separabilidad de la ecuación diferencial y

de las condiciones de contorno, obtenemos un problema en una sola dimensión, esto es conocido el problema de Sturm-Liouville. Debemos entonces resolver el siguiente problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x) + \lambda^2 R(x) = 0$$

con condiciones $R(0) = 0 = R(\ell)$.

La solución general de la ecuación diferencial depende del parámetro λ. En los casos en que $\lambda^2 \leq 0$ no tenemos soluciones no triviales y por tanto no tenemos en cuenta estas dos posibilidades. Aqui es posible notar el porque colocamos un signo negativo delante de la constante de separación. Si no hubieramos colocado el signo, los valores que descartamos satisfacen $\lambda^2 \geq 0$. Para el tercer caso tenemos $\lambda^2 > 0$, podemos escribir la solución general de la ecuación diferencial, así

$$R(x) = A\cos\lambda x + B\,\text{sen}\;\lambda x$$

donde A y B son dos constantes arbitrárias. De la condición $R(0) = 0$ concluimos que $A = 0$ y de la otra condición podemos escribir

$$B\,\text{sen}\;\lambda\ell = 0$$

que se satisface si $B = 0$ o si, $\text{sen}\,\lambda\ell = 0$. En el primero de los casos tenemos solamente soluciones triviales y no son las soluciones que estamos buscando. Entonces resolviendo la ecuación trigonométrica, obtenemos para la constante de separación

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{\ell}$$

con $k = 1, 2, \ldots$ donde podemos escribir para la solución del problema en la variable espacial,

$$R_k(x) = B_k\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

donde B_k son constantes.

Después la resolución del problema en la variable espacial, donde determinamos los posibles valores de la constante de separación, con tales valores podemos resolver la ecuación

en la variable temporal, esto es la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}T(t) + \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 T(t) = 0$$

cuya solución general es dada por

$$T_k(t) = C_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right) + D_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right)$$

donde C_k e D_k son constantes.

Tenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias resueltas, entonces podemos escribir la solución de la ecuación diferencial parcial como

$$u_k(x,t) = \left[a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

donde definimos las constantes $a_k = C_k \cdot B_k$ y $b_k = D_k \cdot B_k$. Visto que la ecuación diferencial parcial es lineal, usamos el principio de superposición de soluciones, para escribir la solución, esto es,

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) \tag{2.2.3}$$

donde las constantes a_k e b_k son determinadas a partir de las condiciones iniciales. Tenemos que la condición para el deslocamiento inicial es $f(x)$, de donde podemos escrever

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = f(x)$$

y de la condición de la velocidad inicial $g(x)$, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\mid_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{k\pi}{\ell}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) = g(x)$$

donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son conocidas.

Para determinar explicitamente los coeficientes a_k e b_k, llamados coeficientes de Fourier, debemos conocer las condiciones para las funciones $f(x)$ e $g(x)$.

2.2.2. Ecuación de difusión

Consideremos un alambre la longitud ℓ donde vamos a discutir la ecuación del calor, através de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u\left(x,t\right)=\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial t}u\left(x,t\right) \tag{2.2.4}$$

donde σ es una constante positiva. Tenemos las siguientes condiciones de contorno $u\left(0,t\right)=0=u\left(\ell,t\right)$, con condición inicial, $u\left(x,0\right)=f\left(x\right)$ y buscamos soluciones de la forma

$$u\left(x,t\right)=R\left(x\right)T\left(t\right)\equiv RT$$

que podemos escribir de la siguiente forma

$$\frac{R''}{R}=\frac{1}{\sigma}\frac{T'}{T}=-\lambda^2$$

donde λ^2 es la constante de separación. De la expresión arriba obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias, en la variable t

$$\frac{d}{dt}T\left(t\right)+\lambda^2\sigma T\left(t\right)=0$$

con solución dada por

$$T\left(t\right)=A\ e^{-\lambda^2\sigma t}$$

donde A es una constante de integración, en cuanto que la ecuación en la variable x es dada por

$$\frac{d^2}{dx^2}R\left(x\right)+\lambda^2R\left(x\right)=0$$

usando las condiciones de contorno, vemos que la solución es

$$R_k\left(x\right)=B_k\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

donde B_k es constante. En conclusión obtenemos la solución del problema utilizando el principio de superpocisión de soluciones

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke^{-\left[\left(k\pi/\ell\right)^2\sigma t\right]}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)$$

donde $a_k = A \cdot B_K$ debem ser determinados. Utilizando la condición inicial multiplicando ambos miembros por $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$, integrando en el interválo $0 \leq x \leq \ell$ y utilizando la ortogonalidad de las funciones trigonometricas tenemos

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right)dx$$

donde podemos escribir la solución de nuestro problema, así

$$u(x,t) = \frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{-\left[(k\pi/\ell)^2\sigma t\right]}\int_0^\ell f(\xi)\,\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}\xi\right)d\xi\right\}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right).$$

En la siguiente sección vamos a recuperar las soluciones de la ecuación de difusión y onda desde el estudio de la ecuación de difusión-onda con el uso de la transformada de Laplace y sus respectivas funciones de Green, teniendo en cuenta que el método de separación de variables nos consigue recuperar las soluciones de una EDF, si el parámetro fraccional no es entero. En el capítulo tres y cuatro usaremos las soluciones de la ecuación de onda y del calor bajo ciertas condiciones iniciales para compararla con las aproximaciones obtenidas entre el VIM y el ADM.

2.2.3. Ecuación de difusión-onda

En esta sección vamos a encontrar las soluciones fundamentales al problema de Cauchy y de los valores en la frontera para la ecuación de evolución dada por

$${}_c\mathsf{D}_t^{2\beta}[u] = Du_{xx}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad D > 0 \tag{2.2.5}$$

donde x y t son variables de espacio-tiempo, y $u = u(x,t;\beta)$ es la solución, que depende del tiempo, $t > 0$. Se puede ver que en el caso $\beta = \frac{1}{2}$ se recupera la ecuación de calor y cuando $\beta = 1$ se tiene la ecuación de onda, o sea los respectivos casos de orden entero.
(a) Problema de Cauchy (PVI)

$$u\left(x,0^+;\beta\right) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{2.2.6}$$

$$u(\mp\infty,t;\beta) = 0, \quad t > 0 \tag{2.2.7}$$

(b) Problema de valores en la frontera (PVF)

$$u\left(x,0^{+};\beta\right)=0,\quad x>0 \tag{2.2.8}$$

$$u\left(0^{+},t;\beta\right)=h\left(t\right),\quad u\left(+\infty,t;\beta\right)=0,\quad t>0 \tag{2.2.9}$$

Si $1/2<\beta\leq 1$, adicionamos en la Eq.(2.2.6) y en la Eq.(2.2.7), valores iniciales para la derivada en el tiempo de la variable $u_t\left(x,0^{+};\beta\right)$. Para asegurar la continuidad y la dependencia de la solución en nuestro parámetro $0<\beta<1$ también en la transición de $\beta=(1/2)^{-}$ a $\beta=(1/2)^{+}$, vamos asumir que $u_t\left(x,0^{+};\beta\right)=0$

Para ambos problemas es conveniente usar la función de Green $\mathcal{G}_c\left(x,t;\beta\right)$ e $\mathcal{G}_s\left(x,t;\beta\right)$ quien representa las soluciones fundamentales cuando $g\left(x\right)=\delta\left(x\right)$ e $h\left(t\right)=\delta\left(t\right)$, respectivamente donde δ denota la distribución delta de Dirac. Las soluciones de ambos problemas son obtenidas por uso de la convolución así:

$$u\left(x,t;\beta\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{G}_c\left(\xi,t;\beta\right)g\left(x-\xi\right)d\xi, \tag{2.2.10}$$

$$u\left(x,t;\beta\right)=\int_{0}^{t}\mathcal{G}_s\left(x,\tau;\beta\right)h\left(t-\tau\right)d\tau \tag{2.2.11}$$

donde se debe notar que

$$\mathcal{G}_c\left(x,t;\beta\right)=\mathcal{G}_c\left(|x|,t;\beta\right). \tag{2.2.12}$$

Es decir la función de Green $\mathcal{G}_c\left(x,t;\beta\right)$ es una función par en x. Usando la TL obtenemos las funciones $\bar{\mathcal{G}}_c\left(x,s;\beta\right)$, $\bar{\mathcal{G}}_s\left(x,s;\beta\right)$ y después obtenemos por inversión de la TL, $\mathcal{G}_c\left(x,s;\beta\right)$ y $\mathcal{G}_s\left(x,s;\beta\right)$. Supongamos que $g\left(x\right)=\delta\left(x\right)$ para el PVI y al aplicar la TL en la Eq.(2.2.5)

$$\mathfrak{L}\left\{{}_c\mathsf{D}_t^{2\beta}\left[\mathcal{G}_c\right]\right\}=\mathfrak{L}\left\{D\left[\mathcal{G}_c\right]_{xx}\right\} \tag{2.2.13}$$

obtenemos

$$s^{2\beta}\bar{\mathcal{G}}_c-\delta\left(x\right)s^{2\beta-1}=D\left[\bar{\mathcal{G}}_c\right]_{xx} \tag{2.2.14}$$

aquí consideremos que $\delta(x)$ es no singular en cero, después vamos a tomar dos casos, $x > 0$ y $x < 0$, y al imponer la condición de la Eq.(2.2.7) se encuentra la solución:

$$\bar{\mathcal{G}}_c\left(x, s; \beta\right) = \begin{cases} c_1 e^{-\left(x/\sqrt{D}\right)s^\beta} + c_2 e^{\left(x/\sqrt{D}\right)s^\beta}, & \text{se } x > 0 \\ c_3 e^{-\left(x/\sqrt{D}\right)s^\beta} + c_4 e^{\left(x/\sqrt{D}\right)s^\beta}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{2.2.15}$$

claramente $c_2 = c_4 = 0$ esto es para asegurar que la solución exista si $|x| \to \infty$. En la Eq.(2.2.14) con $x = 0$ la función $\bar{\mathcal{G}}_c\left(x, s; \beta\right)$ no es continua en la primera derivada, luego por propiedades de la función de Green tenemos

$$\bar{\mathcal{G}}_c\left(0^+, s; \beta\right) - \bar{\mathcal{G}}_c\left(0^-, s; \beta\right) = c_1\left(s\right) - c_4\left(s\right) = 0 \Rightarrow c_1 = c_4$$

y derivando en ambos lados con respecto de x desde $x = 0^-$ a $x = 0^+$, tenemos:

$$\left[\bar{\mathcal{G}}_c\right]_x\left(0^+, s; \beta\right) - \left[\bar{\mathcal{G}}_c\right]_x\left(0^-, s; \beta\right) = -\left[c_1 + c_4\right]\frac{s^\beta}{\sqrt{D}}$$

Integrando en la Eq.(2.2.14) respecto a x con limites en $x = 0^-$ a $x = 0^+$

$$\int_{0^-}^{0^+} s^{2\beta}\bar{\mathcal{G}}_c dx - \int_{0^-}^{0^+} s^{2\beta-1}\delta\left(x\right)dx = D\int_{0^-}^{0^+}\left[\bar{\mathcal{G}}_c\right]_{xx} dx$$
$$-s^{2\beta-1}\int_{0^-}^{0^+}\delta\left(x\right)dx = D\left[\bar{\mathcal{G}}_c\right]_{xx},$$

de donde

$$\frac{-s^{2\beta-1}}{D} = \left[\bar{\mathcal{G}}_c\right]_{xx}$$

y

$$-\left[c_1 + c_4\right]\frac{s^\beta}{\sqrt{D}} = -\frac{s^{2\beta-1}}{D},$$

es decir

$$-2c_1 = \frac{\sqrt{D}}{D}\frac{s^{2\beta-1}}{s^\beta} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2\sqrt{D}s^1 - \beta} = c_4$$

y encontramos que la TL de la función de Green para el PVI es

$$\bar{\mathcal{G}}_c = \frac{1}{2\sqrt{D}s^{1-\beta}}\left[e^{\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right)s^\beta} + e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right)s^\beta}\right]$$

de donde vemos que

$$\bar{\mathcal{G}}_c = \frac{1}{2\sqrt{D}s^{1-\beta}} \quad e^{\left(\frac{|x|}{\sqrt{D}}\right)^{s^\beta}}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.2.16}$$

Para el PVF de la transformada de Laplace tenemos

$$s^{2\beta}\bar{\mathcal{G}}_s - D\left[\bar{\mathcal{G}}_c\right]_{xx} = 0 \tag{2.2.17}$$

y por el cálculo análogo al caso del PVI se encuentra que

$$\bar{\mathcal{G}}_s\left(x, s; \beta\right) = c_1 e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right)s^\beta} + c_2 e^{\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right)s^\beta}, \quad x > 0$$

claramente cuando $x \to \infty$, implica $c_2 = 0$ para garantizar que la solución desaparece, con $h\left(x\right) = \delta\left(x\right)$, $\bar{\mathcal{G}}_s\left(0^+, t, \beta\right) = \bar{\delta}\left(s\right) = e^{-s(0)} = 1$ se tiene

$$\bar{\mathcal{G}}_s\left(x, s, \beta\right) = e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right)s^\beta}, \quad x > 0. \tag{2.2.18}$$

Vamos a encontrar una relación de reciprocidad entre las dos funciones de Green $\bar{\mathcal{G}}_s$ y $\bar{\mathcal{G}}_c$. De la Eq.(2.2.18), se puede obtener

$$\frac{d}{ds}\bar{\mathcal{G}}_s = \frac{-x\beta s^{\beta-1}}{2\sqrt{D}} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{D}}\right)s^\beta}, \quad x > 0$$

y de la Eq.(2.2.16) vemos que

$$\frac{d}{ds}\bar{\mathcal{G}}_s = -2x\beta\bar{\mathcal{G}}_c, \quad x > 0,$$

lo que implica por integración la siguiente relación de reciprocidad

$$x\bar{\mathcal{G}}_c\left(x, s, \beta\right) = \frac{t}{2\beta}\bar{\mathcal{G}}_s\left(x, s, \beta\right), \quad x > 0. \tag{2.2.19}$$

Introduciendo la siguiente variable de similaridad así

$$z = \frac{|x|}{\sqrt{D}t^\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

y aplicando la fórmula de inversión de la TL en la Eq.(2.2.19) para obtener

$$|x|\bar{\mathcal{G}}_c\left(x,t;\beta\right)=\frac{|x|}{2\sqrt{D}}\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}e^{st-\left(\frac{|x|}{\sqrt{D}}\right)s^{\beta}}\frac{ds}{s^{1-\beta}}$$

donde B_r es el camino de Bromwich. Para $\sigma=st$ y la variable de similaridad z tenemos que

$$\left(\frac{\sigma}{t}\right)^{\beta}=s^{\beta},\quad s^{1-\beta}=\frac{\sigma^{1-\beta}}{t^{1-\beta}}$$

es decir

$$\begin{aligned}|x|\mathcal{G}_c\left(x,t;\beta\right)&=\frac{|x|}{4\pi i\sqrt{D}}\int_{Br}e^{\sigma-\left(\frac{|x|}{\sqrt{D}}\right)\frac{\sigma^{\beta}}{t^{\beta}}}\frac{d\sigma}{t\frac{\sigma^{1-\beta}}{t^{1-\beta}}}\\&=\frac{|x|}{4\pi i\sqrt{D}t^{\beta}}\int_{Br}e^{\sigma-z\sigma^{\beta}}\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}},\quad z>0,\quad 0<\beta<1\end{aligned}$$

llamado $M\left(z;\beta\right)$ nuestra función auxiliar

$$M\left(z;\beta\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Br}e^{\sigma-z\sigma^{\beta}}\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}},\quad 0<\beta<1$$

donde B_r representa el contorno de Bromwich. De esta ecuación encontramos:

$$|x|\mathcal{G}_c\left(x,t;\beta\right)=\frac{z}{2}M\left(z;\beta\right).\tag{2.2.20}$$

La expresión $M\left(z;\beta\right)$ es continua desde $z>0$, para todo $z\in\mathbb{C}$ y en cierta representación integral. Para este objetivo se usa el contorno de Bromwich modificado de la Figura 2.2, de donde obtenemos el contorno equivalente para $z>0$ conocido como representación de Hankel y dado por

$$M\left(z;\beta\right):=\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}e^{\sigma-z\sigma^{\beta}}\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}},\quad 0<\beta<1,$$

que se puede escribir

$$M\left(z;\beta\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}e^{\sigma}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}z^{n}}{n!}\sigma^{\beta n}\right]\frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}z^{n}}{n!}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha}e^{\sigma}\sigma^{\beta n+\beta-1}d\sigma\right]$$

y usando la reciprocidad de la función gama en la integral de Hankel se observa que

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\sigma}\sigma^{-z}d\sigma$$

de donde

$$M(z;\beta) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!\Gamma\left[-\beta n + (1-\beta)\right]}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{2.2.21}$$

recordando que la fórmula de reflexión para la función gama

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{\pi}\Gamma(1-z)\,\mathrm{sen}\,(\pi z)$$

y sustituyendo en la Eq.(2.2.21), se encuentra que

$$M(z;\beta) := \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\Gamma\left(\beta\,(n+1)\,\mathrm{sen}\left[\pi\beta\,(n+1)\right]\right)\frac{z^n}{n!} \tag{2.2.22}$$

se puede ver que el radio de convergencia de la Eq.(2.2.21) es definido en $0 < \beta < 1$ y nuestra función acaba de ser entera en z. Por consiguiente, el cambio entre las series y la integral en nuestro cálculo es posible, así la integral y la serie de $M(z;\beta)$ es valida para cada $z \in \mathbb{C}$. Ahora podemos escribir la Eq.(2.2.21) usando la función Wright y Mainardi,

$$M(z;\lambda\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\lambda n+\mu)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\sigma+z\sigma^{-x}}\frac{d\sigma}{\sigma^{\mu}} \tag{2.2.23}$$

donde para $\lambda > -1, \mu > 0$, tenemos

$$M(z;\beta) = W(-z;-\beta,1-\beta) = H_{1,2}^{1,1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(0,0)\\(0,1);(\beta,-\beta)\end{matrix}\right],$$

que ha sido escrita tambien en términos de la función H de Fox, notando que es posible evaluar esta función para algunos valores de β.

Teorema 2.2.1. *Para $\beta = \frac{1}{q}$ y $q \geq 2$ con q un número entero positivo, $M(z;\beta)$ se puede expresar como la suma de $(q-1)$ séries de potência de z.*

Demostración. Si $\beta = \frac{1}{q}$ se sustituye en la Eq.(2.2.22) y obtenemos:

$$M\left(z;\frac{1}{q}\right) := \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma\left[\frac{(n+1)}{q}\right]\mathrm{sen}\left[\frac{\pi\,(n+1)}{q}\right](-1)^n\,\frac{z^n}{n!}$$

el término $\operatorname{sen}\left[\frac{\pi(n+1)}{q}\right]$ desaparece cuando $\frac{(n+1)}{q}$ es entero, luego escribimos $(n+1) = qm+h, \quad m = 0,1,2,\ldots$, y $h = 0,1,2,\ldots,q-1$, entonces tenemos una serie infinita en n, truncada para $q-1$ series infinitas em m. Ahora usando identidades

$$\operatorname{sen}\left(\pi n + \frac{\pi h}{q}\right) = \cos(\pi n)\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{q}\right) = (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{q}\right)$$

obtenemos

$$M\left(z;\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{q-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(q+1)+h-1}\,\Gamma\left(n+\frac{h}{q}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{q}\right)\frac{z^{qn+h-1}}{(qn+h-1)!}$$

introducimos el simbolo de Pochhammer

$$\left(\frac{h}{q}\right)_n := \frac{\Gamma(n+h/q)}{\Gamma(h/q)}$$

encontramos el resultado esperado

$$M\left(z;\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{q-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(q+1)+h-1}\,\Gamma\left(\frac{h}{q}\right)\left(\frac{h}{q}\right)_n\operatorname{sen}\left(\frac{\pi h}{q}\right)\frac{z^{qn+h-1}}{(qn+h-1)!} \qquad \boxdot$$

Un ejemplo de este teorema se relaciona con la función de Green en la ecuación de difusión y que es la función de Mainardi equivalente cuando $q=2$. Es decir al hacer $q=2$ y $h=1$ vemos que

$$M\left(z,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{2}\right)_m\frac{z^{2m}}{(2m)!},$$

recordando que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ y la fórmula de Legendre con $z = n+\frac{1}{2}$

$$\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}z^{2z-1}\Gamma(2z), \quad 2z \neq 0,-1,-2,\ldots$$

calculamos

$$\left(\frac{1}{2}\right)_m = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}}{\sqrt{\pi}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

así

$$M\left(z,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}},$$

y su gráfico es la función de Gauss reconocida por ser la función de Green de la ecuación

de el calor, Figura 2.5.

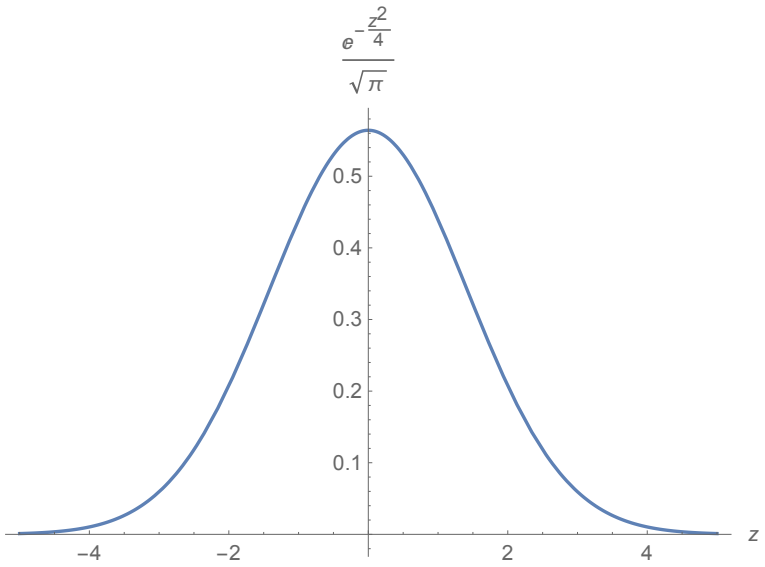

Figura 2.5: Función de Mainardi, con $M(z;1/2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}$.

Vamos a mostrar que para cualquier $0 < \beta < 1, M(z;\beta)$ se satisface

$$\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} M\left(z, \frac{1}{q}\right) + \frac{(-1)^q}{q} z M\left(z, \frac{1}{q}\right) = 0.$$

Teorema 2.2.2. *Para $0 < \beta < 1$ la función $M(z;\beta)$ satisface la ecuación diferencial fracional de orden $\upsilon = 1/\beta - 1, \upsilon > 1$ dada por*

$$\frac{d^{(1/\beta)-1}}{dz^{(1/\beta)-1}} M(z;\beta) + e^{\pm i\pi/\beta} \beta z M(z;\beta) = 0$$

Demostración. Sea

$$M(z;\beta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha} e^{\sigma - z\sigma^\beta} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\beta}}$$

haciendo el cambio de la variable

$$\sigma \to \tau = \sigma^\beta \Rightarrow d\tau = \left(\frac{\beta}{\sigma^{1-\beta}}\right) d\sigma \tag{2.2.24}$$

tenemos

$$\beta M(z;\beta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\beta} e^{-z\tau + \tau^{\frac{1}{\beta}}} d\tau \tag{2.2.25}$$

donde c_β es el camino (en el τ-plano complejo) obtenido desde el camino de Hankel original por la transformación de la Eq.(2.2.24). De la Eq.(2.2.25) derivando con orden $\upsilon = \frac{1}{\beta} - 1$

obtenemos

$$2\pi i \frac{d^{(1/\beta)-1}}{dz^{(1/\beta)-1}} M(z;\beta) = -\frac{(-1)^{1/\beta}}{\beta} \int_{c_\beta} e^{-z\tau+\tau^{1/\beta}} \tau^{(1/\beta)-1} d\tau \tag{2.2.26}$$

por otro lado de la Eq.(2.2.25) vemos

$$\begin{aligned} 2\pi i\beta z M(z;\beta) &= -\int_{c_\beta} e^{\tau^{1/\beta}} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-z\tau}\right) d\tau \\ &= -\left[e^{\tau^{1/\beta}} e^{-z\tau}\right]_{c\beta} + \int_{c_\beta} \frac{d}{d\tau}\left(e^{\tau^{1/\beta}}\right) e^{-z\tau} d\tau \end{aligned}$$

luego

$$2\pi i\beta z M(z;\beta) = \frac{1}{\beta} \int_{c_\beta} e^{-z\tau+\tau^{1/\beta}} \tau^{\frac{1}{\beta}-1} d\tau \tag{2.2.27}$$

por lo que de las ecuaciones Eq.(2.2.26) y Eq.(2.2.27) se tiene el resultado ⊡

Con $\beta = \frac{1}{q}, q \geq 2$, del anterior resultado obtenemos

$$\frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} M\left(z;\frac{1}{q}\right) + \frac{(-1)^q}{q} z M\left(z;\frac{1}{q}\right) = 0 \tag{2.2.28}$$

donde si $q \geq 4$, tenemos una ecuación diferencial Hiper-Airy de orden $q-1$.
Podemos concluir que nuestra función auxiliar $M(z;\beta)$ encuentra las soluciones de la Eq.(2.2.28) que satisface las k condiciones iniciales obtenidas de la Eq.(2.2.22) por

$$M^h(0;\beta) = \frac{(-1)^h}{\pi} \Gamma\left[\beta(h+1)\right] \operatorname{sen}\left[\pi\beta(h+1)\right], \quad h = 0, 1, \ldots, k-1$$

donde $k = \left[\frac{1}{\beta} - 1\right]$ (es decir k es el minimo entero positivo mayor o igual a $1/\beta - 1$).
En la ecuación fraccional de difusión-onda, solo los valores positivos de z son de nuestro interes. De hecho para $z \in \mathbb{R}^+$ la función $M(z;\beta)$ es monótona decreciente en $0 < \beta \leq 1/2$, para $1/2 < \beta < 1$ existe un crecimiento seguido de un decrecimiento, obtenido un valor máximo en $M_0(\beta)$ para un punto $Z_0(\beta)$, entonces cuando $\beta \to 1^-$, $M_0(\beta) \to \infty$ e $Z_0(\beta) \to 1$, en nuestro caso limite $\beta = 1$ se recupera la ecuación de onda y tenemos que $M(z;1) = \delta(z-1)$; que ayuda a recuperar la solución de la ecuación de onda por medio de la relación de reciprocidad de la Eq.(2.2.20) y de la solución obtenida en terminos de la función de Green en la Eq.(2.2.11).

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales fraccionales no lineales

Las EDOF y EDPF permite estudiar fenómenos lineales y no lineales de física, biología, ingeniería y otras áreas de la ciencia y sus aplicaciones. La potencia de las EDF radica en que permite recuperar la mémoria de diversas situaciones físicas. Fenómenos no lineales asociados a la difusión anómala, a los procesos de evolución, transporte, viscoelasticidad, tienen modelos desde las EDPF no lineales que permiten explicar la memória fisica de ellos. En particular cuando el cálculo fraccional es aplicado en la variable temporal, diversos modelos yá fueron estudiados por los investigadores del área. Las ecuaciones KdV, Burgers, de difusión anomala, Harry Dym [41] son ejemplos de estos fenómenos. Algunas soluciones de estos modélos pueden ser encontrados de forma exacta o aproximada. En verdad por la complejidad de estas ecuaciones los métodos de aproximación de soluciones son mas usados. Nuestro enfasis en este capítulo es estudiar, aplicar, comparar métodos como simétrias de Lie, descomposición de Adomian y de iteración variacional para algunas EDF lineales y no lineales.

3.1. Simetrías de Lie. Ecuaciones fraccionales de Burgers y Korteweg-de Vries

Las simetrías son propiedades fundamentales encontradas en la naturaleza de los fenómenos, diferentes leyes fundamentales tienen simetrías. Ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales son usadas como modélos de procesos cuyas soluciones pueden ser encontrados

desde la teoría de grupos de Lie [42]. En las últimas décadas el uso creciente de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales fraccionales en diferentes modelos abre la posibilidad de ser aplicados los grupos de simetrías de Lie. De hecho Gazizov, Kasatkin, Lukashchuk propone una formula de prolongación para derivadas fraccionales [43], que es usada por investigadores de EDPF no lineales [44]-[48]. En esta sección vamos a usar esta teoría para llevar las ecuaciones fraccionales de Korteweg-de Vries y de Burgers a EDOF no lineales, en particular nuestro aporte a esta temática se dará cuando se lleve la KdVF a una EDOF no lineal.

3.1.1. Simétrias de una EDPF

Consideremos la EDPF de la forma

$$\mathsf{D}_t^{\alpha}[u(x,t)] = F(x,t,u,u_x,u_{xx},u_{xxx},...), \alpha > 0, \tag{3.1.1}$$

donde la derivada fraccional que vamos a usar es la derivada de RL ya que en se usará el extensión infinitesimal relacionado a esta derivada, sin perder de vista que es posible usar la derivada de Caputo con su respectiva extensión infinitesimal. Vamos a suponer que esta ecuación es invariante bajo un parámetro (ϵ) de transformaciones continuas dado por

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= t + \varepsilon\tau\left(x,t,u\right) + 0\left(\varepsilon^2\right), \\
\bar{x} &= x + \varepsilon\xi\left(x,t,u\right) + 0\left(\varepsilon^2\right), \\
\bar{u} &= u + \varepsilon\eta\left(x,t,u\right) + 0\left(\varepsilon^2\right)
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\alpha}\bar{u}}{\partial\bar{t}^{\alpha}} &= \frac{\partial^{\alpha}u}{\partial t^{\alpha}} + \varepsilon\zeta_{\alpha}^{0} + 0\left(\varepsilon^2\right), \\
\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon\zeta_{1}^{1} + 0\left(\varepsilon^2\right), \\
\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon\zeta_{2}^{1} + 0\left(\varepsilon^2\right), \\
\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial\bar{x}^3} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon\zeta_{3}^{1} + 0\left(\varepsilon^2\right), \\
&\vdots = \vdots
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

donde τ, ξ e η son infinitesimales y ζ_1^1, ζ_2^1 , ζ_3^1 y ζ_α^0 son extensiones infinitesimales de orden 1,2,3 y α respectivamente. La expresión explícita para ζ_1^1, ζ_2^1 e ζ_3^1 son calculados al usar el teorema de extensiones infinitesimales de la clásica teoría de grupos de Lie [49]. Es decir

$$\zeta_1^1 = \eta_x + (\eta_u - \xi_x)\, u_x - \tau_x u_t - \xi_u \left(u_x\right)^2 - \tau_u u_x u_t, \tag{3.1.4}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2^1 = {} & \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})\, u_x - \tau_{xx} u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})\, u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t \\ & -\xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x)\, u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_{xx} u_x \\ & -\tau_u u_{xx} u_t - 2\tau_u u_{xt} u_x,\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3^1 = {} & \eta_{xxx} + (3\eta_{xxu} - \xi_{xxx})\, u_x - \tau_{xxx} u_t + 3\,(\eta_{xuu} - \xi_{xxu})\, u_x^2 \\ & -3\tau_{xxu} u_x u_t + (\eta_{uuu} - 3\xi_{xuu})\, u_x^3 + 3\,(\eta_{xu} - \xi_{xx})\, u_{xx} \\ & -3\tau_{xx} u_{xt} - 3\tau_{xx} u_{xt} - 3\tau_{xuu} u_x^2 u_t + 3\,(\eta_{uu} - 3\xi_{xu})\, u_x u_{xx} \\ & -3\tau_{xu} u_t u_{xx} - 6\tau_{xu} u_{xt} u_x - 3\tau_x u_{xxt} + (\eta_u - 3\xi_x)\, u_{xxx} \\ & -\xi_{xxx} u_x^4 - 6\xi_{uu} u_x^2 u_{xx} - 3\tau_{uu} u_x^2 u_{tx} - \tau_{uuu} u_x^3 u_t - 3\xi_u u_{xx}^2 \\ & -3\tau_u u_{xxt} u_t - 3\tau_{uu} u_{xx} u_x u_t - 4\xi_u u - xxxu_x - \tau_u u_{xxx} u_t,\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

y se puede asociar el generador infinitesimal dado por

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \tag{3.1.7}$$

donde el límite inferior de la integral en la derivada de RL Eq.(1.1.2) fija un invariante bajo las transformaciones en la Eq.(3.1.2) y Eq.(3.1.3) dado por

$$\tau\left(x, t, u\right)|_{t=0} = 0, \tag{3.1.8}$$

con la extensión infinitesimal ζ_α^0 dado por la importante fórmula de prolongamiento [43]

$$\zeta_\alpha^0 = D_t^\alpha(\eta) + \xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x) + D_t^\alpha(D_t(\tau)u) - D_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1}(u). \tag{3.1.9}$$

Aquí el operador D_t^α es el operador de la derivada fraccional total al usar con la regla generalizada de Leibniz [50] para la derivada fraccional de RL conocida por

$$D_t^\alpha(f(t)g(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{\alpha-n} f(t) D_t^n g(t), \quad \alpha > 0, \tag{3.1.10}$$

donde $\binom{\alpha}{n} = \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}$. Recuerdese la regla de la cadena [50]

$$\frac{d^m g(y(t))}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{1}{k!}[-y(t)^r]\frac{d^m}{dt^m}[(y(t))^{k-r}]\frac{d^k g(y)}{dy^k}. \tag{3.1.11}$$

de donde se puede obtener con $f(t) = 1$, una expresión mas explicita para la extensión infinitesimal ζ_α^0, optima para usar en los calculos de las simetrías y que es dada por

$$\begin{aligned}\zeta_\alpha^0 = \frac{\partial^\alpha \eta}{dt^\alpha} + (\eta_u - \alpha D_t(\tau))\frac{\partial^\alpha u}{dt^\alpha} - u\frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \mu \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n}\frac{\partial^n \eta_u}{dt^n} - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau)\right] D_t^{\alpha-n}(u) \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n}(u_x).\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Vamos a suponer para el estudio de la invarianza de la Eq.(3.1.1) bajo las transformaciones continuas con paramétro (ϵ), que

$$\frac{\partial^\alpha \overline{u}(\overline{x},\overline{t})}{\partial \overline{t}^\alpha} = F(\overline{x},\overline{t},\overline{u},\overline{u}_{\overline{x}},\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}},\overline{u}_{\overline{x}\overline{x}\overline{x}},...), \alpha > 0, \tag{3.1.13}$$

al sustituir las Eq.(3.1.2), Eq(3.1.3) en la Eq.(3.1.13), hacer la expansión para $\epsilon = 0$, y organizar los calculos obtenemos

$$\left[\zeta_\alpha^0 - \xi\frac{\partial F}{\partial x} - \tau\frac{\partial F}{\partial t} - \eta\frac{\partial F}{\partial u} - \zeta_1^1\frac{\partial F}{\partial u_x} - \zeta_2^1\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} - \zeta_3^1\frac{\partial F}{\partial u_{xxx}} - ...\right] = 0 \tag{3.1.14}$$

conocida como ecuación invariante de las EDPF. Ahora podemos resolver τ, ϵ, η explicitamente en la anterior ecuación y aplicar la definición de solución invariante.

Definición 3.1.1. *[51] Una solución $u = \Theta(x,t)$ se dice una solución invariante de la EDPF* Eq.(3.1.1) *si y solo si*

(i) $u = \Theta(x,t)$ *es una superfície invariante, es decir* $X\Theta = 0$ *implica*

$$\left(\tau\frac{\partial}{\partial t}+\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial u}\right)\Theta=0.$$

(ii) $u=\Theta(x,t)$ *satiface la* Eq.(3.1.1).

3.2. Ecuación fraccional de Korteweg-de Vries e de Burgers

En esta sección vamos a demostrar que la ecuación Korteweg-de Vries fraccional (KdVF) puede llevarse a una EDOF no lineal que esta en terminos de los operadores fracionários de Erdélyi-Kober. Sahadevan e Bakkyaraj en [51], dejan para el lector la prueba de este hecho y presentan la prueba de llevar la ecuación de BF a una EDOF no lineal en terminos de los mencionados operadores. La ecuación KdVF e BF tienen diferentes estudios desde las simétrias y las aplicaciones en teoría de viscoelasticidad, transporte, mecánica cuántica, aerodinámica, fluidos [52]-[61]. En [62] es hecho el estudio de la BF perturbada desde el análisis de las simétrias de Lie para encontrar soluções exatas de la misma.

3.2.1. Ecuación fraccional de Korteweg-de Vries

Vamos a considerar a KdVF dada por la siguiente ecuación

$$\mathsf{D}_t^{\alpha}[u]=u_{xxx}+Au^p u_x,\quad u=u(x,t), \tag{3.2.1}$$

con $u=u(x,t)$ y A constante, donde $0<\alpha\leq 1$, $p>0$. La derivada fraccional que se usará es la de RL que en el tiempo modela la sub-dispersión, el término de la derivada de orden tres representa la dispersión y el término no lineal que indica la convección. El balance de estos fenómenos lleva a las llamadas ondas solitarias en el caso entero $\alpha=1$, cuando la masa y la energia se conservan [63].

Al usar la definición de derivada de RL y las transformaciones continuas de las Eq.(3.1.2), (3.1.3), podemos obtener la ecuación invariante como

$$\left[\zeta_{\alpha}^{0}-\zeta_{3}^{1}-Au^p\zeta_{1}^{1}-Ap\eta u^{p-1}u_x\right]=0. \tag{3.2.2}$$

Sustituyendo las expresiones explicitas para $\zeta_1^1,\zeta_2^1,\zeta_3^1$ de las Eqs.(3.1.4,3.1.5,3.1.6) en la

fórmula de prolongación ζ_α^0, es decir en la Eq.(3.1.12) y al igualar las derivadas hasta las poténcias de orden cero, obtenemos el siguiente sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales.

$$\xi_u = \xi_t = \tau_u = \tau_x = \xi_{xxx} = \eta_{uu} = 0$$
$$\binom{\alpha}{n}\partial_t^n(\eta_u) - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}(\tau) = 0 \quad para \quad n = 1, 2, ...$$
$$Au^p\xi^{'}(x) - Ap\eta u^{p-1} - 3\eta_{xxu} - \alpha Au^p\tau^{'}(t) = 0$$
$$3\xi^{''}(x) - \eta_{xu} = 0$$
$$3\xi^{'}(x) - \alpha\tau^{'}(t) = 0$$
$$\partial_t^\alpha(\eta) - u\partial_t^\alpha(\eta_u) - \eta_{xxx} - Au^p\eta_x = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos explicitamente los infinitesimales

$$\xi = a_0x + a_1, \quad \tau = \frac{3a_0t}{\alpha}, \quad \eta = \frac{-2a_0u}{p} \tag{3.2.3}$$

donde a_0 y a_1 son constantes arbitrárias. En este punto tenemos el operador infinitesimal

$$X = (a_0x + a_1)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3a_0t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2a_0u}{p}\frac{\partial}{\partial u}$$

y la base para el algebra de Lie de la KdVF es

$$\left(X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{3t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{2u}{p}\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

La variable de similaridad z y la transformación de similaridad $f(z)$ correspondientes al operador infinitesimal X_2 puede ser obtenido al resolver la ecuación característica

$$\frac{dx}{x} = \frac{\alpha dt}{3t} = \frac{-pdu}{2u}$$

de donde se encuentra que

$$u = t^{\frac{-2\alpha}{3p}}f(z), \quad z = xt^{\frac{-\alpha}{3}}. \tag{3.2.4}$$

Ahora podemos usar esta transformaciones de similaridad en la KdVF y transformar esta en una EDOF no lineal.

Teorema 3.2.1. *Las transformaciones de similaridad* $u = t^{\frac{-2\alpha}{3p}} f(z), \quad z = xt^{\frac{-\alpha}{3}}$ *reducen la* Eq.(3.2.1) *KdVF en una EDOF no lineal de la forma*

$$\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p}-\alpha,\alpha} f\right)(z) = \frac{d^3 f}{dz^3} + Af^p \frac{df}{dz} \tag{3.2.5}$$

con el operador diferencial fraccional de Erdélyi-Kober dado por

$$\left(P_\delta^{\tau,\alpha} g\right)(z) = \prod_{j=0}^{m-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\delta} z \frac{df}{dz}\right) \left(K_\delta^{\tau+\alpha,m-\alpha} g\right)(z), \tag{3.2.6}$$

$z > 0, \delta > 0, \alpha > 0,$ *e*

$$m = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

donde

$$\left(K_\delta^{\tau,\alpha} g\right)(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_1^\infty (u-1)^{\alpha-1} u^{-(\tau+\alpha)} g\left(zu^{\frac{1}{\delta}}\right) du & \alpha > 0, \\ g(z) & \alpha = 0 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

es el operador integral de Erdélyi-Kober.

Demostración. Sea $n-1 < \alpha < n, \quad n = 1, 2, 3, ...$ Consideremos la derivada fraccional de RL y las transformaciones de similaridad, entonces

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{-\frac{2\alpha}{3p}} f\left(xs^{-\frac{2\alpha}{3}}\right) ds\right]$$

si $v = \frac{t}{s}$, $ds = \frac{-t}{v^2} dv$, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_1^\alpha (v-1)^{n-\alpha-1} v^{-\left(n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}+1\right)} f\left(zv^{\frac{2\alpha}{3}}\right) dv\right]$$

al usar el operador integral fraccional de Erdélyi-Kober tenemos

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}} \left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{3\alpha}{2p},n-\alpha} f\right)(z)\right].$$

podemos simplificar esta expresión con $z = xt^{\frac{-\alpha}{3}}$, $\phi \in C^1(0,\infty)$ tal que

$$t\frac{\partial}{\partial t}\phi\left(z\right)=t\,\phi'\left(z\right)\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{\alpha}{3}x\,t^{-\frac{\alpha}{3}-1}\,t\frac{d\phi}{dz}=-\frac{\alpha}{3}\,z\,\frac{d}{dz}\phi\left(z\right)$$

y obtener

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p},n-\alpha}f\right)(z)\right]=\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p},n-\alpha}f\right)\right)(z)\right]$$

$$=\tfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}-1}\left(n-\alpha-\tfrac{2\alpha}{3p}-\tfrac{\alpha}{3}z\tfrac{d\phi}{dz}\right)\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p},n-\alpha}f\right)(z)\right].$$

Al repetir este proceso $(n-1)$ veces tenemos

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{3\alpha}{2p},n-\alpha}f\right)(z)\right]=t^{-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{2\alpha}{3p}-\alpha+j-\frac{\alpha}{3}z\frac{d}{dz}\phi\right)\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p},n-\alpha}f\right)(z).$$

Si usamos la definición de operador diferencial fraccional de Erdélyi-Kober con $\tau\to 1-\frac{2\alpha}{3p}-\alpha$ e $\delta=\frac{3}{\alpha}$ tenemos

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[t^{n-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\left(K_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{3\alpha}{2p},n-\alpha}f\right)(z)\right]=t^{-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p}-\alpha,\alpha}f\right)(z)$$

Teniendo en cuenta que si

$$u^p=t^{-\frac{2\alpha}{3}p}f^p,\qquad u_x=t^{-\frac{2\alpha}{3p}}f'\left(z\right)t^{-\frac{\alpha}{3}},$$

$$u_{xx}=t^{-\frac{2\alpha}{3p}}f''\left(z\right)t^{-\frac{\alpha}{3}},\qquad u_{xxx}=t^{-\frac{2\alpha}{3p}}f'''\left(z\right)t^{-\frac{\alpha}{3}}$$

y

$$t^{-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p}-\alpha,\alpha}f\right)(z)=t^{-\alpha-\frac{2\alpha}{3p}}\left(f'''\left(z\right)+A\,f^p\,f'\left(z\right)\right)$$

podemos obtener

$$\left(P_{\frac{3}{\alpha}}^{1-\frac{2\alpha}{3p}-\alpha,\alpha}f\right)(z)=\frac{d^3f}{dz}+A\,f^p\frac{df}{dz}.$$

Puede verse que este resultado recupera la solución de la clásica KdV cuando en la EDOF se toma $\alpha=1,p=1$. Para otros casos del parámetro α métodos para la busqueda de la solución todavia esta en investigación. Es conocido que el caso que $A=0$ existen tres soluciones linealmente independientes, teniendo en cuenta que nuestro resultado es un caso particular de los resultados en [64]. Se puede obtener algunas soluciones exactas de

esta EDOF con el método de la sub-equación en el caso que $p = 1$ [65].

3.2.2. Ecuación fraccional de Burgers

Vamos a considerar la BF conocida por la siguiente ecuación

$$\mathsf{D}_t^{\alpha}[u] = u_{xx} + Au^p u_x, \quad u = u(x,t), \tag{3.2.8}$$

con $0 < \alpha \leq 1$, $A \in \mathbb{R}$ y $p > 0$ y con derivada fraccional de RL que en el tiempo modela la sub-difusión. En el caso que $\alpha = 1, p = 1$ se recupera la clásica ecuación de Burgers, que puede ser resuelta con simetías de Lie al obtener sus cinco generadores para su operador infinitesimal desde su respectivo sistema de ecuaciones invariantes [42]. El estudio de los invariantes y simetrías de Lie de la BF es hecho en [51], a partir de dos generadores para el operador infinitesimal de dicha ecuación obtenido desde su sistema de ecuaciones invariantes, que permiten encontrar las siguientes transformaciones de similaridad $u(x,t) = t^{\frac{-\alpha}{2p}} f(z)$, con variable de semejanza $z = xt^{\frac{-\alpha}{2}}$, que convierten la BF en una EDOF no lineal.

Teorema 3.2.2. *La transformación $u(x,t) = t^{\frac{-\alpha}{2p}} f(z)$, y la variable de semejanza, $z = xt^{\frac{-\alpha}{2}}$ reduce la BF a una ecuación diferencial ordinaria no lineal de la siguiente forma*

$$\left(P_{\frac{2}{\alpha}}^{1-\frac{\alpha}{2p}-\alpha,\alpha} f\right)(z) = \frac{d^2 f}{dz^2} + Af^p \frac{df}{dz}$$

con el operador diferencial fraccional de Erdélyi-Kober

$$\left(P_{\delta}^{\tau,\alpha} g\right)(z) := \prod_{j=0}^{m-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\delta} z \frac{d}{dz}\right) \left(K_{\delta}^{\tau+\alpha, m-\alpha} g\right)(z), z > 0, \delta > 0, \alpha > 0$$

$$m = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \textit{donde}$$

$$\left(K_{\delta}^{\tau,\alpha} g\right)(z) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (v-1)^{\alpha-1} v^{-(\tau+\alpha)} g\left(z\, u^{\frac{1}{\delta}}\right) dv, & \alpha > 0; \\ g(z), & \alpha = 0 \end{cases}$$

es el operador integral fraccional de Erdélyi-Kober.

El anterior teorema permite encontrar soluciones de la BF desde la EDOF no lineal cuando $A = 0$ y $p = 1$, generando dos soluciones linealmente independientes, en [64] es hecho un amplio estudio y llevando las soluciones del caso $1 \leq \alpha < 2$ a las funciones H de Fox. Cuando $p = 1$ y $A \neq 0$ la construcción de soluciones particulares de esta EDOF aún esta en investigación.

3.3. Método de descomposición de Adomian

El físico de los Estados Unidos, George Adomian (1923-1996) creó el método de descomposición de Adomian (ADM) en la década de 1980 [66], para resolver problemas físicos e biológicos de diversas ecuaciones no lineales y estocásticas que eran de dificil solución. El método es considerado semianálitico y calcula una serie convergente para la solución exacta bajo ciertas condiciones analíticas [67], donde el operador no lineal es descompuesto en una serie que tiene polinómios de Adomian. Lo interesante del método es que la serie puede truncarse con pocos términos y obtener una aproximación buena de la solución de la ecuación diferencial en estudio. La extensión del ADM para EDPF lineales y no lineales es dado recientemente [68], [69] desde estudios de la ecuación de difusión y KdVF. En esta sección vamos abordar el estudio del ADM para ciertas EDOF y EDPF, respectivamente como en [70], [71].

3.3.1. Solución de una EDOF con ADM

Consideramos el problema de valor inicial

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} y(x) + Ly(x) + Ny(x) = g(x), \ \alpha > 0, \tag{3.3.1} $$

$$ y^{(k)}(0) = c_k, \ k = 0, \ldots, m-1, \quad m-1 < \alpha \leq m, \tag{3.3.2} $$

donde L es un operador lineal, ${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}$ representa la derivada fraccional en el sentido de Caputo (ya que con esta definición se puede usar la TL sin depender de la integral fraccional que aparece cuando se usa la TL de RL), N es un operador no lineal y g es una función

continua. El método de decomposición consiste en encontrar la solución de forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n. \tag{3.3.3}$$

El operador no lineal $Ny(x)$ es descompuesto de la siguennte forma

$$Ny(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, \ldots, y_n), \tag{3.3.4}$$

donde A_n son los polinómios de Adomian que tienen la forma

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i y_i\right)\right]_{\lambda=0}. \tag{3.3.5}$$

Para la función no lineal en los primeros polinómios de Adomian son dados por

$$\begin{aligned}
A_0 &= f(y_0), \\
A_1 &= f^{(1)}(y_0)\, y_1, \\
A_2 &= f^{(1)}(y_0)\, y_3 +, f^{(2)}(y_0)\, y_1 y_2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(y_0)\, y_1^3, \\
A_3 &= f^{(1)}(y_0)\, y_4 + f^{(2)}(y_0)\left\{y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2\right\} + \frac{1}{2!} f^{(3)}(y_0)\, y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} f^{(4)}(y_0)\, y_1^4 \\
A_4 &= f^{(1)}(y_0)\, y_4 + f^{(2)}(y_0)\{y_1 y_4 + y_2 y_3\} + \frac{1}{2!} f^{(3)}(y_0)\left\{y_1^2 y_3 + y_1 y_2^2\right\} \\
&\quad + \tfrac{1}{3!} f^{(4)}(y_0)\, y_1^3 y_2 + \tfrac{1}{5!} f^{(5)}(y_0)\, y_1^5
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Ahora para resolver el problema de valor inicial dado en la Eq.(3.3.1) y Eq.(3.3.2), usando el operador integral de RL en ambos lados de la Eq.(3.3.1) y el hecho que

$$J^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}$$

obtenemos

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{x^k}{k!} + J^{\alpha} g(x) - J^{\alpha} L y(x) - J^{\alpha} N y(x). \tag{3.3.7}$$

Al sustituir las Eqs.(3.3.3,3.3.4) en la Eq.(3.3.7), se puede definir las componentes y_n recursivamente como

$$\begin{aligned} y_0 &= \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{x^k}{k!} + J^\alpha g\left(x\right), \\ y_1 &= -J^\alpha L y_0\left(x\right) - J^\alpha A_0, \\ y_n &= -J^\alpha L y_{n-1}\left(x\right) - J^\alpha A_{n-1},\ n \geq 2 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

y estos ayudan a determinar la solución en série truncada asociada a la Eq.(3.3.3)

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{n-1} y_i \tag{3.3.9}$$

que dá una solución aproximada para el problema de valor inicial. Para demonstrar la eficácia de el método vamos a considerar algunas ecuaciones diferenciales fraccionales.

Aplicación en EDOF lineales

Sea el problema de valor inicial dado por la siguiente EDOF lineal

$${}_c\mathsf{D}_t^\alpha[y] + f\left(x\right) y = g\left(x\right), \quad y^{(k)}\left(0\right) = c_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{3.3.10}$$

donde $m-1 < \alpha \leq m$, $g\left(x\right)$, $f\left(x\right)$ son funciones continuas. Sustituyendo en la Eq.(3.3.8) tenemos

$$y_0 = \phi\left(x\right) + J^\alpha g\left(x\right), \tag{3.3.11}$$

donde

$$\phi\left(x\right) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{x^k}{k!} \tag{3.3.12}$$

y

$$\begin{aligned} y_1 &= -J^\alpha\left[f\left(\phi + J^\alpha g\right)\right] = -J^\alpha\left[f\phi\right] - J^\alpha\left[f J^\alpha g\right], \\ y_2 &= -J^\alpha\left[f y_1\right] = J^\alpha\left[f J^\alpha\left[f\phi\right] + J^\alpha\left[f J^\alpha\left[f J^\alpha g\right]\right]\right] \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

al definir el operador P_n^α por

$$P_n^\alpha [\cdot] = \underbrace{J^\alpha \left[f J^\alpha \left[f J^\alpha \left[f \ldots J^\alpha [f [.]] \right] \right] \right]}_{n-vecez} \tag{3.3.14}$$

tenemos en general que

$$y_n = (-1)^n \ P_n^\alpha [\phi] + (-1)^n \ P_n^\alpha [J^\alpha g], \tag{3.3.15}$$

de donde podemos escribir la solución como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ P_n^\alpha [\phi] + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ P_n^\alpha [J^\alpha g], \tag{3.3.16}$$

con y_c representando la solución de la ecuación homogénea y y_p representa una solución particular. Un caso especial de la Eq.(3.3.10) es dado cuando $f(x) = \lambda = constante$. En este caso

$$P_n^\alpha [\cdot] = \lambda^n J^{\alpha n} [\cdot], \tag{3.3.17}$$

por tanto, al usar el operador P_n^α en la integral de RL de una constante que y_c tenemos

$$y_c = \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda x^\alpha)^n}{\Gamma(\alpha n + k + 1)} = \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k E_{\alpha,k+1} (-\lambda x^\alpha), \tag{3.3.18}$$

donde $E_{\alpha,k+1}(\cdot)$ es la función de Mittag-Leffler de dos parámetros definida en la Eq.(1.1.15). La solución particular y_p tiene la siguiente forma

$$y_p = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \ J^{\alpha(n+1)} g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{\Gamma(\alpha n + \alpha)} \int_0^x (x-t)^{(n+1)\alpha - 1} g(t) \, dt, \tag{3.3.19}$$

esta serie converge uniformemente entonces se puede intercambiar la suma por la integral para obtener

$$y_p = \int_0^x t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} (-\lambda t^\alpha) \, g(x-t) \, dt, \tag{3.3.20}$$

al hacer $y = y_c + y_p$ obtenemos la solución de este caso especial da Eq.(3.3.10).

Aplicación en EDOF no lineales

Sea el problema de valor incial dado por

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[y] = y^2 + 1, m-1 < \alpha \leq m, 0 < x < 1, \tag{3.3.21} $$

$$ y^{(k)}(0) = 0,\ k = 0, \ldots, m-1. \tag{3.3.22} $$

Los polinómios de Adomian de el término no lineal $f(y) = y^2$, son

$$ \begin{aligned} A_0 &= y_0^2, \\ A_1 &= 2y_0y_1, \\ A_2 &= 2y_0y_2 + y_1^2, \\ A_3 &= 2y_0y_3 + 2y_1y_2, \\ A_4 &= 2y_0y_4 + 2y_1y_3 + y_2^2. \end{aligned} \tag{3.3.23} $$

Tenemos que $N_y = -y^2$, $g(x) = 1$, $L_y = 0$,$c_k = 0$, y al sustituir en la Eq.(3.3.8) obtenemos

$$ y_0 = J^{\alpha}(1), $$

$$ y_n = J^{\alpha}(A_{n-1}),\ n \geq 1, $$

Al resolver estas dos ultimas ecuaciones recursivamente, usando la integral de RL de una potencia y los polinomios de Adomian del término no lineal encontramos que

$$ \phi_6 = \sum_{k=0}^{5} C_k x^{(2k+1)\alpha}, \tag{3.3.24} $$

con coeficientes dados por

$$ \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}, \\ C_1 &= \frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma(3\mu+1)} C_0^2, \\ C_2 &= \frac{\Gamma(4\mu+1)}{\Gamma(5\mu+1)} (2C_0C_1), \\ C_3 &= \frac{\Gamma(6\mu+1)}{\Gamma(7\mu+1)} \left(2C_0C_2 + C_1^2\right), \\ C_4 &= \frac{\Gamma(8\mu+1)}{\Gamma(9\mu+1)} (2C_0C_3 + 2C_1C_2), \\ C_5 &= \frac{\Gamma(10\alpha+1)}{\Gamma(11\mu+1)} \left(2C_0C_4 + 2C_1C_3 + C_2^2\right). \end{aligned} \tag{3.3.25} $$

El Cuadro 3.1, muestra la solución para diferentes valores de α. El valor de $\alpha = 1$ recupera el caso entero es decir donde conocemos la solución exacta ($y = \tan x$). Es claro que la precisión puede ser mejorada através del cálculo de mas términos de la solución aproximada. Se puede ver que los primeros terminos de la Eq.(3.3.24) sugieren que podemos escribir la solución en série en la forma

Cuadro 3.1: Solución aproximada de las Eqs.(3.3.21), (3.3.22)

x	$\alpha = 0{,}5$	$\alpha = 1{,}0$	$\alpha = 1{,}5$	$\alpha = 2{,}5$	$\alpha = 3{,}5$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.391973	0.100335	0.0237904	0.00095153	0.000027186
0.2	0.890186	0.20271	0.06733	0.00538269	0.000307582
0.3	0.890186	0.309336	0.123896	0.014833	0.00127139
0.4	1.25417	0.422793	0.191362	0.0304499	0.00347989
0.5	1.80067	0.546302	0.268856	0.0531966	0.0075989
0.6	2.65494	0.684131	0.356238	0.0839245	0.0143842
0.7	3.99681	0.842245	0.45395	0.123412	0.0246718
0.8	6.07525	1.02937	0.563007	0.172391	0.0393708
0.9	9.22352	1.2588	0.685056	0.231574	0.0594582
1.0	13.8752	1.55137	0.822511	0.301676	0.0859749

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{(2k+1)\alpha}, \tag{3.3.26}$$

y sustituyendo en la Eq.(3.3.1) obtenemos la fórmula general de el termo C_k.

3.3.2. Solución de una EDPF con ADM

Consideremos la siguiente EDPF no lineal

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} u(x,t) + N[u(x,t)] + L[u(x,t)] = g(x,t), \qquad t > 0 \tag{3.3.27}$$

donde L es un operador lineal, N es un operador no lineal en x, t, y ${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}$ es la derivada de Caputo de orden α sujeta a las condiciones iniciales

$$u^{(k)}(x,0) = c_k(x), \tag{3.3.28}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, m-1,\ m-1 < \alpha \leq m$. Aplicando el operador J^{α} en ambos lados de la Eq.(3.3.27), obtenemos

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\left(x, 0^+\right) \frac{t^k}{k!} + J^{\alpha} g(x,t) - J^{\alpha}\left[Lu(x,t) + Nu(x,t)\right] \tag{3.3.29}$$

En semejanza a las EDOF el método de descomposición de Adomian sugiere que la solución $u(x,t)$ puede ser descompuesta en uma série infinita de componentes como

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ (x,t) \tag{3.3.30}$$

con la función no lineal tomando la siguiente forma

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{3.3.31}$$

donde A_n son los polinómios de Adomian. Ahora sustituyendo las Eq.(3.3.30,3.3.31) en ambos lados de la Eq.(3.3.29), tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\left(x,0^+\right)\frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x,t) \tag{3.3.32}$$

$$-J^\alpha\left[L\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n\right].$$

A partir de esta ecuación, las iteracciones son determinadas por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\left(x,0^+\right)\frac{t^k}{k!} + J^\alpha g(x,t), \\ u_1(x,t) &= -J^\alpha\left(Lu_0 + A_0\right), \\ u_2(x,t) &= -J^\alpha\left(Lu_1 + A_1\right), \\ \vdots &= \vdots \\ u_{n+1}(x,t) &= -J^\alpha\left(Lu_n + A_n\right). \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

El polinómio de Adomian A_n es calculado para el término no lineal facilmente por el método de perturbación de homotopia [72]. La fórmula general para el polinómio de Adomian es

$$A_n = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k\right)\right]_{\lambda=0} \tag{3.3.34}$$

Finalmente la aproximación de la solución $u(x,t)$ es

$$\phi_N(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x,t) \tag{3.3.35}$$

donde la solución exacta es dada por

$$\lim_{N\to\infty} \phi_N(x,t) = u(x,t). \tag{3.3.36}$$

Aplicación en una EDPF

Consideremos la ecuación de difusión-onda en particular el caso que recupera la memoria del fenómeno de difusión, es decir cuando $0 < \alpha \leq 1$

$${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u] = u_{xx}, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R},\ 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.3.37}$$

sujeto a la siguiente condición inicial

$$u(x,0) = \operatorname{sen} x. \tag{3.3.38}$$

Para resolver el problema con ADM, la relación de recurrencia del método es

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= u(x,0) = \operatorname{sen}(x), \\ u_{j+1}(x,t) &= J^{\alpha}\left(L_{2x}u_j(x,t)\right), \quad j \geq 0 \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

de aquí las primeras componentes de la descomposición son

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= \operatorname{sen}(x), \\ u_1(x,t) &= J^{\alpha}\left(L_{2x}u_0(x,t)\right) = \frac{-t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\operatorname{sen}(x), \\ u_2(x,t) &= J^{\alpha}\left(L_{2x}u_1(x,t)\right) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\operatorname{sen}(x), \\ u_3(x,t) &= J^{\alpha}\left(L_{2x}u_2(x,t)\right) = \frac{-t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\operatorname{sen}(x), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

De la Eq.(3.3.35),(3.3.36) la solución es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \operatorname{sen}(x) - \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\operatorname{sen}(x) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\operatorname{sen}(x) + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}\operatorname{sen}(x) \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

En la Sección 3.3 vamos a comparar la aproximación de la solución de la ecuación de difusión con el método ADM y VIM.

Aplicación en una EDPF no lineal

Consideremos la ecuación diferencial parcial fraccional de Burgers dada por

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u] + \varepsilon u u_x = v u_{xx},\ t > 0,\ 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.3.42} $$

sujeta a la condición inicial

$$ u(x,0) = g(x). \tag{3.3.43} $$

Escribamos la Eq.(3.3.42)

$$ {}_cD_t^{\alpha} u(x,t) = v L_x u - \varepsilon u u_x, \tag{3.3.44} $$

donde $L_x = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Usando el operador J^{α} em ambos lados de la Eq.(3.3.44) y usando la condición inicial tenemos

$$ u(x,t) = u(x,0) + J^{\alpha}\left[v L_x u - \varepsilon \phi(u)\right], \tag{3.3.45} $$

con $\phi(u) = u u_x$. El método de descomposición de Adomian asume para su solución la forma de una serie dada por

$$ u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{3.3.46} $$

De la Eq.(3.3.45) tenemos el conjunto de relaciones recursivas dadas por:

$$ u_0 = g(x), \qquad u_{n+1} = J^{\alpha}\left[v L_x u_n - \varepsilon A_n\right], \tag{3.3.47} $$

donde $\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ son los polinômio de Adomian. Usando la relación recursiva podemos obtener los tres primeros términos de la descomposición asi

$$ u_0 = u(x,0) = g(x), \qquad u_1 = J^{\alpha}\left[v L_x u_0 - \varepsilon A_0\right] = \left[v g'' - \varepsilon g g'\right] \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, $$

$$u_2 = J^{\alpha}\left[vL_x u_1 - \varepsilon A_1\right] = \left[2\varepsilon^2 g g'^2 + \varepsilon^2 g^2 g'' - 4\varepsilon v g' g'' - 2\varepsilon v g g''' + v^2 g^{(4)}\right] \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}, \tag{3.3.48}$$

La solución en forma de série es dada por

$$u(x,t) = g(x) + \left[vg'' - \varepsilon g g'\right] \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \left[2\varepsilon^2 g g'^2 + \varepsilon^2 g^2 g'' - 4\varepsilon v g' g'' - 2\varepsilon v g g''' + v^2 g^{(4)}\right] \times \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \ldots. \tag{3.3.49}$$

Para verificar la validez de estos cálculos en la siguiente sección vamos a comparar la aproximación de la ecuación de Burgers con ADM y VIM graficamente, considerando el caso $\varepsilon = 1$ y la siguiente condición inicial

$$u(x,0) = g(x) = \frac{\mu + \sigma + (\sigma - \mu)\, exp(\gamma)}{1 + exp(\gamma)}, \qquad t \geq 0, \tag{3.3.50}$$

con $\gamma = \frac{\mu}{v}(x - \lambda)$, los parámetros μ, σ, λ y v son costantes arbitrarias. La solución exacta para el caso entero $\alpha = 1$ [73], es dada por

$$u(x,t) = \frac{\mu + \sigma + (\sigma - \mu)\, exp(\zeta)}{1 + exp(\zeta)}, \tag{3.3.51}$$

donde $\zeta = \frac{\mu}{v}(x - \sigma t - \lambda)$.

3.4. Método de iteración variacional

El VIM fue creado por Ji-Huan He en 1998 un año después de haber obtenido su doctorado en aerodinámica con cálculo de variaciones y completamente desarrollado por el mismo en los años 2006-2007 [74]-[77]. Este método es bien reconocido para resolver problemas no lineales entre diversos investigadores de EDP, EDPF [78]-[83]. El método esta basado en convertir el problema de resolver una ecuacion diferencial en un problema de iteración variacional, donde la solución exacta se puede conseguir si la iteración tiende a infinito. En esta sección vamos introducir el método de iteración variacional para aproximar la solución de la ecuación diferencial fracionária lineales y no lineales con derivada de Caputo en la variable tiempo. En el siguiente capítulo vamos a estudiar los multiplicadores de

Lagrange asociados al VIM y lo usaremos para aproximar soluciones de casos partículares de la ecuación de fraccional de Burgers y estableceremos los criterios de convergencia del método. En las siguientes secciones de este capítulo mostraremos como el VIM es un método eficiente para resolver ciertas ecuaciones diferenciales lineales y no lineales, para esto vamos iniciar el capítulo con algunos conceptos básicos que se necesitan en el método, como el de multiplicadores de Lagrange generalizados y de la teoría del cálculo variacional para pasar a presentar diversos ejemplos que se recopilaron en la literatura de este tema, pero que fueron desglosados para ser presentados en esta tesis.

3.4.1. Multiplicadores de Lagrange generalizados

Sabemos que los multiplicadores de Lagrange son muy utilizados en el cálculo vectorial, la optimización y el cálculo variacional; con el fin de entender este concepto lo ilustraremos con un sencillo ejemplo

$$f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, f(x) \in C^1. \tag{3.4.1}$$

Si x_n es una raiz aproximada de esta ecuación, entonces $f(x_n) \neq 0$. Para mejorar la precisión, podemos suponer que una ecuación que llamaremos de correción es dada por

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n), \tag{3.4.2}$$

donde λ es el multiplicador general de Lagrange, que puden ser identificado de forma óptima al derivar la Eq.(3.4.2) con respecto de la variable x_n y aplicar la teoria de máximos y minimos en una variable real así

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0, \tag{3.4.3}$$

lo que nos lleva a la conocida fórmula de iteración de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{3.4.4}$$

Existem alternativas para la construción de la ecuación de correción, por ejemplo

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) f(x_n), \tag{3.4.5}$$

donde $g(x_n)$ é una função auxiliar. Despues de derivar a ambos lados con respecto de la variable x_n en ambos lados de la Eq.(3.4.5) y usando la teoría de máximos y mínimos, encontramos la formula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) f(x_n)}{g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)}. \tag{3.4.6}$$

Si remplazamos la Eq.(3.4.1) por una ecuación diferencial, es posible obtener una ecuación de correción análoga que para este caso se llama funcional de correción variacional como lo vamos a ver en la siguiente sección.

3.4.2. La ecuación de Euler-Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange pueden ser calculados en el VIM si es usada la ecuación de Euler-Lagrange para la variación primera de un funcional. Vamos estudiar aquí la variación primera de un funcional basados en el trabajo del profesor Santander [84].

Definición 3.4.1. *Sea V un cierto conjunto de funciones, que supondremos con estructura de espacio de Banach de dimensión infinita sobre los reales. Un funcional real $\mathcal{F}$ es una aplicación $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{R}$, que a cada función f del dominio $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ le asocia un valor real. El dominio de $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ es un cierto subconjunto de un espacio V, en el que $\mathcal{F}(f)$ está definido. Diremos que $\mathcal{F}$ es un funcional lineal si para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$, se verifica $\mathcal{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{F}(f) + \mu \mathcal{F}(g)$; $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$.*

Definición 3.4.2. *Diremos que un funcional $\mathcal{F}$ es diferenciable en la función $f \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ si existe un funcional lineal denotado $\delta\mathcal{F}_f : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ tal que en un cierto entorno de f en $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ (asociado a un cierto entorno de 0 en $\mathcal{M}$) se tiene:*

$$\mathcal{F}(f + h) - \mathcal{F}(f) = \delta\mathcal{F}_f(h) + \mathcal{E}(f, h) \|h\|$$

donde $\mathcal{E}(f, h) \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$.
Aquí la norma de la función h hace referencia a la norma del espacio de Banach de las funciones. Geométricamente, podemos imaginar el funcional lineal afín dado en un cierto entorno de la función f por $f + h \to \mathcal{F}(f) + \delta\mathcal{F}_f(h)$ como el funcional tangente al funcional $\mathcal{F}$ en la función f. El funcional lineal $\delta\mathcal{F}_f : \mathcal{M} \to \mathbf{R}$ se denomina variación primera del funcional $\mathcal{F}$ en la función f; el uso de un término específico pretende que el

lenguaje transmita que estamos discutiendo funcionales y no funciones de varias variables.

Definición 3.4.3. *Diremos que el funcional $\mathcal{F}$ tiene um mínimo absoluto en la función $f \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ si para cualquier función $g \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ se verifica $\mathcal{F}(g) > \mathcal{F}(f)$. Diremos que el funcional $\mathcal{F}$ tiene un mínimo relativo en la función $f \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ si para cualquier función $g \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ en un cierto entorno de f se verifica $\mathcal{F}(g) > \mathcal{F}(f)$.*

Teorema 3.4.4. *Sea $\mathcal{F}$ un funcional diferenciable. Una condición necesaria para que tenga un máximo o un mínimo relativo en $f \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$ es que $\delta\mathcal{F}_f = 0$, es decir, que la variación primera de $\mathcal{F}$ en f se anule.*

Variación primera y ecuación de Euler-Lagrange

Vamos ahora a calcular la variación primera del funcional definido en $C^1[a,b]$, es decir el espacio de funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbf{R}$ que admiten derivada primera continua en todo el intervalo $[a,b]$, con dominio y definición dado por

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \left\{ f \in C^1[a,b] \,/\, f(a) = A; f(b) = B \right\}, \quad \mathcal{F}(f) = \int_a^b \Phi\left(x, f(x), f'(x)\right) dx,$$

donde A, B son constantes fijas y la función $\Phi(x,y,z) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ admite derivadas parciales continuas de primer orden. Se va a demostrar que este funcional siempre es diferenciable y vamos a calcular su variación primera. Comencemos dando una expresión auxiliar importante. Para ello tomaremos un punto (x,y,z) de $\mathbf{R}^3$. Puesto que $\Phi(x,y,z)$ es continua y admite derivadas parciales continuas en todo $\mathbf{R}^3$, es diferenciable en todos los puntos. Existirá entonces un entorno de (x,y,z), tal que si (x_1,y_1,z_1) pertenece a este entorno se verifica:

$$\Phi(x_1,y_1,z_1) - \Phi(x,y,z) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_x (x_1 - x) + \left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_x (y_1 - y) + \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_x (z_1 - z) + \epsilon \| (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \| \quad (3.4.7)$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en el punto (x,y,z) y ϵ es una función dependiente de $(x,y,z;x_1,y_1,z_1)$ y que tiende a cero cuando $(x_1,y_1,z_1) \to (x,y,z)$.
La norma $\| (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \|$ se refiere a la norma canónica del espacio $\mathbf{R}^3$, esto es $\| (x_1 - x, y_1 - y, z_1 - z) \| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$. Vamos ahora a usar la Eq.(3.4.7) para evaluar la diferencia entre el valor del funcional en la función f y en otra

función $f+h$ en un cierto entorno de f asi

$$\mathcal{F}(f+h)-\mathcal{F}(f)= \int_a^b \left\{\Phi\left(x, f(x)+h(x), f'(x)+h'(x)\right)-\Phi\left(x, f(x), f'(x)\right)\right\}dx.$$

Sustituyendo la Eq.(3.4.7) en esta fórmula para h en dicho entorno, tenemos

$$\mathcal{F}(f+h)-\mathcal{F}(f)=\int_a^b \left\{\frac{\partial\Phi}{\partial f}h(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial f'}h'(x)\right\}dx + \int_a^b \epsilon(x)\sqrt{(h(x))^2+(h'(x))^2}dx,$$

en donde las derivadas de Φ están evaluadas ambas en el punto $(x, f(x), f'(x))$ en el término de la derecha

$$\epsilon(x)\equiv\epsilon\left(x, f(x)+h(x), f'(x)+h'(x); x, f(x), f'(x)\right)$$

tiende a cero cuando $h\to 0$. Nótese que para f, h fijas, podemos considerar ϵ como una función de x. Denotemos ahora:

$$\varphi_f(h)=\int_a^b\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial f}h+\frac{\partial\Phi}{\partial f'}h'\right\}dx, \quad C(f,h)=\epsilon(x)\sqrt{(h(x))^2+(h'(x))^2}dx.$$

En cuanto a $\varphi_f(h)$, es un funcional *lineal* que está bien definido porque la integral que lo define existe ya que el integrando es una función continua de x en el intervalo $[a,b]$. Si demostramos que cuando $h\to 0$ el término restante $C(f,h)$ tiende a 0 más rápidamente que la norma de h, entonces, identificando la descomposición en la definición de funcional diferenciable, habremos demostrado que el funcional $\mathcal{F}$ es diferenciable, y de paso obtenemos una expresión para la variación primera de $\mathcal{F}$ en f. Escribamos el término extra $C(f,h)$ en la forma $C(f,h)=E(f,h)\|h\|$. Debemos probar que $E(f,h)$ tiende a 0 cuando $h\to 0$. Para ver que esto es cierto, escribamos

$$E(f,h)=\frac{C(f,h)}{\|h\|}=\frac{1}{\|h\|}\int_a^b(x)\sqrt{h^2+(h')^2}dx=\int_a^b\epsilon(x)\frac{\sqrt{h^2+(h')^2}}{\|h\|}dx$$

dado que $\|h\|$ es una constante. Observemos ahora que para todo valor de x en el intervalo

$[a,b]$ se tiene

$$\sqrt{h^2+(h')^2} \leq \mid h(x) \mid + \mid h'(x) \mid \; \leq \sup_{x\in[a,b]} \mid h(x) \mid + \sup_{x\in[a,b]} \mid h'(x) \mid = \|h\|$$

puesto que por ser $h(x)$ una función real, se tiene que $h^2+(h')^2 = \mid h(x) \mid^2 + \mid h'(x) \mid^2$, y así

$$\left(|h|+|h'|\right)^2 = \mid h \mid^2 + \mid h' \mid^2 + 2|hh'| \geq \mid h \mid^2 + \mid h' \mid^2 = h^2 + \left(h'\right)^2.$$

De aquí se deriva que en todo el intervalo $[a,b]$, el cociente $\dfrac{\sqrt{h^2+(h')^2}}{\|h\|}$ es menor que 1. Como el módulo de una integral es menor o igual que la integral del módulo, se tiene que

$$|E(f,h)| = \left| \int_a^b \epsilon(x) \frac{\sqrt{h^2+(h')^2}}{\|h\|} dx \right| \leq \int_a^b |\epsilon(x)| \frac{\sqrt{h^2+(h')^2}}{\|h\|} dx \leq \int_a^b |\epsilon(x)| dx$$

Esta expresión es la integral en el intervalo cerrado $[a,b]$ de una función de x que tiende a cero cuando $h \to 0$, luego resulta que $E(f,h) \to 0$ cuando $h \to 0$, como queriamos demostrar. Así pues, queda probado que $\mathcal{F}$ es diferenciable y que su variación primera en f viene dada por el término $\varphi_f(h)$, es decir

$$\delta\mathcal{F}_f(h) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial f} h + \frac{\partial\Phi}{\partial f'} h' \right\} dx$$

donde las derivadas parciales se evalúan en el punto $(x, f(x), f'(x))$. Vamos ahora a transformar esta expresión, haciendo uso del recurso de eliminar la derivada h' mediante una integración por partes

$$\int_a^b \frac{\partial\Phi}{\partial f'} h' dx = \frac{\partial\Phi}{\partial f'} h \Big|_a^b - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial f'} h \, dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial f'} h \, dx$$

Sustituyendo en la expresión para la variación primera del funcional $\mathcal{F}$ se obtiene:

$$\delta\mathcal{F}_f(h) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial f'} \right\} h(x) \, dx \tag{3.4.8}$$

La variación primera de $\mathcal{F}$ debe ser idénticamente nula, lo que significa que si en la función f el funcional $\mathcal{F}$ es mínimo o máximo, debe satisfacerse la condición

$$\delta\mathcal{F}_f(h) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial f'} \right\} h(x) \, dx = 0,$$

de donde obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange dada por

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial f'} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} = 0.$$

3.4.3. Restricción variacional

Consideremos la siguiente ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$ y escribamos esta como

$$\tilde{x} \cdot x - 3x + 2 = 0, \tag{3.4.9}$$

donde vamos a llamar a $\tilde{x}$ la variable de restricción y el valor de $\tilde{x}$ es asumido como un valor inicial. Resolviendo para x tenemos que

$$x = \frac{2}{3 - \tilde{x}}, \tag{3.4.10}$$

y podemos escribir la Eq.(3.4.10), como una ecuación de iteracción así

$$x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n} \tag{3.4.11}$$

Este método es muy eficiente para obtener buenas aproximaciones según el Cuadro 3.2 que compara nuestra Eq.(3.4.10) con la fórmula de iteración de Newton. En el método de

Cuadro 3.2: Aproximación de la Eq.(3.4.10) y la iteración de Newton.

Iteración	$x_{n+1} = \frac{2}{3-x_n}$	Fórmula de iteración de Newton
0	0.5	0.5
1	0.8	0.875
2	0.909	0.987
3	0.956	0.999
4	0.978	1.000
5	0.989	1.000
6	0.994	1.000
7	0.997	1.000
8	0.998	1.000
9	0.999	1.000

iteración variacional, escogemos um valor inicial con un posible parámetro desconocido. Veamos la eficácia de elegir un parámetro libre en este ejemplo cuando $x_0 = 0{,}5 + b$, de

aqui tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2}{3-0{,}5-b} = \frac{2}{2{,}5-b} = \frac{2}{2{,}5\left(1-\frac{1}{2{,}5}b\right)} \\ &= 0{,}8\left(1-\frac{1}{2{,}5}b\right)+o\left(b^2\right) \\ &= 0{,}8+0{,}32b+o\left(b^2\right). \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

para identificar el valor de b escribimos $x_0 = x_1$ lo que implica $0{,}8 + 0{,}32b = 0{,}5 + b$, de ahi tenemos $b = 0{,}4412$ y como raiz apróximada a $x_1 = 0{,}9412$.

3.4.4. VIM en EDO

El método de iteración variacional fue creado para resolver una amplia clase de problemas no lineales con una buena aproximación y rápida convergencia. Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$L\left[u\left(t\right)\right]+N\left[u\left(t\right)\right]=g\left(t\right), \tag{3.4.13}$$

donde L es un operador linear, N es un operador no lineal y $g\left(t\right)$ es una función continua. Vamos a suponer el funcional de correción variacional para esta ecuación es dado por

$$u_{n+1}\left(t\right)=u_n\left(t\right)+\int_{t_0}^{t}\lambda\left\{Lu_n\left(s\right)+N\tilde{u}_n\left(s\right)-g\left(s\right)\right\}ds, \tag{3.4.14}$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange a ser encontrado, u_n es la $n-esima$ aproximación tal que si $\tilde{u}_n$ es la restricción variacional entonces $\delta\tilde{u}_n = 0$. Para problemas lineales la solución exacta puede ser encontrada en una sola iteración puesto que el multiplicador de Lagrange puede ser calculado en forma exacta.

VIM en EDO lineales

Consideremos el siguiente ejemplo para una ecuación diferencial lineal de primer orden dada por

$$u'+a\left(t\right)u=b\left(t\right),\quad u\left(0\right)=c. \tag{3.4.15}$$

escribiendo el funcional de correción variacional para esta ecuación

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)\, u_n(s) - b(s) \right\} ds \tag{3.4.16}$$

y tomando como restricción variacional a u_n se tiene que $\delta u_n(0) = 0$, luego

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{ds} + a(s)\, u_n(s) - b(s) \right\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \lambda \delta u_n(t) - \cancelto{0}{\lambda\, \delta u_n(0)} - \delta \int_0^t u_n ds \\ &\quad - \left\{ \cancel{[\delta\lambda(t,s)]_0^t \int_0^t b(s)\, ds} + \cancel{[\delta\lambda(t,s)]_0^t \int_0^t b(s)\, ds} \right\} \\ &\quad + \delta \int_0^t a(s)\, \lambda u_n(s)\, ds = 0, \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

de donde obtenemos que

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \lambda \delta u_n(t)\,|_{s=t} + \int_0^t \left[-\frac{\partial \lambda}{\partial s} + a(s)\, \lambda \right] \delta u_n(s)\, ds = 0, \tag{3.4.18}$$

así tenemos que la ecuación de Euler-Lagrange que ayuda a calcular el multiplicador de Lagrange como

$$-\frac{\partial \lambda(t,s)}{\partial s} + a(s)\, \lambda(t,s) = 0 \tag{3.4.19}$$

de donde al hacer $t = s$ en la Eq.(3.4.18) se obtiene el siguiente resultado

$$\delta u_{n+1}(t) = (1 + \lambda(t,t))\, \delta u_n(t) = 0 \tag{3.4.20}$$

y

$$1 + \lambda(t,t) = 0.$$

Usando la Eq.(3.4.19) obtenemos

$$-\frac{\partial \lambda(t,s)}{\partial s} = -a(s)\, \lambda(t,s)$$

que al resolver esta ecuación usando separación de variables dá

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\lambda\left(t,s\right)}{\lambda\left(s\right)}=a\left(s\right)\partial s\\
&ln\left[\lambda\left(t,s\right)\right]=\left(\int a\left(s\right)ds\right)+c\left(t\right)\\
&\lambda\left(t,s\right)=e^{\left\{\int a(s)ds+c(t)\right\}}\\
&-\lambda\left(t,s\right)=-e^{\left\{\int a(s)ds+c(t)\right\}},
\end{aligned}$$

si $s=t$ entonces

$$\begin{aligned}
&\lambda\left(t,t\right)=-1\\
&1=-e^{\left\{\int a(s)ds+c(t)\right\}}\\
&\cancelto{0}{ln1}=\left(\int a\left(s\right)ds\right)+c\left(t\right)-\int a\left(s\right)ds=c\left(t\right)
\end{aligned}$$

de esta forma se llega a que

$$\lambda\left(t,s\right)=-exp\left\{\int_0^s a\left(\xi\right)d\xi-\int_0^t a\left(\xi\right)d\xi\right\}. \tag{3.4.21}$$

Remplazando en la Eq.(3.4.18) la expresión para el funcional de correción variacional conocido el multiplicador de Lagrange $\lambda(t,s)$ es

$$u_{n+1}\left(t\right)=u_n\left(t\right)-\int_0^t exp\left\{\int_0^s a\left(\xi\right)d\xi-\int_0^t a\left(\xi\right)d\xi\right\}\left\{\frac{du_n}{ds}+a\left(s\right)u_n\left(s\right)-b\left(s\right)\right\}ds. \tag{3.4.22}$$

Teniendo en cuenta que la solución de una ecuación diferencial ordinaria lineal se puede expresar como la superposición de la solución particular con la solución homogénea, nos resta calcular la solución homogénea de la ecuación diferencial dada. Para esto hagamos

$$u'+a\left(t\right)u=0\Rightarrow\frac{u'}{u}=-a\left(t\right)\Rightarrow lnu=c\int_0^t-a\left(\xi\right)d\xi\Rightarrow u\left(t\right)=ce^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}\Rightarrow c=u\left(0\right)$$

de donde $u_0=c\,exp\left\{-\int_0^t a\left(\xi\right)d\xi\right\}$ e

$$\begin{aligned}
u_{n+1}\left(t\right)&=c\,exp\left\{-\int_0^t a\left(\xi\right)d\xi\right\}-\int_0^t b\left(s\right)exp\left\{\int_0^s a\left(\xi\right)d\xi-\int_0^t a\left(\xi\right)d\xi\right\}ds\\
&=c\,exp\left\{-\int_0^t a\left(\xi\right)d\xi\right\}-exp\left\{-\int_0^t a\left(\xi\right)d\xi\right\}\int_0^t b\left(s\right)exp\left\{\int_0^s a\left(\xi\right)d\xi\right\}ds.
\end{aligned} \tag{3.4.23}$$

VIM y el oscilador lineal

Consideremos ahora el oscilador lineal con un término forzado

$$u'' + \omega^2 u(t) = f\left(u, u', u''\right) \tag{3.4.24}$$

su funcional de correción variacional puede escribirse de la siguiente forma

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - \tilde{f}\left(u_n, u_n', u_n''\right) \right\} ds. \tag{3.4.25}$$

Usando la variación respecto a u_n, sabemos que $\delta u_n(0) = 0$

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \omega^2 u_n(s) - f(s) \right\} ds. \\ &= \delta u_n(t) + \lambda(s)\, \delta u_n'(s) \mid_{s=t} - \frac{\partial \lambda}{\partial s} \delta u_n(s) \mid_{s=t} \\ &\qquad + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s 2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s)\, ds \\ &= \left(1 - \frac{\partial \lambda}{\partial s}\right) \delta u_n(s) \mid_{s=t} + \lambda(s)\, \delta u_n'(s) \mid_{s=t} \\ &\qquad + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s 2} + \omega^2 \lambda(s) \right\} \delta u_n(s)\, ds = 0 \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

por lo tanto tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \lambda(t,s) + \omega^2 \lambda(t,s) = 0 \tag{3.4.27}$$

$$\lambda(t,t) = 0 \tag{3.4.28}$$

$$1 - \lambda'(t,t) = 0 \tag{3.4.29}$$

De la Eq.(3.4.27) podemos concluir que

$$\lambda(t,s) = C_1(t) \cos\, \omega s + C_2(t) \operatorname{sen} \omega s \tag{3.4.30}$$

de la Eq.(3.4.28) obtenemos que

$$0 = C_1 \cos\, \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \tag{3.4.31}$$

y por tanto

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{\text{sen}\omega t}{\cos \omega t} = -\tan\ \omega t \tag{3.4.32}$$

recordando que la fórmula de ángulo-fase se puede escribir

$$\lambda\left(t,s\right) = A\,\text{sen}\left(\omega s + \phi\right), \quad \tan\phi = \frac{C_1}{C_2} \tag{3.4.33}$$

Es decir tenemos, $\tan\phi = -\tan\omega t \Rightarrow \phi = -\omega t$ así tenemos que

$$\lambda\left(t,s\right) = A\,\text{sen}\left(\omega s - \omega t\right) = A\,\text{sen}\left[\omega\left(s-t\right)\right] \tag{3.4.34}$$

como $\dfrac{d}{ds}\lambda(t,s) = A\omega\cos\left[\omega\left(s-t\right)\right]$ y con la Eq. 3.4.29, obtenemos lo siguiente

$$\frac{d}{ds}\lambda\left(t,t\right) = A\,\omega\cos\omega\left(t-t\right) = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\omega}, \tag{3.4.35}$$

de la anterior ecuación y de la Eq.(3.4.33)

$$\lambda\left(t,s\right) = \frac{1}{\omega}\,\text{sen}\left[\omega\left(s-t\right)\right]. \tag{3.4.36}$$

Sustituyendo este resultado en la Eq.(3.4.25) encontramos la siguiente fórmula de iteración variacional

$$u_{n+1}\left(t\right) = u_n\left(t\right) + \frac{1}{\omega}\int_0^t \text{sen}\left[\omega\left(s-t\right)\right]\left\{u_n''\left(s\right) + \omega^2 u_n\left(s\right) - f\left(u_n, u_n', u''\right)\right\} ds. \tag{3.4.37}$$

VIM y la EDO no lineal del péndulo

Cuando se desprecia la fricción, la ecuación diferencial que regula la oscilación libre del péndulo matemático está dado por

$$u'' + \omega^2\,\text{sen}u = 0, \tag{3.4.38}$$

con la condición inicial $u\left(0\right) = A$ y $u'\left(0\right) = 0$. En esta ecuación u designa el ángulo de desviación de la posición de equilibrio vertical, $\omega^2 = \dfrac{g}{l}$, donde g es la aceleración gravitacional, l la longitud del péndulo. Este sistema parece ser simple, si hacemos $\text{sen}\ u \approx$

u, esto convertiría el problema no lineal en lineal.

$$u'' + \omega^2 u = 0, \tag{3.4.39}$$

que para una pequeña oscilación del péndulo es un modelo que lo describiría satisfactoriamente. Para obtener una solución aproximada más precisa en el caso de oscilación de mayor valor angular, vamos a suponer que $\operatorname{sen} u \approx u - u^3/6$ para obtener

$$u'' + \omega^2 u - \frac{1}{6}\omega^2 u^3 = 0, \tag{3.4.40}$$

para darle un tratamiento más general, escribamos esta ecuación como

$$u'' + \omega^2 u + \varepsilon u^3 = 0, \tag{3.4.41}$$

donde $\varepsilon = -\omega^2/6$. Si llamamos a la frecuencia angular del sistema Ω, podemos escribir la ecuación asi

$$u'' + \Omega^2 u + F(u) = 0, \tag{3.4.42}$$

donde $F(u) = \omega^2 \operatorname{sen} u - \Omega^2 u$. El funcional de correción variacional puede escribirse de la siguiente forma

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \Omega^2 u_n(s) + \tilde{F}_n \right\} ds, \tag{3.4.43}$$

y la variación primera de este funcional es

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ u_n''(s) + \Omega^2 u_n(s) + \tilde{F}_n \right\} ds = 0. \tag{3.4.44}$$

de donde las tres integrales del integrando de la anterior ecuación se calculan asi, la primera integral como

$$0 = \delta \int_0^t \lambda u_n''(s)\, ds = \delta \left[\lambda(t,s)\, u_n'(s) \right]_{s=0}^{s=t} - \delta \int_0^t \lambda' u_n' ds \tag{3.4.45}$$

$$= \delta \left[\lambda(t,s)\, u_n'(s) \right]_{s=0}^{s=t} - \delta \left[\lambda'(t,s)\, u_n(s) \right]_{s=0}^{s=t} + \delta \int_0^t \lambda'' u\, ds$$

$$= \delta\lambda(t,s)\, u_n'(s)\,|_{s=t} - \delta\lambda'(t,s)\, u_n(s)\,|_{s=t} + \delta \int_0^t \frac{\partial^2 \lambda}{\partial s^2} u_n(s)\, ds,$$

la segunda integral queda igual $\delta\Omega^2 \int_0^t \lambda(t,s)\, u_n(s)\, ds = 0$ y la tercera integral es dada por

$$\delta \int_0^t \lambda(t,s)\, \tilde{F}_n ds = \delta\lambda(t,s) \left[\int_0^t \tilde{F}_n ds\right] - \delta \int_0^t \lambda'(t,\xi)\, d\xi \left[\int_0^t \tilde{F}_n ds\right] d\xi = 0 \qquad (3.4.46)$$

$$= \delta\lambda(t,s) \int_0^t \tilde{F}_n ds - \delta\lambda(t,\xi) \int_0^t \tilde{F}_n ds = 0.$$

De las anteriores tres integrales obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\lambda(t,s) + \Omega^2\lambda(t,s) = 0 \qquad (3.4.47)$$

$$\lambda(t,t) = 0 \qquad (3.4.48)$$

$$1 - \lambda'(t,t) = 0 \qquad (3.4.49)$$

de la primera ecuación tenemos que $\lambda(t,s) = C_1(t)\cos\ \Omega s + C_2(t)\,\text{sen}\,\Omega s$, de la segunda ecuación vemos que

$$0 = C_1 \cos\ \Omega t + C_2\,\text{sen}\,\Omega t \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = -\frac{\text{sen}\,\Omega t}{\cos\ \Omega t} = -\tan\ \Omega t$$

recordando que la fórmula de angulo-fase se puede escribir de la siguiente forma

$$\lambda(t,s) = A\,\text{sen}\,(\Omega s + \phi), \quad \tan\phi = \frac{C_1}{C_2}$$

es decir que encontramos que $\tan\phi = -\tan\Omega t \Rightarrow \phi = -\Omega t$ y podemos escribir

$$\lambda(t,s) = A\,\text{sen}\,(\Omega s - \Omega t) = A\,\text{sen}\,[\Omega(s-t)] \qquad (3.4.50)$$

derivando esta ecuación con respecto de s y con la tercera ecuación del sistema encontramos que

$$\frac{d}{ds}\lambda(t,t) = A\,\Omega\cos[\Omega(t-t)] = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\Omega} \qquad (3.4.51)$$

es decir $\lambda(t,s)$ la podemos escribir como

$$\lambda(t,s) = \frac{1}{\Omega}\,\text{sen}\,[\Omega(s-t)] \qquad (3.4.52)$$

osea que el funcional de iteración variacional puede escribirse como

$$u_{n+1} = u_n(t) + \frac{1}{\Omega}\int_0^t \operatorname{sen}\left[\Omega(s-t)\right]\left\{u_n''(s) + \omega^2 \operatorname{sen}\left[u_n(s)\right]\right\} ds. \tag{3.4.53}$$

Nosotros vamos a comenzar nuestro funcional de iteración con $u_0(t) = A\cos\Omega t$ de donde

$$u_1(t) = A\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega}\int_0^t \operatorname{sen}\Omega(s-t)\left\{-A\Omega^2\cos\Omega s + \omega^2 \operatorname{sen}(A\cos\Omega s)\right\} ds.$$

El segundo miembro de la anterior ecuación no es igual a cero para todo valor de Ω, mas podemos asegurar que si $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ entonces

$$\int_0^T \operatorname{sen}\left[\Omega(s-t)\right]\left\{-A\Omega^2\cos\Omega s + \omega^2 \operatorname{sen}(A\cos\Omega s)\right\} ds = 0 \tag{3.4.54}$$

usando la identidad trigonométrica de resta de angulos par el seno vemos que

$$\int_0^T (\operatorname{sen}\Omega s\cos\Omega t - \operatorname{sen}\Omega t\cos\Omega s)\left\{-A\Omega^2\cos\Omega s + \omega^2 \operatorname{sen}(A\cos\Omega s)\right\} ds = 0 \tag{3.4.55}$$

$$\int_0^T \left(-A\Omega^2\right)\operatorname{sen}\Omega s\cos\Omega t\cos\Omega s\, ds + \int_0^T \left(A\Omega^2\right)\operatorname{sen}\Omega t\cos^2\Omega s\, ds$$

$$+\omega^2\int_0^T \operatorname{sen}\Omega s\cos\Omega t\operatorname{sen}(A\cos\Omega s)\, ds$$

$$-\omega^2\int_0^T (\operatorname{sen}\Omega t\cos\Omega s)(\operatorname{sen}(A\cos\Omega s))\, ds = 0$$

luego

$$-A\Omega^2\cos\Omega t\int_0^T \operatorname{sen}\Omega s\cos\Omega s\, ds \tag{3.4.56}$$

$$+A\Omega^2\operatorname{sen}\Omega t\int_0^T \cos^2\Omega s\, ds \tag{3.4.57}$$

$$+\omega^2\cos\Omega t\int_0^T \operatorname{sen}\Omega s\operatorname{sen}(A\cos\Omega s)\, ds \tag{3.4.58}$$

$$-\omega^2\operatorname{sen}\Omega t\int_0^T \cos\Omega s\operatorname{sen}(A\cos\Omega s)\, ds = 0 \tag{3.4.59}$$

Teniendo en cuenta la simetría con respecto del origen de las integrales impares y las Eqs.(3.4.57,3.4.59), las integrales de $[0,T]$ son equivalente a las integrales de $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ y

observando que $(\cos\Omega s \,\mathrm{sen}\,(A\cos\Omega s)) \leq 1$ obtenemos que

$$\int_0^T \cos\Omega s \,\mathrm{sen}\,(A\cos\Omega s)\, ds = 0,$$

y el mismo argumento es válido para la integral dada en la Eq(3.4.59). De las Eqs.(3.4.56,3.4.57 3.4.58,3.4.59) de donde llegamos a que

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 \int_0^T \mathrm{sen}\Omega s \,\mathrm{sen}\,(A\cos\Omega s)\; ds}{\int_0^T A\,\mathrm{sen}\Omega s\cos\Omega s\, ds} = \frac{2\omega^2 J_1(A)}{A}, \tag{3.4.60}$$

donde $J_1(A)$ es la función de Bessel de orden uno de primera espécie

$$J_1(A) = \frac{1}{2}A - \frac{1}{16}A^3 + \frac{1}{384}A^5 + \ldots, \tag{3.4.61}$$

de aqui el periodo esta dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{2J_1(A)/A}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1 - \frac{1}{8}A^2 + \frac{1}{192}A^4 + \ldots}}. \tag{3.4.62}$$

3.4.5. VIM en EDOF

Consideremos la siguiente ecuación diferencial ordinaria fraccional

$$D^{1/2}u = \frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}}(u+1), \qquad u(0) = 0,\ 0 < x < 1 \tag{3.4.63}$$

el funcional de correción variacional es

$$u_{n+1}(x) = u_n + J^{1/2}\left\{\lambda\left[D^{1/2}u_n - \frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}}(u_n+1)^2\right]\right\} \tag{3.4.64}$$

donde $J^{1/2}$ es la integral fraccional de orden $\frac{1}{2}$ que se obtiene de la Eq.(1.1.1). Vamos a aproximar el funcional de correción con el objetivo de calcular sus multiplicadores de Lagrange por

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^t \lambda\left\{\frac{du_n}{dx} - \frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}}(\tilde{u}_n+1)^2\right\} dx \tag{3.4.65}$$

de donde la variación primera de esta aproximación del funcional es

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{dx} - \frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}} \left(\tilde{u}_n + 1\right)^2 \right\} dx \tag{3.4.66}$$

y la restricción en la variación es $\tilde{u}_n$, por tanto $\delta\tilde{u}_n = 0$ y

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^t \lambda \left\{ \frac{du_n}{dx} - \frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}} \right\} dx = 0. \tag{3.4.67}$$

Haciendo integración por partes encontramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \lambda\left(\tau\right)}{\partial \tau} = 0, \qquad 1 + \lambda(\tau)|_{\tau=t} = 0$$

el multiplicador puede identificarse como $\lambda = -1$ y al sustituir en el funcional de correción variacional obtenemos el funcional de iteración variacional

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - J^{1/2} \left\{ D^{1/2}u - \frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}} \left(u + 1\right)^2 \right\}. \tag{3.4.68}$$

Suponiendo $u_0 = 0$ y sustituyendo en el funcional de iteración variacional tenemos

$$\begin{gathered} u_1(x) = -J^{1/2} \left\{ -\frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}} \right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)} x = \frac{1}{\pi^{1/2}}(x^{1/2}) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(2)} x = \frac{1}{2}x \\ u_2 = \frac{1}{2}x - J^{1/2}\left[D^{1/2}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}}\left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 \right] \end{gathered} \tag{3.4.69}$$

donde

$$D^{1/2}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(1+1\right)}{\Gamma\left(1+1-\frac{1}{2}\right)} x^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(2\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{(1/2)}$$

$$
\begin{aligned}
J^{1/2}\left[\frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2\right] &= I^{1/2}\left[\frac{x^{1/2}}{\pi^{1/2}}\left(\frac{1}{4}x^2+x+1\right)\right] \\
&= I^{1/2}\left[\frac{1}{4\pi^{1/2}}x^{5/2}+\frac{1}{\pi^{1/2}}x^{3/2}+\frac{1}{\pi^{1/2}}x^{1/2}\right] \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}I^{1/2}\left(x^{5/2}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}I^{1/2}\left(x^{3/2}\right)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}I^{1/2}\left(x^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(7/2\right)}{\Gamma\left(4\right)}x^3+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(5/2\right)}{\Gamma\left(3\right)}x^2+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(3/2\right)}{\Gamma\left(2\right)}x
\end{aligned}
$$

Recordando que $\Gamma\left(n+1\right)=n!$ e $\Gamma\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\Gamma\left(x+1\right)$ tenemos que

$$
\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{2}{5}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right),\quad \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\,\frac{3}{4}\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}
$$

y se puede escribir que

$$
u_2(x)=\frac{15}{192}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}x \tag{3.4.70}
$$

aproximación que se puede comparar con la solución exacta [85]

$$
u(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+0(x^3). \tag{3.4.71}
$$

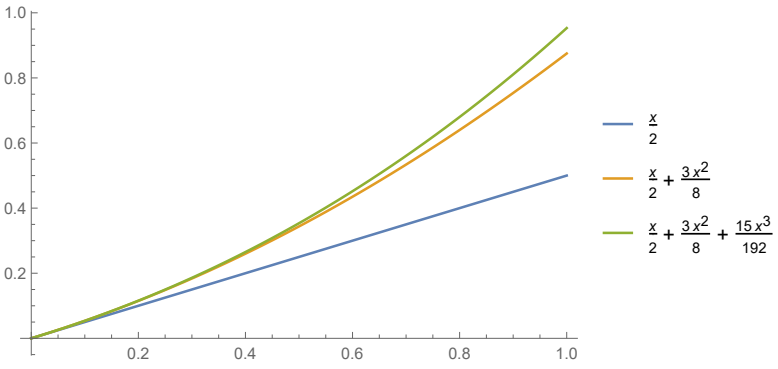

Figura 3.1: Aproximaciones del VIM para Eq.(3.4.63).

En las Figura 3.1, podemos ver que la aproximación de la solución para la Eq.(3.4.63) con el VIM comparado con la solución exacta es buena en ese intervalo de x y se puede notar que si aumentamos las iteraciones del VIM la aproximación tiende a acercarse mas a la solución exacta.

3.4.6. VIM en EDPF

Se dan aquí los principios del método de iteración variacional [25], [86], [87] y su aplicabilidad para ecuaciónes diferenciales parciales fraccionales. Vamos extender la aplicación del método de iteración variacional para resolver una ecuación diferencial fraccional así

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}\left[u(x,t)\right] = R\left[x\right]u(x,t) + q(x,t), \quad t > 0, x \in \mathbf{R}, \tag{3.4.72} $$

donde $R\left[x\right]$ es el operador diferencial en x sujeto a las condiciones iniciales y de frontera

$$ u(x,0) = f(x), \qquad 0 < \alpha \leq 1, u(x,t) \to 0, |x| \to \alpha,\, t > 0, \tag{3.4.73} $$

y

$$ u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial(x,0)}{\partial t} = g(x), \quad 1 < \alpha \leq 2, u(x,t) \to 0, |x| \to \alpha,\, t > 0, \tag{3.4.74} $$

donde $f(x)$, $g(x)$ y $q(x,t)$ son funciones continuas y $m-1 < \alpha \leq m$, ${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}$ es la derivada fraccional de Caputo de orden α. Siguiendo el planteamiento del método de iteración variacional construimos el funcional de correción variacional la ecuación para la Eq.(3.4.72)

$$ u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + J_t^{\beta}\left[\lambda\left({}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_k(x,t) - R\left[x\right]\tilde{u}_k(x,t) - q(x,t)\right)\right], \tag{3.4.75} $$

o lo mismo

$$ u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\lambda(\tau)\left({}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_k(x,\tau) - R\left[x\right]\tilde{u}_k(x,\tau) - q(x,\tau)\right)d\tau, \tag{3.4.76} $$

donde J_t^{β} es el operador de integración fraccional de Riemann-Liouville de orden $\beta = \alpha - [\alpha]$, con respecto a la variable t y λ el multiplicador de Lagrange que se pueden identificar de manera óptima a través de la teoría variacional. Para identificar aproximadamente el multiplicador de Lagrange algunas aproximaciones deben hacerse. La aproximación al funcional de correción variacional Eq.(3.4.76) puede ser expresado como sigue

$$ u_{k+1}(x,t) \;=\; u_k(x,t) + \int_0^t \left[\lambda(\tau)\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m}u_k(x,\tau) - R\left[x\right]\tilde{u}_k(x,\tau) - q(x,\tau)\right)\right]d\tau. \tag{3.4.77} $$

Tomando como restricción en la variación $\tilde{u}_k$ por tanto $\delta\tilde{u}_k = 0$, y tenemos como variación primera a

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\tau)\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m}u_k(x,\tau) - q(x,\tau)\right)d\tau, \tag{3.4.78}$$

de donde por integración por partes como en el caso del VIM para EDO, obtenemos los siguientes multipicadores de Lagrange

$$\lambda = -1, \text{ para } m = 1,$$
$$\lambda = \tau - t, \text{ para } m = 2.$$

Por tanto, para $m = 1(0 < \alpha \leq 1)$ sustituyendo $\lambda = -1$ en el funcional de correción variacional Eq.(3.4.76) tenemos el siguiente funcional de iteración variacional

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) - J_t^\alpha \left[{}_c\mathsf{D}_t^\alpha u_k(x,t) - R\left[x\right]u_k(x,t) - q(x,t)\right]. \tag{3.4.79}$$

Para $m = 2(1 < \alpha \leq 2)$ sustituyendo en el funcional de correción variacional Eq.(3.4.76) tenemos el siguiente funcional de iteración variacional

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-2}(\tau-t)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u_k(x,\tau) - R\left[x\right]u_k(x,\tau) - q(x,\tau)\right)d\tau,$$

de donde,

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) - \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u_k(x,\tau) - R\left[x\right]u_k(x,\tau) - q(x,\tau)\right)d\tau, \tag{3.4.80}$$

es decir obtenemos la siguiente fórmula de iteración

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) - (\alpha-1)J_t^\alpha \left[{}_c\mathsf{D}_t^\alpha u_k(x,t) - R\left[x\right]u_k(x,t) - q(x,t)\right]. \tag{3.4.81}$$

La aproximación inicial u_0 puede escogerse libremente teniendo en cuenta que tiene que satisfacer las condiciones iniciales y de contorno en la EDPF. Sin embargo el exito del método depende de la selección apropiada del u_0. Finalmente la solución exacta de la EDPF se puede calcular como $u(x,t) = \lim_{k\to\infty} u_k(x,t)$.

VIM por ADM y memória del fenómeno de difusión

Vamos a usar el VIM en la ecuacion de difusión, Eq.(3.3.37) y a comparar las aproximaciones con las hechas en el ADM. Al usar la Eq.(3.4.79) tenemos funcional de iteración variacional como

$$u_{k+1} = u_k(x,0) + J^\alpha \frac{\partial^2 u_K}{\partial x^2} \tag{3.4.82}$$

donde tomando $u_0 = \text{sen}(x)$ encontramos las siguientes aproximaciones

$$u_0(x,t) = \text{sen}(x), \qquad u_1(x,t) = \text{sen}(x)\left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right),$$

$$u_2(x,t) = \text{sen}(x)\left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right),$$

$$u_3(x,t) = \text{sen}(x)\left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\right), \cdots \tag{3.4.83}$$

Notemos que las aproximaciones son para una ecuacion lineal y por esto el valor es exacto para un α conocido cuando $n \to \infty$ en ambos métodos. También se puede ver que ambos métodos son poderosos y eficientes al calcular las aproximaciones de las soluciones de una EDPF lineal y que en este caso sus aproximaciones son iguales, si en la Eq.(3.3.41) se toma la iteración u_3, comparada con la Eq.(3.4.6). En el Cuadro 3.3 se muestran el resultado del ADM, Eq.(3.3.41) y el VIM, Eq.(3.4.6) tomando los cuatro primeros terminos de la

Cuadro 3.3: Comparación del VIM y ADM en el fenómeno de difusión.

		$\alpha = 0{,}50$	$\alpha = 0{,}75$	$\alpha = 1{,}0$	
t	x	ADM=VIM	ADM=VIM	ADM=VIM	Exacta
	0.25	0.14640842	0.17120511	0.19264006	0.19267840
	0.50	0.28371388	0.33176551	0.37330270	0.37337698
0.25	0.75	0.40337938	0.47169834	0.53075518	0.53086080
	1.00	0.49796471	0.58230325	0.65520788	0.65533826
	0.25	0.10790621	0.13273945	0.14947323	0.15005809
	0.50	0.20910333	0.25722580	0.28965293	0.29078629
0.50	0.75	0.29729942	0.36571910	0.41182342	0.41343481
	1.00	0.36701087	0.45147375	0.50838872	0.51037795
	0.25	0.07031034	0.10053521	0.11403776	0.11686536
	0.50	0.13624913	0.19481962	0.22098521	0.22646459
0.75	0.75	0.19371660	0.27699110	0.31419287	0.32198335
	1.00	0.23913971	0.34194061	0.38786553	0.39748275

iteracción en los dos métodos para diferentes valores de α y la solución exacta cuando

$\alpha = 1$. En el cuadro al comparar los dos métodos y la solución exacta $u(x,t) = e^{-t}\,\mathrm{sen}(x)$ cuando $\alpha = 1$ [71], se puede observar que el tamaño de la diferencia de los valores aumenta a medida de que t, x crecen, es decir el error absoluto crece; de hecho en [71] son presentados dos ejemplos, uno para una ecuación de onda no homogénea y otra para una EDPF no lineal de advención donde el error del VIM y el valor exacto en $\alpha = 1$, crece cuando x, t crecen.

VIM por ADM y memória del fenómeno de onda

Estudiemos ahora el VIM en comparación con el ADM para la ecuación de difusion-onda en particular en la recuperación de la memória del fenómeno de onda, es decir cuando $1 < \alpha \leq 2$. Sea

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u] = u_{xx}, \quad t > 0,\, x \in \mathbb{R},\, 1 < \alpha \leq 2, \tag{3.4.84} $$

sujeto a la siguiente condiciones iniciales

$$ u\,(x,0) = \,\mathrm{sen}x, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{3.4.85} $$

Aplicando el ADM a esta ecuación tenemos la siguiente relación de recurrencia del método

$$ u_0(x,t) = \,\mathrm{sen}x, \qquad u_{k+1} = J^{\alpha}(L_{2x}u_k(x,t)), \tag{3.4.86} $$

de donde econtramos las siguientes aproximaciones e incluso la solución exacta del problema para todo $1 < \alpha \leq 2$,

$$ \begin{aligned} u_1(x,t) &= J^{\alpha}(L_{2x}u_0(x,t)) = J^{\alpha}(-\,\mathrm{sen}x) = -\,\mathrm{sen}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \\ u_2(x,t) &= J^{\alpha}(L_{2x}u_1(x,t)) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\,\mathrm{sen}x \\ u_3(x,t) &= J^{\alpha}(L_{2x}u_2(x,t)) = \frac{-t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\,\mathrm{sen}x \\ &\vdots \\ u(x,t) &= \,\mathrm{sen}x + \,\mathrm{sen}x\left[\frac{-t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \ldots\right] \end{aligned} $$

es decir

$$ u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}\,\mathrm{sen}(x) = \,\mathrm{sen}(x)E_{\alpha}(-t^{\alpha}) \tag{3.4.87} $$

donde $E_\alpha(-t^\alpha)$ es la función de Mittag-Leffler.

Usando el VIM obtenemos el siguiente funcional de iteración variacional

$$u_{k+1} = u_k(x,0) + J^\alpha \frac{\partial^2 u_K}{\partial x^2} \tag{3.4.88}$$

de donde encontramos las respectivas aproximaciones e incluso la solucion exacta como

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \text{sen}x \\
u_1(x,t) &= \text{sen}x - (\alpha-1)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\text{sen}x \\
u_2(x,t) &= \text{sen}x\left(1-(\alpha-1)\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + (\alpha-1)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right) \\
u_3(x,t) &= \text{sen}x\left[1+(\alpha-1)\left(\frac{-t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}\right)\right]
\end{aligned}$$

de donde se puede ver que

$$u(x,t) = \text{sen}(x)\left[1+(\alpha-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}\right] \tag{3.4.89}$$

Al tomar $\alpha = 2$ y usar la solución de la ecuación de onda, Eq.(2.2.3) con $c = 1$ tenemos que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\text{sen}(nx)(b_n\cos(nt))$$

donde

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 \text{sen}(x)\,\text{sen}(n\pi x)dx \\
&= 2\begin{cases} 0, & si \quad n \neq 1/\pi \\ \dfrac{1}{2} & si \quad n = 1/\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

luego

$$u(x,t) = \text{sen}x\cos t. \tag{3.4.90}$$

Es claro que la aproximaciones del VIM y ADM en $\alpha = 2$ son iguales comparando las Eqs.(3.4.87,3.4.89), por tanto la Figura 3.4 representa la gráfica de la aproximación de la solución par el VIM y ADM. Las Figuras 3.2,3.3, muestran la aproximación de la solución de la Eq.(3.3.37), usando el VIM($\alpha = 1{,}5$), ADM($\alpha = 1{,}5$), que observando detenidamente los respectivos gráficos se percibe que son diferentes y que el VIM está convergiendo mas

rapidamente a la solución exacta ($\alpha = 2$) que el ADM. En contraste con la Figura 3.4 del VIM-ADM($\alpha = 2$) y la Figura 3.5 de la solucion exacta ($\alpha = 2$), que son casi iguales.

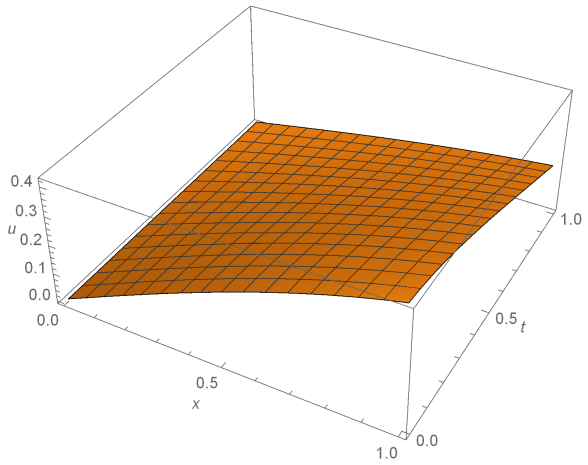

Figura 3.2: VIM para la Eq.(3.3.37) con $\alpha = 1{,}5$.

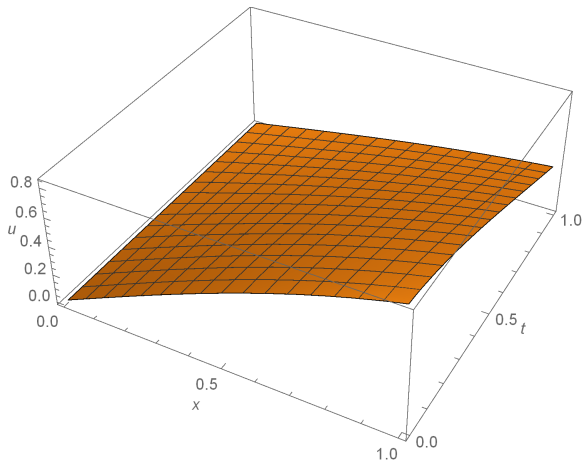

Figura 3.3: ADM para la Eq.(3.3.37), con $\alpha = 1{,}5$.

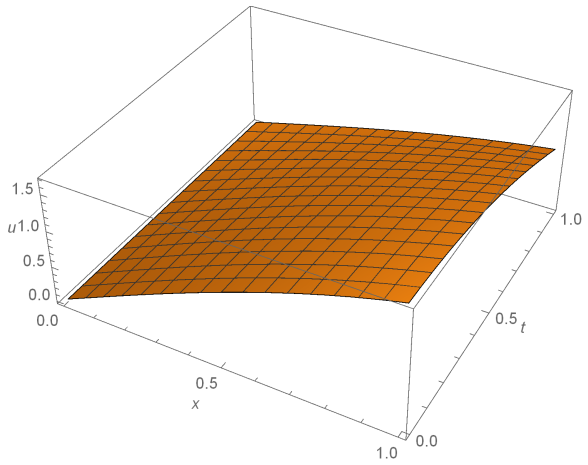

Figura 3.4: ADM y VIM para la Eq.(3.3.37), con $\alpha = 2$.

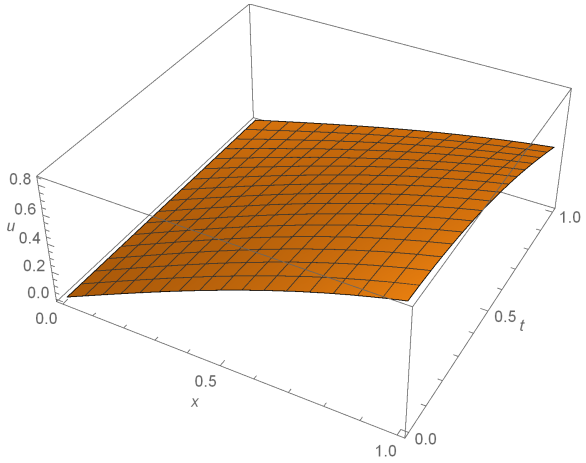

Figura 3.5: Solución exacta para la Eq.(3.3.37), con $\alpha = 2$.

Capítulo 4

Aproximaciones para la BF y convergencia del VIM en EDPF

En este capítulo vamos a presentar ejemplos que se construyeron en esta tesis para mostrar la eficiacia del método de iteración variacional en la aproximación de solución de la ecuación diferencial fraccional no lineal de Burgers. La BF ha sido estudiado por diversos investigadores [88]-[102]. En particular vamos a establecer un lema que calcula los multiplicadores de Lagrange de la ecuación de Burgers fraccional, con sus respectivos corolarios que recubren lo encontrado en la literatura conocida para esta ecuación. Por otra parte vamos aportar tres teoremas asociados a la convergencia del método de iteración variacional, uno de ellos prueba que la aproximación del método converge, el otro que converge a la solución exacta y el último da limitantes al error máximo calculado en el n-ésimo paso del método.

4.1. VIM para EDPF no lineales

En las siguientes secciones se estudia el VIM para algunas ecuaciones diferenciales fraccionales, para eso necesitamos una formulacióndel VIM mas general. Vamos a escribir la forma general de una ecuación diferencial fraccional como

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u] + R[u] + N[u] = f(t), \tag{4.1.1}$$

donde ${}_c\mathsf{D}_t^\alpha[u]$ es la derivada de Caputo, $R[u]$ es el término lineal, $N[u]$ es el término no linear y $f(t)$ es la función asociada con el término no homogeneo. Odibat y Momami [87] aplicaron el VIM en la ecuación y sugirió una fórmula de iteración variacional

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \displaystyle\int_0^t \lambda(t,\tau)\left({}_c\mathsf{D}_t^\alpha u_n + R[u] + N[u] - f(\tau)\right) d\tau, \quad 0 < t \\ \\ \lambda(t,\tau) = -1 \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \\ \lambda(t,\tau) = \tau - t, \quad 1 < \alpha \leq 2. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

$\lambda(t,\tau)$ es conocida como los multiplicadores de Lagrange asociados con la fórmula de iteración variacional. Nuestro siguiente paso es calcular de forma general los multiplicadores de Lagrange al VIM para la BF.

4.2. Multiplicadores de Lagrange de la BF

En esta sección, presentaremos el VIM aplicado a la ecuación de Burgers [103]

$${}_c\mathsf{D}_t^\alpha[u] = u_{xx} + Au^p u_x, \quad u = u(x,t) \tag{4.2.1}$$

con $\mathsf{D} = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2, A \in \mathbb{R}$ y $p > 0$. El funcional de correción variacional para esta ecuación es

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\lambda(t)\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u_k - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}_k - A\bar{u}_k^p\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}_k\right)\mathrm{d}\tau, \tag{4.2.2}$$

donde $\beta = \alpha + 1 - m$ y $m - 1 < \alpha \leq m$. Dicho funcional puede ser aproximado para calcular los multiplicadores de Lagrange usando la siguiente expresión

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \int_0^t \lambda(t)\left(\frac{\partial^m}{\partial \tau^m}u_k - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}_k - A\bar{u}_k^p\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}_k\right)\mathrm{d}\tau. \tag{4.2.3}$$

Si utilizamos la integración por partes y recordando que de la variación primera en el funcional corrección variacional dá que $\delta\bar{u}_k = 0$, tenemos los siguientes tres casos:
(a) para $m = 1$ tenemos que $0 < \alpha \leq 1$ y el funcional de corrección variacional puede ser

aproximado de la siguiente manera

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(t) \left(\frac{\partial}{\partial t} u_k - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}_k - A \bar{u}_k^p \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_k \right) \mathrm{d}\tau.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 1 + \lambda(\tau) &= 0 \\ \lambda'(\tau) &= 0, \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

cuya solución es $\lambda(\tau) = -1$. A continuación, se obtiene la función de corrección variacional (teniendo en cuenta que $\beta = \alpha$)

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k - A u_k^p \frac{\partial}{\partial x} u_k \right) \mathrm{d}\tau. \tag{4.2.5}$$

(b) Para $m = 2$ tenemos $1 < \alpha \leq 2$ el funcional de corrección variacional puede ser aproximado por la siguiente manera

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}_k - A \bar{u}_k^p \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_k \right) \mathrm{d}\tau.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \lambda''(\tau) &= 0, \\ \lambda(\tau)_{\tau=t} &= 0, \\ 1 - \lambda'(\tau)_{\tau=t} &= 0, \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

cuya solución se puede escribir como $\lambda(\tau) = \tau - t$, para $m = 2$ y $1 < \alpha \leq 2$, de donde obtenemos el funcional de corrección variacional con $\beta = \alpha - 1$

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) - \frac{\alpha - 1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} u_k - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k - A u_k^p \frac{\partial}{\partial x} u_k \right) \mathrm{d}\tau. \tag{4.2.7}$$

(c) Multiplicadores de Lagrange cuando $0 < t$ y $0 < \alpha$. En este caso proponemos un lema, para recubrir los resultados de a) y b) y presentar ejemplos.

Lema 4.2.1. *Si el funcional de corrección variacional de la* Eq.(4.2.1) es dada por la

integral de Riemann

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^t \lambda(t,\tau)\left[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}(u_n) - (\bar{u}_n)_{xx} - A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x\right]\mathrm{d}\tau, \tag{4.2.8}$$

con $0 < t$, $0 < \alpha$ y $(\bar{u}_n)_{xx}$, $A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x$ restricciones del funcional de correción variacional, entonces el multiplicador de Lagrange es

$$\lambda(t,\tau) = \frac{(-1)^{\alpha}(\tau - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Demostración. En primer lugar, escribamos el funcional de correción variacional para la integral de RL de la Eq.(4.2.1) y tomemos la TL a ambos lados de la nueva ecuación

$$\mathscr{L}[u_{n+1}] = \mathscr{L}[u_n + \mathsf{I}_t^{\alpha}\lambda_{RL}(t,\tau)({}_c\mathsf{D}_{\tau}^{\alpha}u_n - (\bar{u}_n)_{xx} - A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x)] \tag{4.2.9}$$

donde $\lambda_{RL}(t,\tau)$ son los multiplicadores de Lagrange de este funcional. Consideremos

$$\mathsf{I}_t^{\alpha}\lambda_{RL}(t,\tau)_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\lambda(t,\tau)_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{4.2.10}$$

suponiendo que $\lambda_{RL}(t,\tau) = \lambda(t-\tau)$, la anterior ecuación es la convolución de las funciones

$$a(t) = \frac{\lambda(t)t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \tag{4.2.11}$$

y ${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n(t)$. Los términos $(\bar{u}_n)_{xx}$ y $A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x$ se consideran restricciones variacionales del funcional de correción variacional Eq.(4.2.9), lo que implica que $\delta(\bar{u}_n)_{xx} = 0$ y $\delta A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x = 0$ de donde obtenemos

$$\delta\mathscr{L}[u_{n+1}] = \delta\mathscr{L}[u_n] + \delta\mathscr{L}[\mathsf{I}_t^{\alpha}\lambda_{RL}({}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n - (\bar{u}_n)_{xx} - A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x)],$$

$$= \delta\mathscr{L}[u_n] + \delta[\mathscr{L}[a(s)]s^{\alpha}\mathscr{L}[u_n(s)]] - \delta\sum_{k=0}^{m-1} u^k(0^+)s^{\alpha-1-k},$$

$$= (1 + \mathscr{L}[a(s)]s^{\alpha})\delta\mathscr{L}[u_n], \tag{4.2.12}$$

que junto con el uso de la ecuación de Euler-Lagrange vemos que

$$1 + \mathscr{L}[a(s)]s^{\alpha} = 0,$$

resultando

$$\mathscr{L}[a(s)] = -\frac{1}{s^{\alpha}}, \tag{4.2.13}$$

y usando la transformada de Laplace inversa a ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$a(t) = -\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{4.2.14}$$

Comparando las Eq.(4.2.11) y Eq.(4.2.14) tenemos que $\lambda_{RL}(t,\tau) = -1$ y podemos escribir

$$u_{n+1} = u_n - \mathsf{I}_t^{\alpha}[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n - (\bar{u}_n)_{xx} - A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x],$$

$$u_{n+1} = u_n - \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n - (\bar{u}_n)_{xx} - A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x]\mathrm{d}\tau,$$

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^t \frac{(-1)^{\alpha}(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}(u_n) - (\bar{u}_n)_{xx} - A(\bar{u}_n)^p(\bar{u}_n)_x\right]\mathrm{d}\tau.$$

Finalmente, usando la Eq.(4.2.10) obtenemos la siguiente expresión general

$$\lambda(t,\tau) = \frac{(-1)^{\alpha}(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{4.2.15}$$

En los siguientes dos corolarios, recuperamos los resultados de a), b) y se discuten ejemplos.

Corolario 4.2.2. *En la* Eq.(4.2.15) si $\alpha = 1$ tenemos $\lambda(t,\tau) = -1$ y si $\alpha = 2$ tenemos $\lambda(t,\tau) = \tau - t$.

Demostración. Por sustitución directa $\alpha = 1$ ($\alpha = 2$) en la Eq.(4.2.15).

Ejemplo 1: BF con $0 < \alpha \leq 1$ usando la condición inicial $u(x,0) = g(x)$. El problema a considerar es

$$\begin{cases} {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ \\ u(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{4.2.16}$$

Usando el Corolario (4.2.2) tenemos $\lambda(t,\tau) = -1$ y sustituyendo en el funcional de corrección variacional de la BF obtenemos

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \mathsf{I}_t^{\alpha}\left[\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}u_n - u_n(u_n)_x - (u_n)_{xx}\right],$$

que puede ser escrito como

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n + u_n(u_n)_x - (u_n)_{xx}]\mathrm{d}\tau. \tag{4.2.17}$$

Usando esta ultima ecuación obtenemos las siguientes aproximaciones

$$u_0 = u(x,0) = g(x),$$

$$u_1 = g(x) - [gg' - g'']\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2 = u_1 + (2g(g')^2 + g^2g'' - 2gg^{(3)} - 4g'g'' + g^{(4)})\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}$$

$$-(gg' - g'')[(g')^2 + gg'' - g^{(3)}]\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)}\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \tag{4.2.18}$$

$$\vdots$$

cálculo similares se utilizan para obtener otras aproximaciones. Para cerrar la sección demostramos otro colorário.

Corolario 4.2.3. *Con* $\lambda(t,\tau) = \dfrac{(-1)^{\alpha}(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ *y el funcional de corrección variacional*

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\lambda(t,\tau)[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} - (u_n)_{xx} - A(u_n)^p(u_n)_x]d\tau \tag{4.2.19}$$

con $\beta = \alpha - [\alpha]$ *y* $[\alpha]$ *la parte entera de* α*, entonces el funcional de corrección variacional para* $0 < \alpha \leq 1$ *y* $1 < \alpha \leq 2$*, estan dados por*

$$u_{n+1} = u_n - \mathsf{I}_t^{\alpha}[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} - (u_n)_{xx} - A(u_n)^p(u_n)_x], \tag{4.2.20}$$

y

$$u_{n+1} = u_n - (\alpha-1)\mathsf{I}_t^{\alpha}[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_n - (u_n)_{xx} - A(u_n)^p(u_n)_x]. \tag{4.2.21}$$

respectivamente

Demostración. Por el Corolario (4.2.2), tenemos que $\lambda(t,\tau) = -1$ para $0 < \alpha \leq 1$ por

lo que si $\beta = \alpha$, implica

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [{}_c\mathsf{D}_t^\alpha u_n - A(u_n)^p (u_n)_x - (u_n)_{xx}] \mathrm{d}\tau, \quad (4.2.22)$$

que es lo mismo que

$$u_{n+1}(x,t) = u_n - \mathsf{I}_t^\alpha [{}_c\mathsf{D}_t^\alpha u_n - (u_n)_{xx} - A(u_n)^p (u_n)_x]. \quad (4.2.23)$$

Ahora para $1 < \alpha \leq 2$ si $\beta = \alpha - 1$, por el Corolario (4.2.2), tenemos $\lambda(t,\tau) = \tau - t$ y usando la relación

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} = \frac{(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)},$$

en

$$u_{n+1}(x,t) = u_n + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\tau) [{}_c\mathsf{D}_t^\alpha u_n - (u_n)_{xx} - A(u_n)^p (u_n)_x] \mathrm{d}\tau,$$

se tiene que

$$u_{n+1}(x,t) = u_n - (\alpha-1)\mathsf{I}_t^\alpha [{}_c\mathsf{D}_t^\alpha u_n - (u_n)_{xx} - A(u_n)^p (u_n)_x]. \quad (4.2.24)$$

4.3. Solucion aproximada para BF

En esta sección vamos a considerar ejemplos de la ecuación fraccional de Burger, algunos de ellos con $0 < \alpha \leq 1$ y otros con $1 < \alpha \leq 2$, con sus respectivas condiciones iniciales. Aquí u es el flujo de la velocidad, el coeficiente de viscosidad es igual a -1, y sin perdida de generalidad tenemos $A = -1$ y $p = 1$ en la Eq.(4.2.1). Note que el coeficiente de viscosidad corresponde a la segunda derivada en la ecuación. Para esos ejemplos, consideremos la aproximación de la solucioón de la siguiente forma $u(x,t) \approx u_2(x,t)$ con

$$u = \lim_{n\to\infty} (u_n). \quad (4.3.1)$$

La aproximación inicial u_0 se pueden elegir libremente si se satisface la condición de contorno y condiciones iniciales del problema. En este caso tomamos $u_0(x,t) = u(x,0)$.

Mencionamos que el efecto de la derivada fraccionaria es recuperar la memoria de los fenómenos físicos para $0 < \alpha \leq 1$, $1 < \alpha \leq 2$ [104], [105]. En particular, con las condiciones iniciales apropiadas, cuando $A = 0$, $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$ en la Eq.(4.2.1), recuperamos el efecto de la memoria asociada con la ecuación del calor y la ecuación de onda, respectivamente. También, con $\alpha = 1$ en la Eq.(4.2.1) obtenemos la clásica ecuación fraccional de Burgers.

Ejemplo 2. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} u + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ u(x,0) = g(x) = \operatorname{sen}(\pi x), \quad 0 < x \leq 1. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Usando la Eq.(4.2.22) con $\lambda(t,\tau) = -1$ obtenemos

$$u_0(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x),$$

$$u_1(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x) - \pi \operatorname{sen}(\pi x)[\cos(\pi x) + (\pi)^2]\frac{t^2}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = {} & \operatorname{sen}(\pi x) - \pi \operatorname{sen}(\pi x)[\cos(\pi x) + (\pi)^2]\left[\frac{t^2}{\Gamma(\alpha+1)}\right] \\ & + [2\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)\cos^2(\pi x) - \pi^2 \operatorname{sen}^4(\pi x) + 2\pi^3 \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x) \\ & + 4\pi^3 \cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi x) + \pi^4 \operatorname{sen}^4(\pi x)]\left[\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right] \\ & \times(-\pi \operatorname{sen}(\pi x))\left[\cos(\pi x) + (\pi)^2\right][\pi^2 \cos(\pi x) - \pi^2 \operatorname{sen}^3(\pi x) - \pi^4 \operatorname{sen}(\pi x)] \\ & \times\left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}\right]. \end{aligned}$$

En la Figura 4.1 tenemos que $\alpha = 0{,}2$ y en la Figura 4.2 $\alpha = 1$ dilucida las aproximaciones de $u(x,t)$.

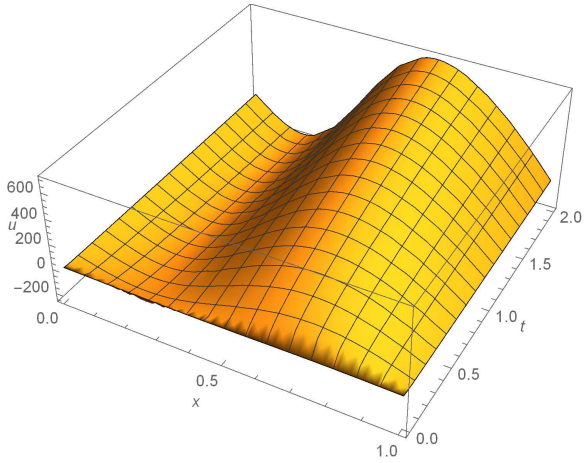

Figura 4.1: $u(x,0) = \text{sen}(\pi x)$, con $\alpha = 0{,}2$.

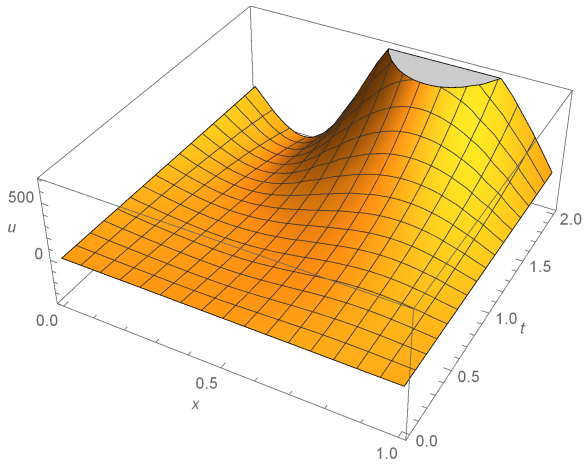

Figura 4.2: $u(x,0) = \text{sen}(\pi x)$, con $\alpha = 1$.

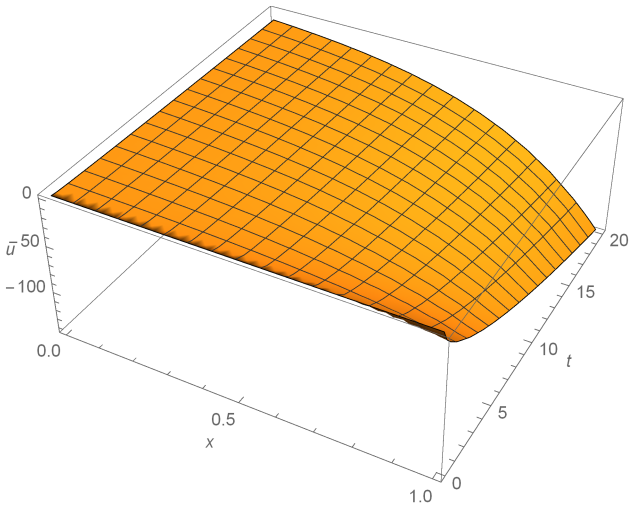

Figura 4.3: $u(x,0) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, con $\alpha = 0{,}2$.

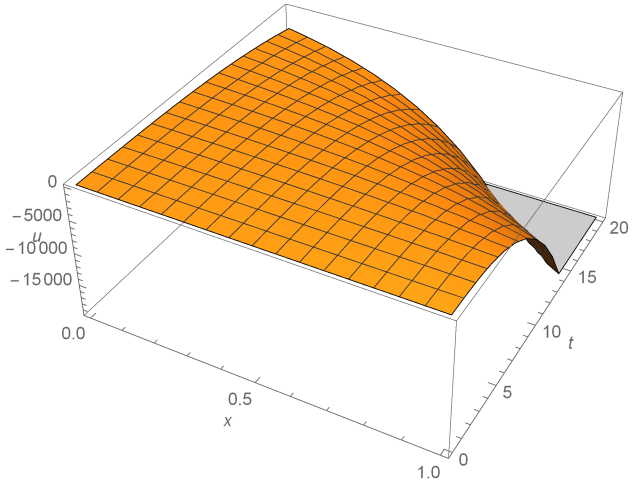

Figura 4.4: $u(x,0) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, con $\alpha = 1$.

Ejemplo 3. Tomemos el Ejemplo 2 con la condición inicial dada $u(x,0) = g(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. Usando la Eq.(4.2.22) con $\lambda(t,\tau) = -1$ obtenemos

$$u_0(x,t) = \frac{e^x}{1+e^x},$$

$$u_1(x,t) = \frac{e^x}{1+e^x} - \left(\frac{(2e^{2x}-e^x)}{(1+e^x)^3}\right)\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right),$$

$$u_2(x,t) = \frac{e^x}{1+e^x} - \left(\frac{2e^{2x}-e^x}{(1+e^x)^3}\right)\left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] + \left(\frac{e^x-17e^{2x}+26e^{3x}-4e^{4x}}{(1+e^x)^5}\right)\left[\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right]$$

$$- \left(\frac{-9e^{2x}-68e^{3x}-113e^{4x}+174e^{5x}+559e^{6x}+446e^{7x}+586e^{8x}+414e^{9x}+162e^{10x}+27e^{11x}}{(1+e^x)^5(1+3e^x)^3}\right)$$

$$\times \left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)}\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}\right].$$

En este caso los gráficos de la Figura (4.3), con $\alpha = 0{,}2$ y la Figura (4.4), con $\alpha = 1$, dilucidan las aproximaciones de $u(x,t)$.

Ejemplo 4: Consideremos el problema

$$\begin{cases} {}_c\mathsf{D}_t^\alpha u + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad 1 < \alpha \leq 2, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), \qquad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

En este caso, usando la Eq.(4.2.24) con $\lambda(t,\tau) = \tau - t$ tenemos

$$u_0(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x),$$

$$u_1(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x) - \alpha(\alpha-1)[\pi \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x) - \pi^2 \operatorname{sen}(x)]\left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right],$$

$$u_2(x,t) = \operatorname{sen}(\pi x) - \alpha(\alpha-1)[\pi \operatorname{sen}(\pi x)\cos(\pi x) - \pi^2 \operatorname{sen}(x)]\left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]$$

$$+\alpha(\alpha-1)[\operatorname{sen}(\pi x)(2\pi^2\cos^2(\pi x) - \pi^2\operatorname{sen}^3(\pi x) + 6\pi^3\cos(\pi x) + \pi^4\operatorname{sen}^3(\pi x)]\left[\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right]$$

$$-\alpha(\alpha-1)[\pi\operatorname{sen}(\pi x)][\cos(\pi x)+\pi^2][\pi^2\cos(\pi x)-\pi^2\operatorname{sen}^3(\pi x)-\pi^4\operatorname{sen}(\pi x)]\left[\frac{\Gamma(1+2\alpha)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)}\right].$$

La gráfica de la Figura (4.5), con $\alpha = 1{,}2$ y la Figura (4.6), con $\alpha = 2$ se puede observar la evolución de la aproximación de $u(x,t)$.

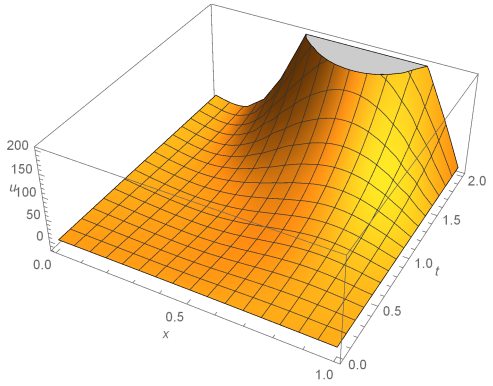

Figura 4.5: $u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), u_t(x,0) = 0$, con $\alpha = 1{,}2$.

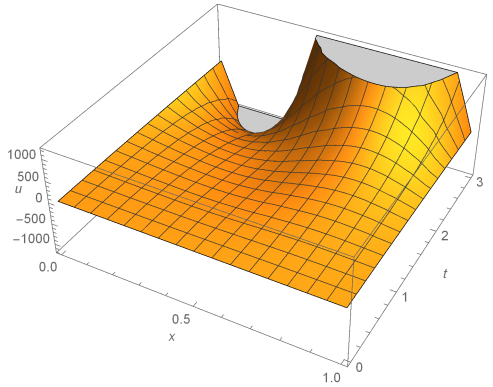

Figura 4.6: $u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), u_t(x,0) = 0$, con $\alpha = 2$.

4.4. VIM por ADM en la BF

Vamos a comparar el VIM con el ADM [106] al aproximar las soluciones de la BF. Consideremos la ecuación diferencial parcial fraccional de Burgers, en dos intervalos diferentes

de su variable x así

$$\begin{cases} {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} u + u\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \\ \\ u(x,0) = \dfrac{2e^x}{1+e^x}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad \text{ó} \quad 0 < x \leq 5. \end{cases}$$

Primero recordemos la aproximación a la solución del ADM como en la Eq.(3.3.49)

$$u(x,t) = \frac{2e^x}{1+e^x} - \left[gg' + g''\right]\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \left[2g(g')^2 + g^2 g'' + 4g'g'' + 2gg''' + g^{(4)}\right]\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

donde $u(x,0) = g(x)$ y

$$\begin{aligned} g' &= \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}, \\ g'' &= \frac{-2e^x(-1+e^x)}{(1+e^x)^3}, \\ g^{(3)} &= \frac{2e^x(1-4e^x+e^{2x})}{(1+e^x)^4}, \\ g^{(4)} &= \frac{-2e^x(-1+11e^x-11e^{2x}+e^{3x})}{(1+e^x)^5}, \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

por otra parte usaremos la segunda aproximación del VIM, Eq.(4.5.15), dada por

$$\begin{aligned} u_2(x,t) = g - \left[gg' + g''\right]\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(2g(g')^2 + g^2 g'' + 2gg^3 + 4g'g'' + g^{(4)}\right)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ -(gg' + g'')\left((g')^2 + gg'' + g^{(3)}\right)\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)}\,\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}, \end{aligned}$$

y tambien usaremos la solución exacta cuando $\alpha = 1$ dada por la Eq.(3.3.51)

$$u(x,t) = \frac{2\exp(x-t)}{1+\exp(x-t)}.$$

Podemos observar que tanto el ADM y VIM, Figura 4.7, y Figura 4.8, respectivamente, da una aproximación muy cercana a la solución exacta, Figura 4.9, cuando $0 < x \leq 1$. Un comparación mas precisa de lo que esta pasando con los dos métodos se puede ver en el Cuadro 4.1, donde se puede ver que el VIM, converge de forma mas rápida y precisa a la solución exacta.

Cuadro 4.1: Comparación del VIM y ADM en la BF.

x	t	ADM	VIM	Exacta
0.1	0.1	0.999959	0.999963	1.00000
0.1	0.5	0.797468	0.797986	0.802625
0.1	0.9	0.59099	0.59401	0.620051
0.5	0.1	1.19734	1.19736	1.19738
0.5	0.5	0.995526	0.99778	1.00000
0.5	0.9	0.775291	0.788438	0.802625
0.9	0.1	1.37993	1.37996	1.37995
0.9	0.5	1.19472	1.19769	1.19738
0.9	0.9	0.981771	0.999089	1.00000

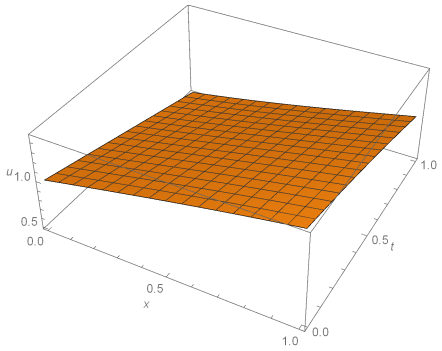

Figura 4.7: ADM para la BF, con $\alpha = 1{,}0$.

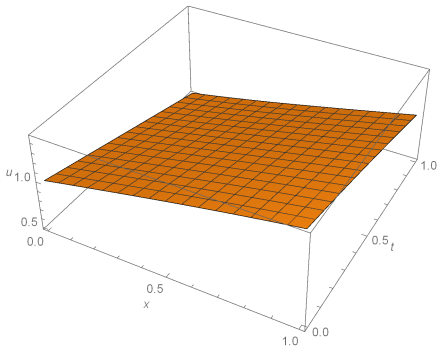

Figura 4.8: VIM para la BF, con $\alpha = 1{,}0$.

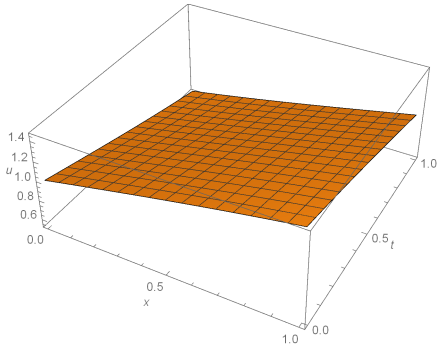

Figura 4.9: Solución exacta BF, con $\alpha = 1{,}0$.

Sin embargo si observamos las Figuras cuando $0 < x \leq 5$ el comportamiento del VIM, Figura 4.10 en comparación con el ADM, Figura 4.12, da aproximaciones mas cercanas a la solución exacta, Figura 4.11

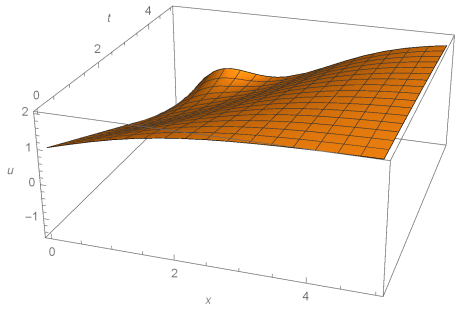

Figura 4.10: VIM para la BF, con $0 < x \leq 5{,}0 < t \leq 5$, $\alpha = 1{,}0$.

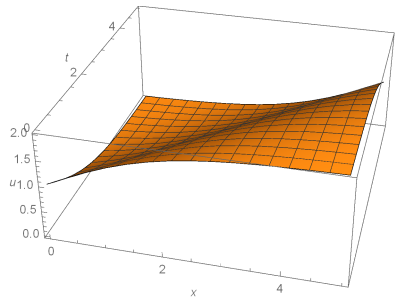

Figura 4.11: Solución exacta para la BF, con $0 < x \leq 5{,}0 < t \leq 5$, $\alpha = 1{,}0$.

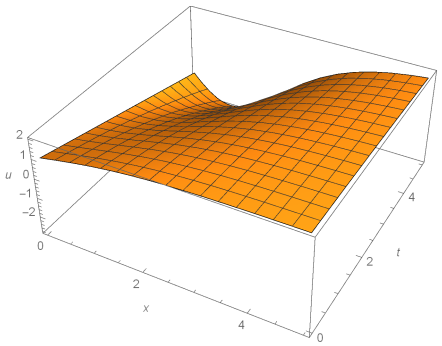

Figura 4.12: ADM para la BF, con $0 < x \leq 5{,}0 < t \leq 5$, $\alpha = 1{,}0$.

4.5. VIM y convergencia en EDPF

Consideremos la siguiente ecuación diferencial fraccional no lineal

$$ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u] + R[u] + N[u] = f(t), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N} \tag{4.5.1} $$

donde $R\,[u]$ es un término lineal, $N[u]$ es un término no lineal, $f(t)$ es una función analitica y ${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u]$ es la derivada fraccional de Caputo de orden α. Las condiciones iniciales para esta ecuación son

$$u^{(n)}(x,0) = g_n(x,t), \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1$$

y vamos a considerar los multiplicadores de Lagrange del funcional de correción variacional de la Eq.(4.5.1) dado por

$$u_{n+1} = u_n + \int_0^t \lambda(t,\tau)\left[{}_0^c\mathsf{D}_t^{\alpha} u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)\right] d\tau, \tag{4.5.2}$$

donde los términos $R[u_n]$ y $N[u_n]$ son términos con variación restringida y el multiplicador de Lagrange puede identificarse segun el Lema 1 como

$$\lambda(t,\tau) = \frac{(-1)^{\alpha}(\tau - t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{4.5.3}$$

Al sustituir estos multiplicadores en el funcional de correción variacional obtenemos la siguiente fórmula de iteración:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha-1)}(\tau - t)^{\alpha-1}\left({}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)\right) d\tau, \tag{4.5.4}$$

de donde podemos definir los operadores $E_n[u]$ con $m - 1 < \alpha \leq m$ así

$$E_n[u] = \int_0^t \frac{(-1)^{\alpha}}{(\alpha-1)!}(\tau - t)^{\alpha-1}\left[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha} u_n + R[u_n] + N[u_n] - f(\tau)\right] d\tau. \tag{4.5.5}$$

Teniendo en cuenta que $u(x,t) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(E_n[u]) \tag{4.5.6}$$

la aproximación inicial u_0 puede ser escogida libremente si esta satisface la condición inicial y las de contorno. Considerar los valores $u^{(n)}(0) = g_n(x,t)$, $n = 0, 1, \ldots, m-1$, y vamos a suponer que u_0 es de la forma

$$u_0(t) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{c_n(x)}{n!} t^n \tag{4.5.7}$$

donde c_n son constantes dependientes de x.

Teorema 4.5.1. *Sea el operador E_n definido de un espacio de Hilbert H en el mismo. Decimos que la solución*

$$u(x,t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [E_n(x,t)] \tag{4.5.8}$$

converge si existe γ con $0 < \gamma < 1$ tal que:

$$\|E_{n+1}[u]\| \leq \gamma \|E_n[u]\| \tag{4.5.9}$$

para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Definamos una secuencia $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ así, $s_0 = u_0, \quad E_0 = 0$; $s_1 = u_1 = u_0 + E_1$; $s_2 = u_2 = u_1 + E_2$; $s_{n+1} = u_{n+1} = u_0 + E_1 + \ldots + E_{n-1} + E_n + E_{n+1}$; ..., y mostraremos que $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy en el espacio de Hilbert H. Para este propósito consideremos

$$\|s_{n+1} - s_n\| = \|E_{n+1}\| = \|u_0 + E_1 \ldots + E_{n-1} + E_n + E_{n+1}\|$$

$$\leq \gamma \|u_0 + E_1 + \ldots + E_n\| \leq \gamma^2 \|u_0 + E_1 + \ldots + E_{n-1}\| \leq \ \ldots \ \leq \gamma^{n+1} \|u_0\|.$$

Si para todo $n, j \in \mathbb{N}, \quad n \geq j$ de donde tenemos

$$\|s_n - s_j\| = \|s_n - s_{n-1} + s_{n-1} - s_{n-2} + \ldots + s_{j+1} - s_j\|$$

$$\leq \|s_n - s_{n-1}\| + \|s_{n-1} - s_{n-2}\| + \ldots + \|s_{j+1} - s_j\|$$

$$\leq \gamma^n \|u_0\| + \gamma^{n-1} \|u_0\| + \ldots + \gamma^{j+1} \|u_0\|$$

$$= \sum_{n=0}^{n-j-1} \|u_0\| \gamma^{j+1} \gamma^n = \frac{1 - \gamma^{n-1}}{1 - \gamma} \gamma^{j+1} \|u_0\|$$

con $0 < \gamma < 1$, entonces $\lim\limits_{n,j \longrightarrow \infty} \|s_n - s_j\| = 0$ por lo tanto $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una secuencia de Cauchy en el espacio de Hilbert H lo que a su vez implica que la solución

$$u(x,t) = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x,t) \tag{4.5.10}$$

es convergente.

Teorema 4.5.2. *Si la solución $u(x,t) = u_0 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} [E_n(x,t)]$ converge, entonces esta es una solución exacta del problema no lineal dado por la* Eq.(4.5.1).

Demostración. Sea $u(x,t) = u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} E_j(x,t) = \lim_{j\longrightarrow\infty} u_j$ tenemos por definción de serie convergente que

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\Big[u_0 + E_j(x,t)\Big] = 0 \Rightarrow \lim_{j\longrightarrow\infty} E_j = -u_0, \tag{4.5.11}$$

por definición de la serie telescópica que

$$\sum_{j=0}^{n}\Big[E_{j+1} - E_j\Big] = E_{n+1} - E_0$$

y tambien que

$$\sum_{j=0}^{\infty}\Big[E_{j+1} - E_j\Big] = \lim_{j\longrightarrow\infty} E_j - E_0 = -u_0$$

donde se uso la Eq.(4.5.11). Aplicando el operador ${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}$ con $\alpha > 0$ a ambos lados de la anterior sumatória tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}\Big[E_{j+1} - E_j\Big] = -{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_0] = 0. \tag{4.5.12}$$

Por otra parte de la definicion del operador E_n se consigue que
${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[E_{j+1} - E_j] = {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}\displaystyle\int_0^t \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(\tau - t)^{\alpha-1}$

$$\times\Big[{}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_{j+1} + N[u_{j+1}] + R[u_{j+1}] - f(\tau) - {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_j + N[u_j] + R[u_j] - f(\tau)\Big]\,d\tau,$$

donde ${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}$ es el operador inverso a izquierda del operador integral de RL y

$${}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[E_{j+1} - E_j] = {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_{j+1} + N[u_{j+1}] + R[u_{j+1}] - {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}u_j + N[u_j] + R[u_j]$$

y haciendo la expansión de esta sumatoria vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}\Big[E_{j+1} - E_j\Big] &= {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_1] + N[u_1] + R[u_1] - {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_0] + N[u_0] + R[u_0]\\ &+ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_2] + N[u_2] + R[u_2] - {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_1] + N[u_1] + R[u_1] + \ldots\\ &+ {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_n] + N[u_n] + R[u_n] - {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_{n-1}] + N[u_{n-1}] + R[u_{n-1}]\\ &= {}_c\mathsf{D}_t^{\alpha}[u_n] + N[u_n] + R[u_n] - f(\tau).\end{aligned}$$

donde $f(\tau) = {}_c\mathsf{D}_t^\alpha[u_0] + N[u_0] + R[u_0]$ que se puede escribir así

$$\sum_{j=0}^{\infty} {}_c\mathsf{D}_t^\alpha \left[E_{j+1} - E_j\right] = \lim_{j\longrightarrow\infty} \left[{}_c\mathsf{D}_t^\alpha[u_j] + N[u_j] + R[u_j] - f(\tau)\right]$$
$$= {}_c\mathsf{D}_t^\alpha \left[\lim_{j\longrightarrow\infty} u_j\right] + N\left[\lim_{j\longrightarrow\infty} u_j\right] + \left[\lim_{j\longrightarrow\infty} u_j\right] - f(\tau)$$

y usando la definición de solución del problema no lineal con el VIM, vemos que

$${}_c\mathsf{D}_t^\alpha \left[u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} E_j\right] + N\left[u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} E_j\right] + R\left[u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} E_j\right] - f(\tau) = 0$$

lo que implica que $u(x,t) = u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} E_j$ es la solución exacta del problema no lineal dado en la Eq.(4.5.1).

Teorema 4.5.3. *Sea* $u(t) = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = u_0 + \sum_{j=0}^{\infty} E_n$ *la serie que converge a la solución* $u(x,t)$. *Si la serie truncada* $\sum_{n=0}^{j} E_n$ *es usada como una aproximación a la solución* $u(x,t)$ *del problema, tenemos que el error máximo* $e_j(x,t)$ *es estimado como*

$$e_j(x,t) \leq \frac{1}{1-\gamma}\, \gamma^{j+1}\|u_0\| \tag{4.5.13}$$

Demostración. Del Teorema 4.5.1, podemos escribir que

$$\|s_n - s_j\| \leq \frac{1-\gamma^{n-j}}{1-\gamma}\, \gamma^{j+1}\|u_0\|,$$

para $n \geq j$. Ahora como $n \to \infty$ entonces $s_n \to u(x,t) - s_0$, luego

$$\left\|u(x,t) - u_0 - \sum_{n=0}^{j} E_n\right\| \leq \frac{1-\gamma^{n-j}}{1-\gamma}\, \gamma^{j+1}\|u_0\|$$

además si $0 < \gamma < 1$ tenemos $(1-\gamma^{n-j}) < 1$, por lo tanto la desigualdad anterior se convierte en

$$\left\|u(x,t) - u_0 - \sum_{n=0}^{j} E_n\right\| \leq \frac{1}{1-\gamma}\, \gamma^{j+1}\|u_0\|.$$

Aplicación de los teoremas de Convergencia

En resumen a los Teoremas 4.5.1,4.5.2, hablan que la fórmula de iteración variacional converge hacia la solución exacta, bajo la hipótesis de que tiene que existir γ con $0 < \gamma < 1$ tal que

$$\|E_{n+1}[u]\| \leq \gamma \|E_n[u]\|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

En otras palabras, si definimos $\forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ los parámetros

$$\lambda i = \begin{cases} \dfrac{\|u_{i+1}\|}{\|u_i\|}, & \|u_i\| \neq 0 \\ 0, & \|u_i\| = 0 \end{cases} \tag{4.5.14}$$

entonces la solución en serie es la $u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x,t)$ converge a la solución exacta $u(x,t)$ cuando $0 \leq \lambda_i < 1, \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por otra parte del Teorema 4.5.3, se tiene que el truncamiento para el máximo error absoluto se puede estimar por

$$\|u(x,t) - u_0 - \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x,t)\| \leq \frac{1}{1-\lambda}\, \lambda^{j+1} \|u_0\|$$

donde $\lambda = \text{máx}\{\lambda_i, i = 0, 1, \ldots, j\}$.

Convergencia del VIM en el fénomeno de onda.

De la comparación del ADM y VIM en la recuperación del fenómeno de onda, encontramos que la solución aproximada dada por VIM es

$$u_i(x,t) = \text{sen}x + (\alpha - 1)\,\text{sen}x \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}.$$

Vamos a estudiar la convergencia de esta solución aproximada para $0 < t < 1$. Usando la Eq.(4.5.14) vemos que

$$\lambda_i = \frac{\left\| \text{sen}x + (\alpha - 1)\,\text{sen}x \sum_{n=1}^{i+1} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \right\|}{\left\| \text{sen}x + (\alpha - 1)\,\text{sen}x \sum_{i=1}^{i} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right\|} \leq \frac{\left\| 1 + (\alpha - 1) \sum_{n=1}^{i+1} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right\|}{\left\| 1 + (\alpha - 1) \sum_{n=1}^{i} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \right\|}$$

$$\leq \frac{\left\| \cancel{(\alpha-1)}(-1)^{i+1}\frac{t^{(i+1)\alpha}}{\Gamma((i+1)\alpha+1)} \right\|}{\left\| \cancel{(\alpha-1)}(-1)^{i}\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \right\|} = \left\| t^{\alpha}\frac{\Gamma(i\alpha+1)}{\Gamma(i\alpha+\alpha+1)} \right\| \leq 1,$$

cuando por ejemplo, $i > 10$ y $0{,}5 < \alpha \leq 1$. Si consideremos $0 < t \leq a$ y $\alpha > 0$, podemos mostrar que el VIM converge a la solución exacta para todo $a > 0$ si

$$\lambda_i = \left\| t\frac{(i)!}{(i+1)!} \right\| < \frac{a}{i+1} < 1, \quad para \quad i > a.$$

Convergencia del VIM para la BF.

Del Ejemplo 1, calculamos las aproximaciones dadas por el VIM para la BF $0 < \alpha \leq 1$ y encontramos que se tiene que

$$u_0 = u(x,0) = g(x),$$

$$u_1 = g(x) - [gg' - g'']\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2 = u_1 + (2g(g')^2 + g^2g'' - 2gg^{(3)} - 4g'g'' + g^{(4)})\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}$$

$$-(gg' - g'')[(g')^2 + gg'' - g^{(3)}]\frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)}\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \tag{4.5.15}$$

$$\vdots$$

Vamos a estudiar la convergencia de este método para la BF teniendo en cuenta la condicion inicial usada en la comparación del VIM y ADM para la BF. Usando la Eq.(4.5.14) vemos que

$$\lambda_0 = \frac{\|u_1\|}{\|u_0\|} = \frac{\left\| g - [gg' + g'']\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + (2g(g')^2 + g^2g'' + 2gg^{(3)} + 4g'g'' + g^{(4)})\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right\|}{\|g\|}$$

y teniendo en cuenta que $g'' < 0$, $g^{(4)} < 0$ en esta comparación, puede verse que

$$g \geq [gg' + g'']\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(2g(g')^2 + g^2g'' + 2g2g^{(3)} + 4g'g'' + g^{(4)}\right)\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}$$

de donde tenemos que $\lambda_0 \leq \dfrac{\|g\|}{\|g\|} = 1$. Teniendo en cuenta las aproximaciones u_1 y u_2 analogamente con el anterior cálculo observamos que

$$\lambda_1 = \frac{\|u_2\|}{\|u_1\|} \leq \frac{1}{\left\| -(gg' + g'')((g')^2) + gg'' + g^{(3)} \dfrac{\Gamma(1+2\alpha)\, t^{3\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+3\alpha)} \right\|} \leq 1$$

esto confirma que el VIM converge para la solución exacta de BF para $0 < \alpha \leq 1$ y en $0 < t < 1$.

Conclusiones y perspectivas

Las EDOF y EDPF son una generalización en forma y solución de las EDO y EDP en el sentido que estas últimas y sus soluciones son casos particulares de las primeras. El desarrollo histórico de estas se hizo paralelamente junto con el desarrollo de las ecuaciones diferenciales de orden entero, pero en avances mas lentos, debido a la complejidad de las herramientas usadas para desarrollar la teoría de dichas ecuaciones que abordara la solución de ellas, mas sin embargo se destaca que matemáticos de la talla de L'Hôpital, Leibniz, Riemman, Abel, Heaviside, Erdélyi, Kober, Liouville entre otros se interesaran en darle sentido al cálculo fraccional usado en las EDOF y EDPF en sus inicios. Ya en el siglo XX aparecen aplicaciones ajustadas a la realidad cientifica del momento y investigadores como Mainardi, Gorenflo, Podlubny, Gazizov, Caputo, Odibat, Momami, Srivastava, Tenreiro, Trujillo, Wang, Ortigueira, Delfin,entre otros se han dedicado a resolver diversos tipos de EDOF y EDP que se ajustan a modelos de viscoelasticidad, difusión, onda, de ondas viajeras, de advencción, etc. En Brasil el profesor Edmundo Capelas de Oliveira, ha orientado diversas tesis relacionadas al estudio de las EDOF y EDPF, siendo esta la primera tésis de doctorado que orienta y trabaja alrededor de las EDOF y EDPF no lineales. No se encontro un registro historico en la WEB de tésis en Português o Español que tegan como objetivo principal estudiar las EDOF o EDPF no lineales.

Diferentes métodos se pueden usar para estudiar las EDOF y EDPF, entre estos tenemos, la transformada de Laplace, la teoría de funciones de Green, en general la teoría de transformadas, la teoría de grupos de Lie, la función de Mittag-Leffler, las funciones H de Fox, las funciones hipergeométricas, splines, los métodos semianáliticos como ADM, VIM, homotopía, técnica de transformación diferencial, teoría fractal, etc. En diferentes contextos de la tésis se uso la teoría de transformada de Laplace, de funciones de Green, las funciones de Mittag-Leffler, funcion H de Fox, las EDO y EDP, la teoría de simétrias de Lie, los métodos semianáliticos de ADM y VIM, enfatizando en estas ultimas teorías

que envuelven aspectos no lineales de las EDPF.

Nuestras EDOF y EDPF fueron estudiadas usando en casi todo la tesis la derivada fraccional de Caputo en el tiempo, ya que con esta definición se puede usar la TL sin depender de la integral fraccional que aparece cuando se usa la TL de RL , mas sin embargo tambien fue usada la derivada de RL cuando se uso simétrias de Lie para llevar una EDPF no lineal a una EDOF no lineal.

En particular el método de la transformada de Laplace es muy poderoso para resolver EDOF y EDP lineales, relacionadas con modelos de relajación-oscilación, de difusión-onda. Modelos que permiten recuperar las clásicas casos y sus soluciones de decrecimiento, oscilamiento y de calor, onda respectivamente y que muestran como la teoria de trasformadas y de funciones de Green se pueden generalizar al caso fraccional. Encontramos tambien que la teoría de simétrias de Lie puede generalizarse al caso fraccional definiendo el infinitesimal extendido fraccional para encontrar las respectivas simétrias de una EDPF, este hecho permitio abordar la solución de EDPF no lineales, mas se percibio que la contribución teórica es significativa cuando la EDPF se puede llevar por simétrias a una EDOF expresada en término de los operadores de Erdélyi-Kober; pero cuando se buscan soluciones exactas desde esta última ecuación, la manipulación de dichos operadores se hace compleja y por tanto no en todos las EDPF se pueden encontrar soluciones exactas. Es de aqui que se piensa en usar otros métodos que permitan a lo menos, aproximar las soluciones con cierta precisión y entonces pasamos a estudiar el ADM y VIM métodos muy potentes que permiten abordar este estudio para EDO, EDP, EDOF y EDPF. Vimos que el ADM es eficiente y preciso, mas en EDOF y EDPF no lineales depende de los polinomios de Adomian, que son costosos de calcular numéricamente y difíciles de calcular teoricamente, por esto se prefirio concentrarse en estudiar el VIM, método que combina la clásica teoría del calculo variacional, con las EDO, EDP, EDOF y EDPF, siendo bastante eficiente y práctico para la aproximación de sus soluciones, sin depender mas que del cálculo de los multiplicadores de Lagrange del funcional de correción variacional asociado a la EDPF.

En este punto podemos hablar de los aportes que se hicieron desde esta tésis cuando usamos estos diferentes métodos. El primero es el trabajo monográfico de recuperar, discutir y desglosar diversos ejemplos por medio de calculos explicitos, figuras y cuadros numéricos, el segundo es la creación de otros ejemplos donde se aborda la aproximación

de soluciones de EDPF como se hizo en las aproximaciones de la solución de la BF, en la recuperación de la memoria del fenómeno de difusión, onda y en la comparación del VIM con el ADM para la BF, en estos tres, las condiciones iniciales fueron impuestas para comparar las aproximaciones del VIM y ADM con el caso entero, encontrando que el VIM converge mas rapidamente y con menos costo computacional a las soluciones exactas que el ADM. En cuanto a los aportes teóricos de la tesis, podemos mencionar inicialmente la demostración de aquel Teorema 3.2.1 que lleva la EDPF no lineal Korteweg-de Vries a una EDOF no lineal que usa los operadores de Erdélyi-Kober, el establecimiento de un lema y dos corolarios para calcular los multiplicadores de Lagrange de la BF con sus respectivas aplicaciones en el capítulo cinco, proporcionamos también dos teoremas que da las condiciones necesarias para la convergencia del VIM a la solución exacta y otro teorema mas para el respectivo error máximo que se puede encontrar cuando el VIM se detiene en el n-esima iteración, aplicamos estos teoremas en dos ejemplos.

Finalmente vamos a mencionar posibles rutas de estudio de las EDPF. En primer lugar un estudio riguroso de la precisión de las aproximaciones del VIM y el ADM cuando las variables x y t crecen en un intervalo determinado hasta acercarse a su valor entero. Otro trabajo es estudiar los métodos numéricos que permitan resolver una EDOF no lineal que contengan los operadores de Edérlyi-Kober. Encontramos que la convergencia del VIM depende de las condiciones iniciales, seria importante comparar la precisión, eficiencia del VIM entre diferentes formas de tomar las condiciones iniciales. Se puede estudiar otros métodos semianáliticos como homotópia, de subecuaciones para comparar con el VIM y ADM, en busqueda de eficacia e eficiencia computacional en las aproximaciones de soluciones de EDOF y EDPF no lineales. Debemos mencionar que se pueden hacer posibles estudios de tipo matemático y numérico [107] o de tipo variacional [108] que no han sido muy estudiados en EDPF y que tienen un amplio espectro de trabajo por ejemplo el estudio de existencia y unicidad de las soluciones de diversas EDPF y el uso de herramientas numéricas conocidas como los elementos finitios, las diferencias divididas para aproximar soluciones de EDPF.

Bibliografia

[1] R. Figueiredo Camargo y E. Capelas de Oliveira, "Cálculo fracionário", *Editora Livraria da Física, São Paulo*, (2015).

[2] A. Kilbas y M. Saigo, "Solution of Abel integral equations of the second kind and differential equations of fractional order", *Reports of the Academy of Sciences of Belarus,* **39***, 29-34*, (1995).

[3] L. Debnath y D. Bhatta, *Integral transforms and their applications*. CRC press, London, (2014).

[4] S. L. Kalla y V. Kiryakova, "An H-function generalized fractional calculus based upon compositions of Erdelyi-Kober operators", *Math. Japonica,* **35***, 1151-1171*, (1990).

[5] M. Riesz, "L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy", *Acta Math.* **81***, 1-222*, (1949).

[6] R. L. Bagley, "Applications of generalized derivatives to viscoelasticity.", DTIC Document, inf. téc., 1979.

[7] M. Caputo y F. Mainardi, "Linear models of dissipation in anelastic solids", *La Rivista del Nuovo Cimento.* **1***, 161-198*, (1971).

[8] F. Mainardi, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models*. World Scientific, Udine, (2010).

[9] ——, "Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena", *Chaos, Solitons & Fractals.* **7***, 1461-1477*, (1996).

[10] R Gorenflo, *Fractional calculus: Some numerical methods, the book Fractals and fractional calculus*. eds.: Carpinteri y Mainardi, New York, 1997.

[11] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Mathematics in Science y Engineering, New York. **198**, (1999).

[12] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava y J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier Science Limited, New York. **204**, (2006).

[13] K. Oldham y J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Dover Publications, New York, (2006).

[14] J. Sabatier, O. P. Agrawal y J. A. Tenreiro Machado, "Advances in fractional calculus", *Springer, New York.* **4**, (2007).

[15] S. Wang, M. Xu y X. Li, "Advances in fractional calculus", *Nonlin. Anal.: Real World Appl.* **10***, 1081-1086*, (2009).

[16] A. M. Wazwaz, "The variational iteration method: A reliable analytic tool for solving linear and nonlinear wave equations", *Comp. Math. Appl.* **54**, *926-932*, (2007).

[17] ——, "The variational iteration method: A powerful scheme for handling linear and nonlinear diffusion equations", *Comp. Math. Appl.* **54**, *933-939*, (2007).

[18] H. Ozer, "Application of the variational iteration method to the boundary value problems with jump discontinuities arising in solid mechanics", *Int. J. Nonlin. Sci. Num. Simulat.* **8**, *513-518*, (2007).

[19] H. Sheng, Y. Li e Y. Chen, "Application of numerical inverse Laplace transform algorithms in fractional calculus", *J. Franklin Institute,* **348**, *315-330*, (2011).

[20] M. Ruiz-Medina, J. Angulo y V. Anh, "Scaling limit solution of a fractional Burgers equation", *Stochastic processes and their applications,* **93**, *285-300*, (2001).

[21] T. Hayat, M. Khan y S. Asghar, "On the mhd flow of fractional generalized Burgers' fluid with modified darcy's law", *Acta Mech Sinica.* **23**, *257-261*, (2007).

[22] S. H. A. M. Shah, "Some helical flows of a Burgers' fluid with fractional derivative", *Meccanica.* **45**, *143-151*, (2010).

[23] Y. Chen y H.-L. An, "Numerical solutions of coupled Burgers equations with time- and space-fractional derivatives", *Appl. Math. Comput.* **200**, *87-95*, (2008).

[24] X.-J. Yang, J. A. Tenreiro Machado y J. Hristov, "Nonlinear dynamics for local fractional burgers' equation arising in fractal flow", *Nonlinear Dynamics.* **84**, *1-5*, (2015).

[25] Z. Odibat y S. Momani, "The variational iteration method: An efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics", *Comp. Math. Appl.* **58**, *2199-2208*, (2009).

[26] M. Inokuti, H. Sekine y T. Mura, "General use of the Lagrange multiplier in nonlinear mathematical physics", *Variational method in the mechanics of solids.* **33**, *156-162*, (2013).

[27] W. Deng, "Short memory principle and a predictor–corrector approach for fractional differential equations", *J. Comput. Appl. Math.* **206**, *174-188*, (2007).

[28] K. Diethelm y N. J. Ford, "Multi-order fractional differential equations and their numerical solution", *Appl. Math. Comput.* **154**, *621-640*, (2004).

[29] F. Liu, V. Anh e I. Turner, "Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation", *J. Comp. Appl. Math.* **166**, *209-219*, (2004).

[30] E. Capelas de Oliveira, F. Mainardi y J. Vaz Jr, "Fractional models of anomalous relaxation based on the Kilbas and Saigo function, diffusion equations", *Meccanica.* **9**, *2049-2060*, (2014).

[31] D. Baleanu, J. A. T. Machado y A. C. Luo, *Fractional dynamics and control.* Springer Science & Business Media, New York, (2011).

[32] R. Gazizov, A. Kasatkin, F. A. D. Lukashchuk S Yu e Y. Luchko, "Symmetry properties of fractional diffusion equations", *Physica Scripta.* **2009**, *014016*, (2009).

[33] R. Figueiredo Camargo, "Cálculo fracionário e aplicações.", Tesis doct., Universidade Estadual de Campinas, (2009).

[34] F. Silva Costa, "Função H de Fox e aplicações no cálculo fracionário", Tesis doct., Universidade Estadual de Campinas, (2011).

[35] E. Contharteze Grigoletto, "Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler", Tesis doct., Universidade Estadual de Campinas, (2014).

[36] F. Grangeiro Rodrigues, "Sobre cálculo fracionário e soluções da equação de Bessel", Tesis doct., Universidade Estadual de Campinas, (2015).

[37] K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed e Y. Luchko, "Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **194**, *743-773*, (2005).

[38] A. M. Mathai, R. K. Saxena y H. J. Haubold, "The H-function: Theory and applications", *Springer Science & Business Media, New York*, (2009).

[39] F. Mainardi, Y. Luchko y G. Pagnini, "The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation", *Frac. Cal. Appl. Anal.* **4**, *153-192*, (2001).

[40] A. Gómez Plata y E. Capelas de Oliveira, eds., *Equações diferenciais ordinarias fracionárias, Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, XXXV CNMAC, Natal-RN*, (2014).

[41] F. Silva Costa, J. C. Alves Soares, A. R. Gómez Plata y E. Capelas de Oliveira, "On the fractional Harry-Dym equation", *J. Math. Phys.* **Submit**, (2016).

[42] N. H. Ibragimov, "Crc handbook of Lie group analysis of differential equations", *CRC Press, New York*, (1995).

[43] R. Gazizov, A. Kasatkin y S. Y. Lukashchuk, "Continuous transformation groups of fractional differential equations", *Vestnik USATU.* **9**, *21*, (2007).

[44] L. Gagnon y P. Winternitz, "Lie symmetries of a generalised nonlinear Schrödinger equation: I. the symmetry group and its subgroups", *J. Phys. A.: Math. Gen.* **21**, *1493*, (1998).

[45] N. K. Ibragimov, "Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations", *Wiley, New York*, (1999).

[46] I. Krasil'shchik y A. Vinogradov, "Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics", *Bull. Amer. Math. Soc.* **37**, *369-371*, (2000).

[47] L. Gagnon y P. Winternitz, "Lie symmetries of a generalised non-linear schrodinger equation. II. exact solutions", *J. Phys. A.: Math Gen.* **22**, *469*, (1989).

[48] P. E. Hydon, "Symmetry methods for differential equations: A beginner's guide", *Cambridge University Press, New York*, (2000).

[49] G. W. Bluman, A. F. Cheviakov y S. C. Anco, "Applications of symmetry methods to partial differential equations", *Springer, New York*, (2010).

[50] D. dos Santos de Oliveira, "Derivada fraccionária e as funções de Mittag-Leffler", *Dissertação de mestrado em matemática aplicada. Universidade Estadual de Campinas*, (2014).

[51] R. Sahadevan y T. Bakkyaraj, "Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg-de Vries equations", *J. Math. Anal. Appl.* **393**, *341-347*, (2012).

[52] J. A. Tenreiro Machado, D. Baleanu y A. C. Luo, "Discontinuity and Complexity in Nonlinear Physical Systems", *Springer, Londres*, (2014).

[53] Y. Zhang, "Formulation and solution to time-fractional generalized Korteweg-de Vries equation via variational methods", *Adv. Diff. Equat.* **2014**, *1-12*, (2014).

[54] R. L. Bagley y P. J. Torvik, "Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures", *AIAA journal.* **23**, *918-925*, (1985).

[55] M. Dehghan, J. Manafian y A. Saadatmandi, "Solving nonlinear fractional partial differential equations using the homotopy analysis method", *Num. Meth. Part. Diff. Equat.* **26**, *448-479*, (2010).

[56] M. Khan, S. H. Ali y H. Qi, "On accelerated flows of a viscoelastic fluid with the fractional Burgers' model", *Nonl. Anal.: Real World Appl.* **10**, *2286-2296*, (2009).

[57] S. El-Wakil, E. M. Abulwafa, E. El-Shewy y A. A. Mahmoud, "Time-fractional KdV equation for plasma of two different temperature electrons and stationary ion", *Phys. Plasmas.* **18**, *092116*, (2011).

[58] G. Wang, X. Liu e Y. Zhang, "Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation", *Comm. Nonl. Sci. Num. Simulat.* **18**, *2321-2326*, (2013).

[59] V. D. Djordjevic y T. M. Atanackovic, "Similarity solutions to nonlinear heat conduction and Burgers/Korteweg-deVries fractional equations", *J. Comput. Appl. Math.* **222**, *701-714*, (2008).

[60] M. Gaur y K. Singh, "On group invariant solutions of fractional order Burgers-Poisson equation", *Appl. Math. Comput.* **244**, *870-877*, (2014).

[61] M. Khan, A. Anjum, C. Fetecau y H. Qi, "Exact solutions for some oscillating motions of a fractional Burgers' fluid", *Math. Comp. Modell.* **51**, *682-692*, (2010).

[62] G. Wang y T. Xu, "Invariant analysis and explicit solutions of the time fractional nonlinear perturbed Burgers equation", *Nonlin. Anal.* **20**, *570-584*, (2015).

[63] A. R. Gómez Plata y E. Capelas de Oliveira, eds., *Invariant analysis of the time Fractional Korteweg-de Vries equation, lecture in the ICMC Summer Meeting on Differential Equations, Universidade de São Paulo, São Carlos*, (2015).

[64] E. Buckwar e Y. Luchko, "Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations", *J. Math. Anal. Appl.* **227**, *81-97*, (1998).

[65] G. Wang y T. Xu, "Symmetry properties and explicit solutions of the nonlinear time fractional KdV equation", *Boundary Value Problems.* **2013**, *232*, (2013).

[66] G Adomian, "Solving frontier problems of physics: The decomposition method", *Klumer, Boston*, (1994).

[67] N. Himoun e Y. Abbaoui K. y Cherruault, "New results of convergence of adomian's method", *Kybernetes.* **28**, *423-429*, (1999).

[68] S. S. Ray y R. Bera, "Analytical solution of a fractional diffusion equation by Adomian decomposition method", *Appl. Math. Comput.* **174**, *329-336*, (2006).

[69] S. Momani, "An explicit and numerical solutions of the fractional KdV equation", *Math. Compu. Simulat.* **70**, *110-118*, (2005).

[70] N. T. Shawagfeh, "Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations", *Appl. Math. Comput.* **131**, *517-529*, (2002).

[71] J. Song, F. Yin, X. Cao y F. Lu, "Fractional variational iteration method versus Adomian's decomposition method in some fractional partial differential equations", *J. Appl. Math.* **10**, *392567*, (2013).

[72] A. Ghorbani y J. Saberi-Nadjafi, "He's homotopy perturbation method for calculating Adomian polynomials", *Int. J. Nonlin. Sci. Num. Sim.* **8**, *229-232*, (2007).

[73] S. Momani, "Non-perturbative analytical solutions of the space-and time-fractional Burgers equations", *Chaos, Solitons & Fractals.* **28**, *930-937*, (2006).

[74] J.-H. He, "Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **167**, *57-58*, (1998).

[75] ——, "Variational iteration method a kind of non-linear analytical technique: Some examples", *Int. J. Non-lin. Mech.* **34**, *699-708*, (1999).

[76] ——, "Variational iteration method—some recent results and new interpretations", *J. Comput. Appl. Math.* **207**, *3-17*, (2007).

[77] J.-H. He y X.-H. Wu, "Variational iteration method: New development and applications", *Comp. Math. Appl.* **54**, *881-894*, (2007).

[78] G. Drăgănescu, "Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives", *J. Math. Phys.* **47**, *082902*, (2006).

[79] Z. O. Momani, "Applications of variational iteration and homotopy perturbation methods to fractional evolution equations", *Topol. Meth. Nonlin. Anal.* **31**, *227-234*, (2008).

[80] G.-C. Wu, "Applications of the variational iteration method to fractional diffusion equations: Local versus nonlocal ones", *Int. Rev. Chem. Eng.* **4**, *505-510*, (2012).

[81] J.-H. He y E Lee, "Solution of fractional vibration equation by the variational iteration method and modified decomposition method", *Int. J. Nonlin. Sci. Num. Simulat.* **9**, *361-366*, (2008).

[82] J.-H. He y E. Lee, "Variational principle for the differential–difference system arising in stratified hydrostatic flows", *Phys. Lett. A.* **373**, *1644-1645*, (2009).

[83] R. Mokhtari, "Variational iteration method for solving nonlinear differential-difference equations", *Int. J. Nonl. Sci. Num. Simulat.* **9**, *19-24*, (2008).

[84] M. Santander, "Introducción al cálculo variacional", *Apuntes de Física Teórica. Departamento de Física Teórica, Universidad de Valladolid*, (2003).

[85] L. Campos, "On the solution of some simple fractional differential equations", *Int. J. Math. Math. Sci.* **13**, *481-496*, (1990).

[86] Z. Odibat y S. Momani, "Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order", *Int. J. Nonlin. Sci. Num. Simulat.* **7**, *27-34*, (2006).

[87] S. Momani y Z. Odibat, "Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics", *Phys. Lett. A.* **355**, *271-279*, (2006).

[88] Q. Wang, "Homotopy perturbation method for fractional KdV-Burgers equation", *Chaos, Solitons & Fractals.* **35**, *843-850*, (2008).

[89] G.-C. Wu y D. Baleanu, "Variational iteration method for the Burgers' flow with fractional derivatives new Lagrange multipliers", *Appl. Math. Model.* **37**, *6183-6190*, (2013).

[90] N. Sugimoto, "Burgers equation with a fractional derivative; hereditary effects on nonlinear acoustic waves", *J. Fluid Mech.* **225**, *631-653*, (1991).

[91] C. H. Chan, M. Czubak y L. Silvestre, "Eventual regularization of the slightly supercritical fractional Burgers equation", *Discr. Cont. Dyn. Sys.* **27**, *847-861*, (2010).

[92] P. Biler, T. Funaki y W. A. Woyczynski, "Fractal Burgers equations", *J. Diff. Equat.* **148**, *9-46*, (1998).

[93] A. Bhrawy, M. Zaky y D. Baleanu, "New numerical approximations for space-time fractional Burgers' equations via a Legendre spectral-collocation method", *Rom. Rep. Phys,* **67**, *1-13*, (2015).

[94] P. Miškinis, "Some properties of fractional Burgers equation", *Math. Modell. Anal.* **7**, *151-158*, (2002).

[95] N. Alam Khan, A. Ara y A. Mahmood, "Numerical solutions of time-fractional Burgers equations: A comparison between generalized differential transformation technique and homotopy perturbation method", *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow,* **22**, *175-193*, (2012).

[96] J. Liu y G. Hou, "Numerical solutions of the space-and time-fractional coupled Burgers equations by generalized differential transform method", *Appl. Math. Comput.* **217**, *7001-7008*, (2011).

[97] T. S. El-Danaf y A. R. Hadhoud, "Parametric spline functions for the solution of the one time fractional Burgers' equation", *Appl. Math. Modell.* **36**, *4557-4564*, (2012).

[98] S. H. A. M. Shah y H. Qi, "Starting solutions for a viscoelastic fluid with fractional Burgers' model in an annular pipe", *Nonlin. Anal.: Real World Applications.* **11**, *547-554*, (2010).

[99] M. Khan, S. H. Ali y H. Qi, "Exact solutions of starting flows for a fractional Burgers' fluid between coaxial cylinders", *Nonlin. Anal.: Real World Applications,* **10**, *1775-1783*, (2009).

[100] Y. Jiang, T. Wei y X. Zhou, "Stochastic generalized Burgers equations driven by fractional noises", *J. Diff. Equat.* **252**, *1934-1961*, (2012).

[101] H. A. Ghany y M. Mohammed, "White noise functional solutions for Wick-type stochastic fractional KdV-Burgers-Kuramoto equations", *Chine. J. Phy.* **50**, *619-627*, (2012).

[102] S. El-Wakil, A. Elhanbaly y M. Abdou, "Adomian decomposition method for solving fractional nonlinear differential equations", *Appl. Math. Comput,* **182**, *313-324*, (2006).

[103] A. R. Gómez Plata y E. Capelas de Oliveira, "New Lagrange multipliers for the time fractional Burgers' equation", *J. Comput. Phys.* **Submit**, (2015).

[104] N. Heymans e I. Podlubny, "Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives", *Rheo. Acta.* **45**, *765-771*, (2006).

[105] V. E. Tarasov, "Differential equations with fractional derivative and universal map with memory", *J. Phys. A.: Math. Theor.* **42**, *313-324*, (2009).

[106] A. R. Gómez Plata y E. Capelas de Oliveira, eds., *Variational iteration method in the fractional Burgers equation, lecture in the 6th Internacional Conference on Nonlinear Sciencie and Complexity, National Institute for Space Research, São José dos Campos-Br.* (2016).

[107] M. D. Ortigueira, "Fractional central differences and derivatives", *J. Vibration Control,* **14**, *1255-1266.*, (2008).

[108] A. B. Malinowska y D. F. M. Torres, "Introduction to the fractional calculus of variations", *Imperial College Press, London*, (2012).